طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۴ر جنوری ۲۰۲۴

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ v

۱ پیمائش ۱
۱.۱ وقت ۷
۲.۱ کمیت ۹
۱.۲.۱ کثافت ۱۰

۲ مخفی توانائی اور توانائی کی بقا ۱۳
۱.۰.۲ طاقت ۱۷

۳ مرکز کمیت اور خطی معیار حرکت ۲۵
۱.۳ ایک بُعد میں لچکی تصادم ۲۵
۲.۳ دو ابعاد میں تصادم ۲۷
۳.۳ متغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان ۲۹

جوابات ۳۷

باب ۳

مرکز کمیت اور خطی معیار حرکت

۳.۱ ایک بُعد میں لچکی تصادم

حرکی توانائی کی بقا درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{۳.۱}$$

ان ہمزاد مساوات کو v_{1f} اور v_{2f} کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 71.9 کو

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}) \tag{۳.۲}$$

اور مساوات ۳.۱ درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \tag{۳.۳}$$

مساوات ۳.۳ کو مساوات ۳.۲ سے تقسیم کرکے کچھ الجبرا کے بعد درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{۳.۴}$$

اور

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{۳.۵}$$

یاد رہے، زیر نوشت 1 اور 2 کسی خاص ترتیب سے مختص نہیں کیے گئے۔ مساوات 19.9 میں اور مساوات ۳.۴ اور مساوات ۳.۵ میں ان زیر نوشت کو آپس میں بدل کر لکھنے مساوات کی وہی جوڑی ملتی ہے۔ اس پر بھی توجہ

دیں کہ $v_{2i} = 0$ لینے سے، شکل 18.9 میں جسم 2 ساکن ہدف ہو گا، اور مساوات ۳.۴ اور مساوات ۳.۵ ہمیں بالترتیب مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 دیتی ہیں۔

آزمائش ا

شکل 18.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت $6\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور اختتامی معیار حرکت (ا) $2\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور (ب) $-2\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ ہونے کی صورت میں ہدف کا اختتامی خطی معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر گولے کی ابتدائی اور اختتامی حرکی توانائی بالترتیب $5\,\mathrm{J}$ اور $2\,\mathrm{J}$ ہو، ہدف کی اختتامی حرکی توانائی کیا ہو گی؟

نمونی سوال ا.۳: **لچکی تصادم در لچکی تصادم** شکل 20a.9 میں $v_{1i} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے چلتا ہوا سل 1 دو ساکن سلوں کی طرف بڑھتا ہے۔ تینوں سل ایک لکیر پر ہیں۔ یہ سل 2 سے ٹکراتا ہے جو آگے سل 3 سے جا کر ٹکراتا ہے، جس کی کمیت $m_3 = 6.0\,\mathrm{kg}$ ہے۔ دوسرے تصادم کے بعد سل 2 دوبارہ ساکن ہے، اور سل 3 کی رفتار $v_{3f} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے (شکل 20b.9)۔ دونوں تصادم لچکی ہیں۔ سل 1 اور سل 2 کی کمیتیں کیا ہیں؟ سل 1 کی اختتامی رفتار v_{1f} کیا ہے؟

کلیدی تصورات

چونکہ ہم تصادم لچکدار تصور کرتے ہیں لہٰذا میکانی توانائی کی بقا ہو گی (یوں ٹکر کی آواز، گرمی، اور ارتعاش کی بدولت توانائی کا ضیاع نظر انداز کیا جاتا ہے)۔ کوئی بیرونی افقی قوت سلوں پر عمل نہیں کرتی لہٰذا محور x پر خطی معیار حرکت کی بقا ہو گی۔ ان دو وجوہات کی بنا پر ہم دونوں تصادم پر مساوات 67.9 اور مساوات 68.9 کا اطلاق کر سکتے ہیں۔

حساب: پہلے تصادم سے آغاز کرتے ہوئے ہمیں اتنے زیادہ نامعلوم متغیرات سے واسطہ ہو گا کہ آگے بڑھنا مشکل ہو گا: ہم سلوں کی کمیت اور اختتامی سمتی رفتار نہیں جانتے۔ آئیں پہلے تصادم سے آغاز کریں، جس میں سل 3 کے ساتھ ٹکرانے کے بعد سل 2 رکتی ہے۔ مساوات 67.9 کا اطلاق اس تصادم پر کرتے ہیں جہاں ترقیم تبدیل کرتے ہوئے v_{2i} تصادم سے قبل سل 2 کی رفتار اور v_{2f} تصادم کے بعد اس کی رفتار دیتی ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

اس میں $v_{2f} = 0$ (سل 2 رک جاتا ہے) ڈالنے کے بعد $m_3 = 6.0\,\mathrm{kg}$ ڈال کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$m_2 = m_3 = 6.0\,\mathrm{kg} \qquad \text{(جواب)}$$

اسی طرح ترقیم تبدیل کر کے دوسرے تصادم کے لئے مساوات 68.9 لکھتے ہیں

$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

جہاں v_{3f} تیسرے سل کی اختتامی سمتی رفتار ہے۔ اس میں $m_3 = m_2$ ڈالنے کے بعد $v_{3f} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ڈال کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$v_{2i} = v_{3f} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آئیں اب پہلے تصادم پر غور کریں؛ ہمیں سل 2 کے لئے مستعمل ترقیم پر توجہ دینی ہوگی: تصادم کے بعد سل 2 کی سمتی رفتار v_{2f} وہی ہے جو تصادم سے قبل اس کی سمتی رفتار $v_{2i} = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ تھی۔ پہلے تصادم پر مساوات 68 کا اطلاق کر کے دی گئی $v_{1i} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ڈال کر ذیل ہوگا

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$
$$5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(10\,\mathrm{m\,s^{-1}})$$

جو ذیل دیگا۔

$$m_1 = \frac{1}{3}m_2 = \frac{1}{3}(6.0\,\mathrm{kg}) = 2.0\,\mathrm{kg} \qquad \text{(جواب)}$$

یہ نتیجہ اور دی گئی v_{1i} استعمال کرتے ہوئے پہلے تصادم پر مساوات 67.9 کا اطلاق کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ &= \frac{\frac{1}{3}m_2 - m_2}{\frac{1}{3}m_2 + m_2}(10\,\mathrm{m\,s^{-1}}) = -5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

□

۲.۳ دوابعاد میں تصادم

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

جب انظام کے لئے جس میں دو بُعدی تصادم واقع ہو، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بُعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں۔

جب انظام کے لئے جس میں دو بُعدی لچکی تصادم واقع ہو، (ا)، ہر ایک محور پر معیار حرکت کی بقا کا اطلاق کرتے ہوئے، تصادم کے بعد محور پر معیار حرکت کے اجزاء کا اسی محور پر تصادم سے قبل معیار حرکت کے اجزاء کے ساتھ رشتہ جان سکیں اور (ب) کل حرکی توانائی کی بقا کا اطلاق کر کے تصادم سے قبل اور تصادم کے بعد حرکی توانائیوں کا رشتہ جان سکیں۔

کلیدی تصور

اگر دو جسم ٹکرائیں اور ان کی حرکت ایک محور پر نہ ہو (تصادم آمنے سامنے سے نہیں ہے)، تصادم دو بُعدی ہو گا۔ اگر دو جسمی نظام بند اور جدا ہو، تصادم پر معیار حرکت کی بقا کے قانون کا اطلاق ہو گا لہٰذا درج ہو گا۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

یہ قانون اجزاء کی صورت میں دو مساوات (ہر بُعد کے لئے ایک مساوات) دیگا جو تصادم کو بیان کرتی ہیں۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تصادم کے دوران حرکی توانائی کی بقا (ذیل) تیسری مساوات دیگی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

دو بُعد میں تصادم

جب دو اجسام کا تصادم ہو، اجسام کس رخ حرکت کرتے ہیں، اس کا تعین ان کے بیچ ضرب (جھٹکا) کرتی ہے۔ بالخصوص، جب تصادم آمنے سامنے سے نہ ہو، اجسام اپنے ابتدائی محور پر نہیں رہتے۔ ایسے دو بُعدی تصادم میں جو بند، اور جدا نظام میں واقع ہو، کل خطی معیار حرکت کی بقا ہو گی۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{۳.۶}$$

اگر تصادم لچکی بھی ہو (جو ایک خصوصی صورت ہے)، تب کل حرکی توانائی کی بقا بھی ہو گی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{۳.۷}$$

دو بُعدی تصادم کا تجزیہ کرنے کے لئے مساوات ۳.۶ کو xy محددی نظام کے اجزاء کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، شکل 21.9 میں ساکن ہدف کو گولا بغلی (رآمنے سامنے سے نہیں) ٹکراتا ہے۔ ان کے بیچ ضرب، اجسام کو محور x، جس پر گولا ابتدائی طور حرکت میں تھا، کے لحاظ سے θ_1 اور θ_2 زاویوں پر بھیجتی ہے۔ یہاں ہم مساوات ۳.۶ کو محور x کے ہمراہ ذیل

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f}\cos\theta_1 + m_2v_{2f}\cos\theta_2 \tag{۳.۸}$$

اور محور y کے ہمراہ ذیل لکھیں گے۔

$$0 = -m_1v_{1f}\sin\theta_1 + m_2v_{2f}\sin\theta_2 \tag{۳.۹}$$

ہم مساوات ۳.۷ کو (اس خصوصی صورت کے لئے) رفتار کے روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad \text{(حرکی توانائی)} \tag{۳.۱۰}$$

مساوات ۳.۸ تا مساوات ۳.۱۰ میں سات متغیر ہیں: دو کمیت، m_1 اور m_2؛ تین رفتار، v_{1i}، v_{1f}، اور v_{2f}؛ اور دو زاویے، θ_1 اور θ_2۔ اگر ہم ان میں سے کوئی بھی چار متغیرات جانتے ہوں، باقی تین متغیرات ان تین مساوات کو حل کر کے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

نمونی سوال ۳.۲: فرض کریں شکل 21.9 میں گولے کا ابتدائی معیار حرکت $6\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$، جبکہ اختتامی معیار حرکت کا x جزو $4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ اور اختتامی معیار حرکت کا y جزو $-3\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ ہے۔ ہدف کے (ا) اختتامی معیار حرکت کا x جزو اور (ب) اختتامی معیار حرکت کا y جزو کیا ہوں گے؟ □

۳.۳ متغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

ہوائی بان[1] کی پہلی مساوات استعمال کر کے ہوائی بان کی کمیت میں کمی کی شرح، ہوائی بان کے لحاظ سے اخراجی مادے کی اضافی رفتار، ہوائی بان کی کمیت، اور ہوائی بان کی اسراع کا رشتہ جان پائیں گے۔

ہوائی بان کی دوسری مساوات استعمال کر کے اخراجی مادے کی اضافی رفتار کے لحاظ سے ہوائی بان کی رفتار، اور ہوائی بان کی ابتدائی اور اختتامی کمیت کا رشتہ جان پائیں گے۔

ایک ایسا حرکت پذیر نظام جس کی کمیت دی گئی شرح سے تبدیل ہوتی ہو کے لئے اس شرح اور معیار حرکت میں تبدیلی کا رشتہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

بیرونی قوتوں کی غیر موجودگی میں ہوائی بان درج ذیل لمحاتی شرح سے اسراع پذیر ہو گا،

$$Rv_{\text{اضافی}} = Ma \qquad \text{(ہوائی بان کی پہلی مساوات)}$$

جہاں M ہوائی بان کی لمحاتی کمیت (بشمول غیر استعمال شدہ ایندھن)، R ایندھن کے استعمال کی شرح، اور $v_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کے لحاظ سے اخراج کی اضافی رفتار ہے۔ جزو $Rv_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان انجن کا دھکا ہے۔

مستقل R اور $v_{\text{اضافی}}$ کی صورت میں اگر ہوائی بان کی رفتار v_i سے تبدیل ہو کر v_f ہو جائے، اور کمیت M_i سے تبدیل ہو کر M_f ہو جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)}$$

[1] rocket

متغیر کمیت کے نظام: ہوائی بان

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ نظام کی کل کمیت اٹل ہے۔ بعض اوقات، مثلاً ہوائی بان میں، ایسا نہیں ہو گا۔ اڑان سے قبل **چبوترہ روانگی** [2] پر کھڑے ہوائی بان کی زیادہ تر کمیت دراصل ایندھن ہو گی، جو آخر کار جل کر ہوائی بان کے انجن کی **ٹونٹی** [3] سے دھویں کی شکل میں خارج ہو گا۔ اسراع پذیر ہوائی بان کی متغیر کمیت سے نپٹنے کی خاطر نیوٹن کے دوسرے قاعدے کا اطلاق، صرف ہوائی بان کی بجائے، ہوائی بان اور خارجی مواد دونوں کو اکٹھا لیتے ہوئے کیا جاتا ہے۔ ہوائی بان کی اسراع کے دوران اس نظام کی کمیت تبدیل نہیں ہو گی۔

اسراع کی تلاش

فرض کریں ہم جمودی حوالہ چھوکٹ کے لحاظ سے ساکن بیٹھے گہری فضا میں، جہاں کوئی تجاذبی یا ہوائی کی رگڑی قوت موجود نہیں، ہوائی بان کو اسراع کرتا دیکھ رہے ہیں۔ اس یک بُعدی حرکت کے لئے ہم، اختیاری لمحہ t پر، ہوائی بان کی کمیت M اور سمتی رفتار v فرض کرتے ہیں (شکل 22a.9)۔

شکل 22b.9 وقتی دورانیہ $\mathrm{d}t$ کے بعد صورت حال پیش کرتی ہے۔ ہوائی بان کی سمتی رفتار $v + \mathrm{d}v$ اور کمیت $M + \mathrm{d}M$ ہیں، جہاں کمیت میں تبدیلی $\mathrm{d}M$ منفی مقدار ہے۔ وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران ہوائی بان سے اخراجی مواد کی کمیت $-\mathrm{d}M$ اور جمودی حوالہ چھوکٹ کے لحاظ سے مواد کی سمتی رفتار U ہے۔

معیار حرکت کی بقا ہو گی

ہمارا نظام ہوائی بان اور وقفہ $\mathrm{d}t$ میں اخراجی مواد پر مشتمل ہے۔ نظام بند اور جدا ہے لہٰذا وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران نظام کی خطی معیار حرکت کی بقا لازمی ہے۔ یوں ذیل ہو گا

$$P_i = P_f \tag{۳.۱۱}$$

جہاں زیر نوشت i اور f بالترتیب وقفہ $\mathrm{d}t$ کے آغاز میں اور اس کے اختتام پر قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ مساوات ۳.۱۱ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$Mv = -\,\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v) \tag{۳.۱۲}$$

جہاں دائیں ہاتھ پہلا جزو وقفہ $\mathrm{d}t$ کے دوران خارج کردہ مواد کا خطی معیار حرکت اور دوسرا جزو وقفہ $\mathrm{d}t$ کے اختتام پر ہوائی بان کا خطی معیار حرکت ہے۔

---

[2] launchingpad
[3] nozzle

اضافی رفتار کا استعمال

مساوات ۳.۱۲ کی سادہ صورت ہوائی بان اور اخراجی مواد کے بیچ اضافی رفتار $v_{\text{اضافی}}$ استعمال کرکے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اضافی رفتار اور چھوکٹ کے لحاظ سے سمتی رفتاروں کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\begin{pmatrix}\text{چھوکٹ کے لحاظ سے}\\ \text{اخراجی مواد کی سمتی رفتار}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{اخراجی مواد کے لحاظ سے}\\ \text{ہوائی بان کی سمتی رفتار}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{چھوکٹ کے لحاظ سے ہوائی}\\ \text{بان کی سمتی رفتار}\end{pmatrix}$$

اس کو علامتی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(v+\mathrm{d}v)=v_{\text{اضافی}}+U$$

یعنی

$$U=v+\mathrm{d}v-v_{\text{اضافی}} \tag{۳.۱۳}$$

اس نتیجہ کو مساوات ۳.۱۲ میں U کی جگہ ڈال کر کچھ الجبرا کے بعد ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\,\mathrm{d}M\,v_{\text{اضافی}}=M\,\mathrm{d}v \tag{۳.۱۴}$$

دونوں اطراف $\mathrm{d}t$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}v_{\text{اضافی}}=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{۳.۱۵}$$

ہم $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ (جو ہوائی بان کی کمیت میں کمی کی شرح ہے) کو $-R$ لکھتے ہیں، جہاں R ایندھن جلنے کی (مثبت) شرح ہے، اور $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ہوائی بان کی اسراع ہے۔ ان تبدیلیوں کے ساتھ مساوات ۳.۱۵ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$Rv_{\text{اضافی}}=Ma\quad(\text{ہوائی بان کی پہلی مساوات}) \tag{۳.۱۶}$$

ہر لمحے پر مقادیر کی قیمتیں مساوات ۳.۱۶ مطمئن کرتی ہیں۔

مساوات ۳.۱۶ کا بایاں ہاتھ قوت کا بُعد ($\mathrm{kg\,s^{-1}\cdot m\,s^{-1}=kg\cdot m\,s^{-2}=N}$) رکھتا ہے اور صرف ہوائی بان کی بناوٹ پر منحصر ہے؛ یعنی، شرح R پر، جس سے ایندھن (کمیت) صَرف کیا جاتا ہے، اور رفتار $v_{\text{اضافی}}$ پر، جس سے یہ کمیت ہوائی بان سے خارج کی جاتی ہے۔ ہم اس جزو $Rv_{\text{اضافی}}$ کو ہوائی بان کی **قوتِ دھکیل**[۴] کہتے اور T سے ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات ۳.۱۶ کو $T=Ma$ لکھ کر نیوٹن کا دوسرا قانون حاصل ہوتا ہے، جہاں اس لمحے پر جب ہوائی بان کی کمیت M ہے اس کی اسراع a ہے۔

سمتی رفتار کی تلاش

ہم جاننا چاہتے ہیں کہ جیسے جیسے ہوائی بان ایندھن صَرف کرتا ہے اس کی سمتی رفتار کیسے تبدیل ہو گی۔ مساوات ۳.۱۴ ذیل کہتی ہے۔

$$\mathrm{d}v=-v_{\text{اضافی}}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

---

[۴] thrust

اس کے تکمل

$$\int_{v_i}^{v_f} \mathrm{d}v = -v_{\text{اضافی}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

میں M_i ہوائی بان کی ابتدائی کمیت اور M_f اختتامی کمیت ہے۔ تکمل لینے سے ذیل حاصل ہو گا

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)} \tag{۳.۱۷}$$

جو ہوائی بان کی کمیت M_i سے گھٹ کر M_f ہونے کی صورت میں ہوائی بان کی رفتار میں اضافہ دیتی ہے۔ (مساوات ۳.۱۷ میں علامت ln **قدرتی لوگارتھم**[۵] ظاہر کرتی ہے۔) ہم یہاں **کثیر المراحل**[۶] ہوائی بان کی افادیت جان سکتے ہیں جو ایندھن ختم ہونے پر خالی ٹینکی سے چھٹکارا حاصل کر کے M_f گھٹاتا ہے۔ مثالی ہوائی بان مطلوب مقام پر صرف ضروری ساز و سامان کے ساتھ پہنچے گا۔

نمونی سوال ۳.۳: **ہوائی بان کا انجن، قوت دھکیل، اسراع** اس باب کی تمام گزشتہ مثالوں میں نظام کی کمیت اٹل تھی۔ یہاں ہم ایسے نظام (ہوائی بان) کی بات کرتے ہیں جس کی کمیت بتدریج کم ہوتی ہے۔ ایک ہوائی بان جس کی ابتدائی کمیت $M_i = 850\,\mathrm{kg}$ ہے $R = 2.3\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ شرح سے ایندھن صَرف کرتا ہے۔ ہوائی بان کے لحاظ سے اخراجی مواد کی رفتار $v_{\text{اضافی}} = 2800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ (ا) ہوائی بان کا انجن کتنی قوت دھکیل پیدا کرتا ہے؟

کلیدی تصور

مساوات ۳.۱۶ کے تحت ایندھن صَرف کرنے کی شرح R کو اخراجی مواد کی اضافی رفتار $v_{\text{اضافی}}$ سے ضرب دینے سے قوت دھکیل T حاصل ہو گی۔

حساب: یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} T &= Rv_{\text{اضافی}} = (2.3\,\mathrm{kg\,s^{-1}})(2800\,\mathrm{m\,s^{-1}}) \\ &= 6440\,\mathrm{N} \approx 6400\,\mathrm{N} \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

(ب) ہوائی بان کی ابتدائی اسراع کیا ہو گی؟

کلیدی تصور

ہم ہوائی بان کی قوت دھکیل T اور اس کی اسراع کی قدر a کا رشتہ $T = Ma$ جانتے ہیں، جہاں M ہوائی بان کی کمیت ہے۔ لیکن، جیسے جیسے ایندھن صَرف ہوتا ہے M گھٹتی اور a بڑھتا ہے۔ ہمیں ابتدائی اسراع درکار ہے لہٰذا ہم ہوائی بان کی ابتدائی کمیت M_i لیں گے۔

---

[۵] natural logarithm
[۶] multistage

حساب: ان معلومات سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$a = \frac{T}{M} = \frac{6440\,\mathrm{N}}{850\,\mathrm{kg}} = 7.6\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{(جواب)}$$

سطح زمین سے سیدھا اوپر اڑان کے لئے ضروری ہے کہ ابتدائی اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ = g سے زیادہ ہو۔ یعنی، ابتدائی اسراع کو سطح زمین پر تجاذبی اسراع سے زیادہ ہونا ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں، ہوائی بان پر ابتدائی تجاذبی قوت، جس کی قدر $M_i g$ ہے

$$(850\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 8330\,\mathrm{N}$$

سے قوت دھکیل T کا زیادہ ہونا لازمی ہے، ورنہ ہوائی بان زمین سے اٹھنے کے قابل نہیں ہو گا۔ چونکہ اس ہوائی بان کی قوت دھکیل (جو یہاں $T = 6440\,\mathrm{N}$ ہے) درکار قدر سے کم ہے لہٰذا ایسا ہوائی بان اڑ نہیں پائے گا؛ یہاں زیادہ طاقتور ہوائی بان کی ضرورت ہے۔ □

نظر ثانی اور خلاصہ

مرکز کمیت

ایک نظام جو n ذرات پر مشتمل ہو کے مرکز کمیت کی تعریف وہ نقطہ ہے جس کے محدد درج ذیل ہوں۔

$$x_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$
$$y_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$
$$z_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{۹.۵}$$

اس کو مختصراً ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں M نظام کی کل کمیت $\sum_{i=1}^{n} m_i$ ہے۔

$$\vec{r}_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \tag{۹.۸}$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے ذرات کا نظام

ایک نظام، جو ذرات پر مشتمل ہو، کے مرکز کمیت کی حرکت **نیوٹن کے دوسرے قانون برائے ذرات پر مشتمل نظام** کے تحت ہو گی، جو ذیل کہتا ہے۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = M\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۹.۱۴}$$

یہاں نظام پر لاگو تمام بیرونی قوتیں مل کر صافی قوت $\vec{F}_{\text{صافی}}$ دیتی ہیں۔ نظام کی کل کمیت M، اور نظام کے مرکز کمیت کی اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے۔

خطی معیار حرکت اور نیوٹن کا دوسرا قانون

تنہا ذرے کے لئے، مقدار $\vec{p}$ متعارف کرکے، جو اس ذرے کا **خطی معیار حرکت** کہلاتا ہے اور جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{۹.۲۲}$$

ہم نیوٹن کا دوسرا قانون اس معیار حرکت کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{۹.۲۳}$$

ذرات پر مشتمل نظام کے لئے مذکورہ بالا دو تعلق ذیل لکھا جائیں گے۔

$$\vec{F}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \text{اور} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۹.۲۵، ۹.۲۷}$$

تصادم اور ضرب

تصادم میں ملوث ذرہ نما جسم پر معیار حرکت کے روپ میں نیوٹن کے دوسرے قانون کا اطلاق **ضرب و خطی معیار حرکت کا مسئلہ** دیگا:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J} \tag{۹.۳۱، ۹.۳۲}$$

جہاں جسم کے خطی معیار حرکت میں تبدیلی $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ ہے، اور ضرب $\vec{J}$ وہ قوت $\vec{F}(t)$ ہے جو تصادم کے دوران دوسرا جسم اس (پہلے جسم) پر لاگو کرتا ہے۔

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \tag{۹.۳۰}$$

اگر تصادم کا دورانیہ Δt اور اس دوران $\vec{F}(t)$ کی اوسط قیمت $F_{\text{اوسط}}$ ہو تب یک بُعدی حرکت کے لئے ذیل ہو گا۔

$$J = F_{\text{اوسط}}\Delta t \tag{۹.۳۵}$$

ساکن جسم پر کمیت m کے ذرے، جن کی رفتار v ہے، برس کر ذیل اوسط قوت پیدا کرتے ہیں

$$F_{\text{اوسط}} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v \tag{۹.۳۷}$$

جہاں ساکن جسم سے ذروں کے تصادم کی شرح $n/\Delta t$ ، اور ہر ایک ذرے کی رفتار میں تبدیلی Δv ہے (جسم ساکن رہتا ہے)۔ یہ اوسط قوت ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے

$$F_{\text{اوسط}} = -\frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta v \tag{۹.۴۰}$$

جہاں $\Delta M/\Delta t$ وہ شرح ہے جس سے کمیت ساکن جسم سے ٹکراتی ہے۔ درج بالا دو مساوات میں اگر ذرے تصادم کے بعد رک جاتے ہوں تب $\Delta v = -v$ ہو گا، اور اگر ذرے جسم پر ٹپکی کھا کر رفتار میں تبدیلی کے بغیر واپس لوٹیں تب $\Delta v = -2v$ ہو گا۔

خطی معیار حرکت کی بقا

جدا نظام پر بیرونی قوت عمل نہیں کرتی، لہٰذا اس نظام کا خطی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو گا۔

$$\vec{P} = \text{مستقل} \qquad (\text{بند، جدا نظام}) \tag{۹.۴۲}$$

اس کو ذیل بھی لکھ سکتے ہیں جہاں زیر نوشت کسی ابتدائی لمحہ اور اختتامی لمحہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (\text{بند، جدا نظام}) \tag{۹.۴۳}$$

مذکورہ بالا دونوں مساوات **خطی معیار حرکت کی بقا** کو بیان کرتی ہیں۔

ایک بُعد میں غیر لچکی تصادم

دو اجسام کی غیر لچکی تصادم میں دو جسمی نظام کی حرکی توانائی کی بقا نہیں ہو گی (حرکی توانائی مستقل نہیں ہو گی)۔ اگر نظام بند اور جدا ہو، نظام کے کل خطی معیار حرکت کی بقا لازماً ہو گی (یہ مستقل ہو گا)، جس کو سمتیہ روپ میں ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں زیر نوشت i اور j بالترتیب تصادم سے عین قبل اور اس کے عین بعد لمحات ظاہر کرتی ہیں۔

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \tag{۹.۵۰}$$

ذروں کی حرکت ایک محور پر ہونے کی صورت میں تصادم یک بُعدی ہو گا اور ہم مذکورہ بالا مساوات کو محور کے ہمراہ سمتی رفتار اجزاء کی صورت میں ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \tag{۹.۵۱}$$

اگر دو جسم آپس میں چپک جائیں، تصادم مکمل غیر لچکی ہو گا اور دونوں اجسام کی اختتامی سمتی رفتار V ہو گی (کیونکہ یہ آپس میں جڑے ہیں)۔

مرکز کمیت کی حرکت

دو متصادم اجسام کے بند، جدا نظام کے مرکز کمیت پر تصادم اثر انداز نہیں ہو گا۔ بالخصوص، مرکز کمیت کی سمتی رفتار $\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}}$ کو تصادم تبدیل نہیں کرتا۔

ایک بُعد میں لچکی تصادم

لچکی تصادم ایک خاص قسم کا تصادم ہے جس میں متصادم اجسام کے نظام کی حرکی توانائی برقرار رہتی ہے۔ اگر نظام بند اور جدا بھی ہو، اس کا خطی معیار حرکت بھی برقرار رہے گا۔ یک بُعدی تصادم کے لئے، جس میں جسم 2 ہدف اور جسم 1 گولا ہے، حرکی توانائی اور خطی معیار حرکت کی بقا، تصادم کے عین بعد سمتی رفتاروں کے لئے درج ذیل مساوات دیتی ہیں۔

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (۹.۶۷)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (۹.۶۸)$$

دو ابعاد میں تصادم

اگر دو جسم یوں ٹکرائیں کہ ان کی حرکت ایک ہی محور پر نہ ہو (ٹکر آمنے سامنے سے نہیں)، تصادم دو بُعدی ہو گا۔ اگر دو جسمی نظام بند اور جدا ہو، معیار حرکت کی بقا کے قانون کا اطلاق تصادم پر ہو گا جو ذیل لکھا جائے گا۔

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \qquad (۹.۷۷)$$

اجزاء کے روپ میں یہ قانون دو مساوات دے گا جو تصادم کو بیان کریں گی (دو ابعاد میں ہر بُعد کے لئے ایک مساوات)۔ اگر تصادم لچکی بھی ہو (خصوصی صورت)، تصادم کے دوران حرکی توانائی کی بقا تیسری مساوات دیگی۔

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \qquad (۹.۷۸)$$

متغیر کمیتی نظام

بیرونی قوتوں کی عدم موجودگی میں ہوائی بان ذیل لمحاتی شرح سے اسراع پذیر ہوگا

$$R v_{\text{اضافی}} = Ma \quad \text{(ہوائی بان کی پہلی مساوات)} \qquad (۹.۸۷)$$

جہاں M ہوائی بان کی لمحاتی کمیت (جس میں غیر استعمال شدہ ایندھن شامل ہے)، R ایندھن کے اصراف کی شرح، اور $v_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کے لحاظ سے اخراج کی اضافی رفتار ہے۔ جزو $Rv_{\text{اضافی}}$ ہوائی بان کی انجن کی **قوت دھکیل** ہے۔ جب ایک ہوائی بان کی، جس کی R اور $v_{\text{اضافی}}$ اٹل ہو، کمیت M_i سے M_f ہونے پر اس کی رفتار v_i سے v_f ہو درج ذیل ہو گا۔

$$v_f - v_i = v_{\text{اضافی}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(ہوائی بان کی دوسری مساوات)} \qquad (۹.۸۸)$$

جوابات