طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۱۶ر فروری ۲۰۲۴

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو دور کی بات، ان کے لئے انگریزی زبان خود ایک رکاوٹ ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر مستعمل تکنیکی اصطلاحات استعمال کئے جائیں۔ جہاں اصطلاحات موجود نہ تھی وہاں روز مرہ استعمال الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی اصطلاحات کی چنائی یوں کی گئی ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہے۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئری نصاب کی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئری کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور جہاں بھی کتاب میں غلطی نظر آئے، اس کی نشاندہی میری برقیاتی پتہ پر کریں؛ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے سرزد ہوئی ہیں جنہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر ۲۰۱۱ء

باب ۱

پیمائش

طبیعیات کیا ہے؟

سائنس و انجینئری پیمائش اور موازنے پر مبنی ہے۔ چیزوں کی پیمائش اور موازنے کے لئے قواعد کی ضرورت پیش آتی ہے؛ پیمائش اور موازنہ کے بُعد تعین کرنے کے لئے تجربات کا سہارا لینا ہو گا۔ طبیعیات اور انجینئری کا ایک مقصد ان تجربات کی بناوٹ اور تجربہ کرنا ہے۔

چیزوں کی پیمائش

طبیعیات میں ملوث مقداروں کی پیمائش کی طریقے جان کر ہم طبیعیات دریافت کرتے ہیں۔ ان مقداروں میں لمبائی، وقت، کمیت، درجہ حرارت، دباو، اور برقی رو شامل ہیں۔

ہم ہر طبیعی مقدار کا موازنہ ایک **معیار**[1] کے ساتھ کر کے طبیعی مقدار کو اس کی اکائیوں میں ناپتے ہیں۔ اس مقدار کی ناپ کو ایک منفرد نام دیا جاتا ہے جسے **اکائی**[2] کہتے ہیں۔ مثلاً، لمبائی کی پیمائش میٹر (m) میں کی جاتی ہے۔ معیار سے مراد، مقدار کی ٹھیک ایک اکائی ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے لمبائی کا معیار، جو ٹھیک ایک میٹر کے برابر ہے، اُس فاصلہ کو کہتے ہیں جو خلاء میں، ایک مخصوص دورانیہ میں، شعاع طے کرتی ہے۔ ہم اکائی اور اس کے معیار کی تعریف جیسا چاہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم، ضروری ہے کہ دنیا کے باقی سائنسدان بھی اس تعریف کو معنی خیز اور قابل استعمال مانیں۔

ایک معیار، مثلاً لمبائی کا معیار، طے کرنے کے بعد ہمیں وہ طریقہ کار وضع کرنا ہو گی جس سے ہر لمبائی، چاہے وہ ہائیڈروجن جوہر کا رداس ہو یا دور کسی ستارے تک فاصلہ، اس معیار کی صورت میں ظاہر کی جا سکے۔ ایسی

---

[1] standard
[2] unit

ایک ترکیب فیتے کا استعمال ہے ؛ لمبائی کے معیار کو فیتہ تخمیناً ظاہر کرتا ہے۔ بہر حال، بہت سے موازنوں میں بلا واسطہ طریقے استعمال کیے جائیں گے۔ مثلاً، جوہر کا رداس یا قریبی ستارے تک فاصلہ فیتہ استعمال کر کے نہیں ناپا جا سکتا۔

اساسی مقادیر طبعی مقادیر کی تعداد اتنی زیادہ ہے کہ انہیں منظم کرنا ایک مسئلہ ہے۔ خوش قسمتی سے تمام مقادیر غیر تابع نہیں ہیں؛ مثلاً، رفتار در حقیقت لمبائی اور وقت کی تناسب کو کہتے ہیں۔ بین الاقوامی متفقہ معاہدے کے تحت چند طبعی مقادیر، مثلاً، لمبائی، کمیت، اور وقت کو **اساسی مقادیر**[3] منتخب کر کے صرف انہی کو معیار مختص کیے گئے۔ باقی طبعی مقادیر ان "اساسی مقادیر" اور انہیں کے معیار (جنہیں **اساسی معیار**[4] کہتے ہیں) کی صورت میں ناپے جاتے ہیں۔ مثلاً، اساسی مقادیر لمبائی اور وقت اور انکے اساسی معیار کی شکل میں "رفتار" تعین کیا جاتا ہے۔

اساسی معیار کا قابل رسائی اور غیر متغیر ہونا لازمی ہے۔ اگر ہم بازو کی لمبائی کو معیار لمبائی تسلیم کریں تب یہ قابل رسائی ضرور ہو گی، البتہ ہر شخص کے لئے یہ لمبائی مختلف ہو گی لہٰذا یہ غیر متغیر نہیں ہے۔ سائنس و انجینئری میں زیادہ سے زیادہ درستگی مطلوب ہونے کی پیش نظر ہم اساسی معیار کی غیر متغیریت پر خصوصی توجہ دیتے ہیں۔ اس کے بعد اساسی معیار کی بہتر سے بہتر نقل بنا کر ان لوگوں کو فراہم کرتے ہیں جنہیں ضرورت ہو۔

اکائیوں کا بین الاقوامی نظام

<u>۱۹۷۱ء</u> میں ناپ و تول کے عمومی اجلاس میں سات مقادیر کو بطور اساسی مقدار منتخب کر کے بین الاقوامی نظام اکائی کے اساس چنے گئے۔ بین الاقوامی نظام اکائی کو مختصراً "SI نظام" کہتے ہیں۔ جدول ۱.۱ میں تین اساسی مقدار لمبائی، کمیت، اور وقت دکھائے گئے ہیں۔ ان اکائیوں کی تعریف انسانی جسامت مد نظر رکھتے ہوئے کی گئی۔

جدول ۱.۱: بین الاقوامی نظام اکائی کی تین اساسی مقادیر کی اکائیاں

مقدار	اکائی کا نام	اکائی کی علامت
لمبائی	میٹر	m
کمیت	کلوگرام	kg
وقت	سیکنڈ	s

کئی **مشتق اکائیوں**[5] کی تعریف ان اساسی اکائیوں کی صورت میں کی جاتی ہے۔ مثلاً، طاقت کی SI اکائی، جو **واٹ**[6] (W) کہلاتی ہے، کی تعریف کمیت، لمبائی، اور وقت کی اساسی اکائیوں کی صورت میں کی جاتی ہے۔ یوں، جیسا آپ باب 7 میں دیکھیں گے، درج ذیل ہو گا:

$$1\,\text{واٹ} = 1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-3} \tag{۱.۱}$$

[3] basequantities
[4] basestandards
[5] derivedunits
[6] watt

جہاں آخر میں کلوگرام مربع میٹر فی مکعب سیکنڈ پڑھا جائے گا۔

بہت بڑی یا بہت چھوٹی مقادیر، جن سے ہمیں طبیعیات میں عموماً واسطہ ہو گا، **سائنسی ترقیم**[۷] میں لکھی جاتی ہیں، جو دس کی طاقت استعمال کرتی ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$3\,560\,000\,000\,\mathrm{m} = 3.56 \times 10^{9}\,\mathrm{m} \tag{۱.۲}$$

$$0.000\,000\,492\,\mathrm{s} = 4.92 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} \tag{۱.۳}$$

کمپیوٹر میں سائنسی ترقیم مزید مختصر لکھی جاتی ہے؛ مثلاً، $3.56E9$ اور $4.92E-7$ ، جہاں E "دس کی طاقت" ظاہر کرتا ہے۔ کئی **حساب کار**[۸] (کلکولیٹر) مزید مختصر انداز استعمال کرتے ہوئے E کو خالی جگہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم اپنی آسانی کے لئے بہت بڑی یا بہت چھوٹی پیمائش جدول ۱.۲ میں پیش سابقے استعمال کر کے لکھتے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں ہر سابقہ دس کی ایک مخصوص طاقت ظاہر کرتا ہے، جو بطور جزو ضربی استعمال کیا جاتا ہے۔ بین الاقوامی نظام اکائی کے ساتھ سابقہ منسلک کرنے سے مراد اس اکائی کو مطابقتی جزو ضربی سے ضرب دینا ہے۔ یوں ہم کسی ایک مخصوص برقی طاقت کو

$$1.27 \times 10^{9}\ \text{واٹ} = 1.27\ \text{گیگاواٹ} = 1.27\,\mathrm{GW} \tag{۱.۴}$$

یا کسی مخصوص وقتی دورانیے کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$2.35 \times 10^{-9}\ \text{سیکنڈ} = 2.35\ \text{نینو سیکنڈ} = 2.35\,\mathrm{ns}. \tag{۱.۵}$$

چند سابقے، جو ملی لٹر، سنٹی میٹر، کلوگرام یا میگابائٹ میں استعمال ہوتے ہیں، سے آپ ضرور واقف ہوں گے۔

اکائی کی تبدیلی

بعض اوقات طبعی مقداروں کی اکائی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ ہم اصل پیمائش کو "تبادلی جزو"، جو ایک (1) کے برابر اکائیوں کی نسبت ہو گی، سے ضرب دیتے ہیں۔ مثلاً، ایک منٹ اور ساٹھ سیکنڈ مماثل دورانیہ ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 1$$

یا

$$\frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 1$$

یوں $(1\,\mathrm{min})/(60\,\mathrm{s})$ یا $(60\,\mathrm{s})/(1\,\mathrm{min})$ تناسب بطور **تبادلی جزو**[۹] استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ہم ہرگز $\frac{1}{60} = 1$ یا

[۷] scientificnotation
[۸] calculator
[۹] conversionfactor

جدول ۱.۲: بین الاقوامی نظام اکائی کے سابقے

علامت	سابقہ	جزوضربی
Y	یوٹا	10^{24}
Z	زیٹا	10^{21}
E	اکسا	10^{18}
P	پیٹا	10^{15}
T	ٹیرا	10^{12}
G	گیگا	10^{9}
M	میگا	10^{6}
k	کلو	10^{3}
h	ہکٹو	10^{2}
da	ڈیکا	10^{1}
d	ڈسی	10^{-1}
c	سنٹی	10^{-2}
m	ملی	10^{-3}
μ	مائیکرو	10^{-6}
n	نینو	10^{-9}
p	پکو	10^{-12}
f	فیمٹو	10^{-15}
a	اٹو	10^{-18}
z	زپٹو	10^{-21}
y	یکٹو	10^{-24}

$1 = 60$ نہیں لکھ سکتے؛ ہر عدد اور اس کی اکائی کو اکٹھا رکھنا ہوگا۔

ایک (1) سے ضرب دینے سے مقدار کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا ہم جب چاہیں تبادلی جزو استعمال کر سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم غیر ضروری اکائیوں کو منسوخ کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دو منٹ کو سیکنڈ میں تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$2\,\text{min} = (2\,\text{min})(1) = (2\,\cancel{\text{min}})\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}}\right) = 120\,\text{s} \tag{۱.۶}$$

اگر تبادلہ جزو ضرب متعارف کرنے سے غیر ضروری اکائیاں ایک دوسرے کے ساتھ منسوخ نہ ہوتی ہوں تب جزو ضربی کو اُلٹا کر دوبارہ کوشش کریں۔ اکائیوں کی تبادلہ میں اکائیوں پر متغیرات اور اعداد کے الجبرائی قواعد لاگو

ہوں گے۔

لمبائی

۱۷۹۲ء میں فرانس کی نوزائیدہ جمہوریہ نے ناپ اور تول کا ایک نیا نظام قائم کیا۔ میٹر اس کا سنگ بنیادی تھا، جو قطب شمال سے خط استوا تک فاصلے کا کروڑواں حصہ لیا گیا۔ بعد میں عملی وجوہات کی بنا پر اس زمینی معیار کو ترک کرتے ہوئے، **پلاٹینم و اریڈیم**[10] کی ایک سلاخ پر لگائے گئے دو باریک لکیروں کے بیچ فاصلہ **میٹر**[11] قرار پایا؛ یہ **معیاری میٹر سلاخ**[12] پیرس شہر کے قریب ناپ و تول کے بین الاقوامی محکمہ میں رکھا گیا ہے۔ اس سلاخ کی بہترین نقل، دنیا کی معیار ساز تجربہ گاہوں کو (بطور ثانوی معیار) فراہم کی گئی۔ **ثانوی معیار**[13] سے، مزید قابل رسائی معیار تیار کیے گئے، حتیٰ کہ آخر کار ہر پیمائشی آلہ معیاری میٹر سلاخ پر مبنی تھا۔

کچھ عرصہ بعد، سلاخ پر دو باریک لکیروں کے بیچ فاصلہ کے معیاری میٹر سے بہتر معیار کی ضرورت پیش آئی۔ ۱۹۶۰ء میں شعاع کے طول موج پر مبنی میٹر کے معیار پر اتفاق کیا گیا۔ یہ معیار کرپٹن 86 (جو **کرپٹن**[14] کا ایک مخصوص ہم جا ہے) کے جوہروں سے خارج ایک مخصوص نارنجی سرخ شعاع کے 1650763.73 طول موج کا فاصلہ ٹھہرایا گیا۔ یہ شعاع دنیا میں کہیں بھی **گیس خروج نلی**[15] سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ نئے معیار کو پرانے معیار (میٹر سلاخ) کے قریب سے قریب رکھنے کی غرض سے طول موج کی (مذکورہ بالا عجیب) تعداد منتخب کی گئی۔

کچھ عرصہ تک یہ معیار سائنسی دنیا کی ضروریات پوری کر پایا، تاہم سائنس کی دنیا بہت جلد اتنی آگے بڑھ چکی کہ کرپٹن 86 کے طول موج پر مبنی معیار سائنسی ضروریات پوری کرنے کے قابل نہیں رہا۔ آخر کار ۱۹۸۳ء میں ایک نڈر فیصلہ کیا گیا، اور میٹر وہ فاصلہ قرار پایا جو شعاع ایک مخصوص دورانیہ میں طے کرتی ہے۔ ناپ و تول کے سترھویں (17) عمومی اجلاس میں درج ذیل طے پایا۔

تعریف: خلاء میں ایک سیکنڈ کے $\frac{1}{299792458}$ حصے میں شعاع کا طے کردہ فاصلہ **میٹر**[16] کہلائے گا۔

□

وقت کا (مذکورہ بالا) دورانیہ یوں منتخب کیا گیا کہ شعاع کی رفتار c ٹھیک درج ذیل ہو۔

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

شعاع کی رفتار اٹل ہے۔ یوں شعاع کی رفتار سے میٹر اخذ کرنا ایک بہتر قدم تھا۔

---

[10] platinum-iridium
[11] meter
[12] standardmeterbar
[13] secondarystandards
[14] krypton
[15] gasdischargetube
[16] meter

جدول ۱.۳ میں فاصلوں کی وسیع سعت پیش ہے، جو کہکشانی فاصلوں سے لے کر انتہائی چھوٹی چیزوں کی لمبائیاں دیتا ہے۔

جدول ۱.۳: چند تخمینی فاصلے

پیمائش	میٹر میں لمبائی
اول ترین پیدا کہکشاں تک فاصلہ	2×10^{26}
اندرومدا کہکشاں تک فاصلہ	2×10^{22}
قریب ترین تارے تک فاصلہ	4×10^{16}
پلوٹو تک فاصلہ	6×10^{12}
زمین کا رداس	6×10^{6}
بلند ترین پہاڑی کی اونچائی	9×10^{3}
صفحے کی موٹائی	1×10^{-4}
علامتی وائرس کی لمبائی	1×10^{-8}
ہائیڈروجن جوہر کا رداس	5×10^{-11}
پروٹان کا رداس	1×10^{-15}

بامعنی اعداد اور اشاریہ کے مقام

فرض کریں آپ ایک مسئلے پر کام کر رہے ہیں جس میں ہر قیمت دو ہندسوں پر مشتمل ہے۔ ان ہندسوں کو **بامعنی ہندسے**[17] کہتے ہیں۔ اپنا جواب پیش کرتے ہوئے آپ اتنے ہندسے ہی استعمال کریں گے۔ اگر مواد دو ہندسوں میں دیا گیا ہو تب جواب بھی دو ہندسوں پر مشتمل ہو گا۔ اگرچہ آپ کا حساب کار نتائج زیادہ ہندسوں میں پیش کرتا ہے، یہ (اضافی) ہندسے بے معنی ہیں۔

اس کتاب میں، دیے گئے مواد میں کم سے کم بامعنی ہندسوں کے برابر، حساب کے اختتامی نتائج پور پور کر کے پیش کیے جائیں گے۔ (ہاں، بعض اوقات ایک اضافی بامعنی ہندسہ بھی رکھا جائے گا۔) اگر ضائع کیے جانے والے ہندسوں میں بایاں ترین ہندسہ 5 کے برابر یا اس سے بڑا ہو تب آخری رہنے دیا گیا ہندسے کو "اوپر پور پور" کیا جاتا ہے؛ دیگر صورت اس کو جوں کا توں رکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 11.3516 کو تین بامعنی ہندسوں میں پور پور کر کے 11.4 جبکہ 11.3279 کو تین بامعنی ہندسوں میں پور پور کرتے ہوئے 11.3 لکھا جائے گا۔ (اس کتاب میں نتائج پیش کرتے ہوئے پور پور کیے جانے کے باوجود $\approx$ کی بجائے عموماً $=$ علامت استعمال کی جائے گی۔)

عدد 3.15 یا 3.15×10^3 میں بامعنی ہندسوں کی تعداد صاف ظاہر ہے؛ عدد 3000 میں بامعنی ہندسے کتنے ہیں؟ کیا یہ صرف ایک بامعنی ہندسہ 3×10^3 تک معلوم ہے، یا یہ چار بامعنی ہندسوں 3.000×10^3 تک معلوم ہے؟ اس کتاب میں 3000 کی طرز پر اعداد میں تمام صفروں کو بامعنی تصور کیا جائے گا۔

بامعنی ہندسوں اور اشاریہ کے مقام دو مختلف باتیں ہیں۔ درج ذیل فاصلوں 35.6 mm، 3.56 m، اور

[17] significant figures

0.003 56 m پر غور کریں۔ تمام میں تین بامعنی ہندسے ہیں، تاہم ان میں اشاریہ کے مقام بالترتیب ایک، دو، اور پانچ ہیں۔

مثال ۱.۱: **دھاگے کا گیند؛ قدر کے رتبہ کی تخمین۔**

دنیا میں دھاگے کے سب سے بڑے گیند کا رداس 2 m ہے۔ اس گیند میں دھاگے کی کل لمبائی L کتنی ہوگی؟ اگرچہ ہم گیند سے دھاگہ کھول کر لمبائی L ناپ سکتے ہیں، تاہم ہم ایسا نہیں کرنا چاہتے۔ ہم حساب کے ذریعہ اس کی لمبائی کا تخمینہ لگانا چاہتے ہیں۔ ہمیں فقط قدر کا قریبی رتبہ درکار ہے۔

حساب

ہم فرض کرتے ہیں گیند کروی ہے؛ اس کا رداس $R = 2\,\mathrm{m}$ ہے۔ دھاگہ لپیٹتے ہوئے دھاگے کے مختلف حصوں کے بیچ خالی جگہ ضرور ہوگی جس کے بارے میں جاننا ناممکن بات ہے۔ ان خالی جگہوں کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم دھاگے کا عمودی تراش ذرا زیادہ تصور کرتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ دھاگے کا عمودی تراش (گول کی بجائے) چوکور ہے جس کا ضلع $d = 4\,\mathrm{mm}$ ہے۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش d^2، لمبائی L، اور کل حجم درج ذیل ہوگا:

$$V = (\text{رقبہ عمودی تراش})(\text{لمبائی}) = d^2L$$

جو گیند کے حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ کے برابر ہوگا؛ π کو تخمیناً 3 لیتے ہوئے یہ حجم $4R^3$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$d^2L = 4R^3$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} L &= \frac{4R^3}{d^2} \\ &= \frac{4(2\,\mathrm{m})^3}{(4\times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 2\times 10^6\,\mathrm{m} \approx 10^6\,\mathrm{m} \approx 10^3\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

(اتنے سادہ حساب کے لئے حساب کار کی ضرورت پیش نہیں ہونی چاہئے۔) قدر کے قریبی رتبہ تک گیند میں تقریباً 1000 km دھاگہ ہے۔ □

۱.۱ وقت

وقت کے دو پہلو ہیں۔ روز مرہ زندگی میں ہم کام کاج ترتیب سے رکھنے کی غرض سے وقت جاننا چاہتے ہیں۔ سائنس کی دنیا میں ہم عموماً جاننا چاہتے ہیں کہ ایک واقعہ کتنی دیر وقوع پذیر ہوا۔ یوں وقت کے کسی بھی معیار کو

دو سوالات کا جواب دینا ہو گا: کب ہوا؟ اس کا دورانیہ کتنا تھا؟ جدول ۴.۱ میں چند وقتی وقفے پیش ہیں، جہاں **پلانک وقت**[۱۸] سے مراد **ابتدائی دھماکے**[۱۹] کے بعد وہ اول ترین وقت ہے جب طبعیات کے قواعد (جس طرح انہیں ہم اس وقت جانتے ہیں) قابل اطلاق ہوں گے۔

جدول ۴.۱: چند تخمینی دورانیے

پیمائش	سیکنڈ میں دورانیہ
پروٹان کا عرصہ حیات (محض اندازہ)	3×10^{40}
کائنات کی عمر	5×10^{17}
ہرم خوفو کی عمر	1×10^{11}
انسانی زندگی (متوقع)	2×10^{9}
ایک دن	9×10^{4}
انسانی دل کی دھڑکنوں کے بیچ وقفہ	8×10^{-1}
میون کا عرصہ حیات	2×10^{-6}
تجربہ گاہ میں مختصر ترین شعاع کا دورانیہ	1×10^{-16}
غیر مستحکم ترین ذرے کا عرصہ حیات	1×10^{-23}
پلانک وقفہ	1×10^{-43}

وہ مظہر جو اپنے آپ کو دہراتا ہو وقت کا معیار مقرر کیا جا سکتا ہے۔ محور کے گرد زمین کا ایک چکر، جو دن کی لمبائی تعین کرتا ہے، صدیوں تک بطور وقت کا معیار استعمال کیا گیا۔ **سنگ مردہ**[۲۰] (کوارٹز) گھڑی، جس میں ایک سنگ مردہ چھلے کو مسلسل ارتعاش پذیر رکھا جاتا ہے، کی پیمانہ بندی فلکیاتی مشاہدات کے ذریعے، زمین کے گھومنے کے ساتھ کر کے، تجربہ گاہ میں وقتی وقفوں کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ تاہم جدید سائنس و انجینئری کو درکار درستگی ایسی پیمانہ بندی سے ممکن نہیں۔

بہتر معیار وقت کی ضرورت کے در پیش **جوہری گھڑیاں**[۲۱] تیار کی گئیں۔ ۱۹۶۷ء میں ناپ و تول کے تیرھویں عمومی اجلاس میں **سیزیم گھڑی**[۲۲] پر مبنی معیاری سیکنڈ پر اتفاق کیا گیا۔

تعریف: سیزیم 133 جوہر سے خارج ایک مخصوص طول موج کی شعاع کے 9 192 631 770 ارتعاش کو درکار وقت ایک **سیکنڈ**[۲۳] ٹھہرایا گیا۔

□

[۱۸] planktime
[۱۹] bigbang
[۲۰] quartz
[۲۱] atomicclocks
[۲۲] cesiumclock
[۲۳] second

جوہری گھڑیاں انتہائی درست وقت بتاتی ہیں۔ دو سیزیم گھڑیوں میں ایک سیکنڈ فرق چھ ہزار سال چلنے کے بعد پیدا ہو گا۔ اس وقت تیار کی جانے والی گھڑیوں کی درستگی 10^{18} میں ایک حصے کے برابر ہے، یعنی 10^{18} سیکنڈ (جو تقریباً 3×10^{10} سال کے برابر ہے) میں صرف ایک سیکنڈ کا فرق ہو سکتا ہے۔

۲.۱ کمیت

معیاری کلوگرام

فرانس کے شہر پیرس کے قریب ناپ و تول کے بین الاقوامی محکمہ میں رکھے گئے پلاٹینم واریڈیم کا ایک شلنڈر، بین الاقوامی معاہدہ کے تحت، ایک کلوگرام کمیت ٹھہرایا گیا۔ اس کی بہتر سے بہتر نقل دنیا کے بیشتر معیار ساز تجربہ گاہوں کو فراہم کی گئی جن کو استعمال کرتے ہوئے ترازو کی مدد سے کسی بھی جسم کی کمیت ناپی جا سکتی ہے۔ جدول ۱.۵ میں قدر کے 83 رتبوں پر پھیلی کمیتوں کو کلوگرام کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۱.۵: چند تخمینی کمیت

چیز	کلوگرام میں کمیت
معروف کائنات	1×10^{53}
ہماری کہکشاں	2×10^{41}
سورج	2×10^{30}
چاند	7×10^{22}
سیارچہ ایراس	5×10^{15}
چھوٹا پہاڑ	1×10^{12}
سمندری جہاز	7×10^{7}
ہاتھی	5×10^{3}
انگور	3×10^{-3}
دھول کی ذرہ	7×10^{-10}
پینسلین سالمہ	5×10^{-17}
یورینیم جوہر	4×10^{-25}
پروٹان	2×10^{-27}
الیکٹران	9×10^{-31}

دوم معیار کمیت

جوہروں کی کمیت کا موازنہ معیاری کلوگرام کی بجائے، زیادہ درستگی کے ساتھ، دیگر جوہروں کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ اسی کی بنا، ہم دوم معیار کمیت بھی رکھتے ہیں۔ کاربن 12 جوہر کو بین الاقوامی معاہدہ کے تحت 12 **جوہری کمیتی اکائیوں**[۲۴] کی کمیت

[۲۴] atomicmassunit

مختص کی گئی۔ ان دو اکائیوں کے بیچ رشتہ درج ذیل ہے

$$1\,\mathrm{u} = 1.660\,538\,86 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \tag{۱.۷}$$

جہاں آخری دو ہندسوں میں عدم یقینیت ± 10 ہے۔ سائنس دان کافی درستگی کے ساتھ تجربے کے ذریعے کسی بھی جوہر کی کمیت کاربن 12 کی کمیت کے لحاظ سے تعین کر سکتے ہیں۔ اس وقت، کمیت کی روزمرہ زندگی میں مستعمل اکائیاں، مثلاً کلوگرام، استعمال کرتے ہوئے ہم اتنی درستگی حاصل کرنے سے قاصر ہیں۔

۱.۲.۱ کثافت

کثافت[۲۵] ρ سے مراد اکائی حجم میں کمیت ہے۔

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{۱.۸}$$

اس پر باب 14 میں مزید تبصرہ کیا جائے گا۔ کثافت کو عام طور پر کلوگرام فی مربع میٹر یا گرام فی مربع سنٹی میٹر میں ناپا جاتا ہے۔ پانی کی کثافت ایک گرام فی مربع سنٹی میٹر یا ایک ہزار کلوگرام فی مربع میٹر ہے جس کو عموماً موازنہ کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ پانی کی کثافت کے لحاظ سے تازہ برف کی کثافت % 10 اور پلاٹینم کی کثافت تقریباً 21 گنا جبکہ لکڑی کی کثافت صرف % 64 ہے۔

---

[۲۵] density

مثال ۱.۲: کثافت اور رقیق کاری

ایسے زلزلہ کے دوران جس میں زمین کی **رقیق کاری**[۲۶] ہو، بھاری جسم زمین میں دھنس سکتا ہے۔ رقت کے دوران مٹی کے ذرے نہایت کم رگڑ محسوس کرتے ہوئے ریلنا شروع کرتے ہیں اور زمین دلدل کی کیفیت اختیار کرتی ہے۔ ریتیلی زمین کی رقیق کاری کے ممکنات کی پیشگوئی زمین کے نمونہ کی تناسب خلا e کے روپ میں کی جا سکتی ہے۔

$$e = \frac{V_{\text{خلا}}}{V_{\text{دانے}}} \tag{۱.۹}$$

یہاں $V_{\text{دانے}}$ نمونے میں ریت کے ذرات کا کل حجم جبکہ $V_{\text{خلا}}$ ذروں کے بیچ خلا کا کل حجم ہے۔ اگر e فاصل قیمت 0.80 سے تجاوز کرتا ہو، زلزلہ کے دوران رقیق کاری کا امکان ہو گا۔ مطابقتی ریت کی کثافت $\rho_{\text{ریت}}$ کیا ہو گی؟ ٹھوس سلیکان ڈائی اکسائیڈ، (SiO_2) (جو ریت کا بنیادی جزو ہے) کی کثافت $= \rho_{\text{SiO}_2}$ $2.6 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ ہے۔

کلیدی تصور

نمونے میں ریت کی کثافت $\rho_{\text{ریت}}$ سے مراد اکائی حجم میں کمیت ہے؛ جو ریت کے تمام ذروں کی کل کمیت $m_{\text{ریت}}$ اور نمونے کے کل حجم $V_{\text{کل}}$ کا تناسب:

$$\rho_{\text{ریت}} = \frac{m_{\text{ریت}}}{V_{\text{کل}}} \tag{۱.۱۰}$$

ہے۔

حساب: نمونے کا کل حجم $V_{\text{کل}}$ درج ذیل ہے

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{دانے}} + V_{\text{خلا}}$$

مساوات ۱.۹ میں $V_{\text{خلا}}$ ڈال کر $V_{\text{ریت}}$ کے لیے حل کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$V_{\text{دانے}} = \frac{V_{\text{کل}}}{1 + e} \tag{۱.۱۱}$$

مساوات 8.1 کے تحت ریت کے ذرات کی کل کمیت $m_{\text{ریت}}$ سلیکان ڈائی اکسائیڈ کی کثافت ضرب ریت کے ذرات کا کل حجم:

$$m_{\text{ریت}} = \rho_{\text{SiO}_2} V_{\text{دانے}} \tag{۱.۱۲}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات ۱.۱۰ میں ڈال کر کے مساوات ۱.۱۱ سے $V_{\text{ریت}}$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\rho_{\text{ریت}} = \frac{\rho_{\text{SiO}_2}}{V_{\text{کل}}} \frac{V_{\text{کل}}}{1 + e} \tag{۱.۱۳}$$

---

[۲۶] liquefaction

فاصل قیمت $e = 0.80$ اور $\rho_{\mathrm{SiO_2}} = 2.600 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ پر کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ رقیق کاری اس صورت ہو گی جب ریت کی کثافت درج ذیل سے کم ہو۔

$$\rho = \frac{2.600 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}{1.80} = 1.4 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

رقیق کاری میں عمارت کئی میٹر زمین میں دھنس سکتی ہے۔ □

نظر ثانی اور خلاصہ

طبیعیات میں پیمائش

طبیعی مقادیر کی پیمائش پر طبیعیات مبنی ہے۔ کچھ طبیعی مقادیر (مثلاً لمبائی، وقت، اور کمیت) **اساسی مقدار** منتخب کیے گئے؛ ہر ایک کی تعریف **معیار** کے مطابق کی گئی اور اس کو پیمائش کی **اکائی** (مثلاً m، s، اور kg) مختص کی گئی۔ دیگر طبیعی مقادیر کی تعریف ان اساسی مقدار اور ان کے معیار اور اکائیوں کی صورت میں کی جاتی ہے۔

بین الاقوامی اکائی

اس کتاب میں بین الاقوامی اکائی (SI) استعمال کی گئی۔ جدول 1.1 میں دکھائی گئی تین طبیعی مقادیر ابتدائی بابوں میں استعمال کی جائیں گی۔ بین الاقوامی معاہدوں کے تحت اساسی مقداروں کے معیار طے کیے گئے، جو ہر ایک کے لیے قابل رسائی اور غیر تغیر ہیں۔ اساسی مقدار اور ان سے اخذ دیگر مقادیر کی تمام طبیعی پیمائشیں انہی معیار کے تحت کی جاتی ہے۔ جدول 2.1 میں پیش علامتیں اور سابقے استعمال کر کے پیمائشی ترقیم کی سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

اکائیوں کی باہم تبدیلی

اکائیوں کی تبدیلی زنجیری طریقے سے جا سکتی ہے، جس میں اصل مواد کو یکے بعد دیگرے تبادلی ضربیوں سے، جنہیں ایک (1) کے روپ میں لکھا گیا ہو، ضرب دے کر، اکائیوں سے الجبرائی مقادیر کی طرح نپٹا جاتا ہے حتیٰ کہ درکار اکائیاں رہ جائیں۔

لمبائی

وہ فاصلہ ہے جو انتہائی معین وقتی وقفے کے دوران بصری شعاع طے کرتی ہے، میٹر کی تعریف ہے۔

۱.۲.۲ وقت

سیکنڈ کی تعریف سیزیم 133 جوہر سے خارج شعاع کی صورت میں کی جاتی ہے۔ معیار برقرار رکھتی تجربہ گاہوں میں موجود جوہری گھڑیوں کے صحیح وقتی اشارے پوری دنیا میں نشر کیے جاتے ہیں۔

کمیت

پیرس شہر کے قریب رکھے گئے پلاٹینم و اریڈیم کمیتی معیار، کلوگرام کی تعریف ہے۔ جوہری پیمانہ پر پیمائش کے لیے جوہری کمیتی اکائی استعمال کی جاتی ہے جس کی تعریف کاربن 12 جوہر کی صورت میں کی جاتی ہے۔

کثافت

کسی بھی چیز کی کثافت ρ سے مراد اکائی حجم میں اس کی کمیت ہے۔

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{۱.۸}$$

سوالات

لمبائی اور دیگر اشیاء کی پیمائش

سوال ۱.۱: زمین تخمیناً ایک کرہ ہے جس کا رداس $6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ ہے۔ اس کا (ا) محیط کلومیٹر میں، (ب) سطحی رقبہ مربع کلومیٹر میں، اور (ج) حجم کعبی کلومیٹر میں کتنا ہے؟

سوال ۱.۲: اشاعت کاری میں لمبائی کی مستعمل اکائی نقطہ کہلاتی ہے، جو انچ کے $\frac{1}{72}$ حصے کے برابر ہے۔ مربع نقطہ کی صورت میں 0.1 مربع انچ لکھیں۔

سوال ۱.۳: ایک مائیکرومیٹر $(1\,\mu\mathrm{m})$ کو عموماً مائیکران کہتے ہیں۔ (ا) کتنے مائیکران $1\,\mathrm{km}$ کے برابر ہیں؟ (ب) سنٹی میٹر کا کتنا حصہ $1\,\mu\mathrm{m}$ ہو گا؟ (ج) کتنے مائیکران ایک گز کے برابر ہوں گے؟

سوال ۱.۴: اس کتاب میں فاصلے نقطہ اور پیکا اکائی میں رکھے گئے ہیں: 12 نقطے 1 پیکا کے برابر ہے، اور 6 پیکا 1 انچ کے برابر۔ اگر کتاب میں ایک شکل $0.80\,\mathrm{cm}$ غلط رکھی گئی ہو، تب یہ (ا) پیکا اکائیوں میں اور (ب) نقطہ اکائیوں میں کتنی غلط رکھی گئی ہے؟

سوال ۱.۵: ایک مقابلے میں گھوڑے 4.0 فرلانگ دوڑ لگا کر طے کرتے ہیں۔ اس فاصلے کو (ا) عصا اور (ب) زنجیر کی صورت میں لکھیں۔ (ایک فرلانگ $201.168\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے۔ ایک عصا $5.0292\,\mathrm{m}$ اور ایک زنجیر $20.117\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے)

جدول ۶.۱: ملی گرام، گرام، اور کلو گرام کی چند قیمتیں۔

kg	g	mg
		300 mg
		0.50 g
		0.02 kg

سوال ۶.۱: جدول ۶.۱ مکمل کریں۔(ا) جدول مکمل کریں۔(ب) $55\,\mathrm{mg}$ کتنے kg کے برابر ہو گا؟(ج) $12\,\mathrm{cm^3}$ حجم کتنے لٹر کے برابر ہو گا؟

سوال ۷.۱: ماقوائی معمار پانی کا حجم عموماً ایکڑ فٹ میں ناپتے ہیں، جس سے مراد ایک ایکڑ رقبے پر ایک فٹ گہرا پانی ہے۔ ایک شہر جس کا رقبہ $26\,\mathrm{km^2}$ ہے میں 30 منٹ کی بارش 2 انچ پانی برساتی ہے۔ شہر پر کتنا ایکڑ فٹ پانی برستا ہے؟

سوال ۸.۱: ایک سڑک 32 میل اور 5 فرلانگ لمبی ہے۔ اس کی لمبائی km میں کتنی ہو گی؟

سوال ۹.۱: بحر منجمد جنوبی[۲۷] تقریباً نیم دائری ہے (شکل 1.5) جس کا رداس $2000\,\mathrm{km}$ ہے۔ اس میں برف کی اوسط موٹائی $3000\,\mathrm{m}$ ہے۔ بحر منجمد جنوبی میں کتنے $\mathrm{cm^3}$ برف پایا جاتا ہے؟ (زمین کی سطح مستوی تصور کریں۔)

وقت

سوال ۱۰.۱: بہت وسیع ممالک مثلاً روس میں مختلف مقامات پر گھڑیوں کا وقت ایک دوسرے سے مختلف ہوتا ہے۔ (ا) خط طول بلد کے کتنے درجے چلنے کے بعد ایک گھنٹے کا فرق پایا جائے گا؟ (اشارہ: زمین 24 گھنٹے میں $360°$ گھومتی ہے۔) ایک خط طول بلد کتنے منٹ کے برابر ہو گا؟

سوال ۱۱.۱: فرانسیسی انقلاب کے بعد تقریباً 10 سال تک حکومت کوشش کرتی رہی کہ وقت کی پیمائش مضرب 10 رکھی جائے؟ ایک ہفتہ میں 10 دن، ایک دن میں 10 گھنٹے، ایک گھنٹہ میں 100 منٹ، اور ایک منٹ میں $100\,\mathrm{s}$ رکھے گئے۔

(ا) فرانسیسی اعشاری ہفتہ اور معیاری ہفتہ کی نسبت، اور (ب) فرانسیسی اعشاری سیکنڈ اور معیاری سیکنڈ کی نسبت کیا ہے؟

سوال ۱۲.۱: دنیا کا تیز ترین بڑھتا پودا "ہسپر ویوکا" کہلاتا ہے جو 14 دن میں $3.7\,\mathrm{m}$ بڑا۔ پودے کے بڑھنے کی شرح $\mu\mathrm{m\,s^{-1}}$ کتنی ہے؟

سوال ۱۳.۱: تین گھڑیاں الف، ب، اور پ مختلف رفتار سے چلتی ہیں اور بیک وقت صفر نہیں دیتی۔ شکل 6.1 میں چار موقوں پر ان کی بیک وقت پیمائش دکھائی گئی ہے۔ (مثال کے طور پر جس لمحہ گھڑی ب $25\,\mathrm{s}$ دیتی

[۲۷] antarctica

ہے، گھڑی پ 92 s دیتی ہے۔) اگر دو واقعات گھڑی الف پر 600 s فاصلے پر واقع ہوں، ہے (الف) گھڑی ب پر اور (ب) گھڑی ج پر کتنے فاصلے پر واقع ہوں گے؟ (ج) جس لمحہ گھڑی الف 400 s دیتی ہے اس لمحہ گھڑی ب کیا دے گی؟ (د) جس وقت گھڑی الف 15 s دیتی ہے، اس وقت گھڑی ب کیا دے گی؟ (قبل از صفر اوقات منفی علامت کے تصور کریں۔)

سوال ۱.۱۴: ایک درس (جو 50 منٹ کا ہے) تخمیناً ایک خورد صدی کا ہوگا۔

(ا) ایک خورد صدی دورانیہ کتنے منٹ ہوگا؟ (ب) درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے تخمین میں فی صد فرق تلاش کریں۔

$$= \left(\frac{\text{تخمیناً} - \text{اصل}}{\text{اصل}}\right) 100$$

سوال ۱.۱۵: دو ہفتوں کا وقت کتنے μs ہوگا؟

سوال ۱.۱۶: معیاری وقت کا دارومدار جوہری گھڑیوں پر ہے۔ اس سے بہتر معیار سیکنڈ **نابض**[۲۸] پر مبنی ہو سکتا ہے، جو گھومتے **نیوٹران تارے**[۲۹] (انتہائی ٹھوس تارے جن میں صرف نیوٹران پائے جاتے ہیں) ہیں۔ ان میں سے کئی انتہائی زیادہ مستحکم شرح سے گھومتے ہیں، اور ہر چکر کے دوران ایک مرتبہ زمین پر شعاع ڈالتے ہیں (سمندر کے کنارے **منارہ نور**[۳۰] کی طرح جو سمندری جہاز کو خطرے سے آگاہ کرتا ہے)۔ نابض $PSR\ 1937\ 21$ ایک ایسا تارہ ہے جو ایک چکر $1.557\,806\,448\,872\,75 \pm 3\,\text{ms}$ میں پورا کرتا ہے، جہاں آخر میں ± 3 آخری ہندسہ میں عدم یقینیت دیتا ہے (اس کا ہرگز $\pm 3\,\text{ms}$ مطلب نہیں)۔

(ا) یہ نابض 7.00 دنوں میں کتنے چکر کاٹتا ہے؟ (ب) یہ نابض 10 لاکھ مرتبہ ٹھیک کتنے وقت میں چکر کاٹتا ہے، اور (ج) اس سے وابستہ عدم یقینیت کیا ہوگا؟

[۲۸] pulsars
[۲۹] neutronstar
[۳۰] lighthouse

سوال ۱.۱۷: ایک سمتیہ جس کا قدر $7.3\,\mathrm{m}$ ہے مثبت x محور کے رخ سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ 250° پر yx مستوی میں پایا جاتا ہے، الف اس کا x جز اور ب وائی جز تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۸: سمتیہ ہٹاؤ r کا قدر $15\,\mathrm{m}$ ہے اور یہ yx مستوی میں زاویہ $30^\circ = \theta$ کے رخ ہے، شکل 26.3 دیکھیں اس سمتیہ کے الف x جز اور ب y جز تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۹: سمتیہ a کا x جز $-25\,\mathrm{m}$ اور y جز $+40\,\mathrm{m}$ ہے۔ الف سمتیہ a کا قدر کتنا ہے؟ ب سمتیہ a کے رخ اور x محور کے مثبت رخ کے بیچ زاویہ کتنا ہے؟

سوال ۱.۲۰: درج ذیل زاویوں کو ریڈین میں بیان کریں: الف 20° ، ب 50° ، ج 100° ۔ درج ذیل زاویوں کو درجوں کی صورت میں پیش کریں: د 330.0 ریڈین، ح 10.2 ریڈین، و 70.7 ریڈین۔

سوال ۱.۲۱: ایک بحری جہاز شمال کے رخ $120\,\mathrm{km}$ دور نقطہ کی جانب پہنچنا چاہتا ہے۔ سفر کے اغاز سے پہلے ہی ایک غیر متوقع اندھی اس کو نقطہ اغاز سے مشرق جانب $100\,\mathrm{km}$ دور دکھیلتا ہے۔ اس جہاز کو اختتامی نقطہ پر پہنچنے کے لیے الف کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا اور (ب) اسے کس رخ سفر کرنا ہوگا؟

سوال ۱.۲۲: شکل 27.3 میں ایک بھاری مشین کو افق کی رخ سے زاویہ $20^\circ = \theta$ پر رکھے گئے تختے پر $d = 12.5\,\mathrm{m}$ فاصلے تک گھسیٹا جاتا ہے۔ اس مشین کو (الف) انتصابی روح اور (ب) افق کی رخ کتنا دور منتقل کیا گیا؟

سوال ۱.۲۳: ایک ہٹاؤ جس کا قدر $3\,\mathrm{m}$ ہے اور دوسرا ہٹاؤ جس کا قدر $4\,\mathrm{m}$ ہے پر غور کریں۔ دکھائیں کہ ان ہٹاؤ سمیات کو استعمال کرتے ہوئے (الف) $7\,\mathrm{m}$ ، (ب) $1\,\mathrm{m}$ ، اور (ج) $5\,\mathrm{m}$ قدر کے ہٹاؤ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ 2.3Module اکائی سمتیات، سمتیات کی جمع بذریعہ اجزاء

سوال ۱.۲۴: ایک شخص $3.1\,\mathrm{km}$ شمال کی طرف چلنے کے بعد $2.4\,\mathrm{km}$ مغرب اور اخر میں $5.2\,\mathrm{km}$ جنوب کے رخ چلتا ہے۔ (الف) اس کے حرکت کو ظاہر کرنے کے لیے سمتی نقشہ بنائیں۔ ایک پرندہ اس نقطہ اغاز سے سیدھا نقطہ اختتام تک اڑتے ہوئے (ب) کتنا فاصلہ طے کرے گا اور (ج) کس رخ طے کرے گا؟

سوال ۱.۲۵: درج ذیل دو سمتیات دیے گئے ہیں

$$a = (4\,\mathrm{m})i - (3\,\mathrm{m})j + (1\,\mathrm{m})k$$

اور

$$b = (-1\,\mathrm{m})i + (1\,\mathrm{m})j + (4\,\mathrm{m})k$$

اکائی سمتیہ علامتیت میں (الف) $\vec{a} + \vec{b}$ ، (ب) $\vec{a} - \vec{b}$ اور (ج) ایک تیسرا سمتیہ c تلاش کریں جہاں $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$ ہے۔

سوال ۱.۲۶: ہٹاؤ c اور d کے میٹروں میں اجزاء $c_x = 7.4$ ، $c_y = -3.8$ ، $c_z = -6.1$ ؛ $d_x = 4.4$ ، $d_y = -2.0$ ، $d_z = 3.3$ ہیں۔ ان ہٹاؤ کہ مجموعہ $\vec{r}$ کے (الف) x ، (ب) y ، اور (ج) z اجزا تلاش کریں

سوال ۱.۲۷: (الف) اگر $\vec{a} = (4\,\mathrm{m})\hat{i} + (3\,\mathrm{m})\hat{j}$ اور $\vec{b} = (-13\,\mathrm{m})\hat{i} + (7\,\mathrm{m})\hat{j}$ ہوں تب اکائی سمتیا علامتیت میں مجموعہ $a + b$ کیا ہوگا؟ اس مجموعے کا (ب) قدر اور (ج) رخ کیا ہوگا؟

سوال ۱.۲۸: ایک گاڑی کو مشرک کی طرف $50\,\mathrm{km}$ ، اس کے بعد شمال کی طرف $30\,\mathrm{km}$ اور آخر میں شمال سے مشرک جانب 30° کے رخ $25\,\mathrm{km}$ چلایا جاتا ہے۔ اس کا سمتی نقشہ بنائیں۔ ابتدائی نقطہ سے گاڑی کی کل ہٹاؤ کا (الف) قدر اور (ب) زاویہ تلاش۔

سوال ۱.۲۹: ایک شخص اپنے موجودہ مقام سے $3.4\,\mathrm{km}$ دور شمال سے مشرک جانب 35° کے رخ مقام پر پہنچنا چاہتا ہے۔ تاہم اس کو مجبوراً ایسی گلیوں سے گزرنا ہوگا جو مشرق سے مغرب یا شمال سے جنوب ہیں۔ یہ شخص کتنا کم سے کم فاصلہ طے کر کے اس مقام تک پہنچ سکتا ہے؟

سوال ۱.۳۰: ہموار صحرا میں xy محددی نظام کے ممتاز سے اغاز کرتے ہوئے xy محدد (مائنس14 میٹر کم 30 میٹر) ($30\,\mathrm{m}$, $-140\,\mathrm{m}$) کہ مقام کو پہنچنا چاہتے ہیں۔ اپ کو صرف چار مرتبہ سید میں چلنے کی اجازت ہے۔ اپ کی حرکت کے x اور y اجزاء میٹروں میں بالترتیب درج ذیل ہیں: (60 اور 20)، اس کے بعد (-70 اور bx)، اس کے بعد (c اور -20)، اور آخر میں (-60 اور -70)۔ بتائیں (الف) جز bx اور (ب) جز cy کیا ہوں گے؟ مجموعی ہٹاؤ کا (ج) قدر اور (ح) مثبت x محور کے لحاظ سے زاویہ کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳۱: شکل 3.28 میں دکھائے گئے سمتیات a اور b دونوں کے قدر $10\,\mathrm{m}$ ہیں جبکہ ان کے زاویات $\theta_1 = 30^\circ$ اور $\theta_2 = 105^\circ$ ہیں۔ ان کے سمتی مجموعہ r کے (الف) x اور (ب) y اجزا تلاش کریں۔ (ج) سمتیہ r کا قدر اور (ح) مسبت x محور کے رخ کے ساتھ r کا زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۳۲: ہٹاؤ سمتیات $\vec{a} = (3\,\mathrm{m})\hat{i} + (4\,\mathrm{m})\hat{j}$ اور $\vec{b} = (5\,\mathrm{m})\hat{i} + (-2\,\mathrm{m})\hat{j}$ کے لئے (الف) اکائی سمتیہ علامتیت میں، اور (ب) قدر اور (ج) سمتیہ i کے لحاظ سے زاویہ کی صورت میں $a + b$ بیان کریں۔ اسی طرح (د) اکائی سمتیہ علامتیت میں، اور (ح) قدر اور (ط) زاویہ کی صورت میں $b - a$ بیان کریں۔

سوال ۱.۳۳: تین سمتیات a ، b ، اور c مستوی xy میں پائے جاتے ہیں اور ہر ایک کا قدر $50\,\mathrm{m}$ ہے۔ مثبت x محور کے رخ کے لحاظ سے ان کے رخ بالترتیب 30° ، 195° اور 315° ہیں۔ سمتیہ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ کا (الف) قدر اور (ب) زاویہ کیا ہوگا اور سمتیہ $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ کا (ج) قدر اور (ح) زاویہ کیا ہوگا؟ ایک ایسے چوتھے سمتیہ $\vec{d}$ کا (و) قدر اور (ز) زاویہ کیا ہوگا جو $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = 0$ کو مطمئن کرتا ہو؟

سوال ۱.۳۴: مجموعہ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ میں سمتیہ سمتیہ $\vec{A}$ کا قدر $12\,\mathrm{m}$ اور مثبت x رخ سے خلافِ گڑی زاویہ 40° ہے، جبکہ سمتیہ سی کا قدر $15\,\mathrm{m}$ اور منفی x رخ سے خلافِ گھڑی زاویہ 20° ہے۔ سمتیہ $\vec{B}$ کا (الف) قدر اور (ب) مثبت x محور کے لحاظ سے زاویہ کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳۵: ایک باغیچہ میں $1\,\mathrm{m}$ اطراف کے چوکور خانوں کا شطرنج کی کھیل کا میدان بنایا جاتا ہے ایک نائٹ درج ذیل قدم لیتا ہے: 1 دو چوکور اگے، ایک چوکور دائیں؛ 2 دو چوکور بائیں، ایک چوکور اگے؛ 3 دو چوکور آگے، ایک چوکور بائیں۔ اگے چلنے کے رخ کے لحاظ سے نائٹ کے مجموعی ہٹاؤ کا (الف) قدر اور (ب) زاویہ کیا ہوگا؟

باب ۲

مخفی توانائی اور توانائی کی بقا

اختتامی حال میں اسپرنگ ڈھیلے حال میں ہوگا اور ہوا باز ساکن زمینی سطح پر ہوگا، لہٰذا نظام کی اختتامی میکانی توانائی ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} E_{2,\text{میکانی}} &= K_2 + U_{e2} + U_{g2} \\ &= 0 + 0 + 0 \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

آئیں اب زمینی سطح راہ اور تیراک کی حراری توانائی میں تبدیلی $\Delta E_{\text{حر}}$ کی بات کرتے ہیں۔ مساوات 31.8 سے $\Delta E_{\text{حر}}$ کے لئے (رگڑی قوت قدر ضرب رگڑ کا فاصلہ) $f_k L$ ڈالا جا سکتا ہے۔ مساوات 2.6 سے ہم جانتے ہیں $f_k = \mu_k F_N$ ہوگا، جہاں F_N عمودی قوت ہے۔ خطہ میں تیراک رگڑ کے ساتھ افقی حرکت کرتا ہے لہٰذا F_N کی قدر mg کے برابر ہوگی (اوپر وار اور نشیب وار قوت برابر ہوں گی)۔ یوں میکانی توانائی سے رگڑ درج ذیل مقدار کٹوتی کرے گی۔

$$\Delta E_{\text{حر}} = \mu_k mgL \tag{۲.۲}$$

(مزید تجربہ کیے بغیر یہ جاننا ممکن نہیں اس توانائی کا کتنا حصہ تیراک کو اور کتنا راہ کو منتقل ہوگا۔ ہم صرف کل مقدار جانتے ہیں۔)

مساوات 43.8 تا مساوات ۲.۲ کو مساوات 42.8 میں پر کرنے سے

$$0 = \frac{1}{2}kd^2 + mgh - \mu_k mgL \tag{۲.۳}$$

ملتا ہے، لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} L &= \frac{kd^2}{2\mu_k mg} + \frac{h}{\mu_k} \\ &= \frac{(3.2\times10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}})(5\,\mathrm{m})^2}{2(0.800)(200\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})} + \frac{35\,\mathrm{m}}{0.800} \\ &= 69.3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

جواب

آخر میں اس بات پر توجہ دیں کہ ریاضی حل کتنا آسان تھا۔ سوچ سمجھ کر نظام تعین کر کے یاد رکھتے ہوئے کہ یہ جدا نظام ہے، ہم توانائی کی بقا کا قانون استعمال کر پاتے ہیں۔ یوں نظام کے ابتدائی اور اختتامی حال توانائیوں کو، درمیانے حال جانے بغیر، برابر رکھا جا سکتا ہے۔ بالخصوص، غیر ہموار راہ پر تیر اک کی حرکت پر غور کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی۔ اس کی بجائے، اگر ہم قوانین نیوٹن استعمال کریں، ہمیں راہ کی مکمل معلومات جاننا ہو گا اور حساب بھی مشکل ہوتا۔

نظر ثانی اور خلاصہ

بقائی قوت

وہ قوت، جو کسی بند راہ پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ پر، کسی ابتدائی نقطہ سے چل کر اسی نقطہ پر واپس پہنچ کر، صفر صافی کام کرتی ہو **بقائی قوت** ہو گی۔ ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک قوت دو نقطوں کے بیچ حرکت کرتے ہوئے ذرے پر جو صافی کام کرے وہ راہ پر منحصر نہ ہو تب قوت بقائی ہو گی۔ تجاذبی قوت اور اسپرنگ قوت بقائی ہیں؛ حرکی رگڑی قوت **غیر بقائی** ہے۔

مخفی توانائی

وہ توانائی جو ایسے نظام کی تشکیل کے ساتھ وابستہ ہو جس میں بقائی قوت عمل پیرا ہو **مخفی توانائی** کہلاتی ہے۔ جب نظام کے اندر ذرے پر بقائی قوت کام W کرے، نظام کی مخفی توانائی میں تبدیلی ΔU ذیل ہو گی۔

$$\Delta U = -W \qquad (8.1)$$

نقطہ x_i سے نقطہ x_f پہنچنے پر، نظام کی مخفی توانائی میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x \qquad (8.6)$$

تجاذبی مخفی توانائی

زمین اور اس کے قریب ذرے کے نظام سے وابستہ مخفی توانائی کو **تجاذبی مخفی توانائی** کہتے ہیں۔اگر ذرہ y_i بلندی سے y_f بلندی منتقل ہو، زمین و ذرہ نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں رونما ہونے والی تبدیلی ذیل ہو گی۔

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \tag{8.7}$$

حوالہ نقطہ y_i پر رکھ کر اور اس نقطے پر تجاذبی مخفی توانائی $U_i = 0$ رکھ کر کسی بھی بلندی y پر ذرے کی تجاذبی مخفی توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$U(y) = mgy \tag{8.9}$$

لچکی مخفی توانائی

لچکدار جسم کی حالت کھینچ یا حالت داب سے وابستہ توانائی کو **لچکی مخفی توانائی** کہتے ہیں۔ایک اسپرنگ، جو اس وقت قوت $F = -kx$ پیدا کرتا ہے جب اس کے آزاد سر کا ہٹاو x ہو، کی لچکی مخفی توانائی ذیل ہو گی۔

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{8.11}$$

حوالہ تنظیم وہ ہو گا جب اسپرنگ ڈھیلا ہو، $x = 0$ اور $U = 0$ ہو۔

میکانی توانائی

حرکی توانائی K اور مخفی توانائی U کا مجموعہ نظام کی میکانی توانائی $E_{\text{میکانی}}$ ہو گا۔

$$E_{\text{میکانی}} = K + U \tag{8.12}$$

جدا نظام سے مراد وہ نظام ہے جس میں "بیرونی قوت" توانائی کی تبدیلی کا سبب نہیں بنتی۔اگر صرف تجاذبی قوتیں جدا نظام کے اندرون کام کرتی ہوں، تب نظام کی میکانی توانائی $E_{\text{میکانی}}$ تبدیل نہیں ہو سکتی۔**میکانی توانائی کی بقا کا اصول** درج ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں زیر نوشت توانائی کے انتقال کے دوران مختلف لمحات ظاہر کرتی ہیں۔

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \tag{8.17}$$

یہ اصول درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta E_{\text{میکانی}} = \Delta K + \Delta U = 0 \tag{8.18}$$

مخفی توانائی منحنیات

ایک نظام، جس میں یک بعدی قوت $F(x)$ ذرے پر عمل پیرا ہو، کی مخفی توانائی تفاعل $U(x)$ جانتے ہوئے ہم یہ قوت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \qquad (8.22)$$

اگر تفاعل $U(x)$ کی ترسیم دی گئی ہو، کسی بھی نقطہ x پر، ترسیم کی ڈھال کی نفی اس نقطہ پر قوت $F(x)$ ہو گی اور ذرے کی حرکی توانائی درج ذیل ہو گی، جہاں $E_{\text{میکانی}}$ نظام کی میکانی توانائی ہے۔

$$K(x) = E_{\text{میکانی}} - U(x) \qquad (8.24)$$

موڑ واپسی نقطہ سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر ذرہ حرکت کا رخ تبدیل کرتا ہے؛ اس نقطہ پر $K = 0$ ہو گا۔ جن نقطوں پر $U(x)$ کی ترسیم کی ڈھال صفر ہو ان نقطوں پر ذرہ **توازن** میں ہو گا؛ ان نقطوں پر $F(x) = 0$ ہو گا۔

نظام پر بیرونی قوت کا کردہ کام

کام W سے مراد وہ توانائی ہے جو نظام پر بیرونی قوت کے عمل کی بنا نظام سے باہر یا نظام کے اندر منتقل ہو۔ جہاں ایک سے زیادہ قوتیں عمل پیرا ہوں وہاں منتقل توانائی ان کا مجموعی **صافی کام** ہو گی۔ رگڑ کی غیر موجودگی میں نظام پر کیا گیا کام اور نظام کی میکانی توانائی میں تبدیلی $\Delta E_{\text{میکانی}}$ برابر ہو گی۔

$$W = E_{\text{میکانی}} = \Delta K + \Delta U(x) \qquad (8.26,\ 8.25)$$

نظام کے اندر حرکی رگڑی قوت کی موجودگی میں نظام کی حری توانائی $E_{\text{حر}}$ تبدیل ہو گی۔ (حری توانائی نظام میں جوہر اور سالموں کی بلا منصوبہ حرکت سے وابستہ ہے۔) ایسی صورت میں نظام پر کیا گیا کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = E_{\text{میکانی}} + \Delta E_{\text{حر}} \qquad (8.33)$$

یہ تبدیلی $\Delta E_{\text{حر}}$ بیرونی قوت سے پیدا ہٹاو کی قدر d اور رگڑی قوت کی قدر f_k پر منحصر ہے۔

$$E_{\text{حر}} = f_k d \qquad (8.31)$$

توانائی کی بقا

نظام کی **کل توانائی** (جو میکانی توانائی اور اندرونی توانائیوں، بشمول حری توانائی، کا مجموعہ ہو گا) میں تبدیلی اس توانائی کے برابر ہو گی جو نظام سے باہر یا نظام کے اندر منتقل کی جائے۔ اس تجرباتی حقیقت کو **توانائی کی بقا** کہتے ہیں۔ نظام پر کیا کام W ہونے کی صورت میں ذیل ہو گا۔

$$W = \Delta E = E_{\text{میکانی}} + E_{\text{حر}} + E_{\text{اندرونی}} \qquad (8.35)$$

جبکہ نظام $W = 0$ کے لئے اس سے

$$E_{\text{میکانی}} + E_{\text{حر}} + E_{\text{اندرونی}} = 0 \tag{8.36}$$

اور

$$E_{2,\text{میکانی}} = E_{1,\text{میکانی}} - \Delta E_{\text{حر}} - \Delta E_{\text{اندرونی}} \tag{8.37}$$

حاصل ہوں گے، جہاں زیر نوشت، 1 اور 2 ، دو مختلف لمحات ظاہر کرتی ہیں۔

۱.۰.۲ طاقت

قوت کی بنا طاقت، اس توانائی کے انتقال کی شرح کو کہتے ہیں، جو قوت منتقل کرتی ہے۔ یوں Δt دورانیہ میں اگر قوت توانائی ΔE منتقل کرتی ہو تب اس قوت کی اوسط طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$P_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{8.40}$$

قوت کی لمحاتی طاقت ذیل ہو گی۔

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{8.41}$$

سوالات

سوال ۲.۱: شکل 18.8 میں افقی حرکت کرتا ہوا جسم نقطہ دار اختتامی لکیر تک تین بلا رگڑ راستوں سے پہنچ سکتا ہے، جن میں فقط بلندی کا فرق ہے۔ ان راہ کی درجہ بندی (ا) اختتامی لکیر پر جسم کی رفتار کے لحاظ سے اور (ب) اختتامی لکیر تک جسم کے پہنچنے کے دورانیہ حرکت کے لحاظ سے کریں؛ زیادہ قیمت کا نتیجہ اول رکھیں۔

سوال ۲.۲: ایک ذرے کی مخفی توانائی تفاعل شکل 19.8 میں پیش ہے۔ (ا) ذرے پر قوت کی قدر کے لحاظ سے خطے AB ، BC ، CD ، اور DE کی درجہ بندی کریں۔ زیادہ قیمت کا نتیجہ اول رکھیں۔ (ب) بائیں مخفی توانائی کنواں میں پھنس جانے کے لئے ذرے کی میکانی توانائی $E_{\text{میکانی}}$ کو کس قیمت سے تجاوز کرنے کی اجازت نہیں؟ (ج) دائیں کنواں میں پھنسنے کے لئے یہ قیمت کیا ہو گی؟ (د) دونوں کنوؤں میں حرکت کر سکنے لیکن نقطہ H سے دائیں نکلنے کی صلاحیت نہ رکھنے کی صورت میں وہ قیمت کیا ہو گی؟ جز و د کی صورت میں BC ، DE ، اور FG میں سے کس خطہ میں ذرے کی حرکی توانائی (ہ) زیادہ سے زیادہ، (و) کم سے کم ہو گی؟

سوال ۲.۳: نقطہ i سے نقطہ f تک ایک براہ راست راستہ اور چار راستے گھوم کر جاتے ہیں۔ براہ راست راستے پر اور تین گھوم کر جانے والے راستوں پر ذرے پر بقائی قوت $F_{\text{بقائی}}$ عمل کرتی ہے۔ چوتھے راستے پر ذرے پر بقائی قوت $F_{\text{بقائی}}$ اور غیر بقائی قوت $F_{\text{غیر بقائی}}$ عمل کرتی ہیں۔ نقطہ i سے نقطہ j جاتے ہوئے ذرے کی میکانی توانائی میں تبدیلی ΔE ، گھوم کر جانے والی راہوں کے ہر سیدھے حصے پر (جدول میں) درج ہے۔ (ا) براہ راست راستے

پر i سے j تک $\Delta E_{\text{میکانی}}$ کیا ہو گی؟(ب) اس ایک راہ پر جس پر $E_{\text{غیر بقائی}}$ عمل پیرا ہے، $E_{\text{غیر بقائی}}$ کی بدولت $\Delta E_{\text{میکانی}}$ کیا ہو گی؟

سوال ۲.۴: ایک جسم جسم 3 m بلندی سے بلا رگڑ راہ پر رہا کیا جاتا ہے (شکل 21.8)۔ چوٹیوں کی بلندیاں شکل میں دی گئی ہیں۔ تمام چوٹیاں ایک جیسی دائری ہیں، اور جسم کسی بھی چوٹی سے اڑ کر نہیں گرتا۔ (ا) وہ کونسی پہلی چوٹی ہے جسے جسم پار کرنے سے قاصر ہو گا؟ (ب) اس چوٹی کو پار نہ کرنے کے بعد جسم کیا کرے گا؟ جن چوٹیوں کو جسم پار کر پاتا ہے، کس چوٹی پر جسم کی (ج) مرکز مائل قوت زیادہ سے زیادہ ہو گی، اور (د) کس چوٹی پر اس کی عمودی قوت کم سے کم ہو گی؟

سوال ۲.۵: ایک جسم بلا رگڑ میلان پر A تا C حرکت کرنے کے بعد افقی خطہ CD سے گزرتا ہے، جہاں رگڑی قوت عمل پیرا ہے۔ کیا جسم کی حرکی توانائی (ا) خطہ AB، (ب) خطہ BC، اور (ج) خطہ CD میں بڑھتی ہے، گھٹتی ہے، یا مستقل رہتی ہے؟ (د) کیا ان خطوں میں جسم کی میکانی توانائی بڑھتی ہے، گھٹتی ہے، یا مستقل رہتی ہے؟

سوال ۲.۶: ایک بیلن کو، جو انتصابی سلاخ پر چڑھا ہوا ہے، رسی سے اوپر کھینچا جاتا ہے (شکل 23a.8)۔ تنگ سوراخ کی بدولت یہ سلاخ پر چست بیٹھا ہے لہٰذا رگڑی قوت کافی زیادہ ہے۔ آپ کی قوت بیلن و سلاخ وزمین نظام پر $W = 100\,\mathrm{J}$ کام کرتی ہے (شکل 23b.8)۔ نظام کی توانائیوں کو شکل 23c.8 میں "فقرہ بند" کیا گیا ہے: حرکی توانائی K میں اضافہ $50\,\mathrm{J}$، اور تجاذبی توانائی U_g میں اضافہ $20\,\mathrm{J}$ ہے۔ ان کے علاوہ نظام میں صرف حری توانائی $E_{\text{حر}}$ تبدیل ہوتی ہے۔ حری توانائی میں تبدیلی $\Delta E_{\text{حر}}$ کیا ہو گی؟

سوال ۲.۷: شکل 24.8 میں دکھایا نظام سوال ۲.۶ میں پیش نظام کی طرح ہے۔ یہاں بیلن سے بندھی رسی آپ نیچے کھینچتے ہیں۔ نیچے جاتے ہوئے بیلن میز پر رکھے جسم کو دوسری رسی کی مدد سے کھینچتا ہے۔ یہاں بھی بیلن و سلاخ وزمین نظام کو شکل 23b.8 میں پیش نظام کی طرح تصور کریں۔ آپ نظام پر $200\,\mathrm{J}$ کام کرتے ہیں۔ نظام جسم پر $60\,\mathrm{J}$ کام کرتا ہے۔ نظام کے اندرون میں حرکی توانائی میں $130\,\mathrm{J}$ اضافہ، اور تجاذبی توانائی میں $20\,\mathrm{J}$ کمی رونما ہوئی۔ (ا) شکل 23c.8 کی طرز پر نظام کی توانائی کو "فقرہ بند" کریں۔ (ب) نظام کے اندر حری توانائی میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال ۲.۸: ایک جسم شکل 25.8 میں راہ پر چلتے ہوئے h بلندی سے اترتا ہے۔ ماسوائے نچلی افقی حصے کے، جس میں جسم D فاصلہ کرنے کے بعد رک جاتا ہے، راہ بلا رگڑ ہے۔ (ا) بلند h کم کرنے سے جسم D سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر فاصلہ طے کرے گا؟ (ب) اس کے برعکس، جسم کی کمیت بڑھانے سے جسم D سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر فاصلہ طے کرے گا؟

سوال ۲.۹: ایک جسم میلان پر اترتا ہے۔ شکل 26.8 میں تین صورتیں پیش کی گئی ہیں، جہاں میلان بلا رگڑ نہیں ہیں۔ تینوں صورتوں میں جسم ایک جتنی بلندی سے آغاز کرتے ہوئے حرکت کرتا ہے حتیٰ کہ حرکی رگڑی قوت اسے روک پاتی ہے۔ ان صورتوں کی درجہ بندی حر توانائی میں اضافہ کے لحاظ سے کریں۔ زیادہ قیمت اول رکھیں۔

سوال ۲.۱۰: تین گیند ایک بلندی اور ایک رفتار سے پھینکے جاتے ہیں (شکل 27.8)۔ ایک گیند سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ دوسرا انتصابی لکیر سے معمولی زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ تیسرا بلا رگڑ میلان پر روانا کیا جاتا ہے۔ گیندوں کی درجہ بندی، نقطہ دار لکیر پر پہنچ کر ان کی رفتار کے لحاظ سے کریں۔ زیادہ قیمت اول رکھیں۔

سوال ۲.۱۱: جب ایک ذرہ f سے i اور j سے i شکل 28.8 میں دکھائے راستوں پر دکھائے رخ حرکت کرتا ہے، ایک بقائی قوت $\vec{F}$ اس پر عمل کر کے، شکل میں پیش کام کرتی ہے۔ نقطہ f سے براہ راست j منتقل ہونے کی صورت میں ذرے پر $\vec{F}$ کتنا کام کرے گا؟

مخفی توانائی

سوال ۲.۱۲: ایک اسپرنگ جو $7.5\,\mathrm{cm}$ دبی حالت میں $25\,\mathrm{J}$ لچکی مخفی توانائی ذخیرہ کرتا ہو کا مقیاس لچک کیا ہو گا؟

سوال ۲.۱۳: پہلی چوٹی جس کی بلندی $h = 42\,\mathrm{m}$ کو سر کر کے، بلار گڑ تفریحی گاڑی جس کی کمیت $m = 825\,\mathrm{kg}$ ہے، کی رفتار $v_0 = 17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے (شکل 29.8)۔ اس نقطہ سے (ا) نقطہ A، (ب) نقطہ B، اور (ج) نقطہ C تک تجاذبی قوت گاڑی پر کتنا کام کرتی ہے؟ نقطہ C پر گاڑی و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی صفر لیتے ہوئے اس کی قیمت اس وقت کیا ہو گی جب گاڑی (د) نقطہ B اور (ہ) نقطہ A پر ہو؟ (و) کمیت m دگنی کرنے سے نقطہ A اور نقطہ B کے بیچ نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں تبدیلی بڑھے گی، گھٹے گی، یا تبدیل نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۱۴: آپ $2\,\mathrm{kg}$ کمیت کی کتاب $D = 10\,\mathrm{m}$ بلندی سے کھڑکی سے نیچے دوست کو گراتے ہو۔ آپ کے دوست کے ہاتھ زمین سے $d = 1.5\,\mathrm{m}$ بلندی (شکل 30.8) پر ہیں۔ (ا) آپ کے دوست کے ہاتھوں تک پہنچتے ہوئے کتاب پر تجاذبی قوت کتنا کام W_g کرے گی؟ (ب) گرنے کے دوران کتاب و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں تبدیلی ΔU کتنی ہو گی؟ اگر زمین پر نظام کی تجاذبی مخفی توانائی U صفر ہو، (ج) پوری بلندی پر U کیا ہو گی؟ (د) آپ کے دوست کے ہاتھوں میں پہنچ کر U کیا ہو گی؟ اب زمینی سطح پر $U = 100\,\mathrm{J}$ لیں اور دوبارہ (ہ) W_g، (و) ΔU، (ز) پوری بلندی پر U، اور (ح) دوست کے ہاتھوں میں U تلاش کریں۔

سوال ۲.۱۵: ایک گیند جس کی کمیت $m = 0.341\,\mathrm{kg}$ ہے بلا کمیت سلاخ جس کی لمبائی $L = 0.452\,\mathrm{m}$ ہے کے ایک سر کے ساتھ باندھا ہوا ہے۔ سلاخ کا دوسرا سر چول دار ہے، جو گیند کو انتصابی دائرے میں حرکت کی اجازت دیتا ہے۔ سلاخ کو افقی رکھ کر نیچے رخ اتنا دھکا دیا جاتا ہے کہ گیند جھول کر انتصابی بالا مقام تک بمشکل پہنچ پاتا ہے، جہاں اس کی رفتار صفر ہوتی ہے۔ تجاذبی قوت گیند پر ابتدائی نقطہ سے (ا) نچلے ترین نقطہ تک، (ب) بالاترین نقطہ تک، (ج) ابتدائی نقطہ کے ہم بلند دائیں ہاتھ نقطہ تک کتنا کام کرتی ہے؟ ابتدائی نقطہ پر گیند و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی صفر لیتے ہوئے، اس کی قیمت اس وقت کیا ہو گی جب گیند (د) نچلے ترین نقطہ، (ہ) بالاترین نقطہ، اور ابتدائی نقطہ کے ہم بلند دائیں ہاتھ نقطہ پر ہو؟ (ز) فرض کریں گیند کو اتنی ابتدائی دھکیل دی جاتی ہے کہ یہ بالاترین نقطہ پر غیر صفر رفتار سے پہنچتا ہے۔ کیا اس مرتبہ نچلے ترین نقطہ سے بالاترین نقطہ تک ΔU پہلے کے لحاظ سے زیادہ، کم، یا وہی ہو گا؟

سوال ۲.۱۶: نصف کروی برتن، جس کا رداس $r = 22\,\mathrm{cm}$ ہے، کے کنارہ سے $2\,\mathrm{g}$ برفانی پرت پھسلنے دی جاتی ہے۔ پرت اور برتن کا تماس بے رگڑ ہے۔ (ا) برتن کی تہہ تک اترتے ہوئے پرت پر تجاذبی مخفی توانائی کتنا کام کرتی ہے؟ (ب) پرت و زمین نظام کی مخفی توانائی میں اس اترنے کے دوران کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟ (ج) اگر یہ مخفی توانائی برتن کی تہہ میں صفر لی جائے، تب برتن کے کنارے پر اس کی قیمت کیا ہو گی؟ (د) اس کے برعکس، اگر برتن کے

کنارے پر جہاں پرت رہا کی گئی، مخفی توانائی صفر لی جائے تب برتن کی تہہ میں اس کی قیمت کیا ہو گی؟(ہ) پرت کی کمیت دگنی کرنے سے کیا جزو ا تا جزو د کے جوابات میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا نتائج تبدیل نہیں ہوں گے؟

سوال ۲.۱۷: ایک سل جس کی کمیت $m = 0.032\,\mathrm{kg}$ ہے شکل 33.8 کے بے رگڑ گھیر در گھیر پر حرکت کرتی ہے، جہاں گھیر کا رداس $R = 12\,\mathrm{cm}$ ہے۔ گھیر کے نچلے حصہ سے $h = 5.0\,R$ بلند نقطہ P سے ساکن سل رہا کی جاتی ہے۔ تجاذبی قوت سل پر نقطہ P سے نقطہ (ا) Q تک، (ب) گھیر کی چوٹی تک، کتنا کام کرتی ہے؟ سل و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی گھیر کے تل پر صفر لیتے ہوئے، مخفی توانائی اس وقت کیا ہو گی جب سل (ج) نقطہ P پر، (د) نقطہ Q پر، اور (ہ) گھیر کی چوٹی پر ہو؟ (و) سل محض رہا کرنے کی بجائے اسے راہ کے ہمراہ نیچے رخ دھکا دیا جاتا ہے۔ کیا جزو ا تا جزو ہ کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۱۸: ایک پتلی سلاخ جس کی کمیت قابل نظر انداز اور لمبائی $L = 2\,\mathrm{m}$ ہے کا ایک سر چول دار ہے جو سلاخ کو انتصابی دائرے میں چکر کی اجازت دیتا ہے۔ سلاخ کے دوسرے سر کے ساتھ $m = 5\,\mathrm{kg}$ کمیت کا گیند باندھا گیا ہے۔ سلاخ کو ایک طرف $\theta_0 = 30^\circ$ زاویہ تک کھینچ کر $\vec{v}_0 = 0$ ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ رہا کیا جاتا ہے۔ نچلے ترین نقطے تک اترنے پر، (ا) تجاذبی قوت گیند پر کتنا کام کرتی ہے اور (ب) گیند و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں تبدیلی کیا ہو گی؟ (ج) نچلے نقطہ پر تجاذبی مخفی توانائی صفر لیتے ہوئے اس کی قیمت نقطہ رہائی پر کیا ہو گی؟ (د) زاویہ θ_0 بڑھانے سے کیا جزو ا تا جزو ج کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا ان میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۱۹: کھڑی چٹان جس کی بلندی $12.5\,\mathrm{m}$ ہے، کی چوٹی سے افق کے ساتھ 41° اوپر رخ $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ $1.50\,\mathrm{kg}$ کا برف گولا پھینکا جاتا ہے۔ (ا) چٹان کے سر سے نیچے ہموار زمین تک پرواز کے دوران برف گولا پر تجاذبی قوت کتنا کام کرتی ہے؟ (ب) پرواز کے دوران گولا و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں کتنی تبدیلی رونما ہوتی ہے؟ (ج) چٹان کی چوٹی پر تجاذبی مخفی توانائی کی قیمت صفر لیتے ہوئے، اس کی قیمت اس وقت کیا ہو گی جب گولا نیچے زمین پر ہو؟

میکانی توانائی کی بقا

سوال ۲.۲۰: تفریحی گاڑی کی رفتار سوال ۲.۱۳ میں (ا) نقطہ A پر، (ب) نقطہ B پر، اور (ج) نقطہ C پر کیا ہو گی؟ (د) آخری پہاڑ، جس کو گاڑی سر کرنے سے قاصر ہے، پر گاڑی کس بلندی تک پہنچ پائے گی؟ (ہ) گاڑی کی کمیت دگنی کرنے سے جزو ا تا جزو د کے جوابات کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۲۱: (ا) ہاتھوں کو پہنچ کر کتاب کی رفتار سوال ۲.۱۴ میں کیا ہو گی؟ (ب) کتاب کی کمیت دگنی کرنے سے یہ رفتار کیا ہو گی؟ (ج) اس کے برعکس، اگر کتاب نیچے پھینکی جائے، کیا جزو ا کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا اس میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۲۲: (ا) برتن کی تہہ کو پہنچ کر سوال ۲.۱۶ میں برفانی پرت کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) پرت کی کمیت دگنی کرنے سے یہ رفتار کی ہو گی؟ (ج) اس کے برعکس، اگر پرت کو برتن کے ہمراہ ابتدائی نیچے رفتار دی جائے، کیا جزو ا کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا اس میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۲۳: (ا) توانائی کے تراکیب، نا کہ باب 4 کے تراکیب، استعمال کرتے ہوئے سوال ۲.۱۹ میں کھڑی چٹان کی چوٹی سے نیچے زمین پر پہنچ کر برف گولے کی رفتار تلاش کریں۔(ب) زاویہ پھینک افق سے 41° نیچے رکھنے سے رفتار کیا ہو گی؟(ج) کمیت $2.5\,\mathrm{kg}$ کرنے سے رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۲.۲۴: اسپرنگ بندوق سے $5.0\,\mathrm{g}$ چھرا سیدھا اوپر مارا جاتا ہے۔ دبے اسپرنگ پر چھرے کے مقام سے $20\,\mathrm{m}$ بلندی تک پہنچنے کے لئے اسپرنگ کو $8.0\,\mathrm{cm}$ دبانا ہو گا۔(ا) چھرا و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں چھرے کے $20\,\mathrm{m}$ صعود کے دوران کتنی تبدیلی ΔU_g ہو گی؟(ب) چھرا پھینکنے کے دوران اسپرنگ کی لچکی مخفی توانائی میں تبدیلی ΔU_s کیا ہو گی؟(ج) اسپرنگ کا مقیاس لچک کیا ہے؟

سوال ۲.۲۵: (ا) انتصابی بالا نقطہ تک صفر رفتار کے ساتھ پہنچنے کے لئے سوال ۲.۱۵ میں گیند کی ابتدائی رفتار کیا ہو گی؟ ایسی صورت میں گیند کی رفتار (ب) زیریں ترین نقطہ پر اور (ج) ابتدائی مقام کے ہم بلند دائیں نقطہ پر کیا ہو گی؟(د) کیا گیند کی کمیت دگنی کرنے سے جزو ا تا جزو ج کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا ان میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۲۶: ایک ٹرک جس کے بریک ناکارہ ہو چکے ہیں $130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار کے ساتھ سوات **تیز رو شاہراہ**[1] پر پہاڑی سے اتر رہا ہے جب ڈرائیور اس کو حفاظتی **روک میلان**[2] پر ڈالتا ہے جس کا زاویہ میلان $\theta = 15^\circ$ ہے (شکل 35.8)۔ ٹرک کی کمیت $1.2 \times 10^4\,\mathrm{kg}$ ہے۔(ا) ٹرک کو روک پانے کے لئے میلان کی کم سے کم لمبائی L کیا ہے؟(ٹرک کو ایک ذرہ تصور کریں اور اس مفروضے کا جواز پیش کریں۔)(ب) ٹرک کی کمیت کم کرنے سے اور (ج) اس کی رفتار بڑھانے سے، کیا کم سے کم درکار لمبائی L بڑھے گی، کم ہو گی، یا اس میں کوئی تبدیلی نہیں آئے گی؟

سوال ۲.۲۷: ایک سل جس کی کمیت $700\,\mathrm{g}$ ہے، انتصابی اسپرنگ جس کا مقیاس لچک $k = 400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ اور کمیت قابل نظر انداز ہے، کے اوپر h_0 بلندی سے (ساکن حالت سے) گرنے دیا جاتا ہے۔ سل اور اسپرنگ آپس میں جڑ جاتے ہیں اور اس وقت لمحاتی رکتے ہیں جب اسپرنگ $19.0\,\mathrm{cm}$ دب جائے۔ رکنے تک (ا) اسپرنگ پر سل کتنا کام کرتی ہے اور (ب) سل پر اسپرنگ کتنا کام کرتا ہے۔(ج) h_0 کی قیمت کیا ہے؟(د) سل کو $2h_0$ بلندی سے رہا کرنے کی صورت میں اسپرنگ کتنا دبے گا؟

سوال ۲.۲۸: سل پر سوال ۲.۱۷ میں نقطہ Q پر صافی عمل پیرا قوت کی قدر کا (ا) افقی جزو اور (ب) انتصابی جزو کیا ہوں گے؟(ج) سل کس بلندی h سے رہا کرتی ہو گی اگر ہم چاہتے ہوں کہ یہ گھیر کی چوٹی پر راہ سے اٹھنے لگے۔(راہ سے سل اس وقت اٹھنے لگے گی جب سل پر راہ کی عمودی قوت صفر ہو۔)(د) ابتدائی بلندی کی سعت $h = 0$ تا $h = 6R$ کے لئے چوٹی پر پہنچ کر سل پر عمودی قوت کی قدر ترسیم کریں۔

سوال ۲.۲۹: (ا) گیند کی رفتار زیریں تر نقطہ پر سوال ۲.۱۸ میں کیا ہو گی؟(ب) گیند کی کمیت بڑھانے سے کیا رفتار بڑھتی ہے، گھٹتی ہے، یا تبدیل نہیں ہوتی؟

سوال ۲.۳۰: ایک پتھر جس کی کمیت $8.00\,\mathrm{kg}$ ہے، اسپرنگ پر ساکن پڑا ہے (شکل 36.8)۔ اسپرنگ کو پتھر $10.0\,\mathrm{cm}$ دباتا ہے۔(ا) اسپرنگ کا مقیاس لچک کیا ہے؟(ب) پتھر کو مزید $30.0\,\mathrm{cm}$ دبا کر رہا کیا

---

[1] motorway
[2] escaperamp

جاتا ہے۔ رہا کرنے سے قبل دبے اسپرنگ کی لچک کی مخفی توانائی کیا ہو گی؟ (ج) نقطہ رہائی سے بلند تر نقطہ پہنچ کر پتھر و زمین نظام کی تجاذبی مخفی توانائی میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟ (د) نقطہ رہائی سے یہ بلند تر نقطہ کتنی اونچائی پر ہے؟

سوال ۲.۳۱: قابل نظر انداز کمیت کے $4.0\,\mathrm{m}$ لمبے دھاگے کے ساتھ $2.0\,\mathrm{kg}$ پتھر باندھ کر ایک رقاص حاصل کیا جاتا ہے۔ زیریں تر نقطہ سے گزرتے وقت پتھر کی رفتار $8.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) اس کی رفتار اس وقت کیا ہو گی جب دھاگا انتصاب کے ساتھ $60°$ زاویہ بناتا ہو؟ (ب) پتھر کی حرکت کے دوران انتصاب کے ساتھ دھاگا زیادہ سے زیادہ کتنا زاویہ بنائے گا؟ (ج) اگر پتھر کے زیریں تر نقطہ پر رقاص و زمین نظام کی مخفی توانائی صفر رکھی جائے، نظام کی کل میکانی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۲.۳۲: ایک رقاص جس کی لمبائی $L = 1.25\,\mathrm{m}$ ہے شکل 34.8 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے بلور (جس میں عملاً رقاص کی پوری کمیت سموتی ہے) کی رفتار اس وقت v_0 ہو گی جب رقاص کا دھاگا انتصاب کے ساتھ $\theta_0 = 40.0°$ زاویے پر ہو۔ (ا) اگر $v_0 = 8.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو، زیریں تر نقطہ پر بلور کی رفتار کیا ہو گی؟ اگر نیچے جانے کے بعد دھاگا سیدھا رکھتے ہوئے (ب) رقاص افقی حالت، اور (ج) انتصابی حالت اختیار پائے، v_0 کی کم سے کم قیمت کیا ہو گی؟ (د) زاویہ θ_0 چند درجے بڑھانے سے کیا جزو ب اور جزو ج کے جواب میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا ان میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی؟

سوال ۲.۳۳: ایک سکی باز جس کی کمیت $60\,\mathrm{kg}$ ہے، ساکن حالت سے سکی اچھال میلان کے اختتام سے $H = 20\,\mathrm{m}$ بلند نقطہ سے آغاز کر کے (شکل 37.8) زاویہ $\theta = 28°$ پر میلان چھوڑتا ہے۔ ہوائی رگڑ نظر انداز کریں اور میلان بلا رگڑ تصور کریں۔ (ا) میلان کے اختتام سے کتنی زیادہ سے زیادہ بلندی h تک یہ پہنچے گا؟ (ب) اگر سکی باز سازو سامان اٹھا کر روانا ہو، کیا h کی قیمت میں اضافہ ہو گا، کمی ہو گی، یا وہی رہے گی؟

سوال ۲.۳۴: ایک دھاگا جس کی لمبائی $L = 120\,\mathrm{cm}$ ہے کا ایک سر بندھا ہوا جبکہ دوسرے سے گیند لٹکائی گئی ہے۔ بندھے سرے سے $d = 75.0\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر دیوار میں نقطہ P پر ایک میخ موجود ہے۔ دھاگا افقی رکھتے ہوئے (جیسا شکل 38.8 میں دکھایا گیا ہے) ساکن گیند رہا کیا جاتا ہے، جو نقطہ دار قوس پر چلے گا۔ (ا) زیریں ترین نقطہ پر، اور (ب) میخ میں دھاگا پھنسنے کے بعد بلند ترین نقطہ پر گیند کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۲.۳۵: ایک سل جس کی کمیت $m = 2.0\,\mathrm{kg}$ ہے اسپرنگ پر $h = 40\,\mathrm{cm}$ بلندی سے گرنے دیا جاتا ہے (شکل 39.8)۔ اسپرنگ کا مقیاس لچک $k = 1960\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ اسپرنگ زیادہ سے زیادہ کتنا دبے گا؟

سوال ۲.۳۶: لمحہ $t = 0$ پر $1.0\,\mathrm{kg}$ گیند بلند کھمبے سے $\vec{v} = (18\,\mathrm{m\,s^{-1}})\vec{i} + (24\,\mathrm{m\,s^{-1}})\vec{j}$ کے ساتھ روانا کیا جاتا ہے۔ گیند و زمین نظام کی ΔU لمحہ $t = 0$ تا $t = 6.0\,\mathrm{s}$ کیا ہو گی (آزادانہ گرنا تصور کریں)؟

سوال ۲.۳۷: محور x پر حرکت کرتے ہوئے ذرے پر بقائی قوت $\vec{F} = (6.0x - 12)\hat{i}\,\mathrm{N}$ عمل کرتی ہے، جہاں x میٹروں میں ہے۔ اس قوت کے ساتھ وابستہ مخفی توانائی U نقطہ $x = 0$ پر $27\,\mathrm{J}$ ہے۔ (ا) مخفی توانائی U کا تفاعل x کی صورت میں لکھیں جہاں x میٹروں میں ہے۔ (ب) زیادہ سے زیادہ مثبت مخفی توانائی کیا ہے؟ x کی کس (ج) مثبت قیمت اور (د) منفی قیمت پر مخفی توانائی صفر ہے؟

سوال ۲.۳۸: کھڑی چٹان سے $688\,\mathrm{N}$ وزن کا شخص $18\,\mathrm{m}$ لمبی رسی سے جھولتا ہے (شکل 40.8)۔ چٹان کی چوٹی سے زیریں ترین نقطہ تک نشیب $3.2\,\mathrm{m}$ ہے۔ رسی اس وقت ٹوٹے گی جب اس کو $950\,\mathrm{N}$ سے زیادہ قوت کھینچے۔ (ا)

کیا رسی ٹوٹے گی؟(ب) رسی نہ ٹوٹنے کی صورت میں نشیب کے دوران رسی پر زیادہ سے زیادہ قوت کتنی ہو گی؟ رسی ٹوٹنے کی صورت میں، ٹوٹتے وقت رسی انتصاب کے ساتھ کس زاویے پر ہو گی؟

سوال ۲.۳۹: ہوائی بندوق میں نصب اسپرنگ شکل 41a.8 پر پورا اترتا ہے؛ جو قوت بالمقابل اسپرنگ کا داب یا دراضی دیتا ہے۔ اسپرنگ کو $5.5\,\mathrm{cm}$ دبا کر $3.8\,\mathrm{g}$ چھرا بندوق سے مارا جاتا ہے۔(ا) اگر چھرا اس لمحے رہا ہو جب اسپرنگ اپنے ڈھیلے حالت کو پہنچے، چھرے کی رفتار اس لمحے کیا ہو گی؟(ب) اس کے برعکس، تصور کریں چھرا اسپرنگ کو پکڑے رکھتا ہے اور اسپرنگ کو کھینچ کر $1.5\,\mathrm{cm}$ لمبا کرنے کے بعد اس سے علیحدہ ہوتا ہے۔ چھرے کی رفتار اس لمحے کیا ہو گی جب یہ اسپرنگ سے علیحدہ ہوتا ہے؟

سوال ۲.۴۰: ایک سل جس کی کمیت $m = 12\,\mathrm{kg}$ ہے ساکن حالت سے $\theta = 30^\circ$ بلا رگڑ میلان پر رہا کیا جاتا ہے (شکل 42.8)۔ میلان پر سل سے نیچے ایک اسپرنگ ہے جس کو $270\,\mathrm{N}$ قوت $2.0\,\mathrm{cm}$ دبا سکتی ہے۔ اسپرنگ کو $5.5\,\mathrm{cm}$ دبا کر سل لمحاتی رکتی ہے۔(ا) نقطہ رہائی سے رکنے کے نقطہ تک میلان پر سل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟(ب) سل کی رفتار اس لمحے کیا ہو گی جب وہ اسپرنگ کو چھوتی ہے؟

سوال ۲.۴۱: بلا رگڑ میلان جس کا زاویہ $\theta = 40^\circ$ ہے پر رکھا $2.0\,\mathrm{kg}$ ڈبہ ایک ڈوری کے ذریعہ، جو چرخی سے گزرتی ہے، اسپرنگ سے باندھا گیا ہے۔ اسپرنگ کا مقیاس لچک $k = 120\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے (شکل 43.8)۔ ڈور میں جھول نہیں اور اسپرنگ ڈھیلا ہے۔ ڈبہ ساکن حالت سے رہا کیا جاتا ہے۔ چرخی کو بلا رگڑ اور بلا کمیت تصور کریں۔(ا) میلان پر $10\,\mathrm{cm}$ نیچے رخ چل کر ڈبے کی رفتار کیا ہو گی؟(ب) نقطہ رہائی سے میلان پر ڈبہ کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد لمحاتی رکتا ہے، اور اس لمحے پر ڈبے کے اسراع کی (ج) قدر اور (د) رخ (میلان پر اوپر یا نیچے رخ) کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۴۲: بلا رگڑ میلان جس کا زاویہ $\theta = 30.0^\circ$ ہے پر $m = 2.00\,\mathrm{kg}$ سل $k = 19.6\,\mathrm{N\,cm^{-1}}$ مقیاس لچک اسپرنگ کے ساتھ ملا کر رکھی جاتی ہے، تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ جڑے نہیں ہیں (شکل 44.8)۔ اسپرنگ کو $20.0\,\mathrm{cm}$ دبا کر رہا کیا جاتا ہے۔(ا) دبے اسپرنگ کی لچکی مخفی توانائی کیا ہو گی؟(ب) سل و زمین کی تجاذبی مخفی توانائی میں تبدیلی، نقطہ رہائی سے میلان پر بلند تر نقطہ تک سل کے پہنچنے تک، کتنی ہو گی؟(ج) نقطہ رہائی سے سل میلان پر بلند تر نقطہ تک کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

باب ۳

مرکز کمیت اور خطی معیار حرکت

۳.۱ ایک بُعد میں لچکی تصادم

حرکی توانائی کی بقا درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{۳.۱}$$

ان ہمزاد مساوات کو v_{1f} اور v_{2f} کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 71.9 کو

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})=-m_2(v_{2i}-v_{2f}) \tag{۳.۲}$$

اور مساوات ۳.۱ درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}+v_{1f})=-m_2(v_{2i}-v_{2f})(v_{2i}+v_{2f}) \tag{۳.۳}$$

مساوات ۳.۳ کو مساوات ۳.۲ سے تقسیم کر کے کچھ الجبرا کے بعد درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i} \tag{۳.۴}$$

اور

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2i} \tag{۳.۵}$$

یاد رہے، زیر نوشت 1 اور 2 کسی خاص ترتیب سے مختص نہیں کیے گئے۔ مساوات 19.9 میں اور مساوات ۳.۴ اور مساوات ۳.۵ میں ان زیر نوشت کو آپس میں بدل کر لکھنے مساوات کی وہی جوڑی ملتی ہے۔ اس پر بھی توجہ

دیں کہ $v_{2i} = 0$ لینے سے، شکل 18.9 میں جسم 2 ساکن ہدف ہو گا، اور مساوات ۳.۴ اور مساوات ۳.۵ ہمیں بالترتیب مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 دیتی ہیں۔

آزمائش ا

شکل 18.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت $6\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور اختتامی معیار حرکت (ا) $2\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور (ب) $-2\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ ہونے کی صورت میں ہدف کا اختتامی خطی معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر گولے کی ابتدائی اور اختتامی حرکی توانائی بالترتیب $5\,\mathrm{J}$ اور $2\,\mathrm{J}$ ہو، ہدف کی اختتامی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

نمونی سوال ۱.۳: **لچکی تصادم در لچکی تصادم** شکل 20a.9 میں $v_{1i} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے چلتا ہوا سل 1 دو ساکن سلوں کی طرف بڑھتا ہے۔ تینوں سل ایک لکیر پر ہیں۔ یہ سل 2 سے ٹکراتا ہے جو آگے سل 3 سے جا کر ٹکراتا ہے، جس کی کمیت $m_3 = 6.0\,\mathrm{kg}$ ہے۔ دوسرے تصادم کے بعد سل 2 دوبارہ ساکن ہے، اور سل 3 کی رفتار $v_{3f} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے (شکل 20b.9)۔ دونوں تصادم لچکی ہیں۔ سل 1 اور سل 2 کی کمیتیں کیا ہیں؟ سل 1 کی اختتامی رفتار v_{1f} کیا ہے؟

کلیدی تصورات

چونکہ ہم تصادم لچکدار تصور کرتے ہیں لہٰذا میکانی توانائی کی بقا ہو گی (یوں ٹکر کی آواز، گرمی، اور ارتعاش کی بدولت توانائی کا ضیاع نظر انداز کیا جاتا ہے)۔ کوئی بیرونی افقی قوت سلوں پر عمل نہیں کرتی لہٰذا محور x پر خطی معیار حرکت کی بقا ہو گی۔ ان دو وجوہات کی بنا پر ہم دونوں تصادم پر مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 کا اطلاق کر سکتے ہیں۔

حساب پہلے تصادم سے آغاز کرتے ہوئے ہمیں اتنے زیادہ نامعلوم متغیرات سے واسطہ ہو گا کہ آگے بڑھنا مشکل ہو گا: ہم سلوں کی کمیت اور اختتامی سمتی رفتار نہیں جانتے۔ آئیں پہلے تصادم سے آغاز کریں، جس میں سل 3 کے ساتھ ٹکرانے کے بعد سل 2 رکتی ہے۔ مساوات 67.9 کا اطلاق اس تصادم پر کرتے ہیں جہاں ترقیم تبدیل کرتے ہوئے v_{2i} تصادم سے قبل سل 2 کی رفتار اور v_{2f} تصادم کے بعد اس کی رفتار دیتی ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

اس میں $v_{2f} = 0$ (سل 2 رک جاتا ہے) ڈالنے کے بعد $m_3 = 6.0\,\mathrm{kg}$ ڈال کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$m_2 = m_3 = 6.0\,\mathrm{kg} \qquad \text{(جواب)}$$

اسی طرح ترقیم تبدیل کر کے دوسرے تصادم کے لئے مساوات 68.9 لکھتے ہیں

$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

جہاں v_{3f} تیسرے سل کی اختتامی سمتی رفتار ہے۔ اس میں $m_3 = m_2$ ڈالنے کے بعد $v_{3f} =$ $5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ڈال کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$v_{2i} = v_{3f} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آئیں اب پہلے تصادم پر غور کریں؛ ہمیں سل 2 کے لئے مستعمل ترقیم پر توجہ دینی ہو گی: تصادم کے بعد سل 2 کی سمتی رفتار v_{2f} وہی ہے جو تصادم سے قبل اس کی سمتی رفتار $v_{2i} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ تھی۔ پہلے تصادم پر مساوات 68 کا اطلاق کر کے دی گئی $v_{1i} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ڈال کر ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (10\,\mathrm{m\,s^{-1}}) \end{aligned}$$

جو ذیل دیگا۔

$$m_1 = \frac{1}{3} m_2 = \frac{1}{3} (6.0\,\mathrm{kg}) = 2.0\,\mathrm{kg} \qquad \text{(جواب)}$$

یہ نتیجہ اور دی گئی v_{1i} استعمال کرتے ہوئے پہلے تصادم پر مساوات 67.9 کا اطلاق کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ &= \frac{\frac{1}{3} m_2 - m_2}{\frac{1}{3} m_2 + m_2} (10\,\mathrm{m\,s^{-1}}) = -5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

□

۲.۳ دو ابعاد میں تصادم

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

جدا نظام کے لئے جس میں دو بُعدی تصادم واقع ہو، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بُعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں۔

جدا نظام کے لئے جس میں دو بُعدی لچکی تصادم واقع ہو، (ا)، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں اور (ب) کل حرکی توانائی کی بقا کا اطلاق کر کے تصادم سے قبل اور تصادم کے بعد حرکی توانائیوں کا رشتہ جان سکیں۔

کلیدی تصور

اگر دو جسم ٹکرائیں اور ان کی حرکت ایک محور پر نہ ہو (تصادم آمنے سامنے سے نہیں ہے)، تصادم دو بُعدی ہو گا۔ اگر دو جسمی نظام بند اور جدا ہو، تصادم پر معیار حرکت کی بقا کے قانون کا اطلاق ہو گا لہٰذا درج ہو گا۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

یہ قانون اجزاء کی صورت میں دو مساوات (ہر بُعد کے لئے ایک مساوات) دیگا جو تصادم کو بیان کرتی ہیں۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تصادم کے دوران حرکی توانائی کی بقا (ذیل) تیسری مساوات دیگی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

دو ابعاد میں تصادم

جب دو اجسام کا تصادم ہو، اجسام کس رخ حرکت کرتے ہیں، اس کا تعین ان کے بیچ ضرب (جھٹکا) کرتی ہے۔ بالخصوص، جب تصادم آمنے سامنے سے نہ ہو، اجسام اپنے ابتدائی محور پر نہیں رہتے۔ ایسے دو بُعدی تصادم میں جو بند، اور جدا نظام میں واقع ہو، کل خطی معیار حرکت کی بقا ہو گی۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{۳.۶}$$

اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تب کل حرکی توانائی کی بقا بھی ہو گی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{۳.۷}$$

دو بُعدی تصادم کا تجزیہ کرنے کے لئے مساوات ۳.۶ کو xy محددی نظام کے اجزاء کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، شکل 21.9 میں ساکن ہدف کو گولا بغلی (آمنے سامنے سے نہیں) ٹکراتا ہے۔ ان کے بیچ ضرب، اجسام کو محور x ، جس پر گولا ابتدائی طور حرکت میں تھا، کے لحاظ سے θ_1 اور θ_2 زاویوں پر بھیجتی ہے۔ یہاں ہم مساوات ۳.۶ کو محور x کے ہمراہ ذیل

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \tag{۳.۸}$$

اور محور y کے ہمراہ ذیل لکھیں گے۔

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \tag{۳.۹}$$

ہم مساوات ۳.۷ کو (اس خصوصی صورت کے لئے) رفتار کے روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad \text{(حرکی توانائی)} \tag{۳.۱۰}$$

مساوات ۳.۸ تا مساوات ۳.۱۰ میں سات متغیر ہیں: دو کمیت، m_1 اور m_2؛ تین رفتار، v_{1i}، v_{1f}، اور v_{2f}؛ اور دو زاویے، θ_1 اور θ_2۔ اگر ہم ان میں سے کوئی بھی چار متغیرات جانتے ہوں، باقی تین متغیرات ان تین مساوات کو حل کر کے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

نمونی سوال ۳.۲: فرض کریں شکل 21.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت $6\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$، جبکہ اختتامی معیار حرکت کا x جزو $4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور اختتامی معیار حرکت کا y جزو $-3\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ ہے۔ ہدف کے (ا) اختتامی معیار حرکت کا x جزو اور (ب) اختتامی معیار حرکت کا y جزو کیا ہوں گے؟ □

۳.۳ تغیر کمیت کا نظام: ہوائی بان

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

ہوائی بان[۱] کی پہلی مساوات استعمال کر کے ہوائی بان کی کمیت میں کمی کی شرح، ہوائی بان کے لحاظ سے **خرج**[۲] مادے کی اضافی رفتار، ہوائی بان کی کمیت، اور ہوائی بان کی اسراع کا رشتہ جان پائیں گے۔

ہوائی بان کی دوسری مساوات استعمال کر کے خرج مادے کی اضافی رفتار کے لحاظ سے ہوائی بان کی رفتار، اور ہوائی بان کی ابتدائی اور اختتامی کمیت کا رشتہ جان پائیں گے۔

ایک ایسا حرکت پذیر نظام جس کی کمیت دی گئی شرح سے تبدیل ہوتی ہو کے لئے اس شرح اور معیار حرکت میں تبدیلی کا رشتہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

بیرونی قوتوں کی غیر موجودگی میں ہوائی بان درج ذیل لحاتی شرح سے اسراع پذیر ہو گا،

$$Rv_{\text{اضافی}} = Ma \qquad \text{(ہوائی بان کی پہلی مساوات)}$$

جہاں M ہوائی بان کی لحاتی کمیت (بشمول غیر استعمال شدہ ایندھن)، R ایندھن کے استعمال کی شرح، اور $v_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کے لحاظ سے خرج کی اضافی رفتار ہے۔ جزو $Rv_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان انجن کا دھکا ہے۔

مستقل R اور $v_{\text{اضافی}}$ کی صورت میں اگر ہوائی بان کی رفتار v_i سے تبدیل ہو کر v_f ہو جائے، اور کمیت M_i سے تبدیل ہو کر M_f ہو جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)}$$

---

[۱] rocket
[۲] exhaust

متغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ نظام کی کل کمیت اٹل ہے۔ بعض اوقات، مثلاً ہوائی بان میں، ایسا نہیں ہو گا۔ اڑان سے قبل **چبوترہ روانگی**[۳] پر کھڑے ہوائی بان کی زیادہ تر کمیت دراصل ایندھن ہو گی، جو آخر کار جل کر ہوائی بان کے انجن کی **ٹونٹی**[۴] سے دھویں کی شکل میں خارج ہو گا۔ اسراع پذیر ہوائی بان کی متغیر کمیت سے نپٹنے کی خاطر نیوٹن کے دوسرے قاعدے کا اطلاق، صرف ہوائی بان کی بجائے، ہوائی بان اور خارجی مواد دونوں کو اکٹھا لیتے ہوئے کیا جاتا ہے۔ ہوائی بان کی اسراع کے دوران اس نظام کی کمیت تبدیل نہیں ہو گی۔

اسراع کی تلاش

فرض کریں ہم جمودی حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے ساکن بیٹھے **فضائے ماورا**[۵] میں، جہاں کوئی تجاذبی یا ہوائی کی رگڑی قوت موجود نہیں، ہوائی بان کو اسراع کرتا دیکھ رہے ہیں۔ اس یک بُعدی حرکت کے لئے ہم، اختیاری لمحہ t پر، ہوائی بان کی کمیت M اور سمتی رفتار v فرض کرتے ہیں (شکل 22a.9)۔

شکل 22b.9 وقتی دورانیہ $\mathrm{d}t$ کے بعد صورت حال پیش کرتی ہے۔ ہوائی بان کی سمتی رفتار $\mathrm{d}v + v$ اور کمیت $M + \mathrm{d}M$ ہیں، جہاں کمیت میں تبدیلی $\mathrm{d}M$ منفی مقدار ہے۔ وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران ہوائی بان سے خرج مواد کی کمیت $-\mathrm{d}M$ اور جمودی حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے مواد کی سمتی رفتار U ہے۔

معیار حرکت کی بقا ہو گی

ہمارا نظام ہوائی بان اور وقفہ $\mathrm{d}t$ میں خرج مواد پر مشتمل ہے۔ نظام بند اور جدا ہے لہٰذا وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران نظام کی خطی معیار حرکت کی بقا لازمی ہے۔ یوں ذیل ہو گا

$$P_i = P_f \tag{۳.۱۱}$$

جہاں زیر نوشت i اور f بالترتیب وقفہ $\mathrm{d}t$ کے آغاز میں اور اس کے اختتام پر قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ مساوات ۳.۱۱ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v) \tag{۳.۱۲}$$

جہاں دائیں ہاتھ پہلا جزو وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران خارج کردہ مواد کا خطی معیار حرکت اور دوسرا جزو وقفہ $\mathrm{d}t$ کے اختتام پر ہوائی بان کا خطی معیار حرکت ہے۔

[۳] launchingpad
[۴] nozzle
[۵] deepspace

اضافی رفتار کا استعمال

مساوات ۳.۱۲ کی سادہ صورت ہوائی بان اور خارج مواد کے بیچ اضافی رفتار $v_{\text{اضافی}}$ استعمال کرکے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اضافی رفتار اور چوکھٹ کے لحاظ سے سمتی رفتاروں کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\left(\begin{array}{c}\text{چوکھٹ کے لحاظ سے ہوائی}\\ \text{بان کی سمتی رفتار}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{خارج مواد کے لحاظ سے}\\ \text{ہوائی بان کی سمتی رفتار}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{چوکھٹ کے لحاظ سے}\\ \text{خارج مواد کی سمتی رفتار}\end{array}\right)$$

اس کو علامتی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(v + \mathrm{d}v) = v_{\text{اضافی}} + U$$

$$U = v + \mathrm{d}v - v_{\text{اضافی}} \qquad \text{یعنی} \tag{۳.۱۳}$$

اس نتیجہ کو مساوات ۳.۱۲ میں U کی جگہ ڈال کر کچھ الجبرا کے بعد ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\,\mathrm{d}M\, v_{\text{اضافی}} = M\,\mathrm{d}v \tag{۳.۱۴}$$

دونوں اطراف $\mathrm{d}t$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} v_{\text{اضافی}} = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{۳.۱۵}$$

ہم $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ (جو ہوائی بان کی کمیت میں کمی کی شرح ہے) کو $-R$ لکھتے ہیں، جہاں R ایندھن جلنے کی (مثبت) شرح ہے، اور $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ہوائی بان کی اسراع ہے۔ ان تبدیلیوں کے ساتھ مساوات ۳.۱۵ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$Rv_{\text{اضافی}} = Ma \quad (\text{ہوائی بان کی پہلی مساوات}) \tag{۳.۱۶}$$

ہر لمحے پر مقداروں کی قیمتیں مساوات ۳.۱۶ مطمئن کرتی ہیں۔

مساوات ۳.۱۶ کا بایاں ہاتھ قوت کا بُعد $(\mathrm{kg\,s^{-1}} \cdot \mathrm{m\,s^{-1}} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m\,s^{-2}} = \mathrm{N})$ رکھتا ہے اور صرف ہوائی بان کی بناوٹ پر منحصر ہے؛ یعنی، شرح R پر، جس سے ایندھن (کمیت) صَرف کیا جاتا ہے، اور رفتار $v_{\text{اضافی}}$ پر، جس سے یہ کمیت ہوائی بان سے خارج کی جاتی ہے۔ ہم اس جزو $Rv_{\text{اضافی}}$ کو ہوائی بان کی **قوتِ دھکیل**[٦] کہتے اور T سے ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات ۳.۱۶ کو $T = Ma$ لکھ کر نیوٹن کا دوسرا قانون حاصل ہوتا ہے، جہاں اس لمحے پر جب ہوائی بان کی کمیت M ہے اس کی اسراع a ہے۔

سمتی رفتار کی تلاش

ہم جاننا چاہتے ہیں کہ جیسے جیسے ہوائی بان ایندھن صَرف کرتا ہے اس کی سمتی رفتار کیسے تبدیل ہو گی۔ مساوات ۳.۱۴ ذیل کہتی ہے۔

$$\mathrm{d}v = -v_{\text{اضافی}}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

[٦]thrust

اس کے تکمل

$$\int_{v_i}^{v_f} \mathrm{d}v = -v_{\text{اضافی}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

میں M_i ہوائی بان کی ابتدائی کمیت اور M_f اختتامی کمیت ہے۔ تکمل لینے سے ذیل حاصل ہو گا

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)} \tag{۳.۱۷}$$

جو ہوائی بان کی کمیت M_i سے گھٹ کر M_f ہونے کی صورت میں ہوائی بان کی رفتار میں اضافہ دیتی ہے۔ (مساوات ۳.۱۷ میں علامت $\ln$ **قدرتی لوگارتھم**[7] ظاہر کرتی ہے۔) ہم یہاں **کثیر المراحل**[8] ہوائی بان کی افادیت جان سکتے ہیں جو ایندھن ختم ہونے پر خالی ٹینکی سے چھٹکارا حاصل کر کے M_f گھٹاتا ہے۔ مثالی ہوائی بان مطلوبہ مقام پر صرف ضروری ساز و سامان کے ساتھ پہنچے گا۔

نمونی سوال ۳.۳: **ہوائی بان کا انجن، قوت دھکیل، اسراع** اس باب کی تمام گزشتہ مثالوں میں نظام کی کمیت اٹل تھی۔ یہاں ہم ایسے نظام (ہوائی بان) کی بات کرتے ہیں جس کی کمیت بتدریج کم ہوتی ہے۔ ایک ہوائی بان جس کی ابتدائی کمیت $M_i = 850\,\mathrm{kg}$ ہے $R = 2.3\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ شرح سے ایندھن صرف کرتا ہے۔ ہوائی بان کے لحاظ سے خارج مواد کی رفتار $v_{\text{اضافی}} = 2800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) ہوائی بان کا انجن کتنی قوت دھکیل پیدا کرتا ہے؟

کلیدی تصور

مساوات ۳.۱۶ کے تحت ایندھن صرف کرنے کی شرح R کو خارج مواد کی اضافی رفتار $v_{\text{اضافی}}$ سے ضرب دینے سے قوت دھکیل T حاصل ہو گی۔

حساب: یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} T = Rv_{\text{اضافی}} &= (2.3\,\mathrm{kg\,s^{-1}})(2800\,\mathrm{m\,s^{-1}}) \\ &= 6440\,\mathrm{N} \approx 6400\,\mathrm{N} \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

(ب) ہوائی بان کی ابتدائی اسراع کیا ہو گی؟

کلیدی تصور

ہم ہوائی بان کی قوت دھکیل T اور اس کی اسراع کی قدر a کا رشتہ $T = Ma$ جانتے ہیں، جہاں M ہوائی بان کی کمیت ہے۔ لیکن، جیسے جیسے ایندھن صرف ہوتا ہے M گھٹتی اور a بڑھتا ہے۔ ہمیں ابتدائی اسراع درکار ہے لہٰذا ہم ہوائی بان کی ابتدائی کمیت M_i لیں گے۔

---

[7] natural logarithm
[8] multistage

حساب: ان معلومات سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$a = \frac{T}{M} = \frac{6440\,\text{N}}{850\,\text{kg}} = 7.6\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \qquad \text{(جواب)}$$

سطح زمین سے سیدھا اوپر اڑان کے لئے ضروری ہے کہ ابتدائی اسراع $g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ سے زیادہ ہو۔ یعنی، ابتدائی اسراع کو سطح زمین پر تجاذبی اسراع سے زیادہ ہونا ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں، ہوائی بان پر ابتدائی تجاذبی قوت، جس کی قدر $M_i g$ ہے

$$(850\,\text{kg})(9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}) = 8330\,\text{N}$$

سے قوت دھکیل T کا زیادہ ہونا لازمی ہے، ورنہ ہوائی بان زمین سے اٹھنے کے قابل نہیں ہو گا۔ چونکہ اس ہوائی بان کی قوت دھکیل (جو یہاں $T = 6440\,\text{N}$ ہے) درکار قدر سے کم ہے لہٰذا یہ ہوائی بان اڑ نہیں پائے گا؛ یہاں زیادہ طاقتور ہوائی بان کی ضرورت ہے۔ □

نظر ثانی اور خلاصہ

مرکز کمیت

ایک نظام جو n ذرات پر مشتمل ہو کے مرکز کمیت کی تعریف وہ نقطہ ہے جس کے محدد درج ذیل ہوں۔

$$x_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$
$$y_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$
$$z_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (۹.۵)$$

اس کو مختصراً ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں M نظام کی کل کمیت $\sum_{i=1}^{n} m_i$ ہے۔

$$\vec{r}_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (۹.۸)$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے ذرات کا نظام

ایک نظام، جو ذرات پر مشتمل ہو، کے مرکز کمیت کی حرکت **نیوٹن کے دوسرے قانون برائے ذرات پر مشتمل نظام** کے تحت ہو گی، جو ذیل کہتا ہے۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = M\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}} \qquad (۹.۱۴)$$

یہاں نظام پر لاگو تمام بیرونی قوتیں مل کر صافی قوت $\vec{F}_{\text{صافی}}$ دیتی ہیں۔ نظام کی کل کمیت M، اور نظام کے مرکز کمیت کی اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے۔

خطی معیار حرکت اور نیوٹن کا دوسرا قانون

تنہا ذرے کے لئے، مقدار $\vec{p}$ متعارف کرکے، جو اس ذرے کا **خطی معیار حرکت** کہلاتا ہے اور جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{۹.۲۲}$$

ہم نیوٹن کا دوسرا قانون اس معیار حرکت کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{۹.۲۳}$$

ذرات پر مشتمل نظام کے لئے مذکورہ بالا دو تعلق ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \text{اور} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۹.۲۵، ۹.۲۷}$$

تصادم اور ضرب

تصادم میں ملوث ذرہ نما جسم پر معیار حرکت کے روپ میں نیوٹن کے دوسرے قانون کا اطلاق **ضرب و خطی معیار حرکت کا مسئلہ** دیگا:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J} \tag{۹.۳۱، ۹.۳۲}$$

جہاں جسم کے خطی معیار حرکت میں تبدیلی $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ ہے، اور ضرب $\vec{J}$ وہ قوت $\vec{F}(t)$ ہے جو تصادم کے دوران دوسرا جسم اس (پہلے جسم) پر لاگو کرتا ہے۔

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \tag{۹.۳۰}$$

اگر تصادم کا دورانیہ Δt اور اس دوران $\vec{F}(t)$ کی اوسط قیمت $F_{\text{اوسط}}$ ہو تب یک بُعدی حرکت کے لئے ذیل ہوگا۔

$$J = F_{\text{اوسط}}\Delta t \tag{۹.۳۵}$$

ساکن جسم پر کمیت m کے ذرے، جن کی رفتار v ہے، برس کر ذیل اوسط قوت پیدا کرتے ہیں

$$F_{\text{اوسط}} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v \tag{۹.۳۷}$$

جہاں ساکن جسم سے ذروں کے تصادم کی شرح $n/\Delta t$ ، اور ہر ایک ذرے کی رفتار میں تبدیلی Δv ہے (جسم ساکن رہتا ہے)۔ یہ اوسط قوت ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے

$$F_{\text{اوسط}} = -\frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta v \tag{۹.۴۰}$$

جہاں $\Delta M/\Delta t$ وہ شرح ہے جس سے کمیت ساکن جسم سے ٹکراتی ہے۔ درج بالا دو مساوات میں اگر ذرے تصادم کے بعد رک جاتے ہوں تب $\Delta v = -v$ ہو گا، اور اگر ذرے جسم پر ٹپکی کھا کر رفتار میں تبدیلی کے بغیر واپس لوٹیں تب $\Delta v = -2v$ ہو گا۔

خطی معیار حرکت کی بقا

جب دا نظام پر بیرونی قوت عمل نہیں کرتی، لہٰذا اس نظام کا خطی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو گا۔

$$\vec{P} = \text{مستقل} \qquad (\text{بند، جدا نظام}) \tag{۹.۴۲}$$

اس کو ذیل بھی لکھ سکتے ہیں جہاں زیر نوشت کسی ابتدائی لمحہ اور اختتامی لمحہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (\text{بند، جدا نظام}) \tag{۹.۴۳}$$

مذکورہ بالا دونوں مساوات **خطی معیار حرکت کی بقا** کو بیان کرتی ہیں۔

ایک بُعد میں غیر لچکی تصادم

دو اجسام کی غیر لچکی تصادم میں دو جسمی نظام کی حرکی توانائی کی بقا نہیں ہو گی (حرکی توانائی مستقل نہیں ہو گی)۔ اگر نظام بند اور جدا ہو، نظام کے کل خطی معیار حرکت کی بقا لازماً ہو گی (یہ مستقل ہو گا)، جس کو سمتیہ روپ میں ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں زیر نوشت i اور j بالترتیب تصادم سے عین قبل اور اس کے عین بعد لمحات ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \tag{۹.۵۰}$$

ذروں کی حرکت ایک محور پر ہونے کی صورت میں تصادم یک بُعدی ہو گا اور ہم مذکورہ بالا مساوات کو محور کے ہمراہ سمتی رفتار اجزاء کی صورت میں ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{۹.۵۱}$$

اگر دو جسم آپس میں چپک جائیں، تصادم مکمل غیر لچکی ہو گا اور دونوں اجسام کی اختتامی سمتی رفتار V ہو گی (کیونکہ یہ آپس میں جڑے ہیں)۔

مرکز کمیت کی حرکت

دو متصادم اجسام کے بند، جدا نظام کے مرکز کمیت پر تصادم اثر انداز نہیں ہو گا۔ بالخصوص، مرکز کمیت کی سمتی رفتار $\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}}$ کو تصادم تبدیل نہیں کرتا۔

ایک بُعد میں لچکی تصادم

لچکی تصادم ایک خاص قسم کا تصادم ہے جس میں متصادم اجسام کے نظام کی حرکی توانائی برقرار رہتی ہے۔ اگر نظام بند اور جدا بھی ہو، اس کا خطی معیار حرکت بھی برقرار رہے گا۔ یک بُعدی تصادم کے لئے، جس میں جسم 2 ہدف اور جسم 1 گولا ہے، حرکی توانائی اور خطی معیار حرکت کی بقا، تصادم کے عین بعد سمتی رفتاروں کے لئے درج ذیل مساوات دیتی ہیں۔

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \tag{۹.۶۷}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \tag{۹.۶۸}$$

دو ابعاد میں تصادم

اگر دو جسم یوں ٹکرائیں کہ ان کی حرکت ایک ہی محور پر نہ ہو (ٹکر آمنے سامنے سے نہیں)، تصادم دو بُعدی ہو گا۔ اگر دو جسمی نظام بند اور جدا ہو، معیار حرکت کی بقا کے قانون کا اطلاق تصادم پر ہو گا جو ذیل لکھا جائے گا۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{۹.۷۷}$$

اجزاء کے روپ میں یہ قانون دو مساوات دے گا جو تصادم کو بیان کریں گی (دو ابعاد میں ہر بُعد کے لئے ایک مساوات)۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (خصوصی صورت)، تصادم کے دوران حرکی توانائی کی بقا تیسری مساوات دیگی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{۹.۷۸}$$

متغیر کمیتی نظام

بیرونی قوتوں کی عدم موجودگی میں ہوائی بان ذیل لحاتی شرح سے اسراع پذیر ہو گا

$$R v_{\text{اضافی}} = Ma \qquad \text{(ہوائی بان کی پہلی مساوات)} \tag{۹.۸۷}$$

جہاں M ہوائی بان کی لحاتی کمیت (جس میں غیر استعمال شدہ ایندھن شامل ہے)، R ایندھن کے اصراف کی شرح، اور $v_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کے لحاظ سے خرج کی اضافی رفتار ہے۔ جزو $R v_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کی انجن کی **قوت دھکیل** ہے۔ جب ایک ہوائی بان کی، جس کی R اور $v_{\text{اضافی}}$ اٹل ہو، کمیت M_i سے M_f ہونے پر اس کی رفتار v_i سے v_f ہو، درج ذیل ہو گا۔

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)} \tag{۹.۸۸}$$

سوالات

سوال ۱.۳: تین ذرات جن پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں کا فضائی جائزہ شکل 9.23 میں پیش ہے۔ دو ذروں پر قوتوں کی قدریں اور سمتیں دی گئی ہیں۔ تین ذروی نظام کا مرکز کمیت (ا) ساکن، (ب) دائیں رخ مستقل سمتی رفتار سے، اور (ج) اوپر وار اسراع پذیر ہونے کی صورت میں تیسری قوت کی قدر اور سمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۳: بلا رگڑ مستوی پر مستقل سمتی رفتاروں سے حرکت کرتے ہوئے ایک برابر کمیت کے چار ذروں کا فضائی جائزہ شکل 24.9 میں پیش ہے۔ سمتی رفتاروں کے رخ دیے گئے ہیں؛ ان کی قدریں برابر ہیں۔ ذروں کی جوڑیاں بنائیں۔ کون سی جوڑی ایسا نظام دیتی ہے جس کا مرکز کمیت (ساکن ہے، (ب) ساکن ہے اور مبدا پر ہے، اور (ج) مبدا سے گزرتا ہے؟

سوال ۳.۳: فرض کریں ایک ڈبہ، جو x محور پر مستقل مثبت سمتی رفتار سے حرکت میں ہو، دھماکے سے دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ایک ٹکڑا، جس کی کمیت m_1 ہے، مثبت سمتی رفتار $\vec{v}_1$ سے حرکت کرتا ہے۔ دوسرا ٹکڑا جس کی کمیت m_2 ہے (ا) مثبت سمتی رفتار $\vec{v}_2$ (شکل 25a.9)، (ب) منفی سمتی رفتار $\vec{v}_2$ (شکل 25b.9)، یا (ج) صفر سمتی رفتار (شکل 25c.9) رکھ سکتا ہے۔ ان ممکن نتائج کی درجہ بندی مطابقتی $\vec{v}_1$ کی قدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۴.۳: تصادم میں ملوث جسم کے لئے قوت کی قدر بالمقابل وقت کی ترسیمات شکل 26.9 میں پیش ہیں۔ ترسیمات کی درجہ بندی جسم پر قوت دھکیل کی قدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۵.۳: بلا رگڑ مستوی پر حرکت کرتے تین ڈبوں پر عمل پیرا قوت کا فضائی نظارہ شکل 27.9 میں پیش ہے۔ ہر ایک ڈبہ کے لئے، کیا محور x اور محور y کے ہمراہ خطی معیار حرکت کی بقا ہو گی؟

سوال ۶.۳: تین یا چار یکساں ذروں کا گروہ، جو محور x یا محور y کے متوازی ایک رفتار سے حرکت کرتے ہوں، شکل 28.9 میں دکھایا گیا ہے۔ مرکز کمیت کی رفتار کے لحاظ سے ان کی درجہ بندی، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۷.۳: ایک سل بلا رگڑ فرش پر حرکت کر کے اس جتنی کمیت کی دوسری سل سے ٹکراتی ہے۔ شکل 29.9 میں سلوں کی حرکی توانائی K کی چار ممکنہ ترسیم پیش ہیں۔ (ا) ان میں سے کون سی طبعی وجوہات کی بنا پر ممکن نہیں؟ باقی میں سے کونسی (ب) لچکی تصادم اور (ج) غیر لچکی تصادم بہتر ظاہر کرتی ہے؟

سوال ۸.۳: بلا رگڑ فرش پر محور x کے ہمراہ سل 1 ساکن سل 2 کی طرف بڑھتا ہے۔ عین لچکی تصادم سے قبل لمحہ پر ان کی تصویر کشی شکل 30.9 میں کی گئی ہے۔ اس لمحہ پر دو سل نظام کے مرکز کمیت کے تین ممکن مقام بھی پیش ہیں۔ (نقطہ B سلوں کے مراکز کے درمیان نصف فاصلے پر ہے۔) اگر تصادم کے بعد نظام کا مرکز کمیت (ا) A پر، (ب) B پر، اور (ج) C پر ہو، کیا سل 1 ساکن ہو گا؟ آگے کی طرف گامزن ہو گا؟ پیچھے کی طرف گامزن ہو گا؟

سوال ۹.۳: دو اجسام محور x کے ہمراہ یک بُعدی لچکی تصادم کا شکار ہوتے ہیں۔ شکل 31.9 میں اجسام اور مرکز کمیت کے مقام بالمقابل وقت ترسیمات پیش ہیں۔ (ا) کیا دونوں جسم ابتدائی طور پر حرکت میں تھی، یا ان میں سے ایک ساکن تھا؟ کونسا لکیری قطع (ب) تصادم سے قبل اور (ج) تصادم کے بعد مرکز کمیت دیتا ہے؟ (د) کیا تصادم سے قبل زیادہ تیز حرکت کرتے جسم کی کمیت دوسرے جسم کی کمیت سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس

کے برابر ہے؟

سوال ۳.۱۰: افقی فرش پر سل ابتدائی طور ساکن، محور x کے ہمراہ مثبت رخ، یا محور کے منفی رخ حرکت میں ہے۔ سل دھماکے سے دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے جو اسی محور پر حرکت کرتے ہیں۔ فرض کریں سل اور اس کے دو ٹکڑے ایک بند اور جدا نظام دیتے ہیں۔ سل اور ٹکڑوں کے معیار حرکت بالمقابل وقت t کی چھ ترسیمات شکل 32.9 میں پیش ہیں۔ کونسی ترسیمات طبعی ناممکن ہیں؟ وجوہات پیش کریں۔

سوال ۳.۱۱: محور x پر کمیت m_1 کا سل بلا رگڑ فرش پر چلتا ہوا کمیت m_2 کے ساکن سل سے لچکی متصادم ہوتا ہے۔ شکل 33.9 میں سل 1 کا مقام x بالمقابل وقت t ٹھوس لکیر سے پیش کیا گیا ہے، جس پر نقطہ تصادم x_c اور وقت تصادم t_c کی نشاندہی کی گئی ہے۔ اگر (ا) $m_1 < m_2$ اور (ب) $m_1 > m_2$ ہو، تصادم کے بعد سل 1 نقطہ دار راہ A، B، C، اور D میں کس پر گامزن ہو گا؟ (ج) اگر $m_1 = m_2$ ہو سیدھ راہ 1، 2، 3، 4، اور 4 میں کس پر گامزن ہو گا؟

سوال ۳.۱۲: دو جسم اور ان کے مرکز کمیت کی مقام بالمقابل وقت کی چار ترسیمات پیش ہیں۔ یہ جسم بند اور جدا نظام دیتے ہیں اور محور x پر چلتے ہوئے یک بُعدی مکمل غیر لچکی تصادم کا شکار ہوتے ہیں۔ کیا ترسیم 1 میں (ا) دو جسم اور (ب) مرکز کمیت محور x پر مثبت رخ یا منفی رخ حرکت کرتے ہیں؟ (ج) کونسی ترسیم طبعی ناممکن ہے؟ وجہ پیش کریں۔

مرکز کمیت

سوال ۳.۱۳: کمیت $2.00\,\mathrm{kg}$ ذرے کا xy محدد $(-1.20\,\mathrm{m}, 0.500\,\mathrm{m})$، اور کمیت $4.00\,\mathrm{kg}$ ذرے کا xy محدد $(0.600\,\mathrm{m}, -0.750\,\mathrm{m})$ ہے۔ دونوں افقی مستوی پر پائے جاتے ہیں۔ کمیت $3.00\,\mathrm{kg}$ کا تیسرا ذرہ کس (ا) x اور (ب) y پر رکھ کر تین ذروی نظام کا مرکز کمیت $(-0.500\,\mathrm{m}, -0.700\,\mathrm{m})$ پر ہو گا؟

سوال ۳.۱۴: تین ذروی نظام جس میں $m_1 = 3.0\,\mathrm{kg}$، $m_2 = 4.0\,\mathrm{kg}$، اور $m_3 = 8.0\,\mathrm{kg}$ ہے شکل 35.9 میں پیش ہے۔ محور کے پیمانے $x_s = 2.0\,\mathrm{m}$ اور $y_s = 2.0\,\mathrm{m}$ کے لحاظ سے رکھے گئے ہیں۔ نظام کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد اور (ب) y محدد کیا ہو گا؟ (ج) کیا m_3 بتدریج بڑھانے سے مرکز کمیت اس ذرے کی جانب منتقل ہو گا، اس سے دور منتقل ہو گا، یا ساکن رہے گا؟

سوال ۳.۱۵: ایک سل جس کے اضلاع $d_1 = 11.0\,\mathrm{cm}$، $d_2 = 2.80\,\mathrm{cm}$، اور $d_3 = 13.0\,\mathrm{cm}$ ہیں شکل 36.9 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا نصف حصہ المونیم (کثافت $2.70\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$) اور آدھا لوہے (کثافت $7.85\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$) کا ہے۔ سل کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد، (ب) y محدد، اور (ج) z محدد کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۶: تین یکساں پیکر ڈنڈیاں جن میں ہر ایک کی لمبائی $L = 22\,\mathrm{cm}$ ہے مل کر الٹ نون غنّہ بناتی ہیں (شکل 37.9)۔ انتصابی ڈنڈی کی کمیت $14\,\mathrm{g}$ اور افقی ڈنڈی کی کمیت $42\,\mathrm{g}$ ہے۔ نظام کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد اور (ب) y محدد کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۷: یکساں موٹائی کا چادر شکل 38.9 میں پیش ہے۔ اگر $L = 5.0\,\mathrm{cm}$ ہو چادر کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد اور (ب) y محدد کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۸: قابل نظر انداز موٹائی کی یکساں دھاتی چادر سے بنایا گیا مکعب شکل 39.9 میں پیش ہے۔ مکعب اوپر سے کھلا ہے اور اس کا کنارہ $L = 40\,\text{cm}$ لمبا ہے۔ مکعب کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد، (ب) y محدد، اور (ج) z محدد تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۹: ایمونیا سالمہ (NH_3)، جس میں ہائیڈروجن جوہر (H) متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں، شکل 40.9 میں پیش ہے۔ مثلث کا مرکز ہر H جوہر سے $d = 9.40 \times 10^{-11}\,\text{m}$ فاصلے پر ہے۔ نائیٹروجن جوہر N اس ہرم کی چوٹی پر واقع ہے جس کا تل تین H جوہر بناتے ہیں۔ نائیٹروجن اور ہائیڈروجن کی جوہری کمیت نسبت 13.9، اور نائیٹروجن تا ہائیڈروجن فاصلہ $L = 10.14 \times 10^{-11}\,\text{m}$ ہے۔ سالمہ کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد اور (ب) y محدد کیا ہو گا؟

سوال ۳.۲۰: یکساں پیکر کی بوتل جس کی کمیت $0.140\,\text{kg}$ اور لمبائی $12.0\,\text{cm}$ ہے، میں $0.354\,\text{kg}$ مشروب بھری ہے (شکل 41.9)۔ بوتل کے سر اور تل میں، مشروب خارج کرنے کی غرض سے، باریک سوراخ (جو بوتل کی کمیت پر اثر انداز نہیں ہوتے) کیے جاتے ہیں۔ (ا) مکمل بھری بوتل (بمع مشروب) کے مرکز کمیت کی اور (ب) مکمل خالی بوتل کے مرکز کمیت کی بلندی h کیا ہو گی؟ (ج) جیسے جیسے مشروب خارج ہوتا ہے، h کو کیا ہو گا؟ (د) مرکز کمیت کے لحاظی بلندی کو x کہہ کر اس کی کمتر قیمت تلاش کریں۔

نیوٹن کا دوسرا قاعدہ برائے ذرات کا نظام

سوال ۳.۲۱: ایک پتھر $t = 0$ پر گرنے دیا جاتا ہے۔ دوسرا پتھر جس کی کمیت دگنی ہے، اسی بلندی سے، $t = 100\,\text{ms}$ پر گرنے دیا جاتا ہے۔ (ا) نقطہ رہائی سے، $t = 300\,\text{ms}$ پر، دو پتھر نظام کا مرکز کمیت کتنا نیچے ہو گا؟ (دونوں پتھر اس لمحے تک ہوا میں ہیں۔) (ب) اس لمحے پر دو پتھر نظام کا مرکز کمیت کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

سوال ۳.۲۲: چوراہا بتی پر $1000\,\text{kg}$ کمیت کی گاڑی کھڑی ہے۔ جیسے ہی بتی سبز ہوتی ہے گاڑی $4.0\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ مستقل اسراع سے حرکت میں آتی ہے۔ عین اسی لمحے ایک ٹرک جس کی کمیت $2000\,\text{kg}$ اور جو $8.0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ رفتار سے چل رہا ہے گاڑی سے آگے نکلتا ہے۔ (ا) گاڑی و ٹرک نظام کا مرکز کمیت $t = 3.0\,\text{s}$ بعد بتی سے کتنا دور اور (ب) اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۲۳: زیتون کا ایک بڑا پھل $(m = 0.50\,\text{kg})$ xy محددی نظام کے مرکز پر، اور جوز برازیل $M = 1.5\,\text{kg}$ نقطہ $(1.0\,\text{m}, 2.0\,\text{m})$ پر پڑا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر قوت $\vec{F}_z = (2.0\hat{i} + 3.0\hat{j})\,\text{N}$ زیتون کے پھل پر اور $\vec{F}_j = (-3.0\hat{i} - 2.0\hat{j})\,\text{N}$ جوز برازیل پر عمل کرنا شروع کرتی ہیں۔ لمحہ $t = 0$ کے لحاظ سے $t = 4.0\,\text{s}$ پر زیتون و جوز نظام کے مرکز کمیت کا ہٹاو اکائی سمتی ترقیم میں کیا ہو گا؟

سوال ۳.۲۴: دو پھسلن باز، جن میں سے ایک کی کمیت $65\,\text{kg}$ اور دوسرے کی $40\,\text{kg}$ ہے، $10\,\text{m}$ لمبا ڈنڈا، جس کی کمیت قابل نظر انداز ہے، تھامے برف پر کھڑے ہیں۔ ڈنڈے کے سروں سے آغاز کرتے ہوئے پھسلن باز ڈنڈا کھینچ کر، ڈنڈے کے ہمراہ حرکت کرتے ہوئے قریب آ کر، ملتے ہیں۔ کم کمیتی شخص کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

سوال ۳.۲۵: ایک گولا $20\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ کی ابتدائی سمتی رفتار $\vec{v}_0$ کے ساتھ افق سے $\theta_0 = 60^\circ$ زاویہ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ خط حرکت کے بلند تر نقطہ پر گولا دھماکے سے دو برابر ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے (شکل 9-42)۔ ایک ٹکڑا جس

کار فتار دھماکے کے عین بعد صفر ہے سیدھا نیچے گرتا ہے۔ دوسرا ٹکڑا توپ سے کتنے فاصلے پر گرتا ہے؟ (ہوائی رگڑ نظر انداز کریں اور زمین ہموار تصور کریں۔)

سوال ۳.۲۶: وقت $t = 0$ پر دو ذرے محددی نظام کے مبدا سے پھینکے جاتے ہیں (شکل 9-43)۔ ذرہ 1 جس کی کمیت $m_1 = 5.00\,\mathrm{g}$ ہے بلا رگڑ افقی زمین پر محور x کے ہمراہ $10.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے روانا کیا جاتا ہے۔ ذرہ 2 جس کی کمیت $m_2 = 3.00\,\mathrm{g}$ ہے $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے اوپری زاویے پر یوں پھینکا جاتا ہے کہ یہ ہر لمحہ ذرہ 1 کے ٹھیک اوپر رہتا ہے۔ (ا) دو ذروی نظام کا مرکز کمیت کتنی زیادہ سے زیادہ بلندی $H_{\text{بلندتر}}$ کو پہنچتا ہے؟ اکائی سمتی ترقیم میں مرکز کمیت کی (ب) سمتی رفتار اور (ج) اسراع اس لمحے کیا ہو گی جب مرکز کمیت $H_{\text{بلندتر}}$ پر ہو؟

سوال ۳.۲۷: ایک ریڑھی جو ہوائی ڈگر پر چلتی ہے رسی کے ذریعہ اینٹ سے منسلک ہے جو لٹک رہی ہے (شکل 44.9)۔ ریڑھی کی کمیت $m_1 = 0.600\,\mathrm{kg}$ اور اس کا مرکز کمیت ابتدائی طور پر $(-0.500\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ محدد پر ہے۔ اینٹ کی کمیت $m_2 = 0.400\,\mathrm{kg}$ اور اس کا مرکز کمیت ابتدائی طور پر $(0\,\mathrm{m}, -0.100\,\mathrm{m})$ محدد پر ہے۔ رسی اور چرخی کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔ ریڑھی ساکن حالت سے رہا کی جاتی ہے۔ ریڑھی اور اینٹ حرکت کرتی ہیں حتٰی کہ ریڑھی چرخی سے ٹکراتی ہے۔ ریڑھی اور ہوائی ڈگر کے بیچ رگڑ، اور چرخی اور دھرے کے بیچ رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ (ا) ریڑھی و اینٹ نظام کے مرکز کمیت کی اسراع اکائی سمتی ترقیم میں کیا ہو گی؟ (ب) مرکز کمیت کی سمتی رفتار بطور وقت t کا تفاعل کیا ہو گی؟ (ج) مرکز کمیت کی راہ ترسیم کریں۔ (د) اگر راہ قوسی ہو، کیا یہ دائیں اوپر جانب یا بائیں نیچے جانب ابھرتی ہے، اور اگر راہ سیدھی ہو، x محور اور راہ کے بیچ زاویہ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۲۸: زریاب جس کی کمیت $80\,\mathrm{kg}$ ہے اور اسد جو ہلکا ہے $30\,\mathrm{kg}$ ساکن کشتی میں بیٹھ (ناران میں) کر سیف الملوک جھیل کا نظارہ کر رہے ہیں۔ ان کی نشستیں $3.0\,\mathrm{m}$ فاصلے پر، اور کشتی کے مرکز کمیت کے لحاظ سے میتشاکلی واقع ہیں۔ دونوں آپس میں نشست تبدیل کرتے ہیں۔ اگر کشتی کا مرکز کمیت گھاٹ کے لحاظ سے $40\,\mathrm{cm}$ افقی حرکت کرے، اسد کی کمیت کیا ہو گی؟

سوال ۳.۲۹: کنارے سے $D = 6.1\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $4.5\,\mathrm{kg}$ کتّا $18\,\mathrm{kg}$ کشتی میں کھڑا ہے (شکل 45.9-الف)۔ یہ کنارے کی طرف $2.4\,\mathrm{m}$ چل کر رکتا ہے۔ کتّا اب کنارے سے کتنا دور ہو گا؟ کشتی اور پانی کے بیچ رگڑ نظر انداز کریں۔ (اشارہ: شکل-ب دیکھیں۔)

خطی معیار حرکت

سوال ۳.۳۰: ایک گیند جس کی کمیت $0.70\,\mathrm{kg}$ ہے $5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ افقی حرکت کر کے انتصابی دیوار سے ٹکرا کر $2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے واپس پلٹتا ہے۔ گیند کے خطی معیار حرکت میں تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۳۱: ایک ٹرک، جس کی کمیت $2100\,\mathrm{kg}$ ہے، شمال کی طرف $41\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ چلتے ہوئے مشرق کو مڑ کر $51\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اسراع پذیر ہوتا ہے۔ (ا) ٹرک کے حرکی توانائی میں تبدیلی کیا ہو گی؟ ٹرک کے معیار حرکت میں تبدیلی کی (ب) قدر اور (ج) تبدیلی کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۳۲: ہم سطح زمین پر رکھا گیند وقت $t = 0$ پر سطح زمین سے مار کر روانا کیا جاتا ہے۔ گیند کا معیار حرکت p بالمقابل وقت t شکل 46.9 میں پیش ہے (جہاں $p_0 = 6.0\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور $p_1 =$

$4.0\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ ہے)۔ گیند کا ابتدائی زاویہ کیا ہے؟ (اشارہ: وہ حل تلاش کریں جس میں ترسیم کا زیریں ترین نقطہ پڑھنے کی ضرورت پیش نہ آئے۔)

سوال ۳.۳۳: بلا سے ٹکرانے سے عین قبل $0.30\,\mathrm{kg}$ کمیت کا گیند $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمتی رفتار سے افق سے نیچے $35°$ زاویے کے ساتھ گامزن ہے۔ بلے کے ساتھ تماس کے دوران گیند کے معیار حرکت میں تبدیلی کی قدر کیا ہو گی اگر گیند (ا) سیدھا انتصابی نیچے رخ $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، اور (ب) افقی واپس $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے لوٹے؟

سوال ۳.۳۴: شکل 47.9 میں $0.165\,\mathrm{kg}$ کمیت گیند کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ گیند اطرافی دیوار سے ٹپکی کھاتا دکھایا گیا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار $2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور زاویہ $\theta_1 = 30°$ ہے۔ ٹپکی گیند کے سمتی رفتار کا y جزو الٹ کرتا ہے جبکہ x جزو اثر انداز نہیں ہوتا۔ (ا) زاویہ θ_2 کیا ہو گا؟ (ب) گیند کے خطی معیار حرکت میں تبدیلی اکائی سمتی ترقیم میں کیا ہو گی؟ (گیند کے لڑھکاو کا یہاں کوئی کردار نہیں۔)

تصادم اور ضرب

سوال ۳.۳۵: ایک مسخرہ $12\,\mathrm{m}$ بلندی سے $30\,\mathrm{cm}$ گہرے پانی میں پیٹ کے بل گر کر لوگوں کا داد لیتا ہے۔ فرض کریں، عین پانی کی تہہ کو پہنچ کر یہ شخص رکتا ہے۔ اس کی کمیت فرض کر کے اس پر پانی کی ضرب کی قدر تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۶: چھتر سپاہی $370\,\mathrm{m}$ بلندی پر پرواز کرتے ہوئے طیارے سے کودتا ہے۔ بدقسمتی سے اس کی چھتری نہیں کھل پاتی۔ وہ برف میں گر کر معمولی زخمی ہوتا ہے۔ فرض کریں زمین پر پہنچ کر اس کی (اخیر) رفتار $56\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور کمیت (بمع ساز و سامان) $85\,\mathrm{kg}$ ہے، اور اس پر برف کی قوت کی قدر $1.2 \times 10^5\,\mathrm{N}$ ہے (جس پر انسان مشکل سے زندہ رہ پاتا ہے)۔ (ا) برف کی تہہ کم سے کم کتنی موٹی ہے؟ (ب) اس پر برف کی ضرب کی قدر کیا ہے؟

سوال ۳.۳۷: زمین پر $1.2\,\mathrm{kg}$ کا گیند $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے انتصابی گرتا ہے۔ ٹپکی کے بعد اس کی ابتدائی رفتار $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) تماس کے دوران گیند پر کتنی ضرب عمل کرتی ہے؟ (ب) اگر گیند $0.020\,\mathrm{s}$ کے لئے زمین کے ساتھ مس ہو، زمین پر گیند کی اوسط قوت کتنی ہو گی؟

سوال ۳.۳۸: عین اس وقت جب ایک شخص، جس کی کمیت $70\,\mathrm{kg}$ ہے، کرسی پر بیٹھتا ہے اس کا شرارتی دوست کرسی کھینچ لیتا ہے، جس کی بدولت پہلا شخص $0.50\,\mathrm{m}$ نیچے زمین پر گرتا ہے۔ اگر زمین کے ساتھ تصادم کا دورانیہ $0.082\,\mathrm{s}$ ہو، تصادم کے دوران شخص پر زمین (ا) کی ضرب اور (ب) اوسط قوت کتنی ہو گی؟

سوال ۳.۳۹: محور x پر ابتدائی طور پر مثبت رخ $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتے ہوئے $0.40\,\mathrm{kg}$ گیند پر $27\,\mathrm{ms}$ کے لئے محدد کے منفی رخ قوت عمل کرتی ہے۔ قوت کی قدر میں تبدیل پائی جاتی ہے اور ضرب کی قدر $32.4\,\mathrm{N\,s}$ ہے۔ قوت لاگو کرنے کے عین بعد گیند کی (ا) رفتار اور (ب) اس کا رخ کیا ہو گا؟ (ج) قوت کی اوسط قدر اور (د) گیند پر ضرب کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۴۰: ایک پہلوان میز پر $13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے تھپڑ مارتا ہے۔ اس کا ہاتھ $5.0\,\mathrm{ms}$ کے تصادم میں رکتا ہے۔ فرض کریں تصادم کے دوران ہاتھ اور بازو ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتے اور ہاتھ کی کمیت $0.70\,\mathrm{kg}$ ہے۔ ہاتھ پر میز کی (ا) ضرب کی قدر اور (ب) اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۱: ہدف پر $3\,\mathrm{g}$ کی 100 گولیاں فی سیکنڈ شرح سے چلائی جاتی ہیں۔ گولی کی رفتار $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ فرض کریں گولیاں اسی رفتار سے ٹھیک کر واپس لوٹتی ہیں۔ ہدف پر اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۲: دو اوسط قوت دیوار پر $0.250\,\mathrm{kg}$ کے برف گولے $4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے لگاتار عمودی مارے جاتے ہیں۔ ہر گولا دیوار سے چپکتا ہے۔ شکل 49.9 میں دیوار پر دو متواتر تصادم کی قوت کی قدر F بالمقابل وقت t پیش ہے۔ تصادم کی تکرار کا وقفہ $\Delta t_d = 10\,\mathrm{ms}$ ہے، جو ترسیم پر مساوی الساقین مثلث بناتے ہیں۔ ہر تصادم کی قوت کی زیادہ سے زیادہ قدر $F_{\text{بلند ترین}} = 200\,\mathrm{N}$ ہے۔ ہر تصادم کے دوران دیوار پر (ا) ضرب اور (ب) اوسط قوت کی قدریں کیا ہوں گی؟ (ج) کئی تصادم کے دوران دیوار پر اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟ اور دورانیہ $\Delta t_r = 50.0\,\mathrm{ms}$

سوال ۳.۴۳: بلند کن کی ٹکر سے پہلے اچھلنا بلند کن کا رسا ٹوٹتا ہے اور بدقسمتی سے اس کا حفاظتی نظام بھی ناکارہ ہوتا ہے، جس کی بدولت سے $36\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرتا ہے۔ زمین پر پہنچ کر $90\,\mathrm{kg}$ سوار $5.0\,\mathrm{ms}$ کے تصادم میں رکتا ہے۔ (فرض کریں نہ بلند کن اور نہ سے شخص ٹپکی کھاتے ہیں۔) تصادم کے دوران شخص پر (ا) ضرب اور (ب) اوسط قوت کی قدریں کیا ہوں گی؟ اگر عین تصادم سے قبل، بلند کن کے لحاظ سے شخص $7.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے اوپر چھلانگ لگائے (ج) ضرب اور (د) اوسط قوت کی قدریں کیا ہوں گی (رکنے کا دورانیہ وہی تصور کریں)؟

سوال ۳.۴۴: بچوں کا کھلونا جس کی کمیت $5.0\,\mathrm{kg}$ ہے محور x پر حرکت کر سکتا ہے۔ شکل 50.9 اس قوت کا جزو F_x دیتی ہے جو کھلونے پر، جو ساکن حالت سے لمحہ $t = 0$ پر روانا ہوتا ہے، عمل کرتی ہے۔ محور F_x کا پیمانہ $F_{xs} = 5.0\,\mathrm{N}$ تعین کرتی ہے۔ اکائی سمتی ترقیم میں (ا) لمحہ $t = 4.0\,\mathrm{s}$ اور (ب) $t = 7.0\,\mathrm{s}$ پر $\vec{p}$ کیا ہو گا، اور $t = 9.0\,\mathrm{s}$ پر $\vec{v}$ کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۵: عین تصادم سے قبل اور عین تصادم کے بعد $0.300\,\mathrm{kg}$ گیند بلے سے ٹکراتا ہوا شکل 51.9 میں دکھایا گیا ہے۔ عین تصادم سے قبل گیند کی سمتی رفتار $\vec{v}_1$ کی قدر $12.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور زاویہ $\theta_1 = 35.0°$ ہے۔ تصادم کے عین بعد گیند کی سمتی رفتار $\vec{v}_2$ کی قدر $10.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے اور یہ سیدھا اوپر رخ حرکت کرتا ہے۔ تصادم کا دورانیہ $2.00\,\mathrm{ms}$ ہے۔ گیند پر بلے کی ضرب (ا) کی قدر اور (ب) مثبت x محور کے لحاظ سے رخ کیا ہیں؟ گیند پر بلے کی اوسط قوت کی (ج) قدر اور (د) رخ کیا ہیں؟

سوال ۳.۴۶: براعظم امریکہ کے وسطی اور جنوبی علاقوں میں **افقی چھپکلی**[9] پائی جاتی ہے جو پانی کی سطح پر پچھلی دو ٹانگوں کی مدد سے دوڑ سکتی ہے۔ قدم لیتے ہوئے چھپکلی پہلے زور سے پانی کی سطح پر پاؤں سے تھپڑ مارتی ہے، اور اس کے بعد پاؤں کو پانی میں اس تیزی سے نیچے دھکیلتی ہے کہ پاؤں کے اوپر ہوا کا غبارہ بن جاتا ہے۔ اس سے قبل کہ ہوا کے غبارے میں اطراف سے پانی بھر آئے چھپکلی اسی پھرتی سے پاؤں واپس اوپر کھینچ کر پانی کی قوت گھساٹ سے بچ پاتی ہے۔ ڈوبنے سے بچنے کے لئے ضروری ہے کہ تھپڑ، نیچے دھکیل اور پاؤں واپس اٹھانے کے دوران اوپری اوسط ضرب، تجاذبی قوت کی نشیب وار ضرب کے برابر ہو۔ فرض کریں افقی چھپکلی کی کمیت $90.0\,\mathrm{g}$، ہر پاؤں کی کمیت $3.00\,\mathrm{g}$، تھپڑ کے وقت پاؤں کی رفتار

---

[9] basilisklizard

$1.50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، اور ایک قدم کا اوسط دورانیہ $0.600\,\mathrm{s}$ ہے۔ (ا) تھپڑ کے دوران چھپکلی پر ضرب کی قدر کیا ہے؟ (تصور کریں یہ ضرب سیدھی اوپر رخ ہے۔) (ب) ایک قدم کے $0.600\,\mathrm{s}$ دورانیہ میں تجاذبی قوت کی چھپکلی پر نشین وار ضرب کتنی ہے؟ (ج) کیا چھپکلی کو سہارا تھپڑ دیتا ہے، نیچے دھکیل دیتی ہے، یا دونوں کا حصہ تقریباً برابر ہے؟

سوال ۳.۴۷: دیوار کے ساتھ $58\,\mathrm{g}$ کمیت کا گیند ٹکراتا ہے۔ شکل 53.9 میں تصادم کی قوت کی قدر F بالمقابل وقت t ترسیم کی گئی ہے۔ گیند کی، دیوار کو عمودی، ابتدائی رفتار $34\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے؛ گیند ٹپکی کے بعد تقریباً اسی رفتار سے، دیوار کو عمودی، واپس لوٹتا ہے۔ تصادم کے دوران گیند پر دیوار کی قوت کی زیادہ سے زیادہ قدر $F_{\text{بلند تر}}$ کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۸: بلا رگڑ برفانی سطح پر $0.25\,\mathrm{kg}$ قرص ساکن پڑا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر $\vec{F} = (12.0 - 3.00t^2)\hat{\imath}$ افقی قوت، جہاں قوت نیوٹن میں اور وقت سیکنڈ میں ہے، قرص کو حرکت دیتی ہے۔ قوت کی قدر صفر ہونے تک یہ قرص پر عمل کرتی ہے۔ (ا) لمحہ $t = 0.500\,\mathrm{s}$ اور $t = 1.25\,\mathrm{s}$ کے بیچ قرص پر قوت کی ضرب کی قدر کیا ہو گی؟ (ب) وقت $t = 0$ سے اس لمحے تک جب $F = 0$ ہو، قرص کے معیار حرکت میں تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۹: کھلاڑی $0.45\,\mathrm{kg}$ گیند کو، جو ساکن ہے، لات مارتا ہے۔ کھلاڑی کا پاؤں گیند کے ساتھ $3.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ کے لئے مس ہے اور لات کی قوت درج ذیل ہے، جہاں $0 \le t \le 3.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ اور t سیکنڈوں میں ہے۔

$$F(t) = [(6.0 \times 10^6)t - (2.0 \times 10^9)t^2]\,\mathrm{N}$$

تماس کے دوران (ا) لات سے گیند پر ضرب کی قدر، (ب) گیند پر اوسط قوت کی قدر، (ج) گیند پر زیادہ سے زیادہ قوت کی قدر، اور (د) عین اس لمحے گیند کی سمتی رفتار کی قدر جس لمحے گیند لات سے علیحدہ ہوتا ہے تلاش کریں۔

سوال ۳.۵۰: ایک گیند جس کی کمیت $300\,\mathrm{g}$ اور رفتار $v = 6.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے، دیوار کے ساتھ زاویہ $\theta = 30^\circ$ سے ٹکرا کر اسی رفتار اور زاویہ سے ٹپکی کے بعد واپس ہوتا ہے۔ شکل 54.9 میں فضائی جائزہ دکھایا گیا ہے۔ گیند اور دیوار آپس میں $10\,\mathrm{ms}$ کے لئے مس رہتے ہیں۔ اکائی سمتی ترقیم میں (ا) گیند پر دیوار کی ضرب اور (ب) دیوار پر گیند کی ضرب کیا ہو گی، اور (ج) دیوار پر گیند کی اوسط قوت کیا ہو گی؟

خطی معیار حرکت کی بقا

سوال ۳.۵۱: بلا رگڑ سطح پر $91\,\mathrm{kg}$ کمیت کا لیٹا ہوا شخص $68\,\mathrm{g}$ پتھر کو $4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے سطح پر روانا کرتا ہے۔ یہ شخص نتیجتاً کتنی رفتار حاصل کرتا ہے؟

سوال ۳.۵۲: زمین کے لحاظ سے $43\,000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے پرواز کرتا فضائی طیارہ استعمال شدہ ہوائی بان موٹر (کمیت $4m$) کو قابو کار مقیاسہ (کمیت m) سے علیحدہ کر کے مقیاسہ کے لحاظ سے $82\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے پیچھے پھینکتا ہے۔ علیحدگی کے فوراً بعد قابو کار مقیاسہ کی رفتار زمین کے لحاظ سے کیا ہو گی؟

سوال ۳.۵۳: دو طرفہ ہوائی بان شکل 55.9 میں دکھایا گیا ہے، جس کا وسطی حصہ C (جس کی کمیت $M = 6.00\,\mathrm{kg}$ ہے) اور اطرافی حصے L اور R (جن کی انفرادی کمیت $2.00\,\mathrm{kg}$ ہے) ہیں۔ ہوائی بان بلا رگڑ فرش پر x محور کے مبدا پر ابتدائی طور ساکن پڑا ہے۔ چھوٹے دھماکوں سے اطراف کے حصے علیحدہ کر کے x محور پر وسطی حصہ سے دور روانا کیے جا سکتے ہیں۔ کچھ یوں کیا جاتا ہے: (1) وقت $t = 0$ پر حصہ L کو، باقی حصے کو منتقل سمتی رفتار کے لحاظ سے، $3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے بائیں پھینکا جاتا ہے۔ (2) اس کے بعد، وقت $t = 0.80\,\mathrm{s}$ پر حصہ R کو، $3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے، حصہ C کو منتقل سمتی رفتار کے لحاظ سے، دائیں پھینکا جاتا ہے۔ وقت $t = 2.80\,\mathrm{s}$ پر (ا) حصہ C کی سمتی رفتار کیا ہو گی اور (ب) اس کے مرکز کا مقام کیا ہو گا؟

سوال ۳.۵۴: ایک جسم جس کی کمیت m اور مشاہدہ کار کے لحاظ سے رفتار v ہے، دھماکے سے دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے، جہاں ایک ٹکڑے کی کمیت دوسرے ٹکڑے کی کمیت کی تین گنا ہے؛ دھماکہ فضائے ماورا میں واقع ہوتا ہے جہاں تجاذبی قوت نہیں پایا جاتا۔ کم کمیتی ٹکڑا مشاہدہ کار کے لحاظ سے رک جاتا ہے۔ مشاہدہ کار کی حوالہ چوکھٹ میں ناپتے ہوئے دھماکہ نظام کو کتنی حرکی توانائی منتقل کرتا ہے؟

سوال ۳.۵۵: زیادہ بلندی تک پہنچنے کی غرض سے، عین چھلانگ سے قبل، کھلاڑی دو وزن اوپر اٹھاتا اور چھلانگ کے بعد، پرواز کے دوران، نیچے زور سے پھینکتا ہے۔ فرض کریں ایک کھلاڑی کی کمیت $78\,\mathrm{kg}$ اور ایک وزن کی کمیت $5.50\,\mathrm{kg}$ ہے۔ یہ کھلاڑی بلند چھلانگ کی بجائے لمبی چھلانگ لگانا چاہتا ہے۔ اس غرض سے چھلانگ کے دوران بلند ترین نقطہ پر پہنچ کر کھلاڑی وزن افقی یوں پیچھے پھینکتا ہے کہ زمین کے لحاظ سے ان کی افقی سمتی رفتار صفر ہوتی ہے۔ لمحہ اٹھان پر کھلاڑی کی سمتی رفتار، بغیر وزن اور بمع وزن دونوں صورتوں میں، $\vec{v} = (9.5\hat{i} + 4.0\hat{j})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے اور زمین کو ہم سطح تصور ہے۔ وزن کا استعمال اس کو کتنا اضافی فاصل طے کراتا ہے؟

سوال ۳.۵۶: ساکن جسم دھماکے سے دو ٹکڑوں R اور L میں تقسیم ہوتا ہے، جو بلا رگڑ سطح پر گزرنے کے بعد رگڑ کے خطوں میں داخل ہو کر آخر کار رکتے ہیں (شکل 57.9)۔ ٹکڑا L، جس کی کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$، اور جس کا سامنا $\mu_L = 0.40$ حرکی رگڑ کے مستقل سے ہے، $d_L = 0.15\,\mathrm{m}$ فاصلے میں رکتا ہے۔ ٹکڑا R، جس کا سامنا $\mu_R = 0.50$ حرکی رگڑ کے مستقل سے ہے، $d_R = 0.25\,\mathrm{m}$ فاصلے میں رکتا ہے۔ اس ٹکڑے کی کمیت کیا ہے؟

سوال ۳.۵۷: ایک جسم جس کی کمیت $20.0\,\mathrm{kg}$ ہے فضا میں x محور کے مثبت رخ $200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت کے دوران اندرونی دھماکے کی وجہ سے تین ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ایک ٹکڑا جس کی کمیت $10.0\,\mathrm{kg}$ ہے، نقطہ دھماکہ سے مثبت y محور کے رخ $100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے روانا ہوتا ہے۔ دوسرا ٹکڑا، جس کی کمیت $4.0\,\mathrm{kg}$ ہے، منفی x محور پر $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے روانا ہوتا ہے۔ (ا) اکائی سمتی ترقیم میں تیسرے ٹکڑے کی سمتی رفتار تلاش کریں۔ (ب) دھماکے میں کتنی توانائی رہا ہوتی ہے؟ تجاذبی قوت کے اثرات نظر انداز کریں۔

سوال ۳.۵۸: ایک جسم، جس کی کمیت $4.0\,\mathrm{kg}$ ہے، بلا رگڑ سطح پر حرکت کرتے ہوئے دھماکے سے دو $2.0\,\mathrm{kg}$ ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ایک ٹکڑا $3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ شمال کو اور دوسرا $5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ مشرق سے $30°$ شمال کی طرف روانا ہوتا ہے۔ جسم کی ابتدائی رفتار کیا ہے؟

سوال ۳.۵۹: ایک جسم جو xy محددی نظام کے مبدا پر ساکن پڑا ہے دھماکے سے تین ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ عین دھماکے کے بعد ایک ٹکڑا، جس کی کمیت m ہے، $(-30\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{i}$ سمتی رفتار سے اور دوسرا ٹکڑا، جس کی کمیت بھی m ہے، $(-30\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{j}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں۔ تیسرے ٹکڑے کی کمیت $3m$ ہے۔ عین دھماکے کے بعد تیسرے ٹکڑے کی سمتی رفتار کی (ا) قدر کیا ہو گی اور (ب) رخ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۶۰: ذرہ A اور ذرہ B جن کے بیچ دبا ہوا اسپرنگ ہے کو زبردستی اکٹھے پکڑ کر رکھا گیا ہے۔ رہا کرنے پر اسپرنگ انہیں مخالف رخوں دھکیل کر ان سے علیحدہ ہوتا ہے۔ ذرہ A کی کمیت ذرہ B کی کمیت کی 2.00 گنا ہے، اور دبے اسپرنگ میں ذخیرہ مخفی توانائی 60 J ہے۔ فرض کریں اسپرنگ کی کمیت قابل نظر انداز ہے اور اس کی توانائی مکمل طور پر ذروں کو منتقل ہوتی ہے۔ توانائی کا انتقال مکمل ہونے پر (ا) ذرہ A اور (ب) ذرہ B کی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

معیار حرکت اور تصادم میں حرکی توانائی

سوال ۳.۶۱: منجنیقی رقاص جس کی کمیت 2.0 kg ہے، پر 10 g گولی چلائی جاتی ہے۔ رقاص کا مرکز کمیت 12 cm بلندی تک پہنچتا ہے۔ فرض کریں گولی رقاص میں دھنس جاتی ہے۔ گولی کی ابتدائی رفتار کیا ہے؟

سوال ۳.۶۲: بلا رگڑ فرش پر لکڑی کا تختہ جس کی کمیت 700 g ہے ساکن پڑا ہے۔ اس پر 5.20 g گولی چلائی جاتی ہے جو $672\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتے ہوئے تختہ کو مار کر اس سے پار $428\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے خارج ہوتی ہے۔ (ا) تختے کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) تختہ و گولی نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۶۳: بلا رگڑ فرش پر پڑے دو ساکن جسم پر 3.50 g گولی افقی ماری جاتی ہے (شکل 58.9-الف)۔ گولی جسم 1، جس کی کمیت 1.20 kg ہے، سے گزر کر دوسرے جسم، جس کی کمیت 1.80 kg ہے، میں دھنس جاتی ہے جس کی بدولت جسم 1 کی رفتار $v_1 = 0.630\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور جسم 2 کی رفتار $v_2 = 1.40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حاصل کرتے ہیں (شکل 58.9-ب)۔ جسم 1 سے نکالا گیا مواد نظر انداز کرتے ہوئے، گولہ کی رفتار اس لمحے تلاش کریں جب یہ جسم 1 سے (ا) نکلتی اور (ب) داخل ہوتی ہے۔

سوال ۳.۶۴: ایک گولی جس کی کمیت 10 g ہے سیدھا اوپر $1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت کرتے ہوئے ابتدائی طور ساکن 5.0 kg سل کے مرکز کمیت سے گزرتی ہے۔ گولی سل سے گزر کر $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے خارج ہو کر اوپر وار حرکت کرتی ہے۔ سل ابتدائی مقام سے کتنی بلندی تک اٹھتا ہے؟

سوال ۳.۶۵: ایلاسکا میں گاڑی اور بارہ سنگا کے تصادم عام بات ہے۔ فرض کریں 1000 kg گاڑی 500 kg ساکن بارہ سنگا سے ٹکراتی ہے۔ (ا) حرکی توانائی کا کتنا فی صد حصہ توانائی کے دیگر صورتوں میں تبدیل ہو گا؟ اس قسم کا مسئلہ عرب ممالک میں پایا جاتا ہے جہاں گاڑی اور اونٹ کا ٹکر عام ہے۔ (ب) اگر یہی گاڑی ساکن اونٹ سے ٹکرائے جس کی کمیت 300 kg ہے تب کتنی فی صد حرکی توانائی ضائع ہو گی؟ (ج) کیا جانور کی کمیت بڑھنے سے فی صد توانائی کا ضیاع بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟

سوال ۳.۶۶: انتصابی محور پر مخالف رخ حرکت کرتے لبدی کے دو گولوں کے بیچ مکمل غیر لچکی تصادم ہوتا ہے۔ عین تصادم سے قبل ایک گولا، جس کی کمیت 3.0 kg ہے، $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اوپر وار اور دوسرا گولا، جس کی

کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$ ہے، $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے نشیب وار حرکت کرتا ہے۔ نقطہ تصادم سے دونوں گولوں کا مجموعہ کتنی بلندی تک پہنچتا ہے؟ (ہوائی رگڑ نظر انداز کریں۔)

سوال ۳.۶۷: ایک سل جس کی کمیت $5.0\,\mathrm{kg}$ اور رفتار $3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ دوسری سل جس کی کمیت $10\,\mathrm{kg}$ اور اسی رخ رفتار $2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے سے ٹکراتا ہے۔ تصادم کے بعد $10\,\mathrm{kg}$ سل اسی رخ $2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتی ہے۔ (ا) تصادم کے بعد دوسری سل کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) تصادم کی وجہ سے دو سل نظام کی کل حرکی توانائی میں کتنی تبدیلی رونما ہوتی ہے؟ (ج) اس کے برعکس، اگر $10\,\mathrm{kg}$ سل کی اسی رخ رفتار $4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو، تب کل حرکی توانائی میں تبدیلی کتنی ہو گی؟ (د) جزو ج میں حاصل جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۶۸: سرخ اشارے پر کھڑی گاڑی A (کمیت $1100\,\mathrm{kg}$) کو پیچھے سے گاڑی B (کمیت $1400\,\mathrm{kg}$) ٹکر مارتی ہے (شکل 60.9)۔ دونوں گاڑی نم سڑک پر (جس کی $\mu_k = 0.13$ کافی کم ہے) پھسل کر آخر کار $d_A = 8.2\,\mathrm{m}$ اور $d_B = 6.1\,\mathrm{m}$ فاصلے طے کرنے کے بعد رکتی ہیں۔ عین تصادم کے بعد (ا) گاڑی A اور (ب) گاڑی B کی رفتار کیا ہے؟ (ج) فرض کریں تصادم کے دوران خطی معیار حرکت کی بقا ہوتی ہے۔ عین تصادم سے قبل گاڑی B کی رفتار کیا ہو گی؟ (د) بتائیں یہ مفروضہ کیوں غلط ہو سکتا ہے۔

سوال ۳.۶۹: بلا رگڑ فرش پر ساکن اسپرنگ بندوق، جس کی کمیت $240\,\mathrm{g} = M$ ہے، کی نالی میں $m = 60\,\mathrm{g}$ گیند $v_i = 22\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکی جاتی ہے (شکل 61.9)۔ گیند نالی میں اس مقام پر اڑ جاتا ہے جہاں اسپرنگ زیادہ سے زیادہ دبا ہے۔ گیند اور نالی کے بیچ رگڑ کی بنا حرارتی توانائی میں اضافہ قابل نظر انداز ہے۔ (ا) اس لمحے بندوق کی رفتار کیا ہو گی جب گیند نالی میں رکتا ہے؟ (ب) گیند کی ابتدائی حرکی توانائی کا کتنا حصہ اسپرنگ میں ذخیرہ ہو گا؟

سوال ۳.۷۰: سل 2 جس کی کمیت $1.0\,\mathrm{kg}$ ہے بلا رگڑ فرش پر ساکن ڈھیلے اسپرنگ (جس کا مقیاس لچک $200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے) کے ایک سر کے ساتھ مس ہے۔ اسپرنگ کا دوسرا سر دیوار کے ساتھ پکا جڑا ہے۔ سل 1، جس کی کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$ ہے، $v_2 = 4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے سل 2 سے ٹکرا کر اس کے ساتھ جڑ جاتا ہے۔ جب سل لمحاتی رکتے ہیں، اس لمحے اسپرنگ کتنا دبا ہو گا؟

سوال ۳.۷۱: سل 1 (کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$) دائیں رخ $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور سل 2 (کمیت $5.0\,\mathrm{kg}$) دائیں رخ $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حرکت میں ہیں (شکل 63.9)۔ فرش بلا رگڑ ہے اور سل 2 کے ساتھ اسپرنگ پکا جڑا ہے جس کی اسپرنگ مستقل $1120\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ تصادم کے دوران اسپرنگ کا داب اس وقت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب دونوں سل کی سمتی رفتار ایک ہو۔ زیادہ سے زیادہ داب تلاش کریں۔

ایک بعد میں لچکی تصادم

سوال ۳.۷۲: بلا رگڑ فرش پر سل A (کمیت $1.6\,\mathrm{kg}$) حرکت کرتا ہوا سل B (کمیت $2.4\,\mathrm{kg}$) سے ٹکراتا ہے (شکل 64.9)۔ تصادم سے قبل تین سمتی رفتار (i) اور تصادم کے بعد تین سمتی رفتار (f) بھی پیش ہیں؛ مطابقتی رفتار $v_{Ai} = 5.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $v_{Bi} = 2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، اور $v_{Bf} = 4.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہیں۔ سمتی رفتار $\vec{v}_{Af}$ کی (ا) رفتار اور (ب) رخ (دائیں یا بائیں) کیا ہیں؟ (ج) کیا تصادم لچکی ہے؟

سوال ۳.۷۳: بلا رگڑ خطی ہوائی ڈگر پر $340\,\mathrm{g}$ ریڑھی $1.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ابتدائی رفتار سے چل کر نامعلوم کمیت کی ساکن ریڑھی سے ٹکراتی ہے۔ تصادم کے بعد پہلی ریڑھی رخ برقرار رکھ کر $0.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتی ہے۔ (ا) دوسری ریڑھی کی کیمت کیا ہے؟ (ب) تصادم کے بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) دو ریڑھی نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۷۴: طیطانیم[۱۰] کے دو کرہ ایک رفتار سے چل کر آمنے سامنے سے لچکی تصادم کا شکار ہوتے ہیں۔ تصادم کے بعد ایک کرہ، جس کی کمیت $300\,\mathrm{g}$ ہے، رک جاتا ہے۔ (ا) دوسرے کرہ کی کمیت کیا ہے؟ (ب) اگر دونوں کرہ کی ابتدائی رفتار $2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو، دو کرہ نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۷۵: بلا رگڑ فرش پر m_1 کمیت کی سل چل کر ساکن سل، جس کی کمیت $m_2 = 3m_1$ ہے، سے یک بُعدی لچکی تصادم میں مبتلا ہوتی ہے۔ تصادم سے قبل دو جسمی نظام کے مرکز کمیت کی رفتار $3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ تصادم کے بعد (ا) مرکز کمیت اور (ب) سل 2 کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۷۶: کمیت $0.500\,\mathrm{kg}$ کا فولادی گیند $70.0\,\mathrm{cm}$ ڈور سے لٹک رہا ہے (شکل 65.9)۔ گیند کو ایک جانب اٹھایا جاتا ہے اور جب ڈور افقی ہو اسے رہا کیا جاتا ہے۔ نچلے ترین نقطہ پر پہنچ کر یہ $2.5\,\mathrm{kg}$ کی فولادی سل سے ٹکراتا ہے جو بلا رگڑ فرش پر ساکن پڑا ہے۔ تصادم لچکی ہے۔ عین تصادم کے بعد (ا) گیند کی رفتار اور (ب) سل کی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۳.۷۷: ایک جسم، جس کی کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$ ہے، دوسرے ساکن جسم سے لچکی ٹکر کے بعد، رخ برقرار رکھ کر، ایک چوتھائی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ (ا) دوسرے جسم کی کمیت تلاش کریں۔ (ب) اگر $2.0\,\mathrm{kg}$ کی ابتدائی رفتار $4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو، دو جسمی نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۷۸: بلا رگڑ فرش پر m_1 کمیت کا سل 1 محور x پر $4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتے ہوئے سل 2، جو ساکن ہے اور جس کی کمیت $m_2 = 0.40m_1$ ہے، سے یک بُعدی لچکی تصادم کرتی ہے۔ اس کے بعد اجسام پھسلتے ہوئے ایسے خطہ میں داخل ہو کر آخر کار رکتے ہیں جہاں حرکی رگڑ کا عددی سر 0.50 ہے۔ اس خطہ میں (ا) سل 1 اور (ب) سل 2 کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

سوال ۳.۷۹: بلا رگڑ فرش پر ذرہ 1 جس کی کمیت $m_1 = 0.30\,\mathrm{kg}$ ہے دائیں رخ محور x پر $2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھسل کر چلتا ہے (شکل 66.9)۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کا ایک بُعدی لچکی تصادم ذرہ 2 کے ساتھ ہوتا ہے، جو ساکن ہے اور جس کی کمیت $m_2 = 0.40\,\mathrm{kg}$ ہے۔ تصادم کے بعد ذرہ 2 دیوار سے، جو $x_w = 70\,\mathrm{cm}$ پر واقع ہے، ٹپکی کھا کر، رفتار میں تبدیلی کے بغیر، واپس لوٹتا ہے۔ محور x پر ذروں کا آپس میں دوسرا تصادم کس نقطہ پر ہو گا؟

سوال ۳.۸۰: سل 1، جس کی کمیت m_1 ہے، ساکن حالت سے میلان پر $h = 2.50\,\mathrm{m}$ بلندی سے روانا ہو کر ساکن سل 2 کے ساتھ ٹکراتی ہے، جس کی کمیت $m_2 = 2.00m_1$ ہے (شکل 67.9)۔ تصادم کے بعد سل 2 ایسے خطہ میں داخل ہو کر، جہاں حرکی رگڑ کا عددی سر $\mu_k = 0.500$ ہے، فاصلہ d طے کرنے کے بعد رکتی ہے۔ (ا) لچکی اور (ب) مکمل غیر لچکی تصادم کی صورت میں d کی قیمت تلاش کریں۔

---

[۱۰] titanium

سوال ۳.۸۱: چھوٹے گیند کو بڑے گیند کے ٹھیک اوپر معمولی بلندی پر رکھ کر دونوں کو بیک وقت $h = 1.8\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرنے دیا جاتا ہے (گیندوں کے رداس h کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہیں)۔ ان کی کمیت بالترتیب m اور $M = 0.63\,\mathrm{kg}$ ہے (شکل 68.9-الف)۔ (ا) اگر بڑا گیند زمین سے لچکی ٹپکی کھائے اور اس کے بعد چھوٹا گیند بڑے گیند سے لچکی ٹپکی کھائے، تو چھوٹے گیند کی کمیت m کتنی ہونی چاہیے کہ بڑا گیند چھوٹے گیند سے ٹکرا کر رک جائے؟ (ب) ایسی صورت میں چھوٹا گیند کتنی بلندی تک جائے گا (شکل 68.9-ب)؟

سوال ۳.۸۲: قرص 1، جس کی کمیت $m_1 = 0.20\,\mathrm{kg}$ ہے، بلا رگڑ میز پر پھسلتا ہوا ساکن قرص 2 سے یک بُعدی لچکی تصادم کا شکار ہوتا ہے (شکل 69.9)۔ قرص 2 میز سے زمین پر کنارہ سے d فاصلہ دور گرتا ہے۔ قرص 1 تصادم کے بعد واپس ہو کر میز کے مخالف کنارے سے $2d$ فاصلہ دور زمین پر گرتا ہے۔ قرص 2 کی کمیت کیا ہے؟ (اشارہ: علامتوں پر نظر رکھیں۔)

دو ابعاد میں تصادم

سوال ۳.۸۳: ذرہ 1 **ذرہ الفا**[11] اور ذرہ 2 **مرکزہ آکسیجن**[12] ہے (شکل 21.9)۔ ذرہ الفا زاویہ $\theta_1 = 64.0°$ پر بکھرتا ہے اور مرکزہ آکسیجن $1.20 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے زاویہ $\theta_2 = 51.0°$ پر پلٹتا ہے۔ جوہری کمیت اکائیوں میں ذرہ الفا کی کمیت $4.0\,\mathrm{u}$ اور مرکزہ آکسیجن کی کمیت $16.0\,\mathrm{u}$ ہے۔ ذرہ الفا کی (ا) اختتامی اور (ب) ابتدائی رفتار کیا ہیں؟

سوال ۳.۸۴: محور x پر مثبت رخ v رفتار سے گیند B چل کر مبدا پر ساکن گیند A سے ٹکراتا ہے۔ A اور B کی کمیتیں مختلف ہیں۔ تصادم کے بعد B منفی y محور کے رخ $\frac{v}{2}$ رفتار سے روانا ہوتا ہے۔ (ا) A کس رخ حرکت کرے گا؟ (ب) دکھائیں کہ دی گئی معلومات سے A کی رفتار معلوم نہیں کی جا سکتی۔

سوال ۳.۸۵: برابر کمیت کے دو جسم جو ایک ابتدائی رفتار سے حرکت کرتے ہیں غیر لچکی تصادم کے بعد ایک ساتھ نصف ابتدائی رفتار سے حرکت کرتے ہیں۔ ان کی ابتدائی سمتی رفتار کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۳.۸۶: دو $2.0\,\mathrm{kg}$ اجسام A اور B ٹکراتے ہیں۔ تصادم سے قبل ان کی سمتی رفتار بالترتیب $\vec{v}_A = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\vec{v}_B = (-10\hat{\imath} + 5.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہیں۔ تصادم کے بعد $\vec{v}_A = (-5.0\hat{\imath} + 20\hat{\jmath})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) B کی اختتامی سمتی رفتار اور (ب) کل حرکی توانائی میں تبدیلی (بمع علامت) تلاش کیا ہیں؟

سوال ۳.۸۷: پروٹان A جس کی رفتار $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے ساکن پروٹان B سے لچکی ٹکراتا ہے۔ تصادم کے بعد ان کی سمتی رفتار آپس میں عمودی ہیں اور A ابتدائی رخ کے ساتھ $60°$ زاویہ بناتا ہے۔ تصادم کے بعد (ا) پروٹان A اور (ب) پروٹان B کی رفتار کیا ہیں؟

---

[11] alphaparticle
[12] oxygennucleus

تغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان

سوال ۳.۸۸: مشتری کی طرف منہ کیے تحقیقی خلائی طیارہ، جس کی کمیت $6090\,\mathrm{kg}$ ہے، سورج کے لحاظ سے $105\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار پر چلتے ہوئے دم سے $80.0\,\mathrm{kg}$ خرج طیارے کے لحاظ سے $253\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے خارج کرتا ہے۔ طیارے کی اختتامی رفتار کیا ہے؟

سوال ۳.۸۹: دو لمبے بجرے ساکن پانی میں ایک رخ رواں ہیں۔ ایک کی رفتار $10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اور دوسرے کی $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے (شکل 70.9)۔ جتنی دیر تیز بجرا آہستہ بجرے سے آگے نکلتا ہے، اتنی دیر آہستہ بجرے سے کوئلہ $1000\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ شرح سے دوسرے بجرا میں پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں بجرا اور پانی کے بیچ رگڑی قوت بجرا کی کمیت پر منحصر نہیں اور کوئلہ سمتی رفتار کو عمودی پھینکا جاتا ہے۔ رفتار برقرار رکھنے کے لئے (ا) تیز بجرا اور (ب) آہستہ بجرا کے انجن کو کتنی اضافی قوت پیدا کرنی ہو گی؟

سوال ۳.۹۰: فضائے ماورا میں جمودی حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے ساکن ہوائی بان پر غور کریں۔ ہوائی بان کا انجن کسی مخصوص دورانیہ کے لئے چلایا جاتا ہے۔ جمودی حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے ہوائی بان کی رفتار (ا) خرج رفتار (ہوائی بان کے لحاظ سے خرج مواد کی رفتار) کے برابر اور (ب) خرج رفتار کی دگنی ہونے کے لئے ہوائی بان کی کمیتی تناسب (ابتدائی کمیت کا تناسب اختتامی کمیت کے لحاظ سے) کتنی ہونا ضروری ہے؟

سوال ۳.۹۱: جمودی حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے فضائے ماورا میں موجود ساکن ہوائی بان کی کمیت $2.55 \times 10^5\,\mathrm{kg}$ ہے جس میں سے $1.81 \times 10^5\,\mathrm{kg}$ ایندھن ہے۔ ہوائی بان کا انجن $250\,\mathrm{s}$ دورانیے کے لئے چالو کیا جاتا ہے؛ اس دوران ایندھن $480\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ شرح سے استعمال ہوتا ہے۔ ہوائی بان کے لحاظ سے خرج مواد کی رفتار $3.27\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) ہوائی بات کی قوت دھکیل کتنی ہے؟ اس دورانیہ کے بعد ہوائی بان کی (ب) کمیت اور (ج) رفتار کیا ہیں؟

اضافی سوالات

سوال ۳.۹۲: ایک جسم پر نظر جمائے ریڈار کے مطابق جسم کا تعین گر سمتیہ $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{i} + 2700\hat{j} + 300\hat{k}$ ہے، جہاں r کی پیمائش میٹر میں اور t کی سیکنڈ میں ہے۔ ریڈار کا x محور مشرق کے رخ اور y محور شمال کے رخ ہے۔ اگر جسم $250\,\mathrm{kg}$ کمیت کا موسمیاتی میزائل ہو، (ا) اس کا خطی معیار حرکت اور (ب) اس کے حرکت کا رخ کیا ہو گا، اور (ج) اس پر صافی قوت کتنی ہے؟

سوال ۳.۹۳: ہوائی بان کا آخری حصہ، جو $7600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت میں ہے، دو حصوں پر مشتمل ہے، جنہیں آپس میں جکڑا گیا ہے۔ ایک حصہ ہوائی بان کا خول ہے جس کی کمیت $290.0\,\mathrm{kg}$ ہے، اور دوسرا وہ ساز و سامان کی ڈبی جس کی کمیت $150.0\,\mathrm{kg}$ ہے۔ انہیں علیحدہ کرنے پر، ان کے بیچ دبا اسپرنگ، انہیں ایک دوسرے کے لحاظ سے $910.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اضافی رفتار سے علیحدہ کرتا ہے۔ علیحدگی کے بعد (ا) ہوائی بان خول اور (ب) ساز و سامان ڈبی کی رفتار کیا ہوں گی؟ تمام سمتی رفتار ایک محور پر فرض کریں۔ (ج) علیحدگی سے قبل اور (د) علیحدگی کے بعد کل حرکی توانائی تلاش کریں۔ (ہ) ان میں فرق کی وجہ پیش کریں۔

سوال۳.۹۴: بلند عمارت کا پرتے دار انہدام[۱۳]

بلند عمارت کا تراش شکل 71a.9 مسیں پیش ہے۔ ہر منزل، مثلاً K، اسس سے اوپر تمام منازل کا وزن W اٹھاتی ہے۔ عام طور عمارت کی تعمیر **حفاظتی ضربیہ**[۱۴] s کے تحت کی جاتی ہے (جہاں $s > 1$ ہوگا) تاکہ یہ مسزید زیادہ وزن sW برداشت کر سکے۔ لیکن ایسی صورت مسیں جہاں K اور L کے پیچ ستون اچانک منہدم ہو کر بالائی منازل کو K پر آزادانہ گرنے دے (شکل 71b.9)، تصادم کے دوران قوت sW سے تجاوز کر سکتی ہے۔ یوں مختصر توقف کے بعد K منزل J پر گرے گا، جو I پر گرے، حتیٰ کہ تمام منازل زمین بوس ہوں۔ دو منزل کے پیچ فاصلہ 4.0 m اور تمام منازل کی کمیت ایک برابر فسرض کریں۔ مسزید فسرض کریں کہ K سے اوپر منازل کا K کے ساتھ تصادم 1.5 ms دورانیے کا ہے۔ ان سہل گیسر صورت مسیں پرت دار انہدام سے بچنے کے لئے s کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

سوال۳.۹۵: "اضافی" ایک اہم لفظ ہے۔ شکل 72.9 مسیں سل L، جس کی کمیت $m_L = 1.00\,\mathrm{kg}$، اور سل B، جس کی کمیت $m_B = 0.500\,\mathrm{kg}$ ہے، اور جن کے پیچ دبا اسپرنگ ہے، جکڑ کر رکھے گئے ہیں۔ رہا کرنے پر، دبا اسپرنگ سلوں کو بلا رگڑ مسیں پر مخالف رخ دھکیلتا ہے اور خود ان سے علیحدہ ہو کر فرش پر گرتا ہے۔ اسپرنگ کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔ (ا) اگر زمین کے لحاظ سے سل L کو اسپرنگ $1.20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اضافی رفتار دے، سل R اگلے 0.800 s مسیں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ (ب) اسس کے برعکس، اگر سل R کی سمتی رفتار کے لحاظ سے سل L کو اسپرنگ $1.20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اضافی رفتار دے، سل R اگلے 0.800 s مسیں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

سوال۳.۹۶: بلا رگڑ فرش پر دو ذرے پھسلتے ہوئے مستقل سمتی رفتار سے حسرکت کرتے ہیں؛ شکل 73.9 مسیں ان کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ ان کی کمیت ایک برابر اور ابتدائی رفتار $v = 4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے اور ان کا تصادم اسس نقطے پر ہوتا ہے جہاں ان کی راہیں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔ محور x یوں منتخب کیا گیا ہے آمدی راہوں کے پیچ زاویے کو برابر حصوں مسیں کاٹ کر $\theta = 40°$ دے۔ تصادم کے دائیں جانب حصے کو محور x اور ہندسوں سے موسوم چار نقطہ دار لکیریں، حسرف سے موسوم چار حصوں مسیں تقسیم کرتی ہیں۔ اگر تصادم (ا) مکمل لچکی، (ب) لچکی، اور (ج) غیسر لچکی ہو، ذرے کس حصے مسیں یا کس لکیسر پر حسرکت کرتی ہیں؟

سوال۳.۹۷: رفتار کا انسدادا فسزائش

سل 1، جس کی کمیت m_1 ہے، بلا رگڑ فرش پر محور x کے ہمسراہ $v_{1i} = 4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حسرکت مسیں ہے۔ اسس کا ایک بُعدی لچکی تصادم ساکن سل 2 سے ہوتا ہے، جس کی کمیت $m_2 = 2.00m_1$ ہے (شکل 74.9)۔ اسس کے بعد سل 2 کا ایک بُعدی لچکی تصادم سل 3 سے ہوتا ہے، جس کی کمیت $m_3 = 2.00m_2$ ہے۔ (ا) اسس وقت سل 3 کی رفتار کیا ہوگی؟ کیا سل 3 کی (ب) رفتار، (ج) حسرکی توانائی، اور (د) معیار حسرکت کی قیمت سل 1 کی ابتدائی قیمت سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اتنی ہی ہے؟

سوال۳.۹۸: رفتار کی افسزائش

سل 1، جس کی کمیت m_1 ہے، بلا رگڑ فرش پر محور x کے ہمسراہ $v_{1i} = 4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حسرکت مسیں ہے۔ اسس کا ایک بُعدی لچکی تصادم ساکن سل 2 سے ہوتا ہے، جس کی کمیت

[۱۳] pancakecollapse
[۱۴] safetyfactor

$0.500m_1 = m_2$ ہے (شکل 75.9)۔ اس کے بعد سل 2 کا ایک بُعدی لچکی تصادم سل 3 سے ہوتا ہے، جس کی کمیت $m_3 = 0.500m_2$ ہے۔ (ا) اس وقت سل 3 کی رفتار کیا ہو گی؟ کیا سل 3 کی (ب) رفتار، (ج) حرکی توانائی، اور (د) معیار حرکت کی قیمت سل 1 کی ابتدائی قیمت سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اتنی ہی ہے؟

سوال ۳.۹۹: ایک گیند جس کی کمیت $150\,\mathrm{g}$ ہے $5.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتے ہوئے دیوار سے ٹپکی کھا کر صرف $50\,\%$ حرکی توانائی کے ساتھ واپس ہوتا ہے۔ (ا) عین ٹپکی کے بعد گیند کی رفتار کیا ہے؟ (ب) دیوار پر گیند کی ضرب کی قدر کیا ہے؟ (ج) گیند اور دیوار $7.6\,\mathrm{ms}$ کے لئے تماس میں ہیں۔ اس دورانیے میں گیند پر دیوار کی اوسط قوت کی قدر کیا ہے؟

سوال ۳.۱۰۰: خلائی طیارے کے دو حصوں کو جکڑ کر ساتھ رکھنے والے دھماکہ خیز قابلوں کے دھماکہ سے علیحدہ کیا جاتا ہے۔ ان حصوں کی کمیت $1200\,\mathrm{kg}$ اور $1800\,\mathrm{kg}$ ہے؛ ہر ایک حصے پر قابلوں کے دھماکے کی ضرب کی قدر $300\,\mathrm{N\,s}$ ہے۔ حصے کس اضافی رفتار سے علیحدہ ہوتے ہیں؟

سوال ۳.۱۰۱: ایک گاڑی، جس کی کمیت $1400\,\mathrm{kg}$ ہے، $5.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے ابتدائی طور محور y کے ہمراہ شمال کی طرف حرکت میں ہے۔ دائیں ہاتھ $90°$ موڑ $4.6\,\mathrm{s}$ میں پورا کرتے ہی غیر محتاط ڈرائیور گاڑی سیدھا پیڑ پر چڑھاتا ہے، جو گاڑی کو $350\,\mathrm{ms}$ میں روک پاتا ہے۔ اکائی سمتی ترقیم میں گاڑی پر (ا) موڑ کاٹنے کی وجہ سے، اور (ب) تصادم کی وجہ سے ضرب کیا ہو گی؟ (ج) موڑ کے دوران اور (د) تصادم کے دوران گاڑی پر اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟ (ہ) موڑ کے دوران گاڑی پر اوسط قوت کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۰۲: تابکار **والدینی مرکزہ**[۱۵] مختلف **دختر مرکزہ**[۱۶] میں بدل کر ایک الیکٹران اور ایک **نیوٹرینو**[۱۷] خارج کرتا ہے۔ والدینی مرکزہ xy محددی نظام کے مبدا پر ساکن تھا۔ الیکٹران $(-1.2 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})\,\hat{i}$ اور نیوٹرینو $(-6.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})\,\hat{j}$ خطی معیار حرکت لے کر نکلتا ہے۔ دختر مرکزہ کے خطی معیار حرکت کی (ا) قدر اور (ب) رخ کیا ہیں؟ (ج) اگر دختر مرکزہ کی کمیت $5.8 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ ہو، اس کی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۰۳: ایک شخص، جس کی کمیت $75\,\mathrm{kg}$ ہے، $39\,\mathrm{kg}$ کمیت کی ریڑھی پر سوار ہے جو $2.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمتی رفتار سے حرکت میں ہے۔ وہ زمین کے لحاظ سے صفر افقی رفتار کے ساتھ ریڑھی سے کودتا ہے۔ ریڑھی کی سمتی رفتار میں تبدیلی بمع علامت کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۰۴: بلا رگڑ فرش پر ساکن دو سل جن کی کمیتیں $1.0\,\mathrm{kg}$ اور $3.0\,\mathrm{kg}$ ہیں اسپرنگ کے ذریعے آپس میں جڑی ہیں۔ انہیں ایک دوسرے کے رخ سمتی رفتاریں دی جاتی ہیں کہ ان کا مرکز کمیت ساکن رہتا ہے اور سل 1 کی رفتار $1.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوتی ہے۔ سل 2 کی سمتی رفتار کیا ہے؟

سوال ۳.۱۰۵: مال بردار ریل کا ڈبہ، جس کی کمیت $3.18 \times 10^4\,\mathrm{kg}$ ہے، ڈرائیور کے ساکن ڈبے سے ٹکراتا ہے۔ دونوں آپس میں جڑ جاتے ہیں اور ابتدائی حرکی توانائی کا $27.0\,\%$ حرری توانائی، صوتی توانائی، ارتعاش، وغیرہ کو منتقل ہوتا ہے۔ ڈرائیور کے ڈبے کی کمیت تلاش کریں۔

---

[۱۵] parentnucleus
[۱۶] daughternucleus
[۱۷] neutrino

سوال ۳.۱۰۶: ایک گاڑی، جس کی کمیت $2400\,\mathrm{kg}$ ہے، سیدھی سڑک پر $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے دوڑ رہی ہے۔ اس کے پیچھے $1600\,\mathrm{kg}$ کمیت کی گاڑی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے دوڑ رہی ہے۔ ان کا مسرکز کمیت کس رفتار سے حسرکت کرتا ہے؟

سوال ۳.۱۰۷: گیند 1، جو $2.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حسرکت کر رہا ہے، بالکل اسی طسرح کے دوسرے گیند 2 سے، جو ساکن ہے، معمولی ٹکراتا ہے (شکل 21.9)۔ تصادم کے بعد گیند 2 زاویہ $\theta_2 = 60^\circ$ پر $1.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حسرکت کرتا ہے۔ تصادم کے بعد گیند 1 کی سمتی رفتار کی (ا) قدر اور (ب) رخ کیا ہیں؟ (ج) دیے گئے مواد کے تحت کیا تصادم لچکی یا غیر لچکی ہے؟

سوال ۳.۱۰۸: نظام شمسی سے ایک ہوائی بان $6.0 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے دور روانا ہے۔ ہوائی بان کا انجن چالو کرنے سے، ہوائی بان کے لحاظ سے، $3.0 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے خسرج خارج ہوتا ہے۔ اس لمحے ہوائی بان کی کمیت $4.0 \times 10^4\,\mathrm{kg}$ اور اسراع $2.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ (ا) انجن کی قوت دھکیل کتنی ہے؟ (ب) اس دوران خسرج کس شرح ($\mathrm{kg\,s^{-1}}$) سے خارج ہوگا؟

سوال ۳.۱۰۹: تین یکساں گیند کا فضائی جائزہ شکل 76.9 مسیں پیش ہے۔ گیند 2 اور 3 آپس مسیں مس ہیں اور گیند 1 کی راہ کو عمودی صف بستہ ہیں۔ گیند 1 کی سمتی رفتار کی قدر $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور رخ باقی دو گیند کے نقطہ مماس کو ہے۔ تصادم کے بعد گیند 2 کی سمتی رفتار کی (ا) قدر اور (ب) رخ، گیند 3 کی سمتی رفتار کی (ج) قدر اور (د) رخ، اور گیند 1 کی سمتی رفتار کی (ہ) قدر اور (و) رخ کیا ہیں؟ (اشارہ: رگڑ کی غیر موجودگی مسیں، ہر ضرب، متصادم گیندوں کے مراکز کو ملانے والی لکیر کے ہمراہ، مس سطح کو عمودی ہوگی۔)

سوال ۳.۱۱۰: ایک گیند، جس کی کمیت $0.15\,\mathrm{kg}$ ہے، $(5.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath} + (6.50\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath} + (4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{k}$ سمتی رفتار سے چلتے ہوئے دیوار سے ٹکراتا ہے۔ دیوار سے ٹپکی کے بعد گیند کی سمتی رفتار $(2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath} + (3.50\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath} + (-3.20\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{k}$ ہے۔ (ا) گیند کے معیار حسرکت مسیں تبدیلی، (ب) گیند پر ضرب، اور (ج) دیوار پر ضرب کیا ہیں؟

سوال ۳.۱۱۱: دو یکساں برتن جن مسیں ایک جتنی چینی بھسری ہے ایک ڈور کے ذریعہ جسڑے ہیں، جو بلا رگڑ حپرخی کے اوپر سے گزرتی ہے (شکل 77.9)۔ ڈور اور حپرخی کی کمیت قابل نظسر انداز ہے، جبکہ ایک برتن اور اس مسیں بھسری چینی کی کمیت $500\,\mathrm{g}$ ہے۔ برتن کے وسط ایک دوسرے سے $50\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر اور برتن ایک جتنی بلندی پر حبکڑ کر رکھے گئے ہیں۔ برتن 1 کے وسط اور دو برتنی نظام کے مسرکز کمیت مسیں (ا) ابتدائی افقی فاصلہ اور (ب) برتن 1 سے $20\,\mathrm{g}$ چینی برتن 2 مسیں منتقل کرنے کے بعد، کتنا ہوگا؟ چینی منتقل کرنے کے بعد برتن رہا کیے جاتے ہیں۔ رہائی کے بعد مسرکز کمیت (ج) کس رخ اور (د) اسراع کی کتنی قدر سے حسرکت کرتا ہے؟

سوال ۳.۱۱۲: ایک گیند ہموار فسرش پر چلتے ہوئے یکساں گیند سے ٹکراتا ہے۔ تصادم کے بعد پہلا گیند اپنے ابتدائی رخ کے ساتھ 22.0° زاویے پر $3.50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے حسرکت کرتا ہے جبکہ دوسرے گیند کی رفتار $2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) پہلے گیند کے ابتدائی کے ساتھ دوسرے گیند کے رخ کا زاویہ اور (ب) پہلے گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ (ج) کیا (کمیت کے وسط کی) حسرکی توانائی کی بقا ہوگی؟ (گیند کا گھومنا نظسر انداز کریں۔)

سوال ۳.۱۱۳: بلا رگڑ $h = 0.40\,\mathrm{m}$ بلند میز کے کنارے پر ساکن $2.0\,\mathrm{kg}$ ڈبے کو $3.2\,\mathrm{kg}$ ڈبہ $3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے چلتے ہوئے ٹکراتا ہے (شکل 78.9)۔ دونوں ڈبے آپس مسیں چپک کر فسرش پر گرتے ہیں۔ عین فسرش

پر پہنچنے سے قبل ان کی حر کی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۱۴: ایک غبارہ، جس کی (بمع ٹوکری) کمیت 320 kg ہے، سے ایک شخص، جس کی کمیت 80 kg ہے، سیڑھی کے ذریعے لٹک رہا ہے (شکل 79.9)۔ زمین کے لحاظ سے غبارہ ابتدائی طور ساکن ہے۔ اگر سیڑھی کے لحاظ سے یہ شخص $2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے سیڑھی چڑھنا شروع کرے تب غبارہ (ا) کس رخ اور (ب) کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ اگر شخص چڑھنا روک دے تب غبارے کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۱۵: دیوار کے ساتھ ملا کر رکھے بلار گڑ میز پر $m_1 = 6.6\,\mathrm{kg}$ کمیت کی اینٹ 1 پڑی ہے (شکل 80.9)۔ دیوار اور اینٹ کے بیچ m_2 کمیت کی اینٹ 2 رکھ کر اینٹ 1 کے رخ v_{2i} رفتار کے ساتھ روانا کی جاتی ہے۔ اینٹ 1 کے بعد دیوار سے ٹکرانے کے بعد دونوں اینٹوں کی سمتی رفتار ایک ہے۔ m_2 تلاش کریں۔ تمام تصادم لچکی ہیں (دیوار سے تصادم اینٹ کی رفتار تبدیل نہیں کرتا)۔

سوال ۳.۱۱۶: **بصری کھیل**[۱۸] میں ایک نظارہ پیش کرنا مقصود ہے جس میں 1500 kg کمیت کی 3.0 m لمبی گاڑی 4000 kg کی 14 m کشتی کے اوپر ایک سر سے دوسرے سر تک مسرع ہو کر بندرگاہ کی گودی (جو کشتی سے معمولی نیچے ہے) میں پرواز کر کے پہنچتی ہے (شکل 81.9)۔ کشتی ابتدائی طور پر گودی سے مس ہے؛ کشتی بغیر رگڑ پانی میں حرکت کر سکتی ہے؛ گاڑی اور کشتی دونوں کی کمیت لمبائی پر تخمیناً یکساں تقسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔ عین پرواز سے قبل کشتی اور گودی میں فاصلہ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۱۷: محدد x پر مثبت رخ $8.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے 3.0 kg جسم حرکت کرتے ہوئے کمیت M کے ساکن جسم سے یک بُعدی لچکی ٹکراتا ہے۔ تصادم کے بعد کمیت M کا جسم محور کے مثبت رخ $6.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ کمیت M کتنی ہے؟

سوال ۳.۱۱۸: چبوترہ کے ساتھ کھلی ریل گاڑی کا 2140 kg ڈبہ، جو بلار گڑ حرکت کر سکتا ہے، ساکن کھڑا ہے۔ ایک پہلوان جس کی کمیت 242 kg ہے پٹری کے ہمراہ $5.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے دوڑ کر کھلا ڈبے میں کودتا ہے۔ اگر پہلوان کھلا ڈبے (ا) پر کھڑا ہو جائے، (ب) کھلا ڈبے کے لحاظ سے اسی رخ $5.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے دوڑے، اور (ج) ابتدائی رخ کے مخالف کھلا ڈبے کے لحاظ سے $5.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے دوڑے تب کھلا ڈبے کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۱۹: زمین پر 6100 kg ہوائی بان انتصابی اڑان کے لئے تیار کھڑا ہے۔ خرج کی رفتار $1200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) ہوائی بان کو تجاذبی قوت کے برابر قدر کی ابتدائی قوت دھکیل دینے کے لئے اور (ب) ہوائی بان کو انتصابی اوپر رخ $21\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اسراع دینے کے لئے فی سیکنڈ کتنا ایندھن جلانا ہو گا؟

سوال ۳.۱۲۰: ایک مقیاسہ، جس کی کمیت 500.0 kg ہے، 400.0 kg چھوٹے طیارے سے جڑا ہے، جو ساکن بڑے خلائی طیارے کے لحاظ سے $1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پر حرکت میں ہے۔ ایک چھوٹا دھماکہ مقیاسہ کو پیچھے کی طرف، چھوٹے طیارے کی نئی سمتی رفتار کے لحاظ سے، $100.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے بھیجتا ہے۔ بڑے طیارے پر بیٹھے شخص کے لحاظ سے مقیاسہ اور چھوٹے طیارے کی کل حرکی توانائی میں، دھماکے کی وجہ سے، اضافہ کی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۲۱: (ا) زمین و چاند کا مرکز کمیت زمین کے مرکز سے کس فاصلے پر ہے؟ (ضمیمہ C میں زمین اور چاند کی کمیت اور ان کے بیچ فاصلہ دیا گیا ہے۔) (ب) یہ فاصلہ زمین کے رداس کا کتنا فی صد ہے؟

---

[۱۸] videogame

سوال ۳.۱۲۲: ایک دیوار سے $140\,\mathrm{g}$ گیند $7.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے عمودی ٹکرا کر اسی رفتار سے واپس لوٹتا ہے۔ لچکی تصادم کا دورانیہ $3.80\,\mathrm{ms}$ ہے۔ دیوار پر تصادم کے دوران گیند کی (ا) ضرب اور (ب) اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۲۳: پھسلنی گاڑی، جس کی کمیت $2900\,\mathrm{kg}$ ہے، $250\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پٹڑی پر ہوائی بان سے چلائی جاتی ہے۔ راستے میں زمین پر پانی کا تالاب آتا ہے۔ چلتی گاڑی سے کفگیر پانی میں ڈبو کر اڑتے پانی کا رخ پھسلنی گاڑی میں رکھی خالی ٹینکی کی طرف کیا جاتا ہے۔ خطی معیار حرکت کی بقا کا اصول استعمال کر کے بتائیں ٹینکی میں $920\,\mathrm{kg}$ پانی جمع ہونے کے بعد پھسلنی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟ (کفگیر پر رگڑی قوت نظر انداز کریں۔)

سوال ۳.۱۲۴: ہوائی بندوق $2.0\,\mathrm{g}$ چھرے فی سیکنڈ $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے مارتی ہے۔ چھروں کو ایک سخت (غیر لچکی) دیوار روکتی ہے۔ (ا) ایک چھرے کی معیار حرکت کی قدر، (ب) ایک چھرے کی حرکی توانائی، اور (ج) دیوار پر چھروں کی بھرمار کی اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟ (د) اگر ہر چھرا $0.60\,\mathrm{ms}$ کے لئے دیوار کے ساتھ تماس میں رہے، تماس کے دوران ایک چھرے کا دیوار پر اوسط قوت کی قدر کیا ہو گی؟ (ہ) یہ قوت جزو ج میں تلاش کی گئی قوت سے کیوں اتنی مختلف ہے؟

سوال ۳.۱۲۵: ریل گاڑی کا ڈبہ دانے اٹھانے والے **برقی زینہ** [۱۹] کے نیچے سے $3.20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے گزرتا ہے۔ ریل گاڑی کے ڈبے میں $540\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ شرح سے دانے گرتے ہیں۔ ریل گاڑی کے ڈبے کو مستقل رفتار پر رکھنے کے لئے درکار قوت کی قدر کیا ہے؟ (رگڑ نظر انداز کریں۔)

سوال ۳.۱۲۶: یکساں موٹائی کے چوکور چادر سے چھوٹا چوکور حصہ کاٹا جاتا ہے (شکل 82.9)۔ بڑے چوکور کا ضلع $6d = 6.0\,\mathrm{m}$ اور چھوٹے کا $2d$ ہے۔ باقی حصے کے مرکز کمیت کا (ا) x محدد اور (ب) y محدد کیا ہے؟

سوال ۳.۱۲۷: لمحہ $t = 0$ سے ابتدائی طور ساکن ذرے پر، جس کی کمیت $2.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ ہے $\vec{F}_1 = (-4.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$ قوت عمل کرتی ہے، اور ابتدائی طور ساکن دوسرے ذرے پر، جس کی کمیت $4.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ ہے، $\vec{F}_2 = (2.00\hat{\imath} - 4.00\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$ قوت عمل کرتی ہے۔ وقت $t = 0$ تا $t = 2.00\,\mathrm{ms}$ دو ذروی نظام کے مرکز کمیت کے ہٹاو کی (ا) قدر اور (ب) مثبت x محور کے لحاظ سے زاویہ کیا ہو گا؟ (ج) لمحہ $t = 2.00\,\mathrm{ms}$ پر مرکز کمیت کی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۲۸: ساکن ذرے A، جس کی کمیت $0.10\,\mathrm{kg}$ ہے، اور B، جس کی کمیت $0.30\,\mathrm{kg}$ ہے، ایک دوسرے سے $1.0\,\mathrm{m}$ فاصلے پر رہا کیے جاتے ہیں۔ ذرے ایک دوسرے کو $1.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$ مستقل قوت سے کھینچتے ہیں۔ نظام پر کوئی بیرونی قوت عمل نہیں کرتی۔ (ا) اس وقت نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہو گی جب ذروں کے بیچ فاصلہ $0.50\,\mathrm{m}$ ہو؟ (ب) ان کا تصادم A کے ابتدائی مقام سے کتنے فاصلے پر ہو گا؟

سوال ۳.۱۲۹: دو ذروں کی ٹکر ہوتی ہے۔ ان کی سمتی رفتار $\vec{v}_1 = (-4.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath} + (-5.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath}$ اور $\vec{v}_2 = (6.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath} + (-2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath}$ اور کمیت بالترتیب $2.00\,\mathrm{kg}$ اور $4.00\,\mathrm{kg}$ ہیں۔ تصادم انہیں آپس میں جوڑتا ہے۔ ان کی سمتی رفتار (ا) اکائی سمتی ترقیم روپ میں اور (ب) قدر اور (ج) زاویہ کے روپ میں کیا ہو گی؟

---

[۱۹] elevator

سوال ۳.۱۳۰: دو کروی نظام (شکل 20.9) میں کرہ 1 کی کمیت $50\,\mathrm{g}$ اور ابتدائی بلندی $h_1 = 9.0\,\mathrm{cm}$ اور کرہ 2 کی کمیت $85\,\mathrm{g}$ ہے۔ کرہ 1 رہا کرنے کے بعد کرہ 2 سے لچکی ٹکراتا ہے۔ (ا) کرہ 1 اور (ب) کرہ 2 کتنے بلندی کو پہنچتے ہیں؟ (اشارہ: پورم پور قیمتیں استعمال نہ کریں۔)

سوال ۳.۱۳۱: سل 1 بلا رگڑ فرش پر محور x کے ہمراہ $0.75\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت کرتے ہوئے ساکن سل 2 سے لچکی ٹکراتی ہے (شکل 83.9)۔ درج ذیل جدول (یکساں جسامت) سلوں کی کمیت، لمبائی، اور لمحہ $t = 0$ پر سل کے وسط کا مقام دیتا ہے۔ (ا) لمحہ $t = 0$ پر، (ب) جس لمحے سل مس ہوتے ہیں، اور (ج) $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر دو جسمی نظام کا مرکز کمیت کہاں ہوگا؟

سل	کمیت (kg)	لمبائی (cm)	$t = 0$ پر وسط
1	0.25	5.0	$x = -1.5\,\mathrm{m}$
2	0.50	6.0	$x = 0$

سوال ۳.۱۳۲: ایک جسم مثبت x محور کے رخ $2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت میں ہے؛ جسم پر کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔ اندرونی دھماکہ جسم کو دو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہے، اور کل حرکی توانائی میں $16\,\mathrm{J}$ کا اضافہ کرتا ہے۔ ایک ٹکڑے کی کمیت $4.0\,\mathrm{kg}$ ہے۔ اگلا حصہ اپنا رخ برقرار رکھتا ہے۔ (ا) پچھلے حصے اور (ب) اگلے حصے کی رفتار کیا ہے؟

سوال ۳.۱۳۳: ابتدائی طور پر ساکن ہائیڈروجن جوہر سے الیکٹران یک بُعدی لچکی تصادم کرتا ہے۔ الیکٹران کی ابتدائی حرکی توانائی کا کتنا فی صد جوہر کو منتقل ہوگا؟ (جوہر کی کمیت الیکٹران کے کمیت کی 1840 گنا ہے۔)

سوال ۳.۱۳۴: ریل گاڑی کا کھلا ڈبہ، جس کا وزن $2415\,\mathrm{N}$ ہے، مثبت x محور کے رخ بلا رگڑ $18.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت میں ہے۔ ایک شخص، جس کا وزن $915\,\mathrm{N}$ ہے، اس ڈبے پر کھڑا ہے۔ ڈبے کے لحاظ سے شخص محور x کے منفی رخ $4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے دوڑ لگاتا ہے۔ ڈبے کی رفتار میں اضافہ کتنا ہوگا؟

سوال ۳.۱۳۵: بے انسان تحقیقی خلائی طیارہ (کمیت m اور سورج کے لحاظ سے رفتار $v = 10.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) مشتری (کمیت M اور سورج کے لحاظ سے رفتار $V_J = 13.0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) کی طرف بڑھتا ہے (شکل 84.9)۔ یہ طیارہ مشتری کے گرد گھوم کر واپس لوٹتا ہے۔ سورج کے لحاظ سے طیارے کی رفتار اب کیا ہوگی؟ اس عمل، جس کو **فلاخن کا وار**[20] کہتے ہیں، کو تصادم تصور کر کے حل کیا جا سکتا ہے۔ مشتری کی کمیت طیارے کی کمیت سے بہت بہت زیادہ ہے ($M \gg m$)۔

سوال ۳.۱۳۶: پکی فرش پر $0.550\,\mathrm{kg}$ گیند $12.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے سیدھا گر کر ٹپکی کھا کر $3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے اچھلتا ہے۔ انتصابی اوپر رخ محور y کا مثبت رخ لیں۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں (ا) گیند کی معیار حرکت میں تبدیلی، (ب) گیند پر ضرب، اور (ج) فرش پر ضرب کیا ہیں؟

سوال ۳.۱۳۷: ساکن جوہری مرکزہ xy محددی نظام کے مبدا پر تین ذروں میں ٹکڑے ہوتا ہے۔ ذرہ 1، جس کی کمیت $16.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ہے، مبدا سے $(6.00 \times 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath}$ رفتار سے دور ہٹتا ہے؛ ذرہ 2، جس کی کمیت $8.35 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ہے، مبدا سے $(-8.00 \times 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath}$ رفتار سے دور ہٹتا ہے۔ (ا) اکائی سمتیہ ترقیم

[20] slingshot

میں تیسرے ذرے کی خطی معیار حرکت کیا ہوگی۔اس کی کمیت $11.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ہے۔(ب)اس عمل کے دوران کتنی حرکی توانائی پیدا ہوتی ہے؟

سوال ۳.۱۳۸: ذرہ 1، جس کی کمیت $200\,\mathrm{g}$ ہے، اور رفتار $3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے $400\,\mathrm{g}$ کمیت کے ساکن ذرے سے یک بُعدی ٹکراتا ہے۔اگر تصادم (ا) لچکی ہو اور (ب) مکمل غیر لچکی ہو، ذرہ 1 پر ضرب کی قدر کیا ہوگی؟

سوال ۳.۱۳۹: چاند کے ایک صفر میں ضروری پایا گیا کہ جس وقت چاند کے لحاظ سے طیارے کی رفتار $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو، طیارے کی رفتار $2.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ بڑھائی جائے۔طیارے کے لحاظ سے خرج کی اضافی رفتار $1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔اتنا اضافہ پانے کے لئے طیارے کی ابتدائی کمیت کی کتنی نسبت جلانی ہوگی؟

سوال ۳.۱۴۰: ایک ساکن گیند، جس کی کمیت $0.20\,\mathrm{kg}$ ہے، کو ڈنڈے سے $14\,\mathrm{ms}$ دورانیے پر $32\,\mathrm{N}$ اوسط قوت کے ساتھ مارا جاتا ہے۔تصادم کے بعد گیند کی رفتار کیا ہوگی؟

باب ۴

گھماو

۴.۱ گھماو کے متغیر

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے اگر جسم کے تمام حصے ایک محور کے گرد ہم قدم گھومیں، یہ استوار جسم ہو گا۔(اس باب میں ایسے اجسام پر گفتگو کی جائے گی۔)

۲. جان پائیں گے کہ اندرونی حوالہ لکیر اور مقررہ بیرونی حوالہ لکیر کے بیچ زاویہ، استوار جسم کا زاویاتی مقام دیگا۔

۳. ابتدائی اور اختتامی زاویاتی مقام کا زاویاتی ہٹاو کے ساتھ تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. اوسط زاوی سمتی رفتار، زاوی ہٹاو، اور ہٹاو کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۵. اوسط زاوی اسراع، زاوی سمتی رفتار میں تبدیلی، اور اس تبدیلی کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۶. جان پائیں گے کہ خلاف گھڑی حرکت مثبت رخ اور گھڑی وار حرکت منفی رخ ہو گا۔

۷. زاوی مقام کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۸. زاوی مقام بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۹. جان پائیں گے کہ لمحاتی زاوی سمتی رفتار کی قدر لمحاتی زاوی رفتار ہو گی۔

۱۰. زاوی سمتی رفتار کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۱. زاوی سمتی رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۲. وقت کے ساتھ زاوی اسراع تفاعل کا تکمل لے کر جسم کی زاوی سمتی رفتار میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔
وقت کے ساتھ زاوی سمتی رفتار تفاعل کا تکمل لے کر جسم کے زاوی مقام میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مقررہ محور، جو محور گھماو کہلاتی ہے، کے گرد استوار جسم کا گھماو بیان کرنے کی خاطر، جسم کے اندر محور کو عمودی حوالہ لکیر فرض کی جاتی ہے جو جسم کے ساتھ ہم قدم محور کے گرد گھومتی ہے۔ ایک مقررہ رخ کے ساتھ اس لکیر کا زاوی مقام θ ناپا جاتا ہے۔ جب θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو، ذیل ہو گا،

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ})$$

جہاں رداس r کے دائری راہ کا قوسی فاصلہ s اور ریڈیئن میں زاویہ θ ہے۔

- زاویہ کی درجہ میں اور چکر میں پیمائش کا ریڈیئن پیمائش سے تعلق ذیل ہے۔

$$1\ \text{چکر} = 360^\circ = 2\pi\ \text{ریڈیئن}$$

- ایک جسم جو محور گھماو کے گرد گھوم کر اپنا زاوی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، ذیل زاوی ہٹاو سے گزرتا ہے،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

جہاں خلاف گھڑی گھماو کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔

- اگر جسم Δt دورانیہ میں $\Delta\theta$ زاوی ہٹاو گھومے، اس کی اوسط زاوی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

جسم کی (لمحاتی) زاوی سمتی رفتار ω ذیل ہو گی۔

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اوسط زاوی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ اور سمتی رفتار ω دونوں سمتی مقادیر ہیں، جن کا رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔ خلاف گھڑی گھماو کے لئے ان کا رخ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔ زاوی سمتی رفتار کی قدر جسم کی زاوی رفتار ہو گی۔

• اگر $\Delta t = t_2 - t_1$ دورانیہ میں جسم کی زاوی سمتی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، اس کا اوسط زاوی اسراع $\alpha_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

جسم کا (لمحاتی) زاوی اسراع α ذیل ہو گا۔

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$\alpha_{\text{اوسط}}$ اور α دونوں سمتی مقادیر ہیں۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے، طبیعیات کی توجہ کا ایک مرکز "حرکیات" ہے۔ تاہم، اب تک ہم صرف **مستقیم حرکت** پر بات کرتے رہے ہیں، جس میں جسم سیدھی یا قوسی لکیر پر حرکت کرتا ہے (شکل 1a-10)۔ اب ہم **گھماو** پر نظر ڈالتے ہیں، جس میں جسم کسی محور کے گرد گھومتا ہے (شکل 1b.10)۔

گھماو تقریباً ہر مشین میں نظر آتا ہے، اور جب آپ دروازہ کھولتے ہیں آپ اس کو دیکھتے ہیں۔ کھیل میں گھماو اہم کردار ادا کرتا ہے، جیسا گیند کو زیادہ دور پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا زیادہ دیر اٹھا کر سکتی ہے)، اور کرکٹ میں گیند قوسی راہ پر پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا دائیں یا بائیں دھکیلتی ہے)۔ گھماو زیادہ اہم مسائل، جیسا عمر رسیدہ ہوائی جہاز میں دھاتی حصوں کا ٹوٹ پھوٹ، میں بھی کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

گھماو پر بحث سے قبل، حرکت میں ملوث متغیرات متعارف کرتے ہیں، جیسا ہم نے باب 2 میں مستقیم حرکت پر بحث سے قبل کیا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ گھماو کے متغیرات عین باب 2 میں یک بُعدی حرکت کے متغیرات کی طرح ہیں؛ ایک اہم خصوصی صورت وہ ہے جہاں اسراع (جو یہاں زاوی اسراع ہو گا) مستقل ہو۔ ہم دیکھتے ہیں نیوٹن کا دوسرا قاعدہ زاوی حرکت کے لئے بھی لکھا جا سکتا ہے، تاہم اب قوت کی بجائے ایک نئی مقدار جو قوت مروڑ کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ کام اور کام و حرکی توانائی مسئلے کا اطلاق بھی گھماو حرکت پر کیا جا سکتا ہے، تاہم کمیت کی بجائے ایک نئی مقدار جو زاوی جمود کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ مختصراً، ہم جو کچھ پڑھ چکے ہیں، اس کا اطلاق گھماو حرکت میں ہو گا، تاہم کبھی کبھار معمولی تبدیلی کی ضرورت پیش آئے گی۔

انتباہ: اگرچہ اس باب میں زیادہ تر حقائق محض دوبارہ پیش کیے گئے ہیں، دیکھا یہ گیا ہے کہ طلبہ وطالبات کو اس باب میں دشواری پیش آتی ہے۔ اساتذہ کرام اس کی کئی وجوہات پیش کرتے ہیں جن میں سے دو پر اتفاق پایا جاتا ہے: 1 یہاں علامت کی تعداد بہت زیادہ ہے (جنہیں یونانی حروف میں لکھ کر مشکل میں مزید اضافہ پیدا ہوتا ہے)، اور 2 آپ خطی حرکت سے زیادہ واقف ہیں (اسی لئے کمرے کے ایک کونے سے دوسرے کونے تک آپ با آسانی جا سکتے ہیں)، لیکن گھماو سے آپ کا واسطہ کم رہا ہے (اسی لئے تفریح گاہ میں آپ تفریحی جھولے پر سوار ہونے کے لئے پیسہ خرچنے کے لئے راضی ہوتے ہیں)۔ جہاں آپ کو دشواری ہو، دیکھیں آیا

مسئلے کو باب 2 کا یک بُعدی خطی مسئلہ تصور کرنے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ مثلاً، اگر آپ سے زاوی فاصلہ معلوم کرنے کو کہا جائے، وقتی طور پر لفظ زاوی کو بھول جائیں اور دیکھیں آیا باب 2 کی ترقیم اور تصورات استعمال کر کے جواب حاصل کرنا آسان ہوتا ہے۔

گھماو کے متغیر

ہم مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماو پر غور کرنا چاہتے ہیں۔ **استوار جسم**[۱] سے مراد وہ جسم ہے جس کے تمام حصے، جسم کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر، ہم قدم گھوم سکتے ہیں۔ **مقررہ محور**[۲] سے مراد وہ محور ہے جو حرکت نہیں کرتی اور جس پر گھوما جا سکتا ہے۔ یوں ہم ایسے جسم پر غور نہیں کریں گے جیسا سورج (جو گیس کا کرہ ہے) جس کے حصے ایک ساتھ حرکت نہیں کرتے۔ ہم زمین پر لڑھکتے گیند کی بھی بات نہیں کرتے چونکہ اس کی محور خود حرکت پذیر ہے (ایسی گیند کی حرکت، گھماو اور مستقیم حرکت کا ملاپ ہے)۔

شکل 2.10 میں مقررہ محور پر، جو **محور گھماو**[۳] یا **گھماو کی محور** کہلاتی ہے، اختیاری شکل کا استوار جسم گھوم رہا ہے۔ خالص گھماو (زاوی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز محور گھماو پر واقع ہے، اور ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی وقفہ میں ایک جتنا زاویہ طے کرتا ہے۔ خالص مستقیم حرکت (خطی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی دورانیہ میں ایک جتنا خطی فاصلہ طے کرتا ہے۔

آئیں باری باری خطی مقادیر مقام، ہٹاو، سمتی رفتار، اور اسراع کے مماثل زاوی مقادیر پر غور کرتے ہیں۔

زاوی مقام

شکل 2.10 میں گھماو کو عمودی، جسم کے ساتھ گھومتی، جسم سے پکی جڑی حوالہ لکیر دکھائی گئی ہے۔ کسی مقررہ رخ کے ساتھ، جس کو ہم **صفر زاوی مقام**[۴] مانتے ہیں، اس لکیر کا زاویہ لکیر کا **زاوی مقام**[۵] ہو گا۔ شکل 3.10 میں محور x کے مثبت رخ کے ساتھ زاوی مقام θ ناپا گیا ہے۔ ہندسہ سے ہم جانتے ہیں درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱}$$

یہاں محور x (جو صفر زاوی مقام ہے) سے حوالہ لکیر تک دائری قوس کی لمبائی s، اور دائرے کا رداس r ہے۔

اس طرح تعین کیا گیا زاویہ، درجہ یا چکر کی بجائے، **ریڈیئن**[۶] میں ناپا جاتا ہے۔ ریڈیئن دو لمبائیوں کی نسبت (تقابلی تعلق) ہے لہٰذا یہ بے بُعد خالص عدد ہو گا۔ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا ایک مکمل دائرے میں 2π

---

[۱] rigidbody
[۲] fixedaxis
[۳] rotationaxis
[۴] zeroangularposition
[۵] angularposition
[۶] radian

ریڈیئن ہوں گے۔

$$2\pi \text{ ریڈیئن} = \frac{2\pi r}{r} = 360^\circ = 1 \text{ چکر} \quad (۴.۲)$$

یا

$$0.159 \text{ چکر} = 57.3^\circ = 1 \text{ ریڈیئن} \quad (۴.۳)$$

محور گھماو پر حوالہ لکیر کی مکمل چکر کے بعد ہم θ واپس صفر نہیں کرتے۔ اگر حوالہ لکیر صفر زاوی مقام سے ابتدا کر کے دو چکر مکمل کرے، لکیر کا زاوی مقام $\theta = 4\pi$ ریڈیئن ہو گا۔

محور x پر خالص مستقیم حرکت کے لئے $x(t)$، یعنی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم حرکت پذیر جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔ اسی طرح، خالص گھماو کے لئے $\theta(t)$، یعنی زاوی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم گھومتے جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔

زاوی ہٹاو

اگر شکل 3.10 کا جسم محور گھماو پر شکل 4.10 کی طرح گھوم کر حوالہ لکیر کا زاوی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا زاوی ہٹاو $\Delta\theta$ ذیل ہو گا۔

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (۴.۴)$$

زاوی ہٹاو کی یہ تعریف نہ صرف استوار جسم بلکہ جسم کے ہر اندرونی ذرہ کے لئے درست ہے۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ محور x پر مستقیم حرکت کی صورت میں جسم کا ہٹاو Δx مثبت یا منفی ہو گا، جو، محور پر جسم کی حرکت کے رخ پر منحصر ہے۔ اسی طرح، گھماو کی صورت میں جسم کا زاوی ہٹاو $\Delta\theta$ درج ذیل قاعدہ کے تحت مثبت یا منفی ہو گا۔

قاعدہ ۴.۱: خلاف گھڑی زاوی ہٹاو مثبت اور گھڑی وار ہٹاو منفی ہو گا۔

"گھڑیاں منفی ہیں" کا فقرہ اس قاعدے کو یاد رکھنے میں مدد دے سکتا ہے۔ یاد رہے گھڑی کے سیکنڈ کی سوئی کا ہر قدم آپ کی زندگی کاٹتی ہے۔

آزمائش ۱

قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ درج ذیل ابتدائی اور اختتامی زاوی مقام کی مرتب جوڑیوں میں کونسی منفی زاوی ہٹاو دیتی ہیں؟ (ا) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی $+5$ ریڈیئن؛ (ب) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی -7 ریڈیئن؛ (ج) ابتدائی 7 ریڈیئن، اختتامی -3 ریڈیئن۔

زاوی سمتی رفتار

فرض کریں ایک جسم وقت t_1 پر زاوی مقام θ_1 پر اور وقت t_2 پر زاوی مقام θ_2 پر ہو، جیسا شکل 4.10 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم t_1 تا t_2 وقتی دورانیہ Δt میں جسم کی **اوسط زاوی سمتی رفتار**[7] $\omega_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل کرتے ہیں،

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{۴.۵}$$

جہاں وقت دورانیہ Δt میں زاوی ہٹاو $\Delta\omega$ ہے۔ (زاوی سمتی رفتار کے لئے یونانی حروف تہجی کا، چھوٹی لکھائی میں، آخری حرف **اومیگا** ω استعمال کیا جائے گا۔) مساوات ۴.۵ میں Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی درج ذیل تحدیدی قیمت حاصل ہو گی جو **لمحاتی زاوی سمتی رفتار**[8] ω (یا مختصراً **زاوی سمتی رفتار**) کہلاتی ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۶}$$

اگر $\theta(t)$ معلوم ہو، اس کا تفرق لے کر زاوی سمتی رفتار ω حاصل ہو گی۔

چونکہ اس جسم کے تمام ذرے ہم قدم ہیں، لہٰذا مساوات ۴.۵ اور مساوات ۴.۶ نا صرف مکمل گھومتے استوار جسم کے لئے بلکہ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاوی سمتی رفتار کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$، چکر فی سیکنڈ، اور چکر فی منٹ ہے۔

محور x پر مثبت رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی سمتی رفتار v مثبت جبکہ منفی رخ حرکت کی صورت میں منفی ہو گی۔ اسی طرح محور پر مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھماو کی صورت میں استوار جسم کی زاوی سمتی رفتار مثبت جبکہ منفی رخ (گھڑی وار) گھماو کی صورت میں منفی ہو گی۔ ("گھڑیاں منفی ہیں" اب بھی درست ہے۔) زاوی سمتی رفتار کی قدر **زاوی رفتار**[9] کہلاتی ہے۔ ہم زاوی رفتار کے لئے بھی ω علامت استعمال کریں گے۔

زاوی اسراع

گھومتے ہوئے جسم کی زاوی سمتی رفتار مستقل نہ ہونے کی صورت میں جسم زاوی اسراع سے دوچار ہو گا۔ فرض کریں وقت t_1 پر جسم کی زاوی سمتی رفتار ω_1 اور t_2 پر ω_2 ہے۔ دورانیہ t_1 تا t_2 میں گھومتے ہوئے جسم کی **اوسط زاوی اسراع**[10] $\alpha_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل ہے،

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{۴.۷}$$

---

[7] average angular velocity
[8] instantaneous angular velocity
[9] angular speed
[10] average angular acceleration

جہاں $\Delta\omega$ زاوی سمتی رفتار میں Δt کے دوران تبدیلی ہے۔ **لمحاتی زاوی اسراع**[11] (یا مختصراً **زاوی اسراع**)، جس سے ہمیں زیادہ دلچسپی ہے، Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی، درج ذیل، تحدیدی قیمت کو کہتے ہیں۔

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۸}$$

مساوات ۴.۷ اور مساوات ۴.۸ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاوی اسراع کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی مربع سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-2}})$ اور چکر فی مربع سیکنڈ ہے۔

نمونی سوال ۴.۱: **زاوی مقام سے زاوی سمتی رفتار کا حصول**

شکل 5a.10 میں قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ قرص پر حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta(t)$ ذیل ہے، جہاں t اور θ بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن میں ہیں، اور صفر زاوی مقام شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\theta = -1.00 - 0.600t + 0.250t^2 \tag{۴.۹}$$

(آپ چاہیں تو وقتی طور پر لفظ "زاوی مقام" سے "زاوی" خارج کر کے اور θ علامت کی جگہ x استعمال کر کے مسئلے کو باب 2 کی ترقیم میں لے جائیں۔ آپ کو باب 2 کی یک بُعدی حرکت کے مقام کی مساوات حاصل ہو گی۔)

(ا) قرص کا زاوی مقام بالمقابل وقت $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 5.4\,\mathrm{s}$ ترسیم کریں۔ قرص اور اس پر زاوی مقام کی حوالہ لکیر کا خاکہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$، اور $t = 4.0\,\mathrm{s}$، اور اس لمحے پر بنائیں جب ترسیم t محور سے گزرتی ہے۔

۴.۱.۱ کلیدی تصور

قرص کے زاوی مقام سے مراد اس پر کھینچی حوالہ لکیر کا مقام $\theta(t)$ ہے، جو مساوات ۴.۹ دیتی ہے؛ لہٰذا ہم مساوات ۴.۹ ترسیم کرتے ہیں؛ نتیجہ شکل 5b.10 میں پیش ہے۔

حساب: قرص اور حوالہ لکیر کا مقام کسی مخصوص لمحے پر خاکہ بنانے کے لئے ضروری ہے کہ اس لمحے پر ہمیں θ معلوم ہو، جو مساوات ۴.۹ میں لمحے کا وقت ڈالنے سے حاصل ہو گا۔ یوں $t = -2.0\,\mathrm{s}$ کے لئے ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\theta &= -1.00 - (0.600)(-2.0) + (0.250)(-2.0)^2 \\ &= 1.2\,\mathrm{rad} = 1.2\,\mathrm{rad}\,\frac{360^\circ}{2\pi\,\text{ریڈیئن}} = 69^\circ\end{aligned}$$

یہ نتیجہ کہتا ہے کہ قرص پر موجود حوالہ لکیر لمحہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر صفر مقام سے مثبت رخ (خلاف گھڑی) 1.2 ریڈیئن یعنی 69° گھوم کر ہو گی۔ شکل 5b.10 کے خاکہ 1 میں حوالہ لکیر کا یہ مقام دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح $t = 0$ پر θ کی قیمت -1.00 ریڈیئن یا -57° ہو گی، جس کے تحت حوالہ لکیر صفر زاوی مقام سے 1.0 ریڈیئن یا 57° منفی رخ (گھڑی وار) گھوم کر ہو گی، جیسا خاکہ 3 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر θ کی قیمت

---
[11] instantaneous angular acceleration

0.60 ریڈیئن یعنی $34°$ ہو گی (خانہ 5)۔ جس لمحے ترسیم محور t سے گزرتی ہے، $\theta = 0$ ہو گا اور حوالہ لکیر لحاتی عین صفر مقام پر ہو گی (خانہ 2 اور 4)۔

(ب) شکل 5b.10 میں $\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت کس $t_{\text{کمتر}}$ پر ہو گی؟ θ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

کلیدی تصور

تفاعل کی انتہا قیمت (یہاں کم سے کم قیمت) معلوم کرنے کی خاطر ہم تفاعل کا ایک گنا تفرق لے کر صفر کے برابر رکھتے ہیں۔

حساب: تفاعل $\theta(t)$ کا ایک گنا تفرق ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۰}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر t کے لئے حل کرکے لمحہ $t_{\text{کمتر}}$ حاصل ہو گا جس پر $\theta(t)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

$$t_{\text{کمتر}} = 1.2\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت جاننے کے لئے ہم مساوات ۴.۹ میں $t_{\text{کمتر}}$ ڈالتے ہیں، جو ذیل دیگا۔

$$\theta = -1.36\ \text{ریڈیئن} \approx -77.9° \qquad \text{(جواب)}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت (شکل 5b.10 میں نشیب) صفر زاوی مقام سے قرص کی زیادہ سے زیادہ گھڑی وار گھماو ہے، جو خانہ 3 سے کچھ زیادہ ہو گا۔

(ج) قرص کی زاوی سمتی رفتار ω وقت $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 6.0\,\mathrm{s}$ ترسیم کریں۔ قرص کا خانہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ ، $t = 4.0\,\mathrm{s}$، اور $t_{\text{کمتر}}$ پر بنائیں، اور بتائیں ان لمحات پر گھومنے کا رخ اور ω کی علامت کیا ہو گی۔

کلیدی تصور

مساوات ۴.۶ کے تحت زاوی سمتی رفتار ω سے مراد $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ہے جو مساوات ۴.۱۰ دیتی ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\omega = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۱}$$

اس تفاعل، $\omega(t)$، کی ترسیم شکل 5c.10 میں پیش ہے۔ یہ تفاعل خطی ہے لہٰذا اس کی ترسیم ایک سیدھی لکیر ہے۔ ترسیم کی ڈھلوان $0.500\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ہے اور انتصابی محور (جو دکھایا نہیں گیا) کو ترسیم $-0.600\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر قطع کرتی ہے۔

حساب: قرص کا خانہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر بنانے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۱ میں یہ قیمت ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = -1.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \qquad \text{(جواب)}$$

منفی کی علامت کہتی ہے کہ $t = -2.0\,\text{s}$ پر قرص گھڑی وار (منفی رخ) گھوم رہا ہے (جیسا شکل 5c.10 میں دائیں ہاتھ خانے میں دکھایا گیا ہے)۔

مساوات ۴.۱۱ میں $t = 4.0\,\text{s}$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\omega = 1.4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \qquad \text{(جواب)}$$

مضمر مثبت علامت کہتی ہے قرص مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھوم رہا ہے (شکل 5c.10 میں دایاں ہاتھ خانہ)۔

$t_{\text{کمتر}}$ کے لئے ہم جانتے ہیں $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ ہو گا۔ یوں $\omega = 0$ ہو گا۔ جب حوالہ لکیر، شکل 5b.10 θ میں θ کی کم سے کم قیمت کو پہنچتی ہے، قرص لمحاتی رکتا ہے، جیسا شکل 5c.10 میں وسطی خانہ عندیہ دیتا ہے۔ شکل 5c.10 میں ω بالمقابل t کی ترسیم پر صفر نقطہ، جہاں ترسیم منفی (گھڑی وار) گھماو سے مثبت (خلاف گھڑی) گھماو کا آغاز کرتی ہے، وہ نقطہ ہے جہاں قرص لمحاتی رکتا ہے۔

(د) جز وا تا جز و ج کے نتائج استعمال کر کے $t = -3.0\,\text{s}$ تا $t = 6.0\,\text{s}$ قرص کی حرکت بیان کریں۔

بیان: جب ہم، $t = -3.0\,\text{s}$ پر، قرص پر پہلی مرتبہ نظر ڈالتے ہیں، اس کا زاوی مقام مثبت، گھماو گھڑی وار اور رفتار میں کمی دیکھنے کو ملتی ہے۔ یہ $\theta = -1.36$ ریڈیئن پر لمحاتی رکنے کے بعد خلاف گھڑی گھومنا شروع کرتا ہے اور آخر کار اس کا زاوی مقام دوبارہ مثبت ہوتا ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۲: زاوی اسراع سے زاوی سمتی رفتار کا حصول

ایک بچہ لٹو ذیل زاوی اسراع سے گھماتا ہے، جہاں t اور α بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں ہے۔

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

لمحہ $t = 0$ پر لٹو کی زاوی سمتی رفتار $5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$، اور حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta = 2$ ریڈیئن ہے۔

(ا) لٹو کی زاوی سمتی رفتار $\omega(t)$ کا ریاضی فقرہ حاصل کریں؛ یعنی ایسا تفاعل معلوم کریں جو وقت پر زاوی سمتی رفتار کا انحصار صریحاً دے۔ (ہم جانتے ہیں ایسا تفاعل موجود ہے چونکہ لٹو زاوی اسراع سے گزر رہا ہے؛ یوں اس کی زاوی سمتی رفتار تبدیل ہو گی۔)

کلیدی تصور

$\alpha(t)$ تعریف کے روسے $\omega(t)$ کا وقتی تفرق ہو گا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\alpha(t)$ کا تکمل $\omega(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۴.۸ ذیل کہتی ہے

$$\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا

$$\int \mathrm{d}\omega = \int \alpha \, \mathrm{d}t$$

ہوگا جو ذیل دے گی، جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔

$$\omega = \int (5t^3 - 4t) \, \mathrm{d}t = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$$

ہم جانتے ہیں $t = 0$ پر $\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے؛ اس معلومات کو درج بالا میں ڈال کر:

$$5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} = 0 - 0 + C$$

تکمل کا مستقل $C = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ حاصل ہوگا۔ یوں درکار تفاعل ذیل ہوگا۔

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5 \qquad (\text{جواب})$$

(ب) لٹو کے زاوی مقام $\theta(t)$ کا ریاضی فقرہ تلاش کریں۔

کلیدی تصور

تعریف کے رو سے $\theta(t)$ کا وقتی تفرق $\omega(t)$ دیگا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\omega(t)$ کا تکمل $\theta(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۴.۶ کے تحت:

$$\mathrm{d}\theta = \omega \, \mathrm{d}t$$

ہوگا جس سے ذیل لکھا جا سکتا ہے،

$$\begin{aligned}
\theta = \int \omega \, \mathrm{d}t &= \int (\frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\
&= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

جہاں $t = 0$ پر $\theta = 2\,\mathrm{rad}$ جانتے ہوئے C' کی قیمت حاصل کی گئی۔ □

کیا زاوی مقادیر سمتیات ہیں؟

ہم اکیلے ذرے کا مقام، سمتی رفتار، اور اسراع سمتیات سے بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ذرہ صرف ایک محور پر حرکت کرتا ہو، سمتی ترقیم استعمال کرنا ضرورت نہیں۔ ایسے ذرے کو صرف دو رخ دستیاب ہیں جنہیں مثبت اور منفی علامت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح استوار جسم قائمہ محور پر، محور کے ہمراہ دیکھتے ہوئے، صرف خلاف گھڑی اور گھڑی وار گھوم سکتا ہے۔ ان رخ کو ہم مثبت اور منفی سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں ایک سوال اٹھتا ہے: "کیا ہم گھومتے جسم کے زاوی ہٹاو، زاوی سمتی رفتار، اور زاوی اسراع کو سمتیات سمجھ سکتے ہیں؟" اس کا جواب ہے "جی ہاں" (زاوی ہٹاو کے لئے نیچے پیش انتباہ ضرور دیکھیں۔)

زاوی سمتی رفتار۔ زاوی سمتی رفتار کو دیکھیں۔ شکل 6a.10 میں $\omega = 33\frac{1}{3}$ چکر فی سیکنڈ کی مستقل زاوی رفتار سے گھڑی وار رخ گھومتا ہوا قرص دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل 6b.10 میں دکھایا گیا ہے، ہم اس کی سمتی زاوی رفتار گھماو کے محور پر سمتیہ $\vec{\omega}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس کا طریقہ کار یوں ہے: سمتیہ کی لمبائی کسی موزوں پیمانہ کے تحت رکھی جاتی ہے، مثلاً $1\,\mathrm{cm}$ کو 10 چکر فی منٹ کی مطابقت سے رکھ جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\vec{\omega}$ کا رخ تعین کرنے کے لئے ہم **دائیں ہاتھ کا قاعدہ** استعمال کرتے ہیں، جو شکل 6c.10 میں پیش ہے: قرص کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ انگلیاں گھماو کے رخ ہوں۔ آپ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا زاوی سمتی رفتار کے سمتیہ کا رخ دیگا۔ اگر قرص مخالف رخ گھومے، دائیں ہاتھ قاعدہ کے تحت $\vec{\omega}$ بھی مخالف رخ ہو گا۔

زاوی مقادیر سمتیات سے ظاہر کرنے کی عادت مشکل سے ڈلتی ہے۔ ہم فوراً سوچتے ہیں کہ سمتیہ کے ہمراہ کوئی چیز حرکت کرے گی۔ یہاں ایسا نہیں ہو گا۔ اس کے بجائے کوئی چیز (جیسا استوار جسم) سمتیہ کے رخ کے گرد گھومتی ہے۔ خالص گھماو کی دنیا میں، سمتیہ کا رخ کسی چیز کی حرکت کا رخ نہیں بلکہ گھماو کی محور دیگا۔ بہر حال، سمتیہ حرکت بھی تعین کرتا ہے۔ مزید، یہ سمتیات سلجھانے کے ان تمام قواعد کی تعمیل کرتا ہے جو باب 3 میں پیش کیے گئے۔ زاوی اسراع $\vec{\alpha}$ بھی ایک سمتیہ ہے، اور یہ بھی ان قواعد کی تعمیل کرتا ہے۔

اس باب میں صرف قائمہ محور پر گھماو کی بات کی جائے گی۔ ان میں سمتیات استعمال کرنے کی ضرورت نہیں؛ ہم زاوی سمتی رفتار کو ω اور زاوی اسراع کو α سے ظاہر کر کے، خلاف گھڑی گھماو کو مثبت اور گھڑی وار گھماو کو منفی کی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

زاوی ہٹاو۔ پہلے انتباہ کی بات کرتے ہیں: زاوی ہٹاو (ماسوائے انتہائی چھوٹا ہٹاو) کو سمتیہ سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ کیوں نہیں؟ ہم یقیناً اس کے رخ اور قدر کی بات کر سکتے ہیں، جیسا شکل 6.10 میں زاوی سمتی رفتار کے لئے کیا گیا۔ تاہم، سمتیہ سے ظاہر کیے جانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ مقدار سمتی جمع کے قواعد پر پورا اترتی ہو۔ ان قواعد میں ایک قاعدہ کہتا ہے کہ سمتیات جمع کرتے وقت ان کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ زاوی ہٹاو اس قاعدہ پر پورا نہیں اترتا۔

شکل 7.10 میں دی گئی مثال پر غور کریں۔ ایک کتاب کو، جو ابتدائی طور پر افقی پڑی ہے، دو مرتبہ 90° زاوی ہٹاو سے گزارا گیا ہے؛ ایک مرتبہ شکل 7a.10 اور دوسری مرتبہ شکل 7b.10 کی طرح۔ دونوں میں ہٹاو برابر، لیکن ترتیب ایک نہیں، اور آخر میں کتاب ایک جیسی سمت بند نہیں۔ دوسری مثال لیتے ہیں۔ دایاں

ہاتھ لٹکا کر ہتھیلی ران پر رکھیں۔ کلائی سخت کر کے، (1) بازو سامنے اتنا اٹھائیں کہ افقی ہو، (2) اس کو پورا دائیں لے جائیں، اور (3) اس کے بعد ہاتھ واپس نیچے ران تک لے جائیں۔ آپ کی ہتھیلی اب سامنے رخ ہو گی۔ اگر آپ یہی عمل الٹ ترتیب سے دہرائیں، آپ کی ہتھیلی آخر میں کس رخ ہو گی؟ ان مثال سے ہم دیکھتے ہیں کہ زاوی ہٹاو کا مجموعہ انہیں جمع کرنے کی ترتیب پر منحصر ہے، لہٰذا ہٹاو کو سمتیہ تصور نہیں کیا جا سکتا۔

۴.۲ مستقل زاوی اسراع کا گھماو

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

ا. مستقل زاوی اسراع کی صورت میں زاوی مقام، زاوی ہٹاو، زاوی سمتی رفتار، زاوی اسراع، اور گزرے دارانیے کے تعلق (جدول ۴.۱) استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مستقل زاوی اسراع (جس میں α مستقل ہو گا) گھماو حرکت کی ایک اہم خصوصی صورت ہے، جس کی مجرد حرکیات مساوات ذیل ہیں۔

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$
$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$$
$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

مستقل زاوی اسراع کا گھماو

مستقیم حرکت میں مستقل خطی اسراع کی حرکت (مثلاً، زمین پر گرتا ہوا جسم) ایک اہم خصوصی صورت ہے۔ جدول 1.2 میں اس طرح کی حرکت کو مطمئن کرتی مساوات پیش کی گئیں۔

خالص گھماو میں مستقل زاوی اسراع ایک اہم خصوصی صورت ہے؛ اس کو مطمئن کرنے والی مطابقتی مساوات پائی جاتی ہیں۔ ہم انہیں یہاں اخذ نہیں کریں گے، بلکہ مطابقتی خطی مساوات میں مساوی زاوی متغیرات ڈال کر انہیں پیش کرتے ہیں۔ جدول ۴.۱ میں مساوات کی دونوں فہرست (مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 تا مساوات 18.2؛ مساوات ۴.۱۲ تا مساوات ۴.۱۶) پیش کی گئی ہیں۔

یاد رہے مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 مستقل خطی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ اس طرح، مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ مستقل زاوی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے زاوی مساوات کی فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ مستقل

جدول ۴.۱: مستقل خطی اسراع اور مستقل زاوی اسراع کی حرکت کی مساوات

خطی مساوات		زاوی مساوات	
(2.11)	$v = v_0 + at$	(۴.۱۲)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۳)	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	(۴.۱۴)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	(۴.۱۵)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۶)	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

زاوی اسراع کا سادہ مسئلہ حل کرنے کے لئے آپ عموماً زاوی فہرست سے (اگر یہ فہرست آپ کے پاس موجود ہو) ایک مساوات استعمال کر پائیں گے۔ آپ وہ مساوات منتخب کریں گے جس میں صرف وہ متغیر غیر معلوم ہو جو آپ کو درکار ہو۔ بہتر طریقہ یہ ہو گا کہ آپ مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ یاد کر لیں اور جب ضرورت پیش آئے، انہیں بطور ہمزاد مساوات حل کریں۔

آزمائش ۲

گھومے جسم کا زاوی مقام $\theta(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\theta = 3t - 4$، (ب) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$، (ج) $\theta = 2/t^2 - 4/t$، اور (د) $\theta = 5t^2 - 3$ ہے۔ جدول ۴.۱ کی زاوی مساوات کا اطلاق کن صورتوں پر ہو گا؟

نمونی سوال ۴.۳: **مستقل زاوی اسراع، چکی کا پاٹ**

شکل 8.10 میں پاٹ مستقل زاوی اسراع $\alpha = 0.34\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے گھوم رہا ہے۔ وقت $t = 0$ پر اس کی زاوی سمتی رفتار $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے، اور اس پر کھینچی گئی حوالہ لکیر کا مقام $\theta_0 = 0$ ہے۔

(ا) وقت $t = 0$ سے کتنی دیر بعد حوالہ لکیر زاوی مقام $\theta = 5.0$ چکر پر ہو گی؟

کلیدی تصور

چونکہ زاوی اسراع مستقل ہے لہٰذا ہم جدول ۴.۱ سے مساوات چن سکتے ہیں۔ ہم مساوات ۴.۱۳

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

کا انتخاب اس لئے کرتے ہیں کہ اس میں صرف ایک متغیر، t، نامعلوم ہے اور ہمیں یہی درکار ہے۔

حل: دی گئی معلومات ڈال کر اور $\theta_0 = 0$ اور $\theta = 5.0$ چکر $= 10\pi\,\mathrm{rad}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$10\pi\,\mathrm{rad} = (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})t + \frac{1}{2}(0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}})t^2$$

(اکائیوں کے ثبات کی خاطر ہم 5.0 چکر کو 10π ریڈیئن میں تبدیل کرتے ہیں۔) اس دو درجی الجبرائی مساوات کو حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$t = 32\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

ان ایک عجیب بات پر غور کریں۔ جب ہم پہلی مرتبہ پاٹ پر نظر ڈالتے ہیں یہ منفی رخ گھوم کر $\theta = 0$ سمت بند مقام سے گزرتا ہے۔ اس کے باوجود 32 s بعد ہم اسے $\theta = 5.0$ چکر مثبت سمت بند مقام پر پاتے ہیں۔ اس دورانیے میں ایسا کیا ہوا کہ پاٹ مثبت سمت بند مقام پر ہو سکتا ہے؟

(ب) وقت $t = 0$ اور $t = 32\,\mathrm{s}$ کے بیچ پاٹ کے گھماو پر تبصرہ کریں۔

تبصرہ: پاٹ ابتدائی طور پر منفی (گھڑی وار) رخ $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے حرکت کرتا ہے، تاہم اس کا زاوی اسراع α مثبت ہے۔ ابتدائی زاوی رفتار اور زاوی اسراع کی علامتیں الٹ ہونے کی بدولت پاٹ منفی رخ چلتے چلتے بتدریج آہستہ ہوتے رک کر مثبت رخ گھومنا شروع کرتا ہے۔ حوالہ لکیر مثبت رخ چل کر $\theta = 0$ مقام سے دوبارہ گزرتی ہے اور $t = 32\,\mathrm{s}$ گزرنے تک مثبت رخ مزید 5.0 چکر کاٹ چکا ہوتا ہے۔

(ج) پاٹ کس وقت t پر لمحاتی رکتا ہے؟

حل: ہم دوبارہ زاوی مساوات کی فہرست پر نظر ڈالتے ہیں اور ایسی مساوات لینا چاہتے ہیں جس میں صرف t نامعلوم متغیر ہو۔ تاہم، اب مساوات میں ω کا ہونا بھی ضروری ہے، تا کہ ہم اس کو 0 لے کر مطابقتی t کے لئے حل کریں۔ ہم مساوات ۴.۱۲ منتخب کرتے ہیں، جو ذیل دیگی۔

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})}{0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}}} = 13\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

□

نمونی سوال ۴.۴: **مستقل زاوی اسراع، پہیے کی سواری**

تفریح گاہ میں ایک بڑا پہیا چلاتے ہوئے آپ کی نظر پہیے پر سوار ایک شخص پر پڑتی ہے جو پریشان نظر آتا ہے۔ آپ پہیے کی زاوی سمتی رفتار مستقل زاوی اسراع کے ساتھ $3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے 20.0 چکروں میں کم کر کے $2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرتے ہیں۔ (اس شخص کو "گھومتا شخص" تصور کرنے سے "مستقیم حرکت کرتا شخص" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔)

(ا) زاوی سمتی رفتار کی کمی کے دوران مستقل زاوی اسراع کیا ہو گی؟

کلیدی تصور
پہیے کی زاوی اسراع مستقل ہے، لہٰذا ہم اس کی زاوی سمتی رفتار اور زاوی ہٹاو کا تعلق مستقل زاوی اسراع کی مساوات (مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳) سے جان سکتے ہیں۔

حساب: آئیں دیکھیں آیا ہم ان بنیادی مساوات کو حل کر پائیں گے۔ ابتدائی زاوی سمتی رفتار $\omega_0 = 3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$، زاوی ہٹاو $\theta - \theta_0 = 20.0$ چکر، اور ہٹاو کے آخر پر زاوی سمتی رفتار $\omega = 2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ ہم مستقل زاوی اسراع α جاننا چاہتے ہیں۔ دونوں مساوات میں وقت t پایا جاتا ہے، جس میں ضروری نہیں ہم دلچسپی رکھتے ہوں۔

نامعلوم t خارج کرنے کے لئے ہم مساوات ۴.۱۲ سے

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۳ میں ڈالتے ہیں۔

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2$$

α کے لئے حل کر کے، دی گئی معلومات پُر کر کے، اور 20.0 چکر کو $125.7\,\mathrm{rad}$ میں بدل کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2 - (3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2}{2(125.7\,\mathrm{rad})}\\ &= -0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

(ب) رفتار کتنے وقت میں کم کی گئی؟

حساب: چونکہ اب ہم α جانتے ہیں، مساوات ۴.۱۲ استعمال کر کے t حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}t &= \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}} - 3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}{-0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}}}\\ &= 46.5\,\mathrm{s} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

□

۴.۳ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. قائمہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کے زاوی متغیرات (زاوی مقام، زاوی سمتی رفتار، اور زاوی اسراع) کا جسم پر ایک ذرے، جو کسی رداس پر پایا جاتا ہو، کے خطی متغیرات (مقام، سمتی رفتار، اور اسراع) کے ساتھ تعلق جان پائیں گے۔

۲. مماسی اسراع اور رداسی اسراع میں تمیز کر پائیں گے، اور کسی محور پر گھومتے ہوئے جسم پر موجود ذرے کے لئے بڑھتی زاوی رفتار اور گھٹتی زاوی رفتار کی صورت میں دونوں کے سمتیہ بنا پائیں گے۔

کلیدی تصور

- گھومتے جسم پر محور گھماو سے عمودی فاصلہ r پر پائے جانے والا نقطہ، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ گھومے، یہ نقطہ درج ذیل قوسی فاصلہ s طے کریگا، جہاں θ ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔

$$s = \theta r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کا خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ دائرے کو مماسی ہو گا؛ نقطے کا خطی رفتار ذیل ہو گا، جہاں ω جسم اور نقطے کا (ریڈیئن فی سیکنڈ) زاوی رفتار ہے۔

$$v = \omega r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کے خطی اسراع $\vec{a}$ کے دو حصے ہوں گے؛ ایک مماسی جزو اور دوسرا رداسی جزو۔ مماسی جزو ذیل ہو گا، جہاں α جسم کے (ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) زاوی اسراع کی قدر ہے۔

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

رداسی جزو ذیل ہو گا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اگر یہ نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، اس نقطے اور جسم کا دوری عرصہ T ذیل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

محور گھماو کے گرد دائرے پر مستقل خطی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی یکساں دائری حرکت پر حصہ 5.4 میں غور کیا گیا۔ جب استوار جسم کسی محور پر گھومتا ہے، جسم کا ہر ذرہ اپنے ایک دائرے پر اسی محور کے گرد گھومتا ہے۔ چونکہ جسم استوار (بلا لچک) ہے، ایسے تمام ذرے ہم قدم چل کر ایک جتنے وقت میں ایک چکر مکمل کرتے ہیں؛ ان سب کی زاوی رفتار ω برابر ہے۔

تاہم، ایک ذرہ جتنا محور سے دور ہو گا، اتنا اس کے دائرے کا محیط بڑا ہو گا، لہٰذا اس کی خطی رفتار v اتنی زیادہ ہو گی۔ **گھومنے والے جھولے** [۱۲] پر بیٹھ کر آپ اسے محسوس کر سکتے ہیں۔ مرکز سے جتنے فاصلے پر بھی آپ ہوں، آپ کی زاوی رفتار ω ایک جتنی ہو گی، تاہم مرکز سے دور ہونے پر آپ کی خطی رفتار v بڑھے گی۔

ہم جسم پر کسی مخصوص نقطے کے خطی متغیرات s ، v ، اور a اور اسی جسم کے زاوی متغیرات θ ، ω ، اور α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں۔ متغیرات کی ان فہرست کا رشتہ محور گھماو سے نقطے کے عمودی فاصلہ r کے ذریعے ہو گا۔ یہ عمودی فاصلہ، نقطے اور محور گھماو کے بیچ عمودی لکیر پر ناپا جائے گا۔ یہ فاصلہ اس دائرے کا رداس r ہو گا جس پر محور گھماو کے گرد نقطہ حرکت کرتا ہے۔

مقام

اگر استوار جسم پر کھینچی گئی حوالہ لکیر زاویہ θ گھومے، محور گھماو سے r فاصلے پر موجود جسم کے اندر نقطہ دائری قوس پر فاصلہ s طے کرے گا، جہاں s کی قیمت مساوات ۴.۱ دیتی ہے۔

$$s = \theta r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱۷}$$

مساوات ۴.۱۷ ہمارا پہلی خطی و زاوی تعلق ہے۔ انتباہ: زاویہ θ کا ناپ ریڈیئن میں لازمی ہے چونکہ درج بالا مساوات زاویے کے ریڈیئن میں ناپ کی تعریف ہے۔

رفتار

رداس r کو مستقل رکھ کر وقت کے ساتھ مساوات ۴.۱۷ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r$$

لیکن، $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ نقطے کی خطی رفتار (خطی سمتی رفتار کی قدر)، اور $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ گھومتے جسم کی زاوی رفتار ω ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$v = \omega r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱۸}$$

انتباہ: زاوی رفتار ω لازماً ریڈیئن فی سیکنڈ میں ناپی جائے گی۔

استوار جسم کے تمام اندرونی نقطے ایک زاوی رفتار ω سے گھومتے ہیں لہٰذا مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے زیادہ رداس r پر واقع نقطے کی خطی رفتار v زیادہ ہو گی۔ شکل 9a.10 ہمیں یاد دلاتی ہے کہ ہر نقطے کی خطی سمتی رفتار ہمیشہ نقطے کی دائری راہ کو مماسی ہو گی۔

اگر جسم کا زاوی رفتار w مستقل ہو، مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے جسم کے اندر نقطے کی خطی رفتار v بھی مستقل ہو گی۔ یوں، جسم کے اندر موجود ہر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہے۔ استوار جسم کے ہر اندرونی نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T مساوات 35.4 ذیل دیتی ہے۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{۴.۱۹}$$

[۱۲] merrygoround

اس مساوات کے تحت، ایک چکر کے فاصلے $2\pi r$ کو اس رفتار سے تقسیم کر کے جس سے فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر r منسوخ کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۰}$$

یہ معادل مساوات کہتی ہے ایک چکر کا زاوی فاصلہ، 2π ریڈیئن، اس زاوی رفتار سے تقسیم کر کے، جس سے زاوی فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔

اسراع

رداس r مستقل رکھ کر t کے لحاظ سے مساوات ۴.۱۸ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r \tag{۴.۲۱}$$

یہاں ہم ایک پیچیدگی کا سامنا کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱ کا بایاں ہاتھ $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ خطی اسراع کے صرف اس حصے کو ظاہر کرتا ہے جو خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ کی قدر v کی تبدیلی کا ذمہ دار ہے۔ سمتی رفتار $\vec{v}$ کی طرح خطی اسراع کا یہ حصہ نقطے کی راہ کو مماسی ہو گا۔ ہم اسے خطی اسراع کا مماسی جزو a_t کہہ کر ذیل لکھتے ہیں، جہاں $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ ہے۔

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۲}$$

انتباہ: مساوات ۴.۲۲ میں زاوی اسراع α کا ریڈیئن ناپ میں ہونا لازم ہے۔ ساتھ ہی، جیسا مساوات 34.4 ہمیں بتاتی ہے، دائری راہ پر گامزن ذرے (یا نقطے) کے خطی اسراع کا (رداسی مرکز کے رخ) رداسی جزو $a_r = \frac{v^2}{r}$ ہو گا، جو خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ کے رخ میں تبدیلی کا ذمہ دار ہو گا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر یہ جزو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۳}$$

یوں، جیسا شکل 9b.10 میں دکھایا گیا ہے، استوار گھومتے جسم پر نقطے کے خطی اسراع کے عموماً دو جزو ہوں گے۔ جب بھی جسم کی زاوی سمتی رفتار غیر صفر ہو، رداسی اندر کی طرف کا جزو a_r موجود ہو گا (جو مساوات ۴.۲۳ دیتی ہے)۔ مماسی جزو a_t (جو مساوات ۴.۲۱ دیتی ہے) اس صورت ہو گا جب زاوی اسراع غیر صفر ہو۔

آزمائش ۳

گھومنے والے جھولے کے حلقہ پر چیونٹی بیٹھی ہے۔ اگر اس نظام (گھومنے والا جھولا و چیونٹی) کی زاوی سمتی رفتار مستقل ہو، کیا چیونٹی کا (ا) رداسی اسراع اور (ب) مماسی اسراع ہو گا؟ اگر ω گھٹ رہی ہو، کیا چیونٹی کا (ج) رداسی اسراع اور (د) مماسی اسراع ہو گا؟

نمونی سوال ۴.۵: **تفریح گاہ میں ایک بڑے حلقہ کی بناوٹ**

ہمیں ایک بڑا افقی حلقہ، جس کا رداس $r = 33.1\,\mathrm{m}$ ہو گا، بنانے کو کہا گیا ہے جو انتصابی دھرے پر چلے

گا۔(یہ چین میں موجود دنیا کے سب سے بڑے پہیے جتنا ہو گا۔) سوار حلقے کے بیرونی دیوار میں موجود دروازے سے داخل ہو کر اس دیوار کے ساتھ کھڑے ہوں گے (شکل 10a.10)۔ حلقے پر حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta(t)$ لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ تک ذیل دیتی ہے، جہاں $c = 6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}}$ ہے۔

$$\theta = ct^3 \tag{۴.۲۴}$$

لمحہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ کے بعد جھولنے کے پھیرا مکمل ہونے تک زاوی رفتار مستقل رکھی جائے گی۔ گھومنا شروع ہونے کے بعد، سوار کے پاوں تلے فرش ہٹا دی جائے گی، لیکن وہ گرے گا نہیں؛ بلکہ وہ دیوار کے ساتھ مضبوطی سے جکڑا محسوس کرے گا۔ لمحہ $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پر شخص کی زاوی رفتار ω، خطی رفتار v، زاوی اسراع α، مماسی اسراع a_t، رداسی اسراع a_r، اور اسراع $\vec{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

کلیدی تصور

(1) مساوات ۴.۶ زاوی رفتار ω دیتی ہے۔ (2) مساوات ۴.۱۸ (دائری راہ پر) خطی رفتار v اور (محور گھماو کے گرد) زاوی رفتار ω کا تعلق $v = \omega r$ دیتی ہے۔ (3) مساوات ۴.۸ زاوی اسراع α دیتی ہے ($\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$)۔ (4) مساوات ۴.۲۲ (دائری راہ کے ہمراہ) مماسی اسراع a_t اور (محور گھماو کے گرد) زاوی اسراع α کا تعلق ($a_t = \alpha r$) دیتی ہے۔ (5) مساوات ۴.۲۳ رداسی اسراع ($a_r = \omega^2 r$) دیتی ہے۔ (6) مماسی اور رداسی اسراع پورے اسراع $\vec{a}$ کے دو آپس میں عمودی جزو ہیں۔

حساب: آئیں ان اقدام سے گزریں۔ دیے گئے زاوی مقام تفاعل کا وقتی تفرق لے کر $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پُر کر کے زاوی سمتی رفتار معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct^3) = 3ct^2\\ &= 3(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})^2\\ &= 0.928\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned} \tag{۴.۲۵}$$

مساوات ۴.۱۸ اس لمحے کی ذیل خطی رفتار دیگی۔

$$\begin{aligned}v &= \omega r = 3ct^2 r\\ &= 3(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})^2(33.1\,\mathrm{m})\\ &= 30.7\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned} \tag{۴.۲۶}$$

اگرچہ یہ رفتار ($111\,\mathrm{km\,h^{-1}}$) تیز ہے، ایسی رفتار تفریح گاہوں میں عام ہیں، اور خطرے کا باعث نہیں؛ (جیسا باب 2 میں ذکر کیا گیا) ہمارا جسم اسراع کو رد عمل کرتا ہے، خطی رفتار کو نہیں (ہم رفتار پیما نہیں سرعت پیما ہیں)۔ مساوات ۴.۲۶ کہتی ہے خطی رفتار، وقت کے مربع کے ساتھ بڑھے گی (تاہم یہ اضافہ $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پر رک جائے گا)۔

اس کے بعد، مساوات ۴.۲۵ کا وقت تفرق لے کر زاوی اسراع معلوم کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3ct^2) = 6ct \\
&= 6(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s}) = 0.843\,\mathrm{rad\,s^{-2}} \quad (\text{جواب})
\end{aligned}
$$

اب مساوات ۴.۲۲ مماسی اسراع a_t دیگی:

$$
\begin{aligned}
a_t &= \alpha r = 6ctr \\
&= 6(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})(33.1\,\mathrm{m}) \\
&= 27.91\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 27.9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned} \tag{۴.۲۷}
$$

جو $2.8g$، جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے، کے برابر ہے (جو مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔ مساوات ۴.۲۷ کہتی ہے مماسی اسراع وقت کے ساتھ بڑھ رہا ہے (تاہم یہ اضافہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ پر رک جائے گا)۔ مساوات ۴.۲۳ سے رداسی اسراع لکھتے کر:

$$a_r = \omega^2 r$$

مساوات ۴.۲۵ سے $\omega = 3ct^2$ ڈالتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
a_r &= (3ct^2)^2 r = 9c^2t^4 r \\
&= 9(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})^2(2.20\,\mathrm{s})^4(33.1\,\mathrm{m}) \\
&= 28.49\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 28.5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned} \tag{۴.۲۸}
$$

جو $2.9g$ دیتا ہے (یہ بھی مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔

رداسی اور مماسی اسراع ایک دوسرے کو عمودی ہیں اور سوار کے اسراع $\vec{a}$ کے جزو ہیں (شکل 10b.10)۔ اسراع $\vec{a}$ کی قدر درج ذیل ہوگی:

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \\
&= \sqrt{(28.49\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (27.91\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2} \\
&\approx 39.9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned} \tag{۴.۲۹}
$$

جو $4.1g$ کے برابر ہے (یہ یقیناً پُر لطف ہوگا!)۔ یہ تمام مقادیر مناسب ہیں۔

اسراع $\vec{a}$ کی سمت بندی جاننے کے لئے ہم زاویہ θ معلوم کرتے ہیں (شکل 10b.10)۔

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_r}$$

آئیں اعدادی نتائج پُر کرنے کی بجائے ہم مساوات ۴.۲۷ اور مساوات ۴.۲۸ کے الجبرائی نتائج استعمال کرتے ہیں۔

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6ctr}{9c^2t^4r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3ct^3}\right) \tag{۴.۳۰}$$

ریاضی نتیجے کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ (1) زاویے پر رداس کا کوئی اثر نہیں ہو گا اور (2) اس کی قیمت t کی قیمت 0 تا 2.20 s بڑھانے سے گھٹتی ہے۔ رداسی اسراع (جو t^4 پر منحصر ہے) بہت جلد مماسی اسراع (جو صرف t پر منحصر ہے) پر غالب ہو کر سمتیہ اسراع $\vec{a}$ کو رداسی رخ موڑتا ہے۔ وقت $t = 2.20\,\text{s}$ پر ذیل ہو گا۔

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3(6.39\times10^{-2}\,\text{rad}\,\text{s}^{-3})(2.20\,\text{s})^3} = 44.4^\circ \qquad \text{(جواب)}$$

□

۴.۴ گھماو کی حرکی توانائی

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ذرے کا گھمیری جمود نقطے پر تلاش کر پائیں گے۔

۲. قائمہ محور کے گرد گھومتے ہوئے متعدد ذروں کا کل گھمیری جمود تلاش کر پائیں گے۔

۳. گھمیری جمود اور زاوی رفتار کی صورت میں جسم کی گھمیری حرکی توانائی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- قائمہ محور پر گھومتے استوار جسم کی حرکی توانائی K ذیل ہو گی،

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

جہاں I جسم کا گھمیری جمود کہلاتا ہے، جس کی تعریف انفرادی ذروں کے نظام کے لئے درج ذیل ہے۔

$$I = \sum m_i r_i^2$$

گھماو کی حرکی توانائی

میز آرا کا تیزی سے گھومتا دھار دار پھل یقیناً گھومنے کی بنا حرکی توانائی رکھتا ہے۔ ہم اس توانائی کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں؟ ہم توانائی کے عمومی کلیے $K = \frac{1}{2}mv^2$ سے پورے آرا کی حرکی توانائی حاصل نہیں کر سکتے چونکہ یہ آرے کے مرکز کمیت کی حرکی توانائی دیگا، جو صفر ہے۔

اس کے بجائے، میز آرا (اور کسی بھی دوسرے گھومتے استوار جسم) کو ہم مختلف رفتار سے حرکت کرتے ذروں کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔ ان ذروں کی انفرادی حرکی توانائیاں جمع کر کے پورے جسم کی حرکی توانائی حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں گھومتے جسم کی حرکی توانائی ذیل ہو گی،

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots \\ &= \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2 \end{aligned} \tag{۴.۳۱}$$

جہاں i ویں ذرے کی کمیت m_i اور رفتار v_i ہے۔ مجموعہ جسم کے تمام ذروں پر لیا جائے گا۔

مساوات ۴.۳۱ میں مشکل یہ ہے کہ ہر ذرے کی رفتار دوسرے سے مختلف ہو سکتی ہے۔ اس مشکل سے بچنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۸ سے $v = \omega r$ ڈال کر ذیل لکھتے ہیں، جس میں ω تمام ذروں کے لئے برابر ہے۔

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum m_ir_i^2\Big)\omega^2 \tag{۴.۳۲}$$

مساوات ۴.۳۲ میں دائیں ہاتھ قوسین میں بند مقدار، محور گھماو کے لحاظ سے گھومتے جسم کی کمیت کی تقسیم پیش کرتی ہے۔ یہ مقدار، محور گھماو کے لحاظ سے گھومتے جسم کا **گھمیری جمود**[13] (یا **جمودی معیار اثر**[14]) کہلاتا ہے، جس کو ہم I سے ظاہر کرتے ہیں۔ محور گھماو کے لحاظ سے جسم کے I کی قیمت اٹل ہو گی۔ (انتباہ: I کی قیمت صرف اس صورت بامعنی ہو گی جب اس محور کا ذکر کیا جائے۔) کسی دوسری محور گھماو پر اسی جسم کا I عموماً مختلف ہو گا، تاہم اب بھی اس کی قیمت مستقل ہو گی۔

ہم ذیل لکھ کر،

$$I = \sum m_ir_i^2 \qquad (\text{گھمیری جمود}) \tag{۴.۳۳}$$

مساوات ۴.۳۲ میں ڈال کر مطلوب تعلق:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۳۴}$$

حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $v = \omega r$ استعمال کر کے درج بالا تعلق حاصل کیا گیا لہٰذا ω کی قیمت ریڈیئن ناپ میں لکھنی ضروری ہے۔ جمودی معیار اثر I کی اکائی کلوگرام مربع میٹر $(\mathrm{kg\,m^2})$ ہے۔

طریقہ کار۔ اگر جسم چند ذروں پر مشتمل ہو، ہم ہر ذرے کی انفرادی حرکی توانائی mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ، مساوات ۴.۳۳ کی طرح، لے کر جسم کا کل گھمیری جمود I معلوم کر سکتے ہیں۔ جسم کی کل گھمیری حرکی توانائی جاننے کے لئے معلوم شدہ I کو مساوات ۴.۳۴ میں ڈالنا ہو گا۔ چند ذروں کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کیا

[13] rotationalinertia
[14] momentofinertia

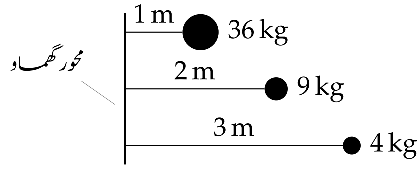
جائے گا؛ اگر جسم میں ذروں کی تعداد بہت زیادہ ہو (جیسا ایک سلاخ میں ہو گا) تب کیا ہو گا؟ اگلے حصے میں ہم اس قسم کے استمراری اجسام کو نپٹنا سیکھیں گے؛ فکر مت کریں، نتائج منٹوں میں حاصل ہوں گے۔

مساوات ۴.۳۴ جو خالص گھماو کی صورت میں استوار جسم کی حرکی توانائی $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ دیتی ہے، خالص مستقیم حرکت کی صورت میں حرکی توانائی کلیہ $K = \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$ کی زاوی معادل ہے۔ دونوں کلیوں میں $\frac{1}{2}$ جز و ضربی پایا جاتا ہے۔ ایک کلیہ میں کمیت M جبکہ دوسرے میں I (جس میں کمیت اور کمیت کی تقسیم دونوں شامل ہیں) پایا جاتا ہے۔ ساتھ ہی دونوں کلیوں میں رفتار کا مربع پایا جاتا ہے (ایک میں مستقیم اور دوسرے میں زاوی)۔ مستقیم اور زاوی حرکت کی حرکی توانائی دو مختلف توانائیاں نہیں۔ دونوں حرکی توانائی ہے، تاہم مسئلہ دیکھ کر موزوں صورت اپنائی گئی ہے۔

ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ گھومتے جسم کا گھمیری جمود نا صرف کمیت بلکہ کمیت کی تقسیم پر بھی منحصر ہو گا۔ آئیں ایک ایسی مثال دیکھیں جس کو آپ حقیقتاً محسوس کر سکتے ہیں۔ ایک لمبی اور بھاری سلاخ، پہلے طولی محور پر (شکل 11a.10) اور اس کے بعد وسطی نقطہ سے گزرتی اور سلاخ کو عمودی محور پر (شکل 11b.10) گھمائیں۔ دونوں صورتوں میں کمیت ایک جتنی ہے، تاہم پہلی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔ پہلی صورت میں کمیت کی تقسیم محور گھماو کے زیادہ قریب ہے؛ یوں شکل 11a.10 میں سلاخ کا گھمیری جمود شکل 11b.10 سے کم ہو گا جس کی بدولت شکل 11a.10 میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔ کم گھمیری جمود کی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آزمائش ۴

تین کرہ انتصابی محور کے گرد گھومتے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر کمیت کے مرکز سے محور تک عمودی فاصلہ بھی دیا گیا ہے۔ اس محور پر گھمیری جمود کے لحاظ سے کمیتوں کی درجہ بندی کریں۔ زیادہ قیمت اول رکھیں۔



۴.۵ گھمیری جمود کا حساب

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ان اجسام کا گھمیری جمود معلوم کر پائیں گے جو جدول 1.10 میں دیے گئے ہیں۔

۲. جسم کے کمیتی ٹکڑوں پر تکمل لے کر جسم کا گھمیری جمود تلاش کر پائیں گے۔

۳. جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو سے ہٹ کر متوازی محور کے لئے متوازی محور مسئلے کا اطلاق کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- انفرادی ذروں پر مشتمل جسم کے گھمیری جمود کی تعریف:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

اور جس جسم میں کمیت کی تقسیم استمراری ہو ذیل ہے۔

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m$$

انفرادی ذرے کا محور گھماو سے عمودی فاصلہ r_i ہے۔اسی طرح تکمل میں کمیت کے ٹکڑے کا محور گھماو سے عمودی فاصلہ r ہے اور تکمل پورے جسم پر لیا جاتا ہے تاکہ کمیت کے تمام ٹکڑے شامل کیے جائیں۔

- کسی بھی محور پر جسم کے گھمیری جمود I اور مرکز کمیت سے گزرتی متوازی محور پر اسی جسم کے گھمیری جمود کا تعلق:

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2$$

مسئلہ متوازی محور دیتا ہے۔دو محوروں کے بیچ عمودی فاصلہ h ہے،اور مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو پر جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے۔مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو سے جتنا دور اصل محور گھماو ہٹائی گئی،، ہم h کو وہ فاصلہ تصور کر سکتے ہیں۔

گھمیری جمود کا حساب

چند ذروں پر مشتمل استوار جسم کا گھمیری جمود، محور گھماو پر، مساوات ۴.۳۳ $(I = \sum m_i r_i^2)$ دیتی ہے؛یوں ہم ہر ذرے کا mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ لیتے ہیں۔(یاد رکھیں کہ محور گھماو سے ذرے کا عمودی فاصلہ r ہو گا۔)

اگر جسم قریب قریب انتہائی زیادہ ذروں پر مشتمل ہو (جسم استمراری ہو گا)، مساوات ۴.۳۳ کا استعمال بہت لمبا کام ہو گا جس کے لئے کمپیوٹر درکار ہو گا۔بہتر یہ ہو گا، ہم مساوات ۴.۳۳ کے مجموعہ کی جگہ تکمل لے کر گھمیری جمود کی تعریف ذیل کریں۔

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m \qquad \text{(گھمیری جمود، استمراری جسم)} \tag{۴.۳۵}$$

جدول 2.10 میں عام شکل و صورت کے نو اجسام کے لئے، تکمل کے نتائج پیش کیے گئے ہیں اور مستمل محور گھماو کی نشاندہی کی گئی ہے۔

مسئلہ متوازی محور

فرض کریں ہم دی گئی محور گھماو پر ایک جسم کا، جس کی کمیت M ہو، گھمیری جمود I جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً، ہم مساوات ۴.۳۵ کے تکمل سے I حاصل کر سکتے ہیں۔ تاہم، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی ایسی محور گھماو، جو دی گئی محور کے متوازی ہو، پر گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ جانتے ہوئے، ایک آسان راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔ مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو اور دی گئی محور کے بیچ عمودی فاصل h ہونے کی صورت میں (یاد رہے، دونوں محور آپس میں متوازی ہیں) دی گئی محور پر گھمیری جمود I ذیل ہو گا۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 \qquad \text{(مسئلہ متوازی محور)} \tag{۴.۳۶}$$

یوں تصور کریں جیسا مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو کو دور ہٹا کر h فاصلے پر رکھا گیا ہے۔ یہ مساوات **مسئلہ متوازی محور**[۱۵] کہلاتی ہے۔

مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

شکل 12.10 میں اختیاری شکل و صورت جسم کا، جس کا مرکز کمیت O ہے، عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ محددی نظام کا مبدا O پر رکھیں۔ شکل کے مستوی کو عمودی، O سے گزرتی، ایک محور لیں؛ اس محور کو متوازی، نقطہ P سے گزرتی، دوسری محور لیں۔ نقطہ P کے محدد a اور b ہیں۔

فرض کریں کسی عمومی محدد x اور y پر $\mathrm{d}m$ کمیت کا چھوٹا ٹکڑا ہے۔ نقطہ P پر محور کے لحاظ سے جسم کا گھمیری جمود مساوات ۴.۳۵ کے تحت ذیل ہو گا،

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \,\mathrm{d}m$$

جس کو ترتیب نو کے بعد ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = \int (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}m - 2a \int x \,\mathrm{d}m - 2b \int y \,\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2) \,\mathrm{d}m \tag{۴.۳۷}$$

مرکز کمیت کی تعریف (مساوات 9.9) کہتی ہے، مساوات ۴.۳۷ کے درمیانے دو تکمل مرکز کمیت (ایک مستقل سے ضرب کر کے) دیتے ہیں، لہٰذا یہ تکمل (انفرادی طور پر) صفر کے برابر ہوں گے۔ چونکہ O سے $\mathrm{d}m$ تک فاصلہ R ہے جو $x^2 + y^2$ کے برابر ہے لہٰذا پہلا تکمل $I_{\text{مرکز کمیت}}$ دیگا۔ شکل 12.10 کو دیکھ کر ہم جانتے ہیں مساوات ۴.۳۷ کا آخری تکمل Mh^2 کے برابر ہے، جہاں جسم کی کل کمیت M ہے۔ یوں مساوات ۴.۳۷ تخفیف کے بعد مساوات ۴.۳۶ دیتی ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش ۵

شکل ?? میں کتاب کی طرح جسم (جس کا ایک ضلع دوسرے سے لمبا ہے) اور جسم کے رخ کو عمودی چار ممکن محور گھماو دکھائے گئے ہیں۔ جسم کے گھمیری جمود کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، ان محور کی درجہ بندی کریں۔

---

[۱۵] parallelaxistheorem

نمونی سوال ۴.۶: **دو ذروی جسم کا گھمیری جمود**

شکل 13a.10 میں کمیت m کے دو ذروں پر مشتمل استوار جسم دکھایا گیا ہے۔ قابل نظر انداز کمیت کا سلاخ، جس کی لمبائی L ہے کمیتوں کے بیچ لگا ہے۔

(ا) سلاخ کو عمودی، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے) پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصور

جسم صرف دو ذروں پر (جن کی کمیت ہے) مشتمل ہے، لہٰذا ہم تکمل کے بجائے مساوات ۴.۳۳ استعمال کر کے گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم انفرادی کمیت کا گھمیری جمود تلاش کر کے دونوں کا مجموعہ لیں گے۔

حساب: محور گھماو سے $\frac{1}{2}L$ عمودی فاصلے پر کمیت m کے دو ذروں کا (مجموعی) گھمیری جمود ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mL^2 \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) پہلی محور کو متوازی، سلاخ کے بائیں سر سے گزرتی، محور گھماو (شکل 13b.10) پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصورات

اتنی آسان صورت میں I با آسانی دونوں طریقوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ پہلا طریقہ جزوا کی طرح ہے۔ دوسرا، زیادہ طاقتور طریقہ مسئلہ متوازی محور استعمال کرتا ہے۔

پہلا طریقہ: ہم جزوا کی طرح I معلوم کرتے ہیں، تاہم اب سلاخ کے بائیں سر پر موجود ذرے کا r_i صفر اور دائیں سر پر ذرے کا L ہو گا۔ مساوات ۴.۳۳ اب ذیل دیگی۔

$$I = m(0)^2 + m(L)^2 = mL^2 \qquad (\text{جواب})$$

دوسرا طریقہ: ہم مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو پر جسم کا گھمیری جمود جانتے ہیں اور دوسرا محور مرکز کمیت سے گزرتی محور کو متوازی ہے لہٰذا مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= mL^2 \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

نمونی سوال ۴.۷: **یکساں سلاخ کا گھمیری جمود با تکمل**

کمیت M اور لمبائی L کی یکساں سلاخ محور x پر یوں رکھا گیا ہے کہ سلاخ کا وسط مبدا پر ہو (شکل 14.10)۔

(ا) سلاخ کے وسط پر، سلاخ کو عمودی محور گھماو پر سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصورات

(1) سلاخ انتہائی زیادہ ذروں پر، جو محور گھماو سے انتہائی زیادہ تعداد کے مختلف فاصلوں پر موجود ہیں، مشتمل ہے۔ ہم ہر ذرے کا انفرادی گھمیری جمود ہرگز معلوم نہیں کرنا چاہتے۔ (ہم اپنی باقی تمام زندگی اس کام میں گزار سکتے ہیں۔) لہٰذا، ہم محور گھماو سے r فاصلے پر کمیت کے ایک چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}m$ کے لئے گھمیری جمود کا عمومی الجبرائی فقرہ: $r^2\,\mathrm{d}m$ لکھتے ہیں۔ (2) ایک ایک کرکے تمام چھوٹے حصوں کے گھمیری جمود جمع کرنے کے بجائے، ہم اس فقرے کا تکمل لے کر مجموعہ معلوم کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۳۵ سے ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{۴.۳۸}$$

(3) سلاخ یکساں ہے اور محور گھماو عین مرکز کمیت سے گزرتا ہے، لہٰذا ہم گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ معلوم کر رہے ہیں۔

حساب: ہم محدد x کے لحاظ سے تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں (نا کہ کمیت m کے لحاظ سے جیسا تکمل کہتا ہے)، لہٰذا کمیت کے ٹکڑے $\mathrm{d}m$ کا سلاخ کے ہمراہ لمبائی $\mathrm{d}x$ کے ساتھ رشتہ درکار ہوگا۔ (شکل 14.10 میں ایک ایسا ٹکڑا دکھایا گیا ہے۔) سلاخ یکساں ہے، لہٰذا تمام ٹکڑوں کی کمیت اور لمبائی کی نسبت برابر ہوگی۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\frac{\text{ٹکڑے کی کمیت}\ \mathrm{d}m}{\text{ٹکڑے کی لمبائی}\ \mathrm{d}x} = \frac{\text{سلاخ کی کمیت}\ M}{\text{سلاخ کی لمبائی}\ L}$$

یا

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}x$$

مساوات ۴.۳۸ میں r کی جگہ x اور $\mathrm{d}m$ کی جگہ درج بالا نتیجہ ڈال کر، سلاخ کے ایک سر سے دوسرے سر تک (یعنی $x = -\frac{L}{2}$ تا $x = \frac{L}{2}$) تکمل لیتے ہوئے کمیت کے تمام ٹکڑے شامل کرتے ہیں۔ یوں ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{12}ML^2 \qquad \text{(جواب)}
\end{aligned}$$

(ب) ایک نئی محور گھماو پر، جو سلاخ کے بائیں سر سے گزرتی اور سلاخ کو عمودی ہے، سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصورات

ہم محور x کا مبدا سلاخ کے بائیں سر پر منتقل کر کے تکمل $0 = x$ تا $x = L$ لے کر I معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم، ہم زیادہ آسان اور طاقتور مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) استعمال کرتے ہیں، جس میں محور گھماو کی سمت بندی تبدیل کیے بغیر اسے دوسری جگہ منتقل کرتے ہیں۔

حساب: مرکز کمیت سے گزرتی محور کے متوازی، سلاخ کے بائیں سر پر، نئی محور رکھ کر ہم مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم جزو اسے جانتے ہیں کہ $I_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{12}ML^2$ ہے۔ شکل 14.10 میں سلاخ کے وسط سے نئی محور گھماو تک فاصلہ $\frac{1}{2}L$ ہے۔ یوں مساوات ۴.۳۶ ذیل دیگی۔

$$
\begin{aligned}
I &= I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\
&= \tfrac{1}{3}ML^2 \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}
$$

در حقیقت، یہ نتیجہ سلاخ کے بائیں یا دائیں سر پر ہر، سلاخ کو عمودی، محور گھماو کے لئے درست ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۸: **گھمیری جمودی توانائی؛ چکری پرکھ**

مشین کے بڑے حصوں کا، جو لمبے عرصہ تیز رفتار سے چکر کاٹتے ہوں، معائنہ چکری پرکھ کے نظام میں کرنا ضروری ہے۔ اس نظام میں، فولادی بیلن کے اندر، جس کی اندرونی جانب سیسہ کی اینٹیں نصب ہوں، مشین کے حصے کو مخصوص چکری رفتار تک (جس پر حصے کو پرکھنا مقصود ہو) لایا جاتا ہے۔ اس دوران بیلن کا منہ فولادی ڈھکن سے بند رکھا جاتا ہے۔ اگر مشین کا حصہ مطلوبہ چکری رفتار برداشت نہ کرتے ہوئے ٹوٹ جائے، اس کے ٹکڑے سیسہ کی ملائم اینٹوں میں دھنس کر محفوظ ہوں گے، جن کا معائنہ بعد میں کرنا ممکن ہوگا۔

۱۹۸۵ء میں ایک ادارہ نے، جو مشین پرکھنے کا کام کرتا ہے، $272\,\text{kg}$ ٹھوس فولادی (قرص شکل کا) مدور، جس کا رداس $R = 38.0\,\text{cm}$ تھا، پرکھنے کا کام لیا۔ عین $\omega = 14000$ چکر فی منٹ کی زاویائی رفتار کو پہنچ کر **آزمائش کار معمار**[۱۶] ایک آواز سنتا ہے۔ تفتیش کرنے پر معلوم ہوا سیسہ کی اینٹیں کمرے سے باہر بکھری پڑی ہیں، کمرے کا دروازہ گاڑیاں کھڑی کرنے کی جگہ میں پڑا ملا، ایک سیسہ کی اینٹ پڑوسی کے باورچی خانے کی دیوار توڑ کر اندر پہنچی تھی، ادارے کی عمارت کے ستون ناکارہ ہو چکے تھے، چکر خانہ کا پکا فرش $0.5\,\text{cm}$ زمین میں دھنس چکا تھا، اور چکری نظام کا $900\,\text{kg}$ ڈھکن اڑ کر چھت سے گزرتے ہوئے بالائی منزل میں داخل ہونے بعد واپس چکری نظام پر گر کر پڑا تھا۔ خوش قسمتی سے کوئی بھی ٹکڑا آزمائش کار معمار کے کمرے کی طرف نہیں گیا۔

اس دھماکے میں کتنی توانائی خارج کی گئی؟

کلیدی تصور

خارج توانائی 14000 چکر فی منٹ پر مدور کی گھمیری حرکی توانائی K کے برابر ہوگی۔

---

[۱۶] testengineer

حل: ہم مساوات ۴.۳۴ سے K کی قیمت $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ تلاش کرتے ہیں، لیکن اس سے پہلے مدور کا گھمیری جمود I جاننا ضروری ہے۔ قرص کا گھمیری جمود جدول 2c.10 کے تحت $(I = \frac{1}{2}MR^2)$ ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(272\,\mathrm{kg})(0.38\,\mathrm{m})^2 = 19.64\,\mathrm{kg\,m^2}$$

مدور کی زاوی رفتار، ریڈیئن ناپ میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\omega &= (\text{14000 چکر فی منٹ})(\text{2}\pi\text{ ریڈیئن فی چکر})\left(\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}}\right)\\ &= 1.466\times10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

یوں مساوات ۴.۳۴ کے تحت خارج توانائی ذیل ہے (جو بہت بڑی مقدار ہے)۔

$$\begin{aligned}K &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19.64\,\mathrm{kg\,m^2})(1.466\times10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2\\ &= 2.1\times10^7\,\mathrm{J} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

□

۴.۶ قوت مروڑ

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ جسم پر قوت مروڑ میں قوت اور، محور گھماو سے قوت کے نقطہ اطلاق تک کا، تعین گر سمتیہ شامل ہیں۔

۲. (ا) تعین گر سمتیہ اور سمتیہ قوت کے بیچ زاویے کی مدد سے، (ب) خط عمل اور قوت کے معیار اثر کے بازو کی مدد سے، اور (ج) تعین گر سمتیہ کو قوت کے عمودی جزو کی مدد سے قوت مروڑ تلاش کر پائیں گے۔

۳. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ جاننے کے لئے محور گھماو جاننا لازم ہے۔

۴. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ کو مثبت یا منفی علامت مختص کی جاتی ہے، جس کا دارومدار اس رخ پر ہو گا جس رخ قوت مروڑ جسم کو محور گھماو پر گھمانے کی کوشش کرتی ہے (یاد رہے، "گھڑیاں منفی ہیں")۔

۵. جہاں ایک سے زیادہ قوت مروڑ جسم پر عمل کرتی ہوں، صافی قوت مروڑ حاصل کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- قوت $\vec{F}$ کی، محور گھماو پر جسم کو گھمانے کی، کوشش کو قوت مروڑ کہتے ہیں۔ اگر محور گھماو کے لحاظ سے، $\vec{F}$ جس نقطہ پر عمل کرتی ہو، اس نقطے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہو، تب قوت مروڑ کی قدر ذیل ہو گی،

$$\tau = rF_t = r_\perp R = rF\sin\phi$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی جزو F_t ہے اور ϕ قوت $\vec{F}$ اور سمتیہ $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ہے۔ محور گھماو اور $\vec{F}$ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ $r_\perp$ ہے۔ مبسوط لکیر کو $\vec{F}$ کا "خط عمل"، اور $r_\perp$ کو $\vec{F}$ کا "معیار اثر" کہتے ہیں۔ اسی طرح r کو F_t کا معیار اثر کہیں گے۔

- قوت مروڑ کی اکائی نیوٹن میٹر $(\mathrm{N\,m})$ ہے۔ ساکن جسم کو محور گھماو پر خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرنے والی قوت مروڑ τ مثبت ہو گی، گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرنے والی منفی ہو گی۔

قوت مروڑ

دروازے کا دستہ چول سے دور، کسی مقصد سے، رکھا جاتا ہے۔ دروازہ کھولنے کے لئے قوت لگانی ضروری ہے، تاہم قوت کا رخ اور لگانے کا مقام بھی اہمیت رکھتے ہیں۔ اگر آپ، دستے کے بجائے، چول کے قریب قوت کا اطلاق کریں یا دروازے کی سطح کو قوت $90°$ پر لاگو نہ کریں، دروازہ کھولنے کے لئے آپ کو اس قوت سے زیادہ قوت درکار ہو گی، جو دستے پر دروازے کی سطح کو عمودی درکار چاہیے۔

شکل 16a.10 میں جسم کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ جسم، O سے گزرتی، تراش کو عمودی محور گھماو پر، آزادی سے گھوم سکتا ہے۔ نقطہ P پر، جس کا O کے لحاظ سے تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے، قوت $\vec{F}$ کا اطلاق کیا گیا ہے۔ $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے رخ آپس میں زاویہ ϕ پر ہیں۔ (ہم اپنی آسانی کے لئے صرف ان قوت کی بات کرتے ہیں، جن کا محور گھماو کو متوازی جزو نہیں پایا جاتا؛ یوں $\vec{F}$ صفحے کی سطح میں ہو گی۔)

یہ جاننے کے لئے کہ محور گھماو پر $\vec{F}$ جسم کو کیسے گھماتی ہے، ہم $\vec{F}$ کو دو اجزاء میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16b.10)۔ ایک جزو، جو رداسی جزو F_r کہلاتا ہے، $\vec{r}$ کے ہمراہ ہو گا۔ چونکہ یہ جزو O سے گزرتی لکیر کے ہمراہ ہے، لہٰذا یہ گھماو میں کردار ادا نہیں کرتا۔ (اگر آپ دروازے کو دروازے کے سطح کے ہمراہ کھینچیں، دروازہ کبھی بھی نہیں کھلے گا۔) $\vec{F}$ کا دوسرا جزو، جو مماسی جزو F_t کہلاتا ہے، $\vec{r}$ کو عمودی ہے اور اس کی قدر $F_t = F\sin\phi$ ہے۔ یہ جزو گھماو کا سبب بنتا ہے۔

قوت مروڑ کا حساب۔ $\vec{F}$ کی جسم گھمانے کی صلاحیت، قوت $\vec{F}$ کے مماسی جزو F_t کی قدر کے علاوہ O سے (قوت کے) اطلاقی نقطے کے فاصلے پر منحصر ہے۔ ان دونوں وجوہات کو شامل کرنے کی خاطر ہم (درج ذیل) ایک نئی مقدار متعارف کرتے ہیں جو **قوت مروڑ**[17] τ کہلاتی ہے، جو دو جزو ضربیوں کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$\tau = (r)(F\sin\phi) \tag{۴.۳۹}$$

قوت مروڑ کا حساب (درج ذیل) دو معادل طریقوں:

$$\tau = (r)(F\sin\phi) = rF_t \tag{۴.۴۰}$$

اور

$$\tau = (r)(F\sin\phi) = r_\perp F \tag{۴.۴۱}$$

[17] torque

سے ممکن ہے، جہاں O پر محور گھماو اور $\vec{F}$ سمتیہ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ $r_{\perp}$ ہے (شکل 16c.10)۔ اس مبسوط لکیر کو $\vec{F}$ کا **خط عمل**[۱۸]، اور $r_{\perp}$ کو $\vec{F}$ کا **معیار اثر کا بازو**[۱۹] کہتے ہیں۔ شکل 16b.10 میں دکھایا گیا ہے کہ ہم $\vec{r}$ کی قدر r کو جزو قوت F_t کا معیار اثر کا بازو کہہ سکتے ہیں۔

جب آپ کسی جسم، مثلاً پیچ کس، پر اس نیت سے قوت لگاتے ہیں کہ یہ گھومے، آپ قوت مروڑ لاگو کرتے ہیں۔ قوت مروڑ کی بین الاقوامی اکائی نیوٹن میٹر $(\mathrm{N\,m})$ ہے۔ انتباہ: نیوٹن میٹر کی اکائی کام کے لئے بھی مستعمل ہے۔ تاہم، قوت مروڑ اور کام دو مختلف مقداریں ہیں۔ کام کے لئے عام طور جاول اکائی $(1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m})$ استعمال کی جاتی ہے جبکہ قوت مروڑ کے لئے صرف نیوٹن میٹر اکائی استعمال ہو گی۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ باب 11 میں قوت مروڑ کے لئے سمتیہ ترقیم استعمال کی جائے گی؛ یہاں واحد محور پر گھماو کی بات کی جائے گی لہٰذا الجبرائی علامت استعمال کی جائے گی۔ اگر قوت مروڑ خلاف گھڑی گھماو پیدا کرنے کی کوشش کرے، یہ مثبت ہو گی اور اگر گھڑی وار کوشش کرے تب منفی ہو گی۔ (حصہ 1.10 میں ہم نے کہا "گھڑیاں منفی ہیں"۔ یہ فقرہ یہاں بھی کارآمد ہے۔)

اصول انطباق (جس کا ذکر باب 5 میں کیا گیا) کو قوت مروڑ مطمئن کرتے ہیں: جب جسم پر کئی قوت مروڑ عمل کرتی ہوں، جسم پر **صافی قوت مروڑ**[۲۰] (یا **حاصل قوت مروڑ**[۲۱]) انفرادی قوت مروڑ کا مجموعہ ہو گا۔ صافی قوت مروڑ کی علامت $\tau_{\text{صافی}}$ ہے۔

آزمائش ۶

میٹر سلاخ کا فضائی جائزہ شکل ؟؟ میں پیش ہے؛ سلاخ کا چول $20\,\mathrm{cm}$ پر پایا جاتا ہے۔ سلاخ پر پانچوں قوت افقی اور ان کی قدریں برابر ہیں۔ اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی ان کی پیدا قوت مروڑ کے لحاظ سے کریں۔

۷.۴ نیوٹن کا قانون دوم برائے گھماو

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. گھماو کی صورت میں جسم پر صافی قوت مروڑ کا، جسم کے گھمیری جمود اور گھمیری اسراع کے ساتھ، رشتہ نیوٹن کے دوسرے قانون سے جان پائیں گے۔ تمام مقادیر مختص محور گھماو کے لحاظ سے ہیں۔

کلیدی تصور

---

[۱۸] lineofaction
[۱۹] momentarm
[۲۰] nettorque
[۲۱] resultanttorque

- نیوٹن کے دوسرے قانون کا گھمیری مماثل ذیل ہے،

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$$

جہاں ذرے یا استوار جسم پر صافی قوت مروڑ $\tau_{\text{صافی}}$ ہے، محور گھماو پر ذرے یا جسم کا گھمیری جمود I ہے، اور α اس محور پر ماحصل زاوی اسراع ہے۔

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو

قوت مروڑ استوار جسم کو گھما سکتی ہے، جیسا آپ دروازہ قوت مروڑ سے کھولتے اور بند کرتے ہیں۔ ہم استوار جسم پر صافی قوت مروڑ $\tau_{\text{صافی}}$ اور محور گھماو پر جسم کی اس زاوی اسراع α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں جو یہ قوت مروڑ پیدا کرتی ہے۔ ہم نیوٹن کے دوسرے قانون $(F_{\text{صافی}} = ma)$ کو دیکھ کر، جو محدد ی محور پر کمیت m کے جسم پر صافی قوت $F_{\text{صافی}}$ سے پیدا جسم کی خطی اسراع a کا تعلق دیتا ہے، ایسا کریں گے۔ ہم $F_{\text{صافی}}$ کی جگہ $\tau_{\text{صافی}}$، m کی جگہ I، اور a کی جگہ α رکھ کر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha \qquad (\text{نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو}) \tag{۴.۴۲}$$

مساوات ۴.۴۲ کا ثبوت

پہلے شکل 17.10 میں پیش سادہ صورت کے لئے مساوات ۴.۴۲ ثابت کرتے ہیں۔ بلا کمیت سلاخ اور اس کے ایک سر پر کمیت m کا ذرہ مل کر استوار جسم دیتے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی r ہے اور یہ اپنے دوسرے سر پر، سطح صفحہ کو عمودی محور گھماو (دھرے) پر، گھوم سکتی ہے۔ یوں، ذرہ صرف دائری راہ پر، جس کے وسط پر محور گھماو ہے، حرکت کا مجاز ہے۔

ذرے پر قوت $\vec{F}$ عمل کرتی ہے۔ تاہم، ذرہ صرف دائری راہ پر حرکت کر سکتا ہے، لہٰذا قوت کا صرف مماسی جزو F_t (جو دائری راہ کو مماس سے) ذرے کو اس راہ پر مسرع کر سکتا ہے۔ ہم F_t اور اس راہ پر ذرے کے مماسی اسراع a_t کا تعلق نیوٹن کے دوسرے قانون سے لکھتے ہیں۔

$$F_t = ma_t$$

ذرے پر قوت مروڑ، مساوات ۴.۴۰ کے تحت ذیل ہوگا۔

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

مساوات ۴.۲۲ $(a_t = \alpha r)$ سے اس کو ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \tag{۴.۴۳}$$

دائیں ہاتھ قوسین میں بند مقدار، محور گھماو پر ذرے کا گھمیری جمود ہے (مساوات ۴.۳۳ دیکھیں، تاہم یہاں صرف ایک ذرے کی بات کی جا رہی ہے)۔ یوں گھمیری جمود کے لئے I لکھ کر مساوات ۴.۴۳ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\tau = I\alpha \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۴۴}$$

جہاں ایک سے زیادہ قوت ذرے پر عمل کرتی ہوں مساوات ۴.۴۴ ذیل صورت اختیار کرے گی، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۴۵}$$

چونکہ ہر جسم انفرادی ذروں کا مجموعہ ہو گا لہٰذا اس مساوات کو کسی بھی استوار جسم تک، جو مقررہ محور گھماو پر گھومتا ہو، وسعت دی جا سکتی ہے۔

آزمائش ۷

شکل ؟؟ میں میٹر سلاخ کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ سلاخ کے وسط سے بائیں جانب نقطہ چول ہے جس پر سلاخ چکر کاٹ سکتی ہے۔ سلاخ پر دو افقی قوت $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ لاگو کی جاتی ہیں۔ صرف $\vec{F}_1$ دکھائی گئی ہے۔ قوت $\vec{F}_2$ سلاخ کو عمودی ہے اور سلاخ کے دائیں سر پر لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ نہ گھومنے کی صورت میں (ا) $\vec{F}_2$ کا رخ کیا ہو گا اور (ب) کیا F_2 کی قیمت F_1 سے کم ہو گی، زیادہ ہو گا، یا اس کے برابر ہو گی؟

نمونی سوال ۴.۹: نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماو کا کولا میں استعمال

کولا کشتی کا وہ داو ہے جس میں پہلوان دوسرے کو کولہے کی زد پر لا کر گراتا ہے۔ آئیں پہلوانوں کی کشتی کو طبیعی دان کے نقطہ نظر سے دیکھیں۔ کولہے پر $80\,\mathrm{kg}$ حریف کو چڑھا کر $\vec{F}$ قوت کے ساتھ دائیں کولہے پر نقطہ گھماو (محور گھماو) رکھ کر $d_1 = 0.30\,\mathrm{m}$ معیار اثر کا بازو استعمال کرتے ہوئے، آپ حریف کو زمین پر مارتے ہیں (شکل 18.10)۔ آپ نقطہ گھماو پر اس کو $\alpha = 6.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ زاوی اسراع سے (جو شکل میں گھڑی وار ہے) گھمانا چاہتے ہیں۔ فرض کریں نقطہ گھماو کے لحاظ سے اس کا گھمیری جمود $I = 15\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔

(ا) زمین پر گرانے سے قبل اگر آپ حریف کو آگے جھکا کر اس کا مرکز کمیت اپنے کولہے پر رکھیں تو $\vec{F}$ کی قدر کیا ہو گی (شکل 18a.10)؟

کلیدی تصور

ہم $\boldsymbol{F}$ کا زاوی اسراع سے رشتہ نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماو $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ سے جانتے ہیں۔

حساب: زمین سے حریف کے پاوں اٹھنے کے بعد، ہم کہہ سکتے ہیں اس پر تین قوت عمل پیرا ہوں گی: آپ کی کھینچ $\vec{F}$، نقطہ گھماو پر آپ کی حریف پر عمودی قوت $\vec{N}$ (شکل 18.10 میں اسے نہیں دکھایا گیا)، اور تجاذبی قوت $\vec{F}_g$۔ نقطہ گھماو پر تینوں قوتوں کی قوت مروڑ جانتے ہوئے ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ استعمال کر پائیں گے۔

مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_{\perp}F)$ کے تحت آپ کی کھینچ $\vec{F}$ سے پیدا قوت مروڑ $-d_1F$ ہو گی، جہاں d_1 معیار اثر کا بازو $r_{\perp}$ ہے، اور منفی علامت کہتی ہے کہ یہ مروڑ گھڑی وار گھماو کی کوشش کرتی ہے۔ قوت $\vec{N}$ نقطہ گھماو سے گزرتی ہے لہٰذا اس کا معیار اثر کا بازو $r_{\perp} = 0$ ہو گا اور یوں اس کی قوت مروڑ بھی صفر ہو گی۔ تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ حریف کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے۔ مرکز کمیت عین نقطہ گھماو پر ہے لہٰذا $\vec{F}_g$ کا معیار اثر کا بازو

$r_\perp = 0$ ہو گا اور یوں اس کی قوت مروڑ بھی صفر ہو گی۔ یوں حریف پر صرف آپ کی کھینچ $\vec{F}$ کی قوت مروڑ عمل کرتی ہے اور ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$-d_1F = I\alpha$$

یوں ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} F &= \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\,\mathrm{kg\,m^2})(-6.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}})}{0.30\,\mathrm{m}} \\ &= 300\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) اگر گرنے سے پہلے آپ کا حریف سیدھا کھڑا رہے تاکہ $\vec{F}_g$ کا معیار اثر کا بازو $d_2 = 0.12\,\mathrm{m}$ ہو تب $\vec{F}$ کی قدر کیا ہو گا (شکل 18b.10)؟

کلیدی تصور

چونکہ $\vec{F}_g = mg$ کا معیار اثر کا بازو اب صفر نہیں، اس کی قوت مروڑ اب d_2mg ہو گی جو خلاف گھڑی ہونے کی بنا مثبت ہے۔

حساب: ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ اب ذیل لکھتے ہیں

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha$$

جو ذیل دیگا۔

$$\begin{aligned} F &= 300\,\mathrm{N} + \frac{(0.12\,\mathrm{m})(80\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})}{0.30\,\mathrm{m}} \\ &= 613.5\,\mathrm{N} \approx 610\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

اس نتیجے کے تحت اگر آپ حریف کو جھکا کر اس کا مرکز کمیت اپنے کولہے پر رکھ نہ سکیں، آپ کو کافی زیادہ قوت لگانی ہو گی۔ ایک اچھا پہلوان یہ حقیقت جانتا ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۱۰: **نیوٹن کا دوسرا قانون، قوت مروڑ، قرص**

کمیت $M = 2.5\,\mathrm{kg}$ اور رداس $R = 20\,\mathrm{cm}$ کا یکساں قرص مقررہ افقی دھرے پر نصب شکل 19a.10 میں دکھایا گیا ہے۔ قرص کے چکا[۲۲] پر بلا کمیت دھاگا لپیٹ کر اس سے $m = 1.2\,\mathrm{kg}$ کمیت کی اینٹ آویزاں کی گئی ہے۔ ساکن اینٹ رہا کی جاتی ہے۔ اینٹ کا اسراع، قرص کا زاوی اسراع، اور دھاگے میں تناو تلاش کریں۔ دھاگہ پھسلتا نہیں اور دھرا بے رگڑ ہے۔

---

[۲۲] rim

کلیدی تصورات

(1) اینٹ کو ایک نظام تصور کر کے اس کی اسراع a اور اس پر عمل پیرا قوت کا تعلق ہم نیوٹن کے قانون دوم $(\vec{F}_{\text{صافی}} = m\vec{a})$ سے لکھ سکتے ہیں۔(2) قرص کو ایک نظام تصور کرتے ہوئے ہم اس کے زاوی اسراع α اور اس پر قوت مروڑ کا تعلق نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماو $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ سے لکھ سکتے ہیں۔(3) اینٹ اور قرص کی حرکات کو ملانے کے لئے ہم اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہیں کہ اینٹ کا خطی اسراع a اور قرص کے چکا کا (مماسی) خطی اسراع a_t برابر ہیں۔(الجھنے سے بچنے کی خاطر ہم اسراع کی قدروں اور الجبرائی علامتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔)

اینٹ پر قوتیں: شکل 19b.10 کے آزاد جسمی خاکے میں اینٹ پر لاگو قوتیں دکھائی گئی ہیں: دھاگے سے قوت $\vec{T}$، اور تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ کی قدر mg ہے۔ انتصابی y محور کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم $F_{\text{صافی},y} = ma_y$ لکھتے ہیں:

$$T - mg = m(-a) \tag{۴.۴۶}$$

جہاں (محور y کے ہمراہ نیچے رخ) اسراع کی قدر a ہے۔ تاہم، ہم اس مساوات کو a کے لئے حل نہیں کر سکتے، چونکہ اس میں دوسرا نامعلوم متغیر T بھی پایا جاتا ہے۔

قرص پر قوت مروڑ: گزشتہ مرتبہ جب ہم محور y سے آگے بڑھ نہیں سکے، ہم نے محور x کا سہارا لیا۔ اس مرتبہ ہم قرص کے گھماو کا سہارا اٹھاتے ہوئے نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ میں لکھتے ہیں۔ قوت مروڑ اور گھمیری جمود I تلاش کرنے کے لئے، ہم نقطہ O پر، قرص کو عمودی اور اس کے وسط سے گزرتی لکیر، محور گھماو لیتے ہیں (شکل 19c.10)۔

مساوات ۴.۴۰ $(\tau = rF_t)$ قوت مروڑ دیتی ہے۔ قرص پر تجاذبی قوت اور دھرے کی قوت دونوں قرص کے وسط پر عمل کرتے ہیں لہٰذا ان کا فاصلہ $r = 0$ اور یوں قوت مروڑ صفر ہوں گی۔ قرص پر دھاگے کی قوت $\vec{T}$ فاصلے $r = R$ پر قرص کے چکا پر مماسی عمل کرتی ہے۔ اس طرح، اس کی قوت مروڑ $-RT$ ہو گی؛ چونکہ قوت مروڑ قرص کو ساکن حالت سے گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرتی ہے لہٰذا اس کی علامت منفی ہے۔ منفی (گھڑی وار) زاوی اسراع کی قدر α لیتے ہیں۔ جدول 2c.10 کے تحت قرص کا گھمیری جمود $\frac{1}{2}MR^2$ ہے۔ یوں عمومی مساوات $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ ذیل لکھی جائے گی،

$$-RT = \tfrac{1}{2}MR^2(-\alpha) \tag{۴.۴۷}$$

بظاہر، یہ مساوات کسی کام کی نہیں ہے؛ اس میں دو نامعلوم متغیرات α اور T پائے جاتے ہیں جبکہ ہمیں a چاہیے۔ طبیعی علم بروئے کار لاتے ہوئے ہم اس کو فائدہ مند ٹھہرا سکتے ہیں: چونکہ دھاگہ پھسلتا نہیں، اینٹ کے خطی اسراع کی قدر a اور قرص کے چکا کے (مماسی) اسراع کی قدر a_t برابر ہوں گی۔ یوں، مساوات ۴.۲۲ $(a_t = \alpha r)$ کے تحت $\alpha = a/R$ ہو گا۔ مساوات ۴.۴۷ میں یہ معلومات ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \tfrac{1}{2}Ma \tag{۴.۴۸}$$

نتائج کی یکجائی: مساوات ۴.۴۶ اور مساوات ۴.۴۸ ملا کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$a = g\frac{2m}{M+2m} = (9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})\frac{(2)(1.2\,\mathrm{kg})}{2.5\,\mathrm{kg}+(2)(1.2\,\mathrm{kg})}$$
$$= 4.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})$$

اب مساوات ۴.۴۸ سے T حاصل ہو گا۔

$$T = \tfrac{1}{2}Ma = \tfrac{1}{2}(2.5\,\mathrm{kg})(4.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})$$
$$= 6.0\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب})$$

جیسا ہمیں توقع کرنی چاہیے، گرتی اینٹ کا اسراع a آزادانہ گرنے کے اسراع g سے کم، اور دھاگے میں تناو $T = 6.0\,\mathrm{N}$ لٹکی اینٹ پر تجاذبی قوت $mg = 11.8\,\mathrm{N}$ سے کم ہے۔ ساتھ ہی ہم دیکھتے ہیں کہ a اور T دونوں پر قرص کی کمیت پر منحصر ہیں جبکہ ان پر رداس کا کوئی اثر نہیں۔

تصدیق کے طور پر، ہم دیکھتے ہیں کہ بلا کمیت قرص $(M = 0)$ کی صورت میں $a = g$ اور $T = 0$ ہو گا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں؛ اینٹ ایک آزاد جسم کی طرح زمین پر گرتی ہے۔ مساوات ۴.۲۲ سے قرص کے زاوی اسراع کی قدر تلاش کرتے ہیں۔

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{0.2\,\mathrm{m}} = 24\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \quad (\text{جواب})$$

□

۴.۸ کام اور گھمیری حرکی توانائی

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. گھومتے جسم پر لاگو قوت مروڑ کا زاویہ گھماو کے لحاظ سے تکمل لے کر، گھومتے جسم پر لاگو قوت مروڑ کا سر انجام کام معلوم کر پائیں گے۔

۲. مسئلہ کام و حرکی توانائی استعمال کر کے جسم کے گھمیری حرکی توانائی میں تبدیلی اور سر انجام کام کا رشتہ جان پائیں گے۔

۳. کام اور اس زاویے کے تعلق سے، جس پر جسم گھومتا ہے، مستقل قوت مروڑ کا سر انجام کام تلاش کر پائیں گے۔

۴. کام کی شرح معلوم کر کے قوت مروڑ کی طاقت جان پائیں گے۔

۵. کسی لمحے پر قوت مروڑ اور اس لمحے پر زاوی سمتی رفتار کے رشتہ سے قوت مروڑ کی طاقت جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- زاوی حرکت میں کام اور طاقت کی ذیل مساوات مستقیم حرکت کی مساوات سے مطابقت رکھتی ہیں۔

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, \mathrm{d}\theta$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tau\omega$$

- جب τ مستقل ہو، تکمل گھٹ کر ذیل دیگا۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$

- گھومتے اجسام کے لئے مسئلہ کام و حرکی توانائی ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

کام اور گھمیری حرکی توانائی

جیسا ہم باب 7 میں ذکر کر چکے، جب قوت F استوار جسم پر، جس کی کمیت m ہو، عمل کر کے اس کو محددی محور پر مسرع کرے، قوت اس جسم پر کام سرانجام دیتی ہے۔ یوں، جسم کی حرکی توانائی $(K = \frac{1}{2}mv^2)$ تبدیل ہو سکتی ہے۔ فرض کریں جسم کی صرف یہی توانائی تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں حرکی توانائی کی تبدیلی ΔK اور کام W کا تعلق درج ذیل مسئلہ کام و حرکی توانائی (مساوات 10.7) دیگا۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = W \qquad \text{(مسئلہ کام و حرکی توانائی)} \tag{۴.۴۹}$$

محور x پر رہنے کی پابند حرکت کے لئے کام کی درج ذیل مساوات 32.7 دیگی۔

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \, \mathrm{d}x \qquad \text{(کام، یک بُعدی حرکت)} \tag{۴.۵۰}$$

جب F مستقل اور جسم کا ہٹاو d ہو، یہ گھٹ کر $W = Fd$ دیتی ہے۔ کام کرنے کی شرح طاقت کہلاتی ہے، جو ہم مساوات 43.7 اور مساوات 48.7 سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = Fv \qquad \text{(طاقت، یک بُعدی حرکت)} \tag{۴.۵۱}$$

آئیں اس سے ملتی جلتی گھمیری صورت پر غور کرتے ہیں۔ جب قوت مروڑ، مقررہ محور گھماو پر، استوار جسم کو مسرع کرے، قوت مروڑ جسم پر کام W سرانجام دیتی ہے۔ یوں، جسم کی گھمیری حرکی توانائی $(K = \frac{1}{2}I\omega^2)$ تبدیل ہو سکتی ہے۔ فرض کریں جسم کی صرف یہی توانائی تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں حرکی توانائی میں تبدیلی ΔK اور کام W کا رشتہ مسئلہ کام و حرکی توانائی دیگا، تاہم اب حرکی توانائی کے بجائے گھمیری حرکی توانائی کی بات کی جائے گی۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 \qquad \text{(مسئلہ کام و حرکی توانائی)} \tag{۴.۵۲}$$

یہاں، I مقررہ محور پر جسم کا گھمیری جمود اور ω_i اور ω_f کام سے قبل اور اس کے بعد جسم کی زاوی رفتار ہیں۔

ساتھ ہی، ہم مساوات 52.10 کی معادل گھمیری مساوات سے کام تلاش کر سکتے ہیں:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, \mathrm{d}\theta \qquad \text{(کام، مقررہ محور پر گھماو)} \tag{۴.۵۳}$$

جہاں τ وہ قوت مروڑ ہے جو کام W سرانجام دیتی ہے، اور θ_i اور θ_f، کام سے قبل اور اس کے بعد، جسم کے زاوی مقام ہیں۔ جب τ مستقل ہو، مساوات ۴.۵۳ گھٹ کر ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad \text{(کام، مستقل قوت مروڑ)} \tag{۴.۵۴}$$

کام کرنے کی شرح طاقت کہلاتی ہے، جو ہم مساوات 51.10 کی معادل گھمیری ذیل مساوات سے تلاش کر سکتے ہیں۔

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \tau\omega \qquad \text{(طاقت، مقررہ محور پر گھماو)} \tag{۴.۵۵}$$

جدول ۴.۲ میں مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماو کی چند مساوات اور مطابقتی مستقیم حرکت کی مساوات پیش ہیں۔

مساوات ۴.۵۲ تا مساوات ۴.۵۵ کا ثبوت

آئیں دوبارہ شکل 17.10 کو دیکھتے ہیں۔ بلا کمیت سلاخ اور اس کے ایک سر پر کمیت m کا ذرہ مل کر استوار جسم دیتے ہیں۔ گھماو کے دوران، قوت $\vec{F}$ جسم پر کام سرانجام دیتی ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $\vec{F}$ جسم کی صرف حرکی توانائی تبدیل کرتی ہے۔ ایسی صورت میں مساوات ۴.۴۹ کا مسئلہ کام و حرکی توانائی استعمال کیا جا سکتا ہے لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\Delta K = K_f - K_i = W \tag{۴.۵۶}$$

مساوات ۴.۵۶ میں $K = \frac{1}{2}mv^2$ اور مساوات ۴.۱۸ $(v = \omega r)$ استعمال کر کے اسے ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W \tag{۴.۵۷}$$

جدول ۴.۲: مستقیم اور مطابقتی گھمیری حرکت کی چند مساوات

خالص مستقیم حرکت (مقررہ رخ)		خالص گھماو (مقررہ محور)	
مقام	x	زاوی مقام	θ
سمتی رفتار	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	زاوی سمتی رفتار	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
اسراع	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	زاوی اسراع	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
کمیت	m	گھمیری جمود	I
نیوٹن کا قانون دوم	$F_{\text{صافی}} = ma$	نیوٹن کا قانون دوم	$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$
کام	$W = \int F\,\mathrm{d}x$	کام	$W = \int \tau\theta$
حرکی توانائی	$K = \frac{1}{2}mv^2$	حرکی توانائی	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
طاقت (مستقل قوت)	$P = Fv$	طاقت (مستقل قوت مروڑ)	$P = \tau\omega$
مسئلہ کام و حرکی توانائی	$W = \Delta K$	مسئلہ کام و حرکی توانائی	$W = \Delta K$

مساوات ۴.۳۳ کے تحت واحد ذروی جسم کا گھمیری جمود $I = mr^2$ ہے، جو مساوات ۴.۵۷ میں ڈال کر ذیل حاصل ہو گا، جو مساوات ۴.۵۲ ہے۔

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

ہم نے مساوات یک ذروی جسم کے لئے ثابت کی، تاہم ہر جسم متعدد ذروں پر مشتمل ہو گا لہٰذا یہ مقررہ محور پر گھمائے گئے ہر استوار جسم کے لئے درست ہے۔

آئیں اب شکل 17.10 میں جسم پر سرانجام کام W اور جسم پر $\vec{F}$ کی بنا قوت مروڑ τ کا تعلق جانیں۔ جب ذرہ دائری راہ پر چلتے ہوئے $\mathrm{d}s$ فاصلہ طے کرتا ہے، قوت کا صرف مماسی جزو F_t اس راہ پر ذرے کو اسراع پذیر کرتا ہے۔ یوں صرف F_t ذرے پر کام سرانجام دیگی۔ ہم اس کام $\mathrm{d}W$ کو $F_t\,\mathrm{d}s$ لکھتے ہیں۔ ہم $\mathrm{d}s$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ سکتے ہیں، جہاں ذرہ زاویہ $\mathrm{d}\theta$ طے کرتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}W = F_t r\,\mathrm{d}\theta \tag{۴.۵۸}$$

مساوات ۴.۴۰ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ماحصل $F_t r$ اور قوت مروڑ τ برابر ہوں گے لہٰذا مساوات ۴.۵۸ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\mathrm{d}W = \tau\,\mathrm{d}\theta \tag{۴.۵۹}$$

یوں θ_i تا θ_f کے متناہی زاوی ہٹاو کے دوران سرانجام کام ذیل ہو گا،

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,\mathrm{d}\theta$$

جو مساوات ۴.۵۳ ہے۔ یہ مساوات مقررہ محور پر گھومتے ہر استوار جسم کے لئے درست ہے۔ مساوات ۴.۵۹ سے بلا واسطہ مساوات ۴.۵۴ حاصل ہوتی ہے۔

گھمیری حرکت کے لئے مساوات ۴.۵۹ سے طاقت P لکھتے ہیں:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \tau\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \tau\omega$$

جو مساوات ۴.۵۵ ہے۔

نمونی سوال ۴.۱۱: کام، گھمیری حرکی توانائی، قوت مروڑ، قرص

شکل 19.10 میں وقت $t = 0$ پر قرص ساکن حالت سے آغاز کرتا ہے؛ بلا کیت دھاگے میں تناو $6.0\,\mathrm{N}$ اور قرص کا زاوی اسراع $-24\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ہے۔ اس کی گھمیری حرکی توانائی $t = 2.5\,\mathrm{s}$ پر کیا ہو گی؟

کلیدی تصور

ہم مساوات ۴.۳۴ $(K = \frac{1}{2}I\omega^2)$ سے K تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $I = \frac{1}{2}MR^2$ ہے، تاہم تا حال $t = 2.5\,\mathrm{s}$ پر ω نہیں جانتے۔ زاوی اسراع α کی مستقل قیمت $-24\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ہے لہٰذا ہم جدول ۴.۱ میں پیش مستقل زاوی اسراع کی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

حساب: ہم α اور $\omega_0 = 0$ جانتے ہیں اور ω جاننا چاہتے ہیں، لہٰذا مساوات ۴.۱۴۲ استعمال کرتے ہیں۔

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t$$

مساوات ۴.۳۴ میں $\omega = \alpha t$ اور $I = \frac{1}{2}MR^2$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
K &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4}M(R\alpha t)^2\\
&= \tfrac{1}{4}2.5\,\mathrm{kg}[(0.20\,\mathrm{m})(-24\,\mathrm{rad\,s^{-2}})(2.5\,\mathrm{s})]^2\\
&= 90\,\mathrm{J} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

کلیدی تصور

ہم یہی جواب سر انجام کام سے قرص کی حرکی توانائی معلوم کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

حساب: پہلے ہم قرص پر صافی سر انجام کام W اور قرص کی حرکی توانائی میں تبدیلی کا رشتہ، مساوات ۴.۵۲ $(K_f - K_i = W)$ میں پیش، مسئلہ کام و حرکی توانائی سے لکھتے ہیں۔ K_f کی جگہ K اور K_i کی جگہ 0 ڈال کر ذیل ہو گا۔

$$K = K_i + W = 0 + W = W \tag{۴.۶۰}$$

اس کے بعد، ہم کام W جاننا چاہیں گے۔ مساوات ۴.۵۳ یا مساوات ۴.۵۴ سے W اور قرص پر عمل پیرا قوت مروڑ کا تعلق لکھا جا سکتا ہے۔ دھاگے کی قوت $\vec{T}$ واحد قوت ہے جس کی قوت مروڑ

$(-TR)$ زاوی اسراع پیدا کر کے قرص پر کام سرانجام دیتی ہے۔ چونکہ α مستقل ہے، لہٰذا یہ قوت مروڑ بھی مستقل ہو گی۔ یوں مساوات ۱۴.۵۴ استعمال کی جا سکتی ہے، جس سے ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) \tag{۴.۶۱}$$

چونکہ α مستقل ہے، مساوات ۱۴.۱۳ استعمال کر کے $\theta_f - \theta_i$ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یوں $\omega_i = 0$ کے لئے ذیل ہو گا۔

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

اس کو مساوات ۴.۶۱ میں ڈال کر حاصل نتیجہ مساوات ۴.۶۰ میں پُر کرتے ہیں۔ دی گئی معلومات $T = 6.0\,\mathrm{N}$ اور $\alpha = -24\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ڈال کر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
K = W &= -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2) = -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2 \\
&= -\tfrac{1}{2}(6.0\,\mathrm{N})(0.20\,\mathrm{m})(-24\,\mathrm{rad\,s^{-2}})(2.5\,\mathrm{s})^2 \\
&= 90\,\mathrm{J} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

□

نظر ثانی اور خلاصہ

زاویی مقام مقررہ محور پر، جو **محور گھماو** کہلاتی ہے، استوار جسم کے گھماو کی بات کرتے ہوئے، ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم کے ساتھ، محور گھماو کو عمودی **حوالہ لکیر** پکی جڑی ہے، جو جسم کے ساتھ ساتھ گھومتی ہے۔ کسی مخصوص مقررہ رخ کے لحاظ سے ہم اس لکیر کا **زاویی مقام** θ ناپتے ہیں۔ جب θ کی پیمائش **ریڈیئن** میں ہو، ذیل ہو گا، جہاں دائری راہ کی قوسی لمبائی s، رداس r، اور زاویہ θ ہے۔

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱}$$

ریڈیئن، چکر، اور درجات میں ناپ کا تعلق ذیل ہے۔

$$1 \text{ چکر} = 360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad} \tag{۴.۲}$$

زاویی ہٹاو جب ایک جسم محور گھماو پر گھوم کر اپنا زاویی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا **زاویی ہٹاو** ذیل ہو گا،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{۴.۴}$$

جہاں خلاف گھڑی گھماو کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھڑی وار کے لئے منفی ہو گا۔

زاویی سمتی رفتار اور رفتار اگر وقتی دورانیہ Δt میں جسم $\Delta\theta$ زاوی ہٹاو گھومے، اس کی **اوسط زاویی سمتی رفتار** $\theta_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{۴.۵}$$

جسم کی **(لمحاتی) زاویی سمتی رفتار** ذیل ہو گی۔

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۶}$$

$\omega_{\text{اوسط}}$ اور ω سمتیات ہیں، جن کا رخ **دائیں ہاتھ کا قانون** دیگا (شکل 6.10)۔ خلاف گھڑی گھماو کے لئے دونوں مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہوں گے۔ جسم کے زاوی سمتی رفتار کی قدر اس کی **زاویی رفتار** کہلاتی ہے۔

زاویی اسراع اگر t_1 تا t_2 کے وقتی وقفہ Δt میں جسم کی زاوی سمتی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، جسم کا **اوسط زاویی اسراع** ذیل ہو گا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{۴.۷}$$

جسم کی **(لمحاتی) زاویی اسراع ذیل ہو گا۔**

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۸}$$

$\alpha_{\text{اوسط}}$ اور α دونوں سمتیات ہیں۔

مستقل زاویی اسراع کی مجرد حرکیات مساوات مستقل زاوی اسراع ($\alpha = $ مستقل) گھمیری حرکت کی ایک خاص قسم ہے۔ اس کی مجرد حرکیات مساوات، جو جدول ۴.۱ میں دی گئی ہیں، ذیل ہیں۔

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{۴.۱۲}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{۴.۱۳}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \tag{۴.۱۴}$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \tag{۴.۱۵}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{۴.۱۶}$$

خطی اور زاویی متغیرات کا تعلق گھومتے استوار جسم کا اندرونی نقطہ، جو محور گھماو سے r عمودی فاصلہ پر ہو، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ سے گھومے، یہ نقطہ ذیل قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے، جہاں θ کا ناپ ریڈیئن میں ہے۔

$$s = \theta r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱۷}$$

نقطے کا خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ دائرے کو مماسی ہو گا؛ نقطہ کی خطی رفتار v ذیل ہو گی،

$$v = \omega r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱۸}$$

جہاں ω جسم کی (ریڈیئن فی سیکنڈ میں) زاوی رفتار ہے۔

نقطے کے خطی اسراع $\vec{a}$ کا مماسی اور رداسی جزو ہو گا۔ مماسی جزو ذیل ہو گا،

$$a_t = \alpha r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۲۲}$$

جہاں (ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) جسم کے زاوی اسراع کی قدر α ہے۔ اسراع $\vec{a}$ کا رداسی جزو ذیل ہو گا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۲۳}$$

اگر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، جسم اور نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T ذیل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۱۹، ۴.۲۰}$$

گھمیری حرکی توانائی اور گھمیری جمود مقررہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کی حرکی توانائی K ذیل ہو گی،

$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۳۴}$$

جہاں I جسم کا **گھمیری جمود** ہے، جس کی تعریف انفرادی ذروں کے نظام کے لئے:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{۴.۳۳}$$

اور استمراری کمیتی تقسیم کے جسم کے لئے ذیل ہے۔

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m \tag{۴.۳۵}$$

ان مساوات میں، محور گھماو سے مطلوبہ کمیتی ٹکڑے تک عمودی فاصلہ r_i اور r ہے، اور تکمل پورے جسم پر لیا جائے گا تاکہ اس میں تمام کمیتی ٹکڑے شامل ہوں۔

مسئلہ متوازی محور کسی بھی محور پر جسم کے گھمیری جمود I کا تعلق، اسی جسم کے مرکز کمیت پر متوازی محور کے لحاظ سے گھمیری جمود کے ساتھ مسئلہ متوازی محور دیتا ہے۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 \tag{۴.۳۶}$$

یہاں دونوں محور کے بیچ فاصلہ h ہے، اور مرکز کمیت پر محور کے لحاظ سے جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے۔ ہم h کو مرکز کمیت پر واقع محور سے اصل محور گھماو کا ہٹاو تصور کر سکتے ہیں۔

قوت مروڑ گھمیری محور پر قوت $\vec{F}$ کی بنا جسم پر گھومنے کے اثر کو قوت مروڑ کہتے ہیں۔ اگر محور گھماو کے لحاظ سے جس نقطے پر $\vec{F}$ عمل پیرا ہو اس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہو، تب قوت مروڑ کی قدر ذیل ہو گی،

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF\sin\phi \qquad (۴.۳۹، ۴.۴۰، ۴.۴۱)$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی جزو F_t، اور $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے۔ محور گھماو اور $\vec{F}$ سمتیہ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ $r_\perp$ ہے اس لکیر کو $\vec{F}$ کا **خط عمل** کہتے ہیں، اور $r_\perp$ کو $\vec{F}$ کے **معیار اثر کا بازو** کہتے ہیں۔ اسی طرح F_t کے معیار اثر کا بازو r ہے۔

قوت مروڑ کی بین الاقوامی اکائی نیوٹن میٹر $(\mathrm{N\,m})$ ہے۔ اگر ساکن جسم کو قوت مروڑ τ خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرے، τ مثبت ہو گی اور اگر گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرے تب منفی ہو گی۔

نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی مماثل ذیل ہے،

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha \qquad (۴.۴۵)$$

جہاں ذرے یا استوار جسم پر قوت مروڑ $\tau_{\text{صافی}}$، محور گھماو پر ذرے یا جسم کا گھمیری جمود I، اور α اس محور پر ماحصل زاوی اسراع ہے۔

کام اور گھمیری حرکی توانائی گھمیری حرکت میں کام اور طاقت کے حساب کی (درج ذیل) مساوات مستقیم حرکت کی مساوات سے مطابقت رکھتی ہیں۔

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,\mathrm{d}\theta \qquad (۴.۵۳)$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \tau\omega \qquad (۴.۵۵)$$

جب τ مستقل ہو مساوات ۴.۵۳ گھٹ کر ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad (۴.۵۴)$$

گھومتے اجسام کے لئے مسئلہ کام و حرکی توانائی ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W \qquad (۴.۵۲)$$

سوالات

سوال ۴.۱: انتصابی دھرے پر قرص کی زاوی سمتی رفتار بالمقابل وقت ترسیم شکل 20.10 میں پیش ہے۔ قرص کے چکا پر ایک نقطہ کے لئے لمحات a ، b ، c ، اور d کی درجہ بندی، اعظم اول رکھ کر، (ا) مماسی اور (ب) رداسی اسراع کی قدر کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۴.۲: انتصابی دھرے پر قرص کے گھماو کی تین صورتوں کے لئے زاوی مقام θ بالمقابل قوت t شکل 21.10 میں پیش ہے۔ ہر ایک صورت میں گھماو کا رخ کسی زاوی مقام $\theta_{\text{واپس}}$ ہوگا۔ (ا) ہر صورت کے لئے کیا $\theta = 0$ کے لحاظ سے $\theta_{\text{واپس}}$ گھڑی وار ہے، خلاف گھڑی ہے، یا عین $\theta = 0$ پر ہے؟ ہر ایک صورت میں (ب) کیا $t = 0$ سے قبل، اس کے بعد، یا اسی لمحے ω صفر ہوگا اور (ج) کیا α مثبت، منفی، یا صفر ہوگا؟

سوال ۴.۳: قرص کے وسط سے گزرتا انتصابی دھرے پر گھومتے قرص کے چکا پر قوت لاگو کر کے اس کی زاوی سمتی رفتار تبدیل کی جاتی ہے۔ اس کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی سمتی رفتار چار مختلف صورتوں میں ذیل ہیں: (ا) ابتدائی $-2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، اختتامی $5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ؛ (ب) $2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ؛ (ج) $-2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $-5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ؛ (د) $2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $-5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ۔ اعظم قیمت اول رکھ کر ان صورتوں کی درجہ بندی قوت مروڑ کے سرانجام کام کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۴.۴: شکل 22a.10 کے قرص کا زاوی مقام شکل 22b.10 دیتی ہے۔ کیا (ا) $t = 1\,\mathrm{s}$ پر، (ب) $t = 2\,\mathrm{s}$ پر، اور (ج) $t = 3\,\mathrm{s}$ پر اس کی زاوی سمتی رفتار مثبت، منفی، یا صفر ہے؟ (د) کیا زاوی اسراع مثبت یا منفی ہے؟

سوال ۴.۵: قرص کے وسط سے گزرتا انتصابی دھرے پر گھومتے قرص پر قوت $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ عمل کرتی ہیں (شکل 23.10)۔ گھماو کے دوران، جو خلاف گھڑی اور مستقل ہے، قوت دکھائے گئے زاویے برقرار رکھتی ہیں۔ تاہم، ہم چاہتے ہیں کہ $\vec{F}_1$ کی قدر تبدیل کیے بغیر $\vec{F}_1$ کا زاویہ θ گھٹائیں۔ (ا) سمتی زاوی رفتار تبدیل نہ ہونے کے لئے کیا $\vec{F}_2$ کی قدر بڑھانی ہوگی، گھٹانی ہوگی، یا برقرار رکھنی ہوگی؟ کیا (ب) $\vec{F}_1$ اور (ج) $\vec{F}_2$ قرص کو گھڑی وار یا خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہیں؟

سوال ۴.۶: ایک چوکور جو نقطہ P پر انتصابی دھرے کے گرد گھوم سکتا ہے، کا فضائی جائزہ شکل 24.10 میں لیا گیا ہے۔ چوکور پر برابر قدر کی پانچ قوت عمل کرتی ہیں، اور P ضلع کا وسطی نقطہ ہے۔ نقطہ P پر قوت مروڑ کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۴.۷: افقی چول دار سلاخ کا فضائی جائزہ شکل 25a.10 میں پیش ہے۔ سلاخ پر دو قوت عمل کرتی ہیں، تاہم سلاخ ساکن رہتا ہے۔ اب اگر سلاخ اور $\vec{F}_2$ کے بیچ زاویہ $90°$ سے گھٹائیں اور سلاخ اب بھی ساکن رہے، کیا $\vec{F}_2$ بڑھانی ہوگی، گھٹانی ہوگی، یا برقرار رکھنی ہوگی؟

سوال ۴.۸: افقی چول دار سلاخ کا فضائی جائزہ شکل 25b.10 میں پیش ہے۔ سلاخ کو قوت $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ چول پر گھماتی ہیں؛ $\vec{F}_2$ اور سلاخ کے بیچ زاویہ ϕ ہے۔ سلاخ کے زاوی اسراع کی قدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، زاویہ ϕ کی درج ذیل قیمتوں کی درجہ بندی کریں: $90°$ ، $70°$ ، اور $110°$ ۔

سوال ۴.۹: یکساں موٹائی کے دھاتی چادر کا چوکور جس سے 25 % حصہ کاٹا گیا ہے، شکل 26.10 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل پر تین حرفی نقطے دیے گئے ہیں۔ ان نقطوں پر انتصابی محور کے گرد چادر کے گھمیری جمود کے لحاظ سے، اعظم اول

رکھ کر، نقطوں کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۴.۱۰: تین چپٹے (ایک جتنے رداس کے) قرص، جو قرص کے وسط پر انتصابی دھرے کے گرد گھوم سکتے ہیں، شکل 27.10 میں پیش ہیں۔ تینوں قرص وہی دو مادہ سے بنے ہیں۔ ایک مادہ دوسرے سے زیادہ کثیف ہے (فی اکائی حجم کمیت کو کثافت کہتے ہیں)۔ قرص 1 اور 3 کا بیرونی نصف حصہ کثیر مادے کا ہے۔ قرص 2 کا اندرونی نصف حصہ کثیف مادے کا ہے۔ ایک جتنی قدر کی دو قوتیں قرص کے بیرونی کنارے پر یا دو مادہ کے جوڑ پر، مماسی عمل کرتی ہیں۔ (ا) قرص کے وسط پر قوت مروڑ، (ب) قرص کے وسط پر گھمیری جمود، اور (ج) قرص کے اسراع کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، قرص کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۴.۱۱: میٹر سلاخ کا آدھا حصہ لکڑی کا اور آدھا فولاد کا بنا ہوا ہے (شکل 28a.10)۔ لکڑی والے سر O پر چول ہے۔ فولادی سر a پر قوت $\vec{F}$ عمل کرتی ہے۔ شکل 28b.10 میں سلاخ الٹی رکھی جاتی ہے اور فولادی سر O' پر چول جبکہ لکڑی والے سر a' پر قوت لاگو کی جاتی ہے۔ کیا شکل 28a.10 میں پیدا زاوی اسراع شکل 28b.10 میں پیدا زاوی اسراع سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر ہے؟

سوال ۴.۱۲: یکساں کمیتی تقسیم کے تین قرص شکل 29.10 میں پیش ہیں۔ قرص کا رداس R اور کمیت M دیے گئے ہیں۔ قرص کے وسط پر قرص کو عمودی محور گھماو کے گرد قرص گھوم سکتے ہیں۔ اپنے اپنے محور گھماو پر گھمیری جمود کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، قرص کی درجہ بندی کریں۔

سوالات

گھماو کے متغیر

سوال ۴.۱: ایک اچھا کھلاڑی 60 فٹ دور کھلاڑی تک 85 میل فی گھنٹہ کی رفتار اور 1800 چکر فی منٹ کے گھماو سے گیند پھینک سکتا ہے۔ دوسرے کھلاڑی تک پہنچ کر گیند نے کتنے چکر مکمل کیے ہوں گے؟

سوال ۴.۲: گھڑی کی (ا) سیکنڈوں کی سوئی، (ب) منٹوں کی سوئی، اور (ج) گھنٹوں کی سوئی کی زاوی رفتار ریڈیئن فی سیکنڈ میں تلاش کریں۔

سوال ۴.۳: ڈبل روٹی کا مکھن لگا ٹکڑا میز سے پھسل کر زمین پر چکر کھاتا گرتا ہے۔ میز سے زمین تک فاصلہ 76 cm اور 1 سے کم چکر کی صورت میں (ا) کم سے کم اور (ب) زیادہ سے زیادہ زاوی رفتار کیا ہو گی کہ زمین پر لگنے کے بعد مکھن لگا طرف زمین پر ہو؟

سوال ۴.۴: گھومتے پہیے پر ایک نقطے کا زاوی مقام $\theta = 2.0 + 4.0t^2 + 2.0t^3$ ہے، جہاں θ کا ناپ ریڈیئن اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر نقطے کا (ا) زاوی مقام اور (ب) زاوی سمتی رفتار کیا ہو گا؟ لمحہ $t = 4.0\,\text{s}$ پر اس کا زاوی سمتی رفتار کیا ہو گا؟ (ج) لمحہ $t = 2.0\,\text{s}$ پر اس کا زاوی اسراع تلاش کریں۔ (د) کیا اس کا زاوی اسراع مستقل ہے؟

سوال ۴.۵: پانی تک 10 m بلند چبوترہ سے تیراک 2.5 چکر کھا کر پہنچتا ہے۔ صفر ابتدائی انتصابی سمتی رفتار فرض کر کے، پرواز کے دوران تیراک کی اوسط زاوی سمتی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۴.۶: گھومتے پہیے کے چکا پر ایک نقطے کا زاوی مقام $\theta = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$ ہے، جہاں θ کا ناپ ریڈیئن اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ لمحہ (ا) $t = 2.0\,\mathrm{s}$ اور (ب) $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر زاوی سمتی رفتار کیا ہوں گی؟ (ج) وقت $t = 2.0\,\mathrm{s}$ سے $t = 4.0\,\mathrm{s}$ تک دورانیے میں اوسط زاوی اسراع کیا ہو گا؟ اس دورانیے کے (ج) آغاز میں اور (د) اختتام پر لمحاتی زاوی اسراع کیا ہو گا؟

سوال ۴.۷: ایک پہیا میں، جس کا رداس $30\,\mathrm{cm}$ ہے، آٹھ تیلیاں برابر فاصلوں پر نصب ہیں۔ پہیا مقررہ دھرے پر 2.5 چکر فی سیکنڈ گھوم رہا ہے۔ آپ $20\,\mathrm{cm}$ لمبا تیر مار کر، دھرے کے متوازی، تیلیوں کو چھوئے بغیر، پہیے کے اندر سے گزارنا چاہتے ہیں۔ تیر اور تیلیوں کو انتہائی پتلا تصور کریں۔ (ا) تیر کی کم سے کم رفتار کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) کیا دھرے اور چکا کے بیچ مارنے کا نقطہ اہمیت رکھتا ہے؟ اگر اہمیت رکھتا ہو، بہترین مقام کیا ہو گا؟

سوال ۴.۸: پہیے کا زاوی اسراع $\alpha = 6.0t^4 - 4.0t^2$ ہے، جہاں α کا ناپ ریڈیئن فی مربع سیکنڈ اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ وقت $t = 0$ پر پہیے کی زاوی سمتی رفتار $+2.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور زاوی مقام $+1.0\,\mathrm{rad}$ ہے۔ (ا) زاوی سمتی رفتار $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$ اور (ب) زاوی مقام (ریڈیئن) کے تفاعل وقت (سیکنڈ) کے لحاظ سے لکھیں۔

مستقل زاوی اسراع کا گھماو

سوال ۴.۹: اپنے وسطی محور پر ڈرم $12.60\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی سمتی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اگر اب ڈرم $4.20\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ کی مستقل شرح سے آہستہ ہو، اس کو رکنے تک (ا) کتنا وقت چاہیے ہو گا اور (ب) رکنے تک یہ کتنا زاویہ گھومے گا؟

سوال ۴.۱۰: ساکن حالت سے آغاز کر کے ایک قرص اپنے وسطی محور پر مستقل زاوی اسراع سے گھومتا ہے۔ ابتدائی $5.0\,\mathrm{s}$ میں قرص $25\,\mathrm{rad}$ گھومتا ہے۔ اس دورانیہ میں (ا) زاوی اسراع اور (ب) اوسط زاوی سمتی رفتار کی قدر کیا ہیں؟ (ج) اس $5.0\,\mathrm{s}$ دورانیے کے اختتام پر لمحاتی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ (د) زاوی اسراع برقرار رہنے کی صورت میں اگلے $5.0\,\mathrm{s}$ میں قرص مزید کتنا زاویہ طے کرتا ہے؟

سوال ۴.۱۱: ایک قرص جو ابتدائی طور $120\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے گھوم رہا ہے، $4.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ قدر کے مستقل اسراع سے آہستہ ہوتا ہے۔ (ا) قرص کے رکھنے تک کتنا وقت درکار ہو گا؟ (ب) رکھنے تک قرص کتنا زاویہ طے کریگا؟

سوال ۴.۱۲: ایک گاڑی کی **کل**[23] (انجن) کی زاوی رفتار $12\,\mathrm{s}$ میں 1200 چکر فی منٹ سے بڑھ کر 3000 چکر فی منٹ کی جاتی ہے۔ (ا) اس کا اسراع چکر فی مربع منٹ میں کیا ہو گا؟ (ب) ان $12\,\mathrm{s}$ میں کل (انجن) کتنے چکر کاٹتی ہے؟

سوال ۴.۱۳: **اڑن پہیا**[24] 40 چکروں میں $1.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے ساکن حالت کو پہنچتا ہے۔ (ا) مستقل زاوی اسراع فرض کرتے ہوئے، رکنے کے لئے درکار وقت معلوم کریں۔ (ب) اس کا زاوی اسراع کیا ہو گا؟ (ج) 40 چکر میں سے ابتدائی 20 چکر اڑن پہیا کتنے وقت میں کاٹتا ہے؟

سوال ۴.۱۴: ساکن حالت سے آغاز کر کے، مستقل اسراع کے ساتھ، اپنی وسطی محور پر قرص گھومتا ہے۔ کسی

---

[23] engine
[24] flywheel

ایک لمحے قرص 10 چکر فی سیکنڈ سے گھومتا ہے؛ 60 چکر بعد اس کی زاوی رفتار 15 چکر فی سیکنڈ ہے۔(ا) قرص کا زاوی اسراع، (ب) یہ 60 چکر کو درکار دورانیہ، (ج) 10 چکر فی سیکنڈ رفتار تک پہنچنے کے لئے درکار دورانیہ، اور (د) ساکن حالت سے 10 چکر فی سیکنڈ رفتار تک پہنچنے تک کل چکر تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۵: قرص کے وسطی نقطے سے گزرتی انتصابی دھرے پر ساکن حالت سے قرص آغاز کر کے $\alpha = 3.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے چل پڑتا ہے۔ کسی مخصوص 4.0 s دورانیے میں قرص 120π ریڈیئن گھومتا ہے۔ قرص کتنے وقت میں 4.0 s دورانیے کو پہنچتا ہے؟

سوال ۴.۱۶: ساکن حالت سے آغاز کر کے محور گھماو پر قرص زاوی اسراع $1.50\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے چلتا ہے۔(ا) ابتدائی 2.00 چکر اور (ب) اگلے 2.00 چکر کتنے وقت میں طے ہوں گے؟

سوال ۴.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر اڑن پہیے کی زاوی سمتی رفتار $4.7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$، مستقل زاوی اسراع $-0.25\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$، اور حوالہ لکیر $\theta_0 = 0$ پر ہے۔(ا) حوالہ لکیر مثبت رخ زیادہ سے زیادہ کتنا زاویہ $\theta_{\text{بلند تر}}$ طے کرے گی؟ کس وقت حوالہ لکیر (ب) پہلی مرتبہ اور (ج) دوسری مرتبہ $\theta = \frac{1}{2}\theta_{\text{بلند تر}}$ پر ہو گی؟ کس (د) منفی وقت اور (ہ) مثبت وقت پر حوالہ لکیر $\theta = 10.5\,\mathrm{rad}$ پر ہو گی؟ (و) θ بالمقابل t ترسیم کر کے اس پر اپنے جوابات کی نشاندہی کریں۔

سوال ۴.۱۸: **نابض**[25] تیزی سے گھومتے نیوٹران تارہ کو کہتے ہیں جو منارہ نور کی طرح شعاع خارج کرتا ہے۔ نابض ہر چکر کے دوران زمین پر ایک مرتبہ شعاع مارتا ہے۔ دو متواتر شعاعوں کے بیچ دورانیہ ناپ کر گھومنے کا دوری عرصہ T معلوم کیا جاتا ہے۔ **سدیم السرطان**[26] میں موجود نابض کا دوری عرصہ $T = 0.033\,\mathrm{s}$ ہے، جو ایک سال میں 1.26×10^{-5} سیکنڈ شرح سے بڑھ رہا ہے۔(ا) نابض کا زاوی اسراع α کیا ہے؟ (ب) اگر α مستقل ہو، نابض آج سے کتنے سال بعد رک جائے گا؟ (ج) یہ نابض ۱۰۵۴ء میں دیکھے گئے **مستعر اعظم**[27] دھماکے میں پیدا ہوا۔ مستقل α تصور کر کے ابتدائی T تلاش کریں۔

خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

سوال ۴.۱۹: خلائی طیارہ $29\,000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتے ہوئے $3220\,\mathrm{km}$ رداس کا دائری موڑ کاٹتا ہے۔ طیارے (ا) کی زاوی سمتی رفتار، (ب) رداسی اسراع، اور (ج) مماسی اسراع کی قدریں کیا ہیں؟

سوال ۴.۲۰: ایک جسم مقررہ محور پر گھومتا ہے، اور جسم پر حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta = 0.40e^{2t}$ ہے، جہاں θ ریڈیئن میں اور t سیکنڈوں میں ہے۔ محور گھماو سے 4.0 cm فاصلے پر نقطہ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر نقطہ (ا) کے اسراع کے مماسی جزو اور (ب) اسراع کے رداسی جزو کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۴.۲۱: ۱۹۱۱ء اور ۱۹۹۰ء کے بیچ اطالیہ کے شہر پیسا میں واقع **جھکا برج**[28] کی چوٹی جنوب کے رخ سالانہ اوسطاً 1.2 mm حرکت کرتی رہی۔ برج 55 m بلند ہے۔ برج کے پیندا پر برج کی زاوی رفتار ریڈیئن فی سیکنڈ میں کتنی ہے؟

---

[25] pulsar
[26] Crabnebula
[27] supernova
[28] leaningtowerofPisa

سوال ۴.۲۲: خلاباز کو $10\,\mathrm{m}$ رداس کے **مرکز گریزہ**[۲۹] میں $\theta = 0.30t^2$ کے لحاظ سے گھما کر جانچا جاتا ہے۔ وقت $t = 5.0\,\mathrm{s}$ پر (ا) زاوی سمتی رفتار، (ب) خطی سمتی رفتار، (ج) مماسی اسراع، اور (د) رداسی اسراع کی قدریں کیا ہوں گی؟

سوال ۴.۲۳: ایک اڑن پہیا جس کا قطر $1.20\,\mathrm{m}$ ہے 200 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ (ا) اڑن پہیے کی زاوی رفتار ریڈیئن فی سیکنڈ میں کتنی ہے؟ (ب) اڑن پہیے کے چکا پر نقطے کی خطی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) پہیے کی زاوی رفتار $60\,\mathrm{s}$ میں بڑھا کر 1000 چکر فی منٹ کرنے کے لئے مستقل زاوی اسراع (چکر فی مربع منٹ میں) کیا ہو گا؟

سوال ۴.۲۴: **گراموفون**[۳۰] کی سوئی (پلاسٹک کی بنی ہوئی) **تھالی**[۳۱] کی چوڑیوں پر چل کر آواز پیدا کرتی ہے۔ چوڑی میں پیچ و خم پر چل کر سوئی ارتعاش پذیر ہو گی۔ گراموفون میکانی ارتعاش کو پہلے برقی ارتعاش میں اور اس کے بعد آواز میں تبدیل کرتا ہے۔ فرض کریں تھالی $33\frac{1}{2}$ چکر فی منٹ شرح سے گھومتی ہے، جس چوڑی کو بجایا جا رہا ہے، اس کا رداس $10.0\,\mathrm{cm}$ ہے، اور چوڑی میں خم یکساں $1.75\,\mathrm{mm}$ فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ خم کس شرح (ٹکر فی سیکنڈ) سے سوئی کو ٹکراتے ہیں؟

سوال ۴.۲۵: (ا) سطح زمین پر $40°$ شمال کے **خط عرض بلد**[۳۲] پر واقع نقطے کی قطبی محور پر زاوی رفتار ω کیا ہو گی؟ (زمین قطبی محور پر گھومتی ہے۔) (ب) اس نقطے کی خطی رفتار v کیا ہو گی؟ **خط استوا**[۳۳] پر واقع نقطہ کی (ج) ω اور (د) v کیا ہوں گی؟

سوال ۴.۲۶: **دخانی کل**[۳۴] (دخانی انجن) کا اڑن پہیا 150 چکر فی منٹ کی مستقل زاوی سمتی رفتار سے حرکت میں ہے۔ بھاپ روکنے پر **بیرم**[۳۵] کی رگڑ اور ہوائی رکاوٹ پہیے کو 2.2 گھنٹوں میں روکتی ہیں۔ (ا) رکنے کے دوران پہیے کا مستقل زاوی اسراع، چکر فی مربع منٹ میں، کیا ہو گا؟ (ب) رکنے تک پہیا کتنے چکر کاٹتا ہے؟ (ج) جس لمحہ اڑن پہیے کی زاوی رفتار 75 چکر فی منٹ ہے، پہیے پر محور گھماو سے $50\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر نقطے کے خطی اسراع کا مماسی جزو کیا ہو گا؟ (د) ذرے کے صافی اسراع کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۴.۲۷: **تختہ گھوم**[۳۶] پر، جو $33\frac{1}{3}$ چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے، بیج کا دانہ محور گھماو سے $6.0\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر پڑا ہے۔ (ا) بیج کا اسراع کیا ہے اور (ب) پھسلنے سے بچنے کے لئے کم سے کم سکونی رگڑ کا مستقل کیا ہو گا؟ (ج) اگر ساکن حالت سے تختہ اس رفتار تک $0.25\,\mathrm{s}$ میں مستقل زاوی اسراع سے پہنچا ہو، پھسلنے سے بچنے کے لئے کم سے کم سکونی رگڑ کا مستقل کیا ہو گا؟

سوال ۴.۲۸: رداس $r_A = 10\,\mathrm{cm}$ اور $r_C = 25\,\mathrm{cm}$ کے پہیوں کو پٹہ B ملاتا ہے (شکل 31.10)۔ ساکن حالت سے پہیا A کی زاوی رفتار $1.6\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ مستقل شرح سے بڑھائی جاتی ہے۔ پہیا C کو 1000 چکر فی منٹ تک پہنچنے کے لئے کتنا وقت درکار ہو گا (پٹہ پھسلتا نہیں ہے)؟ (اشارہ: اگر پٹہ پھسلے نہیں، دونوں پہیوں کے

[۲۹] centrifuge
[۳۰] gramophone
[۳۱] vinylrecord
[۳۲] latitude
[۳۳] equator
[۳۴] steamengine
[۳۵] bearing
[۳۶] turntable

چکے برابر خطی رفتار سے حرکت کریں گے۔)

سوال ۴.۲۹: روشنی کی رفتار ناپنے کی ایک پرانی ترکیب شکل 32.10 میں دکھائی گئی ہے، جس میں شگاف دار گھومتا پہیا استعمال کیا جاتا ہے۔ پہیے کے بیرونی کنارے پر شگاف سے کرن گزر کر دور آئینے سے ٹکرا کر، اسی راہ پر واپس چلتے ہوئے، پہیے پر پہنچتی ہے؛ اس دورانیہ میں پہیا ایک شگاف آگے بڑھتا ہے؛ یوں کرن اگلے شگاف سے گزر پاتی ہے۔ پہیے کا رداس 5.0 cm، شگافوں کی تعداد 500، اور آئینے تک فاصلہ $L = 500\,\mathrm{m}$ ہے۔ پیمائش سے معلوم ہوتا ہے کہ روشنی کی رفتار $3.0 \times 10^5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے۔(ا) پہیے کی مستقل (زاوی) رفتار کیا ہے؟ (ب) پہیے کے کنارے پر نقطے کی خطی رفتار کیا ہے؟

سوال ۴.۳۰: مسکن چرخہ[۳۷] کے اڑن پہیے کو، جس کا رداس 2.83 cm ہے، ساکن حالت سے $14.2\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے مسرع کر کے 2760 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار تک لایا جاتا ہے۔(ا) اس دوران پہیے کے چکا پر واقع نقطے کے مماسی اسراع کیا ہو گا؟(ب) پوری رفتار پر گھومنے کے دوران نقطے کا رداسی اسراع کیا ہو گا؟(ج) اختتامی رفتار تک پہنچنے تک چکا پر واقع نقطہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

سوال ۴.۳۱: ایک قرص، جس کا رداس 0.25 m ہے، قرص کی وسطی انتصابی محور پر 800 rad گھمانا مقصود ہے۔ ساکن حالت سے آغاز کر کے، ابتدائی 400 rad کے دوران قرص کو مستقل α_1 شرح سے مسرع کیا جاتا ہے جس کے بعد مستقل $-\alpha_1$ شرح سے اس کی زاوی رفتار گھٹائی جاتی ہے، حتیٰ کہ قرص رک جاتا ہے۔ ضروری ہے کہ قرص کے کسی حصے کے مرکز مائل اسراع کی قدر $400\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے تجاوز نہ کرے۔(ا) گھماو کا کم سے کم دورانیہ کتنا ہو سکتا ہے؟(ب) مطابقتی α_1 کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۲: ساکن حالت سے آغاز کر کے گاڑی 30.0 m رداس کی دائری راہ پر چلتی ہے۔ اس کی رفتار $0.500\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ مستقل شرح سے بڑھتی ہے۔(ا) صافی خطی اسراع کی قدر 15.0 s بعد کیا ہو گی؟(ب) اس لمحے پر گاڑی کا صافی سمتیہ اسراع اور گاڑی کی سمتی رفتار آپس میں کس زاویے پر ہیں؟

گھماو کی حرکی توانائی

سوال ۴.۳۳: ایک پہیا 602 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے اور اس کی حرکی توانائی 24 400 J ہے۔ پہیے کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۴: ایک پتلی سلاخ ایک سر پر گھمائی جاتی ہے۔ شکل 33.10 میں سلاخ کی زاوی رفتار بالمقابل وقت پیش ہے۔ محور ω کا پیمانہ $\omega_s = 6.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تعین کرتا ہے۔(ا) سلاخ کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟(ب) لمحہ $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر سلاخ کی گھمیری حرکی توانائی 1.60 J ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سلاخ کی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

---

[۳۷] gyroscope

گھمیری جمود کا حساب

سوال ۴.۳۵: دو یکساں ٹھوس بیلن اپنے اپنے وسطی (طولی) محور پر $235\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے گھوم رہے ہیں۔ ان کی انفرادی کمیت $1.25\,\mathrm{kg}$ تاہم رداس مختلف ہیں۔ (ا) چھوٹے بیلن کی، جس کا رداس $0.25\,\mathrm{m}$ ہے، اور (ب) بڑے بیلن کی، جس کا رداس $0.75\,\mathrm{m}$ ہے، گھمیری حرکی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۶: قرص کے وسط سے رداسی h فاصلے پر محور کے گرد قرص گھوم سکتا ہے (شکل 34a.10)۔ قرص کے وسط سے کنارے تک h کی قیمتوں کے لئے قرص کا گھمیری جمود I شکل 34b.10 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ محور I کا پیمانہ $I_A = 0.050\,\mathrm{kg\,m^2}$ اور $I_B = 0.150\,\mathrm{kg\,m^2}$ تعین کرتے ہیں۔ قرص کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۷: میٹر سلاخ، جس کی کمیت $0.56\,\mathrm{kg}$ ہے، کا گھمیری جمود $20\,\mathrm{cm}$ نشان پر واقع سلاخ کو عمودی محور پر تلاش کریں۔ (میٹر سلاخ کو پتلی سلاخ تصور کریں۔)

سوال ۴.۳۸: بلا کمیت سلاخ کے ساتھ تین ذرے چسپاں کیے گئے ہیں (شکل 35.10)۔ سلاخ کی لمبائی $L = 6.00\,\mathrm{cm}$ اور ذروں کی انفرادی کمیت $0.0100\,\mathrm{kg}$ ہے۔ یہ نظام سلاخ کے بائیں سر پر واقع نقطہ O سے گزرتی عمودی محور پر گھوم سکتا ہے۔ ہم ایک ذرہ ہٹاتے ہیں (جو $33\,\%$ کمیت بنتا ہے)۔ محور سے (ا) قریب ترین ذرہ اور (ب) دور ترین ذرہ ہٹانے پر، نظام کا گھمیری جمود کتنے فی صد کم ہو گا؟

سوال ۴.۳۹: اڑن پہیے کو برقی موٹر سے 200π ریڈیئن فی سیکنڈ رفتار تک پہنچا کر گھومتے اڑن پہیے میں ذخیرہ توانائی سے ٹرک چلایا جا سکتا ہے۔ فرض کریں اڑن پہیا ٹھوس اور یکساں بیلن ہے، جس کی کمیت $500\,\mathrm{kg}$ اور رداس $1.0\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) بھرائی کے بعد اڑن پہیے کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟ (ب) اگر ٹرک اوسطاً $8.0\,\mathrm{kW}$ طاقت استعمال کرتا ہو، بھرائی کتنی دیر میں دوبارہ کرنی ہو گی؟

سوال ۴.۴۰: بالکل ایک جیسے 15 قرص سیدھ میں رکھ کر سلاخ کی شکل میں، جس کی لمبائی $L = 1.0000\,\mathrm{m}$ اور (کل) کمیت $M = 100.0\,\mathrm{mg}$ ہے، جوڑے گئے ہیں (شکل 36.10)۔ قرص یکساں ہیں اور پورا نظام درمیانے قرص کے وسطی نقطہ O پر گھوم سکتا ہے۔ (ا) اس محور پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (ب) نظام کو M کمیت اور L لمبائی کی سلاخ تصور کرنے سے جدول 2e.10 کا کلیہ استعمال کرنے سے گھمیری جمود کے حساب میں کتنے فی صد سہو پیدا ہو گا۔

سوال ۴.۴۱: دو ذروں کو، جن کی انفرادی کمیت $m = 0.85\,\mathrm{kg}$ ہے، ایک دوسرے کے ساتھ اور O پر واقع محور گھماو کے ساتھ سے دو سلاخ جوڑتی ہیں۔ ان سلاخوں کی انفرادی کمیت اور لمبائی $M = 1.2\,\mathrm{kg}$ اور $d = 5.6\,\mathrm{cm}$ ہے (شکل 37.10)۔ نظام محور گھماو پر $\omega = 0.30\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔ محور O پر نظام (ا) کا گھمیری جمود اور (ب) حرکی توانائی کیا ہیں؟

سوال ۴.۴۲: چار ذروں کی کمیتیں اور محدد ذیل ہیں: $50\,\mathrm{g}$، $x = 2.0\,\mathrm{cm}$، $y = 2.0\,\mathrm{cm}$؛ $25\,\mathrm{g}$، $x = 0\,\mathrm{cm}$، $y = 4.0\,\mathrm{cm}$؛ $25\,\mathrm{g}$، $x = -3.0\,\mathrm{cm}$، $y = -3.0\,\mathrm{cm}$؛ $30\,\mathrm{g}$، $x = -2.0\,\mathrm{cm}$، $y = 4.0\,\mathrm{cm}$۔ محور (ا) x، (ب) y، (ج) z پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (د) ہم جزو ا اور جزو ب کے جوابات کو بالترتیب A اور B سے ظاہر کرتے ہیں۔ جزو ج کا جواب A اور B کے روپ میں لکھیں۔

سوال ۴.۴۳: ٹھوس سل کی کمیت $0.172\,\text{kg}$ اور اضلاع $a = 3.5\,\text{cm}$، $b = 8.4\,\text{cm}$، اور $c = 1.4\,\text{cm}$ ہیں (شکل 38.10)۔ بڑی سطح کو عمودی، ایک کونے سے گزرتی، محور گھماو پر سل کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۴: چار ایک جیسے ذروں کو، جن کی انفرادی کمیت $0.50\,\text{kg}$ ہے، $2.0\,\text{m} \times 2.0\,\text{m}$ چوکور کی چار راس پر رکھے جاتے ہیں، اور انہیں بلا کمیت سلاخوں سے، جو چوکور کے اضلاع بناتے ہیں، جوڑا جاتا ہے۔ (ا) مخالف اضلاع کے وسطی نقطوں سے گزرتی محور گھماو پر، جو چوکور کی سطح میں پایا جاتا ہے، (ب) ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گزرتی محور گھماو پر، جو چوکور کی سطح کو عمودی ہے، اور (ج) وتری مخالف ذروں سے گزرتی محور گھماو پر، جو چوکور کی سطح میں پایا جاتا ہے، اس استوار جسم کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

قوت مروڑ

سوال ۴.۴۵: ایک جسم پر، جس کا چول نقطہ O پر ہے، دو قوت عمل کرتی ہیں (شکل 39.10)۔ اگر $r_1 = 1.30\,\text{m}$، $r_2 = 2.15\,\text{m}$، $F_1 = 4.20\,\text{N}$، $\theta_1 = 75.0^\circ$ اور $\theta_2 = 60.0^\circ$ ہو، چول پر صافی قوت مروڑ کیا ہو گی؟

سوال ۴.۴۶: ایک جسم پر، جس کا چول O پر ہے، تین قوت عمل کرتی ہیں (شکل 40.10) جو ذیل ہیں: نقطہ A پر جو O سے $8.0\,\text{m}$ فاصلے پر ہے $F_A = 10\,\text{N}$؛ نقطہ B پر جو O سے $4.0\,\text{m}$ فاصلے پر ہے $F_B = 16\,\text{N}$؛ اور نقطہ C پر جو O سے $3.0\,\text{m}$ فاصلے پر ہے $F_C = 19\,\text{N}$۔ O پر صافی قوت مروڑ تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷: بلا کمیت، $1.25\,\text{m}$ لمبی، سلاخ کے ایک سر پر $0.75\,\text{kg}$ گیند باندھ کر، سلاخ کا دوسرا سر چول سے لٹکایا جاتا ہے۔ جب حاصل رقاص انتصاب کے ساتھ 30° پر ہو، چول پر تجاذبی قوت مروڑ کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۴.۴۸: سائیکل کے پائیدان کا بازو $0.152\,\text{m}$ ہے اور سائیکل سوار پائیدان پر $111\,\text{N}$ نشیبی قوت لاگو کرتا ہے۔ پائیدان بازو کے چول پر اس وقت قوت مروڑ کی قدر کیا ہو گی جب انتصاب کے ساتھ پائیدان کا زاویہ (ا) 30°، (ب) 90°، اور (ج) 180° ہو؟

نیوٹن کا قانون دوم برائے گھماو

سوال ۴.۴۹: **تختہ غوطہ**[۳۸] سے تالاب میں کود کر غوطہ خور کی زاوی رفتار، اس کے مرکز کمیت پر، $220\,\text{ms}$ میں صفر سے $6.20\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہوتی ہے۔ مرکز کمیت پر اس کا گھمیری جمود $12.0\,\text{kg}\,\text{m}^2$ ہے۔ پرواز کے دوران (ا) غوطہ خور کے اوسط زاوی اسراع اور (ب) تختہ سے غوطہ خور پر بیرونی اوسط قوت مروڑ کی قدریں کیا ہیں؟

سوال ۴.۵۰: پہیے پر $32.0\,\text{N}\,\text{m}$ قوت مروڑ $25.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$ زاوی اسراع پیدا کرتی ہے۔ پہیے کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۴.۵۱: بلا رگڑ افقی دھرے پر رداس $R = 5.00\,\text{cm}$ کا **جر ثقیل**[۳۹] نصب ہے، جس سے کمیت

[۳۸] divingboard
[۳۹] pulley

$m_1 = 460\,\text{g}$ کی سل 1 اور کمیت $m_2 = 500\,\text{g}$ کی سل 2 لٹکی ہے (شکل 41.10)۔ ساکن حالت سے رہائی پر 5.0 s میں سل 2 75.0 cm گرتی ہے۔ دھاگہ ہرگز نہیں پھسلتا۔ (ا) سلوں کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ب) تناؤ T_2 اور (ج) T_1 کتنا ہے؟ (د) جسم ثقیل کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ہ) جسم ثقیل کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۴.۵۲: ایک بیلن، جس کی کمیت 2.0 kg ہے، اپنی وسطی طولی محور پر، جو O پر واقع ہے، گھوم سکتا ہے (شکل 42.10)۔ لاگو قوت ذیل ہیں: $F_1 = 6.0\,\text{N}$، $F_2 = 4.0\,\text{N}$، $F_3 = 2.0\,\text{N}$ اور $F_4 = 5.0\,\text{N}$۔ ساتھ ہی $r = 5.0\,\text{cm}$ اور $R = 12\,\text{cm}$ ہیں۔ (ا) بیلن کے زاوی اسراع (ا) کی قدر اور (ب) رخ تلاش کریں۔ (گھماو کے دوران بیلن کے لحاظ سے قوت انہیں زاویوں پر رہتی ہیں۔)

سوال ۴.۵۳: یکساں قرص اپنی وسطی انتصابی محور پر گھوم سکتا ہے (شکل 43.10)۔ قرص، جو ابتدائی طور پر ساکن ہے، کی کمیت 20.0 g اور رداس 2.0 cm ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر دکھائی گئی دو قوت قرص کے چکا پر مماسی لاگو کی جاتی ہیں، جن کی بدولت $t = 1.25\,\text{s}$ پر قرص کی خلاف گھڑی زاوی سمتی رفتار $250\,\text{rad s}^{-1}$ ہو گی۔ قوت $\vec{F}_1$ کی قدر 0.100 N ہے۔ قوت $\vec{F}_2$ کی قدر تلاش کریں۔

سوال ۴.۵۴: جاپانی کشتی جوڈو کہلاتی ہے۔ ایک داو میں آپ حریف کا بایاں پاوں مار کر اٹھاتے ہیں اور ساتھ ہی اس کو وردی سے پکڑ کر بائیں کھینچتے ہیں۔ نتیجتاً، حریف اپنے دائیں پاوں پر گھوم کر زمین پر گرتا ہے۔ شکل 44.10 میں آپ کا حریف دکھایا گیا ہے، جس میں اس کا بایاں پاوں زمین سے اٹھا دکھایا گیا ہے۔ محور گھماو نقطہ O پر ہے۔ تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ اس کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے، جو O سے $d = 28\,\text{cm}$ افقی فاصلے پر ہے۔ اس کی کمیت 70 kg اور O پر گھمیری جمود $65\,\text{kg m}^2$ ہے۔ (ا) آپ کی قوت $\vec{F}_a$ قابل نظر انداز ہونے کی صورت میں اور (ب) آپ کی قوت افقی، اس کی قدر 300 N، اور نقطہ اطلاق کی بلندی $h = 1.4\,\text{m}$ ہونے کی صورت میں O پر حریف کا ابتدائی زاوی اسراع کیا ہو گا؟

سوال ۴.۵۵: یکساں موٹائی اور کثافت (کمیت فی اکائی حجم) کے پلاسٹک کی بے قاعدہ چادر نقطہ O پر واقع، سطح چادر کو عمودی، محور پر گھمائی جاتی ہے (شکل 45a.10)۔ اس محور پر چادر کا گھمیری جمود درج ذیل ترکیب سے ناپا جاتا ہے۔ رداس 2.00 cm اور کمیت 0.500 kg کا دائری قرص چادر کے ساتھ یوں چسپاں کیا جاتا ہے کہ قرص کا وسط O پر ہو (شکل 45b.10)۔ لٹو پر دھاگہ لپیٹنے کی طرح قرص پر دھاگہ لپیٹ کر دھاگہ 5.0 s کے لئے کھینچا جاتا ہے۔ نتیجتاً، قرص کے چکا پر مماسی لاگو 0.400 N مستقل قوت قرص اور چادر دونوں کو گھماتی ہے۔ ماحصل زاوی رفتار $114\,\text{rad s}^{-1}$ ہے۔ محور گھماو پر چادر کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

سوال ۴.۵۶: دو ذرے 1 اور 2 جن کی انفرادی کمیت m ہے بلا کمیت سلاخ کے سروں پر جڑے ہیں (شکل 46.10)۔ سلاخ کی لمبائی $L_1 + L_2$ ہے، جہاں $L_1 = 20\,\text{cm}$ اور $L_2 = 80\,\text{cm}$ ہے۔ چول پر سلاخ افقی رکھ کر رہا کی جاتی ہے۔ (ا) ذرہ 1 اور (ب) ذرہ 2 کے ابتدائی اسراع کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۴.۵۷: ایک جسم ثقیل کا رداس 10 cm اور دھرے پر گھمیری جمود $1.0 \times 10^{-3}\,\text{kg m}^2$ ہے۔ جسم ثقیل کے چکا پر مماسی تغیر پذیر قوت $F = 0.50t + 0.30t^2$ لاگو کی جاتی ہے، جہاں F نیوٹن میں اور t سیکنڈ میں ہے۔ جسم ثقیل ابتدائی طور ساکن ہے۔ وقت $t = 3.0\,\text{s}$ پر اس (ا) کا زاوی اسراع اور (ب) زاوی

رفتار کیا ہوں گے؟

کام اور گھمیری حرکی توانائی

سوال ۴.۵۸: (ا) اگر شکل 19.10 میں $R = 12\,\mathrm{cm}$، $M = 400\,\mathrm{g}$ اور $m = 50\,\mathrm{g}$ ہو، ساکن حالت سے رہائی کے بعد $50\,\mathrm{cm}$ اتر کر سل کی رفتار کیا ہو گی؟ توانائی کی بقا کا اصول استعمال کر کے جواب معلوم کریں۔ (ب) رداس $R = 5.0\,\mathrm{cm}$ لے کر جواب دوبارہ حاصل کریں۔

سوال ۴.۵۹: گاڑی کا **خمدار دھرا**[۴۰] (کرینک شافٹ) 1800 چکر فی منٹ رفتار سے گھومتے ہوئے انجن سے دھرے (اکسل) تک $74.6\,\mathrm{kW}$ شرح سے توانائی پہنچاتا ہے۔ خمدار دھرا کتنی قوت مروڑ فراہم کرتا ہے؟

سوال ۴.۶۰: ایک پتلی سلاخ، جس کی لمبائی $0.75\,\mathrm{m}$ اور کمیت $0.42\,\mathrm{kg}$ ہے، ایک سر سے لٹکی ہے۔ سلاخ کو ایک جانب کھینچ کر رہا کر کے رقاص کی طرح جھولنے دیا جاتا ہے؛ نشیب سے سلاخ $4.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے گزرتی ہے۔ رگڑ اور ہوائی رکاوٹ نظر انداز کریں۔ (ا) نشیبی مقام پر سلاخ کی حرکی توانائی کیا ہو گی اور (ب) سلاخ کا مرکز کمیت نشیبی نقطہ سے کتنی بلندی تک پہنچ پاتا ہے؟

سوال ۴.۶۱: ایک پہیا، جس کو دائری پتلی سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے، کی کمیت $32.0\,\mathrm{kg}$ اور رداس $1.20\,\mathrm{m}$ ہے اور اس کی زاوی رفتار 280 چکر فی منٹ ہے۔ پہیے کو $15.0\,\mathrm{s}$ میں روکنا مقصود ہے۔ (ا) پہیا روکنے میں کتنا کام سر انجام ہو گا؟ (ب) درکار اوسط طاقت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۶۲: تین ذروں کو، جن کی انفرادی کمیت $0.0100\,\mathrm{kg}$ ہے، بلا کمیت $L = 6.00\,\mathrm{cm}$ لمبی سلاخ کے ساتھ جوڑا گیا ہے جو، سلاخ کے سر پر نقطہ O پر واقع سلاخ کو عمودی، محور پر گھوم سکتی ہے (شکل 35.10)۔ گھمیری شرح کو (ا) 0 سے $20.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرنے، (ب) $20.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے $40.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرنے، اور (ج) $40.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے $60.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ (د) نظام کی حرکی (جاول میں) توانائی بالمقابل (مربع ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) مربع شرح گھماو کی ترسیم کی ڈھلوان کیا ہو گی؟

سوال ۴.۶۳: میٹر سلاخ زمین پر کھڑی کر کے گرنے دی جاتی ہے۔ عین زمین پر پہنچ کر سلاخ کے دوسرے سر کی رفتار کیا ہو گی؟ زمین پر رکھا گیا سر پھسلتا نہیں۔ (اشارہ: میٹر سلاخ کو پتلی سلاخ تصور کر کے توانائی کی بقا کا اصول بروئے کار لائیں۔)

سوال ۴.۶۴: یکساں بیلن کو، جس کا رداس $10\,\mathrm{cm}$ اور کمیت $20\,\mathrm{kg}$ ہے، یوں رکھا جاتا ہے کہ بیلن کی وسطی طولی محور کے متوازی، $5.0\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر، افقی محور کے گرد گھوم سکے۔ (ا) محور گھماو پر بیلن کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (ب) بیلن کی وسطی طولی محور کو محور گھماو کی بلندی پر رکھ کر ساکن بیلن رہا کیا جاتا ہے۔ نشیب سے گزرتے وقت بیلن کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۴.۶۵: ایک بلند بیلنی آتش دان جس کی بنیاد کمزور پڑ گئی تھی گرتا ہے۔ آتش دان کو پتلی سلاخ تصور کریں جس کی لمبائی $55.0\,\mathrm{m}$ ہے۔ گرنے کے دوران جس لمحے انتصاب کے ساتھ آتش دان 35.0° زاویہ بناتا ہے

[۴۰] crankshaft

، اس کے بالا سر کا (ا) رداسی اسراع، اور (ب) مماسی اسراع کیا ہوں گے؟ (اشارہ: توانائی کی بقا بروئے کار لائیں ناکہ قوت مروڑ۔) (ج) مماسی اسراع کس زاویے θ پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کے برابر ہو گا؟

سوال ۴.۶۶: یکساں کروی خول، جس کی کمیت $M = 4.5\,\mathrm{kg}$ اور رداس $R = 8.5\,\mathrm{cm}$ ہے، انتصابی وسطی محور پر بلا رگڑ گھوم سکتا ہے (شکل 47.10)۔ بلا کمیت دھاگہ، جس سے $m = 0.60\,\mathrm{kg}$ کمیت کا جسم لٹکا ہے، جبر ثقیل پر گزار کر کرہ کے خط استوا پر لپیٹا جاتا ہے۔ جبر ثقیل کا گھمیری جمود $I = 3.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$ اور رداس $r = 5.0\,\mathrm{cm}$ ہے۔ جبر ثقیل کا دھرا بلا رگڑ ہے؛ دھاگہ جبر ثقیل پر پھسلتا نہیں ہے۔ ساکن حالت سے 82 cm گرنے کے بعد جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ توانائی کی بقا استعمال کریں۔

سوال ۴.۶۷: پتلا گھیر (کمیت m اور رداس $0.150\,\mathrm{m}$ = R) اور پتلی سلاخ (کمیت m اور لمبائی $L = 2.00\,\mathrm{R}$) جوڑ کر استوار نظام بنایا گیا ہے (شکل 48.10)۔ نظام سیدھا کھڑا ہے، تاہم معمولی ہلانے پر نظام، سلاخ کے نچلے سر پر واقع، سلاخ اور گھیرا[41] کے مستوی میں موجود، افقی محور کے گرد گھومتا ہے۔ فرض کریں معمولی ہلانے سے منتقل قابل نظر انداز ہے۔ نشیبی نقطہ سے گزرتے وقت نظام کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

اضافی سوال

سوال ۴.۶۸: دو ٹھوس یکساں کرہ کی انفرادی کمیت 1.65 kg، اور رداس 0.226 m اور 0.854 m ہیں۔ دونوں اپنی اپنی محور پر، جو کرہ کے مرکز سے گزرتی ہے، گھوم سکتے ہیں۔ (ا) چھوٹے کرہ کو ساکن حالت سے 15.5 s میں $317\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار تک لانے کے لئے درکار τ کی قدر کیا ہے؟ (ب) کرہ کے خط استوا پر مماسی قوت کی قدر F کیا ہو گی جو اتنی قوت مروڑ دے؟ (ج) τ اور (د) F بڑے کرہ کے لئے کیا ہیں؟

سوال ۴.۶۹: رداس $r = 2.00\,\mathrm{cm}$ کا چھوٹا قرص، رداس $R = 4.00\,\mathrm{cm}$ کے بڑے قرص کے کنارے یوں جوڑا گیا ہے کہ دونوں ایک مستوی میں ہوں (شکل 49.10)۔ بڑے قرص کے مرکز O پر واقع عمودی محور کے گرد نظام گھوم سکتا ہے۔ دونوں قرص کی یکساں کثافت (کمیت فی اکائی حجم) $1.40 \times 10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ اور یکساں موٹائی 5.00 mm ہے۔ محور گھماو پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۷۰: ایک پہیا ساکن حالت سے آغاز کر کے $2.00\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ مستقل اسراع کے ساتھ گھومتا ہے۔ کسی مخصوص 3.00 s دورانیے میں پہیا 90.0 rad گھومتا ہے۔ (ا) اس 3.00 s دورانیے کے آغاز میں پہیے کی زاوی سمتی رفتار کیا ہے؟ (ب) 3.00 s دورانیے سے قبل پہیا کتنی دیر حرکت میں رہا؟

سوال ۴.۷۱: دو جسم، جن کی انفرادی کمیت 6.20 kg ہے، بلا کمیت دھاگے سے آپس میں باندھے گئے ہیں (شکل 50.10)۔ دھاگہ 2.40 cm رداس اور $7.40 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$ گھمیری جمود کے جبر ثقیل سے گزرتا ہے۔ جبر ثقیل پر دھاگہ پھسلتا نہیں؛ ہم نہیں جانتے آیا میز اور جسم کے بیچ رگڑ ہے یا نہیں؛ جبر ثقیل کا دھرا بلا رگڑ ہے۔ ساکن حالت سے رہائی پر 91.0 ms میں جبر ثقیل 0.130 rad گھومتا ہے، اور اجسام کا اسراع مستقل ہے۔

[41] hoop

(ا) جبر ثقیل کے زاوی اسراع کی قدر، (ب) اجسام کے اسراع کی قدر، (ج) دھاگے کا تناو T_1 اور (د) دھاگے کا تناو T_2 کیا ہیں؟

سوال ۴.۷۲: پتلی سلاخ، جس کی کمیت $6.40\,\mathrm{kg}$ اور لمبائی $1.20\,\mathrm{m}$ ہے، کے دونوں سر پر $1.06\,\mathrm{kg}$ کا گیند نصب کیا جاتا ہے۔ سلاخ کے مرکز پر واقع انتصابی محور پر سلاخ افقی مستوی میں گھوم سکتی ہے۔ کسی مخصوص لمحے پر سلاخ 39.0 چکر فی منٹ سے گھومتی ہے۔ رگڑ کی وجہ سے $32.0\,\mathrm{s}$ میں سے رک جاتی ہے۔ رگڑ کی آہستہ کن[۴۲] قوت مروڑ مستقل تصور کریں۔ (ا) زاوی اسراع، (ب) آہستہ کن قوت مروڑ، (ج) میکانی توانائی سے حری توانائی میں رگڑ کی بنا منتقل توانائی کی قدر، اور (د) ان $32.0\,\mathrm{s}$ میں چکر کی تعداد تلاش کریں۔ (ہ) فرض کریں آہستہ کن قوت مروڑ مستقل نہیں۔ کیا جزو ا، ب، ج، اور د مزید معلومات دیے بغیر معلوم کیے جا سکتے ہیں؟ جو معلوم کی جا سکتی ہیں ان کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

سوال ۴.۷۳: ہیلی کاپٹر کے یکساں پَر کی لمبائی $7.8\,\mathrm{m}$ اور کمیت $110\,\mathrm{kg}$ ہے، اور ایک قابلہ اس کو مدور دھرے کے ساتھ جوڑتا ہے۔ (ا) جب مدور 320 چکر فی منٹ سے گھومتا ہے (جو اس کی پوری رفتار ہے)، قابلے پر دھرے کی قوت کی قدر کیا ہو گی؟ (اشارہ: اس حساب کے لئے پَر کو کمیتی نقطہ تصور کیا جا سکتا ہے جو پَر کے مرکز کمیت پر واقع ہو۔ کیوں؟) (ب) ساکن حالت سے $6.70\,\mathrm{s}$ میں پوری رفتار تک پہنچانے کے لئے مدور پر درکار قوت مروڑ کیا ہو گی؟ ہوا کی رگڑ نظر انداز کریں (اس حساب میں پَر کو کمیتی نقطہ تصور نہیں کیا جا سکتا۔ کیوں نہیں؟ پتلی سلاخ پر یکساں کمیتی تقسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔) (ج) 320 چکر فی منٹ تک پہنچانے کے لئے قوت مروڑ پر پَر کتنا کام سر انجام دیگی؟

سوال ۴.۷۴: دو قرص اپنی اپنی وسطی انتصابی محور پر گھوم سکتے ہیں (شکل 51.10)۔ لمحہ $t = 0$ پر دونوں قرص کے حوالہ لکیر ایک جیسی سمت بند ہیں۔ قرص A پہلے سے $9.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے حرکت میں ہے۔ قرص B جو ساکن ہے اب $2.2\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ مستقل زاوی اسراع سے چل پڑتا ہے۔ (ا) حوالہ لکیروں کا زاویہ θ کس وقت t پر لمحاتی ایک جتنا ہو گا؟ (ب) کیا $t = 0$ کے بعد t وہ پہلا لمحہ ہے جب دونوں حوالہ لکیر سیدھ میں ہیں؟

سوال ۴.۷۵: رسی پر چلنے والا شخص اپنا مرکز کمیت رسی پر رکھتا ہے۔ لمبا اور بھارا ڈنڈا ہاتھ میں ہونا مددگار ثابت ہوتا ہے: اگر مرکز کمیت رسی سے دائیں منتقل ہو اور رسی پر گھوم کر گرنے کا خطرہ ہو، شخص ڈنڈے کو بائیں حرکت دے کر گھماو آہستہ کر کے سنبھلتا ہے۔ فرض کریں شخص کی کمیت $70.0\,\mathrm{kg}$ اور رسی پر گھمیری جمود $15.0\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ رسی پر اس کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہو گی اگر اس کا مرکز کمیت رسی سے $5.0\,\mathrm{cm}$ دائیں ہو، اور (ا) اس کے پاس ڈنڈا نہ ہو اور (ب) اگر اس کے پاس $14.0\,\mathrm{kg}$ ڈنڈا ہو جس کا مرکز کمیت رسی سے $10\,\mathrm{cm}$ بائیں ہو؟

سوال ۴.۷۶: اس پہیا $t = 0$ پر ساکن حالت سے آغاز کر کے مستقل زاوی اسراع سے گزرتا ہے۔ لمحہ $t = 2.0\,\mathrm{s}$ پر پہیے کی زاوی سمتی رفتار $5.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ اسراع $t = 20\,\mathrm{s}$ تک برقرار رہنے کے بعد یک دم ختم ہوتا ہے۔ وقت $t = 0$ تا $t = 40\,\mathrm{s}$ میں پہیا کتنا زاویہ طے کرتا ہے؟

سوال ۴.۷۷: تختہ گھوم $33\frac{1}{3}$ چکر فی منٹ کی رفتار سے $30\,\mathrm{s}$ میں بتدریج آہستہ ہو کر رکتا ہے۔ (ا) اس کا (مستقل) زاوی اسراع، چکر فی مربع منٹ میں، تلاش کریں۔ (ب) اس دورانیے میں تختہ کتنے چکر کاٹتا ہے؟

[۴۲] retarding

سوال ۴.۷۸: تین $L = 0.600\,\mathrm{m}$ لمبی یکساں پتلی سلاخوں سے استوار جسم بنایا گیا ہے، جو لاطینی حرف H کی شکل میں ہے (شکل 52.10)۔ جسم افقی محور پر، جو ایک ٹانگ کی ہمراہ ہے، گھوم سکتا ہے۔ جسم کا مستوی افقی رکھ کر جسم گرنے دیا جاتا ہے۔ جب یہ مستوی انتصابی مقام کو پہنچتا ہے، جسم کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۴.۷۹: (ا) دکھائیں کہ کمیت M اور رداس R کے ٹھوس بیلن کا وسطی محور پر گھمیری جمود، اور کمیت M اور رداس $R/\sqrt{2}$ کے گھیرا کا وسطی محور پر گھمیری جمود برابر ہیں۔ (ب) دکھائیں کہ کسی بھی جسم کا، جس کی کمیت M ہو، کسی بھی محور پر گھمیری جمود I معادل گھیرا کا اسی محور پر گھمیری جمود کے برابر ہو گا۔ معادل گھیرا کی کمیت M اور رداس k ذیل ہو گا۔

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

معادل گھیرا کا رداس k اس جسم کا **رداس دوار**[۴۳] کہلاتا ہے۔

سوال ۴.۸۰: دائری قرص $6.00\,\mathrm{s}$ میں مستقل زاوی اسراع کے ساتھ زاوی مقام $\theta_1 = 10.0\,\mathrm{rad}$ سے زاوی مقام $\theta_2 = 70.0\,\mathrm{rad}$ پہنچتا ہے۔ مقام θ_2 پر جسم کی زاوی سمتی رفتار $15.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ہے۔ (ا) جسم کی زاوی سمتی رفتار θ_1 پر کیا تھی؟ (ب) زاوی اسراع کیا ہے؟ (ج) ابتدائی ساکن حالت میں قرص کا زاوی مقام کیا تھا؟ (د) ابتدا سے (جس کو ہم $t = 0$ کہتے ہیں) θ بالمقابل t، اور زاوی رفتار ω بالمقابل t ترسیم کریں۔

سوال ۴.۸۱: ایک پتلی یکساں سلاخ جس کی لمبائی $2.0\,\mathrm{m}$ ہے، ایک سر پر واقع بلا رگڑ افقی کیل پر گھوم سکتی ہے (شکل 53.10)۔ افق سے $\theta = 40°$ اوپر رکھ کر ساکن حالت سے سلاخ رہا کی جاتی ہے۔ افقی مقام سے گزرتے وقت سلاخ کی زاوی رفتار توانائی کی بقا کا اصول استعمال کر کے تلاش کریں۔

سوال ۴.۸۲: ایک **چرخ ہنڈولا**[۴۴] جس کا قطر $76\,\mathrm{m}$ ہے 36 لکڑ گاڑیوں پر مشتمل ہے۔ ہر گاڑی میں 60 سوار بیٹھ سکتے ہیں۔ تمام سواریاں بٹھا کر چرخ ہنڈولا کو 1 چکر فی 2 منٹ کی مستقل زاوی رفتار سے چلایا جاتا ہے۔ صرف سواریوں کو گھمانے کے لئے درکار کام کی تخمیناً قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۸۳: کمیت $M = 500\,\mathrm{g}$ اور رداس $R = 12.0\,\mathrm{cm}$ کے یکساں قرص کے گرد بلا کمیت دھاگہ لپیٹ کر دھاگے کے سروں سے $m_1 = 400\,\mathrm{g}$ کمیت اور $m_2 = 600\,\mathrm{g}$ کمیت کی سل آویزاں کی جاتی ہیں (شکل 41.10)۔ قرص کے وسطی افقی محور پر قرص بلا رگڑ گھوم سکتا ہے؛ دھاگہ پھسلتا نہیں ہے۔ نظام ساکن حالت سے رہا کیا جاتا ہے۔ (ا) سل کے اسراع کی قدر، (ب) بائیں جانب دھاگے کا تناؤ T_1، اور (ج) دائیں جانب دھاگے کا تناؤ T_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۸۴: وسطی سائبیریا میں، جون 30 ۱۹۰۸ء کی صبح کے سات بج کر چودہ منٹ پر، $61°$ شمال خط عرض بلد اور $102°$ مشرق خط طول بلد پر، کچھ بلندی پر ایک خوفناک دھماکہ ہوا۔ جو آگ کا شعلہ اٹھا وہ جوہری دھماکے سے پہلے انسان نے کبھی نہیں دیکھا۔ یہ واقع دریا تنگسکا کے قریب پیش آیا جس کی بنا یہ **تنگسکا وقوعہ**[۴۵] کہلاتا ہے۔ ایک اتفاقی شاہد کے مطابق "آسمان کا بہت بڑا حصہ وقوعہ کی لپیٹ میں آیا"۔ یہ غالباً $140\,\mathrm{m}$ چوڑے پتھری

---

[۴۳] radius of gyration
[۴۴] Ferris wheel
[۴۵] Tunguska event

سیارچہ کے پھٹنے سے پیدا ہوا۔ (ا) صرف زمین کا گھماو مد نظر رکھتے ہوئے، معلوم کریں کہ سیارچہ کتنی دیر بعد پہنچنے پر دھماکہ $25°$ مشرق کے خط طول بلد پر واقع شہر ہلسنکی کے اوپر ہوتا۔ ایسی صورت میں شہر مکمل طور پر تباہ ہو جاتا۔ (ب) اس کے برعکس اگر سیارچہ دھاتی ہوتا، یہ سطح زمین پر پہنچ پاتا۔ کتنی دیر بعد پہنچنے پر دھماکہ بحر القیانوس میں $20°$ مغرب کے خط طول بلد پر ہوتا؟ (دھماکے سے پیدا سونامی بحر القیانوس کے دونوں اطراف ساحلی آبادی تباہ کرتا۔)

سوال ۴.۸۵: گالف کا گیند افق سے $20°$ زاویے پر $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار اور $90\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ شرح گھماو سے پھینکا جاتا ہے۔ ہوا کی گھساٹ نظر انداز کریں۔ بلند ترین نقطے تک پہنچنے تک گیند کتنے چکر کاٹتا ہے؟

سوال ۴.۸۶: دو دائری چھلوں کا مرکز ایک نقطے پر رکھ کر انہیں تین بلا کمیت سلاخوں سے ہم سطحی جوڑا جاتا ہے (شکل 54.10)۔ نظام کے مرکز پر واقع انتصابی محور کے گرد نظام، جو فی الحال ساکن ہے، گھوم سکتا ہے۔ چھلوں کی کمیت، اندرونی رداس، اور بیرونی رداس درج ذیل جدول میں پیش ہیں۔ بیرونی چھلا کے بیرونی کنارے پر $0.300\,\mathrm{s}$ کے لئے $12.0\,\mathrm{N}$ قدر کی مماسی قوت لاگو کی جاتی ہے۔ اس دورانیے میں نظام کی زاویی رفتار میں تبدیلی کیا ہو گی؟

چھلا	کمیت (kg)	اندرونی رداس (m)	بیرونی رداس (m)
1	0.120	0.0160	0.0450
2	0.240	0.0900	0.1400

سوال ۴.۸۷: بلا رگڑ افقی دھرے پر $0.20\,\mathrm{m}$ رداس کا پہیا نصب کیا جاتا ہے۔ بلا کمیت دھاگا پہیے کے گرد لپیٹ کر دھاگے کے آزاد سر کے ساتھ، افق سے $\theta = 20°$ بلا رگڑ میلان پر رکھی، $2.0\,\mathrm{kg}$ اینٹ باندھی جاتی ہے (شکل 55.10)۔ میلان سطح کے ہمراہ اینٹ $2.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اسراع سے نشیبی حرکت کرتی ہے۔ دھرے پر پہیے کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۴.۸۸: ایک پتلے کروی خول کا رداس $1.90\,\mathrm{m}$ ہے۔ خول کو $960\,\mathrm{N\,m}$ قوت مروڑ، کرہ کے مرکز پر واقع محور کے لحاظ سے، $6.20\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ زاویی اسراع دیتی ہے۔ (ا) اس محور پر کرہ کا گھمیری جمود اور (ب) خول کی کمیت کیا ہے؟

سوال ۴.۸۹: سائیکل سوار، جس کی کمیت $70\,\mathrm{kg}$ ہے، چڑھائی پر چڑھتے ہوئے باری باری سائیکل کے نشیب وار حرکت کرتے پائدان پر اپنی پوری کمیت ڈالتا ہے۔ پائدان $0.40\,\mathrm{m}$ قطر دائرے پر چلتا ہے۔ پائدان کے محور گھماو پر سائیکل سوار زیادہ سے زیادہ کتنی قوت مروڑ ڈالتا ہے۔

سوال ۴.۹۰: انجن کا اڑن پہیا $25.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاویی رفتار سے گھومتا ہے۔ انجن بند کرنے پر اڑن پہیا مستقل شرح سے بتدریج آہستہ ہو کر $20.0\,\mathrm{s}$ میں رکتا ہے۔ (ا) اڑن پہیے کا زاویی اسراع، (ب) رکنے تک طے شدہ زاویہ، اور (ج) رکنے تک کاٹے گئے چکر تلاش کریں۔

سوال ۴.۹۱: رداس $0.20\,\mathrm{m}$ کا پہیا بلا رگڑ افقی محور پر نصب ہے (شکل 19a.10)۔ محور پر پہیے کا گھمیری جمود $0.400\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ بلا کمیت دھاگہ پہیے کے محیط پر لپیٹ کر دھاگے کا دوسرا سر $6.0\,\mathrm{kg}$ اینٹ سے باندھا جاتا ہے۔ ساکن حالت سے نظام رہا کیا جاتا ہے۔ جب اینٹ کی حرکی توانائی $6.0\,\mathrm{J}$ ہوتی ہے، (ا) پہیے کی گھمیری حرکی توانائی کیا ہو گی اور (ب) اینٹ کتنا نشیب وار فاصلہ طے کر چکی ہو گی؟

سوال ۹۲.۴: **دودھیا کہکشاں**[۴۶] کے مرکز سے سورج کا فاصلہ 2.3×10^4 نوری سال ہے۔ کہکشاں کے مرکز کے گرد سورج $250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ رفتار سے گھومتا ہے۔ (ا) کہکشاں کے مرکز کے گرد سورج ایک چکر کتنے عرصہ میں مکمل کرتا ہے؟ (ب) سورج کی پیدائش سے اب تک، سورج کتنے چکر کاٹ چکا ہے۔ سورج کی پیدائش کو 4.5×10^9 سال ہو چکے ہیں۔

سوال ۹۳.۴: بلا رگڑ افقی محور پر رداس $0.20\,\mathrm{m}$ کا پہیا نصب ہے۔ محور پر پہیے کا گھمیری جمود $0.050\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ پہیے کے گرد لپٹے دھاگے کے سرے سے $2.0\,\mathrm{kg}$ اینٹ بندھی ہے جو بلا رگڑ افقی سطح پر حرکت کر سکتی ہے۔ اگر اینٹ پر $P = 3.0\,\mathrm{N}$ قدر کی قوت لاگو کی جائے، جیسا شکل 56.10 میں دکھایا گیا ہے، پہیے کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہو گی؟ دھاگہ پہیے پر پھسلتا نہیں ہے۔

سوال ۹۴.۴: ایک ہوائی جہاز کا، جو زمین کے لحاظ سے $480\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے پرواز کر رہا ہے، پنکھا 2000 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے۔ (ا) ہوا باز اور (ب) زمین پر کھڑے شخص کے نقطہ نظر سے رداس $1.50\,\mathrm{m}$ پنکھے کے پَر کا سر کس خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ جہاز کی سمتی رفتار اور پنکھے کا دھرا متوازی ہیں۔

سوال ۹۵.۴: تین کمیتوں کو بلا کمیت سلاخوں سے جوڑ کر استوار جسم بنایا گیا ہے (شکل 57.10)۔ جسم کو نقطہ P پر واقع، جسم کی سطح کو عمودی، محور پر گھمانا مقصود ہے۔ اگر $M = 0.40\,\mathrm{kg}$، $a = 30\,\mathrm{cm}$، اور $b = 50\,\mathrm{cm}$ ہو، ساکن حالت سے جسم کو $5.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار تک پہنچانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۹۶.۴: مشروب کے ڈبے میں کنجی کا شمول مشروبات کی صنعت میں ایک بڑا قدم تھا۔ ڈبے کے بالا سر میں وسطی قابلے پر کنجی حرکت کر سکتی ہے۔ کنجی کا ایک سر اوپر کھینچنے سے کنجی کا دوسرا سر ڈبے کے بالا سر کے کمزور کردہ حصے کو نیچے دباتی ہے۔ اگر آپ $10\,\mathrm{N}$ قوت سے کنجی اوپر کھینچیں، کمزور کردہ حصے پر کتنی قوت عمل کرتی ہے؟ (مشروب کا ڈبہ لے کر اس عمل پر غور کرنا ہو گا۔)

سوال ۹۷.۴: جہاز کا پَر شکل 58.10 میں پیش ہے، جو نقطہ B پر واقع انتصابی محور کے گرد 2000 چکر فی منٹ سے گھومتا ہے۔ نقطہ A کا، جو محور سے پَر کا دور ترین نقطہ ہے، رداس $1.50\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) نقطہ B اور محور سے $0.150\,\mathrm{m}$ رداسی فاصلے پر موجود نقطے کے مرکز مائل اسراع کی قدر میں فرق a کتنا ہو گا؟ (ب) a بالمقابل رداسی فاصلے کی ترسیم کھینچیں۔

سوال ۹۸.۴: بلا رگڑ افقی محور پر، شکل 59.10 میں پیش نظام استعمال کر کے، $30\,\mathrm{kg}$ کا ڈبہ اٹھایا جاتا ہے۔ بیرونی رداس $R = 0.50\,\mathrm{m}$ جبکہ **نابھ**[۴۷] کا رداس $r = 0.20\,\mathrm{m}$ ہے۔ افقی قوت $\vec{F}$، جس کی قدر $140\,\mathrm{N}$ ہے، لاگو کرنے سے ڈبہ $0.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ قدر کے اسراع سے اوپر اٹھتا ہے۔ محور پر نظام کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۹۹.۴: بلا کمیت سلاخ، جس کی لمبائی $0.780\,\mathrm{m}$ ہے، کے ایک سر پر $1.30\,\mathrm{kg}$ گیند نصب ہے۔ سلاخ کے دوسرے سر پر نظام افقی دائرے میں 5010 چکر فی منٹ رفتار سے گھومتا ہے۔ (ا) محور گھماو پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (ب) گھماو کے مخالف رخ، گیند پر ہوائی گھساٹ $2.30 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$ ہے۔ نظام کو مستقل رفتار سے گھومتے رکھنے کے لئے کتنی قوت مروڑ درکار ہو گی؟

---

[۴۶] Milky Way galaxy
[۴۷] hub

سوال ۴.۱۰۰: دو پتلی سلاخیں (جن کی انفرادی کمیت $0.20\,\mathrm{kg}$ ہے) آپس میں جوڑ کر، شکل 60.10 میں پیش، استوار جسم بنایا جاتا ہے۔ ایک سلاخ کی لمبائی $L_1 = 0.40\,\mathrm{m}$ اور دوسرے کی $L_2 = 0.50\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) چھوٹی سلاخ کے وسطی نقطے پر واقع، سطح صفحہ کو عمودی، محور پر استوار جسم کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (ب) لمبی سلاخ کے وسطی نقطے پر واقع، سطح صفحہ کو عمودی، محور پر استوار جسم کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۰۱: چار جبر ثقیل کو دو پٹوں سے ملایا جاتا ہے (شکل 61.10)۔ جبر ثقیل A (رداس $15\,\mathrm{cm}$) محرک جبر ثقیل ہے، اور $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے گھومتا ہے۔ جبر ثقیل B (رداس $10\,\mathrm{cm}$) اور جبر ثقیل A کو پٹہ 1 ملاتا ہے۔ جبر ثقیل B' (رداس $5\,\mathrm{cm}$) اور جبر ثقیل B ہم محور ہیں اور آپس میں پکے جڑے ہیں۔ جبر ثقیل C (رداس $25\,\mathrm{cm}$) اور جبر ثقیل B' کو پٹہ 2 ملاتا ہے۔ (ا) پٹہ 1 پر نقطے کی خطی رفتار، (ب) جبر ثقیل B کی زاوی رفتار، (ج) جبر ثقیل B' کی زاوی رفتار، (د) پٹہ 2 پر نقطے کی خطی رفتار، اور (ہ) جبر ثقیل C کی زاوی رفتار تلاش کریں۔ (اشارہ: اگر دو جبر ثقیل ملانے والا پٹہ نہ پھسلتا ہو، ان جبر ثقیل کے چکا کی مماسی رفتاریں برابر ہوں گی۔)

سوال ۴.۱۰۲: تین گیند کو تین سلاخ ملا کر استوار جسم دیتے ہیں (شکل 62.10)، جہاں $M = 1.6\,\mathrm{kg}$، $L = 0.60\,\mathrm{m}$، اور $\theta = 30^\circ$ ہے۔ گیند کو ذرہ تصور کیا جا سکتا ہے اور سلاخ بلا کمیت ہیں۔ (ا) نقطہ P پر واقع جسم کی سطح کو عمودی محور پر اور (ب) نقطہ P پر واقع اور $2L$ لمبی سلاخ کو عمودی، اور جسم کے مستوی میں پائی جانے والی محور پر جسم کی گھمیری حرکی توانائی اس صورت میں تلاش کریں جب جسم کی زاوی رفتار $1.2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہو۔

سوال ۴.۱۰۳: نقطہ A پر موجود افقی محور کے گرد ($3.0\,\mathrm{kg}$ کمیت اور $4.0\,\mathrm{m}$ لمبی) پتلی یکساں سلاخ آزادانہ گھومتی ہے (شکل 63.10)۔ نقطہ A سلاخ کے سرے سے $d = 1.0\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہے۔ انتصابی مقام سے گزرتے وقت سلاخ کی حرکی توانائی $20\,\mathrm{J}$ ہے۔ (ا) محور A پر سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہے؟ (ب) سلاخ کے سر B کی (خطی) رفتار اس وقت کیا ہو گی جب سلاخ انتصابی مقام سے گزر رہی ہو؟ (ج) اوپر جاتے ہوئے سلاخ کس زاویہ θ پر لمحاتی رکتی ہے؟

سوال ۴.۱۰۴: چار ذروں کو، جن کی انفرادی کمیت $0.20\,\mathrm{kg}$ ہے، چوکور کے کونوں پر رکھا جاتا ہے۔ چوکور کا اضلاع کی انفرادی لمبائی $0.50\,\mathrm{m}$ ہے۔ ذروں کو بلا کمیت سلاخوں سے جوڑا جاتا ہے۔ استوار جسم انتصابی مستوی میں افقی محور A کے گرد گھوم سکتا ہے۔ A ایک ذرے کے مرکز سے گزرتی ہے۔ سلاخ AB افقی رکھ کر جسم کو ساکن حالت سے رہا کیا جاتا ہے (شکل 64.10)۔ (ا) محور A پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہے؟ (ب) جب سلاخ AB انتصابی مقام سے جھول کر گزرتی ہے، A پر جسم کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۴.۱۰۵: چیتا کو $114\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی حیرت کن رفتار پر دوڑتا دیکھا گیا ہے۔ فرض کریں آپ چیتا کے ہمراہ گاڑی میں چلتے ہوئے چیتا کی رفتار جاننے کے لئے رفتار پیما پر نظر ڈالتے ہیں جو $114\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتا ہے۔ آپ گاڑی کو چیتا سے مستقل طور پر $8.0\,\mathrm{m}$ دور رکھتے ہیں، تاہم چیتا گاڑی کے ڈر سے مسلسل دور ہٹتے ہوئے $92\,\mathrm{m}$ رداسی راہ پر دوڑتا ہے۔ یوں آپ $100\,\mathrm{m}$ رداس کے دائرے پر گاڑی چلاتے ہیں۔ (ا) دائرے راہ پر چلتے ہوئے آپ کی اور چیتا کی زاوی رفتار کیا ہے؟ (ب) اس راہ پر چیتا کی خطی رفتار کیا ہو گی؟ (اگر آپ دائری راہ کی لمبائیوں میں فرق حساب میں شامل نہ کرتے، آپ کہتے چیتا کی رفتار $114\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے؛ جو سراسر غلط ہو گا۔ بظاہر اسی غلطی کی بنا چیتا کی رفتار اتنی زیادہ

بتائی گئی۔)

سوال ۴.۱۰۶: ایک پہیے کے چکا پر نقطے کی رفتار $6.2\,\mathrm{s}$ میں $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے مستقل شرح سے بڑھتے ہوئے $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوتی ہے۔ پہیے کا قطر $0.75\,\mathrm{m}$ ہے۔ پہیے کی اوسط زاوی اسراع کیا ہو گی؟

سوال ۴.۱۰۷: ایک جبر ثقیل، جس کا قطر $8.0\,\mathrm{cm}$ ہے، کے گرد $5.6\,\mathrm{m}$ ڈور لپیٹی جاتی ہے۔ ساکن حالت سے آغاز کر کے اس کو $1.5\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ مستقل اسراع دیا جاتا ہے۔ (ا) ڈور مکمل اترنے تک جبر ثقیل کتنا زاویہ طے کرتا ہے، اور (ب) ایسا کتنی دیر میں ہو گا؟

سوال ۴.۱۰۸: گراموفون کی تھالی $33\frac{1}{3}$ چکر فی منٹ سے گھمائی جاتی ہے۔ (ا) اس کی زاوی رفتار ریڈیئن فی سیکنڈ میں کیا ہو گی؟ تھالی کے محور گھماو سے (ب) $15\,\mathrm{cm}$ اور (ج) $7.4\,\mathrm{cm}$ رداسی فاصلے پر نقطے کی خطی رفتار کیا ہو گی؟

باب ۵

لڑھکاو، قوت مروڑ، اور زاوی معیار حرکت

۵.۱ مستقیم حرکت اور گھماو مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ لڑھکاو خالص مستقیم حرکت اور خالص گھماو کا مجموعہ ہے۔

۲. ہموار لڑھکاو میں مرکز کمیت کی رفتار اور جسم کی زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- رداس R کے پہیا کے لئے جو ہموار سطح پر لڑھک رہا ہو ذیل ہو گا:

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$$

جہاں $v_{\text{مرکز کمیت}}$ پہیے کے مرکز کمیت کی خطی رفتار اور ω پہیے کے وسط پر پہیے کی زاوی رفتار ہے۔

- پہیے کو نقطہ P کے گرد، جو "فرش" کے ساتھ مس ہے، لمحاتی گھومتا تصور کیا جا سکتا ہے۔ مرکز کمیت کے گرد اور اس نقطہ کے گرد جسم کی زاوی رفتار برابر ہے۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا باب ۴ میں ذکر کیا گیا، گھماو کا مطالعہ طبیعیات میں شامل ہے۔ غالباً، اس مطالعے کا اہم ترین اطلاق پہیے اور پہیے نما اجسام کا لڑھکاو ہے۔ یہ اطلاقی طبیعیات بہت عرصہ سے استعمال میں ہے۔ قدیم

زمانے میں بھاری اجسام لٹھا پر لڑھکاتے ہوئے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیے جاتے تھے۔ آج کل ہم گاڑی میں سامان رکھ کر ایک جگہ سے دوسری جگہ لڑھکاتے ہیں۔

لڑھکاو کی طبیعیات اور انجینئری اتنی پرانی ہے کہ اس میں نئے تصور ممکن نظر نہیں آتے۔ تاہم، **پہیے دار تختہ**[1] زیادہ پرانا نہیں۔ ہمارا کام یہاں لڑھکاو کی حرکت کو سادہ بنانا ہے۔

مستقیم حرکت اور گھماوت مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

سطح پر ہمواری سے لڑھکتے اجسام پر یہاں غور کیا جائے گا؛ یعنی جسم بغیر اچھلے یا پھسلے سطح پر حرکت کرتا ہے۔ شکل 2.11 میں ہموار لڑھکاو کی پیچیدگی دکھائی گئی ہے: اگرچہ جسم کا مرکز کمیت سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، چکا پر نقطہ یقیناً ایسا نہیں کرتا۔ بہر حال، اس حرکت کو مرکز کمیت کی مستقیم حرکت اور باقی جسم کا، اس مرکز پر، گھماو تصور کیا جا سکتا ہے۔

اسے سمجھنے کے لئے، فرض کریں آپ سڑک کے کنارے کھڑے ہو کر، گزرتے ہوئے سائیکل کے پہیے کا مطالعہ کرتے ہیں (شکل 3.11)۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، پہیے کا مرکز کمیت O مستقل رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ سے آگے بڑھتا ہے۔ نقطہ P، جہاں پہیا سڑک کو مس کرتا ہے، بھی $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے آگے بڑھتا ہے، اور یوں P ہمیشہ O کے ٹھیک نیچے رہتا ہے۔

وقتی دورانیہ t کے دوران، O اور P دونوں فاصلہ s طے کرتے ہیں۔ سائیکل سوار کے نقطہ نظر سے، پہیا زاویہ θ طے کرتا ہے اور جو نقطہ t کے آغاز میں زمین پر تھا قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے۔ مساوات ۱۷.۴ قوسی فاصلہ s اور زاویہ θ کا تعلق دیتی ہے:

$$s = \theta R \tag{۵.۱}$$

جہاں R پہیے کا رداس ہے۔ پہیے کے مرکز (یہاں پہیے کا مرکز کمیت) کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ ہم $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ سے جان سکتے ہیں۔ پہیے کے مرکز پر پہیے کی زاوی رفتار $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ہو گی۔ یوں R مستقل رکھتے ہوئے، مساوات ۱.۵ کا وقت کے ساتھ تفرق ذیل دیگا۔

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R \qquad (\text{ہموار لڑھکاو حرکت}) \tag{۵.۲}$$

دونوں کا ملاپ۔ شکل 4.11 میں دکھایا گیا ہے کہ پہیے کی لڑھکتی حرکت خالص مستقیم حرکت اور خالص گھمیری حرکت کا مجموعہ ہے۔ شکل 4a.11 خالص گھمیری حرکت پیش کرتی ہے (جس میں مرکز پر محور گھماو ساکن تصور کیا جاتا ہے): پہیے کا ہر نقطہ، مرکز پر، زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ (ایسی حرکت پر باب ۴ میں غور کیا گیا۔) پہیے کے باہری کنارے (چکا) پر ہر نقطے کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ مساوات ۲.۵ دیتی ہے۔ شکل 4b.11 میں خالص مستقیم حرکت پیش ہے (جس میں تصور کیا جاتا ہے کہ پہیا گھوم نہیں رہا): پہیے کا ہر نقطہ $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے دائیں حرکت کرتا ہے۔

---

[1] skateboards

شکل 11.4a اور شکل 11.4b مل کر، شکل 11.4c میں پیش، پہیے کی اصل لڑھکنی حرکت دیتی ہیں۔ حرکات کے ملاپ میں پہیے کا نچلا نقطہ (P) ساکن ہے جبکہ پہیے کا بالا نقطہ (T)، کسی بھی دوسرے نقطہ سے زیادہ تیز، $2v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ شکل 11.5 میں ان نتائج کا اثباتی مظاہرہ کیا گیا ہے، جہاں سائیکل کے لڑھکنی پہیے کا **وقتی افشا** [۲] پیش ہے۔ آپ دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پہیے کا بالا حصہ زیادہ تیزی سے حرکت کرتا ہے، چونکہ اس حصے کی تیلیاں مدھم نظر آتی ہیں۔

سطح پر دائری جسم کی ہموار لڑھکنی حرکت کو، شکل 11.4a اور شکل 11.4b کی طرح، خالص گھمیری حرکت اور خالص مستقیم حرکت میں علیحدہ علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔

لڑھکاو بطور خالص گھماو

شکل 11.6 میں پہیے کا لڑھکاو نئے انداز میں پیش کیا گیا ہے؛ جس نقطے پر پہیا سڑک مس کرتا ہے، "سڑک" کے اس نقطے سے گزرتی محور پر پہیا گھومتا ہے؛ یہ محور $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت میں ہو گی۔ ہم لڑھکاو کو، شکل 11.4c میں نقطہ P سے گزرتی، پہیے کو عمودوار، محور پر خالص گھماو تصور کرتے ہیں۔ یوں شکل 11.6 میں سمتیات، لڑھکنی پہیے پر نقطوں کی لمحاتی سمتی رفتار دیتے ہیں۔

سوال: ساکن مشاہدہ کار اس محور پر سائیکل کے لڑھکنی پہیے کو کیا زاوی رفتار مختص کرے گا؟

جواب: وہی زاوی رفتار ω جو سائیکل سوار مرکز کمیت کے گرد خالص گھماو کا مشاہدہ کرتے ہوئے پہیے کو مختص کرتا ہے۔

اس جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر، ہم ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پہیے کے فراز کی خطی رفتار تلاش کرتے ہیں۔ پہیے کا رداس R لیتے ہوئے، پہیے کا فراز شکل 11.6 میں P پر واقع محور سے $2R$ فاصلے پر ہو گا، لہٰذا فراز کی خطی رفتار (مساوات ۵.۲ استعمال کرکے) ذیل ہو گی:

$$v_{\text{فراز}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{مرکز کمیت}}$$

جو شکل 11.4c کے عین مطابق ہے۔ آپ شکل 11.4c میں پیش، نقطہ O اور P کی، خطی رفتار کی تصدیق بھی اس طرح کر سکتے ہیں۔

آزمائش ۱

ایک سائیکل کے پچھلے پہیے کا رداس اگلے پہیے کے رداس کا دگنا ہے۔ (ا) کیا چلنے کے دوران بڑے پہیے کے فراز کی خطی رفتار چھوٹے پہیے کے فراز کی خطی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس کے برابر ہے؟ (ب) کیا پچھلے پہیے کی زاوی رفتار اگلے پہیے کی زاوی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا دونوں برابر ہیں؟

[۲] timeexposure

۵.۲ لڑھکاو کی قوتیں اور حرکی توانائی

مقاصد
اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. مرکز کمیت کی مستقیم حرکی توانائی اور مرکز کمیت کے گرد گھمیری حرکی توانائی کا مجموعہ حاصل کر کے جسم کی حرکی توانائی معلوم کر پائیں گے۔

۲. ہمواری کے ساتھ لڑھکتی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اور جسم پر سرانجام کام کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. ہموار لڑھکاو (لہٰذا بغیر پھسلن) کے لئے، میکانی توانائی کی بقا استعمال کر کے ابتدائی توانائی کی قیمتوں اور اختتامی توانائی کی قیمتوں کا تعلق جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ہموار لڑھکتی پہیے کی حرکی توانائی ذیل ہے،

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$$

جہاں مرکز کمیت پر جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ اور پہیے کی کمیت M ہے۔

- اگر پہیا مسرع کیا جائے، اور پہیا اب بھی ہمواری کے ساتھ لڑھکتا ہے، مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ اور مرکز پر زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہوگا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R$$

- اگر θ زاویہ کے میلان پر پہیا ہمواری کے ساتھ اترتے ہوئے لڑھکتا ہو، اس کا اسراع، میلان کے ہمراہ اوپر رخ محور x پر، ذیل ہوگا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2}$$

لڑھکاو کی حرکی توانائی

آئیں ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکتی پہیے کی حرکی توانائی معلوم کریں۔ اگر ہم شکل 6.11 میں نقطہ P سے گزرتی محور پر لڑھکاو کو خالص گھماو تصور کریں، تب مساوات ۴.۳۴ ذیل دیگی،

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{۵.۳}$$

جہاں P پر واقع محور کے گرد پہیے کا گھمیری جمود I_P اور پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ مساوات ۴.۳۶ کے مسئلہ متوازی محور ($I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2$) کے تحت ذیل ہو گا،

$$I_P = I_{\text{مرکز کمیت}} + MR^2 \tag{۵.۴}$$

جہاں M پہیے کی کمیت، مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، اور R (پہیے کا رداس) عمودی فاصلہ h ہے۔ مساوات ۵.۴ کو مساوات ۵.۳ میں ڈال کر:

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

اور مساوات ۵.۲ ($v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$) استعمال کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۵.۵}$$

جزو $\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2$ کو مرکز کمیت سے گزرتی محور پر پہیے کے لڑھکاو سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4a.11)، اور جزو $\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$ کو پہیے کے مرکز کمیت کی مستقیم حرکت سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4b.11)۔ یوں ذیل قاعدہ ابھرتا ہے۔

لڑھکنی جسم کی دو قسم کی حرکی توانائیاں ہوں گی: مرکز کمیت پر گھماو کی بدولت گھمیری حرکی توانائی ($\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2$) اور مرکز کمیت کی مستقیم حرکت کی بدولت مستقیم حرکی توانائی ($\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$)۔

لڑھکاو کی قوتیں

رگڑ اور لڑھکاو

اگر پہیا مستقل رفتار سے لڑھکتا ہو، جیسا شکل 3.11 میں دکھایا گیا ہے، نقطہ تماس P پر پہیا ہرگز نہیں پھسلتا لہٰذا اس نقطے پر رگڑ نہیں ہو گی۔ تاہم، اگر صافی قوت پہیے کو تیز یا آہستہ کرتی ہو، تب یہ صافی قوت مرکز کمیت کو حرکت کے رخ اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ بخشے گی۔ ساتھ ہی پہیا تیز یا آہستہ گھومے گا، لہٰذا زاوی اسراع α بھی ہو گا۔ ان اسراع کی بدولت پہیا P پر پھسل سکتا ہے۔ یوں P پر رگڑی قوت عمل کرتی ہوئے پہیے کو پھسلنے سے روکتی ہے۔

اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی اور حرکت ہموار لڑھکاو ہو گا۔ ایسی صورت میں، (R مستقل رکھ کر) وقت کے ساتھ مساوات ۵.۲ کا تفرق لے کر خطی اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کی قدر اور زاوی اسراع کی قدر α کا تعلق حاصل کر سکتے ہیں۔ بائیں ہاتھ $\mathrm{d}v_{\text{مرکز کمیت}}/\mathrm{d}t$ درحقیقت $a_{\text{مرکز کمیت}}$ اور دائیں ہاتھ $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ درحقیقت α ہے۔ یوں ہموار لڑھکاو کے لئے ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R \qquad \text{(ہموار لڑھکنی حرکت)} \tag{۵.۶}$$

جب پہیے پر عمل پیرا اضافی قوت کی بدولت پہیا پھسلے، تب شکل 3.11 میں P پر حرکی رگڑی قوت $\vec{f}_k$ عمل کرے گی؛ حرکت تب ہموار لڑھکاو نہیں ہو گی، اور مساوات ۵.۲ کا اطلاق نہیں ہو گا۔ اس باب میں صرف ہموار لڑھکنی حرکت پر بات کی جائے گی۔

شکل 7.11 میں، افقی سطح پر دائیں رخ لڑھکتے ہوئے، سائیکل مقابلے کے آغاز کی طرح، پہیا زیادہ تیز گھمایا جاتا ہے۔ زیادہ تیز گھماو کی بدولت P پر پہیا پھسل کر بائیں جانا چاہتا ہے۔ نقطہ P پر دائیں رخ رگڑی قوت اس رجحان کا مقابلہ کرتی ہے۔ اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی (جیسا دکھایا گیا ہے)، حرکت ہموار لڑھکاو ہو گی، اور مساوات ۵.۲ کا اطلاق ہو گا۔ (رگڑ کی غیر موجودگی میں سائیکل مقابلہ ممکن نہیں ہو گا۔)

اگر شکل 7.11 میں پہیا آہستہ کیا جائے، ہمیں شکل دو طرح تبدیل کرنی ہو گی: مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کا رخ اور نقطہ P پر رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کا رخ اب بائیں رخ ہو گا۔

میلان سے نیچے لڑھکاو

شکل 8.11 میں گول یکساں جسم، جس کی کمیت M اور رداس R ہے، زاویہ θ کے میلان پر ہمواری سے، محور x کے ہمراہ، نیچے لڑھک رہا ہے۔ ہم میلان کے ہمراہ اترائی کے رخ جسم کے اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ کا ریاضی فقرہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ نیوٹن کے قانون دوم کی خطی صورت $(F_{\text{صافی}} = Ma)$ اور زاوی صورت $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ صورت دونوں استعمال کر کے ایسا کرتے ہیں۔

جسم پر قوتوں کا خاکہ بنانے سے آغاز کرتے ہیں (شکل 8.11)۔

۱. جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ نشیب وار ہے۔ اس سمتیہ کی دم جسم کے مرکز کمیت پر رکھی جاتی ہے۔ میلان کے ہمراہ جزو $F_g \sin\theta$ ہے جو $Mg\sin\theta$ کے برابر ہو گا۔

۲. میلان کو عمودی دار جزو $\vec{F}_N$ ہے۔ یہ جزو نقطہ تماس P پر عمل کرتا ہے، تاہم شکل 8.11 میں، $\vec{F}_N$ کا رخ تبدیل کیے بغیر، اس کو یوں کھسکایا گیا ہے کہ اس کی دم جسم کے مرکز کمیت پر ہو۔

۳. نقطہ تماس P پر عمل پیرا سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ میلان کے ہمراہ چڑھائی کے رخ ہے۔ (کیا آپ بتا سکتے ہیں، کیوں؟ اگر P پر جسم پھسلے، وہ اترائی کے رخ پھسلے گا۔ یوں مخالف رگڑی قوت چڑھائی کے رخ ہو گی۔)

ہم شکل 8.11 میں محور x کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم $(F_{\text{صافی},x} = ma_x)$ لکھتے ہیں۔

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{صافی},x} \tag{۵.۷}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور $a_{\text{صافی},x}$، پائے جاتے ہیں۔ (ہم f_s کی قیمت، رگڑی قوت کی زیادہ سے زیادہ قیمت، $f_{s,\text{بلند تر}}$ فرض نہیں کر سکتے۔ ہم صرف اتنا جانتے ہیں کہ رگڑی قوت اتنی ہے کہ جسم پھسلتا نہیں اور میلان پر ہمواری سے لڑھکتا اترتا ہے۔)

ہم اب جسم کے مرکز کمیت پر جسم کے گھماو پر نیوٹن کے قانون دوم کا اطلاق کرتے ہیں۔ پہلے، مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ استعمال کر کے مرکز کمیت کے لحاظ سے جسم پر قوت مروڑ لکھتے ہیں۔ رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے معیار اثر کا بازو R ہے، لہٰذا اس کی قوت مروڑ Rf_s ہو گی، جو اس لئے مثبت ہے کہ شکل 8.11 میں یہ جسم کو خلاف

گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ مرکز کمیت کے لحاظ سے قوت $\vec{F}_g$ اور $\vec{F}_N$ کے معیار اثر بازو صفر ہیں، لہٰذا ان کی قوت مروڑ صفر ہوں گی۔ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ میں لکھتے ہیں۔

$$Rf_s = I_{\text{مرکز کمیت}}\alpha \tag{۵.۸}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور α، پائے جاتے ہیں۔

جسم ہموار لڑھکتا ہے لہٰذا مساوات ۵.۶ $(a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R)$ استعمال کرکے نامعلوم $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ اور α کا تعلق لکھا جا سکتا ہے۔ تاہم، ہمیں ہوشیاری سے کام لینا ہوگا، چونکہ یہاں $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ منفی (محور x پر منفی رخ ہے) اور α مثبت (خلاف گھڑی) ہے۔ یوں مساوات ۵.۸ میں α کی جگہ $-a_{\text{مرکز کمیت},x}/R$ ڈال کر f_s کے لئے حل کرکے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$f_s = -I_{\text{مرکز کمیت}}\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} \tag{۵.۹}$$

مساوات ۵.۷ میں f_s کی جگہ مساوات ۵.۹ کا دایاں ہاتھ ڈال کر ذیل ملتا ہے۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2} \tag{۵.۱۰}$$

اس مساوات کو استعمال کر کے، افق کے ساتھ زاویہ θ کے میلان پر کے ہمراہ لڑھکتے جسم کا خطی اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ حاصل ہوگا۔

یاد رہے، تجاذبی قوت جسم کو میلان پر اترنے پر مجبور کرتی ہے، تاہم جسم کو گھومنے اور یوں لڑھکنے پر رگڑی قوت مجبور کرتی ہے۔ اگر آپ رگڑ خارج کر دیں (مثلاً، میلان کو تیل سے چکنا کرکے) یا $Mg\sin\theta$ کو $f_{s,\text{بلند تر}}$ سے زیادہ کر دیں، ہموار لڑھکاو خارج ہو جائے گا اور جسم لڑھکنے کی بجائے میلان پر پھسل کر اترے گا۔

آزمائش ۲

قرص A اور B ایک جیسے ہیں اور فرش پر ایک جتنی رفتار سے لڑھکتے ہیں۔ قرص A کے سامنے میلان آتا ہے جس پر یہ زیادہ سے زیادہ h تک پہنچتا ہے۔ قرص B متماثل، لیکن بلا رگڑ، میلان پر چڑھتا ہے۔ کیا h سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر بلندی تک B پہنچے گا؟

نمونی سوال ۵.۱: یکساں گیند، جس کی کمیت $M = 6.00\,\text{kg}$ اور رداس R ہے، زاویہ $\theta = 30.0°$ میلان سے، ساکن حالت سے آغاز کرکے، ہموار لڑھکتا اترتا ہے (شکل 8.11)۔

(ا) انتصابی $h = 1.20\,\text{m}$ نیچے زمین کو پہنچتا کر گیند کی رفتار کیا ہوگی؟

کلیدی تصورات

چونکہ صرف تجاذبی قوت، جو بقائی قوت ہے، گیند پر کام سر انجام دیتی ہے، لہٰذا میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند و زمین نظام کی میکانی توانائی E کی بقا ہو گی۔ میلان سے گیند پر عمودی دار قوت گیند کی راہ کو عمودی ہونے کی وجہ سے کوئی کام سر انجام نہیں دیتی۔ گیند پھسلتا نہیں (ہموار لڑھکتا ہے) لہٰذا رگڑی قوت کوئی توانائی حری توانائی میں تبدیلی نہیں کرتی۔

یوں میکانی توانائی کی بقا ہو گی $E_f = E_i$:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{۵.۱۱}$$

جہاں زیر نوشت f اور i بالترتیب (زمین پر پہنچ کر) اختتامی اور (ساکن حالت) ابتدائی قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ تجاذبی مخفی توانائی کی ابتدائی قیمت $U_i = Mgh$ (جہاں M گیند کی کمیت ہے) اور اختتامی قیمت $U_f = 0$ ہے۔ ابتدائی حرکی توانائی $K_i = 0$ ہے اختتامی حرکی توانائی جاننے کے لئے اضافی تصور درکار ہے: چونکہ گیند لڑھکتا ہے اس کی حرکی توانائی میں مستقیم اور گھمیری جزو شامل ہوں گے، جنہیں شامل کرنے کے لئے مساوات ۵.۵ کا دایاں ہاتھ استعمال کرتے ہیں۔

حساب: مساوات ۵.۱۱ میں ڈالنے سے ذیل حاصل ہو گا:

$$(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}) + 0 = 0 + Mgh \tag{۵.۱۲}$$

جہاں گیند کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گیند کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، زمین پر پہنچ کر گیند کی رفتار (جو ہم تلاش کرنا چاہتے ہیں) $v_{\text{مرکز کمیت}}$، اور زمین پر پہنچ کر زاوی رفتار ω ہے۔

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، ہم مساوات ۵.۲ استعمال کر کے ω کی جگہ $v_{\text{مرکز کمیت}}/R$ پُر کر کے مساوات ۵.۱۲ میں نامعلوم متغیرات کی تعداد کم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے، اور جدول 2f.10 سے $I_{\text{مرکز کمیت}}$ کی جگہ $\frac{2}{5}MR^2$ ڈال کر $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کے لئے حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\tfrac{10}{7})gh} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(1.20\,\mathrm{m})} \\ &= 4.10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

یاد رہے، جواب M اور R پر منحصر نہیں۔

(ب) میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند پر رگڑی قوت کی قدر اور رخ کیا ہیں؟

کلیدی تصور

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، مساوات ۵.۹ گیند پر رگڑی قوت دیگی۔

حل: مساوات ۹.۱۵ استعمال کرنے سے قبل ہمیں مساوات ۵.۱۰ سے گیند کا اسراع معلوم کرنا ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -I_{\text{مرکز کمیت}} \frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}MR^2 \frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma_{\text{مرکز کمیت},x}$$

$$= -\frac{2}{5}(6.00\,\mathrm{kg})(-3.50\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 8.40\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب})$$

یاد رہے ہمیں کمیت M درکار تھی جبکہ رداس R نہیں تھا۔ یوں، $30°$ میلان پر $6.00\,\mathrm{kg}$ ہموار لڑھکتے گیند پر، گیند کے رداس سے قطع نظر، رگڑی قوت $8.40\,\mathrm{N}$ ہو گی، تاہم بڑی کمیت کی صورت میں رگڑی قوت زیادہ ہو گی۔ □

۵.۳ ڈوری دار لٹو

مقاصد اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے **ڈوری دار لٹو**[۳] کا آزاد جسمی خاکہ بنا پائیں گے۔

۲. جان پائیں گے کہ ڈوری دار لٹو، ایسا جسم ہے جو $90°$ زاویہ میلان پر ہموار اوپر نیچے لڑھکتا ہے۔

۳. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے ڈوری دار لٹو کے اسراع اور گھمیری جمود کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. ڈوری پر اوپر یا نیچے حرکت کے دوران ڈوری دار لٹو کی ڈور میں تناو تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- ڈوری دار لٹو جو ڈور پر اوپر یا نیچے حرکت کرتا ہو کو $90°$ میلان پر ہموار لڑھکتا جسم تصور کیا جا سکتا ہے۔

ڈوری دار لٹو

ڈوری پر h فاصلہ اتر کر ڈوری دار لٹو کی مخفی توانائی میں mgh کمی واقع ہو گی جبکہ اس کی حرکی توانائی کے مستقیم جزو $(\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}})$ اور گھمیری جزو $(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2)$ میں اضافہ ہو گا۔

ڈوری دار لٹو کی ایک نئی قسم میں ڈور کو دھرے کے ساتھ سخت باندھنے کے بجائے ڈور کو دھرے کے گرد ڈھیلا گھیرا دیا جاتا ہے۔ جب لٹو نیچے اترتے ہوئے ڈور کے پیندا کو "ٹکراتا" ہے، دھرے پر ڈور اوپر وار قوت لاگو کر کے لٹو کی نشیبی حرکت روکتی ہے۔ اس کے بعد لٹو صرف گھمیری حرکی توانائی کے ساتھ (دھرا گھیرے میں چکر کاٹتا ہوا) گھومتا ہے۔ لٹو ("سوتے ہوئے") چکر کاٹتا رہتا ہے؛ ڈور کو جھٹکا دینے پر ڈور دھرے کو پکڑتی ہے، "لٹو بیدار ہوتا ہے"، اور اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ ڈور کے پیندا پر لٹو کی گھمیری حرکی توانائی (اور یوں سونے کا دورانیہ) بڑھانے کی خاطر لٹو کو ساکن حالت سے روانا کرنے کی بجائے ابتدائی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ اور ω کے ساتھ نشیب وار پھینکا جاتا ہے۔

---

[۳] Yo-Yo

ڈور پر نشیب وار اترنے کے دوران لٹو کا خطی اسراع $a_{\text{مرکز کمیت}}$ جاننے کے لئے، شکل 8.11 میں میلان پر اترتے لڑھکتے جسم کی طرح، نیوٹن کا قانون دوم (خطی اور گھمیری روپ میں) استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ماسوائے ذیل، تجزیہ بالکل اسی طرح ہو گا۔

۱. افق کے ساتھ θ زاویے کے میلان پر اترنے کے بجائے ڈوری دار لٹو افق کے ساتھ $90°$ زاویے کی ڈور پر اترتا ہے۔

۲. رداس R کی بیرونی سطح پر لڑھکنے کے بجائے ڈوری دار لٹو رداس R_0 کے دھرے پر لڑھکتا ہے (شکل 9a.11)۔

۳. رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے بجائے، ڈوری دار لٹو کو ڈور کا تناو $\vec{T}$ آہستہ کرتا ہے (شکل 9b.11)۔

موجودہ تجزیہ بھی مساوات ۱۰.۵ دے گا۔ آئیں مساوات ۱۰.۵ کی ترقیم تبدیل کرکے اور $\theta = 90°$ ڈال کر خطی اسراع ذیل لکھتے ہیں:

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR_0^2} \tag{۵.۱۳}$$

جہاں لٹو کے مرکز کمیت پر لٹو کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ اور کمیت M ہے۔ ڈوری پر اوپر چڑھنے کے دوران ڈوری دار لٹو کا اسراع یہی نشیبی اسراع ہو گا۔

۵.۴ قوت مروڑ پر نظر ثانی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس نقطہ پر قوت مروڑ تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. ذرے پر عمل پیرا قوت کی ذرے پر قوت مروڑ، اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم کے روپ میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور قوت سمتیہ کے صلیبی ضرب سے حاصل کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کرکے قوت مروڑ کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- تین ابعاد میں، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ ایک سمتیہ مقدار ہو گی، جو کسی مقررہ نقطہ (عموماً مبدا) کے لحاظ سے تعین کی جاتی ہے؛ اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جہاں $\vec{F}$ ذرے پر لاگو قوت اور $\vec{r}$ کسی مقررہ نقطے کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ ہے، جو ذرے کا مقام دیتا ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی قدر τ ذیل ہو گی:

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

جہاں $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی دار جزو $F_{\perp}$، اور $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو $r_{\perp}$ ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کا رخ صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

قوت مروڑ پر نظر ثانی

باب ۴ میں مقررہ محور کے گرد گھومنے کے قابل استوار جسم کے لئے قوت مروڑ τ کی تعریف پیش کی گئی۔ ہم قوت مروڑ کی تعریف کو وسعت دے کر (مقررہ محور کے بجائے) مقررہ نقطے کے لحاظ سے کسی بھی راہ پر حرکت کرتے ہوئے انفرادی ذرے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ راہ کا دائری ہونا ضروری نہیں، اور ہم قوت مروڑ کو سمتیہ $\vec{\tau}$ لکھتے ہیں جس کا رخ کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ قوت مروڑ کی قدر کلیہ سے اور رخ صلیبی ضرب کے دایاں ہاتھ قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 10a.11 میں، نقطہ A پر مستوی xy میں ایسا ایک ذرہ دکھایا گیا ہے۔ ذرے پر، مستوی میں قوت، $\vec{F}$ عمل کرتی ہے، اور مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ دیتا ہے۔ مقررہ نقطہ O کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا **قوت** مروڑ $\vec{\tau}$ کی تعریف ذیل ہے۔

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad \text{قوت مروڑ کی تعریف} \tag{۵.۱۴}$$

قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی اس تعریف میں سمتی (صلیبی) ضرب کی تحسیب حصہ 3.3 کے قواعد سے کی جا سکتی ہے۔ $\vec{\tau}$ کا رخ جاننے کے لئے، سمتیہ $\vec{F}$ کو (رخ تبدیل کیے بغیر) کھسکا کر اس کی دم مبدا O پر رکھی جاتی ہے؛ یوں، جیسا شکل 10b.11 میں دکھایا گیا ہے، سمتی ضرب کے دونوں سمتیات کی دم ایک نقطے پر ہو گی۔ اب ہم شکل 19a.3 میں پیش دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ پر رکھ کر (ضرب میں پہلا سمتیہ ہے) $\vec{F}$ کی طرف جھکاتے ہیں (جو ضرب میں دوسرا سمتیہ ہے)۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\tau}$ کا رخ دیگا۔ شکل 10b.11 میں $\vec{\tau}$ کا رخ محور z کے مثبت رخ ہے۔

$\vec{\tau}$ کی قدر جاننے کے لئے، ہم مساوات 27.3 $(c = ab\sin\phi)$ کا عمومی نتیجہ بروئے کار لاتے ہیں، جو ذیل دیگا:

$$\tau = rF\sin\phi \tag{۵.۱۵}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے دم ایک نقطے پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 10b.11 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۵.۱۵ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = rF_{\perp} \tag{۵.۱۶}$$

جہاں $F_{\perp}$ (جو $F\sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{r}$ کا $\vec{F}$ کا عمودی دار جزو ہے۔ شکل 10c.11 کو دیکھ کر مساوات ۵.۱۵ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = r_{\perp}F \tag{۵.۱۷}$$

جہاں $r_\perp$ (جو $r \sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو ($\vec{F}$ کے خط عمل اور O کے بیچ عمود دار فاصلہ) ہے۔

آزمائش ۳

ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، مثبت محور z کے ہمراہ پایا جاتا ہے۔ اگر ذرے پر قوت مروڑ (ا) صفر ہو، (ب) محور x کے منفی رخ ہو، اور (ج) محور y کے منفی رخ ہو، قوت مروڑ پیدا کرنے والی قوت کا رخ کیا ہو گا؟

نمونی سوال ۵.۲: **قوت کی بدولت ذرے پر قوت مروڑ**

شکل 11a.11 میں، 2.0 N قدر کی تین قوت ذرے پر عمل کرتی ہیں۔ ذرہ، مستوی xy میں، نقطہ A پر ہے، جس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، جہاں $r = 3.0\,\text{m}$ اور $\theta = 30°$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ہر قوت کی انفرادی قوت مروڑ کیا ہے؟

کلیدی تصور

چونکہ قوت ایک مستوی میں نہیں پائی جاتیں، ہمیں صلیبی ضرب استعمال کرنا ہو گی، جس کی قدر مساوات ۵.۱۵ $(\tau = rF\sin\phi)$ دیگی اور رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

حساب: ہم مبدا O کے لحاظ سے قوت مروڑ جاننا چاہتے ہیں لہٰذا دیا گیا تعین گر سمتیہ صلیبی ضرب میں درکار سمتیہ $\vec{r}$ ہو گا۔ قوت اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ جاننے کے لئے ہم شکل 11a.11 میں دیے گئے سمتیہ قوت باری باری یوں کھسکاتے ہیں کہ ان کی دم O پر ہو۔ انتقال کے بعد قوت $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، اور $\vec{F}_3$ بالترتیب شکل 11b.11، شکل 11c.11، اور شکل 11d.11 میں، جو مستوی xz کا نظارہ دیتی ہیں، دکھائی گئی ہیں (جن میں سمتیہ قوت اور تعین گر سمتیہ کے بیچ زاویے باآسانی نظر آتے ہیں)۔ شکل 11d.11 میں $\vec{r}$ اور $\vec{F}_3$ کے رخ کے بیچ زاویہ $90°$ ہے اور علامت $\otimes$ کہتی ہے $\vec{F}_3$ صفحہ میں عمود دار اندر رخ ہے۔ (صفحہ سے عمود دار نکلنے کی صورت میں $\odot$ علامت استعمال کی جاتی ہے۔)

مساوات ۵.۱۵ استعمال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\tau_1 = rF_1\sin\phi_1 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 150°) = 3.0\,\text{N m}$$
$$\tau_2 = rF_2\sin\phi_2 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 120°) = 5.2\,\text{N m}$$
$$\tau_3 = rF_3\sin\phi_3 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 90°) = 6.0\,\text{N m} \qquad \text{(جواب)}$$

اب دائیں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ رکھ کر $\vec{F}$ کے رخ (سمتیات کے رخ کے بیچ چھوٹے زاویے) گھماتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کا انگوٹھا، جو چار انگلیوں کو عمود دار رکھا گیا ہے، قوت مروڑ کا رخ دیگا۔ یوں $\vec{\tau}_1$ شکل 11b.11 میں صفحے کے اندر جانے کے رخ ہو گا؛ $\vec{\tau}_2$ شکل 11c.11 میں صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہو گا؛ اور $\vec{\tau}_3$ کا رخ شکل 11d.11 میں دکھایا گیا ہے۔ تینوں قوت مروڑ سمتیات شکل 11e.11 میں پیش ہیں۔ □

۵.۵ زاوی معیار حرکت

مقاصد
اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ زاوی معیار حرکت ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس مقررہ نقطے کے لحاظ سے زاوی معیار حرکت تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور معیار حرکت سمتیہ کا صلیبی ضرب لے کر ذرے کا زاوی معیار حرکت تعین کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے زاوی معیار حرکت کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ایک ذرہ، جس کا خطی معیار حرکت $\vec{p}$، کمیت m، اور خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ ہو، کا مقررہ نقطے کے لحاظ سے (جو عموماً مبدا ہو گا) زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی تعریف ذیل سمتی مقدار ہے۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

- زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر ℓ ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\ell &= rmv\sin\phi \\ &= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \\ &= r_{\perp}p = r_{\perp}mv\end{aligned}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ اور $\vec{v}$ کے عمودی دار جزو $p_{\perp}$ اور $v_{\perp}$ ہیں، اور مقررہ نقطے سے مبسوط $\vec{p}$ تک عمودی دار فاصلہ $r_{\perp}$ ہے۔

- دایاں ہاتھ قاعدہ $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا: دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ پر (ابتدائی طور) رکھ کر انہیں گھما کر $\vec{p}$ کے رخ پر رکھیں۔ دائیں ہاتھ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا۔

زاوی معیار حرکت

یاد کریں، خطی معیار حرکت $\vec{p}$ اور خطی معیار حرکت کی بقا کا اصول انتہائی طاقتور اوزار ہیں۔ انہیں استعمال کر کے نتائج کی، مثلاً دو گاڑیوں کے تصادم کی تفصیل جانے بغیر تصادم کی، پیشگوئی کی جا سکتی ہے۔ یہاں ہم $\vec{p}$ کے زاوی مد مقابل پر تبصرہ شروع کرتے ہیں جس کا اختتام حصہ 8.11 میں بقائی اصول کے مد مقابل پر ہو گا۔

شکل 12.11 میں مستوی xy میں نقطہ A سے کمیت m اور خطی معیار حرکت $\vec{p}\ (= m\vec{v})$ کا ذرہ گزرتا دکھایا گیا ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا **زاوی معیار حرکت**[۴] $\vec{\ell}$ سمتیہ مقدار ہو گا جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \text{(زاوی معیار حرکت کی تعریف)} \tag{۵.۱۸}$$

جہاں O کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے جب ذرہ معیار حرکت $\vec{p}\ (= m\vec{v})$ کے رخ کرتا ہے، اس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ مبدا O کے گرد گھمیری حرکت کرتا ہے۔ غور کریں، O پر زاوی معیار حرکت کے لئے ضروری نہیں کہ ذرہ خود O کے گرد گھومتا ہو۔ مساوات ۵.۱۴ اور مساوات ۵.۱۸ کا موازنہ کرنے سے معلوم ہو گا کہ زاوی معیار حرکت اور خطی معیار حرکت کا آپس میں وہی رشتہ ہے جو قوت مروڑ کا قوت کے ساتھ ہے۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں زاوی معیار حرکت کی اکائی کلو گرام مربع میٹر فی سیکنڈ $(\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}})$ ہے، جو جاول سیکنڈ $(\mathrm{J\,s})$ کا معادل ہے۔

رخ۔ شکل 12.11 میں زاوی معیار حرکت سمتیہ $\vec{\ell}$ کا رخ جاننے کے لئے، ہم سمتیہ $\vec{p}$ کو کھسکا کر کے اس کی دم مبدا O پر رکھتے ہیں۔ اس کے بعد صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے انگلیوں کو $\vec{r}$ سے $\vec{p}$ لپیٹتے ہیں۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ، شکل 12.11 میں، محور z کا مثبت رخ دیتا ہے۔ یہ مثبت رخ، محور z پر تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ کے خلاف گھڑی گھماو کے عین مطابق ہے، جو ذرے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ($\vec{\ell}$ کی منفی قیمت محور z پر گھڑی وار گھماو ظاہر کرے گی۔)

قدر۔ زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات 27.3 کا عمومی نتیجہ ذیل لکھتے ہیں:

$$\ell = rmv \sin\phi \tag{۵.۱۹}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کی دم ایک نقطہ پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 12a.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp \tag{۵.۲۰}$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ کا عمودوار جزو $p_\perp$ ہے، اور $\vec{r}$ کو $\vec{v}$ کا عمودوار جزو $v_\perp$ ہے۔ شکل 12b.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv \tag{۵.۲۱}$$

جہاں مبسوط $\vec{p}$ سے O کا عمودوار فاصلہ $r_\perp$ ہے۔

اہم۔ دو پہلو پر غور کریں: (1) زاوی معیار حرکت صرف کسی مخصوص مبدا کے لحاظ سے معنی خیز ہے اور (2) اس کا رخ ہر صورت اس مستوی کو عمودی ہو گا جو تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ اور خطی معیار حرکت سمتیہ $\vec{p}$ مل کر بناتے ہیں۔

آزمائش ۴

[۴] angular momentum

شکل ؟؟ا میں ذرہ 1 اور 2 نقطہ O کے گرد بالترتیب رداس $2\,\text{m}$ اور $4\,\text{m}$ کے دائروں پر حرکت کرتے ہیں۔ شکل ب میں ذرہ 3 اور 4 نقطہ O سے بالترتیب $4\,\text{m}$ اور $2\,\text{m}$ عمودوار فاصلوں پر خط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ ذرہ 5 نقطہ O سے باہری رخ حرکت کرتا ہے۔ تمام ذروں کی کمیت اور رفتار برابر ہیں۔ (ا) نقطہ O پر زاوی معیار حرکت کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، ذروں کی درجہ بندی کریں۔ (ب) نقطہ O پر کن ذروں کا زاوی معیار حرکت منفی ہے؟

نمونی سوال ۵.۳: **دو ذروی نظام کا زاوی معیار حرکت**

افقی راہوں پر دو ذرے مستقل معیار حرکت کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔ شکل 13.11 میں ان کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ ذرہ 1، جس کے معیار حرکت کی قدر $p_1 = 5.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ $\vec{r}_1$ ہے، نقطہ O سے $2.0\,\text{m}$ فاصلے پر گزرے گا۔ ذرہ 2، جس کے معیار حرکت کی قدر $p_2 = 2.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ $\vec{r}_2$ ہے، نقطہ O سے $4.0\,\text{m}$ فاصلے پر گزرے گا۔ دو ذروی نظام کا نقطہ O پر صافی زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کیا ہوگا؟

کلیدی تصور

انفرادی زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_1$ اور $\vec{\ell}_2$ معلوم کرنے کے بعد جمع کر کے ہم صافی معیار حرکت $\vec{L}$ تلاش کر سکتے ہیں۔ ان کی قدریں مساوات ۵.۱۸ تا مساوات ۵.۲۱ میں ہر ایک سے تعین کی جا سکتی ہیں۔ البتہ، ہمیں عمودوار فاصلے $r_{\perp 1}\ (= 2.0\,\text{m})$ اور $r_{\perp 2}\ (= 4.0\,\text{m})$ اور معیار حرکت کی قدریں p_1 اور p_2 دی گئی ہیں لہٰذا مساوات ۵.۲۱ کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔

حل: ذرہ 1 کے لئے مساوات ۵.۲۱ ذیل دیگی۔

$$\begin{aligned}\ell_1 &= r_{\perp 1}p_1 = (2.0\,\text{m})(5.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1})\\ &= 10\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

سمتیہ $\vec{\ell}_1$ کا رخ مساوات ۵.۱۸ اور سمتیات کے صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ دے گا۔ صلیبی ضرب $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ، شکل 13.11 کے مستوی کو عمودوار ہوگا۔ یہ مثبت رخ ہے، جو ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ $\vec{r}_1$ کا نقطہ O کے گرد خلاف گھڑی گھماو کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 1 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$\ell_1 = +10\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$$

اسی طرح $\vec{\ell}_2$ کی قدر ذیل

$$\begin{aligned}\ell_2 &= r_{\perp 2}p_2 = (4.0\,\text{m})(2.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1})\\ &= 8.0\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

اور $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ سمتیہ حاصل ضرب صفحہ سے باہر رخ ہے، جو منفی رخ ہے، اور جو ذرہ 2 کی حرکت کے دوران O کے گرد $\vec{r}_2$ کے گھڑی وار حرکت کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 2 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$\ell_2 = -8.0\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$$

دو ذروی نظام کا صافی زاوی معیار حرکت ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} L &= \ell_1 + \ell_2 = +10\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} + (-8.0\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}) \\ &= +2.0\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

مثبت علامت کہتی ہے O پر نظام کا صافی معیار حرکت صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہے۔ □

۵.۶ نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. زاوی روپ میں نیوٹن کا قانون دوم استعمال کر کے، کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، ذرے پر عمل پیرا قوت مروڑ اور ذرے کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کا رشتہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

- نیوٹن کا قانون دوم کا زاوی روپ ذیل ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$$

جہاں $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ ذرے پر صافی قوت مروڑ اور $\vec{\ell}$ ذرے کا زاوی معیار حرکت ہے۔

نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

نیوٹن کا قانون دوم ذیل روپ میں:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{واحد ذرہ}) \tag{۵.۲۲}$$

واحد ذرے کے لئے، قوت اور خطی معیار حرکت کے بیچ قریبی رشتہ اجاگر کرتا ہے۔ ہم خطی اور زاوی مقادیر کی متوازیت دیکھ چکے ہیں اور توقع کر سکتے ہیں کہ قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کے بیچ بھی قریبی تعلق ہو گا۔ مساوات ۵.۲۲ کو دیکھ کر ہم ذیل تعلق کی توقع کرتے ہیں۔

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{واحد ذرہ}) \tag{۵.۲۳}$$

یقیناً، مساوات ۵.۲۳ واحد ذرے کے لئے نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے:

ذرے پر تمام قوت مروڑ کا (سمتی) مجموعہ ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی کے برابر ہو گا۔

□

کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، جو عموماً محددی نظام کا مبدا ہو گا، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ اور زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ تعین کیے بغیر مساوات ۵.۲۳ بے معنی ہو گی۔

مساوات ۵.۲۳ کا ثبوت

ہم مساوات ۵.۱۸ سے آغاز کرتے ہیں، جو ذرے کے زاوی معیار حرکت کی تعریف ہے:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

جہاں $\vec{r}$ ذرے کا تعین گر سمتیہ اور $\vec{v}$ ذرے کی سمتی رفتار ہے۔ دونوں اطراف کا تفرق[۵] t کے لحاظ سے لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m\left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}\right) \tag{۵.۲۴}$$

البتہ، $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ ذرے کا اسراع $\vec{a}$، اور $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ ذرے کی سمتی رفتار ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۴ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

اب $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ہے (چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے لہٰذا سمتیہ کا اپنے ساتھ سمتی ضرب ہمیشہ صفر کے برابر ہو گا۔) یوں آخری جزو خارج ہو گا اور ذیل رہ جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

ہم نیوٹن کا قانون دوم $(\vec{F}_{\text{صافی}} = m\vec{a})$ استعمال کرکے $m\vec{a}$ کی جگہ $\vec{F}_{\text{صافی}}$ ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{صافی}} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) \tag{۵.۲۵}$$

یہاں علامت $\sum$ کہتی ہے تمام قوتوں کے سمتی ضرب $\vec{r} \times \vec{F}$ کا مجموعہ لینا ہو گا۔ البتہ، مساوات ۵.۱۴ سے ہم جانتے ہیں (درج بالا) ہر سمتی ضرب کسی ایک قوت سے وابستہ قوت مروڑ ہو گا۔ یوں، مساوات ۵.۲۵ ذیل کہتی ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$$

[۵] سمتی حاصل ضرب کا تفرق لیتے ہوئے مستعمل مقادیر کی ترتیب برقرار رکھیں۔ یوں یہاں $\vec{r}$ ہمیشہ $\vec{v}$ سے پہلے ہو گا۔

جو مساوات ۵.۲۳ ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش ۵

کل ؟؟ میں کسی ایک لمحے پر ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، اور ذرے کو مسرع کرنے والی قوتوں کے چار ممکنہ رخ دیے گئے ہیں۔ تمام قوت سطح xy میں ہیں۔(ا) نقطہ O پر ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی $(\mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t)$ کی قدر کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی کریں۔(ب) نقطہ O پر کونسی قوت تبدیلی کی منفی شرح دیتی ہے؟

نمونی سوال ۵.۴: **قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کا وقتی تفرق**

ایک ذرہ جس کی کمیت $0.500\,\mathrm{kg}$ ہے اور جس کا تعین گر سمتیہ ذیل ہے، مستقیم خط پر حرکت میں ہے (شکل 14a.11):

$$\vec{r} = (-2.00t^2 - t)\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$$

جہاں $\vec{r}$ میٹر میں اور t سیکنڈ میں ہے، اور آغاز $t = 0$ پر ہوتا ہے۔ تعین گر سمتیہ مبدا سے ذرے کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں، ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ اور ذرے پر قوت مروڑ $\vec{\tau}$ مبدا کے لحاظ سے (یا مبدا پر) تلاش کریں۔ ذرے کی حرکت کو مد نظر رکھتے ہوئے ان مقادیر کی الجبرائی علامت کی وجہ پیش کریں۔

کلیدی تصورات

(1) جس نقطہ پر ذرے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرنا ہو اس کی نشاندہی کرنا لازم ہے۔ یہاں وہ نقطہ مبدا پر واقع ہے۔(2) مساوات ۵.۱۸ $(\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}))$ ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ دیتی ہے۔(3) ذرے کے زاوی معیار حرکت سے وابستہ علامت ($+$ یا $-$)، ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ کے (محور گھماو کے گرد) گھماو کی سمت دیتی ہے: گھڑی وار منفی اور خلاف گھڑی مثبت ہو گا۔(4) اگر ذرے پر قوت مروڑ اور ذرے کا زاوی معیار حرکت ایک نقطہ پر حاصل کیے گئے ہوں، تب قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کا تعلق مساوات ۵.۲۳ $(\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t)$ دیگی۔

حساب: مساوات ۵.۱۸ استعمال کر کے مبدا پر زاوی معیار حرکت تلاش کرنے کے لئے ضروری ہے کہ پہلے تعین گر سمتیہ کا وقتی تفرق لے کر ذرے کی سمتی رفتار کا الجبرائی فقرہ حاصل کیا جائے۔ مساوات 10.4 $(\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t)$ کو دیکھ کر ہم ذیل لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((-2.00t^2 - t)\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\,) \\ &= (-4.00t - 1.00)\hat{\imath}\end{aligned}$$

جہاں $\vec{v}$ میٹر فی سیکنڈ میں ہے۔

اس کے بعد مساوات 27.3 میں صلیبی ضرب کا دکھایا گیا ڈھانچہ استعمال کر کے $\vec{r}$ اور $\vec{v}$ کا صلیبی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

یہاں $\vec{r}$ کو عمومی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{v}$ کو عمومی سمتیہ $\vec{b}$ ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ، ہم ضرورت سے زیادہ کام نہیں کرنا چاہتے، آئیں عمومی صلیبی ضرب میں پُر کردہ بدل پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $\vec{r}$ میں z جزو اور $\vec{v}$ میں y اور z اجزاء نہیں پائے جاتے، اس عمومی صلیبی ضرب کا صرف آخری جزو $(-b_x a_y)\hat{k}$ غیر صفر ہے۔ یوں، زیادہ الجبرائی دوڑ کے بغیر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-4.00t - 1.00)(5.00)\hat{k} = (20.0t + 5.00)\hat{k}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

یاد رہے، ہمیشہ کی طرح صلیبی ضرب جو سمتیہ دیتی ہے وہ ابتدائی سمتیات کو عمود دار ہوگا۔

مساوات ۵.۱۸ پوری کرنے کے لئے، کمیت سے ضرب دے کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= (0.500\,\mathrm{kg})[(20.0t + 5.00)\hat{k}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}]\\ &= (10.0t + 2.50)\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

مبدا پر قوت مروڑ اب مساوات ۵.۲۳ سے فوراً حاصل ہوگا:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10.0t + 2.50)\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\\ &= 10.0\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = 10.0\hat{k}\ \mathrm{N\,m} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

جو محور z کے مثبت رخ ہے۔

ہمارا $\vec{\ell}$ کا نتیجہ کہتا ہے زاوی معیار حرکت محور z کے مثبت رخ ہے۔ تعین گر سمتیہ کے گھماو کی صورت میں "مثبت" نتیجے کا مطلب سمجھنے کے لئے اس سمتیہ کی قیمت مختلف اوقات پر معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
t &= 0, & \vec{r}_0 &= 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}\\
t &= 1.00\,\mathrm{s}, & \vec{r}_1 &= -3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}\\
t &= 2.00\,\mathrm{s}, & \vec{r}_2 &= -10.0\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

یہ نتائج شکل 14b.11 میں پیش ہیں؛ ہم دیکھتے ہیں کہ ذرے کے ساتھ ساتھ چلنے کے لئے $\vec{r}$ خلاف گھڑی گھومتا ہے۔ یہی گھماو کا مثبت رخ ہے۔ یوں، اگرچہ ذرہ خود سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، مبدا کے لحاظ سے یہ اس کی حرکت خلاف گھڑی ہے، اور یوں اس کا زاوی معیار حرکت مثبت ہے۔

ہم $\vec{\ell}$ کے رخ کا مطلب، صلیبی ضرب (یہاں $\vec{v} \times \vec{r}$ یا آپ چاہیں $m\vec{r} \times \vec{v}$، جو ایک رخ دیتے ہیں) کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے سمجھ سکتے ہیں۔ ذرے کی حرکت کے دوران کسی بھی معیار اثر کے لئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں

صلیبی ضرب کے اول سمتیہ $\vec{r}$ کے رخ رکھی جاتی ہیں (شکل 14c.11)۔ ہاتھ یوں سمت بند کیا جاتا ہے کہ ہتھیلی کے گرد انگلیاں با آسانی گھما کر صلیبی ضرب کے دوسرے سمتیہ $\vec{v}$ کے رخ کی جائیں (شکل 14d.11)۔ اس پورے عمل کے دوران انگوٹھے کو چار انگلیوں کے لحاظ سے عمود دار رکھا جاتا ہے۔ انگوٹھا صلیبی ضرب کے نتیجے کا رخ دیگا۔ جیسا شکل 14e.11 میں دکھایا گیا ہے، ماحصل سمتیہ محور z کے مثبت رخ (جو شکل کے مستوی سے سیدھا باہر نکلتا ہے) اور گزشتہ نتیجے کے عین مطابق ہے۔ شکل 14e.11 میں $\vec{\tau}$ کا رخ بھی دیا گیا ہے، جو محور z کے مثبت رخ ہے؛ چونکہ، زاوی معیار حرکت اسی رخ ہے اور اس کی قدر بڑھ رہی ہے۔ □

۵.۷ استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ذروں پر مشتمل نظام کے لئے، نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ میں استعمال کر کے نظام پر صافی قوت مروڑ اور نظام کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کی شرح کا تعلق جان پائیں گے۔

۲. مقررہ محور کے گرد گھومتے استوار جسم کے زاوی معیار حرکت اور اسی محور کے گرد جسم کے گھمیری جمود اور زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. اگر دو جسم ایک ہی محور گھماو کے گرد گھومتے ہوں، ان کے کل زاوی معیار حرکت کا حساب کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ذروں پر مشتمل نظام، کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت کا مجموعہ ہوگا۔

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$

- اس زاوی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ کے برابر ہوگی (جو نظام کے اندرونی ذروں اور نظام کے باہر ذروں کے باہم عمل سے پیدا قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ ہوگا)۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(ذروں پر مشتمل نظام)}$$

- مقررہ محور پر گھومتے استوار جسم کے لئے،، محور گھماو کے متوازی زاوی معیار حرکت کا جزو ذیل ہوگا۔

$$L = I\omega \qquad \text{(استوار جسم، مقررہ محور)}$$

ذروں پر مشتمل نظام کا زاوی معیار حرکت

مبدا کے لحاظ سے ذروں پر مشتمل نظام کے زاوی معیار حرکت پر غور کرتے ہیں۔ نظام کا کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کا (سمتی) مجموعہ ہو گا۔

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \tag{۵.۲۶}$$

انفرادی زاوی معیار حرکت کو زیر نوشت i سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دیگر ذروں کے ساتھ یا نظام کے بیرون کے ساتھ باہم عمل کی بنا انفرادی ذرے کا زاوی معیار حرکت وقت کے ساتھ تبدیل ہو سکتا ہے۔ ہم $\vec{L}$ میں پیدا تبدیلی مساوات ۵.۲۶ کا (ذیل) وقتی تفرق معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_i}{\mathrm{d}t} \tag{۵.۲۷}$$

مساوات ۵.۲۳ سے ہم دیکھتے ہیں کہ i ویں ذرے پر صافی قوت مروڑ $\mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t$ ہو گی۔ مساوات ۵.۲۷ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\text{صافی},i} \tag{۵.۲۸}$$

یعنی، نظام کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تبدیلی کی شرح انفرادی ذروں پر قوت مروڑ کے سمتی مجموعہ کے برابر ہو گا۔ ان قوت مروڑ میں (ذروں کے بیچ قوتوں کی بنا) اندرونی قوت مروڑ اور (ذروں پر نظام سے باہر اجسام کی قوت کی بنا) بیرونی قوت مروڑ شامل ہیں۔ تاہم، ذروں کے بیچ قوت (نیوٹن کے قانون سوم کی بنا) جوڑیوں کے روپ میں ہو گی لہٰذا ان کی مجموعی قوت مروڑ صفر ہو گی۔ یوں، نظام کے کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کو صرف نظام پر عمل پیرا بیرونی قوت مروڑ تبدیل کرتی ہیں۔

صافی بیرونی قوت مروڑ۔ نظام میں تمام ذروں پر بیرونی قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ صافی بیرونی قوت مروڑ کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۸ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ذروں پر مشتمل نظام}) \tag{۵.۲۹}$$

جو نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے۔ اس کے تحت ذیل ہو گا۔

> ذروں پر مشتمل نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ نظام کے کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہو گی۔

مساوات ۵.۲۹ اور $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{صافی}}$ (مساوات 27.9) مماثل ہیں تاہم اول الذکر زیادہ احتیاط مانگتی ہے: قوت مروڑ اور نظام کا زاوی معیار حرکت ایک مبدا کے لحاظ سے ناپنا لازمی ہے۔ اگر اندرونی جمودی چھوکٹ کے لحاظ سے نظام کا مرکز کمیت مسرع نہ ہو، مبدا کسی بھی نقطے پر ہو سکتا ہے؛ اگر مسرع ہو، تب لازم ہے کہ مبدا مرکز کمیت پر ہو۔ مثال کے طور پر، پہیے کو ذروں پر مشتمل نظام تصور کریں۔ اگر زمین کے لحاظ سے ساکن محور پر پہیا گھومتا ہو، تب مساوات ۵.۲۹ استعمال کرتے وقت زمین کے لحاظ سے کوئی بھی ساکن نقطہ بطور مبدا تسلیم کیا جا سکتا ہے۔ البتہ، اگر پہیا مسرع محور کے گرد گھومتا ہو (جیسے جب پہیا میلان پر لڑھکتا نیچے آتا ہے)، تب صرف پہیے کا مرکز کمیت مبدا تسلیم کیا جا سکتا ہے۔

مقررہ محور پر استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

ذروں پر مشتمل نظام (ذروی نظام) جو ایک استوار جسم دیتا ہے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرتے ہیں۔ شکل 15a.11 میں ایسا ایک جسم دکھایا گیا ہے۔ محور z یہاں مقررہ محور گھماو ہے جس کے گرد جسم مستقل زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ اس محور پر ہم جسم کا زاوی معیار حرکت جاننا چاہتے ہیں۔

ہم جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کا انفرادی زاوی معیار حرکت معلوم کر کے ان کے z جزو کا مجموعہ لے کر ایسا کر سکتے ہیں۔ شکل 5a.11 میں کمیت Δm_i کا کمیتی ٹکڑا محور z کے گرد دائری راہ پر حرکت کرے گا۔ مبدا O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}_i$ دیگا۔ اس ٹکڑے کے دائری راہ کا رداس $r_{\perp i}$ ہو گا، جو ٹکڑے اور محور z کے بیچ عمودی فاصلہ ہے۔

مبدا O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ کی قدر مساوات ۵.۱۹ دیگی:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

جہاں p_i اور v_i کمیتی ٹکڑے کا خطی معیار حرکت اور خطی رفتار ہے، اور $\vec{r}_i$ اور $\vec{p}_i$ کے بیچ زاویہ 90° ہے۔ اس کمیتی ٹکڑے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ شکل 5b.11 میں دکھایا گیا ہے؛ اس کا رخ $\vec{r}_i$ اور $\vec{p}_i$ دونوں کو لازماً عمود دار ہو گا۔

جزو z۔ ہم محور گھماو کے، جو یہاں محور z ہے، متوازی $\vec{\ell}_i$ کا جزو جاننا چاہتے ہیں۔ جزو z ذیل ہو گا۔

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i}\Delta m_i v_i$$

پورے جسم کے زاوی معیار حرکت کا z جزو معلوم کرنے کے لئے جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کے زاوی معیار حرکت کے z جزو کا مجموعہ لینا ہو گا۔ چونکہ $v = \omega r_\perp$ ہے لہٰذا ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_i \\ &= \omega\Big(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\Big) \end{aligned} \tag{۵.۳۰}$$

جدول ۱.۵: مستقیم اور گھمیری حرکت کے مزید مطابقتی متغیرات اور رشتے

گھمیری		مستقیم	
$\vec{\tau}\,(=\vec{r}\times\vec{F})$	قوت مروڑ	$\vec{F}$	قوت
$\vec{\ell}\,(=\vec{r}\times\vec{p})$	زاوی معیار حرکت	$\vec{p}$	خطی معیار حرکت
$\vec{L}\,(=\sum\vec{\ell}_i)$	زاوی معیار حرکت	$\vec{P}\,(=\sum\vec{p}_i)$	خطی معیار حرکت
$L=I\omega$	زاوی معیار حرکت	$\vec{P}=M\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}}$	خطی معیار حرکت
$\vec{\tau}_{\text{صافی}}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	نیوٹن کا قانون دوم	$\vec{F}_{\text{صافی}}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$	نیوٹن کا قانون دوم
$\vec{L}=$ مستقل	قانون بقا	$\vec{P}=$ مستقل	قانون بقا

یہاں ω مستقل (جسم کے تمام نقطوں کے لئے ایک برابر) ہے لہٰذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات ۵.۳۰ میں $\sum\Delta m_i r_{\perp i}^2$ مقررہ محور کے گرد جسم کا گھمیری جمود I ہے (مساوات ۴.۳۳ دیکھیں)۔ یوں مساوات ۵.۳۰ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L=I\omega \qquad \text{(استوار جسم، مقررہ محور)} \tag{۵.۳۱}$$

ہم نے زیر نوشت z نہیں لکھا، تاہم آپ نے یاد رکھنا ہو گا کہ مساوات ۵.۳۱ میں زاوی معیار حرکت محور گھماو پر زاوی معیار حرکت ہو گا۔ (ہم نے کوئی محور گھماو لینی تھی۔ یہاں محور z لی گئی۔ لہٰذا زاوی معیار حرکت اس محور گھماو کے لحاظ سے ہو گا جس پر اسے حاصل کیا گیا ہو۔) ساتھ ہی اس مساوات میں I بھی اسی محور گھماو کے لحاظ سے ہو گا۔

جدول ۱.۵، جو جدول ۱.۴ کو وسعت دیتا ہے، مطابقتی خطی اور زاوی رشتے پیش کرتا ہے۔

آزمائش ۶

قرص، گھیرا، اور کرہ کو، لٹو کی طرح دھاگا لپیٹ کر، مقررہ وسطی محور پر گھمایا جاتا ہے (شکل ؟؟)۔ دھاگا تینوں جسم پر ایک جتنی مستقل مماسی قوت $\vec{F}$ لاگو کرتا ہے۔ تینوں جسم ابتدائی طور ساکن ہیں، ان کی کمیت اور رداس ایک برابر ہیں۔ گھومتے اجسام کی درجہ بندی (ا) وسطی محور پر زاوی معیار حرکت اور (ب) زاوی رفتار کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، کریں۔

۵.۸ زاوی معیار حرکت کی بقا

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. کسی مخصوص محور کے ہمراہ نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ کی عدم موجودگی میں، زاوی معیار حرکت کی بقا استعمال کر کے محور پر ابتدائی زاوی معیار حرکت کی قیمت کا رشتہ بعد کی قیمت کے ساتھ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

- نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ صفر ہونے کی صورت میں، نظام کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ ایک مستقل ہو گا۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \qquad (\text{جدا نظام})$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad (\text{جدا نظام})$$

اس کو زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون کہتے ہیں۔

زاوی معیار حرکت کی بقا

ہم توانائی کی بقا اور خطی معیار حرکت کی بقا کی بات کر چکے، جو طاقتور قوانین بقا ہیں۔ اب زاوی معیار حرکت کی بقا کی بات کرتے ہیں، جو تیسرا قانون بقا ہے۔ ہم مساوات ۵.۲۹ $(\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t)$ سے آغاز کرتے ہیں، جو نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے۔ بیرونی صافی قوت مروڑ کے عدم موجودگی میں یہ مساوات $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = 0$ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۲}$$

یہ نتیجہ، جو ذیل دو طرح بھی لکھا جا سکتا ہے، **زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون**[۲] کہلاتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} t_f \text{ بعد میں وقت } \\ \text{صافی زاوی معیار حرکت} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \text{ ابتدائی وقت } \\ \text{صافی زاوی معیار حرکت} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۳}$$

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ ذیل کہتی ہیں۔

نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ صفر ہونے کی صورت میں، اس سے قطع نظر کہ نظام کے اندر کیا تبدیلیاں رونما ہوں، نظام کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ برقرار رہے گا (ایک مستقل ہو گا)۔

---

[۲] law of conservation of angular momentum

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ سمتیہ مساوات ہیں: جو تین آپس میں عمود دار رخ پر زاوی معیار حرکت کی بقا کی تین جزوی مساوات دیں گی۔ نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ موجود ہونے کی صورت میں، قوت مروڑ پر منحصر ہو گا، آیا زاوی معیار حرکت کی بقا صرف ایک یا دو رخ ہو، تاہم، تینوں رخ زاوی معیار حرکت کی بقا کبھی نہیں ہو گی۔

اگر کسی محور کے ہمراہ نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ کا جزو صفر ہو، تب اس سے قطع نظر کہ نظام میں کیا تبدیلیاں رونما ہوں، اس محور کے ہمراہ نظام کے زاوی معیار حرکت کا جزو تبدیل نہیں ہو گا۔

یہ ایک طاقتور فقرہ ہے: یہاں ہم نظام کے ابتدائی اور اختتامی حالت میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ درمیانی حالت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔

اس قاعدے کا اطلاق شکل 15.11 میں پیش جدا جسم پر، جو محور z کے گرد گھومتا ہے، کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کسی طرح جسم، محور گھماو کے لحاظ سے کمیت کی تقسیم نو کر کے، محور گھماو پر اپنا گھمیری جمود تبدیل کرتا ہے۔ مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ کہتی ہیں جسم کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ مساوات ۵.۳۳ میں (گھمیری محور پر زاوی معیار حرکت کی) مساوات ۵.۳۱ ڈال کر یہ قانون بقا کو ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad (۵.۳۴)$$

اس مساوات میں زیر نوشت i اور f کمیتی تقسیم نو سے قبل اور اس کے بعد گھمیری جمود اور زاوی رفتار ظاہر کرتے ہیں۔

باقی دو قوانین بقا کی طرح، جن پر ہم بحث کر چکے ہیں، مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ نیوٹنی میکانیات کی حدود سے باہر بھی قابل اطلاق ہیں۔ ان کا اطلاق ان ذروں پر بھی ہو گا جو روشنی کی رفتار کے قریب رفتار پر حرکت میں ہوں (جہاں نیوٹنی میکانیات کارآمد نہیں رہتی اور جہاں خصوصی نظریہ اضافت استعمال کرنا ہو گا)، اور ان کا اطلاق زیر جوہر ذروں پر بھی ہو گا (جہاں کوانٹم میکانیات کا راج چلتا ہے)۔ آج تک ایسی کوئی مثال نہیں دیکھی گئی جو زاوی معیار حرکت کی بقا کے قانون کو مطمئن نہ کرتی ہو۔

اب ہم تین ایسی مثالوں پر بحث کرتے ہیں جن میں اس قانون کی دخل اندازی پائی جاتی ہے۔

۱. **چکر کھاتا رضاکار** شکل 16.11 میں ایک طالب علم تپائی پر، جو انتصابی محور پر گھوم سکتی ہے، بیٹھا دکھایا گیا ہے۔ پھیلے ہاتھوں میں وزن تھامے طالب علم کو ابتدائی زاوی رفتار ω_i سے گھمایا گیا۔ اس کا زاوی معیار حرکت سمتیہ $\vec{L}$ انتصابی محور پر اوپر رخ ہے۔

طالب علم ہاتھ جسم کے قریب کرتا ہے؛ کمیت محور گھماو کے قریب کرنے سے طالب علم کا گھمیری جمود I_i سے گھٹ کر I_f ہو گا، اور اس کے گھومنے کی شرح ω_i سے بڑھ کر ω_f ہو گی۔ ہاتھ پھیلا کر (وزن دور کر کے) طالب علم اپنی رفتار دوبارہ گھٹاتا ہے۔ طالب علم، تپائی، اور وزن پر مشتمل نظام پر کوئی صافی بیرونی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی۔ یوں، اس سے قطع نظر کہ طالب علم اپنے ہاتھ کہاں رکھتا ہے، محور گھماو پر نظام کا

زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو گا۔ شکل 16a.11 میں طالب علم کا زاوی رفتار ω_i کافی کم ہے اور اس کا گھمیری جمود I_i نسبتاً زیادہ۔ مساوات ۵.۳۴ کے تحت شکل 16b.11 میں I_f کے گھٹنے کی تلافی، زاوی رفتار میں اضافہ کرتا ہے۔

۲. **غوطہ باز** شکل 17.11 میں کمانی دار تختے سے غوطہ باز ڈیڑھ کلابازیاں کھاتا دکھایا گیا ہے۔ جیسا آپ توقع کر سکتے ہیں، اس کا مرکز کمیت قطع مکافی راہ پر چلتا ہے۔ کمانی دار تختے سے، کلاباز اپنے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر، غیر مبہم زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کے ساتھ روانا ہوتا ہے، جو شکل 17.11 میں صفحہ کو عمود دار ہو گا۔ پرواز کے دوران کلاباز پر کوئی صافی بیرونی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی، لہٰذا محور گھماو پر اس کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ ہاتھ اور پیر جسم کے قریب کرنے پر اسی محور کے لحاظ سے، اس کے گھمیری جمود میں کمی رونما ہو گی، اور یوں مساوات ۵.۳۴ کے تحت اس کے زاوی رفتار میں اضافہ پیدا ہو گا۔ سطح پانی کو پہنچ کر کلاباز پورے جسم کو سیدھ میں کر کے گھمیری جمود بڑھا کر اور زاوی رفتار گھٹاتا ہے، تاکہ پانی میں داخل ہوتے وقت کم سے کم چھینٹیں اڑائے۔ زیادہ پیچیدہ غوطہ، جس میں کلاباز جسم کو بل دیتے ہوئے کلابازیاں کھاتا ہے، پوری پرواز کے دوران، غوطہ باز کے زاوی معیار حرکت کی، قدر اور رخ دونوں میں، بقا لازماً ہو گی۔

۳. **لمبی چھلانگ** جب کھلاڑی دوڑ کر لمبی چھلانگ کے لئے زمین سے اچھلتا ہے، افقی محور پر کھلاڑی کو آخری قدم آگے رخ گھماو کا زاوی معیار حرکت دیتا ہے۔ ایسا گھماو کھلاڑی کو زمین پر صحیح طریقے سے اترنے نہیں دیتا۔ زمین پر پہنچ کر کھلاڑی کی ٹانگیں اکٹھی اور اس زاویے پر آگے ہونی چاہیے کہ ریت میں ایڑیوں کا نشان زیادہ سے زیادہ فاصلے پر بنے۔ اڑان کے بعد کوئی بیرونی قوت مروڑ عمل کرتی ہے لہٰذا زاوی معیار حرکت (کی بقا کی بدولت) تبدیل نہیں ہو گا۔ البتہ، کھلاڑی بازووں کو چکر دے کر زاوی معیار حرکت کا بیشتر حصہ بازووں کو منتقل کر سکتا ہے (شکل 18.11)۔ یوں جسم سیدھا رہ کر اتار کے دوران درست سمت بند ہو گا۔

۴. بازیگر ایک پاوں پر کھڑا ہو کر دوسرے ٹانگ کو جسم کے ساتھ 90° زاویے پر رکھ کر نہایت کم زاوی رفتار سے گھومتا ہے (شکل 19a.11)۔ اس کی زاوی رفتار بمشکل نظر آتی ہے۔ وہ تیزی سے ٹانگ نیچے کر کے اچھلتا ہے؛ یوں جسم اور ٹانگوں کے بیچ زاویہ θ ہو گا (شکل 19b.11)۔ عمود دار ٹانگ کا زاویہ کم کرنے سے اس کا گھمیری جمود کم ہو گا۔ بازیگر کے جسم پر کوئی بیرونی صافی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی لہٰذا اس کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ یوں گھمیری جمود کم ہونے کی وجہ سے اس کی زاوی رفتار بڑھے گی۔ تماشائی کو یکدم تیز گھومنا حیران کرتا ہے۔ واپس زمین کو پہنچنے سے قبل بازیگر ٹانگ کو عمود دار کر کے زاوی رفتار دوبارہ کم کر کے زمین پر اترتا ہے۔

آزمائش ۷

ایک چھوٹا قرص، جس کے چکا پر بھونرا بیٹھا ہے، انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر بھونرا قرص کے وسط کی جانب کلبلائے، کیا بھونرا و قرص نظام کا (ا) گھمیری جمود، (ب) زاوی معیار حرکت، اور (ج) زاوی رفتار (وسطی محور کے لحاظ سے) بڑھے گا (گی)، گھٹے گا (گی)، یا تبدیل نہیں ہو گا (گی)؟

نمونی سوال ۵.۵: **زاوی معیار حرکت کی بقا، گھومتے پہیے کا مظاہرہ**

شکل 20a.11 میں ایک طالب علم تپائی پر بیٹھا دکھایا گیا ہے۔ تپائی انتصابی محور پر گھوم سکتی ہے۔ طالب علم، جو ابتدائی طور ساکن ہے، سائیکل کا پہیا پکڑے ہوئے ہے، جس کے چکا کا وزن سیسہ سے بڑھایا گیا ہے۔ وسطی محور کے لحاظ سے پہیے کا گھمیری جمود $I_w = 1.2\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔(چکے پر سیسہ لگانے پہیے کا گھمیری جمود بڑھایا گیا ہے۔)

پہیے کا زاوی رفتار 3.9 چکر فی سیکنڈ ہے اور فضا سے نیچے دیکھ کر اس کا رخ خلاف گھڑی ہے۔ پہیے کا دھرا انتصابی ہے، اور اس کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}_w$ کا رخ انتصابی اوپر وار ہے۔

طالب علم پہیے کو الٹ کرتا ہے (شکل 20b.11) لہٰذا اب فضا سے نیچے دیکھتے ہوئے پہیا گھڑی وار گھومتا ہے۔ اس کا زاوی معیار حرکت اب $-\vec{L}_w$ ہو گا۔ پہیا الٹ کرنے کی وجہ سے طالب علم، تپائی، اور پہیے کا وسط بطور مرکب استوار جسم تپائی کے محور گھماو کے گرد گھمیری جمود $I_b = 6.8\,\mathrm{kg\,m^2}$ کے ساتھ گھومتے ہیں۔(پہیا اپنے وسطی محور کے گرد گھومتا ہے، تاہم اس سے مرکب جسم کا کمیتی تقسیم اثر انداز نہیں ہوتا؛ یوں I_b کی قیمت وہی ہو گی چاہے پہیا گھومتا ہو یا نہ گھومتا ہو۔) پہیا الٹ کرنے کے بعد، مرکب جسم کس زاوی رفتار ω_b اور کس رخ گھومتا ہے؟

کلیدی تصورات

۱. زاوی رفتار ω_b کا، جو ہم جاننا چاہتے ہیں، تپائی کے محور گھماو پر، مرکب جسم کے اختتامی زاوی معیار حرکت $\vec{L}_b$ کے ساتھ تعلق مساوات ۵.۳۱ دیتی ہے۔

۲. پہیے کی ابتدائی زاوی رفتار ω_w اور پہیے کے وسط کے گرد، پہیے کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}_w$ کا تعلق یہی مساوات دیتی ہے۔

۳. $\vec{L}_b$ اور $\vec{L}_w$ کا مجموعہ طالب علم، تپائی، اور پہیے کا کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}_{\text{کل}}$ دیگا۔

۴. پہیا الٹ کرنے کے دوران نظام پر کوئی صافی بیرونی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی جو کسی انتصابی محور پر $\vec{L}_{\text{کل}}$ تبدیل کر سکتی تھی۔ (پہیا الٹ کرتے وقت، طالب علم اور پہیے پر قوتوں سے پیدا قوت مروڑ نظام کی اندرونی ہیں۔) یوں، بشمول تپائی کا محور گھماو، کسی بھی انتصابی محور پر نظام کے کل زاوی معیار حرکت کی بقا ہو گی۔

حساب: شکل 20c.11 میں سمتیات $\vec{L}_{\text{کل}}$ کی بقا ظاہر کرتے ہیں۔ اس بقا کو انتصابی محور کے ہمراہ اجزاء کے روپ میں بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$L_{b,f} + L_{w,f} = L_{b,i} + L_{w,i} \tag{۵.۳۵}$$

جہاں i اور f بالترتیب (پہیا الٹ کرنے سے قبل) ابتدائی حال اور (پہیا الٹ کرنے کے بعد) اختتامی حال ظاہر کرتی ہیں۔ پہیا الٹ کرنے سے پہیے کا زاوی معیار حرکت سمتیہ الٹ ہوا لہٰذا ہم $L_{w,f}$ کی جگہ $-L_{w,i}$ ڈالتے ہیں۔ اب اگر $L_{b,i} = 0$ (ابتدائی طور پر طالب علم، تپائی، اور پہیے کا وسط ساکن تھے) رکھا جائے، مساوات ۵.۳۵ ذیل دیگی۔

$$L_{b,f} = 2L_{w,i}$$

مساوات ۵.۳۱ استعمال کرتے ہوئے، ہم اب $I_{b,f}$ کی جگہ $I_b\omega_b$ اور $L_{w,i}$ کی جگہ $I_w\omega_w$ ڈال کر ω_b کے لئے حل کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\omega_b &= \frac{2I_w}{I_b}\omega_w = \frac{(2)(1.2\,\mathrm{kg\,m^2})(3.9\ \text{چکر فی منٹ})}{6.8\,\mathrm{kg\,m^2}}\\ &= 1.4\ \text{چکر فی منٹ} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

مثبت جواب کہتی، فضا سے دیکھتے ہوئے، تپائی کے محور پر طالب علم خلاف گھڑی گھومتا ہے۔ اگر طالب علم رکھنا چاہے، اس کو پہیا واپس اصل حالت میں لانا ہو گا (یعنی ایک مرتبہ دوبارہ پہیا الٹ کرنا ہو گا)۔

□

نمونی سوال ۵.۶: **زاوی معیار حرکت کی بقا، قرص پر بھونرا**

کمیت $6.00m$ اور رداس R کے قرص پر کمیت m کا بھونرا سوار ہے۔ قرص انتصابی وسطی محور پر $\omega_i = 1.50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ بھونرا جو ابتدائی طور $r = 0.800R$ پر تھا، کلبلا کر قرص کے چکا پر پہنچتا ہے۔ بھونرا کو ایک ذرہ تصور کریں۔ چکا پر پہنچ کر بھونرا کی زاوی رفتار کیا ہو گی۔

کلیدی تصورات

(1) بھونرا کے کلبلانے سے بھونرا و قرص نظام کی کمیتی تقسیم (لہٰذا گھمیری جمود) تبدیل ہوتی ہے۔ (2) بیرونی قوت مروڑ کی عدم موجودگی میں نظام کی زاوی معیار حرکت اٹل ہو گا۔ (بھونرا کے کلبلانے کی قوتیں اور قوت مروڑ نظام کی اندرونی ہیں۔) (3) مساوات ۵.۳۱ $(L = I\omega)$ استوار جسم کا زاوی معیار حرکت دیتی ہے۔

حساب: ہم اختتامی زاوی رفتار جاننا چاہتے ہیں۔ ہم اختتامی زاوی معیار حرکت L_f کو ابتدائی زاوی معیار حرکت L_i کے برابر رکھتے ہیں (چونکہ دونوں میں زاوی رفتار شامل ہے)۔ ان میں گھمیری جمود بھی شامل ہے۔ لہٰذا کلبلانے سے قبل اور کلبلانے کے بعد بھونرا و قرص نظام کے گھمیری جمود کی تلاش سے آغاز کرتے ہیں۔

وسطی محور پر گھومتے قرص کا گھمیری جمود جدول 2c.10 کے تحت $\frac{1}{2}MR^2$ ہے۔ کمیت M کی جگہ $6.00m$ ڈال کر قرص کا (ذیل) گھمیری جمود تلاش کرتے ہیں۔

$$I_d = 3.00mR^2 \tag{۵.۳۶}$$

(ہمیں m اور R معلوم نہیں، لیکن طبیعیات کا ہاتھ تھام کر چلتے ہیں۔)

مساوات ۵.۳۳ سے ہم جانتے ہیں کہ بھونرا کا (ذرے کا) گھمیری جمود mr^2 ہو گا۔ بھونرا کا ابتدائی رداس $r = 0.800R$ اور اختتامی رداس $r = R$ ڈال کر محور گھماو پر بھونرا کا ابتدائی گھمیری جمود I_{bi}:

$$I_{bi} = 0.64mR^2 \tag{۵.۳۷}$$

اور اختتامی گھمیری جمود I_{bf} حاصل کرتے ہیں۔

$$I_{bf} = mR^2 \tag{۵.۳۸}$$

یوں بھونرا و قرص نظام کا ابتدائی گھمیری جمود I_i ذیل:

$$I_i = I_d + I_{bi} = 3.64mR^2 \tag{۵.۳۹}$$

اور اختتامی گھمیری جمود I_f ذیل ہو گا۔

$$I_f = I_d + I_{bf} = 4.00mR^2 \tag{۵.۴۰}$$

اس کے بعد، مساوات ۵.۳۱ $(L = I\omega)$ استعمال کرتے ہوئے ہم نظام کے اختتامی زاوی معیار حرکت L_f کو نظام کے ابتدائی زاوی معیار حرکت L_i کے برابر رکھتے ہیں۔

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

آپ دیکھ سکتے ہیں، چکا کی طرف بھونرا کے کلبلانے سے کچھ کمیت محور گھماو سے دور منتقل ہوتی ہے، لہٰذا نظام کا گھمیری جمود بڑھتا ہے، جو ω گھٹنے کا سبب بنتا ہے۔ □

۵.۹ مسکن چرخی کی استقبالی حرکت

مقاصد
اس حصے کو پڑھ کر آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ چکر کھاتے **مسکن چرخی**[۲] پر تجاذبی قوت عمل کر کے اس کے چکری زاوی معیار حرکت سمتیہ کو (لہٰذا مسکن چرخی کو) انتصابی محور کے گرد گھماتی ہے۔ اس گھومتی حرکت کو استقبالی حرکت کہتے ہیں۔

۲. مسکن چرخی کی استقبال حرکت شرح تلاش کر پائیں گے۔

۳. جان پائیں گے کہ استقبالی حرکت شرح پر مسکن چرخی کی کمیت کا کوئی اثر نہیں۔

کلیدی تصور

- چکر کھاتی مسکن چرخی کے ٹیک سے گزرتی انتصابی محور کے گرد مسکن چرخی ذیل شرح سے استقبالی حرکت کر سکتی ہے:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

جہاں M مسکن چرخی کی کمیت، r معیار اثر کا بازو، I گھمیری جمود، اور ω شرح چکر ہے۔

[۲] gyroscope

مسکن چرخی کی استقبالی حرکت

دھرے پر نسب پہیا جو دھرے پر چکر کاٹ سکتا ہو، سادہ مسکن چرخی دیگا۔ اگر ساکن مسکن چرخی کے دھرے کا ایک سر تیک پر رکھ کر (شکل 22a.11) مسکن چرخی چوڑی جائے، وہ دھرے کے نچلے سر پر گھوم کر نیچے گرے گی۔ چونکہ گرنے میں گھوما شامل ہے، اس پر نیوٹن کا قانون دوم لاگو ہو گا، جو (ذیل) مساوات ۵.۲۹ دیتی ہے۔

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{۵.۴۱}$$

یہ مساوات کہتی ہے کہ نشیب وار گھماو (مسکن چرخی گرنے کا عمل) پیدا کرنے والی قوت مروڑ مسکن چرخی کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کو ابتدائی قیمت (صفر) سے تبدیل کرے گی۔ مسکن چرخی کے مرکز کمیت پر، جس کو ہم پہیے کا مرکز تسلیم کرتے ہیں، عمل پیرا تجاذبی قوت $M\vec{g}$ قوت مروڑ $\vec{\tau}$ پیدا کرتی ہے۔ تیک کے سر کے لحاظ سے، جو شکل 22a.11 میں O پر واقع ہے، معیار اثر کا بازو $\vec{r}$ ہے۔ قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی قدر ذیل:

$$\tau = Mgr\sin 90^\circ = Mgr \tag{۵.۴۲}$$

اور رخ شکل 22a.11 میں دکھایا گیا ہے۔ ($M\vec{g}$ اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ 90° ہے۔)

تیز چکر کھاتی مسکن چرخی کا رویہ مختلف ہو گا۔ فرض کریں دھرا افق سے اوپر وار زاویے پر رکھ کر مسکن چرخی رہا کی جاتی ہے۔ ابتدا میں مسکن چرخی معمولی نیچے (گرتے ہوئے) گھومتی ہے، لیکن اس کے بعد دھرے پر چکر کاٹتے ہوئے، نقطہ تیک O سے گزرتی انتصابی محور کے گرد افقی گھومنا شروع کرتی ہے، جو **استقبالی حرکت**[۸] کہلاتا ہے۔

مسکن چرخی گرتی کیوں نہیں؟ چکر ناکاٹتے ہوئے مسکن چرخی کی طرح چکر کاٹتی مسکن چرخی نیچے کیوں نہیں گرتی؟ رہا کرنے پر مسکن چرخی گرنا شروع کرتی ہے، تاہم $M\vec{g}$ کی پیدا کردہ قوت مروڑ ابتدائی زاوی معیار حرکت کو صفر قیمت سے تبدیل نہیں کرتی، بلکہ چکر سے پیدا غیر صفر قیمت سے تبدیل کرتی ہے۔

یہ سمجھنے کے لئے کہ ابتدائی غیر صفر زاوی معیار حرکت کیسے مسکن چرخی کو استقبالی حرکت پر مجبور کرتا ہے، ہمیں چکر سے پیدا مسکن چرخی کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ پر غور کرنا ہو گا۔ صورت حال آسان بنانے کی خاطر، ہم فرض کرتے ہیں کہ $\vec{L}$ کے لحاظ سے استقبالی حرکت سے پیدا زاوی معیار حرکت قابل نظر انداز ہے۔ ساتھ ہی، جیسا شکل aa.22b میں دکھایا گیا ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ جس لمحے استقبال حرکت شروع ہوتی ہے، دھرا افقی ہے۔ مساوات ۵.۳۱ سے $\vec{L}$ کی قدر لکھتے ہیں:

$$L = I\omega \tag{۵.۴۳}$$

جہاں دھرے کے لحاظ سے I مسکن چرخی کا گھمیری جمود اور دھرے پر چکر کاٹنے کی پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ جیسا شکل 22b.11 میں دکھایا گیا ہے سمتیہ $\vec{L}$ دھرے کے ہمراہ ہو گا۔ چونکہ $\vec{L}$ معیار اثر کے بازو $\vec{r}$ کو متوازی ہے، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ لازماً $\vec{L}$ کو عمود دار ہو گا۔

---

[۸] precession

مساوات ۵.۴۱ کہتی ہے، وقتی وقفہ $\mathrm{d}t$ میں قوت مروڑ $\vec{\tau}$ مسکن چرخی کے زاوی معیار حرکت کی قیمت میں (ذیل) معمولی تبدیلی $\mathrm{d}\vec{L}$ پیدا کرتی ہے۔

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{\tau}\,\mathrm{d}t \tag{۵.۴۴}$$

تاہم، تیز چکر کاٹتی مسکن چرخی کے لئے، $\vec{L}$ کی قدر مساوات ۵.۴۳ کے تحت اٹل ہے۔ یوں قوت مروڑ صرف $\vec{L}$ کا رخ تبدیل کر سکتا ہے، نا کہ اس کی قدر۔

مساوات ۵.۴۴ کے تحت $\mathrm{d}\vec{L}$ کا رخ $\vec{\tau}$ کے رخ، $\vec{L}$ کو عمود دار ہوگا۔ زاوی معیار حرکت کی قدر L تبدیل کیے بغیر، $\vec{\tau}$ کے رخ میں $\vec{L}$ تبدیل کرنے کا واحد طریقہ، جیسا شکل 22c.11 میں دکھایا گیا ہے، محور z کے گرد $\vec{L}$ گھمانا ہے۔ $\vec{L}$ کی قدر برقرار رہتی ہے، سمتیہ $\vec{L}$ کا سر دائری راہ پر چلتا ہے، اور $\vec{\tau}$ ہمیشہ اس راہ کو مماسی رہتا ہے۔ چونکہ $\vec{L}$ لازماً اس دھرے کے رخ ہوگا، دھرے کو محور z کے گرد $\vec{\tau}$ کے رخ گھومنا ہوگا۔ یوں استقبالی حرکت پیدا ہو گی۔ ابتدائی زاوی معیار حرکت میں تبدیلی کے رد عمل کے دوران چکر کاٹتی مسکن چرخی کو نیوٹن کے قانون دوم (کے زاوی روپ) پر پورا اترنا ہوگا؛ یوں گرنے کے بجائے اس کو استقبال حرکت کرنی ہو گی۔

استقبالی حرکت۔ ہم مساوات ۵.۴۴ اور مساوات ۵.۴۲ استعمال کر کے $\mathrm{d}\vec{L}$ کی قدر تلاش کرکے:

$$\mathrm{d}L = \tau\ \mathrm{d}t = Mgr\ \mathrm{d}t \tag{۵.۴۵}$$

استقبالی حرکت کی شرح[9] Ω تلاش کر سکتے ہیں۔ باریک وقتی وقفہ $\mathrm{d}t$ میں $\vec{L}$ میں معمولی تبدیلی رونما ہو گی، دھرا اور $\vec{L}$ محور z کے گرد استقبال حرکت کرتے ہوئے چھوٹے زاویہ $\mathrm{d}\phi$ سے گزرتے ہیں۔ (شکل 22c.11 میں زاویہ $\mathrm{d}\phi$ بڑھا چڑھا کر پیش کیا گیا ہے، تا کہ اس کی وضاحت ہو۔) مساوات ۵.۴۳ اور مساوات ۵.۴۵ کی مدد سے $\mathrm{d}\phi$ ذیل حاصل ہوگا۔

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}L}{L} = \frac{Mgr\ \mathrm{d}t}{I\omega}$$

دونوں اطراف $\mathrm{d}t$ سے تقسیم کرکے شرح $\Omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ رکھ کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \qquad \text{(استقبالی حرکت کی شرح)} \tag{۵.۴۶}$$

یہ نتیجہ اس مفروضے کے تحت درست ہو گا کہ چکر کاٹنے کی شرح ω زیادہ ہو۔ یاد رہے، ω بڑھانے سے Ω گھٹتا ہے۔ ساتھ ہی یاد رکھیں، اگر تجاذبی قوت $M\vec{g}$ مسکن چرخی پر عمل نہ کرتی استقبالی حرکت نہ ہوتی، تاہم I کیمت M کا تفاعل ہے لہٰذا مساوات ۵.۴۶ میں کیمت کٹ جائے گا اور Ω کیمت پر منحصر نہیں ہو گا۔

مساوات ۵.۴۶ کا اطلاق اس چکر کاٹتے مسکن چرخی پر بھی ہو گا جس کا دھرا افق کے ساتھ زاویے پر ہو۔ اس کا اطلاق چکر کاٹتے لٹو پر بھی ہو گا، چونکہ لٹو در حقیقت افق کے ساتھ زاویے پر مسکن چرخی ہی ہے۔

---

[9] precessionrate

نظر ثانی اور خلاصہ

لڑھکتے اجسام رداس R کا پہیا جو ہمواری سے لڑھکتا ہو کے لئے ذیل ہو گا:

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R \tag{۵.۲}$$

جہاں پہیے کے مرکز کمیت کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ اور وسط کے گرد پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ پہیے کو "سڑک" کے نقطہ P کے، جہاں پہیا سڑک سے تماس میں ہے، گرد لمحاتی گھومتا تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس نقطہ پر پہیے کی زاوی رفتار پہیے کے وسط پر پہیے کی زاوی رفتار کے برابر ہو گی۔ لڑھکاتے پہیے کی حرکی توانائی ذیل ہے:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۵.۵}$$

جہاں مرکز کمیت پر پہیے کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے اور پہیے کی کمیت M ہے۔ اگر پہیا مسرع کیا جائے اور ہموار لڑھکتی ہو، مرکز کمیت کا اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ اور وسط کے گرد زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R \tag{۵.۶}$$

اگر پہیا زاویہ θ میلان سے ہموار نیچے لڑھکتی ہو، میلان کے اوپر وار ہمراہ محور x پر اس کا اسراع ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2} \tag{۵.۱۰}$$

قوت مروڑ بطور سمتیہ تین ابعاد میں، $\vec{\tau}$ ایک سمتیہ ہو گا جو کسی مقررہ نقطہ (جو عموماً مبدا ہو گا) کے لحاظ سے معین ہو گا؛ اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{۵.۱۴}$$

جہاں ذرے پر لاگو قوت $\vec{F}$ اور کسی اٹل نقطہ کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ دیتا ہے۔ $\vec{\tau}$ کی قدر ذیل ہے:

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F \tag{۵.۱۵، ۵.۱۶، ۵.۱۷}$$

جہاں $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو عمودی دار $\vec{F}$ کا جزو $F_{\perp}$ ہے، اور $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو $r_{\perp}$ ہے۔ دائیں ہاتھ کا قاعدہ $\vec{\tau}$ کا رخ دیگا۔

ذرے کا زاوی معیار حرکت ایک ذرے جس کی کمیت m، خطی معیار حرکت $\vec{p}$، اور خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ ہو کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ ایک سمتیہ (ذیل) ہو گا جو کسی اٹل نقطہ (جو عموماً مبدا ہو گا) کے لحاظ سے معین ہو گا۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{۵.۱۸}$$

$\vec{\ell}$ کی قدر ذیل دیتی ہیں:

$$\ell = rmv \sin\phi \tag{۵.۱۹}$$

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp \tag{۵.۲۰}$$

$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv \tag{۵.۲۱}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو عمود دار $\vec{p}$ اور $\vec{v}$ کے جزو $p_\perp$ اور $v_\perp$ ہیں، اور اٹل نقطے کا مبسوط $\vec{p}$ سے عمود دار فاصلہ $r_\perp$ ہے۔ دایاں ہاتھ قاعدہ $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا۔

نیوٹن کے قانون دوم کا زاویی روپ ذرے کے لئے نیوٹن کا قانون دوم زاویی روپ میں ذیل لکھا جا سکتا ہے:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \tag{۵.۲۳}$$

جہاں ذرے پر صافی قوت مروڑ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ اور ذرے کا زاویی معیار حرکت $\vec{\ell}$ ہے۔

ذروں پر مشتمل نظام کا زاویی معیار حرکت ذروں پر مشتمل نظام کا زاویی معیار حرکت $\vec{L}$ ذروں کے انفرادی زاویی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ کا سمتیہ مجموعہ ہو گا۔

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \tag{۵.۲۶}$$

اس زاویی معیار حرکت کا وقتی تفرق نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ (نظام سے باہر ذروں کے ساتھ باہم عمل سے پیدا قوت مروڑ کے سمتی مجموعہ) کے برابر ہو گا۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ذروں پر مشتمل نظام}) \tag{۵.۲۹}$$

استوار جسم کا زاویی معیار حرکت مقررہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کا، محور گھماو کو متوازی، زاویی معیار حرکت کا جزو ذیل ہو گا۔

$$L = I\omega \qquad (\text{استوار جسم، مقررہ محور}) \tag{۵.۳۱}$$

زاویی معیار حرکت کی بقا نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ صفر ہونے کی صورت میں نظام کا زاویی معیار حرکت $\vec{L}$ اٹل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۲}$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۳}$$

یہ زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون ہے۔

مسکن چرخی کی استقبالی حرکت چکر کاٹتی مسکن چرخی تیک سے گزرتی انتصابی محور پر ذیل شرح سے استقبال حرکت کر سکتی ہے:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \tag{۵.۴۶}$$

جہاں M مسکن چرخی کی کمیت، r معیار اثر کا بازو، I گھمیری جمود، اور ω چکر کاٹنے کی شرح ہے۔

سوالات

سوال ۵.۱: ایک کمیت اور ایک مستقل رفتار پر چلتے ہوئے تین ذروں کے سمتی رفتار سمتیات شکل 23.11 میں دکھائے گئے ہیں۔ نقاط a، b، c، اور d چوکور کی راس پر جبکہ e اس کے مرکز پر ہے۔ ان نقطوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، نقطہ پر تین ذروی نظام کے صافی زاوی معیار حرکت کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۵.۲: ذرہ A اور ذرہ B کا xyz محدد $(1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 0)$ اور $(1\,\mathrm{m}, 0, 1\,\mathrm{m})$ ہے (شکل 24.11)۔ ہر ایک ذرے پر تین گنتی دار قوت عمل کرتی ہیں، جن کی قدر ایک برابر اور رخ ایک ایک محددی محور کے رخ ہے۔ (ا) کون سی قوت مبدا پر محور y کے متوازی قوت مروڑ پیدا کرتی ہے؟ (ب) مبدا کے لحاظ سے آرے پر قوت مروڑ کی قدر کے لحاظ سے قوتوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۵.۳: ڈوری دار لٹو کا دھاگہ (ا) قوت $\vec{F}_2$ سے (جس کا خط عمل میز پر نقطہ تماس سے گزرتا ہے)، (ب) قوت $\vec{F}_1$ (جس کا خط عمل نقطہ تماس سے بلندی پر گزرتا ہے)، اور (ج) قوت $\vec{F}_3$ (جس کا خط عمل نقطہ تماس سے دائیں گزرتا ہے) سے کھینچا جاتا ہے۔ ابتدائی طور سا کن ڈوری دار لٹو کو کیا ہوگا؟

سوال ۵.۴: کسی مقررہ نقطہ کے لحاظ سے ذرے کے تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ کی قدر $3\,\mathrm{m}$، اور ذرے پر قوت $\vec{F}$ کی قدر $4\,\mathrm{N}$ ہے۔ اگر وابستہ قوت مروڑ کی قدر (ا) صفر اور (ب) $12\,\mathrm{N\,m}$ ہو، تو $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے رخ کے بیچ زاویہ کیا ہوگا؟

سوال ۵.۵: مبدا پر رکھے ذرے پر ایک قدر کی تین قوت عمل کرتے ہیں (شکل 26.11)۔ ($\vec{F}_1$ سیدھا صفحے کے اندر رخ عمل کرتی ہے۔) قوتوں کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، (ا) نقطہ P_1، (ب) نقطہ P_2، اور (ج) نقطہ P_3 پر پیدا قوت مروڑ کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۵.۶: ایک ذرے کا زاوی معیار حرکت $\ell(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\ell = 3t + 4$؛ (2) $\ell = -6t^2$؛ (ج) $\ell = 2$؛ اور (4) $\ell = 4//t$ ہے۔ کس صورت میں ذرے پر صافی قوت مروڑ کی قدر (ا) صفر ہے، (ب) مثبت اور مستقل ہے، (ج) منفی اور قدر بڑھ رہی ہے $(t > 0)$، اور (د) منفی اور قدر گھٹ رہی ہے $(t > 0)$؟

سوال ۵.۷: انتصابی محور پر خلاف گھڑی گھومتے قرص کے چکا پر بھونرا بیٹھا ہے۔ بھونرا گھومنے کے رخ چکا پر چلنا شروع کرتا ہے۔ کیا ذیل مقادیر کی (محور گھما و پر ناپی) قدر بڑھتی ہے، گھٹتی ہے، یا تبدیل نہیں ہوتی؟ (قرص خلاف گھڑی چلتا رہتا ہے۔) (ا) بھونرا و قرص نظام کا زاوی معیار حرکت، (ب) بھونرا کا زاوی معیار حرکت اور زاوی سمتی رفتار، اور (ج) قرص کا زاوی معیار حرکت اور زاوی سمتی رفتار۔ (د) اگر بھونرا گھومنے کے الٹ رخ چلتا ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

سوال ۵.۸: مستطیل سل جو وسطی نقطہ O سے گزرتی انتصابی محور کے گرد گھوم سکتی ہے کا فضائی نظارہ شکل 27.11 میں پیش ہے۔ سات مقامات سے ہوائی بندوق سے چھرا سل پر مارا جا سکتا ہے، جو سل میں دھنس جاتا ہے۔ چھروں کی کمیت ایک جیسی اور رفتار ایک برابر ہے۔ (ا) مقامات کی درجہ بندی، اعظم قیمت اول رکھ کر، چھرا لگنے کے بعد سل (اور چھرا) کی زاوی رفتار کے لحاظ سے کریں۔ (ب) فضا سے دیکھتے ہوئے کن راہ کے لئے سل (اور چھرا) کی O پر زاوی معیار حرکت منفی ہو گی؟

سوال ۵.۹: شکل 28.11 میں پہیے کے زاوی معیار حرکت کی قدر L بالمقابل وقت t پیش ہے۔ چار حرف دار وقتی دورانیوں کی درجہ بندی پہیے پر عمل پیرا قوت مروڑ کی قدر کے لحاظ سے کریں۔ اعظم قیمت اول رکھیں۔

سوال ۵.۱۰: مستقل سمتی رفتار $\vec{v}$ پر چلتا ہوا ذرہ اور پانچ نقطے بمع xy محدد شکل 29.11 میں دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ پر ذرے کے زاوی معیار حرکت کی قدر کے لحاظ سے نقطوں کی درجہ بندی کریں۔ اعظم قیمت اول رکھیں۔

سوال ۵.۱۱: توپ کا گولا اور کنچا ساکن حالت سے میلان پر نشیب وار لڑھکتے ہیں۔ کیا توپ کے گولے کا کنچے سے (ا) زمین تک پہنچنے کا دورانیہ اور (ب) زمین پر پہنچ کر خطی حرکی توانائی زیادہ ہو گی، کم ہو گی، یا دونوں برابر ہیں؟

سوال ۵.۱۲: پیتل کے ٹھوس بیلن اور لکڑی کے ٹھوس بیلن کی کمیت اور رداس ایک ہیں (لکڑی کا بیلن زیادہ لمبا ہے)۔ ایک ساتھ رہائی کے بعد دونوں میلان پر لڑھکتے اترتے ہیں۔ (ا) کونسا بیلن زمین پر پہلے پہنچے گا، یا کیا دونوں ایک ساتھ پہنچتے ہیں؟ (ب) لکڑی کے بیلن کا سر کاٹ کر بیلن کو پیتل کے بیلن جتنا بنایا جاتا ہے، اور پیتل کے بیلن کی وسطی لمبی محور میں سوراخ کر کے کمیت گھٹا کر دونوں بیلن کی کمیت برابر کی جاتی ہے۔ اب کونسا بیلن مقابلے میں برتری حاصل کرتا ہے، یا دونوں مقابلے میں برابر ثابت ہوتے ہیں؟

سوالات

مستقیم حرکت اور گھماو مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

سوال ۵.۱: ایک گاڑی $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے استوا سڑک پر محور x کے مثبت رخ چل رہی ہے۔ اس کے پہیوں کا قطر $66\,\mathrm{cm}$ ہے۔ گاڑی میں سوار شخص کے لحاظ سے، اکائی سمتیہ ترقیم میں، پہیے کے (ا) وسط، (ب) بالا سر، اور (ج) نچلے سر کی سمتی رفتار $\vec{v}$ کیا ہو گی، اور پہیے کے (د) وسط، (ہ) بالا سر، اور (و) نچلے سر کے اسراع کی قدر a کیا ہو گی؟ سڑک کے کنارے شخص کے لحاظ سے، اکائی سمتیہ ترقیم میں، پہیے کے (ز) وسط، (ح) بالا سر، اور (ط) نچلے سر کی سمتی رفتار $\vec{v}$ کیا ہو گی، اور پہیے کے (ی) وسط، (یا) بالا سر، اور (یب) نچلے سے کے اسراع کی قدر a کیا ہو گی؟

سوال ۵.۲: ایک گاڑی، جس کے پہیوں کا قطر $75.0\,\mathrm{cm}$ ہے، $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے حرکت میں ہے۔ (ا) پہیے کے دھرے کے لحاظ سے پہیے کا زاوی رفتار کیا ہو گا؟ (ب) پہیے کے 30.0 مکمل چکر میں (بغیر پھسلے) گاڑی روکی جاتی ہے۔ پہیے کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہو گی؟ (ج) رکنے کے دوران گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

لڑھکاو کی قوتیں اور حرکی توانائی

سوال ۵.۳: افقی زمین پر $140\,\mathrm{kg}$ کا گھیرا لڑھکتا ہے۔ گھیرے کا مرکز کمیت $0.150\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ گھیرا روکنے کے لئے کتنا کام سر انجام کرنا ہو گا؟

سوال ۵.۴: ٹھوس یکساں کرہ میلان پر لڑھکتا اترتا ہے۔ (ا) کرہ کے مرکز کمیت کے زاوی اسراع کی قدر $0.10g$ ہونے کے لئے زاویہ میلان کیا ہو گا؟ (ب) اگر بلا رگڑ سل اسی میلان پر پھسل کر اترے، کیا اس کے اسراع کی قدر زیادہ ہو گی، کم ہو گی، یا وہی ہو گی؟ کیوں؟

سوال ۵.۵: ایک گاڑی، جس کی کمیت $1000\,\mathrm{kg}$ ہے، کا پہیا $10\,\mathrm{kg}$ ہے۔ چلتی گاڑی کے کل حرکی توانائی کا کتنا حصہ (چار) پہیوں کے دھرے پر گھماو کی بدولت ہو گا؟ پہیے کو یکساں قرص تصور کریں۔ آپ کو پہیے کا رداس جاننے کی ضرورت کیوں در پیش نہیں؟

سوال ۵.۶: شکل 30.11 میں، $30°$ میلان پر $0.500\,\mathrm{kg}$ کمیت اور $6.00\,\mathrm{cm}$ رداس کی لڑھکتی جسم کی رفتار v بالمقابل وقت t ترسیم کی گئی ہے۔ رفتار کی محور کا پیمانہ $v_s = 4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ طے کرتا ہے۔ جسم کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۵.۷: ٹھوس بیلن، جس کا رداس $10\,\mathrm{cm}$ اور کمیت $12\,\mathrm{kg}$ ہے، ساکن حالت سے آغاز کر کے $\theta = 30°$ زاویے کی چھت پر $L = 6.0\,\mathrm{m}$ فاصلہ بغیر پھسلے لڑھک کر طے کرتا ہے (شکل 31.11)۔ (ا) چھت سے گرتے لمحے طولی محور پر بیلن کا زاوی رفتار کیا ہو گا؟ (ب) چھت کا کنارہ زمین سے $H = 5.0\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ چھت کے کنارے سے بیلن کتنے افقی فاصلے پر استواز مین پر گرتا ہے؟

سوال ۵.۸: شکل 32.11 میں $0.400\,\mathrm{kg}$ کمیت کے ٹھوس یکساں گیند کی، جو محور x پر ہموار لڑھک سکتا ہے، مخفی توانائی $U(x)$ ترسیم کی گئی ہے۔ محور U کا پیمانہ $U_s = 100\,\mathrm{J}$ طے کرتا ہے۔ محور x پر منفی رخ $75\,\mathrm{J}$ میکانی توانائی کے ساتھ گیند $x = 7.0\,\mathrm{m}$ پر روانا کیا جاتا ہے۔ (ا) اگر گیند $x = 0\,\mathrm{m}$ تک پہنچ سکتا ہو، اس کی رفتار وہاں پہنچ کر کیا ہو گا، اور اگر وہاں تک پہنچنے کے قابل نہ ہو، تب واپس ہونے کا نقطہ کیا ہو گا؟ اب $x = 7.0\,\mathrm{m}$ پر گیند $75\,\mathrm{J}$ توانائی کے ساتھ مثبت رخ روانا کیا جاتا ہے۔ (ب) اگر گیند $x = 13\,\mathrm{m}$ تک پہنچ سکتا ہو، اس کی رفتار وہاں پہنچ کر کیا ہو گا، اور اگر وہاں تک پہنچنے کے قابل نہ ہو، تب واپس ہونے کا نقطہ کیا ہو گا؟

سوال ۵.۹: ٹھوس گیند ساکن حالت سے $H = 6.0\,\mathrm{m}$ بلندی سے آغاز کر کے ہموار لڑھکتا ہوا $h = 2.0\,\mathrm{m}$ اونچے افقی کنارے سے گرتا ہے (شکل 33.11)۔ نقطہ A سے کتنے افقی فاصلے پر گیند زمین پر گرے گا؟

سوال ۵.۱۰: ایک کھوکھلا کرہ جس کا رداس $0.15\,\mathrm{m}$ اور مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود $I = 0.040\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے، افق سے $30°$ زاویے کے میلان پر ہموار لڑھک کر اوپر وار حرکت کرتا ہے۔ ابتدائی نقطہ پر کرہ کی کل حرکی توانائی $20\,\mathrm{J}$ ہے۔ (ا) ابتدائی حرکی توانائی کا کتنا حصہ گھمیری ہے؟ (ب) ابتدائی نقطہ پر کرہ کے مرکز کمیت کی رفتار کیا ہے؟ ابتدائی نقطہ سے میلان کے ہمراہ اوپر وار $1.0\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرنے کے بعد، اس کی (ج) کل حرکی توانائی اور (د) مرکز کمیت کی رفتار کیا ہیں؟

سوال ۵.۱۱: رداس $0.30\,\mathrm{m}$ اور کمیت $10\,\mathrm{kg}$ پہیے پر $10\,\mathrm{N}$ قدر کی مستقل افقی قوت $\vec{F}_{\text{لاگو}}$ لاگو کی جاتی ہے (شکل 34.11)۔ پہیا افقی سطح پر ہموار لڑھکتا ہے، اور اس کے مرکز کمیت کے اسراع کی قدر $0.60\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

(ا) اکائی سمتیہ ترقیم میں پہیے پر رگڑی قوت کیا ہے؟ (ب) مرکز کمیت سے گزرتی مرکز گھماو پر پہیے کا گھمیری جمود کیا ہے؟

سوال ۵.۱۲: پیتل کا ٹھوس گیند، جس کی کمیت $0.280\,\mathrm{kg}$ ہے، گھیر در گھیر راہ کے سیدھے حصے پر رہا کرنے سے راہ کے ہمراہ ہموار لڑھک سکتا ہے (شکل 35.11)۔ دائری گھیر کا رداس $R = 14.0\,\mathrm{cm}$، اور گیند کا رداس $r \ll R$ ہے۔ (ا) اگر گھیر کے فراز پر پہنچ کر گیند راہ سے علیحدہ ہونے کے دہانے پر ہو، h کیا ہو گی؟ (ب) اگر گیند $h = 6.00R$ پر رہا کیا جائے، نقطہ Q پر پہنچ کر گیند پر قوت کی (ب) قدر اور (ج) رخ کیا ہوں گے؟

سوال ۵.۱۳: غیر یکساں گیند۔ ایک گیند، جس کا رداس R اور کمیت M ہے، ساکن حالت سے میلان پر ہموار لڑھک کر اترنے کے بعد رداس $0.48\,\mathrm{m}$ کے دائری گھیر پہنچتا ہے (شکل 36.11)۔ گیند کی ابتدائی بلندی $h = 0.36\,\mathrm{m}$ ہے۔ گھیر کے نشیبی نقطے پر پہنچ کر گیند پر عمودی قوت کی قدر $2.00Mg$ ہے۔ اندرونی کرہ (جو یکساں کثافت مادے سے بنا ہے) کے اوپر کروی خول (جو کسی دوسرے یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) چڑھا کر گیند بنایا گیا ہے۔ گیند کے گھمیری جمود کا عمومی کلیہ $I = \beta MR^2$ ہے، تاہم β کی قیمت 0.4 نہیں ہے (یکساں گیند کے لئے $\beta = 0.4$ ہوتا)۔ β کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۵.۱۴: ایک چھوٹا، ٹھوس، یکساں گیند نقطہ P سے پھینکا جاتا ہے تا کہ گیند افقی راہ پر ہموار لڑھک کر، میلان پر چڑھ کر، سطح مرتفع پہنچے (شکل 37.11)۔ سطح مرتفع کے کنارے سے افقی فاصلہ d دور گیند دوسری (نچلی) سطح مرتفع پر گرتا ہے۔ انتصابی بلندیاں $h_1 = 5.00\,\mathrm{cm}$ اور $h_2 = 1.60\,\mathrm{cm}$ ہیں۔ اگر $d = 6.00\,\mathrm{cm}$ ہو نقطہ P پر گیند کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۱۵: رداس $R = 11\,\mathrm{cm}$ کا گیند افقی راہ پر روانا کیا جاتا ہے (شکل 38.11)۔ گیند ابتدائی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت},0} = 8.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے ساتھ راہ پر گھسٹتا ہے اور اس کی ابتدائی زاوی رفتار $\omega_0 = 0$ ہے۔ گیند اور راہ کے بیچ حرکی رگڑ کا مستقل 0.21 ہے۔ حرکی رگڑی قوت $\vec{f}_k$ گیند پر عمل پیرا ہو کر گیند کو خطی مسرع کرتی ہے اور ساتھ ہی قوت مروڑ پیدا کرتی ہے، جو گیند کو زاوی مسرع کرتی ہے۔ خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کافی گھٹنے اور زاوی رفتار ω کافی بڑھنے کے بعد گیند گھسٹنا بند کرتا ہے اور ہموار لڑھکنا شروع کرتا ہے۔ (ا) اس لمحے پر ω کی صورت میں $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کیا ہو گا؟ گھساٹ کے دوران گیند کا (ب) خطی اسراع اور (ج) زاوی اسراع کیا ہوں گے؟ (د) گیند کتنی دیر گھسٹتا ہے؟ (ہ) گیند کتنے فاصلہ گھسٹتا ہے؟ (و) جس لمحے گیند ہموار لڑھکنا شروع کرتا ہے اس لمحے $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کیا ہو گا؟

سوال ۵.۱۶: غیر یکساں بیلنی جسم۔ شکل 39.11 میں کمیت M اور رداس R کا بیلنی جسم ہموار لڑھک کر میلان سے اتر کر افقی حصے پر پہنچتا ہے۔ یہاں سے وہ لڑھک کر، کنارے سے $d = 0.506\,\mathrm{m}$ افقی فاصلے پر زمین پر گرتا ہے۔ جسم کی ابتدائی بلندی $H = 0.90\,\mathrm{m}$ اور میلان کا کنارہ $h = 0.10\,\mathrm{m}$ بلند ہے۔ اندرونی بیلن (جو یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) پر بیرونی بیلنی خول (جو مختلف یکساں کثافت کے مادے سے بنا ہے) چڑھا کر جسم بنایا گیا ہے۔ جسم کا گھمیری جمود عمومی کلیہ $I = \beta MR^2$ دیتا ہے، جہاں β کی قیمت 0.5 نہیں (یکساں بیلن کی صورت میں $\beta = 0.5$ ہو گا)۔ β تلاش کریں۔

ڈوری دار لٹو

سوال ۵.۱۷: ڈوری دار لٹو کا گھمیری جمود $980\,\mathrm{g\,cm^2}$ اور کمیت $120\,\mathrm{g}$ ہے۔ اس کے دھرے کا رداس $3.2\,\mathrm{mm}$، اور ڈور کی لمبائی $120\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ڈوری دار لٹو ساکن حالت سے ڈوری کے آخری سر تک لڑھکتا ہے، (ا) اس کے خطی اسراع کی قدر کیا ہو گی؟ (ب) ڈور کے آخری سر تک لٹو کتنی دیر میں پہنچتا ہے؟ (ج) ڈور کے آخری سر کو پہنچ کر لٹو کی (ج) خطی رفتار، (د) مستقیم حرکی توانائی، (ہ) گھمیری حرکی توانائی، اور (و) زاوی رفتار کیا ہیں؟

سوال ۵.۱۸: ایک بڑا ڈوری دار لٹو کرین سے رہا کیا جاتا ہے۔ لٹو کی کمیت $116\,\mathrm{kg}$ ہے جو $32\,\mathrm{cm}$ رداس کے دو قرص $3.2\,\mathrm{cm}$ رداس کے دھرے کے ساتھ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ (ا) اترنے اور (ب) چڑھنے کے دوران لٹو کے اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ج) لڑھکاو کے دوران ڈور کا تناو کیا ہے؟ (د) کیا یہ ڈور کے انتہائی تناو $52\,\mathrm{kN}$ کے قریب ہے؟ فرض کریں آپ اس ڈوری دار لٹو کا بڑا نمونہ (اسی شکل و صورت اور مادے کا) بناتے ہیں۔ (ہ) کیا اتار کے دوران بڑے لٹو کے اسراع کی قدر زیادہ ہو گی، کم ہو گی، یا وہی ہو گی؟ (و) ڈور کا تناو زیادہ ہو گا، کم ہو گا، یا وہی ہو گا؟

قوت مروڑ پر نظر ثانی

سوال ۵.۱۹: قوت $(3.0\,\mathrm{N})\hat{k} = \vec{F}_1$ اور $(-2.0\,\mathrm{N})\hat{j} = \vec{F}_2$ ایک پسو پر عمل کرتی ہیں، جو $(0, -4.0\,\mathrm{m}, 5.0\,\mathrm{m})$ محدد پر بیٹھا ہے۔ مبدا کے لحاظ سے پسو پر صافی قوت مروڑ اکائی سمتیہ ترقیم میں کیا ہو گی؟

سوال ۵.۲۰: ایک ناشپاتی پر، جو $(-2.0\,\mathrm{m}, 0, 4.0\,\mathrm{m})$ پر واقع ہے، عمل پیرا قوت کا واحد جزو (ا) $F_x = 6.0\,\mathrm{N}$، (ب) $F_x = -6.0\,\mathrm{N}$، (ج) $F_z = 6.0\,\mathrm{N}$، (د) $F_z = -6.0\,\mathrm{N}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اکائی سمتیہ ترقیم میں ناشپاتی پر قوت مروڑ کیا ہو گی؟

سوال ۵.۲۱: ایک ذرے پر، جو $(0, -4.0\,\mathrm{m}, 3.0\,\mathrm{m})$ پر واقع ہے، ذیل قوت عمل کرتی ہے: (ا) $\vec{F}_1$ جہاں $F_{1x} = 2.0\,\mathrm{N}$، $F_{1y} = F_{1z} = 0$ ہے اور (ب) $\vec{F}_2$ جہاں $F_{2x} = 0$، $F_{2y} = 0$، $F_{2z} = 4.0\,\mathrm{N}$ ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں، مبدا کے لحاظ سے ذرے پر صافی قوت مروڑ کیا ہو گی؟

سوال ۵.۲۲: ایک ذرے پر، جو xyz محددی نظام میں حرکت کرتا ہے، قوت عمل کرتی ہے۔ جب مبدا کے لحاظ سے ذرے کا مقام $\vec{r} = (2.00\,\mathrm{m})\hat{\imath} - (3.00\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (2.00\,\mathrm{m})\hat{k}$ ہو، ذرے پر قوت $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + (7.00\,\mathrm{N})\hat{\jmath} - (6.00\,\mathrm{N})\hat{k}$ ہے، اور مبدا کے لحاظ سے مطابقتی قوت مروڑ $\vec{\tau} = (4.00\,\mathrm{N\,m})\hat{\imath} + (2.00\,\mathrm{N\,m})\hat{\jmath} - (1.00\,\mathrm{N\,m})\hat{k}$ ہے۔ جزو F_x تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۳: ایک پتھر جس کا مقام مبدا کے لحاظ سے $\vec{r} = (0.50\,\mathrm{m})\hat{\jmath} - (2.0\,\mathrm{m})\hat{k}$ ہے پر قوت $\vec{F} = (2.0\,\mathrm{N})\hat{\imath} - (3.0\,\mathrm{N})\hat{k}$ عمل کرتی ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں (ا) مبدا اور (ب) نقطہ $(2.0\,\mathrm{m}, 0, -3.0\,\mathrm{m})$ کے لحاظ سے پتھر پر قوت مروڑ کیا ہو گی؟

سوال ۵.۲۴: کالی مرچ کی بوتل مبدا کے لحاظ سے $(3.0\,\mathrm{m}, -2.0\,\mathrm{m}, 4.0\,\mathrm{m})$ محدد پر پڑی ہے۔ بوتل پر ذیل قوت عمل کرتی ہے (ا) $\vec{F}_1 = (3.0\,\mathrm{N})\hat{\imath} - (4.0\,\mathrm{N})\hat{\jmath} + (5.0\,\mathrm{N})\hat{k}$، (ب) $\vec{F}_2 = (-3.0\,\mathrm{N})\hat{\imath} - (4.0\,\mathrm{N})\hat{\jmath} -$

(د)؟ $(5.0\,\mathrm{N})\hat{k}$، اور (ج) $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ کا مجموعہ۔ مبدا کے لحاظ سے بوتل پر قوت مروڑ اکائی سمتیہ ترقیم میں کیا ہو گی؟(د) نقطہ $(3.0\,\mathrm{m}, 2.0\,\mathrm{m}, 4.0\,\mathrm{m})$ کے لحاظ سے جزو ج کی قوت مروڑ دوبارہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۵: قوت $\vec{F} = (-8.0\,\mathrm{N})\hat{i} + (6.0\,\mathrm{N})\hat{j}$ ایک ذرے پر عمل کرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r} = (3.0\,\mathrm{m})\hat{i} + (4.0\,\mathrm{m})\hat{j}$ ہے۔(ا) اکائی سمتیہ ترقیم میں ذرے پر مبدا کے لحاظ سے قوت مروڑ کیا ہو گی، اور (ب) $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے بیچ زاویہ کیا ہو گا؟

زاوی معیار حرکت

سوال ۵.۲۶: شکل 40.11 میں دکھائے لمحے پر ذرہ P، جس کی کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$ ہے، کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے جس کی قدر $3.0\,\mathrm{m}$ اور زاویہ $\theta_1 = 45^\circ$ ہے، اور سمتی رفتار $\vec{v}$ ہے جس کی قدر $4.0\,\mathrm{m}$ اور زاویہ $\theta_2 = 30^\circ$ ہے۔ قوت $\vec{F}$ جس کی قدر $2.0\,\mathrm{N}$ اور زاویہ $\theta_3 = 30^\circ$ ہے P پر عمل پیرا ہے۔ تینوں سمتیے xy مستوی میں واقع ہیں۔ مبدا کے لحاظ سے P کے زاوی معیار حرکت (ا) کی قدر اور (ب) رخ کیا ہے، اور P پر قوت مروڑ (ج) کی قدر اور (د) رخ کیا ہے؟

سوال ۵.۲۷: ایک جسم، جس کی کمیت $0.25\,\mathrm{kg}$، تعین گر سمتیہ $\vec{r} = (2.0\hat{i} - 2.0\hat{k})\,\mathrm{m}$، اور سمتی رفتار $\vec{v} = (-5.0\hat{i} + 5.0\hat{k})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے، پر قوت $\vec{F} = 4.0\hat{j}\,\mathrm{N}$ لمحاتی عمل کرتی ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اور اکائی سمتیہ ترقیم میں (ا) جسم کا زاوی معیار حرکت اور (ب) جسم پر قوت مروڑ کیا ہے؟

سوال ۵.۲۸: نقطہ (x, y) سے، جس کے محدد $(3.0, -4.0)\,\mathrm{m}$ ہیں، کمیت $2.0\,\mathrm{kg}$ کا ذرہ نما جسم مستوی میں سمتی رفتار سے حرکت کرتے گزرتا ہے۔ سمتی رفتار کے جزو $v_x = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $v_y = 60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہیں۔ اس لمحے پر، اکائی سمتیہ ترقیم میں (ا) مبدا اور (ب) نقطہ $(-2.0, -2.0)\,\mathrm{m}$ کے لحاظ سے جسم کا زاوی معیار حرکت کیا ہو گا؟

سوال ۵.۲۹: شکل 41.11 میں لمحاتی نظارہ پیش ہے۔ دو ذرے xy مستوی میں حرکت کرتے ہیں۔ ذرہ P_1 کی کمیت $6.5\,\mathrm{kg}$، رفتار $v_1 = 2.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، اور مبدا O سے فاصلہ $d_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ ذرہ P_2 کی کمیت $3.1\,\mathrm{kg}$، رفتار $v_2 = 3.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، اور مبدا O سے فاصلہ $d_2 = 2.8\,\mathrm{m}$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے دو ذروی نظام کے صافی زاوی معیار حرکت (ا) کی قدر اور (ب) رخ کیا ہے؟

سوال ۵.۳۰: جس لمحے $2.00\,\mathrm{kg}$ جسم کا مبدا کے لحاظ سے ہٹاو $\vec{d} = (2.00\,\mathrm{m})\hat{i} + (4.00\,\mathrm{m})\hat{j} - (3.00\,\mathrm{m})\hat{k}$ ہے، اس کی سمتی رفتار $\vec{v} = -(6.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{i} + (3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{j} + (3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{k}$ ہے اور اس پر قوت $\vec{F} = (6.00\,\mathrm{N})\hat{i} - (8.00\,\mathrm{N})\hat{j} + (4.00\,\mathrm{N})\hat{k}$ عمل کرتی ہے۔(ا) جسم کا اسراع، (ب) مبدا کے لحاظ سے جسم کا زاوی معیار حرکت، (ج) مبدا کے لحاظ سے جسم پر عمل پیرا قوت مروڑ، اور (د) جسم کی سمتی رفتار اور جسم پر عمل پیرا قوت کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۱: ایک گیند جس کی کمیت $0.400\,\mathrm{kg}$ ہے $40.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر وار پھینکا جاتا ہے (شکل 42.11)۔ نقطہ رہائی سے $2.00\,\mathrm{m}$ افقی فاصلے پر واقع نقطہ P کے لحاظ سے، جب گیند (ا) بلند ترین نقطے پر ہو اور جب (ب) واپس گرتے ہوئے نصف بلندی پر ہو، گیند کا زاوی معیار حرکت کیا ہو گا؟ گیند پر تجاذبی

قوت کی قوت مروڑ P کے لحاظ سے اس وقت کیا ہو گی جب گیند (ج) بلند ترین نقطے پر ہو اور جب گیند (د) واپس گرتے ہوئے نصف بلندی پر ہو؟

نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

سوال ۵.۳۲: مبدا کے لحاظ سے ذرے پر دو قوت عمل کرتی ہیں: $\vec{\tau}_1$ کی قدر $2.0\,\mathrm{N\,m}$ اور اس کا رخ محور x کے مثبت رخ ہے، اور $\vec{\tau}_2$ جس کی قدر $4.0\,\mathrm{N\,m}$ اور رخ محور y کے منفی رخ ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں $\mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t$ تلاش کریں، جہاں مبدا کے لحاظ سے ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ ہے۔

سوال ۵.۳۳: وقت $t = 0$ پر $3.0\,\mathrm{kg}$ ذرے کی سمتی رفتار $\vec{v} = (5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath} - (6.0\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath}$، اور مقام $x = 3.0\,\mathrm{m}$، $y = 8.0\,\mathrm{m}$ ہے۔ ذرے کو $7.0\,\mathrm{N}$ قوت محور x کے منفی رخ کھینچتی ہے۔ مبدا کے لحاظ سے (ا) ذرے کا زاوی معیار حرکت، (ب) ذرے پر عمل پیرا قوت مروڑ، اور (ج) زاوی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۴: محور z کے مثبت جانب سے دیکھتے ہوئے ذرہ مستوی xy میں مبدا کے گرد گھڑی وار حرکت کرتا ہے۔ اگر مبدا کے لحاظ سے ذرے کے زاوی معیار حرکت کی قدر (ا) $4.0\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$، (ب) $4.0t^2\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$، (ج) $4.0\sqrt{t}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$، اور (د) $4.0/t^2\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ ہو، اکائی سمتیہ ترقیم میں ذرے پر قوت مروڑ کیا ہو گی؟

سوال ۵.۳۵: وقت t پر، سمتیہ $\vec{r} = 4.0t^2\hat{\imath} - (2.0t + 6.0t^2)\hat{\jmath}$ مبدا کے لحاظ سے xy محددی نظام میں $3.0\,\mathrm{kg}$ ذرے کا مقام دیتا ہے (جہاں $\vec{r}$ میٹر میں اور t سیکنڈ میں ہے)۔ (ا) مبدا کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا قوت مروڑ کا ریاضی فقرہ تلاش کریں۔ (ب) کیا مبدا کے لحاظ سے ذرے کا زاوی معیار حرکت بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے، یا تبدیل نہیں ہو رہا؟

استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

سوال ۵.۳۶: تین گھومتے قرص کو دو پٹے ملاتے ہیں (شکل 43.11)۔ ایک پٹہ قرص A اور C کے چکا پر لپٹا ہے۔ دوسرا پٹہ قرص A کے وسطی نابھ اور قرص B کے چکا پر لپٹا ہے۔ پٹے ہمواری سے بغیر پھسلے چکا اور نابھ پر حرکت کرتے ہیں۔ قرص A کا رداس R؛ اس کے نابھ کا رداس $0.500R$؛ قرص B کا رداس $0.2500R$؛ اور قرص C کا رداس $2.000R$ ہے۔ قرص B اور C کی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) اور موٹائیاں برابر ہیں۔ قرص C اور قرص B کے زاوی معیار حرکت کی قدروں کی نسبت کیا ہے؟

سوال ۵.۳۷: کمیت $23\,\mathrm{g}$ $= m$ کے تین ذرے، تین بلا کمیت سلاخوں سے جکڑے ہیں، جن کی لمبائیاں $d = 12\,\mathrm{cm}$ ہے۔ استوار جامد جسم نقطہ O کے گرد زاوی رفتار $\omega = 0.85\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے گھومتا ہے۔ نقطہ O پر (ا) جامد جسم کا گھمیری جمود، (ب) درمیانے ذرے کے زاوی معیار حرکت کی قدر، اور (ج) جامد جسم کے زاوی معیار حرکت کی قدر کیا ہے؟

سوال ۵.۳۸: ریگ مال کا قرص، جس کا گھمیری جمود $1.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے، برقی برما سے جوڑا گیا ہے جس کی موٹر قرص کے وسطی محور پر $16\,\mathrm{N\,m}$ قدر کی قوت مروڑ پیدا کرتی ہے۔ اگر قوت مروڑ $33\,\mathrm{ms}$ کے لئے فراہم کی جائے، اس محور پر قرص (ا) کے زاوی معیار حرکت اور (ب) زاوی سمتی رفتار کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۵.۳۹: وسطی محور پر اڑن پہیے کا گھمیری جمود $0.140\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ اس کا زاوی معیار حرکت $1.5\,\mathrm{s}$ میں $3.00\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ سے گھٹ کر $0.800\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ ہو جاتا ہے۔ (ا) اس دورانیے میں اڑن پہیے پر، وسطی محور کے لحاظ سے، اوسط قوت مروڑ کی قدر کیا ہے؟ (ب) مستقل زاوی اسراع فرض کرتے ہوئے، اس دورانیے میں پہیا کتنا زاویہ طے کرتا ہے؟ (ج) پہیے پر کتنا کام سرانجام ہو گا؟ (د) پہیے کی اوسط طاقت کیا ہے؟

سوال ۵.۴۰: ایک قرص، جس کا گھمیری جمود $7.00\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے، تابع وقت قوت مروڑ $\tau = (5.00 + 2.00t)\,\mathrm{N\,m}$ کے زیر اثر انتصابی محور پر گھومتا ہے۔ وقت $t = 1.00\,\mathrm{s}$ پر اس کا زاوی معیار حرکت $5.00\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ ہے۔ وقت $t = 3.00\,\mathrm{s}$ پر اس کا زاوی معیار حرکت کیا ہو گا؟

سوال ۵.۴۱: دائری گھیرا اور چوکور سے استوار جسم بنایا گیا ہے (شکل 45.11)۔ گھیرا کا رداس R اور کمیت m ہے۔ چوکور چار پتلی یکساں سلاخوں سے بنایا گیا ہے جہاں ایک سلاخ کی کمیت m اور لمبائی R ہے۔ انتصابی محور پر استوار جسم $2.5\,\mathrm{s}$ دوری عرصے کی مستقل رفتار سے گھومتا ہے۔ فرض کریں $R = 0.50\,\mathrm{m}$ اور $m = 2.0\,\mathrm{kg}$ ہے۔ محور گھماو پر جسم کا (ا) گھمیری جمود اور (ب) زاوی معیار حرکت تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۲: ابتدائی ساکن قرص پر، شکل 46.11 میں پیش، قوت مروڑ τ عمل کرتی ہے۔ قرص وسطی انتصابی محور پر گھوم سکتا ہے۔ محور τ کا پیمانہ $\tau_s = 4.0\,\mathrm{N\,m}$ طے کرتا ہے۔ وقت (ا) $t = 7.0\,\mathrm{s}$ اور (ب) $t = 20\,\mathrm{s}$ پر گھمیری محور پر قرص کا زاوی معیار حرکت کیا ہو گا؟

زاوی معیار حرکت کی بقا

سوال ۵.۴۳: دو **پھسلن باز**[10]، جن کی کمیتیں $50\,\mathrm{kg}$ ہیں، متوازی راہوں پر، جن کے بیچ $3.0\,\mathrm{m}$ فاصلہ ہے، ایک دوسرے کی طرف پھسل کر حرکت میں ہیں (شکل 47.11)۔ ان کی آپس میں مخالف سمتی رفتار $1.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ ایک پھسلن باز بلا کمیت لمبا ڈنڈا، ایک سرے سے پکڑ کر، اٹھائے ہوا ہے، اور دوسرا پھسلن باز قریب گزرتے وقت ڈنڈے کا دوسرا سرا پکڑ لیتا ہے۔ اس کے بعد دونوں ڈنڈے کے وسط کے گرد گھومتے ہیں۔ **پھسلن تختوں**[11] اور برف کے بیچ رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ (ا) حرکت کے دائرے کا رداس، (ب) پھسلن باز کی زاوی رفتار، اور (ج) دو پھسلن باز نظام کی حرکی توانائی کیا ہے؟ اس کے بعد، پھسلن باز ڈنڈے کو کھینچ کر قریب آتے ہیں، حتٰی کہ ان کے بیچ فاصلہ $1.0\,\mathrm{m}$ رہ جاتا ہے۔ (د) ان کی زاوی رفتار اور (ہ) نظام کی حرکی توانائی کیا ہو گی؟ (و) حرکی توانائی میں اضافے کے لئے توانائی کہاں سے آئی؟

سوال ۵.۴۴: ایک چوہا، جس کی کمیت $0.17\,\mathrm{kg}$ ہے، انتصابی محور پر نسب رداس $15\,\mathrm{cm}$ قرص کے چکا پر خلاف گھڑی حرکت میں ہے۔ قرص کا گھمیری جمود $5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$، اور دھرا بلا رگڑ ہے۔ زمین

---

[10] skaters
[11] skates

کے لحاظ سے چوہے کی رفتار $2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے، اور قرص کی گھڑی وار زاوی رفتار $\omega_0 = 2.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ چوہے کو چکا پر کھانے کو کچھ ملتا ہے لہٰذا وہ رک کر کھانا شروع کرتا ہے۔ (ا) چوہا کے رکنے کے بعد قرص کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) کیا بھونرا کے رکنے کے دوران میکانی توانائی کی بقا ہو گی؟

سوال ۵.۴۵: ایک شخص چبوترا پر کھڑا ہے۔ چبوترا (بلا رگڑ) 1.2 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ شخص کے ہاتھ باہر کو پھیلے ہوئے ہیں اور اس کے دونوں ہاتھوں میں ایک ایک اینٹ ہے۔ وسطی انتصابی محور پر شخص، اینٹیں، اور چبوترا پر مشتمل نظام کا گھمیری جمود $6.0\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ دونوں ہاتھ قریب کرنے سے نظام کا گھمیری جمود گھٹ کر $2.0\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہو جاتا ہے۔ (ا) چبوترے کی نئی زاوی رفتار کیا ہو گی اور (ب) نظام کی نئی حرکی توانائی اور پرانی حرکی توانائی کی نسبت کیا ہو گی؟ (ج) اضافی حرکی توانائی کہاں سے آئی؟

سوال ۵.۴۶: انہدام پذیر چکر دار ستارے کے گھمیری جمود کی قیمت ابتدائی قیمت کی $\frac{1}{3}$ ہے۔ نئی گھمیری حرکی توانائی اور ابتدائی گھمیری حرکی توانائی کی نسبت کیا ہو گی؟

سوال ۵.۴۷: ایک بڑے پہیے پر، جو انتصابی محور کے گرد بلا رگڑ گھوم سکتا ہے، پٹری نسب ہے (شکل 48.11)۔ ساکن پٹری پر کمیت m کی کھلونا ریل گاڑی رکھ کر ریل گاڑی کو برقی طاقت فراہم کی جاتی ہے۔ پٹری کے لحاظ سے ریل گاڑی $0.15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار کو پہنچتی ہے۔ اگر پہیے کی کمیت $1.1m$ اور رداس $0.43\,\mathrm{m}$ ہو، اس کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟ (پہیے کو گھیرا تصور کریں؛ رگڑ اور تیلیوں کی کمیت نظر انداز کریں۔)

سوال ۵.۴۸: ایک چوہا رداس R دائری قرص کے مرکز سے چکا کی طرف چلتا ہے۔ قرص انتصابی محور پر، بیرونی قوت مروڑ کی عدم موجودگی میں، گھوم رہا ہے۔ چوہا و قرص نظام کی زاوی رفتار شکل 49.11 میں پیش ہے ($\omega_a = 5.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور $\omega_b = 6.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے)۔ چکا پر پہنچ کر قرص کے گھمیری جمود کا کتنا حصہ چوہے کا ہو گا؟

سوال ۵.۴۹: دو قرص کم رگڑی انتصابی دھرے پر یوں نصب کیے گئے ہیں کہ انہیں مزدوج کر کے ایک جسم کی طرح گھمایا جا سکے۔ پہلے قرص کا گھمیری جمود، محور گھماو پر، $3.30\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے اور یہ خلاف گھڑی 450 چکر فی منٹ گھوم رہا ہے۔ دوسرا قرص، جس کا محور گھماو پر گھمیری جمود $6.60\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے، خلاف گھڑی 900 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے۔ انہیں مزدوج کیا جاتا ہے۔ (ا) ان کا زاوی رفتار اب کیا ہو گا؟ اس کے برعکس اگر ابتدائی طور پر دوسرا قرص گھڑی وار 900 چکر فی منٹ گھومتا، تب انہیں ملانے کے بعد ان کی (ب) زاوی رفتار اور (ج) گھومنے کا رخ کیا ہوتے؟

سوال ۵.۵۰: برقی موٹر کے مدور کا وسطی محور پر گھمیری جمود $I_m = 2.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ تحقیق خلائی طیارے میں موٹر نسب کر کے طیارے کی سمت بندی کی جاتی ہے۔ موٹر کا دھرا طیارے کے وسطی محور کے ہمراہ ہے؛ محور پر طیارے کا گھمیری جمود $I_p = 12\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ طیارے کو وسطی محور پر $30°$ گھمانے کے لئے مدور کو کتنے چکر دینے ہوں گے؟

سوال ۵.۵۱: قابل نظر انداز گھمیری جمود کے دھرے پر پہیا 800 چکر فی منٹ زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ دوسرا ساکن پہیا، جس کا گھمیری جمود دگنا ہے، یکدم پہلے پہیے کے ساتھ مزدوج کیا جاتا ہے۔ (ا) دو پہیوں اور دھرے کا زاوی رفتار کیا ہو گا؟ (ب) ابتدائی گھمیری حرکی توانائی کا کتنا حصہ ضائع ہو گا؟

سوال ۵.۵۲: ایک بھونرا جس کی کمیت m ہے ایک قرص کے چکا پر بیٹھا ہے۔ قرص کی کمیت $4.00m$ ہے اور یہ انتصابی محور پر آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ قرص اور بھونرا کی ابتدائی زاوی سمتی رفتار $0.260\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ اس کے بعد بھونرا نصف رداسی فاصلہ طے کر کے دھرے کے قریب آتا ہے۔ (ا) بھونرا و قرص نظام کا زاوی سمتی رفتار کیا ہو گا؟ (ب) نظام کی نئی حرکی توانائی K اور ابتدائی حرکی توانائی K_0 کی نسبت K/K_0 کیا ہو گی؟ (ج) حرکی توانائی میں تبدیلی کی وجہ کیا ہے؟

سوال ۵.۵۳: ایک یکساں پتلی سلاخ وسطی نقطہ O پر واقع انتصابی محور کے گرد گھوم سکتی ہے۔ سلاخ کی لمبائی $0.500\,\mathrm{m}$ اور کمیت $4.00\,\mathrm{kg}$ ہے (شکل 50.11)۔ ساکن سلاخ کے ایک سر پر $3.00\,\mathrm{g}$ گولی افقی چلائی جاتی ہے۔ فضائی جائزہ میں سلاخ کے ساتھ گولی کی راہ کا زاویہ $\theta = 60.0°$ پیش ہے (شکل 50.11)۔ اگر گولی سلاخ میں دھنس جائے اور تصادم کے عین بعد سلاخ کی زاوی سمتی رفتار $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہو، عین تصادم سے قبل گولی کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۵۴: ایک چھلا جو اپنے وسطی نقطہ کے گرد انتصابی محور پر گھوم سکتا ہے شکل 51.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا بیرونی رداس $R_2 = 0.800\,\mathrm{m}$ اور اندرونی رداس $R_1 = R_2/2.00$ ہے۔ چھلے کی کمیت $M = 8.00\,\mathrm{kg}$ ہے، جبکہ دھرے اور چھلے کو دھرے کے ساتھ جکڑنے والی تیلیوں کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔ گھیر کے بیرونی کنارے، رداس R_2 پر کمیت $m = M/4.00$ کی بلی بیٹھی ہے اور گھیر $8.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اگر بلی چل کر اندرونی رداس R_1 کو پہنچے، بلی و گھیر انظام کی حرکی توانائی میں کتنا اضافہ ہو گا؟

سوال ۵.۵۵: گراموفون کی تھالی، جس کی کمیت $0.10\,\mathrm{kg}$ اور رداس $0.10\,\mathrm{m}$ ہے، وسطی انتصابی محور پر $4.7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے گھوم رہی ہے۔ محور گھماو پر تھالی کا گھمیری جمود $5.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ کمیت $0.020\,\mathrm{kg}$ کی لبدی اوپر سے گر کر تھالی کے کنارے پر چپک جاتی ہے۔ اس کے فوراً بعد تھالی کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۵۶: لمبی چھلانگ میں زمین سے اچھلتے وقت کھلاڑی کو زاوی معیار حرکت منتقل ہوتا ہے جو کھلاڑی کو آگے کی طرف گھما کر طے شدہ فاصلہ کم بناتا ہے۔ اس اثر کو کم کرنے کی غرض سے کھلاڑی بازو سیدھے کر کے شکل 18.11 کی طرز پر گھما کر یہ زاوی معیار حرکت بازوؤں کو منتقل کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ ایک بازو $0.700\,\mathrm{s}$ میں 0.500 چکر اور دوسرا 1 چکر مکمل کرتا ہے۔ بازو کو $4.0\,\mathrm{kg}$ کمیت کی $0.60\,\mathrm{m}$ لمبی سلاخ تصور کریں، جو ایک سر کے گرد گھومتی ہے۔ کھلاڑی کی حوالہ چوکھٹ میں، کندھوں سے گزرتی مشترک محور پر بازوؤں کا کل زاوی معیار حرکت کیا ہے؟

سوال ۵.۵۷: یکساں قرص، جس کی کمیت $10m$ اور رداس $3.0r$ ہے انتصابی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ دوسرا چھوٹا قرص، جس کی کمیت m اور رداس r ہے، بڑے قرص پر ہم مرکز رکھا گیا ہے۔ ابتدائی طور پر دونوں قرص ایک ساتھ $20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی سمتی رفتار سے گھومتے ہیں۔ معمولی بیرونی لرزش کی بنا چھوٹا قرص بڑے قرص پر پھسلتا ہے۔ آخر کار بڑے قرص کے بیرونی کنارے میں چھوٹے قرص کا بیرونی کنارہ پھنس جاتا ہے۔ اس کے بعد دونوں قرص دوبارہ (بغیر پھسلن) ایک ساتھ گھومتے ہیں۔ (ا) بڑے قرص کے محور پر اب ان کی زاوی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) نظام کی نئی حرکی توانائی اور ابتدائی حرکی توانائی کی نسبت K/K_0 کیا ہو گی؟

سوال ۵.۵۸: دائری قرص کی شکل کا چبوترا وسطی انتصابی محور پر بلا رگڑ گھومتا ہے۔ چبوترے کی کمیت $150\,\mathrm{kg}$، رداس $2.0\,\mathrm{m}$، اور محور گھماو کے گرد گھمیری جمود $300\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ ایک طالب علم جس کی کمیت $60\,\mathrm{kg}$

ہے چبوترے کے چکا سے دھرے کی جانب آہستہ آہستہ چلتا ہے۔ جس وقت طالب علم چکا پر تھا، اگر اس وقت نظام کی زاوی رفتار $1.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہو، تب اس وقت زاوی رفتار کیا ہو گی جب طالب علم وسط سے $0.50\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو؟

سوال ۵.۵۹: ایک سلاخ، جس کی کمیت M اور رداس $0.800\,\mathrm{m}$ ہے، وسطی انتصابی محور پر $20.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ ایک ذرہ، جس کی کمیت $M/3.00$ ہے، اور جو سلاخ کے ایک سر سے چپکا ہوا ہے، علیحدہ ہو کر اس لمحے سلاخ کو عمود دار راہ پر روانا ہوتا ہے۔ خارج ہونے کے فوراً بعد، ذرے کی رفتار v_p سلاخ کے سر کی رفتار سے $6.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ زیادہ ہے۔ v_p تلاش کریں۔

سوال ۵.۶۰: ایک غیر یکساں سلاخ، جس کی کمیت $0.50\,\mathrm{kg}$ اور لمبائی $0.60\,\mathrm{m}$ ہے، ایک سر سے لٹکایا گیا ہے۔ اس کے دوسرے سر کے ساتھ $0.50\,\mathrm{kg}$ سل باندھی گئی ہے (شکل 53.11)۔ سل پر $1.0\,\mathrm{g}$ گولی چلائی جاتی ہے۔ سل و سلاخ و گولی نظام محور A کے گرد گھومتا ہے۔ محور A پر سلاخ کا گھمیری جمود $0.060\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ سل کو ایک ذرہ تصور کریں جو عین سل کے سر پر واقع ہے۔ (ا) محور A پر نظام کا گھمیری جمود کیا ہے؟ (ب) اگر عین تصادم کے بعد A پر نظام کی زاوی رفتار $4.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہو، عین تصادم سے قبل گولی کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۶۱: یکساں سلاخ (کمیت $1.0\,\mathrm{kg}$، لمبائی $0.60\,\mathrm{m}$) شکل 54.11 کے مستوی میں $0.12\,\mathrm{kg\,m^2}$ گھمیری جمود کے ساتھ، ایک سر سے گزرتی محور پر گھومتا ہے۔ نشیبی نقطہ سے گزرتے ہوئے سلاخ $0.20\,\mathrm{kg}$ لبدی سے ٹکراتی ہے، جو سلاخ کے سر سے چپک جاتی ہے۔ اگر عین تصادم سے قبل سلاخ کی زاوی رفتار $2.4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہو، لبدی و سلاخ نظام کی زاوی رفتار عین تصادم کے بعد کیا ہو گی؟

سوال ۵.۶۲: نمائش گاہ میں بازیگر $t = 1.87\,\mathrm{s}$ میں چار قلابازیاں کھا کر ساتھی کو پہنچتا ہے۔ ابتدائی اور آخری چوتھائی قلابازی کے دوران وہ جسم سیدھا رکھتا ہے (شکل 55.11)، اور اس کے مرکز کمیت (جس کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے) پر گھمیری جمود $I_1 = 19.9\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ پرواز کے باقی حصہ میں وہ جسم کو زمین پر بیٹھنے کی صورت میں رکھتا ہے؛ اس دوران اس کا گھمیری جمود $I_2 = 3.93\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ بیٹھے حالت میں اس کی زاوی رفتار ω_2 کیا ہو گی؟

سوال ۵.۶۳: انتصابی محور پر گھومنے کے قابل ساکن جھولا، جس کا رداس $2.0\,\mathrm{m}$ ہے، کے چکا پر $30\,\mathrm{kg}$ کمیت کا بچہ کھڑا ہے۔ محور گھما و پر جھولے کا گھمیری جمود $150\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ اس کا دوست $1.0\,\mathrm{kg}$ کمیت کا گیند اس کی طرف پھینکتا ہے۔ عین گیند پکڑنے سے قبل گیند کی سمتی رفتار $\vec{v}$ افقی ہے اور اس کی قدر $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے، اور جھولے کو مماسی لکیر کے ساتھ اس کا زاویہ $\phi = 37°$ ہے (جیسا شکل 56.11 میں دکھایا گیا ہے)۔ عین گیند پکڑنے کے بعد جھولے کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۶۴: ایک بازیگر، جس کی زاوی رفتار ω_i ہے، کا گھمیری جمود دو حصوں پر مشتمل ہے: جسم کے لحاظ سے ایک ٹانگ $\theta = 90°$ زاویہ پر رکھ کر، ٹانگ کا گھمیری جمود $I_1 = 1.44\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے اور باقی جسم (جس کا بیشتر حصہ تنے پر مشتمل ہے) کا گھمیری جمود $I_2 = 0.660\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے (شکل 19a.11)۔ وہ جسم کے لحاظ سے دونوں ٹانگوں کا زاویہ $\theta = 30.0°$ کرتا ہے جس سے اس کی زاوی رفتار ω_f ہو جاتی ہے (شکل 19b.11)۔ اگر I_2 تبدیل نہ ہو، نسبت ω_f/ω_i کیا ہو گی؟

سوال ۵.۶۵: ایک پتلی سلاخ، جس کی کمیت قابل نظر انداز ہے اور جس کی لمبائی $50\,\text{cm}$ ہے، کے دونوں سر پر $2.0\,\text{kg}$ کمیت کا گیند باندھا گیا ہے۔ سلاخ بلا رگڑ وسطی نقطہ پر واقع افقی محور کے گرد گھوم سکتی ہے۔ افقی سلاخ کے سر پر بندھے گیند پر $50.0\,\text{g}$ کمیت کی لبدی $3.00\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ رفتار سے گر کر گیند سے چپک جاتی ہے (شکل 57.11)۔ (ا) عین اس لمحے کے بعد جب لبدی گیند پر گرتی ہے، نظام کی زاوی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) تصادم کے بعد نظام کی حرکی توانائی اور تصادم سے قبل لبدی کی حرکی توانائی کی نسبت کیا ہو گی؟ (ج) نظام کتنا زاویہ گھوم کر لمحاتی رکتا ہے؟

سوال ۵.۶۶: بلا رگڑ سطح پر $h = 20\,\text{cm}$ کی بلندی سے $50\,\text{g}$ سل پھسل کر $100\,\text{g}$ کمیت کی پتلی یکساں سلاخ کے سرے سے چپکتا ہے (شکل 58.11)۔ سلاخ کی لمبائی $40\,\text{cm}$ ہے اور نقطہ O پر گھوم کر زاویہ θ تک پہنچ کر لمحاتی رکتی ہے۔ θ تلاش کریں۔

سوال ۵.۶۷: پتلی یکساں سلاخ، جس کی کمیت M اور لمبائی $0.600\,\text{m}$ ہے، وسطی نقطہ O پر واقع انتصابی محور کے گرد $80.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ زاوی رفتار سے خلاف گھڑی گھوم رہی ہے۔ شکل 59.11 میں اس کا فضائی جائزہ پیش کیا گیا ہے۔ ایک ذرہ، جس کی کمیت $M/3.00$ اور جو $40.0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ افقی خطی رفتار سے حرکت میں ہے، سلاخ سے ٹکرا کر اس کے ساتھ چپک جاتا ہے۔ تصادم کے لمحے پر ذرے کی راہ اور سلاخ آپس میں عمود دار ہیں، اور تصادم کے مقام کا فاصلہ سلاخ کے وسط سے d ہے۔ (ا) تصادم کے بعد سلاخ اور ذرہ ساکن ہونے کی صورت میں d کیا ہو گا؟ (ب) اگر d اس قیمت سے زیادہ ہو، تصادم کے بعد سلاخ اور ذرے کی زاوی رفتار کا رخ کیا ہو گا؟

مسکن چرخی کی استقبالی حرکت

سوال ۵.۶۸: انتصاب سے $30°$ زاویے پر محور کے گرد لٹو 30 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔ لٹو کی کمیت $0.50\,\text{kg}$، محور گھماو پر اس کا گھمیری جمود $5.0 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$، اور نقطہ چول سے اس کا مرکز کمیت $4.0\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے۔ فضائی جائزہ لیتے ہوئے اس کا رخ گھڑی وار ہے۔ (ا) اس کا استقبالی حرکت کی شرح کیا ہو گی اور (ب) فضا سے دیکھتے ہوئے استقبالی حرکت کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۵.۶۹: یکساں قرص، جس کا رداس $50\,\text{cm}$ ہے، کے وسط پر بلا کمیت دھرا نسب کر کے مسکن چرخی بنائی گئی ہے۔ دھرے کی لمبائی $11\,\text{cm}$ ہے۔ دھرا افقی ہے اور اس کا ایک سر ٹیک پر ہے۔ اگر چکر کی شرح 1000 چکر فی منٹ ہو، استقبالی حرکت کی شرح کیا ہو گی؟

اضافی سوال

سوال ۵.۷۰: یکساں ٹھوس گیند سطح پر ہموار لڑھک کر $15°$ زاویے کے میلان پر چڑھتا ہے۔ میلان پر $1.50\,\text{m}$ لڑھکنے کے بعد گیند لمحاتی رکتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کیا ہے؟

سوال ۵.۷۱: یکساں ٹھوس بیلن کے گرد ڈور لپیٹ کر $12\,\text{N}$ کی قدر کی مستقل افقی قوت $\vec{F}_{\text{لاگو}}$ سے کھینچی جاتی ہے (شکل 60.11)۔ بیلن کی کمیت $10.0\,\text{kg}$ اور رداس $0.10\,\text{m}$ ہے، اور یہ افقی سطح پر ہموار لڑھکتا ہے۔ (ا) بیلن کے

مرکز کمیت کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ب) مرکز کمیت پر بیلن کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ج) اکائی سمتیہ ترقیم میں، بیلن پر رگڑی قوت کیا ہے؟

سوال ۵.۷۲: باریک چادر سے بنایا گیا پائپ فرش پر لڑھکتا ہے۔ لمبائی کے ہمراہ وسطی محور پر اس کی مستقیم حرکی توانائی اور گھمیری حرکی توانائی کی نسبت تلاش کریں۔

سوال ۵.۷۳: محور x پر کمیت $3.0\,\mathrm{kg}$ کی کھلونا گاڑی سمتی رفتار $\vec{v} = -2.0t^3\hat{\mathrm{i}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت میں ہے، جہاں t سیکنڈ میں ہے۔ مبدا کے لحاظ سے $t > 0$ کے لئے (ا) گاڑی کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ اور (ب) گاڑی پر قوت مروڑ $\vec{\tau}$ تلاش کریں۔ نقطہ $(2.0\,\mathrm{m}, 5.0\,\mathrm{m}, 0)$ پر (ج) $\vec{L}$ اور (د) $\vec{\tau}$ تلاش کریں۔ نقطہ $(2.0\,\mathrm{m}, -5.0\,\mathrm{m}, 0)$ پر (ہ) $\vec{L}$ اور (و) $\vec{\tau}$ تلاش کریں۔

سوال ۵.۷۴: وسطی محور پر ایک پہیا زاوی معیار حرکت $600\,\mathrm{kg\,m^2}$ کے ساتھ گھڑی وار گھومتا ہے۔ وقت $t = 0$ پر، پہیے کا رخ الٹ کرنے کی غرض سے پہیے پر $50.0\,\mathrm{N\,m}$ قدر کی قوت مروڑ لاگو کی جاتی ہے۔ کس لمحے (t) پہیے کی زاوی رفتار صفر ہو گی؟

سوال ۵.۷۵: کھیل کے میدان میں ایک چھوٹا جھولا ہے جو انتصابی محور پر گھومتا ہے۔ جھولے کا رداس $1.20\,\mathrm{m}$ اور کمیت $180\,\mathrm{kg}$ ہے۔ اس کا رداس دوار (باب ۴ میں سوال ۴.۷۹ دیکھیں) $91.0\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ایک بچہ جس کی کمیت $44.0\,\mathrm{kg}$ ہے، ساکن جھولے کے چکا کو عمود دار راہ پر $3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے دوڑ کر جھولے پر چھلانگ لگا کر چڑھتا ہے۔ جھولے کے دھرے کی رگڑ نظر انداز کریں۔ (ا) دھرے پر جھولے کا گھمیری جمود کیا ہے، (ب) دھرے کے لحاظ سے دوڑتے ہوئے بچے کے زاوی معیار حرکت کی قدر کیا ہے، اور (ج) جھولے پر چڑھنے کے بعد جھولے اور بچے کی زاوی رفتار کیا ہے؟

سوال ۵.۷۶: سنگ خارا[12] کی یکساں سل کی شکل کتاب کی طرح ہے۔ سل کی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$، چوڑائی $15\,\mathrm{cm}$، اور موٹائی $1.2\,\mathrm{cm}$ ہے۔ سنگ خارا کی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) $2.64\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ سل کی وسط سے ایک کونے تک نصف فاصلے پر واقع سل کے رخ کو عمودی محور کے گرد سل گھوم سکتی ہے۔ اس محور پر سل کا زاوی معیار حرکت $0.104\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ ہے۔ محور پر اس کی گھمیری حرکی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۵.۷۷: دو ذرے جن کی کمیتیں $2.90 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$ ہیں مخالف رخ $5.46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے متوازی راہ پر چلتے ہیں۔ راہوں کے بیچ فاصلہ $4.20\,\mathrm{cm}$ ہے۔ (ا) دو راہ کے بیچ وسطی نقطہ کے لحاظ سے دو ذروی نظام کی زاوی معیار حرکت کی قدر L کیا ہے؟ (ب) کیا کسی دوسرے نقطہ کے لحاظ سے زاوی معیار حرکت کی قیمت مختلف ہو گی؟ اگر ایک ذرے کا رخ الٹ کر دیا جائے، (ج) جزو ا، اور (د) جزو ب کے جواب کیا ہوں گے؟

سوال ۵.۷۸: ایک پہیا، جس کا رداس $0.250\,\mathrm{m}$ اور ابتدائی رفتار $43.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے، $225\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرنے کے رکتا ہے۔ (ا) اس کے خطی اسراع اور (ب) زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ وسطی محور پر اس کا گھمیری جمود $0.155\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ پہیے پر رگڑ کی بدولت قوت مروڑ تلاش کریں۔

سوال ۵.۷۹: پہیا A اور B کو ایک پٹہ ملاتا ہے، جو پھسلتا نہیں ہے۔ B کا رداس A کے رداس کا تین گنا ہے۔ (ا) اگر دونوں پہیوں کا اپنے اپنے وسطی محور پر زاوی معیار حرکت ایک جتنا ہو اور (ب) اگر ان کی گھمیری حرکی توانائی ایک

[12] granite

جتنی ہو، تب گھمیری جمود کی نسبت I_A/I_B کیا ہو گی؟

سوال ۵.۸۰: ایک ذرہ، جس کی کمیت $2.50\,\mathrm{kg}$ اور فرش پر افقی سمتی رفتار $(-3.00\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\jmath}$ ہے، کا مکمل غیر لچکی تصادم دوسرے ذرے کے ساتھ ہوتا ہے، جس کی کمیت $4.00\,\mathrm{kg}$ اور فرش پر افقی سمتی رفتار $(4.50\,\mathrm{m\,s^{-1}})\hat{\imath}$ ہے۔ تصادم کے مقام کا محدد $(-0.500\,\mathrm{m}, -0.100\,\mathrm{m})$ ہے۔ تصادم کے بعد، اکائی سمتیہ ترقیم میں، مبدا کے لحاظ سے، آپس میں چپاں ذروں کا زاوی معیار حرکت تلاش کریں۔

سوال ۵.۸۱: ایک پہیا، جس کی کمیت $10.0\,\mathrm{kg}$ اور رداس $0.400\,\mathrm{m}$ ہے، کے وسط پر بلا کمیت دھرا استوار (جھکڑ کر) نسب ہے (شکل 62.11)۔ دھرے کا رداس $0.200\,\mathrm{m}$ ، اور دھرے پر پہیے و دھرے کا گھمیری جمود $0.600\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔ افق کے ساتھ $\theta = 30.0°$ میلان کے فراز پر پہیا ابتدائی طور پر ساکن رکھا جاتا ہے۔ دھرا میلان کی سطح مس کرتا ہے جبکہ پہیا سطح میں بنی جھری کے اندر، سطح مس کیے بغیر، چلتا ہے۔ رہائی کے بعد، دھرا بغیر پھسلے، میلان پر ہموار لڑھک کر اترتا ہے۔ سطح پر $2.00\,\mathrm{m}$ چلنے کے بعد، پہیا و دھرے کے نظام کی (ا) گھمیری حرکی توانائی اور (ب) مستقیم حرکی توانائی کیا ہو گی؟

سوال ۵.۸۲: ایک سر پر انتصابی محور کے گرد یکساں سلاخ افقی مستوی میں گھومتا ہے۔ سلاخ کی لمبائی $6.00\,\mathrm{m}$ اور وزن $10.0\,\mathrm{N}$ ہے، اور اس کی زاوی رفتار 240 چکر فی منٹ ہے۔ (ا) محور گھماو پر اس کا گھمیری جمود اور (ب) اس محور پر زاوی معیار حرکت کی قدر کیا ہو گی؟

سوال ۵.۸۳: ٹھوس کرہ، جس کا وزن $36.0\,\mathrm{N}$ ہے، $30.0°$ میلان پر لڑھک کر چڑھتا ہے۔ میلان پر روانا ہونے سے قبل کرہ کے مرکز کمیت کی مستقیم رفتار $4.90\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) یہاں کرہ کی حرکی توانائی کیا ہے؟ (ب) میلان پر چڑھتے ہوئے کرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ (ج) کیا جزو ب کا جواب کرہ کی کمیت پر منحصر ہے؟

سوال ۵.۸۴: فرض کریں سوال ۵.۱۷ میں ڈوری دار لٹو رہا کرنے کے بجائے ڈور پر نیچے رخ $1.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ (ا) ڈور کے اختتام تک لٹو کتنے دیر میں پہنچے گا؟ (ب) ڈور کے اختتام پر پہنچتے وقت اس کی (ب) کل حرکی توانائی، (ج) خطی رفتار، (د) مستقیم حرکی توانائی، (ہ) زاوی رفتار، اور (و) گھمیری حرکی توانائی کیا ہیں؟

سوال ۵.۸۵: ساکن جھولے پر، جس کا رداس R اور گھمیری جمود I ہے، کے چکا پر کمیت M کی لڑکی کھڑی ہے۔ جھولا انتصابی محور پر گھوم سکتا ہے۔ جھولے کے چکا کو مماسی رخ، لڑکی کمیت m کا پتھر افقی پھینکتی ہے۔ زمین کے لحاظ سے پتھر کی رفتار v ہے۔ پتھر پھینکنے کے بعد (ا) جھولے کی زاوی رفتار اور (ب) لڑکی کی خطی رفتار کیا ہیں؟

سوال ۵.۸۶: افقی سطح پر رداس R اور کمیت m کا جسم v رفتار سے ہموار لڑھک رہا ہے۔ اس کے بعد جسم میلان پر h بلندی تک چڑھ پاتا ہے۔ (ا) اگر $h = 3v^2/4g$ ہو، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہے؟ (ب) جسم کی شکل کیا ہو سکتی ہے؟

باب ۶

توازن اور لچک

۶.۱ توازن

مقاصد
اس حصے کو پڑھ کر آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. توازن اور سکونی توازن میں فرق کر پائیں گے۔

۲. سکونی توازن کے چار شرائط جان پائیں گے۔

۳. مرکز ثقل اور اس کا مرکز کمیت سے تعلق سمجھ پائیں گے۔

۴. ذروں کی دی گئی تقسیم کے لئے مرکز ثقل اور مرکز کمیت کے محدد کا حساب کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- استوار جسم جب ساکن ہو، وہ سکونی توازن میں ہو گا۔ ایسے جسم کے لئے، جسم پر بیرونی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = 0 \qquad \text{(قوتوں کا توازن)}$$

اگر تمام قوت xy مستوی میں ہوں، یہ مساوات ذیل دو جزوی مساوات کی معادل ہو گی۔

$$F_{\text{صافی},y} = 0 \quad \text{اور} \quad F_{\text{صافی},x} = 0 \qquad \text{(قوتوں کا توازن)}$$

- سکونی توازن سے مراد یہ بھی ہے کہ کسی بھی نقطے کے لحاظ سے جسم پر بیرونی قوت مروڑ کا مجموعہ صفر ہو

گا:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = 0 \qquad \text{(قوت مروڑ کا توازن)}$$

اور اگر تمام قوت xy مستوی میں ہوں تب تمام قوت مروڑ سمتیات محور z کو متوازی ہوں گے، اور قوت مروڑ کے توازن کی مساوات ذیل یک جزوی مساوات کی معادل ہو گی۔

$$\tau_{\text{صافی},z} = 0 \qquad \text{(قوت مروڑ کا توازن)}$$

- تجاذبی قوت جسم کے ہر ذرے پر انفرادی عمل کرتی ہے۔ تمام انفرادی اعمال کا صافی اثر جاننے کے لئے مرکز کمیت پر معادل تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ فرض کرنی ہو گی۔ اگر جسم کے تمام ٹکڑوں پر ثقلی اسراع $\vec{g}$ ایک ہو، ثقلی مرکز جسم کے مرکز کمیت پر ہو گا۔

۶.۱.۱ طبیعیات کیا ہے؟

انسانی بنائی چیزیں، لاگو قوتوں سے قطع نظر، مستحکم تصور کی جاتی ہیں۔ تجاذبی قوت اور ہوائی قوتوں کے باوجود ہم توقع کرتے ہیں کہ عمارت کھڑی رہے گی، اور پل سمندر میں گرے گا نہیں۔

طبیعیات کے مرکز توجہ وہ حقیقت ہے جو عمل پیرا قوتوں کے باوجود جسم کو مستحکم رکھتا ہے۔ اس باب میں استحکام کے دو نقطہ نظر پر غور کیا جائے گا: استوار جسم پر عمل پیرا قوت اور قوت مروڑ کا توازن اور نا استوار اجسام کی لچک، جس پر اجسام کا مسخ ہونا منحصر ہے۔ اگر طبیعیات درست کی جائے، اس پر انجینئری اور طبیعیات کے جریدوں میں لاتعداد مضامین لکھے جائیں گے؛ اگر غلط کی جائے، اخبار کا سرنامہ بنے گا اور قانونی کارروائی ہو گی۔

توازن

ذیل اجسام پر غور کریں: (1) میز پر پڑی ساکن کتاب، (2) بلار گڑ سطح پر مستقل سمتی رفتار سے حرکت پذیر قرص، (3) چھت کے پنکھے کے چکر کھاتے پر، اور (4) سیدھی راہ پر چلتے سائیکل کا پہیا۔ ان چار اجسام کے لئے

۱. مرکز کمیت کا خطی معیار حرکت $\vec{P}$ ایک مستقل ہے۔

۲. مرکز کمیت یا کسی دوسرے نقطے کے لحاظ سے ان کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ بھی ایک مستقل ہے۔

ہم کہتے ہیں یہ جسم **توازن**[1] میں ہیں۔ یوں توازن کے دو شرائط ذیل ہیں۔

$$\vec{P} = \text{مستقل} \quad \text{اور} \quad \vec{L} = \text{مستقل} \tag{۶.۱}$$

اس باب میں ہم صرف ان صورتوں پر غور کرتے ہیں جہاں مساوات ۶.۱ میں مستقل کی قیمت صفر ہو؛ یعنی ہم ان اجسام میں دلچسپی رکھتے ہیں جو حوالہ چوکھٹ کے لحاظ سے ساکن ہوں؛ خطی سکون اور گھمیری سکون میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

[1] equilibrium

ایسے اجسام **سکونی توازن**[۲] میں ہوں گے۔ باب کے آغاز میں چار اجسام میں صرف میز پر پڑی کتاب سکونی توازن میں ہے۔

شکل 1.12 میں دکھائی گئی چٹان، فی الحال، سکونی توازن میں ہے۔ مساجد، پُل، گھر، وغیرہ بھی سکونی توازن میں ہیں؛ یہ وقت گزرنے کے باوجود ساکن رہتے ہیں۔

جیسا ہم حصہ 3.8 میں ذکر کر چکے، اگر سکونی توازن سے قوت کے بل بوتے پر نکالے جانے کے بعد جسم واپس سکونی توازن کو لوٹے، ہم کہتے ہیں یہ جسم مستحکم سکونی توازن میں ہے۔ نصف کرہ کے تل میں رکھا گیا کنچا اس کی ایک مثال ہے۔ اس کے برعکس، اگر چھوٹی قوت جسم کو ہلا کر توازن ختم کر پائے، جسم غیر مستحکم سکونی توازن میں ہو گا۔

زنجیری اثر۔ فرض کریں ہم ایک اینٹ یوں کھڑی کریں کہ اس کا مرکز کمیت عین ایک کنارے کے اوپر ہو (شکل 2a.12)۔ تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ کا خط عمل اسی کنارے سے گزرتا ہے لہٰذا اس کنارے پر $\vec{F}_g$ کی قوت مروڑ صفر ہو گی۔ اینٹ توازن میں ہے۔ معمولی اضطراب اس توازن کو برباد کر دیگا۔ جیسے ہی $\vec{F}_g$ کا خط عمل کنارے سے ایک طرف ہو (شکل 2b.12)، $\vec{F}_g$ کی پیدا کردہ قوت مروڑ اینٹ کو اس طرف گھمائے گی۔ یوں شکل 2a.12 میں اینٹ غیر مستحکم توازن میں ہے۔

شکل 2c.12 میں اینٹ اتنی غیر مستحکم نہیں۔ اینٹ گرانے کے لئے ضروری ہے کہ قوت اینٹ اتنی گھمائے کہ اینٹ کا مرکز کمیت کنارے کو پار کر جائے۔ معمولی قوت اس اینٹ کو نہیں گرا سکتی، تاہم انگلی سے جھٹکا دے کر اسے گرایا جا سکتا ہے۔ (اینٹوں کو قطار میں کھڑا کر کے، پہلی اینٹ کو جھٹکا دے کر گرانے سے تمام اینٹیں گرائی جا سکتی ہیں۔)

سل۔ شکل 2d.12 میں دکھایا گیا سل مزید زیادہ مستحکم ہے۔ مرکز کمیت کو سل کے کنارے کی دوسری طرف لی جانے کے لئے مرکز کمیت کو کافی زیادہ دور لے جانا ہو گا۔ انگلی کا جھٹکا سل کا پاسا نہیں پلٹ سکتا۔ (اسی لئے سل قطار میں رکھ کر زنجیری اثر پیدا نہیں کیا جا سکتا۔) شکل 3.12 میں شہتیر پر بیٹھا مزدور سل کی مانند جبکہ اس پر کھڑا مزدور اینٹ کی مانند ہو گا (جس کو ہوا کا جھٹکا نیچے لا سکتا ہے)۔

سکونی توازن اطلاقی انجینئری کے لئے بہت ضروری ہے۔ تخلیق کار تمام بیرونی قوت اور قوت مروڑ کی نشاندہی کر کے، بہتر تراکیب اور مواد استعمال کر کے، یقینی بناتا ہے کہ ان کی موجودگی کے باوجود عمارت یا مشین مستحکم رہے۔ یوں پُل کا نقشہ تیار کرتے وقت تخلیق کار تفصیلی تجزیہ کر کے یقینی بناتا ہے کہ پُل پر آمد و رفت اور ہوائی قوتوں کو پُل سہ سکے۔

توازن کے شرائط

جسم کی مستقیم حرکت، خطی معیار حرکت کے روپ میں نیوٹن کے قانون دوم کو، جو (ذیل) مساوات 27.9 دیتی ہے، مطمئن کرتی ہے۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{۶.۲}$$

---

[۲] staticequilibrium

اگر جسم مستقیم توازن میں ہو؛ یعنی اگر $\vec{P}$ ایک مستقل ہو، تب $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = 0$ ہو گا لہٰذا لازماً درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = 0 \qquad \text{(متوازن قوت)} \tag{۶.۳}$$

جسم کی گھمیری حرکت، زاوی معیار حرکت کے روپ میں نیوٹن کے قانون دوم کو، جو (ذیل) مساوات ۵.۲۹ دیتی ہے، مطمئن کرتی ہے۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{۶.۴}$$

اگر جسم گھمیری توازن میں ہو؛ یعنی اگر $\vec{L}$ ایک مستقل ہو، تب $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = 0$ ہو گا لہٰذا لازماً درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = 0 \qquad \text{(متوازن قوت مروڑ)} \tag{۶.۵}$$

یوں جسم کا توازن میں ہونے کے لئے ذیل دو شرائط ہیں۔

۱. جسم پر تمام بیرونی قوتوں کا سمتی مجموعہ صفر ہونا لازم ہے۔

۲. ہر ممکنہ نقطہ کے لحاظ سے، جسم پر بیرونی قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ صفر ہونا لازم ہے۔

ہاں یہ شرائط سکونی توازن کے لئے بھی ہیں۔ یہ شرائط عمومی صورت کے لئے بھی درست ہیں، جہاں $\vec{P}$ اور $\vec{L}$ مستقل ضرور لیکن غیر صفر ہوں۔

مساوات ۶.۳ اور مساوات ۶.۵، بطور سمتی مساوات، در حقیقت (ذیل) تین تین جزوی مساوات کی معادل ہیں۔

$$\begin{array}{cc} \text{متوازن قوت} & \text{متوازن قوت مروڑ} \\ F_{\text{صافی},x} = 0 & \tau_{\text{صافی},x} = 0 \\ F_{\text{صافی},y} = 0 & \tau_{\text{صافی},y} = 0 \\ F_{\text{صافی},z} = 0 & \tau_{\text{صافی},z} = 0 \end{array} \tag{۶.۶}$$

اصلی مساوات۔ ہم صرف ان صورتوں پر غور کرتے ہیں جس میں جسم پر لاگو قوت xy مستوی میں پائے جاتے ہیں۔ یوں مسئلہ کم پیچیدہ ہو گا۔ اس طرح جسم پر عمل پیرا قوت صرف محور z کی متوازی محور کے گرد جسم گھما سکتے ہیں۔ اس مفروضے کے ساتھ مساوات ۶.۶ میں سے قوت کی ایک مساوات اور قوت مروڑ کی دو مساوات سے چھٹکارا حاصل ہو گا۔ یوں ذیل باقی رہتی ہیں۔

$$F_{\text{صافی},x} = 0 \tag{۶.۷}$$

$$F_{\text{صافی},y} = 0 \tag{۶.۸}$$

$$\tau_{\text{صافی},z} = 0 \tag{۶.۹}$$

یہاں، $\tau_{z,\text{صافی}}$ وہ صافی قوت مروڑ ہے جو محور z یا اس کے متوازی کسی محور پر بیرونی قوت پیدا کرتی ہیں۔

جمی ہوئی برف پر مستقل سمتی رفتار سے حرکت کرتا قرص مساوات ۶.۷، مساوات ۶.۸، اور مساوات ۶.۹ مطمئن کرتا ہے، لہٰذا یہ توازن میں ہو گا، تاہم یہ سکونی توازن میں ہرگز نہیں۔ سکونی توازن کے لئے قرص کا خطی معیار حرکت $\vec{P}$ ایک مستقل ہونے کے ساتھ ساتھ صفر ہونا لازم ہے؛ قرص کا جمی ہوئی برف پر ساکن ہونا لازم ہے۔ یوں، سکونی توازن کے لئے درج ذیل شرط بھی لازم ہے۔

جسم کے خطی معیار حرکت $\vec{P}$ کا صفر ہونا لازم ہے۔

آزمائش ۱

یکساں سلاخ، جس پر سلاخ کو عمود دار دو یا دو سے زیادہ قوت عمل کرتی ہیں، کے چھ فضائی نظارے شکل ؟؟ میں پیش ہیں۔ قوتوں کی قدریں (غیر صفر رکھ کر اور) تبدیل کر کے کون کونسی سلاخ سکونی توازن میں لائی جا سکتی ہیں؟

مرکز ثقل

جسم پر تجاذبی قوت، جسم کے انفرادی ٹکڑوں (جوہر) پر تجاذبی قوتوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔ انفرادی ٹکڑوں کی بات کرتے ہوئے ہم ذیل کہتے ہیں۔

جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ "عملاً" جسم کے **مرکز ثقل**[۳] پر عمل کرتی ہے۔

یہاں لفظ "عملاً" کا مطلب یہ ہے کہ اگر کسی طرح انفرادی ٹکڑوں پر تجاذبی قوت ختم کر دی جائے اور تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ جسم کے مرکز ثقل پر پیدا کر دی جائے، جسم پر صافی قوت اور (کسی بھی محور کے لحاظ سے) جسم پر صافی قوت مروڑ تبدیل نہیں ہوں گی۔

اب تک، ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ جسم کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے، جو اس کے مترادف ہے کہ ہم کہیں جسم کا مرکز ثقل جسم کے مرکز کمیت پر پایا جاتا ہے۔ یاد کریں، کمیت M جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g = M\vec{g}$ عمل کرتی ہے، جہاں $\vec{g}$ جسم کا وہ اسراع ہے جو جسم پر $\vec{F}_g$ لاگو کرنے سے پیدا ہو گا۔ نیچے دیے گئے ثبوت میں ہم ذیل ثابت کریں گے۔

اگر جسم کے تمام ٹکڑوں کے لئے $\vec{g}$ ایک ہو، جسم کا مرکز ثقل اور جسم کا مرکز کمیت ایک نقطے پر ہوں گے۔

سطح زمین پر $\vec{g}$ کی قدر بہت کم تبدیل ہوتی ہے اور (عام زندگی میں جن بلندیوں سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے ان) بلندی کے ساتھ $\vec{g}$ کی قدر زیادہ تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا روزمرہ اشیاء کے لئے درج بالا تخمینا درست ہو گا۔ یوں چوہے یا بھینس

---

[۳] center of gravity

کے لئے تجاذبی قوت کا ان کے مرکز کمیت پر عمل پیدا ہونا فرض کرنا درست ہو گا۔ ذیل ثبوت کے بعد ہم اسی مفروضے پر چلیں گے۔

ثبوت

ہم جسم کے انفرادی ٹکڑوں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ شکل 4a.12 میں وسیع جسم، جس کی کمیت M، اور جسم کا ایک چھوٹا ٹکڑا جس کی کمیت m_i ہے، پیش ہے۔ ہر ٹکڑے پر تجاذبی قوت $\vec{F}_{gi}$، جو $m_i\vec{g}_i$ کے برابر ہے، عمل کرتی ہے۔ $\vec{g}_i$ میں زیرنوشت کہتی ہے $\vec{g}_i$ ٹکڑا i کے مقام پر ثقلی اسراع ہے (دیگر ٹکڑوں کے لئے اس کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے)۔

شکل 4a.12 میں ہر ایک ٹکڑے پر قوت $\vec{F}_{gi}$ عمل کر کے، مبدا O کے لحاظ سے ٹکڑے پر قوت مروڑ τ_i، جس کا معیار اثر کا بازو x_i ہے، پیدا کرتی ہے۔ مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_{\perp}F)$ کی راہنمائی میں ہم ہر ایک قوت مروڑ τ_i ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau_i = x_i F_{gi} \tag{۶.۱۰}$$

یوں، جسم کے تمام ٹکڑوں پر صافی قوت مروڑ ذیل ہو گی۔

$$\tau_{\text{صافی}} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi} \tag{۶.۱۱}$$

اب، پورا جسم لیتے ہیں۔ شکل 4b.12 میں جسم کے مرکز ثقل پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ عمل کرتا دکھایا گیا ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے اس قوت کا معیار اثر کا بازو $x_{\text{مرکز کمیت}}$ اور جسم پر پیدا قوت مروڑ τ ہے۔ مساوات ۴.۴۱ دوبارہ استعمال کر کے یہ قوت مروڑ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\tau = x_{\text{مرکز ثقل}} F_g \tag{۶.۱۲}$$

جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$، جسم کے تمام ٹکڑوں پر تجاذبی قوت $\vec{F}_{gi}$ کا مجموعہ ہو گا۔ یوں مساوات ۶.۱۲ میں F_g کی جگہ $\sum F_{gi}$ ڈال کر ذیل لکھا جائے گا۔

$$\tau = x_{\text{مرکز ثقل}} \sum F_{gi} \tag{۶.۱۳}$$

یاد کریں، مرکز ثقل پر عمل پیدا قوت $\vec{F}_g$ سے پیدا قوت مروڑ اس صافی قوت مروڑ کے برابر ہو گا جو جسم کے تمام ٹکڑوں پر عمل پیدا قوت $\vec{F}_g$ پیدا کرتی ہیں۔ (مرکز ثقل کی تعریف یہی ہے۔) یوں مساوات ۶.۱۳ کا τ، مساوات ۶.۱۱ کے $\tau_{\text{صافی}}$ کے برابر ہے۔ دونوں مساوات کو برابر رکھ کر ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_{\text{مرکز ثقل}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}$$

F_{gi} کی جگہ $m_i g_i$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_{\text{مرکز ثقل}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i \tag{۶.۱۴}$$

اب کلیدی تصور پیش کرتے ہیں: اگر ٹکڑوں کا مقامات پر اسراع g_i ایک ہو، ہم g_i منسوخ کر کے ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$x_{\text{مرکز ثقل}} \sum m_i = \sum x_i m_i \tag{۶.۱۵}$$

تمام ٹکڑوں کی کمیتوں کا مجموعہ $\sum m_i$ جسم کی کمیت M دیتا ہے۔ یوں مساوات ۶.۱۵ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$x_{\text{مرکز ثقل}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i \tag{۶.۱۶}$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ جسم کے مرکز ثقل (مساوات 4.9) کا محدد $x_{\text{مرکز ثقل}}$ دیتی ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔ اگر جسم کے تمام ٹکڑوں کے مقام پر تجاذبی اسراع ایک ہو، جسم کا مرکز ثقل اور مرکز کمیت مماثل ہوں گے۔

$$x_{\text{مرکز ثقل}} = x_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۶.۱۷}$$

۶.۲ سکونی توازن کی چند مثالیں

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. سکونی توازن کے لئے قوت اور قوت مروڑ کی شرائط کا اطلاق کر پائیں گے۔

۲. سمجھ پائیں گے کہ مبدا (جس کے لحاظ سے قوت مروڑ کا حساب کیا جائے گا) کا مقام سوچ سمجھ کر منتخب کرنے سے ایک یا ایک سے زیادہ نامعلوم قوت کو قوت مروڑ کی مساوات سے خارج کرنا ممکن ہو گا، جس سے قوت مروڑ کا حساب آسان ہو گا۔

کلیدی تصور

- جب استوار جسم ساکن حالت میں ہو ہم کہتے ہیں وہ سکونی توازن میں ہے۔ ایسے جسم کے لئے، جسم پر بیرونی قوتوں کا سمتی مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = 0 \qquad (\text{متوازن قوت})$$

اگر تمام قوت xy مستوی میں ہوں، درج بالا سمتی مساوات ذیل دو جزوی مساوات کے مترادف ہو گی۔

$$F_{\text{صافی},x} = 0 \quad \text{اور} \quad F_{\text{صافی},y} = 0 \qquad (\text{متوازن قوت})$$

- سکونی توازن سے یہ بھی مراد ہے کہ، کسی بھی نقطہ کے لحاظ سے، جسم پر بیرونی قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = 0 \qquad (\text{متوازن قوت مروڑ})$$

اگر بیرونی قوت xy مستوی میں ہوں، تمام قوت مروڑ محور z کے متوازی ہوں گی، اور درج بالا سمتی مساوات ذیل جزوی مساوات کی مماثل ہوگی۔

$$\tau_{\text{صافی},z} = 0 \qquad \text{(متوازن قوت مروڑ)}$$

سکونی توازن کی چند مثالیں

یہاں ہم سکونی توازن کے کئی نمونی مسائل پر غور کریں گے۔ ہر مسئلے میں ایک یا ایک سے زیادہ اجسام پر مبنی نظام منتخب کر کے توازن کی مساوات (مساوات ۶.۷، مساوات ۶.۸، اور مساوات ۶.۹) کا اطلاق کریں گے۔ تمام قوت xy مستوی میں ہیں لہٰذا قوت مروڑ z محور کو متوازی ہوں گے۔ یوں، مساوات ۶.۹ کا اطلاق کرتے ہوئے، ہم محور z کے متوازی قوت مروڑ کی محور منتخب کرتے ہیں۔ اگرچہ محور z کے متوازی ہر محور پر مساوات ۶.۹ کا اطلاق ممکن ہے، جیسا آپ دیکھیں گے، بعض محور کے انتخاب کی صورت میں ایک یا ایک سے زیادہ نامعلوم قوت خارج ہوں گی، جس کی بدولت مساوات ۶.۹ کا حل نسبتاً آسان ہوگا۔

آزمائش ۲

یکساں سلاخ، جو سکونی توازن میں ہے، کا فضائی جائزہ شکل ؟؟ میں پیش ہے۔ (ا) کیا قوتوں کو متوازن کر کے آپ $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ کی قدریں تلاش کر سکتے ہیں؟ (ب) $\vec{F}_2$ کی قدر تلاش کرنے کے لئے، محور گھماؤ کس نقطہ پر رکھ کر $\vec{F}_1$ کو مساوات سے خارج کیا جا سکتا ہے؟ (ج) $\vec{F}_2$ کی قدر $65\,\mathrm{N}$ حاصل ہوگی۔ $\vec{F}_1$ کی قدر کیا ہے؟

نمونی سوال ۶.۱: **افقی شہتیری متوازن بنانا**

شکل 5a.12 میں، کمیت $m = 1.8\,\mathrm{kg}$ کی یکساں شہتیری، جس کی لمبائی L ہے، دو ترازو پر رکھی گئی ہے۔ کمیت $M = 2.7\,\mathrm{kg}$ کی یکساں سل شہتیری پر رکھی گئی ہے۔ سل کا مرکز شہتیری کے بائیں سر سے $L/4$ فاصلے پر ہے۔ ترازو کیا وزن دیں گے؟

کلیدی تصورات

سکونی توازن کا کوئی بھی مسئلہ حل کرنے سے پہلے ذیل کرنا ہوگا: نظام کی نشاندہی کریں اور اس کا آزاد جسمی خاکہ بنائیں، جس پر تمام قوتوں کی نشاندہی ہو۔ یہاں ہم شہتیری اور سل کو نظام مانتے ہیں۔ اس کے بعد، نظام پر قوت دکھائیں، جیسا شکل 5b.12 کے آزاد جسمی خاکہ میں کیا گیا ہے۔ (نظام کے انتخاب کے لئے تجربہ درکار ہے، اور عموماً ایک سے زیادہ ممکنات ہوں گے۔) نظام سکونی توازن میں ہے، لہٰذا قوتوں کے توازن کی مساوات (مساوات ۶.۷ اور مساوات ۶.۸) اور قوت مروڑ کے توازن کی مساوات (مساوات ۶.۹) کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔

حساب: بائیں ترازو سے شہتیری پر عمودی قوت $\vec{F}_l$ اور دائیں ترازو سے عمودی قوت $\vec{F}_r$ ہے۔ ہم ان قوت کی قدریں جاننا چاہتے ہیں۔ تجاذبی قوت $\vec{F}_{g,\text{شہتیر}}$، جو $m\vec{g}$ کے برابر ہے، شہتیری کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے۔ اسی طرح، سل پر تجاذبی قوت $\vec{F}_{g,\text{سل}}$، جو $M\vec{g}$ کے برابر ہے، سل کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے۔ تاہم، شکل 5b.12 سادہ بنانے کی غرض سے، سل کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے، اور سمتیہ $\vec{F}_{g,\text{سل}}$ کی دم اس نقطہ پر رکھی

گئی ہے۔(سمتیہ $\vec{F}_{g,}$سل کا رخ تبدیل کیے بغیر، قوت کے خط عمل پر سمتیہ کی گھساٹ، شکل کو عمود دار کسی بھی محور پر، $\vec{F}_{g,}$سل کی قوت مروڑ تبدیل نہیں کرتی۔)

قوتوں کا x جزو موجود نہیں لہٰذا مساوات ۶.۷ $(F_{\text{صافی},x} = 0)$ کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی۔ مساوات ۶.۸ $(F_{\text{صافی},y} = 0)$ y اجزاء کے لئے ذیل دیتی ہے۔

$$F_l + F_r - Mg - mg = 0 \qquad (۶.۱۸)$$

اس مساوات میں دو نامعلوم قوت، F_l اور F_r، موجود ہیں لہٰذا ہمیں قوت مروڑ کے توازن کی مساوات ۶.۹ بھی استعمال کرنی ہو گی۔ ہم شکل 5.12 کے مستوی کو عمود دار کسی بھی محور گھماو پر مساوات کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ آئیں شہتیری کے بائیں سر پر محور گھماو رکھ کر حل کریں۔ ہم قوت مروڑ کو علامت مختص کرنے کا عمومی طریقہ بروئے کار لائیں گے: اگر ساکن جسم کو محور گھماو پر قوت مروڑ گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرے، قوت مروڑ منفی ہو گی؛ اگر خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرے، قوت مروڑ مثبت ہو گی۔ آخر میں ہم قوت مروڑ $r_{\perp}F$ روپ میں لکھتے ہیں، جہاں $\vec{F}_l$ کے لئے $r_{\perp}$ کی قیمت 0، $M\vec{g}$ کے لئے $L/4$، $m\vec{g}$ کے لئے $L/2$، اور $\vec{F}_r$ کے لئے L ہے۔

اب ہم توازن کی مساوات $\tau_{\text{صافی}} = 0$ ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(0)(F_l) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_r) = 0$$

جو ذیل دیگی۔

$$\begin{aligned}
F_r &= \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}mg \\
&= \frac{1}{4}(2.7\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) + \frac{1}{2}(1.8\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) \\
&= 15.44\,\mathrm{N} \approx 15\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

اب F_l کے لئے مساوات ۶.۱۸ حل کر کے درج بالا نتیجہ پر کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
F_l &= (M+m)g - F_r \\
&= (2.7\,\mathrm{kg} + 1.8\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) - 15.44\,\mathrm{N} \\
&= 28.66\,\mathrm{N} \approx 29\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

لائحہ عمل پر غور کریں: قوت کے توازن کی مساوات لکھ کر، دو نامعلوم متغیرات کی بنا، ہم پھنس گئے۔ اگر ہم بغیر سوچے سمجھے کسی محور پر قوت مروڑ کے توازن کی مساوات لکھتے، ہمیں وہاں بھی دو نامعلوم متغیرات کا سامنا ہوتا۔ تاہم، ایک نامعلوم قوت، جو یہاں $\vec{F}_l$ ہے، کے نقطہ اطلاق سے گزرتی محور منتخب کر کے، ہم پھنسنے سے بچ گئے۔ اس انتخاب کی بدولت، قوت مروڑ کے توازن کی مساوات سے نامعلوم قدر F_l خارج ہوتی ہے، اور یوں ہم مساوات حل کر کے F_r دریافت کرنے میں کامیاب ہوئے۔ اس کے بعد، قوت کے توازن کی مساوات دوبارہ لیتے ہوئے باقی قوت کی قدر معلوم کرنا ممکن ہوا۔ □

نمونی سوال ۶.۲: چول دار بازو متوازن بنانا

شکل 6a.12 میں (کمیت $M = 430\,\mathrm{kg}$ کی) تجوری کو معاون چول دار بازو سے بلا کمیت رسی کے ذریعے لٹکا دکھایا گیا ہے، جہاں $a = 1.9\,\mathrm{m}$ اور $b = 2.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ بازو کی کمیت $m = 85\,\mathrm{kg}$ ، اور افقی رسا بلا کمیت ہے۔

(ا) رسا میں تناو T_c کیا ہے؟ دوسرے لفظوں میں بازو پر رسا کی قوت $\vec{T}_c$ کی قدر کیا ہے؟

کلیدی تصورات

یہاں نظام چول دار بازو ہے، جس پر عمل پیرا قوت شکل 6b.12 کے آزاد جسمی خاکے میں پیش ہیں۔ رسا سے بازو پر قوت $\vec{T}_c$ ہے۔ تجاذبی قوت جو $m\vec{g}$ کے برابر ہے، بازو کے مرکز کمیت (بازو کے وسط) پر عمل کرتی ہے۔ چول سے بازو پر قوت کا انتصابی جزو $\vec{F}_v$ ، اور افقی جزو $\vec{F}_h$ ہے۔ رسی سے بازو پر قوت $\vec{T}_r$ ہے۔ بازو، رسی، اور تجوری ساکن ہیں، لہٰذا $\vec{T}_r$ کی قدر تجوری کے وزن کے برابر: $T_r = Mg$ ہو گی۔ ہم xy محددی نظام کا مبدا O چول پر رکھتے ہیں۔ نظام سکونی توازن میں ہے، لہٰذا اس پر توازن کی مساوات کا اطلاق ہو گا۔

حساب: مساوات ۶.۹ $(\tau_{z,\text{صافی}} = 0)$ سے آغاز کرتے ہیں۔ یاد رہے، ہم قوت $\vec{T}_c$ کی قدر جاننا چاہتے ہیں، نا کہ نقطہ O پر موجود چول پر عمل پیرا قوت $\vec{F}_v$ اور $\vec{F}_h$ کی قدریں۔ قوت مروڑ کے حساب سے $\vec{F}_v$ اور $\vec{F}_h$ خارج کرنے کی غرض سے ہم نقطہ O سے گزرتی، شکل کے مستوی کو عمود دار محور گھماو منتخب کرتے ہیں۔ یوں $\vec{F}_v$ اور $\vec{F}_h$ کے معیار اثر کا بازو صفر ہوں گے۔ شکل 6b.12 میں $\vec{T}_c$ ، $\vec{T}_r$ ، اور $m\vec{g}$ کے خط عمل نقطہ دار ہیں۔ مطابقتی معیار اثر کا بازو a ، b ، اور $b/2$ ہیں۔

قوت مروڑ کو $r_\perp F$ روپ میں لکھ کر، قوت مروڑ کی علامت کا قاعدہ استعمال کرکے، توازن کی مساوات $\tau_{z,\text{صافی}} = 0$ ذیل لکھی جائے گی۔

$$(a)(T_c) - (b)(T_r) - (\tfrac{1}{2}b)(mg) = 0 \tag{۶.۱۹}$$

T_r کی جگہ Mg ڈال کر T_c کے لئے حل کرکے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
T_c &= \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a} \\
&= \frac{(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(2.5\,\mathrm{m})(430\,\mathrm{kg} + 85/2\,\mathrm{kg})}{1.9\,\mathrm{m}} \\
&= 6093\,\mathrm{N} \approx 6100\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned}$$

(ب) چول سے بازو پر صافی قوت کی قدر F تلاش کریں۔

کلیدی تصور

اب ہمیں افقی جزو F_h اور انتصابی جزو F_v درکار ہیں، جن سے صافی قوت کی قدر F حاصل ہو گی۔ ہم T_c جانتے ہیں لہٰذا بازو پر قوت کی توازن کی مساوات کا اطلاق کرتے ہیں۔

حساب: افقی توازن کے لئے، ہم $F_{x,\text{صافی}} = 0$ ذیل لکھ سکتے ہیں:

$$F_h - T_c = 0 \tag{۶.۲۰}$$

اور یوں ذیل ہو گا۔

$$F_h = T_c = 6093\,\text{N}$$

انتصابی جزو کے لئے ہم $F_{y,\text{صافی}} = 0$ کو درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$F_v - mg - T_r = 0$$

T_r کی جگہ Mg ڈال کر F_v کے لئے حل کرکے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} F_v &= (m+M)g = (85\,\text{kg} + 430\,\text{kg})(9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}) \\ &= 5047\,\text{N} \end{aligned}$$

مسئلہ فیثاغورث استعمال کرکے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_h^2 + F_v^2} \\ &= \sqrt{(6093\,\text{N})^2 + (5047\,\text{N})^2} \approx 7900\,\text{N} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

یاد رہے، F کی قیمت تجوری اور بازو کے مجموعی وزن: $5000\,\text{N}$، یا افقی رسا میں تناو: $6100\,\text{N}$ سے کافی زیادہ ہے۔ □

نمونی سوال ۶.۳: **دیوار کے ساتھ کھڑی سیڑھی**

شکل 7a.12 میں سیڑھی، جس کی لمبائی $L = 12\,\text{m}$ اور کمیت $m = 45\,\text{kg}$ ہے، چکنی دیوار کے ساتھ کھڑی ہے (چکنی دیوار اور سیڑھی کے بیچ رگڑ نہیں ہو گی)۔ سیڑھی کا بالا سر فرش سے $h = 9.3\,\text{m}$ بلندی پر ہے، اور سیڑھی کا مرکز کمیت نچلے سر سے سیڑھی کے ہمراہ $L/3$ فاصلے پر ہے۔ فرش بلا رگڑ نہیں ہے۔ ایک شخص، جس کی کمیت $M = 72\,\text{kg}$ ہے، سیڑھی چڑھتا ہے حتٰی کہ، سیڑھی کے نچلے سر سے شخص کا مرکز کمیت $L/2$ فاصلے پر ہوتا ہے۔ سیڑھی پر دیوار اور فرش سے قوتوں کی قدریں کیا ہوں گی؟

کلیدی تصورات

ہم شخص اور سیڑھی کو اپنا نظام مان کر نظام کا آزاد جسمی خاکہ، جس پر عمل پیرا قوت دکھائے گئے ہیں، بناتے ہیں (شکل 7b.12)۔ نظام سکونی توازن میں ہے، لہٰذا اس پر قوت کی توازن اور قوت مروڑ کی توازن کی مساوات (مساوات ۶.۷ تا مساوات ۶.۹) کا اطلاق ممکن ہے۔

حساب: شکل 7b.12 میں شخص کو سیڑھی پر نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شخص پر تجاذبی قوت $M\vec{g}$ کے سمتیہ کو خط عمل (سمتیہ قوت سے گزرتی اور اس کے ہمراہ لکیر) پر گھسیٹ کر، سمتیہ کی دم نقطے پر رکھی گئی ہے۔ (قوت یوں منتقل کرنے

سے، شکل کو عمود دار، کسی بھی محور گھماو کے لحاظ سے قوت مروڑ تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں، قوت مروڑ کی توازن کی مساوات، جو ہم استعمال کریں گے، اثر انداز نہیں ہوتی۔)

دیوار سے سیڑھی پر صرف افقی قوت $\vec{F}_w$ عمل کرتی ہے (بلا رگڑ دیوار پر رگڑی قوت موجود نہیں ہو سکتی، لہٰذا سیڑھی پر دیوار کے ہمراہ انتصابی قوت صفر ہو گی)۔ فرش سے سیڑھی پر قوت $\vec{F}_p$ کا افقی جزو $\vec{F}_{px}$ ہے جو سکونی رگڑی قوت ہے، اور انتصابی جزو $\vec{F}_{py}$ ہے جو عمودی قوت ہے۔

توازن کی مساوات استعمال کرنے کی خاطر، ہم مساوات ۶.۹ ($\tau_{z,\text{صافی}} = 0$) سے آغاز کرتے ہیں، جو قوت مروڑ کی توازن کی مساوات ہے۔ قوت مروڑ کے حساب کے لئے محور گھماو منتخب کرتے وقت، یاد رہے سیڑھی کے دو سروں پر دو نامعلوم قوت ($\vec{F}_w$ اور $\vec{F}_p$) پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک، مثلاً $\vec{F}_p$، خارج کرنے کے لئے ہم محور گھماو، شکل کے مستوی کو عمود دار، نقطہ O پر رکھتے ہیں (شکل 7b.12)۔ ہم محددی نظام کا مبدا بھی O پر رکھتے ہیں۔ ہم O پر قوت مروڑ مساوات ۴.۳۹ تا مساوات ۴.۴۱ میں سے کوئی ایک استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں، تاہم یہاں مساوات ۴.۴۱ ($\tau = r_\perp F$) کا استعمال سب سے آسان ہے۔ مبدا کا مقام سوچ سمجھ کر منتخب کرنے سے قوت مروڑ کا حساب آسان بنایا جا سکتا ہے۔

دیوار سے افقی قوت $\vec{F}_w$ کا معیار اثر کا بازو $r_\perp$ معلوم کرنے کے لئے، ہم اس سمتیہ کے اندر گزر تا خط عمل کھینچتے ہیں (شکل 7c.12 میں اس کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ یوں O سے خط عمل تک عمود دار فاصلہ $r_\perp$ ہو گا۔ شکل 7c.12 میں $r_\perp$ محور y کے ہمراہ، h کے برابر ہے۔ ہم اسی طرح تجاذبی قوت $M\vec{g}$ اور $m\vec{g}$ کے خط عمل کھینچ کر دیکھتے ہیں کہ ان کا معیار اثر کا بازو محور x کے ہمراہ ہے۔ شکل 7a.12 میں دی گئی a کے لئے، معیار اثر کا بازو بالترتیب $a/2$ (شخص نصف سیڑھی چڑھ چکا ہے) اور $a/3$ (سیڑھی کا مرکز کمیت، سیڑھی کے نچلے سرے سے، ایک تہائی فاصلے پر ہے) ہیں۔ چونکہ $\vec{F}_{px}$ اور $\vec{F}_{py}$ مبدا پر عمل پیرا ہیں لہٰذا ان کے معیار اثر کا بازو صفر ہے۔

قوت مروڑ $r_\perp F$ روپ میں لکھ کر، توازن کی مساوات $\tau_{z,\text{صافی}} = 0$ ذیل لکھی جائے گی۔

$$-(h)(F_w) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{px}) + (0)(F_{py}) = 0 \tag{۶.۲۱}$$

(مثبت قوت مروڑ خلاف گھڑی گھماو کے مترادف اور منفی قوت مروڑ گھڑی وار گھماو کے مترادف ہے۔)

سیڑھی، دیوار، اور فرش قائمہ تکون بناتے ہیں، جس پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق ذیل دیگا۔

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7.58\,\text{m}$$

اس کے بعد، مساوات ۶.۲۱ ذیل دیگی۔

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2})(7.58\,\text{m})(72/2\,\text{kg} + 45/3\,\text{kg})}{9.3\,\text{m}} \\ &= 407\,\text{N} \approx 410\,\text{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

اب ہمیں شکل 7d.12 اور قوت کی توازن کی مساوات استعمال کرنی ہو گی۔ مساوات $F_{\text{صافی},x} = 0$ ذیل دیگی:

$$F_w - F_{px} = 0$$

لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$F_{px} = F_w = 410\,\text{N} \qquad (\text{جواب})$$

مساوات $F_{\text{صافی},y} = 0$ ذیل دیگی:

$$F_{py} - Mg - mg = 0$$

لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} F_{py} &= (M+m)g = (72\,\text{kg} + 45\,\text{kg})(9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}) \\ &= 1146.6\,\text{N} \approx 1100\,\text{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

نمونی سوال ۶.۴: **پیسا کے جھکا بُرج کا توازن**
فرض کریں پیسا کا بُرج، رداس $R = 9.8\,\text{m}$، کا خالی یکساں بیلن ہے، جو $h = 60\,\text{m}$ بلند ہے۔ اس کا مرکز کمیت، وسطی محور پر، $h/2$ بلندی پر پایا جاتا ہے۔ شکل 8a.12 میں بیلن سیدھا کھڑا ہے۔ شکل 8b.12 میں بیلن دائیں طرف (بُرج کے جنوب جانب) $\theta = 5.5°$ جھکا ہے، جو مرکز کمیت کو d فاصلہ دور کرتا ہے۔ فرض کریں، زمین صرف دو قوت بُرج پر پیدا کرتی ہے۔ عمودی قوت $\vec{F}_{NL}$ بائیں (شمالی) دیوار پر، اور عمودی قوت $\vec{F}_{NR}$ دائیں (جنوبی) دیوار پر۔ جھکاو کی بدولت قدر F_{NR} میں کتنی فی صد تبدیلی رونما ہوتی ہے؟

کلیدی تصور

چونکہ بُرج کھڑا ہے، یہ توازن میں ہو گا اور کسی بھی نقطہ کے لحاظ سے اس کر قوت مروڑ کا مجموعہ صفر ہو گا۔

حساب: ہم دائیں دیوار پر F_{NR} جاننا چاہتے ہیں، تاکہ بائیں دیوار پر F_{NL} لہٰذا بائیں طرف چول رکھ کر قوت مروڑ کا حساب کرتے ہیں۔ سیدھا کھڑے بُرج پر عمل پیرا قوت شکل 8c.12 میں دیے گئے ہیں۔ تجاذبی قوت $m\vec{g}$، جو مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے، کا خط عمل انتصابی ہے اور اس کا معیار اثر کا بازو (چول سے خط عمل کا عمود دار فاصلہ) R ہے۔ منتخب چول کے لحاظ سے اس قوت کے ساتھ وابستہ قوت مروڑ بُرج کو گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرتی ہے لہٰذا یہ منفی ہو گی۔ جنوبی دیوار پر عمود دار قوت $\vec{F}_{NR}$ کا خط عمل انتصابی ہے، اور اس کا معیار اثر کا بازو $2R$ ہے۔ چول پر اس قوت سے وابستہ قوت مروڑ خلاف گھڑی گھماو پیدا کرتی ہے لہٰذا یہ مثبت ہو گی۔ آئیں قوت مروڑ کے توازن کی مساوات $(\tau_{\text{صافی},z} = 0)$ لکھیں:

$$-(R)(mg) + (2R)(F_{NR}) = 0$$

جو ذیل دیتی ہے۔

$$F_{NR} = \frac{1}{2}mg$$

یہ نتیجہ بغیر حل کیے ہم جان سکتے تھے: مرکز کمیت وسطی محور پر پایا جاتا ہے، لہٰذا دایاں طرف بیلن کا نصف وزن اٹھاتا ہے۔

شکل 8b.12 میں مرکز کمیت دائیں طرف منتقل ہے، جہاں d ذیل ہے۔

$$d = \frac{1}{2}h\tan\theta$$

قوت مروڑ کے توازن کی مساوات میں اب تجاذبی قوت کا معیار اثر کا بازو $R + d$ ہو گا اور دائیں عمودی قوت کی قدر F'_{NR} نئی قیمت ہو گی (شکل 8d.12)۔ یوں ذیل لکھا جاتا ہے:

$$-(R+d)(mg) + (2R)(F'_{NR}) = 0$$

جو ذیل دیگا۔

$$F'_{NR} = \frac{R+d}{2R}mg$$

اس نئی قیمت کو پرانی قیمت سے تقسیم کر کے d کی قیمت ڈال کر ذیل ہو گا۔

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = \frac{R+d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{0.5h\tan\theta}{R}$$

اس میں $h = 60\,\mathrm{m}$ ، $R = 9.8\,\mathrm{m}$ ، اور $\theta = 5.5°$ ڈال کر ذیل نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = 1.29$$

یوں ہمارے سادہ نمونہ کے تحت، اگرچہ جھکاو بہت معمولی ہے، جنوبی دیوار پر قوت میں اضافہ تقریباً 30 فی صد بڑھا ہے، جس کی وجہ سے جنوبی دیوار پچکنے کا خطرہ لاحق ہے۔ بارش کے ساتھ بُرج کے نیچے سے مٹی نکل جانا جھکاو کی وجہ بنی ہے۔ بُرج کے نیچے پانی کے انعکاس کا نظام نسب کر کے جھکاو پر قابو پایا گیا ہے۔ □

۶.۳ لچک

مقاصد
اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. بلا تعین صورت جان پائیں گے۔

۲. جبر، بگاڑ، اور مقیاس ینگ کے تعلق کی مساوات تناو اور داب کے لئے استعمال کر پائیں گے۔

۳. مغلوبی مضبوطی اور اخیر مضبوطی میں فرق جان پائیں گے۔

۴. جبر، بگاڑ، اور مقیاس قینچ کی مساوات کا اطلاق قینچ کرنے (کاٹنے) کے لئے کر پائیں گے۔

۵. ماقوائی داب، بگاڑ، اور جسیم مقیاس کے تعلق کی مساوات کا اطلاق ماقوائی جبر کے لئے کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- جسم پر قوتوں کی عمل سے جسم کے لچکی رویہ (مسخ ہونے) کو تین مقیاس لچک بیان کرتے ہیں۔ بگاڑ (لمبائی میں کسری تبدیلی) اور اطلاقی جبر (اکائی رقبہ پر قوت) کا (درج ذیل) رشتہ خطی ہے، جہاں تناسبی مستقل مقیاس کہلاتا ہے۔

$$\text{جبر} = \text{مقیاس} \times \text{بگاڑ}$$

- تان یا داب کی صورت میں جبر و بگاڑ کا رشتہ ذیل لکھا جاتا ہے:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

جہاں $\Delta L/L$ جسم میں تان یا دب کا بگاڑ، F بگاڑ پیدا کرنے والی لاگو قوت کی قدر، A عمودی تراش کا رقبہ ہے جس پر F (رقبے کو عموددار) لاگو کی گئی ہے، اور E جسم کا مقیاس ینگ ہے۔ جبر F/A ہوگا۔

- قینچ جبر کی صورت میں جسم کا جبر و بگاڑ رشتہ ذیل لکھا جاتا ہے:

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$

جہاں $\Delta x/L$ جس کا قینچ بگاڑ، Δx لاگو قوت $\vec{F}$ کے رخ میں جسم کے ایک سر کا ہٹاو، اور G جسم کا مقیاس قینچ ہے۔ جبر F/A ہوگا۔

- ماقوائی داب کی صورت میں جسم پر اطراف کا سیال جبر لاگو کرتا ہے؛ جبر و بگاڑ کا رشتہ ذیل لکھا جائے گا:

$$p = B\frac{\Delta V}{V}$$

جہاں p جسم پر سیال کا دباو (ماقوائی جبر) ہے، $\Delta V/V$ دباو کی پیدا (بگاڑ) جسم کے حجم میں مطلق کسری تبدیلی ہے، اور B جسم کا جسیم مقیاس ہے۔

بلا تعیین جسم

اس باب کے مسائل میں ہمارے پاس صرف تین غیر تابع مساوات ہوں گے؛ عموماً توازن قوت کی دو اور محور گھما و پر توازن قوت مروڑ کی ایک مساوات ہو گی۔ یوں، اگر کسی مسئلے میں تین سے زیادہ نامعلوم متغیر ہوں، ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہوں گے۔

غیر میثاکل بوجھ سے لدے ہوئی گاڑی پر غور کریں۔ اس کے چاروں پہیوں پر ایک دوسرے سے مختلف قوت کیا ہیں؟ چونکہ ہمارے پاس صرف تین مساوات ہیں لہٰذا ان قوتوں کو معلوم کرنا ممکن نہیں۔ اسی طرح، تین پائے کے میز کا توازن کا مسئلہ ہم حل کر سکتے ہیں، تاہم چار پائے کے میز کے لئے حل ممکن نہیں ہو گا۔ اس طرح کے مسائل جن میں مساوات سے نامعلوم مقادیر کی تعداد زیادہ ہو، **بلا تعیین**[۳] کہلاتے ہیں۔

اس کے باوجود، حقیقی دنیا میں بلا تعیین مسائل کے حل موجود ہیں۔ اگر آپ گاڑی کے پہیوں کو چار مختلف ترازو پر رکھیں، یقیناً ترازو غیر مبہم نتائج دیں گی؛ جن کا مجموعہ عین گاڑی کے وزن کے برابر ہو گا۔ ایسی کونسی بات ہے جو ہم نہیں جانتے، اور جس کے نہ جانتے ہوئے ہم مسئلہ حل کرنے سے قاصر ہیں؟

حقیقت یہ ہے، کہے بغیر، ہم جن اجسام پر سکونی توازن کی مساوات کا اطلاق کرتے ہیں، ہم انہیں کامل استوار تصور کرتے ہیں۔ یعنی ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت ان اجسام کو کسی طرح بھی مسخ نہیں کرتی۔ در حقیقت کامل استوار جسم کہیں نہیں پایا جاتا۔ مثلاً، گاڑی کے پہیے آسانی سے بوجھ تلے مسخ ہو کر سکونی توازن کے مقام پر بیٹھتے ہیں۔

آپ کا واسطہ چار پائے کے لڑکھڑاتے میز سے ضرور پڑا ہو گا۔ ایک پائے کے نیچے تہہ دار کاغذ رکھ کر اسے مستحکم کیا جا سکتا ہے۔ میز پر ہاتھی بٹھانے سے اگر میز ٹوٹ نہ جائے، آپ یقین کر سکتے ہیں اس کے پائے گاڑی کے پہیوں کی طرح مسخ ہوں گے۔ چاروں پائے زمین کو مس کریں گے، ان پر زمین سے عمودوار قوتیں غیر مبہم (اور ایک دوسرے سے مختلف) قیمت اختیار کریں گی، اور میز لڑکھڑائے گا نہیں (شکل 9.12)۔ ایسی یا اس سے ملتی جلتی صورتوں میں، جہاں مسخ ہونا شامل ہو، ہم قوت کی انفرادی قیمت کیسے جان سکتے ہیں؟

بلا تعیین مسئلہ حل کرنے کے لئے، توازن کی مساوات کے ساتھ ہمیں لچک کی معلومات بھی بروئے کار لانی ہو گی۔ طبیعیات کی وہ شاخ جو قوت کے زیر اثر اجسام کے مسخ جانے کی بات کرتی ہے، لچک کہلاتا ہے۔

آزمائش ۳

چھت سے یکساں سلاخ، جس کا وزن $10\,\mathrm{N}$ ہے، دو دھاگوں سے لٹکایا گیا ہے، جو سلاخ پر اوپر وار $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ قوت پیدا کرتے ہیں۔ شکل ؟؟ میں سلاخ چار مختلف نقطوں سے باندھ کر لٹکایا گیا ہے۔ ان میں کونسی صورت بلا تعیین ہے، اگر ہے بھی۔ (بلا تعیین صورت میں ہم $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ معلوم نہیں کر پائیں گے۔)

---

[۳] indeterminate

لچک

بہت سارے جوہر، تین بُعدی جالی میں متوازن مقامات پر بیٹھ کر، دھاتی جسم، مثلاً، کیل بناتے ہیں۔ تین بُعدی جالی تکراری نظم و ضبط رکھتی ہے اور اس میں ہر جوہر قریبی جوہر سے مقررہ فاصلے پر ہو گا۔ بین جوہر قوتیں، جنہیں شکل 10.12 میں اسپرنگ سے ظاہر کیا گیا ہے، جوہر کو اپنی جگہ پر رکھتی ہیں۔ یہ جالی حیرت کن استواریت رکھتی ہے؛ دوسرے لفظوں میں بین جوہر قوت نہایت طاقتور ہیں، اور شکل 10.12 میں اسپرنگ بہت زیادہ اکڑ ہوں گے۔ یہی وجہ ہے، ہم عام اجسام، مثلاً، دھاتی سیڑھی، میز، اور چمچ کو کامل استوار سمجھتے ہیں۔ ہاں ربڑ اور پلاسٹک کے اجسام ہمیں استوار نظر نہیں آتے۔ ان اجسام کے جوہر شکل 10.12 کی طرح استوار جالی نہیں بناتے؛ بلکہ یہ سالماتی لچکیلی زنجیر بناتے ہیں جو قریبی زنجیر کے ساتھ ڈھیلی جفتگی رکھتے ہیں۔

حقیقی "استوار" اجسام کسی حد تک لچکی ہوں گے، اور یوں انہیں دبا کر، تان کر، اور مروڑ کر ہم ان کی شکل و صورت معمولی تبدیل کر سکتے ہیں۔ درپیش مقادیر جاننے کے لئے، چھت سے انتصابی لٹکی فولادی سلاخ پر غور کرتے ہیں، جس کی لمبائی 1 m اور قطر 1 cm ہے۔ سلاخ کے سر سے چھوٹی گاڑی لٹکانے سے سلاخ کی لمبائی میں 0.5 mm یعنی 0.05 % کا اضافہ ہو گا۔ مزید، گاڑی ہٹانے پر سلاخ واپس اپنی اصل لمبائی اختیار کرتی ہے۔

سلاخ سے دو گاڑیاں لٹکانے پر، سلاخ ہمیشہ کے لئے کھینچ جاتی ہے، اور وزن ہٹانے سے اصل لمبائی اختیار نہیں کرتی۔ تین گاڑیاں لٹکانے پر، سلاخ ٹوٹ جائے گی۔ عین ٹوٹنے سے قبل، لمبائی میں اضافہ 0.2 % سے کم ہو گا۔ اگرچہ جسامت کے اضلاع میں تبدیلی زیادہ نہیں، انجینئری میں اس کے دور رس نتائج ہوں گے۔ (آیا جہاز کا پَر جہاز کے ساتھ جڑا رہے گا، یقیناً، یہ اہمیت کے حامل بات ہے۔)

تین طریقے۔ قوت لاگو کرنے پر، ٹھوس جسم کا طول و عرض تین طرح تبدیل ہو سکتا ہے۔ شکل 11a.12 میں بیلن کھینچ کر لمبا کیا گیا ہے۔ شکل 11b.12 میں بیلن کی لمبی محور کو عمود دار قوت لاگو کر کے بیلن مسخ کیا گیا ہے۔ شکل 11c.12 میں سیال میں ٹھوس جسم رکھ کر بلند داب کے زیر اثر تمام اطراف سے جسم دبایا گیا ہے۔ مسخ ہونے کی ان تین صورتوں میں یہ بات مشترک ہے کہ **جبر**[۵]، یعنی اکائی رقبہ پر لاگو قوت، جسم میں **بگاڑ**[۶] (کسری تبدیلی) پیدا کرتا ہے۔ شکل 11a.12 میں تناوی جبر، شکل 11b.12 میں قینچ جبر، اور شکل 11c.12 میں ماقوائی جبر دکھایا گیا ہے۔

جبر اور بگاڑ تینوں صورتوں میں مختلف روپ اختیار کرتے ہیں، تاہم انجینئری کے مقاصد کے لئے جبر اور بگاڑ راست متناسب ہیں۔ راست متناسب کا مستقل **مقیاس لچک**[۷] کہلاتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\text{جبر} = \text{مقیاس} \times \text{بگاڑ} \qquad (۶.۲۲)$$

تناوی خاصیت کے معیاری پرکھ میں پرکھی بیلن (جیسا شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے) پر تناوی جبر صفر قیمت سے آہستہ آہستہ بڑھایا جاتا ہے حتیٰ کہ بیلن ٹوٹ جائے، اور ساتھ ساتھ بگاڑ ناپ کر ترسیم کی جاتی ہے۔ یوں شکل 13.12 کے طرز کی جبر بالمقابل بگاڑ ترسیم حاصل ہو گی۔ لاگو جبر کی وسیع حد تک جبر اور بگاڑ کا تعلق خطی ہے، اور جبر ہٹانے پر پرکھی جسم واپس اصل طول و عرض اختیار کرتا ہے؛ اس خطی خطہ میں مساوات ۶.۲۲

---

[۵] stress
[۶] strain
[۷] modulusofelasticity

کا اطلاق ہو گا۔ پر کھی جسم کی **مغلوبی مضبوطی**[۸] S_y سے جبر بڑھانے پر جسم ہمیشہ کے لئے مسخ ہو جاتا ہے۔ جبر مسلسل بڑھانے پر جب **اخیر مضبوطی**[۹] S_u کو پہنچتی ہے، جسم ٹوٹ جاتا ہے۔

تان اور داب

سادہ تان یا داب کے لئے، جسم پر جبر کی تعریف F/A ہے، جہاں جسم کے رقبہ A پر عمودی دار قوت کی قدر F ہے۔ بگاڑ سے مراد بے بُعد مقدار $\Delta L/L$ ہے، جو جسم کی لمبائی میں کسری (یا بعض اوقات فی صد) تبدیلی ہو گی۔ اگر جسم ایک لمبی سلاخ ہو اور جبر مغلوبی مضبوطی سے تجاوز نہ کرے، نا صرف پوری سلاخ کا بگاڑ بلکہ اس کے ہر ٹکڑے کا بگاڑ دیے گئے جبر کے لئے ایک جتنا ہو گا۔ چونکہ بگاڑ بے بُعد ہے، مساوات ۶.۲۲ میں مقیاس کے بُعد وہی ہو گا جو جبر کا ہے؛ یعنی قوت فی اکائی رقبہ۔

تناوی اور دباو جبر کے مقیاس کو **مقیاس ینگ**[۱۰] کہتے ہیں، جس کو انجینئری میں E سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات ۶.۲۲ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \tag{۶.۲۳}$$

[۸] yieldstrength
[۹] ultimatestrength
[۱۰] Young'smodulus

جوابات