

# طبیعیات کے اصول

حنالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@hotmail.com

۶ جنوری ۲۰۲۲



# عنوان

v

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	پیش	۱
۷	وقت	۱.۱
۹	کیت	۲.۱
۱۰	کثافت	۱.۲.۱
۱۳	مختفی توانائی اور توانائی کی بقا	۲
۱۷	طاقت	۱.۰.۲
۲۵	مرکز کیت اور خطی معیار حرکت	۳
۲۵	ایک بُعد میں لچکی تصادم	۱.۳
۲۷	دو البعد میں تصادم	۲.۳
۲۹	متغیر کیت کے نظام: ہوائی بان	۳.۳
۳۹	جوابات	



## باب ۳

# سرگزیمت اور خطی معیار حرکت

### ۳.۱ ایک بُعد میں چکی تصادم

حرکت توانائی کی بقا درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(۳.۱) \quad \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

ان ہمزا د مساوات کو  $v_{1f}$  اور  $v_{2f}$  کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 71.9 کو

$$(۳.۲) \quad m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})$$

اور مساوات ۳.۱ درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(۳.۳) \quad m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f})$$

مساوات ۳.۳ کو مساوات ۳.۲ سے تقسیم کر کے کچھ الجبرا کے بعد درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$(۳.۴) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

اور

$$(۳.۵) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

یاد رہے، زیر نوشت 1 اور 2 کسی خاص ترتیب سے مختص نہیں کیے گئے۔ مساوات 19.9 میں اور مساوات ۳.۴ اور مساوات ۳.۵ میں ان زیر نوشت کو آپس میں بدل کر لکھنے مساوات کی وہی جوڑی ملتی ہے۔ اس پر بھی توجہ

### باب ۳. مرکز کیت اور خطی معیار حرکت

دیں کہ  $v_{2i} = 0$  لیئے، شکل 18.9 میں جسم 2 ساکن ہدف ہوگا، اور مساوات ۴.۳ اور مساوات ۵.۳ ہمیں بالترتیب مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 دیتی ہیں۔

آزمائش ۱

شکل 18.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت  $6 \text{ kg m s}^{-1}$  اور اختتامی معیار حرکت (i)  $2 \text{ kg m s}^{-1}$  اور (ب)  $-2 \text{ kg m s}^{-1}$  ہونے کی صورت میں ہدف کا اختتامی خطی معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر گولے کی ابتدائی اور اختتامی حرکی توانائی بالترتیب 5 J اور 2 J ہو، ہدف کی اختتامی حرکی توانائی کیا ہوگی؟

نمونہ سوال ۳: **چکے تصادم در چکے تصادم** شکل 20a.9 میں  $v_{1i} = 10 \text{ m s}^{-1}$  سے چلتا ہوا سل 1 دو ساکن سلوں کی طرف بڑھتا ہے۔ تینوں سل ایک لکیر پر ہیں۔ یہ سل 2 سے ٹکراتا ہے جو آگے سل 3 سے جا کر ٹکراتا ہے، جس کی کیت  $m_3 = 6.0 \text{ kg}$  ہے۔ دوسرے تصادم کے بعد سل 2 دوبارہ ساکن ہے، اور سل 3 کی رفتار  $v_{3f} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$  ہے (شکل 20b.9)۔ دونوں تصادم لچکی ہیں۔ سل 1 اور سل 2 کی کمیتیں کیا ہیں؟ سل 1 کی اختتامی رفتار  $v_{1f}$  کیا ہے؟

**کلیدی تصورات**

چونکہ ہم تصادم لچکدار تصور کرتے ہیں لہذا امیکانی توانائی کی بقا ہوگی (یوں نکر کی آواز، گرمی، اور ارتعاش کی بدولت توانائی کا ضیاع نظر انداز کیا جاتا ہے)۔ کوئی بیرونی افقی قوت سلوں پر عمل نہیں کرتی لہذا محور  $x$  پر خطی معیار حرکت کی بقا ہوگی۔ ان دو جوہات کی بنیاد پر ہم دونوں تصادم پر مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 کا اطلاق کر سکتے ہیں۔

**حاجے** پہلے تصادم سے آغاز کرتے ہوئے ہمیں اتنے زیادہ نامعلوم متغیرات سے واسطہ ہوگا کہ آگے بڑھنا مشکل ہوگا: ہم سلوں کی کیت اور اختتامی سمتی رفتار نہیں جانتے۔ انہیں پہلے تصادم سے آغاز کریں، جس میں سل 3 کے ساتھ ٹکرانے کے بعد سل 2 رکتی ہے۔ مساوات 67.9 کا اطلاق اس تصادم پر کرتے ہیں جہاں ترقیم تبدیل کرتے ہوئے  $v_{2i}$  تصادم سے قبل سل 2 کی رفتار اور  $v_{2f}$  تصادم کے بعد اس کی رفتار دیتی ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

اس میں  $v_{2f} = 0$  (سل 2 رک جاتا ہے) ڈالنے کے بعد  $m_3 = 6.0 \text{ kg}$  ڈال کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$m_2 = m_3 = 6.0 \text{ kg} \quad (\text{جواب})$$

اسی طرح ترقیم تبدیل کر کے دوسرے تصادم کے لئے مساوات 68.9 لکھتے ہیں

$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

جہاں  $v_{3f}$  تیسرے سل کی اختتامی سمتی رفتار ہے۔ اس میں  $m_3 = m_2$  ڈالنے کے بعد  $v_{3f} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$  ڈال کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$v_{2i} = v_{3f} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$$

آئیں اب پہلے تصادم پر غور کریں؛ ہمیں سل 2 کے لئے مستعمل ترقیم پر توجہ دینی ہوگی: تصادم کے بعد سل 2 کی سمتی رفتار  $v_{2f}$  وہی ہے جو تصادم سے قبل اس کی سمتی رفتار  $v_{2i} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$  تھی۔ پہلے تصادم پر مساوات 68 کا اطلاق کر کے دی گئی  $v_{1i} = 10 \text{ m s}^{-1}$  ڈال کر ذیل ہوگا

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$5.0 \text{ m s}^{-1} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (10 \text{ m s}^{-1})$$

جو ذیل دیگا۔

$$m_1 = \frac{1}{3} m_2 = \frac{1}{3} (6.0 \text{ kg}) = 2.0 \text{ kg} \quad (\text{جواب})$$

یہ نتیجہ اور دی گئی  $v_{1i}$  استعمال کرتے ہوئے پہلے تصادم پر مساوات 67.9 کا اطلاق کر کے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} m_2 - m_2}{\frac{1}{3} m_2 + m_2} (10 \text{ m s}^{-1}) = -5.0 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{جواب})$$

□

## ۳.۲ دو ابعاد میں تصادم

### مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے مقابیل ہوں گے۔

جد انظام کے لئے جس میں دو بُعدی تصادم واقع ہو، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بُعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں۔

جد انظام کے لئے جس میں دو بُعدی لچکی تصادم واقع ہو، (ا)، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں اور (ب) کل حرکی توانائی کی بقا کا اطلاق کر کے تصادم سے قبل اور تصادم کے بعد حرکی توانائیوں کا رشتہ جان سکیں۔

## کلیدی تصور

اگر دو جسم ٹکرائیں اور ان کی حرکت ایک محور پر نہ ہو (تصادم آمنے سامنے سے نہیں ہے)، تصادم دو بُعدی ہو گا۔ اگر دو جسمی نظام ہند اور جہد ہو، تصادم پر معیار حرکت کی بقا کے قوانون کا اطلاق ہو گا لہذا درج ہو گا۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

یہ قوانون اجزاء کی صورت میں دو مساوات (ہر بُعد کے لئے ایک مساوات) دیگا جو تصادم کو بیان کرتی ہیں۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تصادم کے دوران حرکت کی توانائی کی بقا (ذیل) تیسری مساوات دیگی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

## دو بُعد میں تصادم

جب دو اجسام کا تصادم ہو، اجسام کس رخ حرکت کرتے ہیں، اس کا تعین ان کے بیچ ضرب (چھٹکا) کرتی ہے۔ بالخصوص، جب تصادم آمنے سامنے سے نہ ہو، اجسام اپنے اپنے ابتدائی محور پر نہیں رہتے۔ ایسے دو بُعدی تصادم میں جو ہند، اور جہد نظام میں واقع ہو، کل خطی معیار حرکت کی بقا ہوگی۔

$$(۳.۶) \quad \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تب کل حرکت کی توانائی کی بقا بھی ہوگی۔

$$(۳.۷) \quad K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

دو بُعدی تصادم کا تجزیہ کرنے کے لئے مساوات ۳.۶ کو  $xy$  محددی نظام کے اجزاء کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، شکل 21.9 میں ساکن ہدف کو گولا بغلی (آمنے سامنے سے نہیں) ٹکراتا ہے۔ ان کے بیچ ضرب، اجسام کو محور  $x$ ، جس پر گولا ابتدائی طور حرکت میں تھا، کے لحاظ سے  $\theta_1$  اور  $\theta_2$  زاویوں پر بھیجتی ہے۔ یہاں ہم مساوات ۳.۶ کو محور  $x$  کے ہمراہ ذیل

$$(۳.۸) \quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

اور محور  $y$  کے ہمراہ ذیل لکھیں گے۔

$$(۳.۹) \quad 0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2$$

ہم مساوات ۳.۷ کو (اس خصوصی صورت کے لئے) رفتار کے روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(۳.۱۰) \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{حرکت کی توانائی})$$



مساوات ۳.۸ تا مساوات ۳.۱۰ میں سات متغیر ہیں: دو کمیت،  $m_1$  اور  $m_2$ ؛ تین رفتار،  $v_{1f}$ ،  $v_{1i}$ ، اور  $v_{2f}$ ؛ اور دو زاویے،  $\theta_1$  اور  $\theta_2$ ۔ اگر ہم ان میں سے کوئی بھی چار متغیرات جانتے ہوں، باقی تین متغیرات ان تین مساوات کو حل کر کے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

نمونہ سوال ۳.۲: فرض کریں شکل 21.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت  $6 \text{ kg m s}^{-1}$ ، جبکہ اختتامی معیار حرکت کا  $x$  جزو  $4 \text{ kg m s}^{-1}$  اور اختتامی معیار حرکت کا  $y$  جزو  $-3 \text{ kg m s}^{-1}$  ہے۔ ہدف کے (۱) اختتامی معیار حرکت کا  $x$  جزو اور (ب) اختتامی معیار حرکت کا  $y$  جزو کیا ہوں گے؟ □

### ۳.۳ متغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان

#### مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مقابل ہوں گے۔

**ہوائی بان:** ایک پہلی مساوات استعمال کر کے ہوائی بان کی کمیت میں کمی کی شرح، ہوائی بان کے لحاظ سے احسراجی مادے کی اضافی رفتار، ہوائی بان کی کمیت، اور ہوائی بان کی اسراع کارشتہ جان پائیں گے۔

ہوائی بان کی دوسری مساوات استعمال کر کے احسراجی مادے کی اضافی رفتار کے لحاظ سے ہوائی بان کی رفتار، اور ہوائی بان کی ابتدائی اور اختتامی کمیت کارشتہ جان پائیں گے۔

ایک ایسا حرکت پذیر نظام جس کی کمیت دی گئی شرح سے تبدیل ہوتی ہو کے لئے اس شرح اور معیار حرکت میں تبدیلی کارشتہ جان پائیں گے۔

#### کلیدی تصورات

بیسرونی قوتوں کی غنیر موجودگی میں ہوائی بان درج ذیل لحقاتی شرح سے اسراع پذیر ہوگا،

$$Rv_{\text{اضافی}} = Ma \quad (\text{ہوائی بان کی پہلی مساوات})$$

جہاں  $M$  ہوائی بان کی لحقاتی کمیت (بشمول غنیر استعمال شدہ ایندھن)،  $R$  ایندھن کی شرح، اور اضافی  $v$  ہوائی بان کے لحاظ سے احسراجی اضافی رفتار ہے۔ جزو اضافی  $Rv$  ہوائی بان انجن کا دھکا ہے۔

مستقل  $R$  اور اضافی  $v$  کی صورت میں اگر ہوائی بان کی رفتار  $v_i$  سے تبدیل ہو کر  $v_f$  ہو جائے، اور کمیت  $M_i$  سے تبدیل ہو کر  $M_f$  ہو جائے تب درج ذیل ہوگا۔

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{ہوائی بان کی دوسری مساوات})$$

## متغیر کیت کے نظام: ہوائی بان

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ نظام کی کل کیت اٹل ہے۔ بعض اوقات، مثلاً ہوائی بان میں، ایسا نہیں ہو گا۔ اڑان سے قبل چوتراہ روائیج<sup>۲</sup> پر کھڑے ہوائی بان کی زیادہ تر کیت دراصل ایندھن ہوگی، جو آخر کار جیل کر ہوائی بان کے انجن کی ٹوٹنے<sup>۳</sup> سے دھوئیں کی شکل میں خارج ہوگا۔ اسراع پذیر ہوائی بان کی متغیر کیت سے نیپٹنے کی خاطر نیوٹن کے دوسرے قاعدے کا اطلاق، صرف ہوائی بان کی بجائے، ہوائی بان اور خارجی مواد دونوں کو اکٹھا لیتے ہوئے کیا جاتا ہے۔ ہوائی بان کی اسراع کے دوران اس نظام کی کیت تبدیل نہیں ہوگی۔

## اسراع کی تلاش

فرض کریں ہم جمودی حوالہ چھو کٹ کے لحاظ سے ساکن بیٹھے گہری فضا میں، جہاں کوئی تجاذبی یا ہوائی کی رگزی قوت موجود نہیں، ہوائی بان کو اسراع کرتا دیکھ رہے ہیں۔ اس یک بُعدی حرکت کے لئے ہم، اختیاری لمحہ  $t$  پر، ہوائی بان کی کیت  $M$  اور سمتی رفتار  $v$  فرض کرتے ہیں (شکل 22a.9)۔

شکل 22b.9 وقت دورانیہ  $dt$  کے بعد صورت حال پیش کرتی ہے۔ ہوائی بان کی سمتی رفتار  $v + dv$  اور کیت  $M + dM$  ہیں، جہاں کیت میں تبدیلی  $dM$  منفی مقدار ہے۔ وقفہ  $dt$  کے دوران ہوائی بان سے اخراجی مواد کی کیت  $-dM$  اور جمودی حوالہ چھو کٹ کے لحاظ سے مواد کی سمتی رفتار  $U$  ہے۔

## معیار حرکت کی بقا ہوگی

ہمارا نظام ہوائی بان اور وقفہ  $dt$  میں اخراجی مواد پر مشتمل ہے۔ نظام بند اور جدا ہے لہذا وقفہ  $dt$  کے دوران نظام کی خطی معیار حرکت کی بقا لازمی ہے۔ یوں ذیل ہوگا

$$(۳.۱۱) \quad P_i = P_f$$

جہاں زیر نوشتہ  $i$  اور  $f$  بالترتیب وقفہ  $dt$  کے آغاز میں اور اس کے اختتام پر قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ مساوات ۳.۱۱ درج ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$(۳.۱۲) \quad Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv)$$

جہاں دائیں ہاتھ پہلا جزو وقفہ  $dt$  کے دوران خارج کردہ مواد کا خطی معیار حرکت اور دوسرا جزو وقفہ  $dt$  کے اختتام پر ہوائی بان کا خطی معیار حرکت ہے۔

## اضافی رفتار کا استعمال

مساوات ۳.۱۲ کی سادہ صورت ہوائی بان اور احسراجی مواد کے بیچ اضافی رفتار  $v$  اضافی استعمال کر کے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اضافی رفتار اور چھوٹے کے لحاظ سے سمتی رفتاروں کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\left( \text{چھوٹے کے لحاظ سے} \right) = \left( \text{احسراجی مواد کے لحاظ سے} \right) + \left( \text{چھوٹے کے لحاظ سے} \right)$$

اس کو علامتی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(v + dv) = v_{\text{اضافی}} + U$$

(۳.۱۳)

$$U = v + dv - v_{\text{اضافی}}$$

یعنی

اس نتیجہ کو مساوات ۳.۱۲ میں  $U$  کی جگہ ڈال کر کچھ الجبرا کے بعد ذیل حاصل ہوگا۔

(۳.۱۴)

$$-dM v_{\text{اضافی}} = M dv$$

دونوں اطراف  $dt$  سے تقسیم کرتے ہیں۔

(۳.۱۵)

$$-\frac{dM}{dt} v_{\text{اضافی}} = M \frac{dv}{dt}$$

ہم  $dM/dt$  (جو ہوائی بان کی کثرت میں کمی کی شرح ہے) کو  $-R$  لکھتے ہیں، جہاں  $R$  ایندھن جلنے کی (مثبت) شرح ہے، اور  $dv/dt$  ہوائی بان کی اسراع ہے۔ ان تبدیلیوں کے ساتھ مساوات ۳.۱۵ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

(۳.۱۶)

$$Rv_{\text{اضافی}} = Ma \quad (\text{ہوائی بان کی پہلی مساوات})$$

ہر لمحے پر مقدار پر کی قیمتیں مساوات ۳.۱۶ مطمئن کرتی ہیں۔

مساوات ۳.۱۶ کا بائیں ہاتھ قوت کا بُعد ( $\text{kg s}^{-1} \cdot \text{m s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m s}^{-2} = \text{N}$ ) رکھتا ہے اور صرف ہوائی بان کی بناوٹ پر منحصر ہے؛ یعنی، شرح  $R$  پر، جس سے ایندھن (کثرت) صرف کیا جاتا ہے، اور رفتار  $v$  اضافی پر، جس سے یہ کثرت ہوائی بان سے حنا رنج کی جاتی ہے۔ ہم اس جزو اضافی  $Rv$  کو ہوائی بان کی قوت  $T$  دھکیلے کہتے ہیں اور  $T = Ma$  کو ۳.۱۶ سے ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات ۳.۱۶ کو  $T = Ma$  لکھ کر نیوٹن کا دو سرعاتوں حاصل ہوتا ہے، جہاں اس لمحے پر جب ہوائی بان کی کثرت  $M$  ہے اس کی اسراع  $a$  ہے۔

## سمتی رفتار کی تلاش

ہم جاننا چاہتے ہیں کہ جیسے جیسے ہوائی بان ایندھن صرف کرتا ہے اس کی سمتی رفتار کیسے تبدیل ہوگی۔ مساوات ۳.۱۴ ذیل کہتی ہے۔

$$dv = -v_{\text{اضافی}} \frac{dM}{M}$$

اس کے مکمل

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{اضافی}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

میں  $M_i$  ہوائی بان کی ابتدائی کیت اور  $M_f$  اختتامی کیت ہے۔ مکمل لینے سے ذیل حاصل ہوگا

$$(3.14) \quad v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{ہوائی بان کی دوسری مساوات})$$

جو ہوائی بان کی کیت  $M_i$  سے گھٹ کر  $M_f$  ہونے کی صورت میں ہوائی بان کی رفتار میں اضافہ دیتی ہے۔ (مساوات ۳.۱۴ میں علامت  $\ln$  قدرتی لوگارتم ظاہر کرتی ہے۔) ہم یہاں **کثیر المراحل**<sup>۱</sup> ہوائی بان کی افادیت جان سکتے ہیں جو ایندھن ختم ہونے پر حالی ٹینک سے چھکارا حاصل کر کے  $M_f$  گھٹاتا ہے۔ مثالی ہوائی بان مطلوبہ مقدار پر صرف ضروری سا دوسامان کے ساتھ پہنچے گا۔

نمونہ سوال ۳.۳: **ہوائی بان کا انجن، قوت، دھکیل، اسراع** اس باب کی تمام گزشتہ مثالوں میں نظام کی کیت اٹل تھی۔ یہاں ہم ایسے نظام (ہوائی بان) کی بات کرتے ہیں جس کی کیت بتدریج کم ہوتی ہے۔ ایک ہوائی بان جس کی ابتدائی کیت  $M_i = 850 \text{ kg}$  ہے  $R = 2.3 \text{ kg s}^{-1}$  شرح سے ایندھن صرف کرتا ہے۔ ہوائی بان کے لحاظ سے احسراجی مواد کی رفتار  $v_{\text{اضافی}} = 2800 \text{ m s}^{-1}$  ہے۔ (i) ہوائی بان کا انجن کتنی قوت دھکیل پیدا کرتا ہے؟

کلیدی تصور

مساوات ۳.۱۶ کے تحت ایندھن صرف کرنے کی شرح  $R$  کو احسراجی مواد کی اضافی رفتار  $v_{\text{اضافی}}$  سے ضرب دینے سے قوت دھکیل  $T$  حاصل ہوگی۔

حساب: یوں درج ذیل ہوگا۔

$$T = Rv_{\text{اضافی}} = (2.3 \text{ kg s}^{-1})(2800 \text{ m s}^{-1})$$

$$= 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N} \quad (\text{جواب})$$

(ب) ہوائی بان کی ابتدائی اسراع کیا ہوگی؟

کلیدی تصور

ہم ہوائی بان کی قوت دھکیل  $T$  اور اس کی اسراع کی قدر  $a$  کا رشتہ  $T = Ma$  جانتے ہیں، جہاں  $M$  ہوائی بان کی کیت ہے۔ لیکن، جیسے جیسے ایندھن صرف ہوتا ہے  $M$  گھٹتی اور  $a$  بڑھتا ہے۔ ہمیں ابتدائی اسراع درکار ہے لہذا ہم ہوائی بان کی ابتدائی کیت  $M_i$  لیں گے۔

حساب: ان معلومات سے ذیل حاصل ہوگا۔

$$a = \frac{T}{M} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7.6 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

سطح زمین سے سیدھا اوپر اڑان کے لئے ضروری ہے کہ ابتدائی اسراع  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  سے زیادہ ہو۔ یعنی، ابتدائی اسراع کو سطح زمین پر حب ذبی اسراع سے زیادہ ہونا ہوگا۔ دوسرے لفظوں میں، ہوائی بان پر ابتدائی حب ذبی قوت، جس کی قدر  $M_i g$  ہے

$$(850 \text{ kg})(9.8 \text{ m s}^{-2}) = 8330 \text{ N}$$

سے قوت دھکیل  $T$  کا زیادہ ہونا لازمی ہے، ورنہ ہوائی بان زمین سے اٹھنے کے مقابل نہیں ہوگا۔ چونکہ اس ہوائی بان کی قوت دھکیل (جو یہاں  $T = 6440 \text{ N}$  ہے) درکار قدر سے کم ہے لہذا یہ ہوائی بان اڑ نہیں پائے گا؛ یہاں زیادہ طاقتور ہوائی بان کی ضرورت ہے۔

□

## نظر ثانی اور خلاصہ

### مرکز کیفیت

ایک نظام جو  $n$  ذرات پر مشتمل ہو کے مرکز کیفیت کی تعریف وہ نقطہ ہے جس کے محدود درج ذیل ہوں۔

$$x_{\text{مرکز کیفیت}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{\text{مرکز کیفیت}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_{\text{مرکز کیفیت}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (9.5)$$

اس کو مختصر اُذیل لکھا جاسکتا ہے، جہاں  $M$  نظام کی کل کیت  $\sum_{i=1}^n m_i$  ہے۔

$$\vec{r}_{\text{مرکز کیفیت}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (9.8)$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے ذرات کا نظام

ایک نظام، جو ذرات پر مشتمل ہو، کے مرکز کیفیت کی حرکت نیوٹن کے دوسرے قانون برائے ذرات پر مشتمل نظام کے تحت ہوگی، جو ذیل کہتا ہے۔

$$\vec{F}_{\text{نی}} = M \vec{a}_{\text{مرکز کیت}} \quad (9.14)$$

باب ۳. مرکز کیت اور خطی معیار حرکت

یہاں نظام پر لاگو تمام بیرونی قوتیں مل کر صافی قوت  $\vec{F}$  بنتی ہیں۔ نظام کی کل کیت  $M$ ، اور نظام کے مرکز کیت کی اسراع مرکز کیت  $\vec{a}$  ہے۔

خطی معیار حرکت اور نیوٹن کا دوسرا قانون

تہا ذرے کے لئے، مقدار  $\vec{p}$  متعارف کر کے، جو اس ذرے کا خطی معیار حرکت کہلاتا ہے اور جس کی تعریف ذیل ہے،

$$(۹.۲۲) \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

ہم نیوٹن کا دوسرا قانون اس معیار حرکت کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(۹.۲۳) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ذرات پر مشتمل نظام کے لئے مذکورہ بالا دو تعلق ذیل لکھا جائیں گے۔

$$(۹.۲۴، ۹.۲۵) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{اور} \quad \vec{P} = M\vec{v} \quad \text{مرکز کیت}$$

تصادم اور ضرب

تصادم میں ملوث ذرہ نما جسم پر معیار حرکت کے روپ میں نیوٹن کے دوسرے قانون کا اطلاق ضربے و خطی معیار حرکت کا مسئلہ دیگا:

$$(۹.۳۲، ۹.۳۱) \quad \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

جہاں جسم کے خطی معیار حرکت میں تبدیلی  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$  ہے، اور ضربے  $\vec{J}$  وہ قوت  $\vec{F}(t)$  ہے جو تصادم کے دوران دوسرا جسم اس (پہلے جسم) پر لاگو کرتا ہے۔

$$(۹.۳۰) \quad \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

اگر تصادم کا دورانیہ  $\Delta t$  اور اس دوران  $\vec{F}(t)$  کی اوسط قیمت  $F_{\text{اوسط}}$  ہو تب یک بُعدی حرکت کے لئے ذیل ہوگا۔

$$(۹.۳۵) \quad J = F_{\text{اوسط}} \Delta t$$

ساکن جسم پر کیت  $m$  کے ذرے، جن کی رفتار  $v$  ہے، برس کر ذیل اوسط قوت پیدا کرتے ہیں

$$(۹.۳۷) \quad F_{\text{اوسط}} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v$$

جہاں ساکن جسم سے ذروں کے تصادم کی شرح  $n/\Delta t$ ، اور ہر ایک ذرے کی رفتار میں تبدیلی  $\Delta v$  ہے (جسم ساکن رہتا ہے)۔ یہ اوسط قوت ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے

$$F_{\text{اوسط}} = - \frac{\Delta M}{\Delta t} \Delta v \quad (9.40)$$

جہاں  $\Delta M/\Delta t$  وہ شرح ہے جس سے کیمت ساکن جسم سے ٹکراتی ہے۔ درج بالا دو مساوات میں اگر ذرے تصادم کے بعد رک جاتے ہوں تب  $\Delta v = -v$  ہوگا، اور اگر ذرے جسم پر ٹپکی کھا کر رفتار میں تبدیلی کے بغیر واپس لوٹیں تب  $\Delta v = -2v$  ہوگا۔

### خطی معیار حرکت کی بقا

جب نظام پر بیرونی قوت عمل نہیں کرتی، لہذا اس نظام کا خطی معیار حرکت تبدیل نہیں ہوگا۔

$$\vec{P} = \text{مستقل} \quad (\text{بند، جدا نظام}) \quad (9.42)$$

اس کو ذیل بھی لکھ سکتے ہیں جہاں زیر نوشت کسی ابتدائی لمحہ اور اختتامی لمحہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (\text{بند، جدا نظام}) \quad (9.43)$$

مذکورہ بالا دونوں مساوات خطی معیار حرکت کے بقا کو بیان کرتی ہیں۔

### ایک بُعد میں غیر لچکی تصادم

دو اجسام کی غیر لچکی تصادم میں دو جسمی نظام کی حرکت توانائی کی بقا نہیں ہوگی (حرکت توانائی مستقل نہیں ہوگی)۔ اگر نظام بند اور جدا ہو، نظام کے کل خطی معیار حرکت کی بقا لازماً ہوگی (یہ مستقل ہوگا)، جس کو سمتیہ روپ میں ذیل لکھا جاسکتا ہے، جہاں زیر نوشت  $i$  اور  $j$  بالترتیب تصادم سے عین قبل اور اس کے عین بعد لمحات ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad (9.50)$$

ذروں کی حرکت ایک محور پر ہونے کی صورت میں تصادم ایک بُعدی ہوگا اور ہم مذکورہ بالا مساوات کو محور کے ہمراہ سمتی رفتار اجزاء کی صورت میں ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (9.51)$$

اگر دو جسم آپس میں چپک جائیں، تصادم مکمل غیر لچکی ہوگا اور دونوں اجسام کی اختتامی سمتی رفتار  $V$  ہوگی (کیونکہ یہ آپس میں جڑے ہیں)۔

### مرکز کیت کی حرکت

دو متصادم اجسام کے بند، جدا نظام کے مرکز کیت پر تصادم اثر انداز نہیں ہوگا۔ بالخصوص، مرکز کیت کی سمتی رفتار مرکز کیت  $\vec{v}$  کو تصادم تبدیل نہیں کرتا۔

### ایک بُعد میں لچکی تصادم

لچکی تصادم ایک خاص قسم کا تصادم ہے جس میں متصادم اجسام کے نظام کی حرکت کی توانائی برقرار رہتی ہے۔ اگر نظام بند اور جدا بھی ہو، اس کا خطی معیار حرکت بھی برقرار رہے گا۔ یک بُعدی تصادم کے لئے، جس میں جسم 2 ہدف اور جسم 1 گولا ہے، حرکت کی توانائی اور خطی معیار حرکت کی بقا، تصادم کے عین بعد سمتی رفتاروں کے لئے درج ذیل مساوات دیتی ہیں۔

$$(9.64) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$(9.65) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

### دو البعاد میں تصادم

اگر دو جسم یوں ٹکرائیں کہ ان کی حرکت ایک ہی محور پر نہ ہو (ٹکر آنے سے نہیں)، تصادم دو بُعدی ہوگا۔ اگر دو جسمی نظام بند اور جدا ہو، معیار حرکت کی بقا کے قانون کا اطلاق تصادم پر ہوگا جو ذیل لکھا جائے گا۔

$$(9.66) \quad \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

اجزاء کے روپ میں یہ قانون دو مساوات دے گا جو تصادم کو بیان کریں گی (دو البعاد میں ہر بُعد کے لئے ایک مساوات)۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (خصوصی صورت)، تصادم کے دوران حرکت کی توانائی کی بقا تیسری مساوات دیگی۔

$$(9.67) \quad K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

### متغیر کیتی نظام

سیرونی قوتوں کی عدم موجودگی میں ہوائی بان ذیل لمحاتی شرح سے اسراع پذیر ہوگا

$$(9.68) \quad Rv_{\text{ہوائی بان}} = Ma \quad (\text{ہوائی بان کی پہلی مساوات})$$

جہاں  $M$  ہوائی بان کی لمحاتی کیت (جس میں غنیر استعمال شدہ ایندھن شامل ہے)،  $R$  ایندھن کے اسراع کی شرح، اور  $v_{\text{ہوائی بان}}$  ہوائی بان کے لحاظ سے اسراع کی اضافی رفتار ہے۔ جبزو  $Rv_{\text{ہوائی بان}}$  ہوائی بان کی انجن کی

قوت دھکیل ہے۔ جب ایک ہوائی بان کی، جس کی  $R$  اور  $v_{\text{ہوائی بان}}$  اٹل ہو، کیت  $M_i$  سے  $M_f$  ہونے پر اس کی رفتار  $v_i$  سے  $v_f$  ہو، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.69) \quad v_f - v_i = v_{\text{ہوائی بان}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{ہوائی بان کی دوسری مساوات})$$



## سوالات

سوال ۳.۱: تین ذرات جن پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں کافضائی جانزہ شکل 9-23 میں پیش ہے۔ دو ذروں پر قوتوں کی متدریس اور سمتیں دی گئی ہیں۔ تین ذروی نظام کا مرکز کمیت (ا) ساکن، (ب) دائیں رخ مستقل سمتی رفتار سے، اور (ج) اوپر وار اسراع پذیر ہونے کی صورت میں تیسری قوت کی متدر اور سمت تلاش کریں۔

سوال ۳.۲: بلار گڑ مستوی پر مستقل سمتی رفتاروں سے حرکت کرتے ہوئے ایک برابر کمیت کے چار ذروں کافضائی جانزہ شکل 9-24 میں پیش ہے۔ سمتی رفتاروں کے رخ دیے گئے ہیں؛ ان کی متدریں برابر ہیں۔ ذروں کی جوڑیاں بنائیں۔ کون سی جوڑی ایسا نظام دیتی ہے جس کا مرکز کمیت (ساکن ہے)، (ب) ساکن ہے اور مبدا پر ہے، اور (ج) مبدا سے گزرتا ہے؟

سوال ۳.۳: فرض کریں ایک ڈب، جو  $x$  محور پر مستقل مثبت سمتی رفتار سے حرکت میں ہو، دھماکے سے دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ایک ٹکڑا، جس کی کمیت  $m_1$  ہے، مثبت سمتی رفتار  $\vec{v}_1$  سے حرکت کرتا ہے۔ دوسرا ٹکڑا جس کی کمیت  $m_2$  ہے (ا) مثبت سمتی رفتار  $\vec{v}_2$  (شکل 9-25a)، (ب) منفی سمتی رفتار  $\vec{v}_2$  (شکل 9-25b)، یا (ج) صفر سمتی رفتار (شکل 9-25c) رکھ سکتا ہے۔ ان ممکن نتائج کی درجہ بندی مطابقتی  $\vec{v}_1$  کی متدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۳.۴: تصادم میں ملوث جسم کے لئے قوت کی متدر بالمقابل وقت کی تریسات شکل 9-26 میں پیش ہیں۔ تریسات کی درجہ بندی جسم پر قوت دھکیل کی متدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۳.۵: بلار گڑ مستوی پر حرکت کرتے تین ڈبوں پر عمل پسیرا قوت کافضائی نظامہ شکل 9-27 میں پیش ہے۔ ہر ایک ڈب کے لئے، کیا محور  $x$  اور محور  $y$  کے ہمراہ خطی معیار حرکت کی بقا ہوگی؟

سوال ۳.۶: تین یا چار یکساں ذروں کا گروہ، جو محور  $x$  یا محور  $y$  کے متوازی ایک رفتار سے حرکت کرتے ہوں، شکل 9-28 میں دکھایا گیا ہے۔ مرکز کمیت کی رفتار کے لحاظ سے ان کی درجہ بندی، اعظم اول رکھ کر، کریں۔

سوال ۳.۷: ایک سل بلار گڑ مندرش پر حرکت کر کے اس جتنی کمیت کی دوسری سل سے ٹکراتی ہے۔ شکل 9-29 میں سلوں کی حرکت توانائی  $K$  کی چار ممکن تریسات پیش ہیں۔ (ا) ان میں سے کون سی طبیعی وجوہات کی بنا پر ممکن نہیں؟ باقی میں سے کونسی (ب) لچکی تصادم اور (ج) غیر لچکی تصادم بہتر ظاہر کرتی ہے؟

سوال ۳.۸: بلار گڑ مندرش پر محور  $x$  کے ہمراہ سل 1 ساکن سل 2 کی طرف بڑھتا ہے۔ عین لچکی تصادم سے قبل لمحہ پر ان کی تصویر کشی شکل 9-30 میں کی گئی ہے۔ اس لمحہ پر دو سل نظام کے مرکز کمیت کے تین ممکن معتام بھی پیش ہیں۔ (نقطہ  $B$  سلوں کے مراکز کے درمیان نصف فاصلے پر ہے۔) اگر تصادم کے بعد نظام کا مرکز کمیت (ا)  $A$  پر، (ب)  $B$  پر، اور (ج)  $C$  پر ہو، کیا سل 1 ساکن ہوگا؟ آگے کی طرف گامزن ہوگا؟ پیچھے کی طرف گامزن ہوگا؟

سوال ۳.۹: دو اجسام محور  $x$  کے ہمراہ یک بعدی لچکی تصادم کا شکار ہوتے ہیں۔ شکل 9-31 میں اجسام اور مرکز کمیت کے معتام بالمقابل وقت تریسات پیش ہیں۔ (ا) کیا دونوں جسم ابتدائی طور پر حرکت میں تھے، یا ان میں سے ایک ساکن تھا؟ کونسا لکیری قطع (ب) تصادم سے قبل اور (ج) تصادم کے بعد مرکز کمیت دیتا ہے؟ (د) کیا تصادم سے قبل زیادہ تیز حرکت کرتے جسم کی کمیت دوسرے جسم کی کمیت سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس

کے برابر ہے؟

سوال ۳.۱۰: افقی منرشن پر سل ابتدائی طور ساکن، محور  $x$  کے ہمراہ مثبت رخ، یا محور کے منفی رخ حرکت میں ہے۔ سل دھاکے سے دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوتا ہے جو اسی محور پر حرکت کرتے ہیں۔ منرشن کریں سل اور اس کے دو ٹکڑے ایک بند اور جدا نظام دیتے ہیں۔ سل اور ٹکڑوں کے معیار حرکت بالمقابل وقت  $t$  کی چھ ترسیات شکل 32.9 میں پیش ہیں۔ کونسی ترسیات طبعی ناممکن ہیں؟ وجوہات پیش کریں۔

سوال ۳.۱۱: محور  $x$  پر کیت  $m_1$  کا سل بلا رگڑ منرشن پر چلتا ہوا کیت  $m_2$  کے ساکن سل سے لچکی متصادم ہوتا ہے۔ شکل 33.9 میں سل 1 کا مقام  $x$  بالمقابل وقت  $t$  ٹھوس لکیر سے پیش کیا گیا ہے، جس پر نقطہ تصادم  $x_c$  اور وقت تصادم  $t_c$  کی نشاندہی کی گئی ہے۔ اگر (ا)  $m_1 < m_2$  اور (ب)  $m_1 > m_2$  ہو، تصادم کے بعد سل 1 نقطہ دار راہ  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، اور  $D$  میں کس پر گامزن ہوگا؟ (ج) اگر  $m_1 = m_2$  ہو یہ راہ 1، 2، 3، 4، اور 4 میں کس پر گامزن ہوگا؟

سوال ۳.۱۲: دو جسم اور ان کے مرکز کیت کی مقام بالمقابل وقت کی چار ترسیات پیش ہیں۔ یہ جسم بند اور جدا نظام دیتے ہیں اور محور  $x$  پر چلتے ہوئے یک بعدی مکمل غیر لچکی تصادم کا شکار ہوتے ہیں۔ کیا ترسیم 1 میں (ا) دو جسم اور (ب) مرکز کیت محور  $x$  پر مثبت رخ یا منفی رخ حرکت کرتے ہیں؟ (ج) کونسی ترسیم طبعی ناممکن ہے؟ وجہ پیش کریں۔

### مرکز کیت

سوال ۳.۱۳: کیت  $2.00 \text{ kg}$  ذرے کا  $xy$  محدود  $(-1.20 \text{ m}, 0.500 \text{ m})$ ، اور کیت  $4.00 \text{ kg}$  ذرے کا  $xy$  محدود  $(0.600 \text{ m}, -0.750 \text{ m})$  ہے۔ دونوں افقی مستوی پر پائے جاتے ہیں۔ کیت  $3.00 \text{ kg}$  کا تیسرا ذرہ کس (ا)  $x$  اور (ب)  $y$  پر رکھ کر تین ذروی نظام کا مرکز کیت  $(-0.500 \text{ m}, -0.700 \text{ m})$  پر ہوگا؟

سوال ۳.۱۴: تین ذروی نظام جس میں  $m_1 = 3.0 \text{ kg}$ ،  $m_2 = 4.0 \text{ kg}$ ، اور  $m_3 = 8.0 \text{ kg}$  ہے شکل 35.9 میں پیش ہے۔ محور کے پیم  $x_s = 2.0 \text{ m}$  اور  $y_s = 2.0 \text{ m}$  کے لحاظ سے رکھے گئے ہیں۔ نظام کے مرکز کیت کا (ا)  $x$  محدود اور (ب)  $y$  محدود کیا ہوگا؟ (ج) کیا  $m_3$  بتدریج بڑھانے سے مرکز کیت اس ذرے کی جانب منتقل ہوگا، اس سے دور منتقل ہوگا، یا ساکن رہے گا؟

سوال ۳.۱۵: ایک سل جس کے اضلاع  $d_1 = 11.0 \text{ cm}$ ،  $d_2 = 2.80 \text{ cm}$ ، اور  $d_3 = 13.0 \text{ cm}$  ہیں شکل 36.9 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا نصف حصہ المونیم (کثافت  $2.70 \text{ g cm}^{-3}$ ) اور آدھا لوہے (کثافت  $7.85 \text{ g cm}^{-3}$ ) کا ہے۔ سل کے مرکز کیت کا (ا)  $x$  محدود، (ب)  $y$  محدود، اور (ج)  $z$  محدود کیا ہوگا؟

جوابات

