

طبیعیات کے اصول

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@hotmail.com

۹ فروری ۲۰۲۲

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
۱	۱ پیش
۷	۱.۱ وقت
۹	۲.۱ کیت
۱۰	۱.۲.۱ کثافت
۱۷	۲ مخفی توانائی اور توانائی کی بقا
۲۱	۱.۰.۲ طاقت
۲۹	۳ مرکز کیت اور خطی معیار حرکت
۲۹	۱.۳ ایک بُند میں لچکی تصادم
۳۱	۲.۳ دو الباد میں تصادم
۳۳	۳.۳ تغیر کیت کا نظام: ہوائی بان
۶۱	۴ گھاؤ
۶۱	۱.۴ گھاؤ کے متغیر
۶۷	۱.۱.۴ کلیدی تصور
۷۲	۲.۴ مستقل اسراع کے ساتھ گھاؤ
۷۵	۳.۴ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ
۸۱	۴.۴ گھاؤ کی حرکتی توانائی
۸۳	۵.۴ گھمیری جہود کا حساب
۸۹	۶.۴ قوت سروڑ
۹۱	۷.۴ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھاؤ
۹۶	۸.۴ کام اور گھمیری حرکتی توانائی
۱۲۳	۵ لڑھکاؤ، قوت سروڑ، اور زاوی معیار حرکت
۱۲۳	۱.۵ مستقیم حرکت اور گھاؤ مسل کر لڑھکاؤ دیتے ہیں

۱۲۶	لڑھکاؤ کی قوتیں اور حرکت کی توانائی	۲.۵
۱۳۱	ڈوری دار لٹو	۳.۵
۱۳۲	قوت سروٹپر نظر ثانی	۴.۵
۱۳۵	زاوی معیار حرکت	۵.۵
۱۳۸	نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ	۶.۵
۱۴۲	استوار جسم کا زاوی معیار حرکت	۷.۵
۱۴۶	زاوی معیار حرکت کی بقا	۸.۵
۱۵۱	مکھن چرخی کی استقبالی حرکت	۹.۵

باب ۵

لڑھکاؤ، قوت سروٹ، اور زاوی معیار حرکت

۵.۱ مستقیم حرکت اور گھماؤ مل کر لڑھکا دیتے ہیں

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے نتائج ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ لڑھکاؤ حوالہ مستقیم حرکت اور حوالہ گھماؤ کا مجموعہ ہے۔
۲. ہموار لڑھکاؤ میں مرکز کیت کی رفتار اور جسم کی زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

• رداس R کے پہیے کے لئے جو ہموار سطح پر لڑھکا رہا ہو ذیل ہوگا:

$$v = \omega R$$

جہاں مرکز کیت v پہیے کے مرکز کیت کی خطی رفتار اور ω پہیے کے وسط پر پہیے کی زاوی رفتار ہے۔

- پہیے کو نقطہ P کے گرد، جو ”مشرش“ کے ساتھ مس ہے، لمحاتی گھومتا تصور کیا جاسکتا ہے۔ مرکز کیت کے گرد اور اس نقطہ کے گرد جسم کی زاوی رفتار برابر ہے۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا باب ۴ میں ذکر کیا گیا، گھماؤ کا مطالعہ طبیعیات میں شامل ہے۔ غالباً، اس مطالعے کا اہم ترین اطلاق پہیے اور پہیے نما اجسام کا لڑھکاؤ ہے۔ یہ اطلاقی طبیعیات بہت عرصے سے استعمال میں ہے۔ قدیم

زمانے میں بھاری اجسام لڑھکاتے ہوئے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیے جاتے تھے۔ آج کل ہم گاڑی میں سامان رکھ کر ایک جگہ سے دوسری جگہ لڑھکاتے ہیں۔

لڑھکاؤ کی طبیعیات اور انجینئری اتنی پرانی ہے کہ اس میں نئے تصور ممکن نظر نہیں آتے۔ تاہم، پیچے دار تحفہ زیادہ پرانا نہیں۔ ہمارا کام یہاں لڑھکاؤ کی حرکت کو سادہ بنانا ہے۔

مستقیم حرکت اور گھومتی حرکت مل کر لڑھکاؤ دیتے ہیں

سطح پر ہمواری سے لڑھکتے اجسام پر یہاں غور کیا جائے گا؛ یعنی جسم بغیر اچھلے یا پھسلے سطح پر حرکت کرتا ہے۔ شکل 2.11 میں ہموار لڑھکاؤ کی پیچیدگی دکھائی گئی ہے: اگرچہ جسم کا مرکز کیت سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، چکا پر نقطہ یقیناً ایسا نہیں کرتا۔ بہر حال، اس حرکت کو مرکز کیت کی مستقیم حرکت اور باقی جسم کا، اس مرکز پر، گھماؤ تصور کیا جاسکتا ہے۔

اسے سمجھنے کے لئے، فرض کریں آپ سڑک کے کنارے کھڑے ہو کر، گزرتے ہوئے سائیکل کے پیچے کا مطالعہ کرتے ہیں (شکل 3.11)۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، پیچے کا مرکز کیت O مستقل رفتار مرکز کیت v سے آگے بڑھتا ہے۔ نقطہ P ، جہاں پہیا سڑک کو مس کرتا ہے، بھی مرکز کیت v رفتار سے آگے بڑھتا ہے، اور یوں P ہمیشہ O کے ٹھیک نیچے رہتا ہے۔

ومتقی دورانیہ t کے دوران، O اور P دونوں فاصلہ s طے کرتے ہیں۔ سائیکل سوار کے نقطہ نظر سے، پہیا زاویہ θ طے کرتا ہے اور جو نقطہ t کے آغاز میں زمین پر ہت قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے۔ مساوات ۵.۱ قوسی فاصلہ s اور زاویہ θ کا تعلق دیتی ہے:

$$(5.1) \quad s = \theta R$$

جہاں R پیچے کا رداس ہے۔ پیچے کے مرکز (یکساں پیچے کا مرکز کیت) کی خطی رفتار مرکز کیت v ہم ds/dt سے جبانہ سکتے ہیں۔ پیچے کے مرکز پر پیچے کی زاوی رفتار $d\theta/dt$ ہوگی۔ یوں R مستقل رکھتے ہوئے، مساوات ۵.۱ کا وقت کے ساتھ تفرق ذیل دیگا۔

$$(5.2) \quad v = \omega R \quad (\text{ہموار لڑھکاؤ حرکت})$$

دونوں کا ملاپ۔ شکل 4.11 میں دکھایا گیا ہے کہ پیچے کی لڑھکنی حرکت حائل مستقیم حرکت اور حائل گھمیری حرکت کا مجموعہ ہے۔ شکل 4a.11 حائل گھمیری حرکت پیش کرتی ہے (جس میں مرکز پر محور گھماؤ ساکن تصور کیا جاتا ہے): پیچے کا ہر نقطہ، مرکز پر، زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ (ایسی حرکت پر باب ۴ میں غور کیا گیا)۔ پیچے کے باہری کنارے (چکا) پر ہر نقطہ کی خطی رفتار مرکز کیت v مساوات ۵.۲ دیتی ہے۔ شکل 4b.11 میں حائل مستقیم حرکت پیش ہے (جس میں تصور کیا جاتا ہے کہ پہیا گھوم نہیں رہا): پیچے کا ہر نقطہ مرکز کیت v رفتار سے دائیں حرکت کرتا ہے۔

شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 مل کر، شکل 4c.11 میں پیش، پیچے کی اصل لڑھکنی حرکت دیتی ہیں۔ حرکات کے ملاپ میں پیچے کا خپلا نقطہ (P) ساکن ہے جبکہ پیچے کا بالانقطہ (T)، کسی بھی دوسرے نقطے سے زیادہ تیز، مرکزیت 2v رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ شکل 5.11 میں ان نتائج کا اشباتی مظاہرہ کیا گیا ہے، جہاں سائیکل کے لڑھکنی پیچے کا وقت ^۲افشا پیش ہے۔ آپ دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پیچے کا بالاحصہ زیادہ تیزی سے حرکت کرتا ہے، چونکہ اس حصے کی تیلیاں مدہم نظر آتی ہیں۔

سطح پر دائری جسم کی ہموار لڑھکنی حرکت کو، شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 کی طرح، حناص گھمیری حرکت اور حناص مستقیم حرکت میں علیحدہ علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔

لڑھکاؤ بطور حناص گھماؤ

شکل 6.11 میں پیچے کا لڑھکاؤ نئے انداز میں پیش کیا گیا ہے؛ جس نقطے پر پہیا سڑک مس کرتا ہے، ”سڑک“ کے اس نقطے سے گزرتی محور پر پہیا گھومتا ہے؛ یہ محور مرکزیت v رفتار سے حرکت میں ہوگی۔ ہم لڑھکاؤ کو، شکل 4c.11 میں نقطہ P سے گزرتی، پیچے کو عموددار، محور پر حناص گھماؤ تصور کرتے ہیں۔ یوں شکل 6.11 میں سمتیات، لڑھکنی پیچے پر نقطوں کی لحاتی سمتی رفتار دیتے ہیں۔

سوال: ساکن مشاہدہ کار اس محور پر سائیکل کے لڑھکنی پیچے کو کیا زاوی رفتار مختص کرے گا؟

جواب: وہی زاوی رفتار ω جو سائیکل سوار مرکزیت کے گرد حناص گھماؤ کا مشاہدہ کرتے ہوئے پیچے کو مختص کرتا ہے۔

اس جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر، ہم ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پیچے کے منسراز کی خطی رفتار تلاش کرتے ہیں۔ پیچے کا رداس R لیتے ہوئے، پیچے کا منسراز شکل 6.11 میں P پر واقع محور سے 2R فاصلے پر ہوگا، لہذا منسراز کی خطی رفتار (مساوات ۱۵.۲ استعمال کر کے) ذیل ہوگی:

$$\text{منسرازیت } v = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v$$

جو شکل 4c.11 کے عین مطابق ہے۔ آپ شکل 4c.11 میں پیش، نقطہ O اور P کی، خطی رفتار کی تصدیق بھی اس طرح کر سکتے ہیں۔

آزمائش ۱

ایک سائیکل کے پچھلے پیچے کا رداس اگلے پیچے کے رداس کا دوگنا ہے۔ (ا) کیا چپلنے کے دوران بڑے پیچے کے منسراز کی خطی رفتار چھوٹے پیچے کے منسراز کی خطی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس کے برابر ہے؟ (ب) کیا پچھلے پیچے کی زاوی رفتار اگلے پیچے کی زاوی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا دونوں برابر ہیں؟

۵.۲ لڑھکاؤ کی قوتیں اور حرکتی توانائی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱. مرکز کیت کی مستقیم حرکتی توانائی اور مرکز کیت کے گرد گھمیری حرکتی توانائی کا مجموعہ حاصل کر کے جسم کی حرکتی توانائی معلوم کر پائیں گے۔

۲. ہمواری کے ساتھ لڑھکنی جسم کی حرکتی توانائی میں تبدیلی اور جسم پر سرانجام کام کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. ہموار لڑھکاؤ (پنڈا بغیر پھسلن) کے لئے، میکانی توانائی کی بقا استعمال کر کے ابتدائی توانائی کی قیمتوں اور اختتامی توانائی کی قیمتوں کا تعلق جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

• ہموار لڑھکنی پیپے کی حرکتی توانائی ذیل ہے،

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

جہاں مرکز کیت پر جسم کا گھمیری جہود مرکز کیت I اور پیپے کی کیت M ہے۔

• اگر پہیا مسرغ کیا جائے، اور پہیا اب بھی ہمواری کے ساتھ لڑھکتا ہے، مرکز کیت کے اسراع مرکز کیت \vec{a} اور مرکز پر زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہوگا۔

$$a = \alpha R$$

• اگر θ زاویہ کے میلان پر پہیا ہمواری کے ساتھ اترتے ہوئے لڑھکتا ہو، اس کا اسراع، میلان کے ہمراہ اوپر رخ محور x پر، ذیل ہوگا۔

$$a = - \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2}$$

لڑھکاؤ کی حرکتی توانائی

آئیں سکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پیپے کی حرکتی توانائی معلوم کریں۔ اگر ہم شکل 6.11 میں نقطہ P سے گزرتی محور پر لڑھکاؤ کو خالص گھم و تصور کریں، تب مساوات ۴.۳۳ ذیل دیگی،

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad (5.3)$$

جہاں P پر واقع محور کے گرد پہیے کا گھمیری جمود I_P اور پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ مساوات ۴.۳۶ کے مسئلہ متوازی محور ($I = I_{\text{مرکزیت}} + Mh^2$) کے تحت ذیل ہوگا،

$$(۵.۴) \quad I_P = I_{\text{مرکزیت}} + MR^2$$

جہاں M پہیے کی کمیت، مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود مرکزیت I ، اور R (پہیے کا رداس) عمود دار فاصلہ h ہے۔ مساوات ۵.۲ کو مساوات ۵.۳ میں ڈال کر:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکزیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

اور مساوات ۵.۲ ($v = \omega R$) استعمال کر کے ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکزیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

حبزو $\omega^2 I_{\text{مرکزیت}}$ کو مرکز کمیت سے گزرتی محور پر پہیے کے لڑھکاؤ سے وابستہ مرکزی توانائی تصور کیا جاسکتا ہے (شکل 4a.11)، اور حبزو مرکزیت $\frac{1}{2} Mv^2$ کو پہیے کے مرکز کمیت کی مستقیم حرکت سے وابستہ مرکزی توانائی تصور کیا جاسکتا ہے (شکل 4b.11)۔ یوں ذیل متاعده ابھرتا ہے۔

لڑھکنی جسم کی دو قسم کی مرکزی توانائیاں ہوں گی: مرکز کمیت پر گھماؤ کی بدولت گھمیری مرکزی توانائی ($\omega^2 I_{\text{مرکزیت}}$) اور مرکز کمیت کی مستقیم حرکت کی بدولت مستقیم مرکزی توانائی ($\frac{1}{2} Mv^2$)۔

لڑھکاؤ کی قوتیں

رگڑ اور لڑھکاؤ

اگر پہیا مستقل رفتار سے لڑھکتا ہو، جیسا شکل 3.11 میں دکھایا گیا ہے، نقطہ تماس P پر پہیا ہرگز نہیں پھسلتا لہذا اس نقطے پر رگڑ نہیں ہوگی۔ تاہم، اگر صافی قوت پہیے کو تیز یا آہستہ کرتی ہو، تب یہ صافی قوت مرکز کمیت کو حرکت کے رخ اسراع مرکزیت \vec{a} بخشنے گی۔ ساتھ ہی پہیا تیز یا آہستہ گھومے گا، لہذا زاوی اسراع α بھی ہوگا۔ ان اسراع کی بدولت پہیا P پر پھسل سکتا ہے۔ یوں P پر رگڑی قوت عمل کرتی ہوئے پہیے کو پھسلنے سے روکتی ہے۔

اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت \vec{f}_s ہوگی اور حرکت ہموار لڑھکاؤ ہوگا۔ ایسی صورت میں، (R مستقل رکھ کر) وقت کے ساتھ مساوات ۵.۲ کا تفرق لے کر خطی اسراع مرکزیت \vec{a} کی قدر اور زاوی اسراع کی قدر α کا تعلق حاصل کر سکتے ہیں۔ بائیں ہاتھ dv/dt مرکزیت d در حقیقت مرکزیت a اور دائیں ہاتھ $d\omega/dt$ در حقیقت α ہے۔ یوں ہموار لڑھکاؤ کے لئے ذیل ہوگا۔

$$(۵.۶) \quad a_{\text{مرکزیت}} = \alpha R \quad (\text{ہموار لڑھکنی حرکت})$$

جب پیسے پر عمل پیرا صافی قوت کی بدولت پہیا پھسلے، تب شکل 3.11 میں P پر حرکی رگڑی قوت f_k عمل کرے گی؛ حرکت تب ہموار لڑھکاؤ نہیں ہوگی، اور مساوات ۵.۶ کا اطلاق نہیں ہوگا۔ اس باب میں صرف ہموار لڑھکنی حرکت پر بات کی جائے گی۔

شکل 7.11 میں، افقی سطح پر دائیں رخ لڑھکتے ہوئے، سائیکل مقابلے کے آغاز کی طرح، پہیا زیادہ تیز گھمایا جاتا ہے۔ زیادہ تیز گھماؤ کی بدولت P پر پہیا پھسل کر بائیں جانب چاہتا ہے۔ نقطہ P پر دائیں رخ رگڑی قوت اس رجحان کا مقابلہ کرتی ہے۔ اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت f_s ہوگی (جیسا دکھایا گیا ہے)، حرکت ہموار لڑھکاؤ ہوگی، اور مساوات ۵.۶ کا اطلاق ہوگا۔ (رگڑ کی غیر موجودگی میں سائیکل مقابلہ ممکن نہیں ہوگا۔)

اگر شکل 7.11 میں پہیا آہستہ کیا جائے، ہمیں شکل دو طرح تبدیل کرنی ہوگی: مرکز کیت کے اسراع مرکز کیت \vec{a} کا رخ اور نقطہ P پر رگڑی قوت f_s کا رخ اب بائیں رخ ہوگا۔

میلان سے نیچے لڑھکاؤ

شکل 8.11 میں گول یکساں جسم، جس کی کیت M اور رداس R ہے، زاویہ θ کے میلان پر ہمواری سے، محور x کے ہمراہ، نیچے لڑھک رہا ہے۔ ہم میلان کے ہمراہ اترائی کے رخ جسم کے اسراع x ، مرکز کیت a کا ریاضی فہرہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ نیوٹن کے قانون دوم کی خطی صورت ($F_{\text{مخفی}} = Ma$) اور زاوی صورت ($\tau = I\alpha$) صورت دونوں استعمال کر کے ایسا کرتے ہیں۔

جسم پر قوتوں کا خاکہ بنانے سے آغاز کرتے ہیں (شکل 8.11)۔

۱. جسم پر تجاذبی قوت \vec{F}_g نشیب وار ہے۔ اس سمتیہ کی دم جسم کے مرکز کیت پر رکھی جاتی ہے۔ میلان کے ہمراہ $F_g \sin \theta$ ہے جو $Mg \sin \theta$ کے برابر ہوگا۔

۲. میلان کو عمود دار حبزو \vec{F}_N ہے۔ یہ حبزو نقطہ تماس P پر عمل کرتا ہے، تاہم شکل 8.11 میں، \vec{F}_N کا رخ تبدیل کیے بغیر، اس کو یوں کھکایا گیا ہے کہ اس کی دم جسم کے مرکز کیت پر ہو۔

۳. نقطہ تماس P پر عمل پیرا سکونی رگڑی قوت f_s میلان کے ہمراہ چڑھائی کے رخ ہے۔ (کیا آپ بتا سکتے ہیں، کیوں؟ اگر P پر جسم پھسلے، وہ اترائی کے رخ پھسلے گا۔ یوں مخالف رگڑی قوت چڑھائی کے رخ ہوگی۔)

ہم شکل 8.11 میں محور x کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم ($F_{\text{مخفی},x} = ma_x$) لکھتے ہیں۔

$$f_s - Mg \sin \theta = Ma_{\text{مخفی},x} \quad (۵.۷)$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور $a_{\text{مخفی},x}$ ، پائے جاتے ہیں۔ (ہم f_s کی قیمت، رگڑی قوت کی زیادہ سے زیادہ قیمت، بلند تر f_s فرض نہیں کر سکتے۔ ہم صرف اتنا جانتے ہیں کہ رگڑی قوت اتنی ہے کہ جسم پھسلتا نہیں اور میلان پر ہمواری سے لڑھکتا اترتا ہے۔)

ہم اب جسم کے مرکز کیت پر جسم کے گھماؤ پر نیوٹن کے قانون دوم کا اطلاق کرتے ہیں۔ پہلے، مساوات ۴.۴۱ ($\tau = r_{\perp} F$) استعمال کر کے مرکز کیت کے لحاظ سے جسم پر قوت سرور f_s رگڑی قوت f_s کے معیار اثر کا بازو R ہے، لہذا اس کی قوت سرور Rf_s ہوگی، جو اس لئے مثبت ہے کہ شکل 8.11 میں یہ جسم کو مخالف

گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ مسرکزکیست کے لحاظ سے قوت \vec{F}_g اور \vec{F}_N کے معیار اثر بازو صفر ہیں، لہذا ان کی قوت سرو صفر ہوں گی۔ جسم کے مسرکزکیست سے گزرتی محور پر نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ $(\tau = I\alpha)$ میں لکھتے ہیں۔

$$(۵.۸) \quad Rf_s = I_{\text{مسرکزکیست}} \alpha$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور α پائے جاتے ہیں۔

جسم ہموار لڑھکتا ہے لہذا مساوات ۵.۶ ($\alpha R =$ مسرکزکیست a) استعمال کر کے نامعلوم مسرکزکیست a اور α کا تعلق کھجاسکتا ہے۔ تاہم، ہمیں ہوشیاری سے کام لینا ہوگا، چونکہ یہاں مسرکزکیست a منفی (محور x پر منفی رخ ہے) اور α مثبت (خلاف گھڑی) ہے۔ یوں مساوات ۵.۸ میں α کی جگہ $-a/R$ مسرکزکیست a ڈال کر f_s کے لئے حل کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۵.۹) \quad f_s = -I_{\text{مسرکزکیست}} \frac{a_{\text{مسرکزکیست}}}{R^2}$$

مساوات ۵.۷ میں f_s کی جگہ مساوات ۵.۹ کا دایاں ہاتھ ڈال کر ذیل ملت ہے۔

$$(۵.۱۰) \quad a_{\text{مسرکزکیست}} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{مسرکزکیست}}/MR^2}$$

اس مساوات کو استعمال کر کے، افق کے ساتھ زاویہ θ کے میلان پر کے ہمراہ لڑھکتے جسم کا خطی اسراع مسرکزکیست a حاصل ہوگا۔

یاد رہے، تجبذنی قوت جسم کو میلان پر اترنے پر مجبور کرتی ہے، تاہم جسم کو گھومنے اور یوں لڑھکنے پر رگڑی قوت مجبور کرتی ہے۔ اگر آپ رگڑ خارج کر دیں (مثلاً، میلان کو تسیل سے چکنا کر کے) یا $Mg \sin \theta$ کو بلند تر f_s سے زیادہ کر دیں، ہموار لڑھکاؤ خارج ہو جائے گا اور جسم لڑھکنے کی بجائے میلان پر پھسل کر اترے گا۔

آزمائش ۲

مترص A اور B ایک جیسے ہیں اور مترشش پر ایک جتنی رفتار سے لڑھکتے ہیں۔ مترص A کے سامنے میلان آتا ہے جس پر یہ زیادہ سے زیادہ h تک پہنچتا ہے۔ مترص B متشل، لیکن بلارگڑ، میلان پر چڑھتا ہے۔ کیا h سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر بلندی تک B پہنچے گا؟

نمونہ سوال ۵.۱: یکساں گیند، جس کی کمیت $M = 6.00 \text{ kg}$ اور رداس R ہے، زاویہ $\theta = 30.0^\circ$ میلان سے، ساکن حالت سے آغاز کر کے، ہموار لڑھکتا اترتا ہے (شکل 8.11)۔

(۱) انتصابی $h = 1.20 \text{ m}$ نیچے زمین کو پہنچتے کر گیند کی رفتار کیا ہوگی؟

کلیدی تصورات

چونکہ صرف تجاذبی قوت، جو بقائی قوت ہے، گیند پر کام سرانجام دیتی ہے، لہذا میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند وزمین نظام کی میکانی توانائی E کی بقا ہوگی۔ میلان سے گیند پر عمود دار قوت گیند کی راہ کو عمودی ہونے کی وجہ سے کوئی کام سرانجام نہیں دیتی۔ گیند پھسلتا نہیں (ہموار لڑھکتا ہے) لہذا رگڑی قوت کوئی توانائی حسی توانائی میں تبدیلی نہیں کرتی۔

یوں میکانی توانائی کی بقا ہوگی $E_f = E_i$:

$$(۵.۱۱) \quad K_f + U_f = K_i + U_i$$

جہاں زیر نوشت f اور i بالترتیب (زمین پر پہنچ کر) اختتامی اور (ساکن حالت) ابتدائی قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ تجاذبی مخفی توانائی کی ابتدائی قیمت $U_i = Mgh$ (جہاں M گیند کی کمیت ہے) اور اختتامی قیمت $U_f = 0$ ہے۔ ابتدائی حسی توانائی $K_i = 0$ ہے اختتامی حسی توانائی جاننے کے لئے اضافی تصور درکار ہے: چونکہ گیند لڑھکتا ہے اس کی حسی توانائی میں مستقیم اور گھیری جزو شامل ہوں گے، جنہیں شامل کرنے کے لئے مساوات ۵.۵ کا دیاں ہاتھ استعمال کرتے ہیں۔

حاجے: مساوات ۵.۱۱ میں ڈالنے سے ذیل حاصل ہوگا:

$$(۵.۱۲) \quad \left(\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 \right) + 0 = 0 + Mgh$$

جہاں گیند کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گیند کا گھمیری جمود مرکز کمیت I ، زمین پر پہنچ کر گیند کی رفتار (جو ہم تلاش کرنا چاہتے ہیں) مرکز کمیت v ، اور زمین پر پہنچ کر زاوی رفتار ω ہے۔

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، ہم مساوات ۵.۲ استعمال کر کے ω کی جگہ R/v مرکز کمیت v پر کر کے مساوات ۵.۱۲ میں نامعلوم متغیرات کی تعداد کم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے، اور جدول 2f.10 سے مرکز کمیت I کی جگہ $\frac{2}{5} MR^2$ ڈال کر مرکز کمیت v کے لئے حل کرنے سے ذیل حاصل ہوگا۔

$$v = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)gh} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)(9.8 \text{ m s}^{-2})(1.20 \text{ m})}$$

$$= 4.10 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{جواب})$$

یاد رہے، جواب M اور R پر منحصر نہیں۔

(ب) میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند پر رگڑی قوت کی مقدار اور رخ کیا ہیں؟

کلیدی تصور

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، مساوات ۵.۹ گیند پر رگڑی قوت دیگی۔

حاجے: مساوات ۵.۹ استعمال کرنے سے قبل ہمیں مساوات ۵.۱۰ سے گیند کا اسراع معلوم کرنا ہوگا۔

$$a_{\text{مرکز کیت } x} = -I_{\text{مرکز کیت}} \frac{a_{\text{مرکز کیت } x}}{R^2} = -\frac{2}{5} MR^2 \frac{a_{\text{مرکز کیت } x}}{R^2} = -\frac{2}{5} Ma_{\text{مرکز کیت } x}$$

$$= -\frac{2}{5} (6.00 \text{ kg})(-3.50 \text{ m s}^{-2}) = 8.40 \text{ N} \quad (\text{جواب})$$

یاد رہے ہمیں کیت M درکار تھی جبکہ رداس R نہیں تھا۔ یوں، 30° میلان پر 6.00 kg ہموار لڑھکتے گیند پر، گیند کے رداس سے قطع نظر، رگڑی قوت 8.40 N ہوگی، تاہم بڑی کیت کی صورت میں رگڑی قوت زیادہ ہوگی۔ □

۵.۳ ڈوری دار لٹو

مقاصد اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے ڈوری دار لٹو کا آزاد جسمی خاکہ بنائیں گے۔
۲. حبان پائیں گے کہ ڈوری دار لٹو، ایسا جسم ہے جو 90° زاویہ میلان پر ہموار اوپر نیچے لڑھکتا ہے۔
۳. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے ڈوری دار لٹو کے اسراع اور گھمیری جمود کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔
۴. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کے دوران ڈوری دار لٹو کی دور میں تناو تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- ڈوری دار لٹو جو ڈور پر اوپر یا نیچے حرکت کرتا ہو کو 90° میلان پر ہموار لڑھکتا جسم تصور کیا جاسکتا ہے۔

ڈوری دار لٹو

ڈوری پر h فاصلہ اتر کر ڈوری دار لٹو کی مخفی توانائی میں mgh کی واقع ہوگی جبکہ اس کی حرکی توانائی کے مستقیم حصہ (مرکز کیت $\frac{1}{2} Mv^2$) اور گھمیری حصہ ($\frac{1}{2} I \omega^2$) میں اضافہ ہوگا۔

ڈوری دار لٹو کی ایک نئی قسم میں ڈور کو دھرے کے ساتھ سخت باندھنے کے بجائے ڈور کو دھرے کے گرد ڈھیرا گھیرا دیا جاتا ہے۔ جب لٹو نیچے اترتے ہوئے ڈور کے پیندا کو ”ٹکراتا“ ہے، دھرے پر ڈور اوپر وار قوت لاگو کر کے لٹو کی نشیبی حرکت روکتی ہے۔ اس کے بعد لٹو صرف گھمیری حرکی توانائی کے ساتھ (دھرا گھیر میں چکر کاٹتا ہوا) گھومتا ہے۔ لٹو ”سوتے ہوئے“ چکر کاٹتا رہتا ہے؛ ڈور کو جھکا دینے پر ڈور دھرے کو پکڑتی ہے، ”لٹو بیدار ہوتا ہے“، اور اوپر چپڑھنا شروع کرتا ہے۔ ڈور کے پیندا پر لٹو کی گھمیری حرکی توانائی (اور یوں سونے کا دورانیہ) بڑھانے کی خاطر لٹو کو ساکن حالت سے روانہ کرنے کی بجائے ابتدائی رفتار مرکز کیت v اور ω کے ساتھ نشیب وار پھینکا جاتا ہے۔

باب ۵. لڑھکاؤ، قوت، سرور، اور زاوی معیار حرکت

ڈور پر نشیب وار اترنے کے دوران لٹوکا خطی اسراع مرکزیت a جاننے کے لئے، شکل 8.11 میں میلان پر اترتے لڑھکتے جسم کی طرح، نیوٹن کا قانون دوم (خطی اور گھمیری روپ میں) استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ماسوائے ذیل، تجزیہ بالکل اسی طرح ہوگا۔

۱. افق کے ساتھ θ زاویے کے میلان پر اترنے کے بجائے ڈوری دار لٹو افق کے ساتھ 90° زاویے کی ڈور پر اترتا ہے۔
 ۲. رداس R کی بیرونی سطح پر لڑھکتے کے بجائے ڈوری دار لٹو رداس R_0 کے دھسے پر لڑھکتا ہے (شکل 9a.11)۔
 ۳. رگڑی قوت f_s کے بجائے، ڈوری دار لٹو کو ڈور کا تناؤ T آہستہ کرتا ہے (شکل 9b.11)۔
- موجودہ تجزیہ بھی مساوات ۵.۱۰ دے گا۔ آئیں مساوات ۵.۱۰ کی ترقیم تبدیل کر کے اور $90^\circ = \theta$ ڈال کر خطی اسراع ذیل لکھتے ہیں:

$$(۵.۱۳) \quad a_{\text{مرکزیت}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{مرکزیت}}/MR_0^2}$$

جہاں لٹو کے مرکزیت پر لٹوکا گھمیری جمود مرکزیت I اور کیت M ہے۔ ڈوری پر اتر چڑھنے کے دوران ڈوری دار لٹو کا اسراع بھی نشیبی اسراع ہوگا۔

۵.۴ قوت سرور پر نظر ثانی

مقاصد

۱. اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔
۲. جان پائیں گے کہ قوت سرور ایک سمتیہ مقدار ہے۔
۳. جان پائیں گے کہ جس نقطہ پر قوت سرور تعین کیا جائے اس کا ذکر صحیحاً کرنا لازم ہے۔
۴. ذرے پر عمل پیرا قوت کی ذرے پر قوت سرور، اکائی سمتیہ ترقیم یا تدر و زاویہ ترقیم کے روپ میں، ذرے کے تعین کر سمتیہ اور قوت سمتیہ کے صلیبی ضرب سے حاصل کر پائیں گے۔
۵. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ متاعده استعمال کر کے قوت سرور کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- تین ابعاد میں، قوت سرور \vec{T} ایک سمتیہ مقدار ہوگی، جو کسی مقررہ نقطہ (عموماً مبدا) کے لحاظ سے تعین کی جاتی ہے؛ اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جہاں \vec{F} ذرے پر لاگو قوت اور \vec{r} کسی مقررہ نقطہ کے لحاظ سے ذرے کا تعین کر سمتیہ ہے، جو ذرے کا مقام دیتا ہے۔

• قوت مسروڑ $\vec{\tau}$ کی مقدار τ ذیل ہوگی:

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp} F$$

جہاں \vec{F} اور \vec{r} کے بیچ زاویہ ϕ ہے، \vec{F} کا عمود دار جزو F_{\perp} ، اور \vec{F} کا معیار اثر کا بازو r_{\perp} ہے۔

• قوت مسروڑ $\vec{\tau}$ کا رخ صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ واعدہ دیگا۔

قوت مسروڑ پر نظر ثانی

باب ۴ میں مقررہ محور کے گرد گھومنے کے قابل استوار جسم کے لئے قوت مسروڑ τ کی تعریف پیش کی گئی۔ ہم قوت مسروڑ کی تعریف کو وسعت دے کر (مقررہ محور کے بجائے) مقررہ نقطہ کے لحاظ سے کسی بھی راہ پر حرکت کرتے ہوئے انفرادی ذرے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ راہ کا دائری ہونا ضروری نہیں، اور ہم قوت مسروڑ کو سمتیہ $\vec{\tau}$ لکھتے ہیں جس کا رخ کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ قوت مسروڑ کی مقدار کلیہ سے اور رخ صلیبی ضرب کے دایاں ہاتھ واعدہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

شکل 10a.11 میں، نقطہ A پر مستوی xy میں ایسا ایک ذرہ دکھایا گیا ہے۔ ذرے پر، مستوی میں قوت، \vec{F} عمل کرتی ہے، اور مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین کر سکتے ہیں۔ مقررہ نقطہ O کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا قوت $\vec{\tau}$ کی تعریف ذیل ہے۔

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{قوت مسروڑ کی تعریف} \quad (5.14)$$

قوت مسروڑ $\vec{\tau}$ کی اس تعریف میں سمتی (صلیبی) ضرب کی تحبیب حصہ 3.3 کے قواعد سے کی جاسکتی ہے۔ $\vec{\tau}$ کا رخ جاننے کے لئے، سمتیہ \vec{F} کو (رخ تبدیل کیے بغیر) کھسکا کر اس کی دم مبدا O پر رکھی جاتی ہے، یوں، جیسا شکل 10b.11 میں دکھایا گیا ہے، سمتی ضرب کے دونوں سمتیات کی دم ایک نقطہ پر ہوگی۔ اب ہم شکل 19a.3 میں پیش دایاں ہاتھ واعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چپ انگلیاں \vec{r} پر رکھ کر (ضرب میں پہلا سمتیہ ہے) \vec{F} کی طرف بکھاتے ہیں (جو ضرب میں دوسرا سمتیہ ہے)۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\tau}$ کا رخ دیگا۔ شکل 10b.11 میں $\vec{\tau}$ کا رخ محور z کے مثبت رخ ہے۔

$\vec{\tau}$ کی مقدار جاننے کے لئے، ہم مساوات 27.3 ($c = ab \sin \phi$) کا عمومی نتیجہ بروئے کار لاتے ہیں، جو ذیل دیگا:

$$\tau = rF \sin \phi \quad (5.15)$$

جہاں \vec{r} اور \vec{F} کے دم ایک نقطہ پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 10b.11 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.15 ذیل لکھی جاسکتی ہے:

$$\tau = rF_{\perp} \quad (5.16)$$

جہاں F_{\perp} (جو $F \sin \phi$ کے برابر ہے) \vec{F} کا عمود دار جزو ہے۔ شکل 10c.11 کو دیکھ کر مساوات 5.15 ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے:

$$\tau = r_{\perp} F \quad (5.17)$$

باب ۵. لڑھکاؤ، قوت، سرور، اور زاوی معیار حرکت

جہاں $r_{\perp} r \sin \phi$ (جو r کے برابر ہے) \vec{F} کا معیار اثر کا بازو (\vec{F} کے خط عمل اور O کے بیچ عمود دار فاصلہ) ہے۔

آزمائش ۳

ذرے کا تعین گر سمتیہ \vec{r} ، مثبت محور z کے ہمراہ پایا جاتا ہے۔ اگر ذرے پر قوت سرور (۱) صفر ہو، (ب) محور x کے منفی رخ ہو، اور (ج) محور y کے منفی رخ ہو، قوت سرور پیدا کرنے والی قوت کا رخ کیا ہوگا؟

نمونی سوال ۵.۲: قوت کے بدولتے ذرے پر قوت سرور

شکل 11a.11 میں، 2.0 N قدر کی تین قوت ذرے پر عمل کرتی ہیں۔ ذرہ، مستوی xy میں، نقطہ A پر ہے، جس کا تعین گر سمتیہ \vec{r} جہاں $r = 3.0 \text{ m}$ اور $\theta = 30^\circ$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ہر قوت کی انفرادی قوت سرور کیا ہے؟

کلیدی تصویر

چونکہ قوت ایک مستوی میں نہیں پائی جاتیں، ہمیں صلیبی ضرب استعمال کرنا ہوگی، جس کی قدر مساوات ۵.۱۵ ($\tau = rF \sin \phi$) دیگی اور رخ دایاں ہاتھ متعده دیگا۔

حماچہ: ہم مبدا O کے لحاظ سے قوت سرور جاننا چاہتے ہیں لہذا دیا گیا تعین گر سمتیہ صلیبی ضرب میں درکار سمتیہ \vec{r} ہوگا۔ قوت اور \vec{r} کے بیچ زاویہ ϕ جاننے کے لئے ہم شکل 11a.11 میں دیے گئے سمتیہ قوت باری باری یوں کھسکاتے ہیں کہ ان کی دم O پر ہو۔ امتثال کے بعد قوت \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، اور \vec{F}_3 بالترتیب شکل 11b.11، شکل 11c.11، اور شکل 11d.11 میں، جو مستوی xz کا نظارہ دیتی ہیں، دکھائی گئی ہیں (جن میں سمتیہ قوت اور تعین گر سمتیہ کے بیچ زاویے باآسانی نظر آتے ہیں)۔ شکل 11d.11 میں \vec{r} اور \vec{F}_3 کے رخ کے بیچ زاویہ 90° ہے اور علامت \otimes کہتی ہے \vec{F}_3 صفحہ میں عمود دار اندر رخ ہے۔ (صفحہ سے عمود دار نکلنے کی صورت میں \odot علامت استعمال کی جاتی ہے۔)

مساوات ۵.۱۵ استعمال کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\tau_1 = rF_1 \sin \phi_1 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 150^\circ) = 3.0 \text{ N m}$$

$$\tau_2 = rF_2 \sin \phi_2 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 120^\circ) = 5.2 \text{ N m}$$

$$\tau_3 = rF_3 \sin \phi_3 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 90^\circ) = 6.0 \text{ N m} \quad (\text{جواب})$$

اب دائیں ہاتھ متعده استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چپا انگلیاں \vec{r} کے رخ رکھ کر \vec{F} کے رخ (سمتیات کے رخ کے بیچ چھوٹے زاویے) گھماتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کا انگوٹھا، جو چپا انگلیوں کو عمود دار رکھا گیا ہے، قوت سرور کا رخ دیگا۔ یوں \vec{r}_1 شکل 11b.11 میں صفحہ کے اندر جانے کے رخ ہوگا؛ \vec{r}_2 شکل 11c.11 میں صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہوگا؛ اور \vec{r}_3 کا رخ شکل 11d.11 میں دکھایا گیا ہے۔ تینوں قوت سرور سمتیات شکل 11e.11 میں پیش ہیں۔ □

۵.۵. زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے فتاویل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ زاوی معیار حرکت ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس مقررہ نقطے کے لحاظ سے زاوی معیار حرکت تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. اکائی سمتیہ ترقیم یا تدر و زاویہ ترقیم میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور معیار حرکت سمتیہ کا صلیبی ضرب لے کر ذرے کا زاوی معیار حرکت تعین کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ وعدہ استعمال کر کے زاوی معیار حرکت کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

• ایک ذرہ، جس کا خطی معیار حرکت \vec{p} ، کمیت m ، اور خطی سمتی رفتار \vec{v} ہو، کا مقررہ نقطے کے لحاظ سے (جو عموماً مبدا ہوگا) زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی تعریف ذیل سمتی مقدار ہے۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

• زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر ℓ ذیل ہوگی:

$$\begin{aligned}\ell &= rmv \sin \phi \\ &= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \\ &= r_{\perp} p = r_{\perp} mv\end{aligned}$$

جہاں \vec{r} اور \vec{p} کے بیچ زاویہ ϕ ہے، \vec{r} کو \vec{p} اور \vec{v} کے عمود دار جزو p_{\perp} اور v_{\perp} ہیں، اور مقررہ نقطے سے مبسوط \vec{p} تک عمود دار فاصلہ r_{\perp} ہے۔

• دایاں ہاتھ وعدہ $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا: دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں \vec{r} کے رخ پر (ابتدائی طور) رکھ کر انہیں گھما کر \vec{p} کے رخ پر رکھیں۔ دائیں ہاتھ کا سیدھا کھڑا گھوش $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا۔

زاوی معیار حرکت

یاد کریں، خطی معیار حرکت \vec{p} اور خطی معیار حرکت کی بقا کا اصول انتہائی طاقتور اوزار ہیں۔ انہیں استعمال کر کے نتائج کی، مثلاً دو گاڑیوں کے تصادم کی تفصیل جانے بغیر تصادم کی، پیچیدگی کی جاسکتی ہے۔ یہاں ہم \vec{p} کے زاوی مدد متاثر پر تبصرہ شروع کرتے ہیں جس کا اختتام حصہ 8.11 میں بقائی اصول کے مدد متاثر پر ہوگا۔

شکل 12.11 میں مستوی xy میں نقطہ A سے کیت m اور خطی معیار حرکت \vec{p} ($m\vec{v} = \vec{p}$) کا ذرہ گزرتا دکھایا گیا ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا زاوی معیار حرکت ℓ سمتیہ مقدار ہوگا جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\ell = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\text{زاوی معیار حرکت کی تعریف}) \quad (5.18)$$

جہاں O کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ \vec{r} ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے جب ذرہ معیار حرکت \vec{p} ($m\vec{v} = \vec{p}$) کے رخ کرتا ہے، اس کا تعین گر سمتیہ \vec{r} مبدا O کے گرد گھمیری حرکت کرتا ہے۔ غور کریں، O پر زاوی معیار حرکت کے لئے ضروری نہیں کہ ذرہ خود O کے گرد گھومتا ہو۔ مساوت ۵.۱۴ اور مساوات ۵.۱۸ کا موازنہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاوی معیار حرکت اور خطی معیار حرکت کا آپس میں وہی رشتہ ہے جو قوت سرور کا قوت کے ساتھ ہے۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں زاوی معیار حرکت کی اکائی کلوگرام مربع میٹر فی سیکنڈ ($\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$) ہے، جو حوالہ سیکنڈ (Js) کا معادل ہے۔

رخ۔ شکل 12.11 میں زاوی معیار حرکت سمتیہ ℓ کا رخ جاننے کے لئے، ہم سمتیہ \vec{p} کو کھسکا کر کے اس کی دم مبدا O پر رکھتے ہیں۔ اس کے بعد صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ وعدہ استعمال کر کے انگلیوں کو \vec{r} سے \vec{p} لپیٹتے ہیں۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا ℓ کا رخ، شکل 12.11 میں، محور z کا مثبت رخ دیتا ہے۔ یہ مثبت رخ، محور z پر تعین گر سمتیہ \vec{r} کے خلاف گھڑی گھاؤ کے عین مطابق ہے، جو ذرے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ (ℓ کی منفی قیمت محور z پر گھڑی وار گھاؤ ظاہر کرے گی۔)

قدر۔ زاوی معیار حرکت ℓ کی قدر معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات 27.3 کا عمومی نتیجہ ذیل لکھتے ہیں:

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (5.19)$$

جہاں \vec{r} اور \vec{p} کی دم ایک نقطہ پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 12a.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل لکھی جاسکتی ہے:

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (5.20)$$

جہاں \vec{r} کو \vec{p} کا عموددار جزو p_{\perp} ہے، اور \vec{v} کو \vec{v}_{\perp} کا عموددار جزو v_{\perp} ہے۔ شکل 12b.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے:

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \quad (5.21)$$

جہاں مبسوط \vec{p} سے O کا عموددار فاصلہ r_{\perp} ہے۔

اہم۔ دو پہلو پر غور کریں: (1) زاوی معیار حرکت صرف کسی مخصوص مبدا کے لحاظ سے معنی خیز ہے اور (2) اس کا رخ ہر صورت اس مستوی کو عمودی ہوگا جو تعین گر سمتیہ \vec{r} اور خطی معیار حرکت سمتیہ \vec{p} مل کر بناتے ہیں۔

آزمائش ۴

شکل؟؟ میں ذرہ 1 اور 2 نقطہ O کے گر بالترتیب در داس 2 m اور 4 m کے دائروں پر حرکت کرتے ہیں۔ شکل ب میں ذرہ 3 اور 4 نقطہ O سے بالترتیب 4 m اور 2 m عمود دار فاصلوں پر خط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ ذرہ 5 نقطہ O سے باہری رخ حرکت کرتا ہے۔ تمام ذروں کی کمیت اور رفتار برابر ہیں۔ (ا) نقطہ O پر زاوی معیار حرکت کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، ذروں کی درجہ بندی کریں۔ (ب) نقطہ O پر کن ذروں کا زاوی معیار حرکت منفی ہے؟

نمونہ سوال ۵.۳: دو ذروں کا زاوی معیار حرکت

افقی راہوں پر دو ذرے مستقل معیار حرکت کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔ شکل 13.11 میں ان کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ ذرہ 1، جس کے معیار حرکت کی رفتار $p_1 = 5.0 \text{ kg m s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ \vec{r}_1 ہے، نقطہ O سے 2.0 m فاصلے پر گزرے گا۔ ذرہ 2، جس کے معیار حرکت کی رفتار $p_2 = 2.0 \text{ kg m s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ \vec{r}_2 ہے، نقطہ O سے 4.0 m فاصلے پر گزرے گا۔ دو ذروں کا نقطہ O پر صافی زاوی معیار حرکت L کیا ہوگا؟

کلیدی تصور

انفرادی زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_1$ اور $\vec{\ell}_2$ معلوم کرنے کے بعد جمع کر کے ہم صافی معیار حرکت L تلاش کر سکتے ہیں۔ ان کی رفتاریں مساوات ۵.۱۸ تا مساوات ۵.۲۱ میں ہر ایک سے تعین کی جاسکتی ہیں۔ البتہ، ہمیں عمود دار فاصلے $r_{\perp 1} (= 2.0 \text{ m})$ اور $r_{\perp 2} (= 4.0 \text{ m})$ اور معیار حرکت کی رفتاریں p_1 اور p_2 دی گئی ہیں لہذا مساوات ۵.۲۱ کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔

حاصل: ذرہ 1 کے لئے مساوات ۵.۲۱ ذیل دی گئی۔

$$\begin{aligned}\ell_1 &= r_{\perp 1} p_1 = (2.0 \text{ m})(5.0 \text{ kg m s}^{-1}) \\ &= 10 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

سمتیہ $\vec{\ell}_1$ کا رخ مساوات ۵.۱۸ اور سمتیات کے صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ متاعده دے گا۔ صلیبی ضرب $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ صفحے سے باہر نکلنے کے رخ، شکل 13.11 کے مستوی کو عمود دار ہوگا۔ یہ مثبت رخ ہے، جو ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ \vec{r}_1 کا نقطہ O کے گرد خلاف گھڑی گھماؤ کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 1 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$\ell_1 = +10 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

اسی طرح $\vec{\ell}_2$ کی رفتار ذیل

$$\begin{aligned}\ell_2 &= r_{\perp 2} p_2 = (4.0 \text{ m})(2.0 \text{ kg m s}^{-1}) \\ &= 8.0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

اور $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ سمتیہ حاصل ضرب صفحے سے باہر رخ ہے، جو منفی رخ ہے، اور جو ذرہ 2 کی حرکت کے دوران O کے گرد \vec{r}_2 کے گھڑی وار حرکت کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 2 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$\ell_2 = -8.0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

باب ۵. لڑھکاؤ، قوت، سرور، اور زاوی معیار حرکت

دو ذروی نظام کا صافی زاوی معیار حرکت ذیل ہوگا۔

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} + (-8.0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}) \\ = +2.0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (\text{جواب})$$

□ مثبت علامت کہتی ہے O پر نظام کا صافی معیار حرکت صفحے سے باہر نکلنے کے رخ ہے۔

۵.۶ نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متا بل ہوں گے۔

۱. زاوی روپ میں نیوٹن کا قانون دوم استعمال کر کے، کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، ذرے پر عمل پیرا قوت سرور اور ذرے کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کا رشتہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

• نیوٹن کا قانون دوم کا زاوی روپ ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

جہاں $\vec{\tau}$ ذرے پر صافی قوت سرور اور $\vec{\ell}$ ذرے کا زاوی معیار حرکت ہے۔

نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

نیوٹن کا قانون دوم ذیل روپ میں:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{واحد ذرہ}) \quad (۵.۲۲)$$

واحد ذرے کے لئے، قوت اور خطی معیار حرکت کے بیچ متربی رشتہ احبا گر کرتا ہے۔ ہم خطی اور زاوی مقادیر کی متوازیت دیکھ چکے ہیں اور توقع کر سکتے ہیں کہ قوت سرور اور زاوی معیار حرکت کے بیچ بھی متربی تعلق ہوگا۔ مساوات ۵.۲۲ کو دیکھ کر ہم ذیل تعلق کی توقع کرتے ہیں۔

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad (\text{واحد ذرہ}) \quad (۵.۲۳)$$

یقیناً، مساوات ۵.۲۳ واحد ذرے کے لئے نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے:

ذرے پر تمام قوت مسروڑ کا (مستی) مجموعہ ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی کے برابر ہوگا۔

□

کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، جو عموماً محدودی نظام کا مبداء ہوگا، قوت مسروڑ \vec{F} اور زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ تعین کیے بغیر مساوات ۵.۲۳ بے معنی ہوگی۔

مساوات ۵.۲۳ کا ثبوت

ہم مساوات ۵.۱۸ سے آغاز کرتے ہیں، جو ذرے کے زاوی معیار حرکت کی تعریف ہے:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

جہاں \vec{r} ذرے کا تعین کر سکتیہ اور \vec{v} ذرے کی مستی رفتار ہے۔ دونوں اطراف کا تفرق t کے لحاظ سے لیتے ہیں۔

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) \quad (۵.۲۴)$$

البتہ، $d\vec{v}/dt$ ذرے کا اسراع \vec{a} ، اور $d\vec{r}/dt$ ذرے کی مستی رفتار ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۴ ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

اب $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ہے (چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے لہذا سمتیہ کا اپنے ساتھ مستی ضرب ہمیشہ صفر کے برابر ہوگا۔) یوں آخری جبزہ خارج ہوگا اور ذیل رہ جائے گا۔

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

ہم نیوٹن کا قانون دوم ($m\vec{a} = \vec{F}$) استعمال کر کے $m\vec{a}$ کی جگہ \vec{F} ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (۵.۲۵)$$

یہاں علامت \sum کہتی ہے تمام قوتوں کے مستی ضرب $\vec{r} \times \vec{F}$ کا مجموعہ لینا ہوگا۔ البتہ، مساوات ۵.۱۴ سے ہم جانتے ہیں (درج بالا) ہر مستی ضرب کسی ایک قوت سے وابستہ قوت مسروڑ ہوگا۔ یوں، مساوات ۵.۲۵ ذیل کہتی ہے:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

مستی حاصل ضرب کا تفرق لیتے ہوئے مستعمل متادیر کی ترتیب برقرار رکھیں۔ یوں یہاں \vec{r} ہمیشہ \vec{v} سے پہلے ہوگا۔

جوساوات ۵.۲۳ ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش

کل؟؟ میں کسی ایک لمحے پر ذرے کا تعین کر سکتی ہوں، اور ذرے کو مسرع کرنے والی قوتوں کے چار ممکنہ رخ دیے گئے ہیں۔ تمام قوت سطح xy میں ہیں۔ (۱) نقطہ O پر ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی $(d\vec{\ell}/dt)$ کی قدر کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی کریں۔ (ب) نقطہ O پر کوئی قوت تبدیلی کی منفی شرح دیتی ہے؟

نمونہ سوال ۵.۴: قوتیں مسرور اور زاوی معیار حرکت کا وقتی تفرق

ایک ذرہ جس کی کمیت 0.500 kg ہے اور جس کا تعین گر سمتیہ ذیل ہے، مستقیم خط پر حرکت میں ہے (شکل 14a.11):

$$\vec{r} = (-2.00t^2 - t)\hat{i} + 5.00\hat{j}$$

جہاں \vec{r} میٹر میں اور t سیکنڈ میں ہے، اور آغاز $t = 0$ پر ہوتا ہے۔ تعین گر سمتیہ مبداسے ذرے کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں، ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ اور ذرے پر قوت مسرور \vec{F} مبداسے لحاظ سے (یا مبداسے) تلاش کریں۔ ذرے کی حرکت کو مد نظر رکھتے ہوئے ان مقادیر کی الجبرائی علامت کی وجہ پیش کریں۔

کلیدی تصورات

(۱) جس نقطہ پر ذرے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرنا ہو اس کی نشاندہی کرنا لازم ہے۔ یہاں وہ نقطہ مبداسے واقع ہے۔ (۲) مساوات ۵.۱۸ $(\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}))$ ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ دیتی ہے۔ (۳) ذرے کے زاوی معیار حرکت سے وابستہ علامت $(+)$ یا $(-)$ ، ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ کے (موجر گھماؤ کے گرد) گھماؤ کی سمت دیتی ہے: گھڑی وار منفی اور خلاف گھڑی مثبت ہوگا۔ (۴) اگر ذرے پر قوت مسرور اور ذرے کا زاوی معیار حرکت ایک نقطہ پر حاصل کیے گئے ہوں، تب قوت مسرور اور زاوی معیار حرکت کا تعلق مساوات ۵.۲۳ $(\vec{\tau} = d\vec{\ell}/dt)$ دیگی۔

حاجے: مساوات ۵.۱۸ استعمال کر کے مبداسے زاوی معیار حرکت تلاش کرنے کے لئے ضروری ہے کہ پہلے تعین گر سمتیہ کا وقتی تفرق لے کر ذرے کی سمتی رفتار کا الجبرائی فترہ حاصل کیا جائے۔ مساوات 10.4 $(\vec{v} = d\vec{r}/dt)$ کو دیکھ کر ہم ذیل لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}((-2.00t^2 - t)\hat{i} + 5.00\hat{j}) \\ &= (-4.00t - 1.00)\hat{i}\end{aligned}$$

جہاں \vec{v} میٹر فی سیکنڈ میں ہے۔

اس کے بعد مساوات 27.3 میں صلیبی ضرب کا دکھایا گیا ڈھانچہ استعمال کر کے \vec{r} اور \vec{v} کا صلیبی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

یہاں \vec{r} کو عمومی سمتیہ \vec{a} اور \vec{v} کو عمومی سمتیہ \vec{b} ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم ضرورت سے زیادہ کام نہیں کرنا چاہتے، آئیں عمومی صلیبی ضرب میں پُر کردہ بدل پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ \vec{r} میں z جزو اور \vec{v} میں y اور z اجزاء نہیں پائے جاتے، اس عمومی صلیبی ضرب کا صرف آخری جزو $(-b_x a_y)\hat{k}$ غیر صفر ہے۔ یوں، زیادہ الجبرائی دوڑ کے بغیر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-4.00t - 1.00)(5.00)\hat{k} = (20.0t + 5.00)\hat{k} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

یاد رہے، ہمیشہ کی طرح صلیبی ضرب جو سمتیہ دیتی ہے وہ ابتدائی سمتیات کو عمود دار ہوگا۔ مساوات ۵.۱۸ پوری کرنے کے لئے، کمیت سے ضرب دے کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= (0.500 \text{ kg})[(20.0t + 5.00)\hat{k} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}] \\ &= (10.0t + 2.50)\hat{k} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

مبادا پر قوت سرورڈاب مساوات ۵.۲۳ سے فوراً حاصل ہوگا:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{d}{dt}(10.0t + 2.50)\hat{k} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \\ &= 10.0\hat{k} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 10.0\hat{k} \text{ N m} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

جو محور z کے مثبت رخ ہے۔

ہمارا $\vec{\ell}$ کا نتیجہ کہتا ہے زاوی معیار حرکت محور z کے مثبت رخ ہے۔ تعین گر سمتیہ کے گھماؤ کی صورت میں ”مثبت“ نتیجہ کا مطلب سمجھنے کے لئے اس سمتیہ کی قیمت مختلف اوقات پر معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad \vec{r}_0 = 5.00\hat{j} \text{ m} \\ t = 1.00 \text{ s}, & \quad \vec{r}_1 = -3.00\hat{i} + 5.00\hat{j} \text{ m} \\ t = 2.00 \text{ s}, & \quad \vec{r}_2 = -10.0\hat{i} + 5.00\hat{j} \text{ m} \end{aligned}$$

یہ نتائج شکل 14b.11 میں پیش ہیں؛ ہم دیکھتے ہیں کہ ذرے کے ساتھ ساتھ چپلنے کے لئے \vec{r} خلاف گھڑی گھومتا ہے۔ یہی گھماؤ کا مثبت رخ ہے۔ یوں، اگرچہ ذرہ خود سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، مبادا کے لحاظ سے یہ اس کی حرکت خلاف گھڑی ہے، اور یوں اس کا زاوی معیار حرکت مثبت ہے۔

ہم $\vec{\ell}$ کے رخ کا مطلب، صلیبی ضرب (یہاں $\vec{r} \times \vec{v}$ یا آپ چاہیں $m\vec{r} \times \vec{v}$ ، جو ایک رخ دیتے ہیں) کا دیا ہوا ہاتھ متعدہ استعمال کر کے سمجھ سکتے ہیں۔ ذرے کی حرکت کے دوران کسی بھی معیار اثر کے لئے، دائیں ہاتھ کی چپا انگلیاں

صلیبی ضرب کے اول سمتیہ \vec{r} کے رخ رکھی جاتی ہیں (شکل 14c.11)۔ ہاتھ یوں سمت بند کیا جاتا ہے کہ ہتھیلی کے گرد انگلیاں با آسانی گھما کر صلیبی ضرب کے دوسرے سمتیہ \vec{v} کے رخ کی جانبیں (شکل 14d.11)۔ اس پورے عمل کے دوران انگوٹھے کو چار انگلیوں کے لحاظ سے عمود دار رکھا جاتا ہے۔ انگوٹھا صلیبی ضرب کے نتیجے کا رخ دیگا۔ جیسا شکل 14e.11 میں دکھایا گیا ہے، ماحصل سمتیہ محور z کے مثبت رخ (جو شکل کے مستوی سے سیدھا باہر نکلتا ہے) اور گزشتہ نتیجے کے عین مطابق ہے۔ شکل 14e.11 میں \vec{r} کا رخ بھی دیا گیا ہے، جو محور z کے مثبت رخ ہے؛ چونکہ، زاوی معیار حرکت اسی رخ ہے اور اس کی مقدار بڑھ رہی ہے۔

□

۵.۷ استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱. ذروں پر مشتمل نظام کے لئے، نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ میں استعمال کر کے نظام پر صافی قوت سرور اور نظام کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کی شرح کا تعلق جان پائیں گے۔

۲. مقررہ محور کے گرد گھومتے استوار جسم کے زاوی معیار حرکت اور اسی محور کے گرد جسم کے گھمیری جمود اور زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. اگر دو جسم ایک ہی محور گھماؤ کے گرد گھومتے ہوں، ان کے کل زاوی معیار حرکت کا حساب کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

• ذروں پر مشتمل نظام، کا زاوی معیار حرکت \vec{L} انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت کا مجموعہ ہوگا۔

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

• اس زاوی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح نظام پر صافی بیرونی قوت سرور کے برابر ہوگی (جو نظام کے اندرونی ذروں اور نظام کے باہر ذروں کے باہم عمل سے پیدا قوت سرور کا سمتی مجموعہ ہوگا)۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{ذروں پر مشتمل نظام})$$

• مقررہ محور پر گھومتے استوار جسم کے لئے،، محور گھماؤ کے متوازی زاوی معیار حرکت کا جبز و ذیل ہوگا۔

$$L = I\omega \quad (\text{استوار جسم، مقررہ محور})$$

ذروں پر مشتمل نظام کا زاوی معیار حرکت

مبدأ کے لحاظ سے ذروں پر مشتمل نظام کے زاوی معیار حرکت پر غور کرتے ہیں۔ نظام کا کل زاوی معیار حرکت \vec{L} انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کا (مستی) مجموعہ ہوگا۔

$$(۵.۲۶) \quad \vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \dots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i$$

انفرادی زاوی معیار حرکت کو زیر نوشت i سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دیگر ذروں کے ساتھ یا نظام کے بیرون کے ساتھ باہم عمل کی بنا انفرادی ذرے کا زاوی معیار حرکت وقت کے ساتھ تبدیل ہو سکتا ہے۔ ہم \vec{L} میں پیدا تبدیلی مساوات ۵.۲۶ کا (ذیل) و مستقی تفرق معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(۵.۲۷) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}$$

مساوات ۵.۲۳ سے ہم دیکھتے ہیں کہ i ویں ذرے پر صافی قوت $d\vec{\ell}_i/dt$ سروڑ ہوگی۔ مساوات ۵.۲۷ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$(۵.۲۸) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{\text{صافی},i}$$

یعنی، نظام کے زاوی معیار حرکت \vec{L} کی تبدیلی کی شرح انفرادی ذروں پر قوت سروڑ کے مستی مجموعہ کے برابر ہوگا۔ ان قوت سروڑ میں (ذروں کے بیچ قوتوں کی بنا) اندرونی قوت سروڑ اور (ذروں پر نظام سے باہر اجسام کی قوت کی بنا) بیرونی قوت سروڑ شامل ہیں۔ تاہم، ذروں کے بیچ قوت (نیوٹن کے متوازن سوم کی بنا) جوڑیوں کے روپ میں ہوگی لہذا ان کی مجموعی قوت سروڑ صفر ہوگی۔ یوں، نظام کے کل زاوی معیار حرکت \vec{L} کو صرف نظام پر عمل پیرا بیرونی قوت سروڑ تبدیلی کرتی ہیں۔

صافی بیرونی قوتے سروڑ۔ نظام میں تمام ذروں پر بیرونی قوت سروڑ کا مستی مجموعہ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ صافی بیرونی قوت سروڑ کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۸ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$(۵.۲۹) \quad \vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{ذروں پر مشتمل نظام})$$

جونیوٹن کے متوازن دوم کا زاوی روپ ہے۔ اس کے تحت ذیل ہوگا۔

ذروں پر مشتمل نظام پر صافی بیرونی قوت سروڑ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ نظام کے کل زاوی معیار حرکت \vec{L} کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہوگی۔

مسوات ۵.۲۹ اور $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (مسوات 27.9) مثال ہیں تاہم اول الذکر زیادہ احتیاط مانگتی ہے: قوت سرور اور نظام کا زاوی معیار حرکت ایک مبداء کے لحاظ سے ناپت لازمی ہے۔ اگر اندرونی جمودی چھوٹ کے لحاظ سے نظام کا مرکز کیت سرع نہ ہو، مبداء کسی بھی نقطے پر ہو سکتا ہے، اگر سرع ہو، تب لازم ہے کہ مبداء مرکز کیت پر ہو۔ مثال کے طور پر، پیچے کو ذروں پر مشتمل نظام تصور کریں۔ اگر زمین کے لحاظ سے ساکن محور پر پہیا گھومتا ہو، تب مسوات ۵.۲۹ استعمال کرتے وقت زمین کے لحاظ سے کوئی بھی ساکن نقطہ بطور مبداء تسلیم کیا جاسکتا ہے۔ البتہ، اگر پہیا سرع محور کے گرد گھومتا ہو (جیسے جب پہیا میلان پر لڑھکتا نیچے آتا ہے)، تب صرف پیچے کا مرکز کیت مبداء تسلیم کیا جاسکتا ہے۔

مقررہ محور پر استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

ذروں پر مشتمل نظام (ذروی نظام) جو ایک استوار جسم دیتا ہے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرتے ہیں۔ شکل 15a.11 میں ایسا ایک جسم دکھایا گیا ہے۔ محور z یہاں مقررہ محور گھماوے ج کے گرد جسم مستقل زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ اس محور پر ہم جسم کا زاوی معیار حرکت جاننا چاہتے ہیں۔

ہم جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کا انفرادی زاوی معیار حرکت معلوم کر کے ان کے z جزو کا مجموعہ لے کر یا کر سکتے ہیں۔ شکل 5a.11 میں کیت Δm_i کا کمیتی ٹکڑا محور z کے گرد دائری راہ پر حرکت کرے گا۔ مبداء O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کا مقام تعین کر سمتیہ \vec{r}_i دیگا۔ اس ٹکڑے کے دائری راہ کا رداس $r_{\perp i}$ ہوگا، جو ٹکڑے اور محور z کے بیچ عمود دار فاصلہ ہے۔

مبداء O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ کی قدر مسوات ۵.۱۹ دیگی:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

جہاں p_i اور v_i کمیتی ٹکڑے کا خطی معیار حرکت اور خطی رفتار ہے، اور \vec{r}_i اور \vec{p}_i کے بیچ زاویہ 90° ہے۔ اس کمیتی ٹکڑے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ شکل 5b.11 میں دکھایا گیا ہے؛ اس کا رخ \vec{r}_i اور \vec{p}_i دونوں کو لازمًا عمود دار ہوگا۔

جزو z ۔ ہم محور گھماوے کے، جو یہاں محور z ہے، متوازی $\vec{\ell}_i$ کا جزو جاننا چاہتے ہیں۔ جزو z ذیل ہوگا۔

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta = (r_i \sin \theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

پورے جسم کے زاوی معیار حرکت کا z جزو معلوم کرنے کے لئے جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کے زاوی معیار حرکت کے z جزو کا مجموعہ لینا ہوگا۔ چونکہ $v = \omega r_{\perp}$ ہے لہذا ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L_z = \sum_{i=1}^n \ell_{iz} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_i$$

(۵.۳۰)

$$= \omega \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right)$$

جدول ۵.۱: مستقیم اور گھیری حرکت کے مزید مطابقتی متغیرات اور رشتے

مستقیم	گھیری
قوت \vec{F}	قوت سروڑ $\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
خطی معیار حرکت \vec{p}	زاوی معیار حرکت $\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
خطی معیار حرکت $\vec{P} (= \sum \vec{p}_i)$	زاوی معیار حرکت $\vec{L} (= \sum \vec{\ell}_i)$
خطی معیار حرکت $\vec{P} = M\vec{v}$ مرکزیت	زاوی معیار حرکت $L = I\omega$
نیوٹن کا قانون دوم $\vec{F}_{\text{مقن}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	نیوٹن کا قانون دوم $\vec{\tau}_{\text{مقن}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
موتانون بقا $\vec{P} = \text{مستقل}$	موتانون بقا $\vec{L} = \text{مستقل}$

یہاں ω مستقل (جسم کے تمام نقطوں کے لئے ایک برابر) ہے لہذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات ۵.۳۰ میں $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ مقررہ محور کے گرد جسم کا گھیری جھود I ہے (مساوات ۴.۳۳ دیکھیں)۔ یوں مساوات ۵.۳۰ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L = I\omega \quad (\text{استوار جسم، مقررہ محور}) \quad (۵.۳۱)$$

ہم نے زیر نوشتہ z نہیں لکھا، تاہم آپ نے یاد رکھنا ہوگا کہ مساوات ۵.۳۱ میں زاوی معیار حرکت محور گھماؤ پر زاوی معیار حرکت ہوگا۔ (ہم نے کوئی محور گھماؤ لیسنی تھی۔ یہاں محور z لی گئی۔ لہذا زاوی معیار حرکت اس محور گھماؤ کے لحاظ سے ہوگا جس پر اسے حاصل کیا گیا ہو۔) ساتھ ہی اس مساوات میں I بھی اسی محور گھماؤ کے لحاظ سے ہوگا۔

جدول ۵.۱، جو جدول ۴ کو وسعت دیتا ہے، مطابقتی خطی اور زاوی رشتے پیش کرتا ہے۔

آزمائش ۶

معرض، گھیرا، اور کرہ کو، لٹو کی طرح دھاگالپیٹ کر، مقررہ وسطی محور پر گھمایا جاتا ہے (شکل ۴؟)۔ دھاگاتینوں جسم پر ایک جتنی مستقل مساوی قوت \vec{F} لاگو کرتا ہے۔ تینوں جسم ابتدائی طور ساکن ہیں، ان کی کمیت اور رداس ایک برابر ہیں۔ گھومتے اجسام کی درجہ بندی (۱) وسطی محور پر زاوی معیار حرکت اور (ب) زاوی رفتار کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، کریں۔

۵.۸ زاوی معیار حرکت کی بقا

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱۔ کسی مخصوص محور کے ہمراہ نظام پر بیرونی صافی قوت مسرور کی عدم موجودگی میں، زاوی معیار حرکت کی بقا استعمال کر کے محور پر ابتدائی زاوی معیار حرکت کی قیمت کا رشتہ بعد کی قیمت کے ساتھ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

• نظام پر بیرونی صافی قوت مسرور صفر ہونے کی صورت میں، نظام کا زاوی معیار حرکت \vec{L} ایک مستقل ہو گا۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \text{مستقل} & (\text{جب النظام}) \\ \vec{L}_i &= \vec{L}_f & (\text{جب النظام}) \end{aligned}$$

اس کو زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون کہتے ہیں۔

زاوی معیار حرکت کی بقا

ہم توانائی کی بقا اور خطی معیار حرکت کی بقا کی بات کر چکے، جو طاقوتور قوانین بقا ہیں۔ اب زاوی معیار حرکت کی بقا کی بات کرتے ہیں، جو تیسرا قانون بقا ہے۔ ہم مساوات ۵.۲۹ $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$ سے آغاز کرتے ہیں، جو نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے۔ بیرونی صافی قوت مسرور کے عدم موجودگی میں یہ مساوات $d\vec{L}/dt = 0$ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \quad (\text{جب النظام}) \quad (۵.۳۲)$$

یہ نتیجہ، جو ذیل دو طرح بھی لکھا جاسکتا ہے، زاوی معیار حرکت کے بقا کا قانون کہلاتا ہے۔

$$\left(\text{صافی زاوی معیار حرکت} \right)_{\text{بعد میں وقت } t_f} = \left(\text{صافی زاوی معیار حرکت} \right)_{\text{ابتدائی وقت } t_i}$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{جب النظام}) \quad (۵.۳۳)$$

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ ذیل کہتی ہیں۔

نظام پر صافی بیرونی قوت مسرور صفر ہونے کی صورت میں، اس سے قطع نظر کہ نظام کے اندر کیا تبدیلیاں رونما ہوں، نظام کا زاوی معیار حرکت \vec{L} برقرار رہے گا (ایک مستقل ہو گا)۔

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ سمتیہ مساوات ہیں: جو تین آپس میں عمود دار رخ پر زاوی معیار حرکت کی بقا کی تین جبزوی مساوات دیں گی۔ نظام پر بیرونی صافی قوت مسروڑ موجود ہونے کی صورت میں، قوت مسروڑ پر منحصر ہوگا، آیا زاوی معیار حرکت کی بقا صرف ایک یا دو رخ ہو، تاہم، تینوں رخ زاوی معیار حرکت کی بقا کبھی نہیں ہوگی۔

اگر کسی محور کے ہمراہ نظام پر صافی بیرونی قوت مسروڑ کا جزو صفر ہو، تب اس سے قطع نظر کہ نظام میں کیا تبدیلیاں رونما ہوں، اس محور کے ہمراہ نظام کے زاوی معیار حرکت کا جزو تبدیل نہیں ہوگا۔

یہ ایک طاقتور فقرہ ہے: یہاں ہم نظام کے ابتدائی اور اختتامی حالت میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ درمیانی حالت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔

اس متاع عدے کا اطلاق شکل 15.11 میں پیش جہاں پر، جو محور z کے گرد گھومتا ہے، کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کسی طرح جسم، محور گھاؤ کے لحاظ سے کیت کی تقسیم نوکر کے، محور گھاؤ پر اپنا گھمیری جود تبدیل کرتا ہے۔ مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ کہتی ہیں جسم کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ مساوات ۵.۳۳ میں (گھمیری محور پر زاوی معیار حرکت کی) مساوات ۵.۳۱ ڈال کر یہ قانون بقا کو ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (5.33)$$

اس مساوات میں زیر نوشتہ i اور f کیتی تقسیم نوے قبل اور اس کے بعد گھمیری جمود اور زاوی رفتار ظاہر کرتے ہیں۔

باقی دو قوانین بقا کی طرح، جن پر ہم بحث کر چکے ہیں، مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ نیوٹنی میکانیات کی حدود سے باہر بھی متبادل اطلاق ہیں۔ ان کا اطلاق ان ذروں پر بھی ہوگا جو روشنی کی رفتار کے متضرب رفتار پر حرکت میں ہوں (جہاں نیوٹنی میکانیات کارآمد نہیں رہتی اور جہاں خصوصی نظریہ اضافت استعمال کرنا ہوگا)، اور ان کا اطلاق زیر جوہر ذروں پر بھی ہوگا (جہاں کوانٹم میکانیات کا راج چلتا ہے)۔ آج تک ایسی کوئی مثال نہیں دیکھی گئی جو زاوی معیار حرکت کی بقا کے قانون کو مطمئن نہ کرتی ہو۔

اب ہم تین ایسی مثالوں پر بحث کرتے ہیں جن میں اس قانون کی دخل اندازی پائی جاتی ہے۔

۱. چکر کھاتا رضا کار شکل 16.11 میں ایک طالب علم تپائی پر، جو انقباضی محور پر گھوم سکتی ہے، بیٹھا دکھایا گیا ہے۔ پھیلے ہاتھوں میں وزن بھرتے طالب علم کو ابتدائی زاوی رفتار ω_i سے گھمایا گیا۔ اس کا زاوی معیار حرکت سمتیہ L انقباضی محور پر اوپر رخ ہے۔

طالب علم ہاتھ جسم کے متضرب کرتا ہے؛ کیت محور گھاؤ کے متضرب کرنے سے طالب علم کا گھمیری جمود I_i سے گھٹ کر I_f ہوگا، اور اس کے گھومنے کی شرح ω_i سے بڑھ کر ω_f ہوگی۔ ہاتھ پھیلا کر (وزن دور کر کے) طالب علم اپنی رفتار دوبارہ گھٹاتا ہے۔ طالب علم، تپائی، اور وزن پر مشتمل نظام پر کوئی صافی بیرونی قوت مسروڑ عمل نہیں کرتی۔ یوں، اس سے قطع نظر کہ طالب علم اپنے ہاتھ کہاں رکھتا ہے، محور گھاؤ پر نظام کا

زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہوگا۔ شکل 16a.11 میں طالب علم کا زاوی رفتار ω_i کافی کم ہے اور اس کا گھمیری جمود I_i نسبتاً زیادہ۔ مساوات ۵.۳۴ کے تحت شکل 16b.11 میں I_f کے گھٹنے کی تلافی، زاوی رفتار میں اضافہ کرتا ہے۔

۲. غوطہ باز شکل 17.11 میں کئی دار تختے سے غوطہ باز ڈبڑھ کلابازیاں کھاتا دکھایا گیا ہے۔ جیسا آپ توقع کر سکتے ہیں، اس کا مرکز کیت قطع مکانی راہ پر چلتا ہے۔ کئی دار تختے سے، کلاباز اپنے مرکز کیت سے گزرتی محور پر، غیر مبہم زاوی معیار حرکت L کے ساتھ روانا ہوتا ہے، جو شکل 17.11 میں صفحہ کو عمود دار ہوگا۔ پرواز کے دوران کلاباز پر کوئی صافی بیرونی قوت سرور عمل نہیں کرتی، لہذا محور گھماؤ پر اس کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ ہاتھ اور پسیر جسم کے متفریب کرنے پر اسی محور کے لحاظ سے، اس کے گھمیری جمود میں کمی رونما ہوگی، اور یوں مساوات ۵.۳۴ کے تحت اس کے زاوی رفتار میں اضافہ پیدا ہوگا۔ سطح پانی کو پہنچ کر کلاباز پورے جسم کو سیدھ میں کر کے گھمیری جمود بڑھا کر اور زاوی رفتار گھٹاتا ہے، تاکہ پانی میں داخل ہوتے وقت کم سے کم چھینٹیں اڑائے۔ زیادہ پیچیدہ غوطہ، جس میں کلاباز جسم کو بل دیتے ہوئے کلابازیاں کھاتا ہے، پوری پرواز کے دوران، غوطہ باز کے زاوی معیار حرکت کی، متدرج اور رخ دونوں میں، بقا لازماً ہوگی۔

۳. لمبی چھلانگ جب کھلاڑی دوڑ کر لمبی چھلانگ کے لئے زمین سے اچھلتا ہے، افقی محور پر کھلاڑی کو آخری قدم آگے رخ گھماؤ کا زاوی معیار حرکت دیتا ہے۔ ایسا گھماؤ کھلاڑی کو زمین پر صحیح طریقے سے اترنے نہیں دیتا۔ زمین پر پہنچ کر کھلاڑی کی ٹانگیں اکٹھی اور اس زاویہ پر آگے ہونی چاہیے کہ ریت میں ایڑیوں کا نشان زیادہ سے زیادہ فاصلے پر بنے۔ اڑان کے بعد کوئی بیرونی قوت سرور عمل کرتی ہے لہذا زاوی معیار حرکت (کی بقا کی بدولت) تبدیل نہیں ہوگا۔ البتہ، کھلاڑی بازوؤں کو جھک دے کر زاوی معیار حرکت کا بیشتر حصہ بازوؤں کو منتقل کر سکتا ہے (شکل 18.11)۔ یوں جسم سیدھا رہ کر اتار کے دوران درست سمت بند ہوگا۔

آزمائش ۷

ایک چھوٹا مترس، جس کے چکا پر بھونزا بیٹھا ہے، انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر بھونزا مترس کے وسط کی جانب کلبائے، کیا بھونزا مترس نظام کا (۱) گھمیری جمود، (ب) زاوی معیار حرکت، اور (ج) زاوی رفتار (وسطی محور کے لحاظ سے) بڑھے گا (گی)، گھٹے گا (گی)، یا تبدیل نہیں ہوگا (گی)؟

نمونہ سوال ۵.۵: زاوی معیار حرکت کے بٹا، گھومتے پیسے کا مظاہرہ

شکل 20a.11 میں ایک طالب علم تپائی پر بیٹھا دکھایا گیا ہے۔ تپائی انتصابی محور پر گھوم سکتی ہے۔ طالب علم، جو ابتدائی طور ساکن ہے، سائیکل کا پہیا پکڑے ہوئے ہے، جس کے چکا کا وزن سیدھ سے بڑھایا گیا ہے۔ وسطی محور کے لحاظ سے پیسے کا گھمیری جمود $I_w = 1.2 \text{ kg m}^2$ ہے۔ (چپے پر سیدھ لگانے سے پیسے کا گھمیری جمود بڑھایا گیا ہے۔)

پیسے کا زاوی رفتار 3.9 چکر فی سیکنڈ ہے اور فضا سے نیچے دیکھ کر اس کا رخ خلاف گھڑی ہے۔ پیسے کا دھرا انتصابی ہے، اور اس کے زاوی معیار حرکت L_w کا رخ انتصابی اوپر وار ہے۔

طالب علم پہیے کو الٹ کرتا ہے (شکل 20b.11) لہذا اب فضا سے نیچے دیکھتے ہوئے پہیا گھڑی وار گھومتا ہے۔ اس کا زاوی معیار حرکت اب \vec{L}_w ہو گا۔ پہیا الٹ کرنے کی وجہ سے طالب علم، تپائی، اور پہیے کا وسط بطور مرکب استوار جسم تپائی کے محور گھماوے کے گرد گھمیری جمود $I_b = 6.8 \text{ kg m}^2$ کے ساتھ گھومتے ہیں۔ (پہیا اپنے وسطی محور کے گرد گھومتا ہے، تاہم اس سے مرکب جسم کا کینیٹیک تقسیم اثر انداز نہیں ہوتا؛ یوں I_b کی قیمت وہی ہوگی چاہے پہیا گھومتا ہو یا نہ گھومتا ہو۔) پہیا الٹ کرنے کے بعد، مرکب جسم کس زاوی رفتار ω_b اور کس رخ گھومتا ہے؟

کلیدی تصورات

۱. زاوی رفتار ω_b کا، جو ہم جاننا چاہتے ہیں، تپائی کے محور گھماوے پر، مرکب جسم کے اختتامی زاوی معیار حرکت \vec{L}_b کے ساتھ تعلق مساوات ۵.۳۱ دیتی ہے۔

۲. پہیے کی ابتدائی زاوی رفتار ω_w اور پہیے کے وسط کے گرد، پہیے کے زاوی معیار حرکت \vec{L}_w کا تعلق یہی مساوات دیتی ہے۔

۳. \vec{L}_w اور \vec{L}_b کا مجموعہ طالب علم، تپائی، اور پہیے کا کل زاوی معیار حرکت کل \vec{L} دیگا۔

۴. پہیا الٹ کرنے کے دوران نظام پر کوئی صافی بیرونی قوت مسرود عمل نہیں کرتی جو کسی انتہائی محور پر کل \vec{L} تبدیل کر سکتی تھی۔ (پہیا الٹ کرتے وقت، طالب علم اور پہیے پر قوتوں سے پیدا قوت مسرود نظام کی اندرونی ہیں۔) یوں، بشمول تپائی کا محور گھماوے، کسی بھی انتہائی محور پر نظام کے کل زاوی معیار حرکت کی بقا ہوگی۔

حاجے: شکل 20c.11 میں سمتیات کل \vec{L} کی بقا ظاہر کرتے ہیں۔ اس بقا کو انتہائی محور کے ہمراہ اجزاء کے روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے:

$$(۵.۳۵) \quad L_{b,f} + L_{w,f} = L_{b,i} + L_{w,i}$$

جہاں i اور f بالترتیب (پہیا الٹ کرنے سے قبل) ابتدائی حال اور (پہیا الٹ کرنے کے بعد) اختتامی حال ظاہر کرتی ہیں۔ پہیا الٹ کرنے سے پہلے کا زاوی معیار حرکت سمتیہ الٹ ہوا لہذا ہم $L_{w,f}$ کی جگہ $-L_{w,i}$ ڈالتے ہیں۔ اب اگر $L_{b,i} = 0$ (ابتدائی طور پر طالب علم، تپائی، اور پہیے کا وسط ساکن تھے) رکھا جائے، مساوات ۵.۳۵ ذیل دیگی۔

$$L_{b,f} = 2L_{w,i}$$

مساوات ۵.۳۱ استعمال کرتے ہوئے، ہم اب $I_b \omega_b$ کی جگہ $L_{w,i}$ اور $I_w \omega_w$ کی جگہ $2L_{w,i}$ ڈال کر ω_b کے لئے حل کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \omega_b &= \frac{2I_w}{I_b} \omega_w = \frac{(2)(1.2 \text{ kg m}^2)}{6.8 \text{ kg m}^2} (3.9 \text{ چپکرنی منٹ}) \\ &= 1.4 \text{ چپکرنی منٹ} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

مثبت جواب کہتی، فضا سے دیکھتے ہوئے، تپائی کے محور پر طالب علم خلاف گھمڑی گھومتا ہے۔ اگر طالب علم رکھنا چاہے، اس کو پہیا واپس اصل حالت میں لانا ہوگا (یعنی ایک مرتبہ دوبارہ پہیا الٹ کر نا ہو گا)۔

□

نمونہ سوال ۵.۶: زاوی معیار حرکت کے بقا، قرص پر بھونزا

کیست $6.00m$ اور رداس R کے قرص پر کیست m کا بھونزا سوار ہے۔ قرص انتصابی وسطی محور پر ω_i کیست 1.50 rad s^{-1} زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ بھونزا جو ابتدائی طور $0.800R$ پر بھتا، کلبلا کر قرص کے چکا پر پہنچتا ہے۔ بھونزا کو ایک ذرہ تصور کریں۔ چکا پر پہنچ کر بھونزا کی زاوی رفتار کیسا ہوگی۔

کلیدی تصورات

(1) بھونزا کے کلبلانے سے بھونزا و قرص نظام کی کمیتی تقسیم (لہذا گھمیری جمود) تبدیل ہوتی ہے۔ (2) بیرونی قوت سرور کی عدم موجودگی میں نظام کی زاوی معیار حرکت اٹل ہوگا۔ (بھونزا کے کلبلانے کی قوتیں اور قوت سرور نظام کی اندرونی ہیں۔) (3) مساوات ۵.۳۱ ($L = I\omega$) استوار جسم کا زاوی معیار حرکت دیتی ہے۔

حاجے: ہم اختتامی زاوی رفتار جاننا چاہتے ہیں۔ ہم اختتامی زاوی معیار حرکت L_f کو ابتدائی زاوی معیار حرکت L_i کے برابر رکھتے ہیں (چونکہ دونوں میں زاوی رفتار شامل ہے)۔ ان میں گھمیری جمود بھی شامل ہے۔ لہذا کلبلانے سے قبل اور کلبلانے کے بعد بھونزا و قرص نظام کے گھمیری جمود کی تلاش سے آغاز کرتے ہیں۔

وسطی محور پر گھومتے قرص کا گھمیری جمود جدول 2c.10 کے تحت $\frac{1}{2}MR^2$ ہے۔ کیست M کی جگہ $6.00m$ ڈال کر قرص کا (ذیل) گھمیری جمود تلاش کرتے ہیں۔

$$I_d = 3.00mR^2 \quad (۵.۳۶)$$

(ہمیں m اور R معلوم نہیں، لیکن طبیعیات کا ہاتھ بھتام کر چلتے ہیں۔)

مساوات ۵.۳۳ سے ہم جانتے ہیں کہ بھونزا کا (ذرے کا) گھمیری جمود mr^2 ہوگا۔ بھونزا کا ابتدائی رداس $r = 0.800R$ اور اختتامی رداس R ڈال کر محور گھماؤ پر بھونزا کا ابتدائی گھمیری جمود I_{bi} :

$$I_{bi} = 0.64mR^2 \quad (۵.۳۷)$$

اور اختتامی گھمیری جمود I_{bf} حاصل کرتے ہیں۔

$$I_{bf} = mR^2 \quad (۵.۳۸)$$

یوں بھونزا و قرص نظام کا ابتدائی گھمیری جمود I_i ذیل:

$$I_i = I_d + I_{bi} = 3.64mR^2 \quad (۵.۳۹)$$

اور اختتامی گھمیری جمود I_f ذیل ہوگا۔

$$I_f = I_d + I_{bf} = 4.00mR^2 \quad (۵.۴۰)$$

اس کے بعد، مساوات ۵.۳۱ ($L = I\omega$) استعمال کرتے ہوئے ہم نظام کے اختتامی زاوی معیار حرکت L_f کو نظام کے ابتدائی زاوی معیار حرکت L_i کے برابر رکھتے ہیں۔

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

آپ دیکھ سکتے ہیں، چپا کی طرف بھونرا کے کلبلائے سے کچھ کمیت محور گھماو سے دور منتقل ہوتی ہے، لہذا نظام کا گھمیری جمود بڑھتا ہے، جو ω گھٹنے کا سبب بنتا ہے۔ □

۵.۹ مسکن چرخشی کی استقبالی حرکت

مقاصد

اس حصے کو پڑھ کر آپ ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ چکر کھاتے مسکن چرخشی پر تحبذنی قوت عمل کر کے اس کے چپکری زاوی معیار حرکت سمتیہ کو (لہذا مسکن چرخشی کو) انتصابی محور کے گرد گھماتی ہے۔ اس گھومتی حرکت کو استقبالی حرکت کہتے ہیں۔

۲. مسکن چرخشی کی استقبالی حرکت شرح تلاش کرپائیں گے۔

۳. جان پائیں گے کہ استقبالی حرکت شرح پر مسکن چرخشی کی کمیت کا کوئی اثر نہیں۔

کلیدی تصویر

• چکر کھاتی مسکن چرخشی کے تیک سے گزرتی انتصابی محور کے گرد مسکن چرخشی ذیل شرح سے استقبالی حرکت کر سکتی ہے:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

جہاں M مسکن چرخشی کی کمیت، r معیار اثر کا بازو، I گھمیری جمود، اور ω شرح چکر ہے۔

مسکن چرخشی کی استقبالی حرکت

دھرے پر نسب پربیا جو دھرے پر چکر کاٹ سکتا ہو، سادہ مسکن چرخشی دیگا۔ اگر ساکن مسکن چرخشی کے دھرے کا ایک سرتیک پر رکھ کر (شکل 22a.11) مسکن چرخشی چوڑی جائے، وہ دھرے کے نچلے سر پر گھوم کر

نیچے گرے گی۔ چونکہ گرنے میں گھوما شامل ہے، اس پر نیوٹن کا قانون دوم لاگو ہوگا، جو (ذیل) مساوات ۵.۲۹ دیتی ہے۔

$$(۵.۲۱) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

یہ مساوات کہتی ہے کہ نشیب وار گھاؤ (مکن چرخہ گرنے کا عمل) پیدا کرنے والی قوت سروڑ مکن چرخہ کے زاوی معیار حرکت \vec{L} کو ابتدائی قیمت (صفر) سے تبدیل کرے گی۔ مکن چرخہ کے مرکز کیت پر، جس کو ہم پیپے کا مرکز تسلیم کرتے ہیں، عمل پیرا انتخابی قوت $M\vec{g}$ قوت سروڑ $\vec{\tau}$ پیدا کرتی ہے۔ تیک کے سر کے لحاظ سے، جو شکل 22a.11 میں O پر واقع ہے، معیار اثر کا بازو \vec{r} ہے۔ قوت سروڑ $\vec{\tau}$ کی مقدار ذیل:

$$(۵.۲۲) \quad \tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr$$

اور رخ شکل 22a.11 میں دکھایا گیا ہے۔ ($M\vec{g}$ اور \vec{r} کے بیچ زاویہ 90° ہے۔)

تیز چکر کھاتی مکن چرخہ کا رویہ مختلف ہوگا۔ مندرجہ ذیل دھرا افقی سے اوپر وار زاویے پر رکھ کر مکن چرخہ کی رہا کی جاتی ہے۔ ابتدا میں مکن چرخہ معمولی نیچے (گرتے ہوئے) گھومتی ہے، لیکن اس کے بعد دھرے پر چکر کاٹتے ہوئے، نقطہ تیک O سے گزرتی انتہائی محور کے گرد افقی گھومنا شروع کرتی ہے، جو استقبال حرکت کہلاتا ہے۔

مکن چرخہ گرتے کیوں نہیں؟ چکر کاٹتے ہوئے مکن چرخہ کی طرح چکر کاٹتی مکن چرخہ نیچے کیوں نہیں گرتی؟ رہا کرنے پر مکن چرخہ گرنے شروع کرتی ہے، تاہم $M\vec{g}$ کی پیدا کردہ قوت سروڑ ابتدائی زاوی معیار حرکت کو صفر قیمت سے تبدیل نہیں کرتی، بلکہ چکر سے پیدا غیر صفر قیمت سے تبدیل کرتی ہے۔

یہ سمجھنے کے لئے کہ ابتدائی غیر صفر زاوی معیار حرکت کیسے مکن چرخہ کو استقبالی حرکت پر مجبور کرتا ہے، ہمیں چکر سے پیدا مکن چرخہ کے زاوی معیار حرکت \vec{L} پر غور کرنا ہوگا۔ صورت حال آسان بنانے کی خاطر، ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ \vec{L} کے لحاظ سے استقبالی حرکت سے پیدا زاوی معیار حرکت متابل نظر انداز ہے۔ ساتھ ہی، جیسا شکل aa.22b میں دکھایا گیا ہے، ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ جس لمحے استقبال حرکت شروع ہوتی ہے، دھرا افقی ہے۔ مساوات ۵.۳۱ سے \vec{L} کی مقدار لکھتے ہیں:

$$(۵.۲۳) \quad L = I\omega$$

جہاں دھرے کے لحاظ سے I مکن چرخہ کا گھمیری جمود اور دھرے پر چکر کاٹنے کی پیپے کی زاوی رفتار ω ہے۔ جیسا شکل 22b.11 میں دکھایا گیا ہے سمتیہ \vec{L} دھرے کے ہمراہ ہوگا۔ چونکہ \vec{L} معیار اثر کے بازو \vec{r} کو متوازی ہے، قوت سروڑ $\vec{\tau}$ لازماً \vec{L} کو عمود دار ہوگا۔

مساوات ۵.۲۱ کہتی ہے، وقتی وقفہ dt میں قوت سروڑ $\vec{\tau}$ مکن چرخہ کے زاوی معیار حرکت کی قیمت میں (ذیل) معمولی تبدیلی $d\vec{L}$ پیدا کرتی ہے۔

$$(۵.۲۴) \quad d\vec{L} = \vec{\tau} dt$$

تاہم، تیز چکر کا نئی مسکن چپرنی کے لئے، \vec{L} کی مقدار مساوات ۵.۴۳ کے تحت اٹل ہے۔ یوں قوت سرو و صرف \vec{L} کا رخ تبدیل کر سکتا ہے، تاکہ اس کی مقدار

مساوات ۵.۴۳ کے تحت $d\vec{L}$ کا رخ \vec{L} کے رخ، \vec{L} کو عمود دار ہوگا۔ زاوی معیار حرکت کی مقدار L تبدیل کیے بغیر، \vec{L} کے رخ میں \vec{L} تبدیل کرنے کا واحد طریقہ، جیسا شکل 22c.11 میں دکھایا گیا ہے، محور z کے گرد \vec{L} گھمانا ہے۔ \vec{L} کی مقدار برقرار رہتی ہے، سمتیہ \vec{L} کا سردا زری راہ پر چلتا ہے، اور \vec{L} ہمیشہ اس راہ کو مماسی رہتا ہے۔ چونکہ \vec{L} لازماً اس دھڑے کے رخ ہوگا، دھڑے کو محور z کے گرد \vec{L} کے رخ گھومنا ہوگا۔ یوں استقبالی حرکت پیدا ہو گی۔ ابتدائی زاوی معیار حرکت میں تبدیلی کے رد عمل کے دوران چکر کا نئی مسکن چپرنی کو نیوٹن کے قانون دوم (کے زاوی رد پ) پر پورا اثرنا ہوگا؛ یوں گرنے کے بجائے اس کو استقبال حرکت کرنی ہوگی۔

استقبال حرکت۔ ہم مساوات ۵.۴۳ اور مساوات ۵.۴۲ استعمال کر کے $d\vec{L}$ کی مقدار تلاش کر کے:

$$dL = \tau dt = Mgr dt \quad (۵.۴۵)$$

استقبال حرکت کے شرح Ω تلاش کر سکتے ہیں۔ باریک دستی وقفہ dt میں \vec{L} میں معمولی تبدیلی رونما ہوگی، دھڑا اور \vec{L} محور z کے گرد استقبال حرکت کرتے ہوئے چھوٹے زاویہ $d\phi$ سے گزرتے ہیں۔ (شکل 22c.11 میں زاویہ $d\phi$ بڑھا چڑھا کر پیش کیا گیا ہے، تاکہ اس کی وضاحت ہو۔) مساوات ۵.۴۳ اور مساوات ۵.۴۵ کی مدد سے $d\phi$ ذیل حاصل ہوگا۔

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}$$

دونوں اطراف dt سے تقسیم کر کے شرح $\Omega = d\phi/dt$ رکھ کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad (\text{استقبالی حرکت کی شرح}) \quad (۵.۴۶)$$

یہ نتیجہ اس مفروضے کے تحت درست ہوگا کہ چکر کاٹنے کی شرح ω زیادہ ہو۔ یاد رہے، ω بڑھانے سے Ω گھٹتا ہے۔ ساتھ ہی یاد رکھیں، اگر تبدیلی قوت Mg مسکن چپرنی پر عمل نہ کرتی استقبالی حرکت نہ ہوتی، تاہم I کی M کا قفا عمل ہے لہذا مساوات ۵.۴۶ میں کیت کٹ جانے کا اور Ω کیت پر منحصر نہیں ہوگا۔

مساوات ۵.۴۶ کا اطلاق اس چکر کاٹنے مسکن چپرنی پر بھی ہوگا جس کا دھڑا افق کے ساتھ زاویے پر ہو۔ اس کا اطلاق چکر کاٹنے لٹو پر بھی ہوگا، چونکہ لٹو در حقیقت افق کے ساتھ زاویے پر مسکن چپرنی ہی ہے۔

نظر ثانی اور خلاصہ

لوہکے اجسام رد اس R کا پہیا جو ہماری سے لڑھکتا ہو کے لئے ذیل ہوگا:

$$v = \omega R \quad (۵.۲)$$

باب ۵. لڑھکاؤ، قوت سرور، اور زاوی معیار حرکت

جہاں پہلے کے مرکز کیت کی خطی رفتار مرکز کیت v اور وسط کے گرد پہلے کی زاوی رفتار ω ہے۔ پہلے کو ”سڑک“ کے نقطہ P کے، جہاں پہیا سڑک سے تماس میں ہے، گرد لچاتی گھومت تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطہ پر پہلے کی زاوی رفتار پہلے کے وسط پر پہلے کی زاوی رفتار کے برابر ہوگی۔ لڑھکاتے پہلے کی حرکت کی توانائی ذیل ہے:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 \quad (5.5)$$

جہاں مرکز کیت پر پہلے کا گھمیری جود مرکز کیت I ہے اور پہلے کی کیت M ہے۔ اگر پہیا مسرع کیا جائے اور ہموار لڑھکنی ہو، مرکز کیت کا اسراع مرکز کیت \vec{a} اور وسط کے گرد زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہوگا۔

$$a = \alpha R \quad (5.6)$$

اگر پہیا زاویہ θ میلان سے ہموار نیچے لڑھکنی ہو، میلان کے اوپر وار ہمسراہ محور x پر اس کا اسراع ذیل ہوگا۔

$$a_x = - \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2} \quad (5.10)$$

قوتے مرور بطور سمتیہ تین ابعاد میں، $\vec{\tau}$ ایک سمتیہ ہوگا جو کسی مقررہ نقطہ (جو عموماً مبدا ہوگا) کے لحاظ سے معین ہوگا: اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.11)$$

جہاں ذرے پر لاگو قوت \vec{F} اور کسی اٹل نقطہ کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین گر سمتیہ \vec{r} دیتا ہے۔ $\vec{\tau}$ کی قدر ذیل ہے:

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp} F \quad (5.12, 5.13, 5.14)$$

جہاں \vec{r} اور \vec{F} کے بیچ زاویہ ϕ ہے، \vec{r} کو عمود دار \vec{F} کا جزو F_{\perp} ہے، اور \vec{F} کا معیار اثر کا بازو r_{\perp} ہے۔ دائیں ہاتھ کا متاعدہ $\vec{\tau}$ کارن دیگا۔

ذرے کا زاویہ معیار حرکت ایک ذرے جس کی کیت m ، خطی معیار حرکت \vec{p} ، اور خطی سمتی رفتار \vec{v} ہوگا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ ایک سمتیہ (ذیل) ہوگا جو کسی اٹل نقطہ (جو عموماً مبدا ہوگا) کے لحاظ سے معین ہوگا۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (5.15)$$

$\vec{\ell}$ کی قدر ذیل دیتی ہیں:

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (5.16)$$

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (5.17)$$

$$\ell = r_{\perp} p = r_{\perp} mv \quad (5.18)$$

جہاں \vec{r} اور \vec{p} کے بیچ زاویہ ϕ ہے، \vec{r} کو عمود دار \vec{p} اور \vec{v} کے جزو p_{\perp} اور v_{\perp} ہیں، اور اٹل نقطہ کا مبسوط \vec{p} سے عمود دار فاصلہ r_{\perp} ہے۔ دایاں ہاتھ متاعدہ $\vec{\ell}$ کارن دیگا۔

نیوٹن کے قانون دوم کا زاویہ روپ ذرے کے لئے نیوٹن کا قانون دوم زاویہ روپ میں ذیل لکھا جاسکتا ہے:

$$(۵.۳۳) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

جہاں ذرے پر صافی قوت مسروڑ $\vec{\tau}$ اور ذرے کا زاویہ معیار حرکت \vec{L} ہے۔

ذروں پر مشتمل نظام کا زاویہ معیار حرکت ذروں پر مشتمل نظام کا زاویہ معیار حرکت \vec{L} ذروں کے انفرادی زاویہ معیار حرکت \vec{L}_i کا سمتیہ مجموعہ ہوگا۔

$$(۵.۳۴) \quad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

اس زاویہ معیار حرکت کا وقتی تفرق نظام پر صافی بیرونی قوت مسروڑ (نظام سے باہر ذروں کے ساتھ باہم عمل سے پیدا قوت مسروڑ کے سمتی مجموعہ) کے برابر ہوگا۔

$$(۵.۳۵) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{ذروں پر مشتمل نظام})$$

استوار جسم کا زاویہ معیار حرکت مقررہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کا محور گھماؤ کو متوازی، زاویہ معیار حرکت کا جزو ذیل ہوگا۔

$$(۵.۳۶) \quad L = I\omega \quad (\text{استوار جسم، مقررہ محور})$$

زاویہ معیار حرکت کے بقا نظام پر صافی بیرونی قوت مسروڑ صفر ہونے کی صورت میں نظام کا زاویہ معیار حرکت \vec{L} اٹل ہوگا۔

$$(۵.۳۷) \quad \vec{L} = \text{مستقل} \quad (\text{جب النظام})$$

$$(۵.۳۸) \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{جب النظام})$$

یہ زاویہ معیار حرکت کے بقا کا قانون ہے۔

مسکن چرخہ کے استقبال حرکت چکر کاٹی مسکن چرخہ تیک سے گزرتی انتہائی محور پر ذیل شرح سے استقبال حرکت کر سکتی ہے:

$$(۵.۳۹) \quad \Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

جہاں M مسکن چرخہ کی کمیت، r معیار اثر کا بازو، I گھمیری جمود، اور ω چکر کاٹنے کی شرح ہے۔

سوالات

سوال ۵.۱: ایک کیت اور ایک مستقل رفتار پر چلتے ہوئے تین ذروں کے سمتی رفتار سمتیات شکل 23.11 میں دکھائے گئے ہیں۔ نقاط a ، b ، c اور d چوکور کی راس پر جبکہ e اس کے مرکز پر ہے۔ ان نقطوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، نقطہ پر تین ذروی نظام کے صافی زاوی معیار حرکت کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۵.۲: ذرہ A اور ذرہ B کا xyz محدد $(1\text{ m}, 1\text{ m}, 0)$ اور $(1\text{ m}, 0, 1\text{ m})$ ہے (شکل 24.11)۔ ہر ایک ذرے پر تین گسختی دار قوت عمل کرتی ہیں، جن کی مقدار ایک برابر اور رخ ایک ایک ممدی محور کے رخ ہے۔ (ا) کون سی قوت مبداء پر محور y کے متوازی قوت مسروڑ پیدا کرتی ہے؟ (ب) مبداء کے لحاظ سے آرے پر قوت مسروڑ کی مقدار کے لحاظ سے قوتوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۵.۳: ڈوری دار لٹو کا دھانگہ (ا) قوت \vec{F}_2 سے (جس کا خط عمل میسر پر نقطہ تماس سے گزرتا ہے)، (ب) قوت \vec{F}_1 (جس کا خط عمل نقطہ تماس سے بلندی پر گزرتا ہے)، اور (ج) قوت \vec{F}_3 (جس کا خط عمل نقطہ تماس سے دائیں گزرتا ہے) سے کھینچا جاتا ہے۔ ابتدائی طور سا کن ڈوری دار لٹو کو کیا ہوگا؟

سوال ۵.۴: کسی مقررہ نقطہ کے لحاظ سے ذرے کے تعین گر سمتیہ \vec{r} کی مقدار 3 m ، اور ذرے پر قوت \vec{F} کی مقدار 4 N ہے۔ اگر وہاں قوت مسروڑ کی مقدار (ا) صفر اور (ب) 12 N m ہو، \vec{r} اور \vec{F} کے رخ کے بیچ زاویہ کیا ہوگا؟

سوال ۵.۵: مبداء پر رکھے ذرے پر ایک مقدار کی تین قوت عمل کرتے ہیں (شکل 26.11)۔ \vec{F}_1 سیدھا صفحے کے اندر رخ عمل کرتی ہے۔ قوتوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، (ا) نقطہ P_1 ، (ب) نقطہ P_2 ، اور (ج) نقطہ P_3 پر پیدا قوت مسروڑ کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۵.۶: ایک ذرے کا زاوی معیار حرکت $\ell(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\ell = 3t + 4$ ، (ب) $\ell = 2$ ، (ج) $\ell = 4/t$ ، اور (د) $\ell = 6t^2$ ہے۔ کس صورت میں ذرے پر صافی قوت مسروڑ کی مقدار (ا) صفر ہے، (ب) مثبت اور مستقل ہے، (ج) منفی اور مقدار بڑھ رہی ہے ($t > 0$)، اور (د) منفی اور مقدار گھٹ رہی ہے ($t > 0$)؟

سوال ۵.۷: انتصابی محور پر حنائف گھڑی گھومتے مقرر ص کے چکا پر بھونزا بیٹھا ہے۔ بھونزا گھومنے کے رخ چکا پر چلنا شروع کرتا ہے۔ کیا ذیل مقدار کی (محور گھماؤ پر ناپی) مقدار بڑھتی ہے، گھٹتی ہے، یا تبدیل نہیں ہوتی؟ (مقرر ص حنائف گھڑی چلتا رہتا ہے۔) (ا) بھونزا و مقرر ص نظام کا زاوی معیار حرکت، (ب) بھونزا کا زاوی معیار حرکت اور زاوی سمتی رفتار، اور (ج) مقرر ص کا زاوی معیار حرکت اور زاوی سمتی رفتار۔ (د) اگر بھونزا گھومنے کے الٹ رخ چلتا ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

سوال ۵.۸: مستطیل سل جو وسطی نقطہ O سے گزرتی انتصابی محور کے گرد گھوم سکتی ہے کا فصائی نظارہ شکل 27.11 میں پیش ہے۔ سات مقامات سے ہوائی بندوق سے چھرا سل پر مارا جاسکتا ہے، جو سل میں دھنس جاتا ہے۔ چھروں کی کیت ایک جیسی اور رفتار ایک برابر ہے۔ (ا) مقامات کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، چھرا لگنے کے بعد سل (اور چھرا) کی زاوی رفتار کے لحاظ سے کریں۔ (ب) فصائے دیکھتے ہوئے کن راہ کے لئے سل (اور چھرا) کی O پر زاوی معیار حرکت منفی ہوگی؟

سوال ۵.۹: شکل 28.11 میں پیسے کے زاوی معیار حرکت کی مقدار L بالقابل وقت t پیش ہے۔ چار حرف دار و مستقی دورانیوں کی درجہ بندی پیسے پر عمل پسیرا قوت مسروڑ کی مقدار کے لحاظ سے کریں۔ اعظم قیمت اول رکھیں۔

سوال ۵.۱۰: مستقل سستی رفتار t پر چلتا ہوا ذرہ اور پانچ نقطے xy محدود شکل 29.11 میں دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ پر ذرے کے زاوی معیار حرکت کی رفتار کے لحاظ سے نقطوں کی درجہ بندی کریں۔ اعظم قیمت اول رکھیں۔

سوال ۵.۱۱: توپ کا گولا اور نچاسا کن حالت سے میلان پر نشیب وار لڑھکتے ہیں۔ کیا توپ کے گولے کا کچنے سے (۱) زمین تک پہنچنے کا دورانیہ اور (ب) زمین پر پہنچ کر خطی حرکی توانائی زیادہ ہوگی، کم ہوگی، یا دونوں برابر ہیں؟

سوال ۵.۱۲: پیتل کے ٹھوس بیلن اور لکڑی کے ٹھوس بیلن کی کیت اور رداس ایک ہیں (لکڑی کا بیلن زیادہ لمبا ہے)۔ ایک ساتھ رہائی کے بعد دونوں میلان پر لڑھکتے اترتے ہیں۔ (۱) کونسا بیلن زمین پر پہلے پہنچے گا، یا کیا دونوں ایک ساتھ پہنچتے ہیں؟ (ب) لکڑی کے بیلن کا سر کاٹ کر بیلن کو پیتل کے بیلن جتنا بنایا جاتا ہے، اور پیتل کے بیلن کی وسطی لمبی محور میں سوراخ کر کے کیت گھٹا کر دونوں بیلن کی کیت برابر کی جاتی ہے۔ اب کونسا بیلن متا بلے میں برتری حاصل کرتا ہے، یا دونوں متا بلے میں برابر ثابت ہوتے ہیں؟

سوالات

مستقیم حرکت اور گھا مسل کر لڑھکا دیتے ہیں

سوال ۵.۱۳: ایک گاڑی 80 km h^{-1} رفتار سے استوا سڑک پر محور x کے مثبت رخ چپل رہی ہے۔ اس کے پہیوں کا قطر 66 cm ہے۔ گاڑی میں سوار شخص کے لحاظ سے، اکائی سمتیہ ترقیم میں، پیپے کے (۱) وسط، (ب) بالا سر، اور (ج) نیچے سر کی سستی رفتار t کیا ہوگی، اور پیپے کے (د) وسط، (۵) بالا سر، اور (و) نیچے سر کے اسراع کی مقدار a کیا ہوگی؟ سڑک کے کنارے شخص کے لحاظ سے، اکائی سمتیہ ترقیم میں، پیپے کے (ز) وسط، (ح) بالا سر، اور (ط) نیچے سر کی سستی رفتار t کیا ہوگی، اور پیپے کے (ی) وسط، (یا) بالا سر، اور (یب) نیچے سر کے اسراع کی مقدار a کیا ہوگی؟

سوال ۵.۱۴: ایک گاڑی، جس کے پہیوں کا قطر 75.0 cm ہے، 80 km h^{-1} سے حرکت میں ہے۔ (۱) پیپے کے دھرے کے لحاظ سے پیپے کا زاوی رفتار کیا ہوگا؟ (ب) پیپے کے 30.0 مکمل چکر میں (بغیر پھسلے) گاڑی روکی جاتی ہے۔ پیپے کے زاوی اسراع کی مقدار کیا ہوگی؟ (ج) رکنے کے دوران گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

لڑھکاؤ کی قوتیں اور حرکی توانائی

سوال ۵.۱۵: افقی زمین پر 140 kg کا گھیرا لڑھکتا ہے۔ گھیرے کا مرکز کیت 0.150 m s^{-1} رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ گھیرا روکنے کے لئے کتنا کام سرانجام کرنا ہوگا؟

سوال ۵.۱۶: ٹھوس یکاں کرہ میلان پر لڑھکتا اترتا ہے۔ (۱) کرہ کے مرکز کیت کے زاوی اسراع کی مقدار 0.10 g ہونے کے لئے زاویہ میلان کیا ہوگا؟ (ب) اگر بلار گزسل اسی میلان پر پھسل کر اترے، کیا اس کے اسراع کی مقدار زیادہ ہوگی، کم ہوگی، یا وہی ہوگی؟ کیوں؟

سوال ۵.۱۷: ایک گاڑی، جس کی کیت 1000 kg ہے، کا پھیا 10 kg ہے۔ چپلتی گاڑی کے کل حرکی توانائی کا کتنا حصہ (چپار) پہیوں کے دھرے پر گھاؤ کی بدولت ہوگا؟ پیپے کو یکاں مقرر تصور کریں۔ آپ کو پیپے کا رداس

حبانے کی ضرورت کیوں درپیش نہیں؟

سوال ۵.۱۸: شکل 30.11 میں، 30° میلان پر 0.500 kg کیت اور 6.00 cm رداس کی لڑھکنی جسم کی رفتار v بالقابل وقت t ترسیم کی گئی ہے۔ رفتار کی محور کا پیمانہ $v_s = 4.0 \text{ m s}^{-1}$ طے کرتا ہے۔ جسم کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۵.۱۹: ٹھوس سیلن، جس کا رداس 10 cm اور کیت 12 kg ہے، ساکن حالت سے آغاز کر کے $\theta = 30^\circ$ زاویے کی چھت پر $L = 6.0 \text{ m}$ فاصلہ بغیر پھسلے لڑھک کر طے کرتا ہے (شکل 31.11)۔ (ا) چھت سے گرتے لمحے طویل محور پر سیلن کا زاوی رفتار کیا ہوگا؟ (ب) چھت کا کنارہ زمین سے $H = 5.0 \text{ m}$ بلندی پر ہے۔ چھت کے کنارے سے سیلن کتنے افقی فاصلے پر استوا زمین پر گرے گا؟

سوال ۵.۲۰: شکل 32.11 میں 0.400 kg کیت کے ٹھوس یکساں گیند کی، جو محور x پر ہموار لڑھک سکتا ہے، مخفی توانائی $U(x)$ ترسیم کی گئی ہے۔ محور $U_s = 100 \text{ J}$ طے کرتا ہے۔ محور x پر مخفی رخ 75 J میکانی توانائی کے ساتھ گیند $x = 7.0 \text{ m}$ پر روانہ کیا جاتا ہے۔ (ا) اگر گیند $x = 0 \text{ m}$ تک پہنچ سکتا ہو، اس کی رفتار وہاں پہنچ کر کیا ہوگا، اور اگر وہاں تک پہنچنے کے مقابل نہ ہو، تب واپس ہونے کا نقطہ کیا ہوگا؟ اب $x = 7.0 \text{ m}$ پر گیند 75 J توانائی کے ساتھ مثبت رخ روانہ کیا جاتا ہے۔ (ب) اگر گیند $x = 13 \text{ m}$ تک پہنچ سکتا ہو، اس کی رفتار وہاں پہنچ کر کیا ہوگا، اور اگر وہاں تک پہنچنے کے مقابل نہ ہو، تب واپس ہونے کا نقطہ کیا ہوگا؟

سوال ۵.۲۱: ٹھوس گیند ساکن حالت سے $H = 6.0 \text{ m}$ بلندی سے آغاز کر کے ہموار لڑھکتا ہوا $h = 2.0 \text{ m}$ اونچے افقی کنارے سے گرتا ہے (شکل 33.11)۔ نقطہ A سے کتنے افقی فاصلے پر گیند زمین پر گرے گا؟

سوال ۵.۲۲: ایک کھوکھلا کرہ جس کا رداس 0.15 m اور مرکز کیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود $I = 0.040 \text{ kg m}^2$ ہے، افقی سے 30° زاویے کے میلان پر ہموار لڑھک کر اوپر وار حرکت کرتا ہے۔ ابتدائی نقطہ پر کرہ کی کل حرکی توانائی 20 J ہے۔ (ا) ابتدائی حرکی توانائی ک کتنا حصہ گھمیری ہے؟ (ب) ابتدائی نقطہ پر کرہ کے مرکز کیت کی رفتار کیا ہے؟ ابتدائی نقطہ سے میلان کے ہمراہ اوپر وار 1.0 m فاصلہ طے کرنے کے بعد، اس کی (ج) کل حرکی توانائی اور (د) مرکز کیت کی رفتار کیا ہیں؟

سوال ۵.۲۳: رداس 0.30 m اور کیت 10 kg پیپے پر 10 N قدر کی مستقل افقی قوت \vec{F} لاگو کی جاتی ہے (شکل 34.11)۔ پیپا افقی سطح پر ہموار لڑھکتا ہے، اور اس کے مرکز کیت کے اسراع کی قدر 0.60 m s^{-2} ہے۔ (ا) اکائی سمتیہ ترقیم میں پیپے پر رگڑی قوت کیا ہے؟ (ب) مرکز کیت سے گزرتی مرکز گھماؤ پر پیپے کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۵.۲۴: پیتل کا ٹھوس گیند، جس کی کیت 0.280 kg ہے، گھیر در گھیر راہ کے سیدھے حصے پر رہا کرنے سے راہ کے ہمراہ ہموار لڑھک سکتا ہے (شکل 35.11)۔ دائری گھیر کا رداس $R = 14.0 \text{ cm}$ ، اور گیند کا رداس $r \ll R$ ہے۔ (ا) اگر گھیر کے منہ از پر پہنچ کر گیند راہ سے علیحدہ ہونے کے دہانے پر ہو، h کیا ہوگی؟ (ب) اگر گیند $h = 6.00R$ پر رہا کیا جائے، نقطہ Q پر پہنچ کر گیند پر قوت کی (ب) مقدار اور (ج) رخ کیا ہوں گے؟

سوال ۵.۲۵: غیر یکساں گیند ایک گیند، جس کا رداس R اور کیت M ہے، ساکن حالت سے میلان پر ہموار لڑھک کر اترنے کے بعد رداس 0.48 m کے دائری گھیر پہنچتا ہے (شکل 36.11)۔ گیند کی ابتدائی بلندی

سوال ۵.۲۶: $h = 0.36 \text{ m}$ ہے۔ گھیر کے نشیبی نقطے پر پہنچ کر گیند پر عمودی قوت کی مقدار 2.00 Mg ہے۔ اندرونی کرہ (جو یکساں کثافت مادے سے بنا ہے) کے اوپر کروی خول (جو کسی دوسرے یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) چپڑھا کر گیند بنایا گیا ہے۔ گیند کے گھمیری جہود کا عمومی کلیہ $I = \beta MR^2$ ہے، تاہم β کی قیمت 0.4 نہیں ہے (یکساں گیند کے لئے $\beta = 0.4$ ہوتا)۔ β کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۷: ایک چھوٹا، ٹھوس، یکساں گیند نقطہ P سے پھیکا جاتا ہے تاکہ گیند افقی راہ پر ہموار لڑھک کر، میلان پر چپڑھا کر، سطح مرتفع پہنچے (شکل 37.11)۔ سطح مرتفع کے کنارے سے افقی فاصلہ d دور گیند دوسری (نچلی) سطح مرتفع پر گرتا ہے۔ انتظامی بلندیاں $h_1 = 5.00 \text{ cm}$ اور $h_2 = 1.60 \text{ cm}$ ہیں۔ اگر $d = 6.00 \text{ cm}$ ہو نقطہ P پر گیند کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال ۵.۲۸: رداس $R = 11 \text{ cm}$ کا گیند افقی راہ پر روانا کیا جاتا ہے (شکل 38.11)۔ گیند ابتدائی رفتار $v_0 = 8.5 \text{ ms}^{-1}$ مرکزیت v کے ساتھ راہ پر گھٹتا ہے اور اس کی ابتدائی زاویہ رفتار $\omega_0 = 0$ ہے۔ گیند اور راہ کے بیچ حرکتی رگڑ کا مستقل 0.21 ہے۔ حرکتی رگڑی قوت f_k گیند پر عمل پیرا ہو کر گیند کو خطی مسرع کرتی ہے اور ساتھ ہی قوت مسرور پیدا کرتی ہے، جو گیند کو زاویہ مسرع کرتی ہے۔ خطی رفتار مرکزیت v کافی گھٹنے اور زاویہ رفتار ω کافی بڑھنے کے بعد گیند گھٹنا بند کرتا ہے اور ہموار لڑھکنا شروع کرتا ہے۔ (ا) اس لمحے پر ω کی صورت میں مرکزیت v کیا ہوگا؟ گھٹنا کے دوران گیند کا (ب) خطی اسراع اور (ج) زاویہ اسراع کیا ہوں گے؟ (د) گیند کتنی دیر گھٹتا ہے؟ (ہ) گیند کتنے فاصلہ گھٹتا ہے؟ (و) جس لمحے گیند ہموار لڑھکنا شروع کرتا ہے اس لمحے مرکزیت v کیا ہوگا؟

سوال ۵.۲۹: غیر یکساں بیلیں جنم۔ شکل 39.11 میں کیبت M اور رداس R کا بیلیں جنم ہموار لڑھک کر میلان سے اتر کر افقی حصے پر پہنچتا ہے۔ یہاں سے وہ لڑھک کر، کنارے سے $d = 0.506 \text{ m}$ افقی فاصلے پر زمین پر گر جاتا ہے۔ جنم کی ابتدائی بلندی $H = 0.90 \text{ m}$ اور میلان کا کنارہ $h = 0.10 \text{ m}$ بلند ہے۔ اندرونی بیلیں (جو یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) پر بیرونی بیلیں خول (جو مختلف یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) چپڑھا کر جنم بنایا گیا ہے۔ جنم کا گھمیری جہود عمومی کلیہ $I = \beta MR^2$ دیتا ہے، جہاں β کی قیمت 0.5 نہیں ہے (یکساں بیلیں کی صورت میں $\beta = 0.5$ ہوگا)۔ β تلاش کریں۔

ڈوری دار لٹو

سوال ۵.۳۰: ڈوری دار لٹو کا گھمیری جہود 980 g cm^2 اور کیبت 120 g ہے۔ اس کے دھڑے کا رداس 3.2 mm ، اور ڈور کی لمبائی 120 cm ہے۔ ڈوری دار لٹو ساکن حالت سے ڈوری کے آخری سر تک لڑھکتا ہے، (ا) اس کے خطی اسراع کی مقدار کیا ہوگی؟ (ب) ڈور کے آخری سر تک لٹو کتنی دیر میں پہنچتا ہے؟ (ج) ڈور کے آخری سر کو پہنچ کر لٹو کی (ج) خطی رفتار، (د) مستقیم حرکتی توانائی، (ہ) گھمیری حرکتی توانائی، اور (و) زاویہ رفتار کیا ہیں؟

سوال ۵.۳۱: ایک بڑا ڈوری دار لٹو کرین سے رہا کیا جاتا ہے۔ لٹو کی کیبت 116 kg ہے جو 32 cm رداس کے دو متر ص 3.2 cm رداس کے دھڑے کے ساتھ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ (ا) اترنے اور (ب) چپڑھنے کے دوران لٹو کے اسراع کی مقدار کیا ہے؟ (ج) لڑھکاؤ کے دوران ڈور کا تناؤ کیا ہے؟ (د) کیا یہ ڈور کے انتہائی تناؤ 52 kN کے متعرب ہے؟

منہض کریں آپ اس ڈوری دار لٹوکا بڑا نمونہ (اسی شکل و صورت اور مادے کا) بناتے ہیں۔ (۵) کیا اتار کے دوران بڑے لٹو کے اسراع کی مقدار زیادہ ہوگی، کم ہوگی، یا وہی ہوگی؟ (۶) ڈور کا تن اور زیادہ ہوگا، کم ہوگا، یا وہی ہوگا؟

قوت سرور پر نظر ثانی

سوال ۵.۳۱: قوت $\vec{F}_1 = (3.0 \text{ N})\hat{k}$ اور $\vec{F}_2 = (-2.0 \text{ N})\hat{j}$ ایک پسور پر عمل کرتی ہیں، جو $(0, -4.0 \text{ m}, 5.0 \text{ m})$ محدود پر بیٹھا ہے۔ مبداء کے لحاظ سے پسور پر صافی قوت سرور اکائی سمتیہ ترقیم میں کیا ہوگی؟

سوال ۵.۳۲: ایک ناشپاتی پر، جو $(-2.0 \text{ m}, 0, 4.0 \text{ m})$ پر واقع ہے، عمل پیرا قوت کا واحد جزو $F_x = 6.0 \text{ N}$ ، $F_y = -6.0 \text{ N}$ (ب)، $F_z = 6.0 \text{ N}$ (ج)، $F_z = -6.0 \text{ N}$ (د) ہے۔ مبداء کے لحاظ سے اکائی سمتیہ ترقیم میں ناشپاتی پر قوت سرور کیا ہوگی؟

سوال ۵.۳۳: ایک ذرے پر، جو $(0, -4.0 \text{ m}, 3.0 \text{ m})$ پر واقع ہے، ذیل قوت عمل کرتی ہے: \vec{F}_1 (۱) جہاں $F_{1x} = 2.0 \text{ N}$ ، $F_{1y} = F_{1z} = 0$ ہے اور \vec{F}_2 (ب) جہاں $F_{2x} = 0$ ، $F_{2y} = 0$ ، $F_{2z} = 4.0 \text{ N}$ ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں، مبداء کے لحاظ سے ذرے پر صافی قوت سرور کیا ہوگی؟

سوال ۵.۳۴: ایک ذرے پر، جو xyz محدودی نظام میں حرکت کرتا ہے، قوت عمل کرتی ہے۔ جب مبداء کے لحاظ سے ذرے کا مقام $\vec{r} = (2.00 \text{ m})\hat{i} - (3.00 \text{ m})\hat{j} + (2.00 \text{ m})\hat{k}$ ہو، ذرے پر قوت $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ ہے، اور مبداء کے لحاظ سے مطابقتی قوت سرور $\vec{\tau} = (4.00 \text{ N m})\hat{i} + (2.00 \text{ N m})\hat{j} - (1.00 \text{ N m})\hat{k}$ ہے۔ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۵: ایک پتھر جس کا مقام مبداء کے لحاظ سے $\vec{r} = (0.50 \text{ m})\hat{j} - (2.0 \text{ m})\hat{k}$ ہے پر قوت $\vec{F} = (3.0 \text{ N})\hat{i} - (2.0 \text{ N})\hat{j}$ عمل کرتی ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں (۱) مبداء اور (ب) نقطہ $(2.0 \text{ m}, 0, -3.0 \text{ m})$ کے لحاظ سے پتھر پر قوت سرور کیا ہوگی؟

سوال ۵.۳۶: کالی سرچ کی بوتل مبداء کے لحاظ سے $(3.0 \text{ m}, -2.0 \text{ m}, 4.0 \text{ m})$ محدود پر پڑی ہے۔ بوتل پر ذیل قوت عمل کرتی ہے (۱) $\vec{F}_1 = (3.0 \text{ N})\hat{i} - (4.0 \text{ N})\hat{j} + (5.0 \text{ N})\hat{k}$ ، (ب) $\vec{F}_2 = (-3.0 \text{ N})\hat{i} - (4.0 \text{ N})\hat{j} - (5.0 \text{ N})\hat{k}$ ، اور (ج) \vec{F}_1 اور \vec{F}_2 کا مجموعہ۔ مبداء کے لحاظ سے بوتل پر قوت سرور اکائی سمتیہ ترقیم میں کیا ہوگی؟ (د) نقطہ $(3.0 \text{ m}, 2.0 \text{ m}, 4.0 \text{ m})$ کے لحاظ سے جزو ج کی قوت سرور دوبارہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۷: قوت $\vec{F} = (-8.0 \text{ N})\hat{i} + (6.0 \text{ N})\hat{j}$ ایک ذرے پر عمل کرتی ہے جہاں تعین گر سمتیہ $\vec{r} = (3.0 \text{ m})\hat{i} + (4.0 \text{ m})\hat{j}$ ہے۔ (۱) اکائی سمتیہ ترقیم میں ذرے پر مبداء کے لحاظ سے قوت سرور کیا ہوگی، اور (ب) \vec{r} اور \vec{F} کے بیچ زاویہ کیا ہوگا؟

زاوی معیار حرکت

سوال ۵.۳۸: شکل 40.11 میں دکھائے گئے پر ذرہ P ، جس کی کمیت 2.0 kg ہے، کا تعین کر سکتے ہیں جس کی رفتار 3.0 m اور زاویہ $\theta_1 = 45^\circ$ ہے، اور سمتی رفتار \vec{v} ہے جس کی رفتار 4.0 m اور زاویہ $\theta_2 = 30^\circ$ ہے۔ قوت \vec{F} جس کی رفتار 2.0 N اور زاویہ $\theta_3 = 30^\circ$ ہے P پر عمل پیرا ہے۔ تینوں سمتیہ xy مستوی میں واقع ہیں۔ مبداء کے لحاظ سے P کے زاوی معیار حرکت (ا) کی رفتار اور (ب) رخ کیا ہے، اور P پر قوت مسروڑ (ج) کی رفتار اور (د) رخ کیا ہے؟

سوال ۵.۳۹: ایک جسم، جس کی کمیت 0.25 kg ، تعین کر سکتے ہیں $(2.0\hat{i} - 2.0\hat{k}) \text{ m}$ ، اور سمتی رفتار $\vec{v} = (-5.0\hat{i} + 5.0\hat{k}) \text{ m s}^{-1}$ ہے، پر قوت $\vec{F} = 4.0\hat{j} \text{ N}$ لگاتی عمل کرتی ہے۔ مبداء کے لحاظ سے اور اکائی سمتیہ ترتیم میں (ا) جسم کا زاوی معیار حرکت اور (ب) جسم پر قوت مسروڑ کیا ہے؟

سوال ۵.۴۰: نقطہ (x, y) سے، جس کے محدد $(3.0, -4.0) \text{ m}$ ہیں، کمیت 2.0 kg کا ذرہ فوجم مستوی میں سمتی رفتار سے حرکت کرتے گزرتا ہے۔ سمتی رفتار کے جزو $v_x = 30 \text{ m s}^{-1}$ اور $v_y = 60 \text{ m s}^{-1}$ ہیں۔ اس لمحے پر، اکائی سمتیہ ترتیم میں (ا) مبداء اور (ب) نقطہ $(-2.0, -2.0) \text{ m}$ کے لحاظ سے جسم کا زاوی معیار حرکت کیا ہوگا؟

سوال ۵.۴۱: شکل 41.11 میں لگاتی نظارہ پیش ہے۔ دوزرے xy مستوی میں حرکت کرتے ہیں۔ ذرہ P_1 کی کمیت 6.5 kg ، رفتار $v_1 = 2.2 \text{ m s}^{-1}$ ، اور مبداء O سے فاصلہ $d_1 = 1.5 \text{ m}$ ہے۔ ذرہ P_2 کی کمیت 3.1 kg ، رفتار $v_2 = 3.6 \text{ m s}^{-1}$ ، اور مبداء O سے فاصلہ $d_2 = 2.8 \text{ m}$ ہے۔ مبداء O کے لحاظ سے دو ذروی نظام کے صافی زاوی معیار حرکت (ا) کی رفتار اور (ب) رخ کیا ہے؟

سوال ۵.۴۲: جس لمحے 2.00 kg جسم کا مبداء کے لحاظ سے ہٹاؤ $(2.00 \text{ m})\hat{i} + (4.00 \text{ m})\hat{j} - (3.00 \text{ m})\hat{k}$ ہے، اس کی سمتی رفتار $(3.00 \text{ m s}^{-1})\hat{k} + (3.00 \text{ m s}^{-1})\hat{j} + (6.00 \text{ m s}^{-1})\hat{i}$ ہے اور اس پر قوت $\vec{F} = (6.00 \text{ N})\hat{i} - (8.00 \text{ N})\hat{j} + (4.00 \text{ N})\hat{k}$ عمل کرتی ہے۔ (ا) جسم کا اسراع، (ب) مبداء کے لحاظ سے جسم کا زاوی معیار حرکت، (ج) مبداء کے لحاظ سے جسم پر عمل پیرا قوت مسروڑ، اور (د) جسم کی سمتی رفتار اور جسم پر عمل پیرا قوت کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۳: ایک گیند جس کی کمیت 0.400 kg ہے 40.0 m s^{-1} ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر وار پھینکا جاتا ہے (شکل 42.11)۔ نقطہ رہائی سے 2.00 m افقی فاصلے پر واقع نقطہ P کے لحاظ سے، جب گیند (ا) بلند ترین نقطہ پر ہو اور جب (ب) واپس گرتے ہوئے نصف بلندی پر ہو، گیند کا زاوی معیار حرکت کیا ہوگا؟ گیند پر تھبازی قوت کی قوت مسروڑ P کے لحاظ سے اس وقت کیا ہوگی جب گیند (ج) بلند ترین نقطہ پر ہو اور جب گیند (د) واپس گرتے ہوئے نصف بلندی پر ہو؟

نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

سوال ۵.۴۴: مبداء کے لحاظ سے ذرے پر دو قوت عمل کرتی ہیں: $\vec{\tau}_1$ کی رفتار 2.0 N m اور اس کا رخ محور x کے مثبت رخ ہے، اور $\vec{\tau}_2$ جس کی رفتار 4.0 N m اور رخ محور y کے منفی رخ ہے۔ اکائی سمتیہ ترتیم میں $d\vec{l}/dt$ تلاش کریں، جہاں مبداء کے لحاظ سے ذرے کا زاوی معیار حرکت \vec{l} ہے۔

سوال ۵.۴۵: وقت $t = 0$ پر 3.0 kg ذرے کی سمتی رفتار $\vec{v} = (5.0 \text{ m s}^{-1})\hat{i} - (6.0 \text{ m s}^{-1})\hat{j}$ اور، $x = 3.0 \text{ m}$ ، $y = 8.0 \text{ m}$ ہے۔ ذرے کو 7.0 N قوت محور x کے متغی رخ کھینچتی ہے۔ مبدا کے لحاظ سے (ا) ذرے کا زاوی معیار حرکت، (ب) ذرے پر عمل پیرا قوت سرور، اور (ج) زاوی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۶: محور z کے مثبت جانب سے دیکھتے ہوئے ذرہ مستوی xy میں مبدا کے گرد گھڑی وار حرکت کرتا ہے۔ اگر مبدا کے لحاظ سے ذرے کے زاوی معیار حرکت کی قدر (ا) $4.0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ، (ب) $4.0t^2 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ، (ج) $4.0\sqrt{t} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ، اور (د) $4.0/t^2 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ہو، اگلی سمتیہ ترقیم میں ذرے پر قوت سرور کیا ہوگی؟

سوال ۵.۴۷: وقت t پر، سمتیہ $\vec{r} = 4.0t^2\hat{j} - (2.0t + 6.0t^2)\hat{j}$ مبدا کے لحاظ سے xy محددی نظام میں 3.0 kg ذرے کا مقام دیتا ہے (جہاں \vec{r} میٹر میں اور t سیکنڈ میں ہے)۔ (ا) مبدا کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا قوت سرور کا ریاضی فقرہ تلاش کریں۔ (ب) کیا مبدا کے لحاظ سے ذرے کا زاوی معیار حرکت بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے، یا تبدیل نہیں ہو رہا؟

استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

سوال ۵.۴۸: تین گھومتے فطرص کو دوپٹے ملائے ہیں (شکل 43.11)۔ ایک پٹ فطرص A اور C کے چکا پر لپٹا ہے۔ دوسرا پٹ فطرص A کے وسطی تاہ اور فطرص B کے چکا پر لپٹا ہے۔ پٹے ہمواری سے بغیر پھسل چکا اور تاہ پر حرکت کرتے ہیں۔ فطرص A کا رداس R ؛ اس کے تاہ کا رداس $0.500R$ ؛ فطرص B کا رداس $0.2500R$ ؛ اور فطرص C کا رداس $2.000R$ ہے۔ فطرص B اور C کی کثافت (کیٹ فی اکلی حجم) اور موٹائیاں برابر ہیں۔ فطرص C اور فطرص B کے زاوی معیار حرکت کی فطروں کی نسبت کیا ہے؟

سوال ۵.۴۹: کیٹ $m = 23 \text{ g}$ کے تین ذرے، تین بلاکیٹ سلاخوں سے جھکے ہیں، جن کی لمبائیاں $d = 12 \text{ cm}$ ہے۔ استوار جسم O کے گرد زاوی رفتار $\omega = 0.85 \text{ rad s}^{-1}$ سے گھومتا ہے۔ نقطہ O پر (ا) جسم کا گھمیری جمود، (ب) درمیانے ذرے کے زاوی معیار حرکت کی فطر، اور (ج) جسم کا زاوی معیار حرکت کی فطر کیا ہے؟

سوال ۵.۵۰: ریگ مال کا فطرص، جس کا گھمیری جمود $1.2 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ہے، برقی برما سے جوڑا گیا ہے جس کی موٹر فطرص کے وسطی محور پر 16 N m فطر کی قوت سرور پیدا کرتی ہے۔ اگر قوت سرور 33 ms کے لئے فطراہم کی جائے، اس محور پر فطرص (ا) کے زاوی معیار حرکت اور (ب) زاوی سمتی رفتار کی فطر کیا ہوگی؟

سوال ۵.۵۱: وسطی محور پر اڑن پیپے کا گھمیری جمود 0.140 kg m^2 ہے۔ اس کا زاوی معیار حرکت 1.5 s میں $3.00 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ سے گھٹ کر $0.800 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ہو جاتا ہے۔ (ا) اس دورانیے میں اڑن پیپے پر، وسطی محور کے لحاظ سے، اوسط قوت سرور کی فطر کیا ہے؟ (ب) مستقل زاوی اسراع فرض کرتے ہوئے، اس دورانیے میں پیپا کتنا زاوی طے کرتا ہے؟ (ج) پیپے پر کتنا کام سرانجام ہوگا؟ (د) پیپے کی اوسط طاقت کیا ہے؟

سوال ۵.۵۲: ایک فطرص، جس کا گھمیری جمود 7.00 kg m^2 ہے، تابع وقت قوت سرور τ

سوال ۵.۵۳: دائری گھسیرا اور چوکور سے استوار جسم بنایا گیا ہے (شکل 45.11)۔ گھسیرا کا رداس R اور کیمیت m ہے۔ چوکور چار پتلی یکساں سلاخوں سے بنایا گیا ہے جہاں ایک سلاخ کی کیمیت m اور لمبائی R ہے۔ انتقبالی محور پر استوار جسم 2.5 s دوری عرصہ کی مستقل رفتار سے گھومتا ہے۔ فرض کریں $R = 0.50 \text{ m}$ اور $m = 2.0 \text{ kg}$ ہے۔ محور گھماؤ پر جسم کا (i) گھسیری جمود اور (ب) زاوی معیار حرکت تلاش کریں۔

سوال ۵.۵۴: ابتدائی ساکن مٹرس پر، شکل 46.11 میں پیش، قوت مٹروٹ τ عمل کرتی ہے۔ مٹرس وسطی انتقبالی محور پر گھوم سکتا ہے۔ محور τ کا پیسانہ $\tau_s = 4.0 \text{ N m}$ طے کرتا ہے۔ وقت $t = 7.0 \text{ s}$ اور (ب) $t = 20 \text{ s}$ پر گھسیری محور پر مٹرس کا زاوی معیار حرکت کیا ہوگا؟

زاوی معیار حرکت کی بقا

سوال ۵.۵۵: دو پھسلنے باز^{*}، جن کی کیمیتیں 50 kg ہیں، متوازی راہوں پر، جن کے سچ 3.0 m فاصلہ ہے، ایک دوسرے کی طرف پھسل کر حرکت میں ہیں (شکل 47.11)۔ ان کی آپس میں مخالف سمتی رفتار 1.4 m s^{-1} ہے۔ ایک پھسلن باز بلایت لمب ڈنڈا، ایک سر سے پکڑ کر، اٹھائے ہوا ہے، اور دوسرا پھسلن باز متریب گزرتے وقت ڈنڈے کا دوسرا سر پکڑ لیتا ہے۔ اس کے بعد دونوں ڈنڈے کے وسط کے گرد گھومتے ہیں۔ پھسلنے تختوں[†] اور برف کے سچر گڑت بل نظر انداز ہے۔ (i) حرکت کے دائرے کا رداس، (ب) پھسلن باز کی زاوی رفتار، اور (ج) دو پھسلن باز نظام کی حرکت کی توانائی کیا ہے؟ اس کے بعد، پھسلن باز ڈنڈے کو کھینچ کر متریب آتے ہیں، حتیٰ کہ ان کے سچ فاصل 1.0 m رہ جاتا ہے۔ (د) ان کی زاوی رفتار اور (ه) نظام کی حرکت کی توانائی کیا ہوگی؟ (و) حرکت کی توانائی میں اضافے کے لئے توانائی کہاں سے آئی؟

سوال ۵.۵۶: ایک چوہا، جس کی کیمیت 0.17 kg ہے، انتقبالی محور پر نسب رداس 15 cm مٹرس کے چکا پر حنائف گھڑی حرکت میں ہے۔ مٹرس کا گھسیری جمود $5.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ، اور دھرا ہلار گڑ ہے۔ زمین کے لحاظ سے چوہے کی رفتار 2.0 m s^{-1} ہے، اور مٹرس کی گھڑی وار زاوی رفتار $\omega_0 = 2.8 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔ چوہے کو چکا پر کھانے کو کچھ ملتا ہے لہذا وہ رک کر کھانا شروع کرتا ہے۔ (i) چوہا کے رکنے کے بعد مٹرس کی زاوی رفتار کیا ہوگی؟ (ب) کیا بھونر کے رکنے کے دوران میکانی توانائی کی بقا ہوگی؟

سوال ۵.۵۷: ایک شخص چسبوتر پر کھڑا ہے۔ چسبوتر (بلار گڑ) 1.2 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ شخص کے ہاتھ باہر کو پھیلے ہوئے ہیں اور اس کے دونوں ہاتھوں میں ایک ایک اینٹ ہے۔ وسطی انتقبالی محور پر شخص، اینٹیں، اور چسبوتر پر مشتمل نظام کا گھسیری جمود 6.0 kg m^2 ہے۔ دونوں ہاتھ متریب کرنے سے نظام کا گھسیری جمود گھٹ کر 2.0 kg m^2 ہو جاتا ہے۔ (i) چسبوترے کی نئی زاوی رفتار کیا ہوگی اور (ب) نظام کی نئی حرکت کی توانائی اور پرانی حرکت کی توانائی کی نسبت کیا ہوگی؟ (ج) اضافی حرکت کی توانائی کہاں سے آئی؟

سوال ۵.۵۸: انہدام پذیر چکر دار ستارے کے گھمیری جمود کی قیت ابتدائی قیت کی $\frac{1}{3}$ ہے۔ نئی گھمیری حرکتی توانائی اور ابتدائی گھمیری حرکتی توانائی کی نسبت کیا ہوگی؟

سوال ۵.۵۹: ایک بڑے سپیئر پر، جو انتصابی محور کے گرد بلا رگڑ گھوم سکتا ہے، پشتری نسب ہے (شکل 48.11)۔ ساکن پشتری پر کیت m کی کھلوناریل گاڑی رکھ کر ریل گاڑی کو برقی طاقت منسراہم کی جاتی ہے۔ پشتری کے لحاظ سے ریل گاڑی 0.15 m s^{-1} رفتار کو پہنچتی ہے۔ اگر سپیئر کی کیت 1.1 m اور رداس 0.43 m ہو، اس کی زاوی رفتار کیا ہوگی؟ (سپیئر کو گھیرا تصور کریں؛ رگڑ اور تیلیوں کی کیت نظر انداز کریں۔)

سوال ۵.۶۰: ایک چوباردا اس R دائری فترص کے مرکز سے چکا کی فترص چلتا ہے۔ فترص انتصابی محور پر، بیرونی قوت سرور کی عدم موجودگی میں، گھوم رہا ہے۔ چوباد فترص نظام کی زاوی رفتار شکل 49.11 میں پیش ہے ($\omega_a = 5.0 \text{ rad s}^{-1}$ اور $\omega_b = 6.0 \text{ rad s}^{-1}$ ہے)۔ چکا پر پہنچ کر فترص کے گھمیری جمود کا کتنا حصہ چوبہ کا ہوگا؟

سوال ۵.۶۱: دو فترص کم رگڑی انتصابی دھرے پر یوں نصب کیے گئے ہیں کہ انہیں مسزودج کر کے ایک جسم کی طرح گھمایا جاسکے۔ پہلے فترص کا گھمیری جمود، محور گھماؤ پر، 3.30 kg m^2 ہے اور یہ حنلاف گھڑی 450 چکر فی منٹ گھوم رہا ہے۔ دوسرا فترص، جس کا محور گھماؤ پر گھمیری جمود 6.60 kg m^2 ہے، حنلاف گھڑی 900 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے۔ انہیں مسزودج کیا جاتا ہے۔ (ا) ان کا زاوی رفتار اب کیا ہوگا؟ اس کے برعکس اگر ابتدائی طور پر دوسرا فترص گھڑی وار 900 چکر فی منٹ گھومتا، تب انہیں ملانے کے بعد ان کی (ب) زاوی رفتار اور (ج) گھومنے کا رخ کیا ہوتے؟

سوال ۵.۶۲: برقی موٹر کے مددور کا وسطی محور پر گھمیری جمود $I_m = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ہے۔ تحقیق حنلافی طیارے میں موٹر نسب کر کے طیارے کی سمت بندی کی جاتی ہے۔ موٹر کا دھرا طیارے کے وسطی محور کے ہمسراہ ہے؛ محور پر طیارے کا گھمیری جمود $I_p = 12 \text{ kg m}^2$ ہے۔ طیارے کو وسطی محور پر 30° گھمانے کے لئے مددور کو کتنے چکر دینے ہوں گے؟

سوال ۵.۶۳: متابل نظر انداز گھمیری جمود کے دھرے پر پہلیا 800 چکر فی منٹ زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ دوسرا ساکن پہلیا، جس کا گھمیری جمود دگن ہے، یکدم پہلے سپیئر کے ساتھ مسزودج کیا جاتا ہے۔ (ا) دو پہلیوں اور دھرے کا زاوی رفتار کیا ہوگا؟ (ب) ابتدائی گھمیری حرکتی توانائی کا کتنا حصہ ضائع ہوگا؟

سوال ۵.۶۴: ایک بھونرا جس کی کیت m ہے ایک فترص کے چکا پر بیٹھا ہے۔ فترص کی کیت 4.00 m ہے اور یہ انتصابی محور پر آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ فترص اور بھونرا کی ابتدائی زاوی سمتی رفتار 0.260 rad s^{-1} ہے۔ اس کے بعد بھونرا نصف رداسی فاصلہ طے کر کے دھرے کے فتریب آتا ہے۔ (ا) بھونرا و فترص نظام کا زاوی سمتی رفتار کیا ہوگا؟ (ب) نظام کی نئی حرکتی توانائی K اور ابتدائی حرکتی توانائی K_0 کی نسبت K/K_0 کیا ہوگی؟ (ج) حرکتی توانائی میں تبدیلی کی وجہ کیا ہے؟

سوال ۵.۶۵: ایک یکساں پتلی سلاخ وسطی نقطہ O پر واقع انتصابی محور کے گرد گھوم سکتی ہے۔ سلاخ کی لمبائی 0.500 m اور کیت 4.00 kg ہے (شکل 50.11)۔ ساکن سلاخ کے ایک سر پر 3.00 g گولی افقی چلائی جاتی ہے۔ فضا ئی جانبہ میں سلاخ کے ساتھ گولی کی راہ کا زاویہ $\theta = 60.0^\circ$ پیش ہے (شکل 50.11)۔ اگر گولی سلاخ میں دھنس جائے اور تصادم کے عین بعد سلاخ کی زاوی سمتی رفتار 10 rad s^{-1} ہو، عین تصادم سے قبل گولی

کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال ۵.۶۶: ایک چھلا جو اپنے وسطی نقطہ کے گرد انتضابی محور پر گھوم سکتا ہے شکل 51.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا بیرونی رداس $R_2 = 0.800 \text{ m}$ اور اندرونی رداس $R_1 = R_2/2.00$ ہے۔ پھیلے کی کمیت $M = 8.00 \text{ kg}$ ہے جبکہ دھڑے اور پھیلے کو دھڑے کے ساتھ جھکڑنے والی تیلیوں کی کمیت متبادل نظر انداز ہے۔ گھیر کے بیرونی کنارے، رداس R_2 پر کمیت $m = M/4.00$ کی بلی بسیجی ہے اور گھیر 8.00 rad s^{-1} زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اگر بلی چپل کر اندرونی رداس R_1 کو پہنچے، بلی و گھیر انقلاب کی حرکت کی توانائی میں کتنا اضافہ ہوگا؟

سوال ۵.۶۷: گر موٹوں کی ہتالی، جس کی کمیت 0.10 kg اور رداس 0.10 m ہے، وسطی انتضابی محور پر 4.7 rad s^{-1} زاوی رفتار سے گھوم رہی ہے۔ محور گھماؤ پر ہتالی کا گھمیری جود $5.0 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ ہے۔ کمیت 0.020 kg کی لبدی اوپر سے گر کر ہتالی کے کنارے پر چپک جاتی ہے۔ اس کے فوراً بعد ہتالی کی زاوی رفتار کیا ہوگی؟

سوال ۵.۶۸: لمبی چھلانگ میں زمین سے اچھلتے وقت کھلاڑی کو زاوی معیار حرکت منتقل ہوتا ہے جو کھلاڑی کو آگے کی طرف گھا کر طے شدہ فاصلہ کم بناتا ہے۔ اس اثر کو کم کرنے کی عرض سے کھلاڑی بازو سیدھے کر کے شکل 18.11 کی طرز پر گھا کر یہ زاوی معیار حرکت بازوؤں کو منتقل کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ ایک بازو 0.700 s میں 0.500 چکر اور دوسرا 1 چکر مکمل کرتا ہے۔ بازو کو 4.0 kg کمیت کی 0.60 m لمبی سلاح تصور کریں، جو ایک سرے کے گرد گھومتی ہے۔ کھلاڑی کی حوالہ چوکھٹ میں، کندھوں سے گزرتی مشترک محور پر بازوؤں کا کل زاوی معیار حرکت کیا ہے؟

سوال ۵.۶۹: یکاں مترص، جس کی کمیت 10 m اور رداس $3.0r$ ہے انتضابی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ دوسرا چھوٹا مترص، جس کی کمیت m اور رداس r ہے، بڑے مترص پر ہم مرکز رکھا گیا ہے۔ ابتدائی طور پر دونوں مترص ایک ساتھ 20 rad s^{-1} زاوی سمتی رفتار سے گھومتے ہیں۔ معمولی بیرونی لرزش کی بنا چھوٹا مترص بڑے مترص پر پھسلتا ہے۔ آخر کار بڑے مترص کے بیرونی کنارے میں چھوٹے مترص کا بیرونی کنارہ پھنس جاتا ہے۔ اس کے بعد دونوں مترص دوبارہ (بغیر پھسلن) ایک ساتھ گھومتے ہیں۔ (i) بڑے مترص کے محور پر اب ان کی زاوی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ (ب) نظام کی بنی حرکت کی توانائی اور ابتدائی حرکت کی توانائی کی نسبت K/K_0 کیا ہوگی؟

سوال ۵.۷۰: دائری مترص کی شکل کا چپ بوترا وسطی انتضابی محور پر بلا رگڑ گھومتا ہے۔ چپ بوتراے کی کمیت 150 kg ، رداس 2.0 m ، اور محور گھماؤ کے گرد گھمیری جود 300 kg m^2 ہے۔ ایک طالب علم جس کی کمیت 60 kg ہے چپ بوتراے کے چکا سے دھڑے کی جانب آہستہ آہستہ چلتا ہے۔ جس وقت طالب علم چکا پر ہٹا، اگر اس وقت نظام کی زاوی رفتار 1.5 rad s^{-1} ہو، تب اس وقت زاوی رفتار کیا ہوگی جب طالب علم وسط سے 0.50 m فاصلے پر ہو؟

سوال ۵.۷۱: ایک سلاح، جس کی کمیت M اور رداس 0.800 m ہے، وسطی انتضابی محور پر 20.0 rad s^{-1} زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ ایک ذرہ، جس کی کمیت $M/3.00$ ہے، اور جو سلاح کے ایک سرے سے چکا ہوا ہے، علیحدہ ہو کر اس لمحے سلاح کو عمود دار راہ پر روانہ ہوتا ہے۔ خارج ہونے کے فوراً بعد، ذرے کی رفتار v_p سلاح کے سر کی رفتار سے 6.00 m s^{-1} زیادہ ہے۔ v_p تلاش کریں۔

جوابات

