

طبیعیات کے اصول

حنالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@hotmail.com

۲۸ / جنوری ۲۰۲۲

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
۱	۱ پیش
۷	۱.۱ وقت
۹	۲.۱ کیفیت
۱۰	۱.۲.۱ کثافت
۱۷	۲ مخفی توانائی اور توانائی کی بقا
۲۱	۱.۰.۲ طاقت
۲۹	۳ مرکزیت اور خطی معیار حرکت
۲۹	۱.۳ ایک بُند میں لچکی تصادم
۳۱	۲.۳ دو الباد میں تصادم
۳۳	۳.۳ تغیر کیفیت کا نظام: ہوائی بان
۶۱	۴ گھماؤ
۶۱	۱.۴ گھماؤ کے متغیر
۶۷	۱.۱.۴ کلیدی تصور
۷۲	۲.۴ مستقل اسراع کے ساتھ گھماؤ
۷۵	۳.۴ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ
۸۱	۴.۴ گھماؤ کی حرکتی توانائی
۸۳	۵.۴ گھمیری جمود کا حساب
۸۹	۶.۴ قوت مروڑ
۹۱	۷.۴ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماؤ
۹۶	۸.۴ کام اور گھمیری حرکت کی توانائی
۱۱۳	جوابات

باب ۴

گھماؤ

۴.۱ گھماؤ کے متغیر

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے نتائج حاصل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے اگر جسم کے تمام حصے ایک محور کے گرد ہم قدم گھومیں، یہ استوار جسم ہوگا۔ (اس باب میں ایسے اجسام پر گفتگو کی جائے گی۔)
۲. جان پائیں گے کہ اندرونی حوالہ لکسیر اور مقررہ بیرونی حوالہ لکسیر کے بیچ زاویہ، استوار جسم کا زاویاتی مقام دیگا۔
۳. ابتدائی اور اختتامی زاویاتی مقام کا زاویاتی ہٹاؤ کے ساتھ تعلق استعمال کر پائیں گے۔
۴. اوسط زاویہ سمتی رفتار، زاویہ ہٹاؤ، اور ہٹاؤ کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔
۵. اوسط زاویہ اسراع، زاویہ سمتی رفتار میں تبدیلی، اور اس تبدیلی کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔
۶. جان پائیں گے کہ خلاف گھسڑی حرکت مثبت رخ اور گھسڑی وار حرکت منفی رخ ہوگا۔
۷. زاویہ مقام کو وقت کا تناسب جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویہ سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویہ سمتی رفتار تعیین کر پائیں گے۔
۸. زاویہ مقام بالمتقابل وقت کی ترمیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویہ سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویہ سمتی رفتار تعیین کر پائیں گے۔
۹. جان پائیں گے کہ لمحاتی زاویہ سمتی رفتار کی مقدار لمحاتی زاویہ رفتار ہوگی۔

۱۰. زاوی سستی رفتار کو وقت کا تناسب جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۱. زاوی سستی رفتار بالمتقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۲. وقت کے ساتھ زاوی اسراع تناسب کا عمل کا مکمل لے کر جسم کی زاوی سستی رفتار میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔
وقت کے ساتھ زاوی سستی رفتار تناسب کا عمل کا مکمل لے کر جسم کے زاوی معتام میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

• مقررہ محور، جو محور گھماؤ کہلاتی ہے، کے گرد استوار جسم کا گھماؤ بیان کرنے کی خاطر، جسم کے اندر محور کو عمودی حوالہ لکیر مندرجہ کی جاتی ہے جو جسم کے ساتھ ہم قدم محور کے گرد گھومتی ہے۔ ایک مقررہ رخ کے ساتھ اس لکیر کا زاوی معتام θ ناپا جاتا ہے۔ جب θ کی پیمائش ریڈین میں ہو، ذیل ہوگا،

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

جہاں r داس r کے دائری راہ کا قوسی مناسلہ s اور ریڈین میں زاویہ θ ہے۔

• زاویہ کی درجہ میں اور چکر میں پیمائش کار ریڈین پیمائش سے تعلق ذیل ہے۔

$$1 \text{ چکر} = 360^\circ = 2\pi \text{ ریڈین}$$

• ایک جسم جو محور گھماؤ کے گرد گھوم کر اپنا زاوی معتام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، ذیل زاوی ہٹاؤ سے گزرتا ہے،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

جہاں خلاف گھسڑی گھماؤ کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھسڑی وار گھماؤ کے لئے منفی ہوگا۔

• اگر جسم Δt دورانیہ میں $\Delta\theta$ زاوی ہٹاؤ گھوئے، اس کی اوسط زاوی سستی رفتار ω اوسط ذیل ہوگی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

جسم کی (لمحاتی) زاوی سستی رفتار ω ذیل ہوگی۔

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

اوسط زاوی سستی رفتار ω اور سستی رفتار ω دونوں سستی معتا دیر ہیں، جن کا رخ دایاں ہاتھ متعده دیگا۔
خلاف گھسڑی گھماؤ کے لئے ان کا رخ مثبت اور گھسڑی وار گھماؤ کے لئے منفی ہوگا۔ زاوی سستی رفتار کی متدر جسم کی زاوی رفتار ہوگی۔

• اگر $t_2 - t_1 = \Delta t$ دورانیہ میں جسم کی زاوی سستی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، اس کا اوسط زاوی اسراع α ذیل ہوگا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

جسم کا (لمحاتی) زاوی اسراع α ذیل ہوگا۔

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

α اور α دونوں سستی معنادیر ہیں۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے، طبیعیات کی توجہ کا ایک مرکز ”حرکیات“ ہے۔ تاہم، اب تک ہم صرف مستقیم حرکت پر بات کرتے رہے ہیں، جس میں جسم سیدھی یا قوسی لکیر پر حرکت کرتا ہے (شکل 1a-10)۔ اب ہم گھماؤ پر نظر ڈالتے ہیں، جس میں جسم کسی محور کے گرد گھومتا ہے (شکل 1b-10)۔

گھاؤ تقریباً ہر مشین میں نظر آتا ہے، اور جب آپ دروازہ کھولتے ہیں آپ اس کو دیکھتے ہیں۔ کھیل میں گھاؤ اہم کردار ادا کرتا ہے، جیسا گیند کو زیادہ دور پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا زیادہ دیر اٹھا کر سکتی ہے)، اور کرکٹ میں گیند قوسی راہ پر پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا دائیں یا بائیں دھکیلتی ہے)۔ گھاؤ زیادہ اہم مسائل، جیسا عمر رسیدہ ہوائی جہاز میں دھاتی حصوں کا ٹوٹ پھوٹ، میں بھی کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

گھاؤ پر بحث سے قبل، حرکت میں ملوث متغیرات متعارف کرتے ہیں، جیسا ہم نے باب 2 میں مستقیم حرکت پر بحث سے قبل کیا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ گھاؤ کے متغیرات عین باب 2 میں یک بُعدی حرکت کے متغیرات کی طرح ہیں؛ ایک اہم خصوصی صورت وہ ہے جہاں اسراع (جو یساں زاوی اسراع ہوگا) مستقل ہو۔ ہم دیکھتے ہیں نیوٹن کا دوسرا عدہ زاوی حرکت کے لئے بھی لکھا جاسکتا ہے، تاہم اب قوت کی بجائے ایک نئی مقدار جو قوت سرورڈ کہلاتی ہے استعمال کرنا ہوگا۔ کام اور کام و حرکی توانائی مسئلے کا اطلاق بھی گھاؤ و حرکت پر کیا جاسکتا ہے، تاہم کیت کی بجائے ایک نئی مقدار جو زاوی جہود کہلاتی ہے استعمال کرنا ہوگا۔ مختصر، ہم جو کچھ پڑھ چکے ہیں، اس کا اطلاق گھاؤ و حرکت میں ہوگا، تاہم کبھی کبھار معمولی تبدیلی کی ضرورت پیش آئے گی۔

انتباہ: اگرچہ اس باب میں زیادہ تر حقائق محض دوبارہ پیش کیے گئے ہیں، دیکھایا گیا ہے کہ طلب و طالبات کو اس باب میں دشواری پیش آتی ہے۔ اساتذہ کرام اس کی کئی وجوہات پیش کرتے ہیں جن میں سے دو پر اتفاق پایا جاتا ہے: 1 یہاں علامت کی تعداد بہت زیادہ ہے (جنہیں یونانی حروف میں لکھ کر مشکل میں مزید اضافہ پیدا ہوتا ہے)، اور 2 آپ خطی حرکت سے زیادہ واقف ہیں (اسی لئے کمرے کے ایک کونے سے دوسرے کونے تک آپ با آسانی جاسکتے ہیں)، لیکن گھاؤ آپ کا واسطہ کم رہا ہے (اسی لئے تفسیر گاہ میں آپ تفسیری جھولے پر سوار ہونے کے لئے پیچھے خسر چنے کے لئے راضی ہوتے ہیں)۔ جہاں آپ کو دشواری ہو، دیکھیں آیا

مسئلے کو باب 2 کا ایک بُدی خطی مسئلہ تصور کرنے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ مثلاً، اگر آپ سے زاویہ مناسلہ معلوم کرنے کو کہا جائے، وقتقی طور پر لفظ زاویہ کو بھول جائیں اور دیکھیں آیا باب 2 کی ترقیم اور تصورات استعمال کر کے جواب حاصل کرنا آسان ہوتا ہے۔

گھماؤ کے متغیر

ہم مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماؤ پر غور کرنا چاہتے ہیں۔ استوار جسم^۱ اے سرادوہ جسم ہے جس کے تمام حصے، جسم کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر، ہم قدم گھوم سکتے ہیں۔ مقررہ محور^۲ اے سرادوہ محور ہے جو حرکت نہیں کرتی اور جس پر گھوما جاسکتا ہے۔ یوں ہم ایسے جسم پر غور نہیں کریں گے جیسا سورج (جو گیس کا کرہ ہے) جس کے حصے ایک ساتھ حرکت نہیں کرتے۔ ہم زمین پر لڑھکتے گیسنہ کی بھی بات نہیں کرتے چونکہ اس کی محور خود حرکت پذیر ہے (ایسی گیسنہ کی حرکت، گھماؤ اور متقیم حرکت کا ملاپ ہے)۔

شکل 2.10 میں مقررہ محور پر، جو محور گھماؤ یا گھماؤ کی محور کہلاتی ہے، اختیاری شکل کا استوار جسم گھوم رہا ہے۔ حالص گھماؤ (زاویہ حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز محور گھماؤ پر واقع ہے، اور ہر نقطہ کسی مخصوص وقتقی وقفہ میں ایک جتنا زاویہ طے کرتا ہے۔ حالص متقیم حرکت (خطی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ کسی مخصوص وقتقی دورانیہ میں ایک جتنا خطی مناسلہ طے کرتا ہے۔

آئیں باری باری خطی متقادیر مقام، ہٹاؤ، سمتی رفتار، اور اسراع کے مائل زاویہ متقادیر پر غور کرتے ہیں۔

زاویہ مقام

شکل 2.10 میں گھماؤ کو عمودی، جسم کے ساتھ گھومتی، جسم سے پکی حبڑی حوالہ لکیر دکھائی گئی ہے۔ کسی مقررہ رخ کے ساتھ، جس کو ہم صفر زاویہ مقام^۳ مانتے ہیں، اس لکیر کا زاویہ لکیر کا زاویہ مقام^۴ ہوگا۔ شکل 3.10 میں محور x کے مثبت رخ کے ساتھ زاویہ مقام θ ناپا گیا ہے۔ ہندسہ سے ہم جانتے ہیں درج ذیل ہوگا۔

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ریڈین ناپ}) \quad (۴.۱)$$

یہاں محور x (جو صفر زاویہ مقام ہے) سے حوالہ لکیر تک دائری قوس کی لمبائی s ، اور دائرے کا رداس r ہے۔

اس طرح تعین کیا گیا زاویہ، درج یا حیکر کی بجائے، ریڈین^۵ میں ناپا جاتا ہے۔ ریڈین دو لمبائیوں کی نسبت (تقابلی تعلق) ہے لہذا یہ بے بعد حالص عدد ہوگا۔ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہذا ایک مکمل دائرے میں 2π

rigidbody^۱
fixedaxis^۲
rotationaxis^۳
zeroangularposition^۴
angularposition^۵
radian^۶

ریڈیئن ہوں گے۔

$$(۳.۲) \quad 2\pi \text{ ریڈیئن} = \frac{2\pi r}{r} = 360^\circ = 1 \text{ چکر}$$

یا

$$(۳.۳) \quad 0.159 \text{ چکر} = 57.3^\circ = 1 \text{ ریڈیئن}$$

محور گھاؤ پر حوالہ لکیر کی مکمل چکر کے بعد ہم θ واپس صفر نہیں کرتے۔ اگر حوالہ لکیر صفر زاوی مقام سے ابتدا کر کے دو چکر مکمل کرے، لکیر کا زاوی مقام $\theta = 4\pi$ ریڈیئن ہوگا۔

محور x پر حوالہ مستقیم حرکت کے لئے $x(t)$ ، یعنی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم حرکت پذیر جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔ اسی طرح، حوالہ گھاؤ کے لئے $\theta(t)$ ، یعنی زاوی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم گھومتے جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔

زاوی ہٹاؤ

اگر شکل 3.10 کا جسم محور گھاؤ پر شکل 4.10 کی طرح گھوم کر حوالہ لکیر کا زاوی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا زاوی ہٹاؤ $\Delta\theta$ ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴) \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

زاوی ہٹاؤ کی یہ تعریف نہ صرف استوار جسم بلکہ جسم کے ہر اندرونی ذرہ کے لئے درست ہے۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ محور x پر مستقیم حرکت کی صورت میں جسم کا ہٹاؤ Δx مثبت یا منفی ہوگا، جو، محور پر جسم کی حرکت کے رخ پر منحصر ہے۔ اسی طرح، گھاؤ کی صورت میں جسم کا زاوی ہٹاؤ $\Delta\theta$ درج ذیل متاعدہ کے تحت مثبت یا منفی ہوگا۔

متاعدہ ۳.۱: خلاف گھڑی زاوی ہٹاؤ مثبت اور گھڑی وار ہٹاؤ منفی ہوگا۔

”گھڑیاں منفی ہیں“ کا فترہ اس متاعدہ کو یاد رکھنے میں مدد دے سکتا ہے۔ یاد رہے گھڑی کے سیکنڈ کی سوئی کا ہر قدم آپ کی زندگی کا ٹی ہے۔

آزمائش ۱

فترہ اپنے وسطی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ درج ذیل ابتدائی اور اختتامی زاوی مقام کی سر ترتیب جوڑیوں میں کونسی منفی زاوی ہٹاؤ دیتی ہیں؟ (۱) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی $+5$ ریڈیئن؛ (ب) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی -7 ریڈیئن؛ (ج) ابتدائی 7 ریڈیئن، اختتامی -3 ریڈیئن۔

زاوی سستی رفتار

منرض کریں ایک جسم وقت t_1 پر زاوی مقام θ_1 پر اور وقت t_2 پر زاوی مقام θ_2 پر ہو، جیسا شکل 4.10 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم t_1 تا t_2 وستی دورانیہ Δt میں جسم کی اوسط زاوی سستی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل کرتے ہیں،

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (۴.۵)$$

جہاں وقت دورانیہ Δt میں زاوی ہٹاؤ $\Delta\theta$ ہے۔ (زاوی سستی رفتار کے لئے یونانی حرفوف تہجی کا، چھوٹی لکھائی میں، آخری حرف اومیگا ω استعمال کیا جائے گا۔) مساوات ۴.۵ میں Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی درج ذیل تحدیدی قیت حاصل ہوگی جو لحاظی زاوی سستی رفتار ω (یا مختصراً زاوی سستی رفتار) کہلاتی ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (۴.۶)$$

اگر $\theta(t)$ معلوم ہو، اس کا تفریق لے کر زاوی سستی رفتار ω حاصل ہوگی۔

چونکہ اس جسم کے تمام ذرے ہم قدم ہیں، لہذا مساوات ۴.۵ اور مساوات ۴.۶ نا صرف مکمل گھومتے استوار جسم کے لئے بلکہ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاوی سستی رفتار کی عمومی متعل اکائی ریڈین فی سیکنڈ (rad s^{-1})، چکر فی سیکنڈ، اور چکر فی منٹ ہے۔

محور x پر مثبت رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی سستی رفتار v مثبت جبکہ منفی رخ حرکت کی صورت میں منفی ہوگی۔ اسی طرح محور پر مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھماؤ کی صورت میں استوار جسم کی زاوی سستی رفتار مثبت جبکہ منفی رخ (گھڑی وار) گھماؤ کی صورت میں منفی ہوگی۔ ”گھڑیاں منفی ہیں“ اب بھی درست ہے۔ (زاوی سستی رفتار کی مقدار زاوی رفتار کہلاتی ہے۔ ہم زاوی رفتار کے لئے بھی ω علامت استعمال کریں گے۔

زاوی اسراع

گھومتے ہوئے جسم کی زاوی سستی رفتار مستقل نہ ہونے کی صورت میں جسم زاوی اسراع سے دوچار ہوگا۔ منرض کریں وقت t_1 پر جسم کی زاوی سستی رفتار ω_1 اور t_2 پر ω_2 ہے۔ دورانیہ t_1 تا t_2 میں گھومتے ہوئے جسم کی اوسط زاوی اسراع $\alpha_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل ہے،

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (۴.۷)$$

average angular velocity^{*}
instantaneous angular velocity[^]
angular speed[^]
average angular acceleration⁺

جہاں $\Delta\omega$ زاویہ سمتی رفتار میں Δt کے دوران تبدیل ہے۔ لحاظ سے زاویہ اسراع^۱ (یا مختصراً زاویہ اسراع)، جس سے ہمیں زیادہ دلچسپی ہے، Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی، درج ذیل، تحدیدی قیمت کو کہتے ہیں۔

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (۴.۸)$$

مساوات ۴.۷ اور مساوات ۴.۸ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاویہ اسراع کی عمومی مستعمل اکائی ریڈین فی مربع سیکنڈ (rad s^{-2}) اور چکر فی مربع سیکنڈ ہے۔

نمونہ سوال ۴.۱: زاویہ مقام سے زاویہ سمتی رفتار کا حصول

شکل 5a.10 میں فطرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ فطرص پر حوالہ لکیر کا زاویہ مقام $\theta(t)$ ذیل ہے، جہاں t اور θ بالترتیب سیکنڈ اور ریڈین میں ہیں، اور صفر زاویہ مقام شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\theta = -1.00 - 0.600t + 0.250t^2 \quad (۴.۹)$$

(آپ چاہیں تو وقتی طور پر لفظ ”زاویہ مقام“ سے ”زاویہ“ خارج کر کے اور θ علامت کی جگہ x استعمال کر کے مسئلہ کو باب 2 کی ترقیم میں لے جائیں۔ آپ کو باب 2 کی یک بُعدی حرکت کے مقام کی مساوات حاصل ہو گی۔)

(۱) فطرص کا زاویہ مقام بالمتبادل وقت $t = -3.0 \text{ s}$ تا $t = 5.4 \text{ s}$ ترسیم کریں۔ فطرص اور اس پر زاویہ مقام کی حوالہ لکیر کا حنا کہ $t = -2.0 \text{ s}$ ، اور $t = 4.0 \text{ s}$ ، اور اس لمحے پر بنائیں جب ترسیم t محور سے گزرتی ہے۔

۴.۱.۱ کلیری تصور

فطرص کے زاویہ مقام سے مراد اس پر کھینچی حوالہ لکیر کا مقام $\theta(t)$ ہے، جو مساوات ۴.۹ دیتی ہے؛ لہذا ہم مساوات ۴.۹ ترسیم کرتے ہیں؛ نتیجہ شکل 5b.10 میں پیش ہے۔

حاجہ: فطرص اور حوالہ لکیر کا مقام کسی مخصوص لمحے پر حنا کہ بنانے کے لئے ضروری ہے کہ اس لمحے پر ہمیں θ معلوم ہو، جو مساوات ۴.۹ میں لمحے کا وقت ڈالنے سے حاصل ہوگا۔ یوں $t = -2.0 \text{ s}$ کے لئے ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \theta &= -1.00 - (0.600)(-2.0) + (0.250)(-2.0)^2 \\ &= 1.2 \text{ rad} = 1.2 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ ریڈین}} = 69^\circ \end{aligned}$$

یہ نتیجہ کہتا ہے کہ فطرص پر موجود حوالہ لکیر لمحہ $t = -2.0 \text{ s}$ پر صفر مقام سے مثبت رخ (خلاف گھڑی) 1.2 ریڈین یعنی 69° گھوم کر ہوگی۔ شکل 5b.10 کے حنا کہ 1 میں حوالہ لکیر کا یہ مقام دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح $t = 0$ پر θ کی قیمت -1.00 ریڈین یا -57° ہوگی، جس کے تحت حوالہ لکیر صفر زاویہ مقام سے 1.0 ریڈین یا 57° منفی رخ (گھڑی وار) گھوم کر ہوگی، جیسا حنا کہ 3 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 4.0 \text{ s}$ پر θ کی قیمت

^۱ instantaneous angular acceleration

0.60 ریڈیئن یعنی 34° ہوگی (حنا کہ 5)۔ جس لمحے ترمیم محور t سے گزرتی ہے، $\theta = 0$ ہوگا اور حوالہ لکیر لحاتی عین صفر مقام پر ہوگی (حنا کہ 2 اور 4)۔

(ب) شکل 5b.10 میں $\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت کس سمت t پر ہوگی؟ θ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

کلیدی تصور

تفاعل کی انتہا قیمت (یہاں کم سے کم قیمت) معلوم کرنے کی خاطر ہم تفاعل عمل کا ایک گننا تفرق لے کر صفر کے برابر رکھتے ہیں۔

حاجے: تفاعل $\theta(t)$ کا ایک گننا تفرق ذیل ہے۔

$$(۴.۱۰) \quad \frac{d\theta}{dt} = -0.600 + 0.500t$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر t کے لئے حل کر کے لمحے سمت t حاصل ہوگا جس پر $\theta(t)$ کی قیمت کم سے کم ہوگی۔

$$(جواب) \quad t_{\text{سمت}} = 1.2 \text{ s}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت جاننے کے لئے ہم مساوات ۴.۹ میں سمت t ڈالتے ہیں، جو ذیل دیگا۔

$$(جواب) \quad \theta = -77.9^\circ \approx -1.36 \text{ ریڈیئن}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت (شکل 5b.10 میں نشیب) صفر زاوی مقام سے متروص کی زیادہ سے زیادہ گھڑی وار گھماؤ ہے، جو حنا کہ 3 سے کچھ زیادہ ہوگا۔

(ج) متروص کی زاوی سمتی رفتار ω وقت $t = -3.0 \text{ s}$ تا $t = 6.0 \text{ s}$ ترمیم کریں۔ متروص کا حنا کہ $t = -2.0 \text{ s}$ ، $t = 4.0 \text{ s}$ ، اور سمت t پر بنائیں، اور بتائیں ان لحات پر گھومنے کارخ اور ω کی علامت کیا ہوگی۔

کلیدی تصور

مساوات ۴.۶ کے تحت زاوی سمتی رفتار ω سے مراد $d\theta/dt$ ہے جو مساوات ۴.۱۰ دیتی ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱) \quad \omega = -0.600 + 0.500t$$

اس تفاعل، $\omega(t)$ ، کی ترمیم شکل 5c.10 میں پیش ہے۔ یہ تفاعل خطی ہے لہذا اس کی ترمیم ایک سیدھی لکیر ہے۔ ترمیم کی ڈھلوان 0.500 rad s^{-2} ہے اور انتہائی محور (جو دکھایا نہیں گیا) کو ترمیم $-0.600 \text{ rad s}^{-1}$ پر قطع کرتی ہے۔

حاجے: متروص کا حنا کہ $t = -2.0 \text{ s}$ پر بنانے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۱ میں یہ قیمت ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(جواب) \quad \omega = -1.6 \text{ rad s}^{-1}$$

منفی کی علامت کہتی ہے کہ $t = -2.0 \text{ s}$ پر متحرک گھڑی وار (منفی رخ) گھوم رہا ہے (جیسا شکل 5c.10 میں دائیں ہاتھ کے حلقے میں دکھایا گیا ہے)۔

مسوالت ۴.۱۱ میں $t = 4.0 \text{ s}$ ڈال کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\omega = 1.4 \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{جواب})$$

مغز مثبت علامت کہتی ہے متحرک مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھوم رہا ہے (شکل 5c.10 میں دائیں ہاتھ کے حلقے)۔

کسیر t کے لئے ہم جانتے ہیں $d\theta/dt = 0$ ہوگا۔ جب حوالہ لکیر، شکل 5b.10 میں θ میں θ کی کم سے کم قیمت کو پہنچتی ہے، متحرک لمحاتی رکتا ہے، جیسا شکل 5c.10 میں وسطی حلقہ عندیہ دیتا ہے۔ شکل 5c.10 میں ω بالمتقابل t کی ترسیم پر صفر نقطہ، جہاں ترسیم منفی (گھڑی وار) گھماؤ سے مثبت (خلاف گھڑی) گھماؤ کا آغاز کرتی ہے، وہ نقطہ ہے جہاں متحرک لمحاتی رکتا ہے۔

(د) جب زوایا جزوج کے نتائج استعمال کر کے $t = -3.0 \text{ s}$ و $t = 6.0 \text{ s}$ پر متحرک کی حرکت بیان کریں۔

بیان: جب ہم، $t = -3.0 \text{ s}$ پر، متحرک پر پہلی مرتبہ نظر ڈالتے ہیں، اس کا زاویہ مقام مثبت، گھماؤ گھڑی وار اور رفتار میں کی دیکھنے کو ملتی ہے۔ یہ $\theta = -1.36$ ریڈین پر لمحاتی رکنے کے بعد خلاف گھڑی گھومنا شروع کرتا ہے اور آخر کار اس کا زاویہ مقام دوبارہ مثبت ہوتا ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۲: زاویہ اسراع سے زاویہ سمتی رفتار کا حصول

ایک بچہ لٹو ذیل زاویہ اسراع سے گھماتا ہے، جہاں t اور α بالترتیب سیکنڈ اور ریڈین فی مربع سیکنڈ میں ہے۔

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

لحظہ $t = 0$ پر لٹو کی زاویہ سمتی رفتار 5 rad s^{-1} ، اور حوالہ لکیر کا زاویہ مقام $\theta = 2$ ریڈین ہے۔

(۱) لٹو کی زاویہ سمتی رفتار $\omega(t)$ کا ریاضی فترہ حاصل کریں؛ یعنی ایسا تقاضا عمل معلوم کریں جو وقت پر زاویہ سمتی رفتار کا انحصار صریحاً دے۔ (ہم جانتے ہیں ایسا تقاضا عمل موجود ہے چونکہ لٹو زاویہ اسراع سے گزر رہا ہے؛ یوں اس کی زاویہ سمتی رفتار تبدیل ہوگی۔)

کلیدی تصور

$\alpha(t)$ تعریف کے روئے $\omega(t)$ کا وقتی تفرق ہوگا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\alpha(t)$ کا کھل $\omega(t)$ دیگا۔

حاجہ: مساوات ۴.۸ ذیل کہتی ہے

$$d\omega = \alpha dt$$

لہذا

$$\int d\omega = \int \alpha dt$$

ہوگا جو ذیل کے گی، جہاں C مکمل کا مستقل ہے۔

$$\omega = \int (5t^3 - 4t) dt = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$$

ہم جانتے ہیں $t = 0$ پر $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ ہے؛ اس معلومات کو درج بالا میں ڈال کر:

$$5 \text{ rad s}^{-1} = 0 - 0 + C$$

مکمل کا مستقل $C = 5 \text{ rad s}^{-1}$ حاصل ہوگا۔ یوں درکار تفاعل ذیل ہوگا۔

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5 \quad (\text{جواب})$$

(ب) لٹو کے زاوی معتام $\theta(t)$ کا ریاضی فترہ تلاش کریں۔

کلیدی تصور

تعریف کے روئے $\theta(t)$ کا وقتی تفرق $\omega(t)$ دیگا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\omega(t)$ کا مکمل $\theta(t)$ دیگا۔
حاصل: مساوات ۴.۶ کے تحت:

$$d\theta = \omega dt$$

ہوگا جس سے ذیل لکھا جاسکتا ہے،

$$\begin{aligned} \theta &= \int \omega dt = \int \left(\frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5 \right) dt \\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

جہاں $t = 0$ پر $\theta = 2 \text{ rad}$ ہونے کی قیمت حاصل کی گئی۔

کیا زاویہ متا دیر سمتیات ہیں؟

ہم اکیلے ذرے کا مقام، سمتی رفتار، اور اسراع سمتیات سے بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ذرہ صرف ایک محور پر حرکت کرتا ہو، سمتی ترقیم استعمال کرنا ضرورت نہیں۔ ایسے ذرے کو صرف دو رخ دستیاب ہیں جنہیں مثبت اور منفی علامت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اسی طرح استوار جسم و فائزہ محور پر، محور کے ہمسراہ دیکھتے ہوئے، صرف خلاف گھڑی اور گھڑی وار گھوم سکتا ہے۔ ان رخ کو ہم مثبت اور منفی سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں ایک سوال اٹھتا ہے: ”کیا ہم گھومتے جسم کے زاویہ ہٹاؤ، زاویہ سمتی رفتار، اور زاویہ اسراع کو سمتیات سمجھ سکتے ہیں؟“ اس کا جواب ہے ”جی ہاں“ (زاویہ ہٹاؤ کے لئے نیچے پیش انتباہ ضرور دیکھیں۔)

زاویہ سمتی رفتار۔ زاویہ سمتی رفتار کو دیکھیں۔ شکل 6a.10 میں $\omega = 33\frac{1}{3}$ چکر فی سیکنڈ کی مستقل زاویہ رفتار سے گھڑی وار رخ گھومتا ہوا مترص دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل 6b.10 میں دکھایا گیا ہے، ہم اس کی سمتی زاویہ رفتار گھماؤ کے محور پر سمتیہ $\vec{\omega}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس کا طریقہ کار یوں ہے: سمتیہ کی لمبائی کسی موزوں پیمائش کے تحت رکھی جاتی ہے، مثلاً 1 cm کو 10 چکر فی منٹ کی مطابقت سے رکھ جاسکتا ہے۔ اس کے بعد $\vec{\omega}$ کا رخ تعین کرنے کے لئے ہم دائیں ہاتھ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں، جو شکل 6c.10 میں پیش ہے: مترص کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ انگلیاں گھماؤ کے رخ ہوں۔ آپ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا زاویہ سمتی رفتار کے سمتیہ کارن دیگا۔ اگر مترص مخالف رخ گھومے، دائیں ہاتھ کا قاعدہ کے تحت $\vec{\omega}$ بھی مخالف رخ ہوگا۔

زاویہ متا دیر سمتیات سے ظاہر کرنے کی عادت مشکل سے ڈلتی ہے۔ ہم فوراً سوچتے ہیں کہ سمتیہ کے ہمسراہ کوئی چیز حرکت کرے گی۔ یہاں ایسا نہیں ہوگا۔ اس کے بجائے کوئی چیز (جیسا استوار جسم) سمتیہ کے رخ کے گرد گھومتی ہے۔ حناص گھماؤ کی دنیا میں، سمتیہ کارن کسی چیز کی حرکت کارن نہیں بلکہ گھماؤ کی محور دیگا۔ ہمسراہ حال، سمتیہ حرکت بھی تعین کرتا ہے۔ مزید، یہ سمتیات سلجھانے کے ان تمام قواعد کی تعمیل کرتا ہے جو باب 3 میں پیش کیے گئے۔ زاویہ اسراع α بھی ایک سمتیہ ہے، اور یہ بھی ان قواعد کی تعمیل کرتا ہے۔

اس باب میں صرف و فائزہ محور پر گھماؤ کی بات کی جائے گی۔ ان میں سمتیات استعمال کرنے کی ضرورت نہیں؛ ہم زاویہ سمتی رفتار کو ω اور زاویہ اسراع کو α سے ظاہر کر کے، خلاف گھڑی گھماؤ کو مثبت اور گھڑی وار گھماؤ کو منفی کی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

زاویہ ہٹاؤ۔ پہلے انتباہ کی بات کرتے ہیں: زاویہ ہٹاؤ (ماسوائے انتہائی چھوٹا ہٹاؤ) کو سمتیہ سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ کیوں نہیں؟ ہم یقیناً اس کے رخ اور قدر کی بات کر سکتے ہیں، جیسا شکل 6.10 میں زاویہ سمتی رفتار کے لئے کیا گیا۔ تاہم، سمتیہ سے ظاہر کیے جانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ مقدار سمتیہ جمع کے قواعد پر پورا اترتی ہو۔ ان قواعد میں ایک قاعدہ کہتا ہے کہ سمتیات جمع کرتے وقت ان کی ترتیب غبیر ضروری ہے۔ زاویہ ہٹاؤ اس قاعدہ پر پورا نہیں اترتا۔

شکل 7.10 میں دی گئی مثال پر غور کریں۔ ایک کتاب کو، جو ابتدائی طور پر افقی پڑی ہے، دو مرتبہ 90° زاویہ ہٹاؤ سے گزارا گیا ہے: ایک مرتبہ شکل 7a.10 اور دوسری مرتبہ شکل 7b.10 کی طرح۔ دونوں میں ہٹاؤ برابر، لیکن ترتیب ایک نہیں، اور آخر میں کتاب ایک حسی سمت بند نہیں۔ دوسری مثال لیتے ہیں۔ دایاں

ہاتھ لٹکا کر ہتھیلی ران پر رکھیں۔ کلائی سخت کر کے، (1) بازو سامنے اتنا اٹھائیں کہ افقی ہو، (2) اس کو پورا دائیں لے جائیں، اور (3) اس کے بعد ہاتھ واپس نیچے ران تک لے جائیں۔ آپ کی ہتھیلی اب سامنے رخ ہوگی۔ اگر آپ یہی عمل الٹ ترتیب سے دہرائیں، آپ کی ہتھیلی آخر میں کس رخ ہوگی؟ ان مثال سے ہم دیکھتے ہیں کہ زاوی ہٹاؤ کا مجموعہ انہیں جمع کرنے کی ترتیب پر منحصر ہے، لہذا ہٹاؤ کو سمتیہ تصور نہیں کیا جاسکتا۔

۴.۲ مستقل اسراع کے ساتھ گھاو

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مقابیل ہوں گے۔

۱. مستقل زاوی اسراع کی صورت میں زاوی مقام، زاوی ہٹاؤ، زاوی سمتی رفتار، زاوی اسراع، اور گزرے دار اپنے کے تعلق (جدول ۴.۱) استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

• مستقل زاوی اسراع (جس میں α مستقل ہوگا) گھاو حرکت کی ایک اہم خصوصی صورت ہے، جس کی ممبرد حرکیات مساوات ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \\ \theta - \theta_0 &= \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2\end{aligned}$$

مستقل زاوی اسراع کا گھاو

مستقیم حرکت میں مستقل خطی اسراع کی حرکت (مثلاً، زمین پر گرتا ہوا جسم) ایک اہم خصوصی صورت ہے۔ جدول 1.2 میں اس طرح کی حرکت کو مطمئن کرتی مساوات پیش کی گئیں۔

حاصل گھاو میں مستقل زاوی اسراع ایک اہم خصوصی صورت ہے؛ اس کو مطمئن کرنے والی مطابقتی مساوات پائی جاتی ہیں۔ ہم انہیں یہاں اخذ نہیں کریں گے، بلکہ مطابقتی خطی مساوات میں مساوی زاوی متغیرات ڈال کر انہیں پیش کرتے ہیں۔ جدول ۴.۱ میں مساوات کی دونوں فہرست (مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 تا مساوات 18.2؛ مساوات ۴.۱۲ تا مساوات ۴.۱۶) پیش کی گئی ہیں۔

یاد رہے مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 مستقل خطی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جاسکتی ہیں۔ اس طرح، مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ مستقل زاوی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے زاوی مساوات کی فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جاسکتی ہیں۔ مستقل

جدول ۴.۱: مستقل خطی اسراع اور مستقل زاوی اسراع کی حرکت کی مساوات

خطی مساوات	زاوی مساوات
(2.11) $v = v_0 + at$	(۴.۱۲) $\omega = \omega_0 + \alpha t$
(2.15) $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۳) $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(2.16) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	(۴.۱۴) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
(2.17) $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	(۴.۱۵) $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
(2.18) $x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۶) $\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

زاوی اسراع کا سادہ مسئلہ حل کرنے کے لئے آپ عموماً زاوی فہرست سے (اگر یہ فہرست آپ کے پاس موجود ہو) ایک مساوات استعمال کر پائیں گے۔ آپ وہ مساوات منتخب کریں گے جس میں صرف وہ متغیر غیر معلوم ہو جو آپ کو درکار ہو۔ بہتر طریقہ یہ ہوگا کہ آپ مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ یاد کر لیں اور جب ضرورت پیش آئے، انہیں بطور ہمزاد مساوات حل کریں۔

آزمائش ۲

گھومے جسم کا زاوی مقام $\theta(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\theta = 3t - 4$ ، (ب) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$ ، (ج) $\theta = 2/t^2 - 4/t$ اور (د) $\theta = 5t^2 - 3$ ہے۔ جدول ۴.۱ کی زاوی مساوات کا اطلاق کن صورتوں پر ہوگا؟

نمونہ سوال ۴.۳: مستقل زاوی اسراع، چمک کا پاٹے

شکل 8.10 میں پاٹے مستقل زاوی اسراع $\alpha = 0.34 \text{ rad s}^{-2}$ سے گھوم رہا ہے۔ وقت $t = 0$ پر اس کی زاوی سمتی رفتار $\omega_0 = -4.6 \text{ rad s}^{-1}$ ہے، اور اس پر کھینچی گئی حوالہ لکیر کا مقام $\theta_0 = 0$ ہے۔

(ا) وقت $t = 0$ سے کتنی دیر بعد حوالہ لکیر زاوی مقام $\theta = 5.0$ چکر پر ہوگی؟

کلیدی تصویر

چونکہ زاوی اسراع مستقل ہے لہذا ہم جدول ۴.۱ سے مساوات چن سکتے ہیں۔ ہم مساوات ۴.۱۳

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

کا انتخاب اس لئے کرتے ہیں کہ اس میں صرف ایک متغیر، t ، نامعلوم ہے اور ہمیں یہی درکار ہے۔

حماچہ: دی گئی معلومات ڈال کر اور $\theta_0 = 0$ اور $5.0 = 10\pi \text{ rad}$ چکر θ لیتے ہوئے ذیل ہوگا۔

$$10\pi \text{ rad} = (-4.6 \text{ rad s}^{-1})t + \frac{1}{2}(0.35 \text{ rad s}^{-2})t^2$$

(انکسوں کے ثبات کی خاطر ہم 5.0 چکر کو 10π ریڈین میں تبدیل کرتے ہیں۔) اس دودرجی الجبرائی مساوات کو حل کرنے سے ذیل حاصل ہوگا۔

$$t = 32 \text{ s} \quad (\text{جواب})$$

ان ایک عجیب بات پر غور کریں۔ جب ہم پہلی مرتبہ پاٹ پر نظر ڈالتے ہیں یہ منفی رخ گھوم کر $\theta = 0$ سمت بند مقام سے گزرتا ہے۔ اس کے باوجود 32 s بعد ہم اسے $\theta = 5.0$ چکر مثبت سمت بند مقام پر پاتے ہیں۔ اس دورانیے میں ایسا کیا ہوا کہ پاٹ مثبت سمت بند مقام پر ہو سکتا ہے؟

(ب) وقت $t = 0$ اور $t = 32 \text{ s}$ کے بیچ پاٹ کے گھماؤ پر تبصرہ کریں۔

تبصرہ: پاٹ ابتدائی طور پر منفی (گھڑی وار) رخ -4.6 rad s^{-1} $\omega_0 =$ زاوی رفتار سے حرکت کرتا ہے، تاہم اس کا زاوی اسراع α مثبت ہے۔ ابتدائی زاوی رفتار اور زاوی اسراع کی علامتیں الٹ ہونے کی بدولت پاٹ منفی رخ چلتے چلتے بتدریج آہستہ ہوتے رک کر مثبت رخ گھومنا شروع کرتا ہے۔ حوالہ لکیر مثبت رخ چل کر $\theta = 0$ مقام سے دوبارہ گزرتی ہے اور $t = 32 \text{ s}$ گزرنے تک مثبت رخ مزید 5.0 چکر کاٹ چکا ہوتا ہے۔

(ج) پاٹ کس وقت t پر لمحائی رکتا ہے؟

حماچہ: ہم دوبارہ زاوی مساوات کی فہرست پر نظر ڈالتے ہیں اور ایسی مساوات لینا چاہتے ہیں جس میں صرف t نامعلوم متغیر ہو۔ تاہم، اب مساوات میں ω کا ہونا بھی ضروری ہے، تاکہ ہم اس کو 0 لے کر مطابقتی t کے لئے حل کریں۔ ہم مساوات ۴.۱۲ منتخب کرتے ہیں، جو ذیل دیگی۔

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4.6 \text{ rad s}^{-1})}{0.35 \text{ rad s}^{-2}} = 13 \text{ s} \quad (\text{جواب})$$

□

نمونہ سوال ۴.۴: مستقل زاوی اسراع، پیسے کے سوار

تفریح گاہ میں ایک بڑا پہیا چلاتے ہوئے آپ کی نظر پیسے پر سوار ایک شخص پر پڑتی ہے جو پریشان نظر آتا ہے۔ آپ پیسے کی زاوی سمتی رفتار مستقل زاوی اسراع کے ساتھ 3.40 rad s^{-1} سے 20.0 چکروں میں کم کر کے 2.00 rad s^{-1} کرتے ہیں۔ (اس شخص کو ”گھومت شخص“ تصور کرنے سے ”مستقیم حرکت کرتا شخص“ کہنا زیادہ بہتر ہوگا۔)

(ا) زاوی سمتی رفتار کی کمی کے دوران مستقل زاوی اسراع کیا ہوگی؟

کلیدی تصور

پہلے کی زاوی اسراع مستقل ہے، لہذا ہم اس کی زاوی مستقیم رفتاری اور زاوی ہٹاؤ کا تعلق مستقل زاوی اسراع کی مساوات (مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳) سے جان سکتے ہیں۔

حاجے: آئیں دیکھیں آیا ہم ان بنیادی مساوات کو حل کر پائیں گے۔ ابتدائی زاوی مستقیم رفتاری ω_0 $\omega = 2.00 \text{ rad s}^{-1}$ ، زاوی ہٹاؤ 20.0 چکر $\theta - \theta_0$ ، اور ہٹاؤ کے آخر پر زاوی مستقیم رفتاری $\omega = 2.00 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔ ہم مستقل زاوی اسراع α جاننا چاہتے ہیں۔ دونوں مساوات میں وقت t پایا جاتا ہے، جس میں ضروری نہیں ہم دلچسپی رکھتے ہوں۔

نامعلوم t خارج کرنے کے لئے ہم مساوات ۴.۱۲ سے

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۳ میں ڈالتے ہیں۔

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2$$

α کے لئے حل کر کے، دی گئی معلومات پر کر کے، اور 20.0 چکر کو 125.7 rad میں بدل کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2.00 \text{ rad s}^{-1})^2 - (3.40 \text{ rad s}^{-1})^2}{2(125.7 \text{ rad})} \\ &= -0.0301 \text{ rad s}^{-2} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) رفتاری کتنے وقت میں کم کی گئی؟

حاجے: چونکہ اب ہم α جانتے ہیں، مساوات ۴.۱۲ استعمال کر کے t حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2.00 \text{ rad s}^{-1} - 3.40 \text{ rad s}^{-1}}{-0.0301 \text{ rad s}^{-2}} \\ &= 46.5 \text{ s} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

۴.۳ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مقابل ہوں گے۔

۱. متائم محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کے زاوی متغیرات (زاوی مقام، زاوی سمتی رفتار، اور زاوی اسراع) کا جسم پر ایک ذرے، جو کسی رداس پر پایا جاتا ہو، کے خطی متغیرات (مقام، سمتی رفتار، اور اسراع) کے ساتھ تعلق جان پائیں گے۔

۲. مماسی اسراع اور رداسی اسراع میں تمیز کر پائیں گے، اور کسی محور پر گھومتے ہوئے جسم پر موجود ذرے کے لئے بڑھتی زاوی رفتار اور گھسٹی زاوی رفتار کی صورت میں دونوں کے سمتیہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

• گھومتے جسم پر محور گھماوے عمودی فاصلہ r پر پائے جانے والا نقطہ، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ گھومے، یہ نقطہ درج ذیل قوسی فاصلہ s طے کرے گا، جہاں θ ریڈین میں ناپا جائے گا۔

$$s = \theta r \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

• اس نقطے کا خطی سمتی رفتار \vec{v} دائرے کو مماسی ہوگا؛ نقطے کا خطی رفتار ذیل ہوگا، جہاں ω جسم اور نقطے کا (ریڈین فی سیکنڈ) زاوی رفتار ہے۔

$$v = \omega r \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

• اس نقطے کے خطی اسراع \vec{a} کے دو حصے ہوں گے؛ ایک مماسی جسم اور رداسی جسم۔ مماسی جسم ذیل ہوگا، جہاں α جسم کے (ریڈین فی مربع سیکنڈ میں) زاوی اسراع کی قدر ہے۔

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

رداسی جسم ذیل ہوگا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

• اگر یہ نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، اس نقطے اور جسم کا دوری عرصہ T ذیل ہوگا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ریڈین ناپ})$$

خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

محور گھماوے کے گرد دائرے پر مستقل خطی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی یکساں دائری حرکت پر حصہ 5.4 میں غور کیا گیا۔ جب استوار جسم کسی محور پر گھومتا ہے، جسم کا پھر ذرا اپنے ایک دائرے پر اسی محور کے گرد گھومتا ہے۔ چونکہ جسم استوار (بلا لچک) ہے، ایسے تمام ذرے ہم قدم چل کر ایک جتنے وقت میں ایک چکر مکمل کرتے ہیں؛ ان سب کی زاوی رفتار ω برابر ہے۔

تاہم، ایک ذرہ جتنا محور سے دور ہوگا، اتنا اس کے دائرے کا محیط بڑا ہوگا، لہذا اس کی خطی رفتار v اتنی زیادہ ہوگی۔ گھومنے والے جھولے^{۱۲} پر بیٹھ کر آپ اسے محسوس کر سکتے ہیں۔ مرکز سے جتنے فاصلے پر بھی آپ ہوں، آپ کی زاوی رفتار ω ایک جتنی ہوگی، تاہم مرکز سے دور ہونے پر آپ کی خطی رفتار v بڑھے گی۔

ہم جسم پر کسی مخصوص نقطے کے خطی متغیرات s ، v ، a اور θ ، ω ، اور α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں۔ متغیرات کی ان فہرست کا رشتہ محور گھماوے نقطے کے عمودی فاصلہ r کے ذریعے ہوگا۔ یہ عمودی فاصلہ، نقطے اور محور گھماوے کے بیچ عمودی لکیر پر ناپا جائے گا۔ یہ فاصلہ اس دائرے کا رداس r ہوگا جس پر محور گھماوے کے گرد نقطہ حرکت کرتا ہے۔

مستام

اگر استوار جسم پر کھینچی گئی حوالہ لکیر زاویہ θ گھومے، محور گھماوے r فاصلے پر موجود جسم کے اندر نقطہ دائری قوس پر فاصلہ s طے کرے گا، جہاں s کی قیمت مساوات ۳.۱۲ دیتی ہے۔

$$s = \theta r \quad (\text{ریڈین ناپ}) \quad (3.12)$$

مساوات ۳.۱۲ ہمارا پہلی خطی و زاوی تعلق ہے۔ انتباہ: زاویہ θ کا ناپ ریڈین میں لازمی ہے چونکہ درج بالا مساوات زاویے کے ریڈین میں ناپ کی تعریف ہے۔

رفتار

رداس r کو مستقل رکھ کر وقت کے ساتھ مساوات ۳.۱۲ کا تفریق ذیل دیگا۔

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

لیکن، ds/dt نقطے کی خطی رفتار (خطی سمتی رفتار کی قدر)، اور $d\theta/dt$ گھومتے جسم کی زاوی رفتار ω ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$v = \omega r \quad (\text{ریڈین ناپ}) \quad (3.18)$$

انتباہ: زاوی رفتار ω لازماً ریڈین فی سیکنڈ میں ناپی جائے گی۔

استوار جسم کے تمام اندرونی نقطے ایک زاوی رفتار ω سے گھومتے ہیں لہذا مساوات ۳.۱۸ کہتی ہے زیادہ رداس r پر واقع نقطے کی خطی رفتار v زیادہ ہوگی۔ شکل 9a.10 ہمیں یاد دلاتی ہے کہ ہر نقطے کی خطی سمتی رفتار ہمیشہ نقطے کی دائری راہ کو مماسی ہوگی۔

اگر جسم کا زاوی رفتار ω مستقل ہو، مساوات ۳.۱۸ کہتی ہے جسم کے اندر نقطے کی خطی رفتار v بھی مستقل ہوگی۔ یوں، جسم کے اندر موجود ہر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہے۔ استوار جسم کے ہر اندرونی نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T مساوات 35.4 ذیل دیتی ہے۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (3.19)$$

اس مساوات کے تحت، ایک چکر کے فاصلے $2\pi r$ کو اس رفتار سے تقسیم کر کے جس سے فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہوگا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر r منسوخ کر کے ذیل حاصل ہوگا۔

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۰)$$

یہ معادل مساوات کہتی ہے ایک چکر کا زاوی فاصلہ، 2π ریڈیئن، اس زاوی رفتار سے تقسیم کر کے، جس سے زاوی فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہوگا۔

اسراع

رداس r مستقل رکھ کر t کے لحاظ سے مساوات ۴.۱۸ کا تفسیق ذیل دیگا۔

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \quad (۴.۲۱)$$

یہاں ہم ایک پیچیدگی کا سامنا کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱ کا بائیں ہاتھ dv/dt خطی اسراع کے صرف اس حصے کو ظاہر کرتا ہے جو خطی سمتی رفتار v کی تبدیلی کا ذمہ دار ہے۔ سمتی رفتار v کی طرح خطی اسراع کا یہ حصہ نقطے کی راہ کو ماسی ہوگا۔ ہم اسے خطی اسراع کا ماسی جزو a_t کہہ کر ذیل لکھتے ہیں، جہاں $\alpha = d\omega/dt$ ہے۔

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۲)$$

انتباہ: مساوات ۴.۲۲ میں زاوی اسراع α کارڈیئن ناپ میں ہونا لازم ہے۔ ساتھ ہی، جیسا مساوات 34.4 ہمیں بتاتی ہے، دائری راہ پر گامزن ذرے (یا نقطے) کے خطی اسراع کا (رداسی مرکز کے رخ) رداسی جزو $a_r = \frac{v^2}{r}$ ہوگا، جو خطی سمتی رفتار v کے رخ میں تبدیلی کا ذمہ دار ہوگا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر یہ جزو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۳)$$

یوں، جیسا شکل 9b.10 میں دکھایا گیا ہے، استوار گھومتے جسم پر نقطے کے خطی اسراع کے عموماً دو جزو ہوں گے۔ جب بھی جسم کی زاوی سمتی رفتار غیر صفر ہو، رداسی اندر کی طرف کا جزو a_r موجود ہوگا (جو مساوات ۴.۲۳ دیتی ہے)۔ ماسی جزو a_t (جو مساوات ۴.۲۱ دیتی ہے) اس صورت ہوگا جب زاوی اسراع غیر صفر ہو۔

آزمائش ۳

گھومنے والے جھولے کے حلقہ پر چوٹی بیٹھی ہے۔ اگر اس نظام (گھومنا والا جھولا چوٹی) کی زاوی سمتی رفتار مستقل ہو، کیا چوٹی کا (۱) رداسی اسراع اور (ب) ماسی اسراع ہوگا؟ اگر ω گھٹ رہی ہو، کیا چوٹی کا (ج) رداسی اسراع اور (د) ماسی اسراع ہوگا؟

نمونہ سوال ۴.۵: تفریق گاہ میں ایک بڑے حلقہ کے بناوٹ

ہمیں ایک بڑا افقی حلقہ، جس کا رداس 33.1 m ہوگا، بنانے کو کہا گیا ہے جو انتہائی دھرے پر چلے

گا۔ (یہ چین میں موجود دنیا کے سب سے بڑے پیچے جتنا ہو گا۔) سوار حلقے کے بیرونی دیوار میں موجود دروازے سے داخل ہو کر اس دیوار کے ساتھ کھڑے ہوں گے (شکل 10a.10)۔ حلقے پر حوالہ لکیر کا زاوی معتام $\theta(t)$ لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = 2.30 \text{ s}$ تک ذیل دیتی ہے، جہاں $c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3}$ ہے۔

$$\theta = ct^3 \quad (۳.۲۴)$$

لمحہ $t = 2.30 \text{ s}$ کے بعد جھولنے کے پھیرا مکمل ہونے تک زاوی رفتار مستقل رکھی جائے گی۔ گھومنا شروع ہونے کے بعد، سوار کے پاؤں تلے فرسش ہشادی جائے گی، لیکن وہ گرے گا نہیں؛ بلکہ وہ دیوار کے ساتھ مغبوطی سے جکڑا محسوس کرے گا۔ لمحہ $t = 2.20 \text{ s}$ پر شخص کی زاوی رفتار ω ، خطی رفتار v ، زاوی اسراع α ، مماسی اسراع a_t ، رداسی اسراع a_r ، اور اسراع \vec{a} تلاش کرتے ہیں۔

کلیدی تصور

(1) مساوات ۳.۶ زاوی رفتار ω دیتی ہے۔ (2) مساوات ۳.۱۸ (دائری راہ پر) خطی رفتار v اور (محور گھماؤ کے گرد) زاوی رفتار ω کا تعلق $v = \omega r$ دیتی ہے۔ (3) مساوات ۳.۸ زاوی اسراع α دیتی ہے $\alpha = d\omega/dt$ ۔ (4) مساوات ۳.۲۲ (دائری راہ کے ہمسرا) مماسی اسراع a_t اور (محور گھماؤ کے گرد) زاوی اسراع α کا تعلق $a_t = \alpha r$ دیتی ہے۔ (5) مساوات ۳.۲۳ رداسی اسراع $a_r = \omega^2 r$ دیتی ہے۔ (6) مماسی اور رداسی اسراع پورے اسراع \vec{a} کے دو آپس میں عمودی جزوی ہیں۔

حماچہ: آئیں ان اقدام سے گزریں۔ دیے گئے زاوی معتام تفاسل کا وقتی تفسیق لے کر $t = 2.20 \text{ s}$ پر کر کے زاوی مستقی رفتار معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(ct^3) = 3ct^2 \\ (۳.۲۵) \quad &= 3(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})(2.20 \text{ s})^2 \\ &= 0.928 \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

مساوات ۳.۱۸ اس لمحے کی ذیل خطی رفتار دیگی۔

$$\begin{aligned} v &= \omega r = 3ct^2 r \\ (۳.۲۶) \quad &= 3(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})(2.20 \text{ s})^2(33.1 \text{ m}) \\ &= 30.7 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

اگرچہ یہ رفتار (111 km h^{-1}) تیز ہے، ایسی رفتار تفسیق گاہوں میں عام ہیں، اور خطرے کا باعث نہیں؛ (جیسا باب 2 میں ذکر کیا گیا) ہمارا جسم اسراع کو رد عمل کرتا ہے، خطی رفتار کو نہیں (ہم رفتار پیسا نہیں سرعت پیسائیں)۔ مساوات ۳.۲۶ کہتی ہے خطی رفتار، وقت کے مربع کے ساتھ بڑھے گی (تاہم یہ اضافہ $t = 2.20 \text{ s}$ پر رک جائے گا)۔

اس کے بعد، مساوات ۴.۲۵ کا وقت تفرق لے کر زاوی اسراع معلوم کرتے ہیں۔

$$\alpha = \frac{d\omega}{dr} = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct$$

$$= 6(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})(2.20 \text{ s}) = 0.843 \text{ rad s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

اب مساوات ۴.۲۲ مماسی اسراع a_t دیگی:

$$a_t = \alpha r = 6ctr$$

$$(۴.۲۷) \quad = 6(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})(2.20 \text{ s})(33.1 \text{ m})$$

$$= 27.91 \text{ m s}^{-2} \approx 27.9 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

جو $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ جہاں g ہے، کے برابر ہے (جو مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔ مساوات ۴.۲۷ کہتی ہے مماسی اسراع وقت کے ساتھ بڑھ رہا ہے (تاہم یہ اضافہ $t = 2.30 \text{ s}$ پر رک جائے گا)۔ مساوات ۴.۲۳ سے رداسی اسراع لکھتے کر:

$$a_r = \omega^2 r$$

مساوات ۴.۲۵ سے $\omega = 3ct^2$ ڈالتے ہیں:

$$a_r = (3ct^2)^2 r = 9c^2 t^4 r$$

$$(۴.۲۸) \quad = 9(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})^2 (2.20 \text{ s})^4 (33.1 \text{ m})$$

$$= 28.49 \text{ m s}^{-2} \approx 28.5 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

جو $2.9g$ دیتا ہے (یہ بھی مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔

رداسی اور مماسی اسراع ایک دوسرے کو عمودی ہیں اور سوار کے اسراع \vec{a} کے جنزویں (شکل 10b.10)۔ اسراع \vec{a} کی مقدار ذیل ہوگی:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

$$(۴.۲۹) \quad = \sqrt{(28.49 \text{ m s}^{-2})^2 + (27.91 \text{ m s}^{-2})^2}$$

$$\approx 39.9 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

جو $4.1g$ کے برابر ہے (یہ یقیناً پُر لطف ہوگا!)۔ یہ تمام مقادیر مناسب ہیں۔ اسراع \vec{a} کی سمت بندی جاننے کے لئے ہم زاویہ θ معلوم کرتے ہیں (شکل 10b.10)۔

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_r}$$

آئیں اعدادی نتائج پُر کرنے کی بجائے ہم مساوات ۴.۲ اور مساوات ۴.۲۸ کے الجبرائی نتائج استعمال کرتے ہیں۔

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{6ctr}{9c^2t^4r} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3ct^3} \right) \quad (۴.۳۰)$$

ریاضی نتیجے کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ (1) زاویے پر رداس کا کوئی اثر نہیں ہوگا اور (2) اس کی قیمت t کی قیمت 0 تا 2.20 s بڑھانے سے گھٹتی ہے۔ رداسی اسراع (جو t^4 پر منحصر ہے) بہت جلد مماسی اسراع (جو صرف t پر منحصر ہے) پر غالب ہو کر سمتیہ اسراع \vec{a} کو رداسی رخ موڑتا ہے۔ وقت $t = 2.20$ s پر ذیل ہوگا۔

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3(6.39 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-3})(2.20 \text{ s})^3} = 44.4^\circ \quad (\text{جواب})$$

□

۴.۴ گھماؤ کی حرکتی توانائی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے متاثر ہوں گے۔

۱. ذرے کا گھمیری جود نقطہ پر تلاش کرپائیں گے۔

۲. متاثرہ محور کے گرد گھومتے ہوئے متعدد ذروں کا کل گھمیری جود تلاش کرپائیں گے۔

۳. گھمیری جود اور زاوی رفتار کی صورت میں جسم کی گھمیری حرکت کی توانائی تعین کرپائیں گے۔

کلیدی تصویر

• متاثرہ محور پر گھومتے استوار جسم کی حرکتی توانائی K ذیل ہوگی،

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{ریڈیئین ناپ})$$

جہاں I جسم کا گھمیری جود کہلاتا ہے، جس کی تعریف انفرادی ذروں کے نظام کے لئے درج ذیل ہے۔

$$I = \sum m_i r_i^2$$

گھماؤ کی حرکتی توانائی

میسز آرا کا تیزی سے گھومتا دھار دار پھسل بقیہ گھومنے کی بنا حرکتی توانائی رکھتا ہے۔ ہم اس توانائی کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں؟ ہم توانائی کے عمومی کلیہ $K = \frac{1}{2} mv^2$ سے پورے آرا کی حرکتی توانائی حاصل نہیں کر سکتے چونکہ یہ آراء کے مرکز کمیت کی حرکتی توانائی دیکھ، جو صفر ہے۔

اس کے بجائے، میز آرا (اور کسی بھی دوسرے گھومتے استوار جسم) کو ہم مختلف رفتار سے حرکت کرتے ذروں کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔ ان ذروں کی انفرادی حرکی توانائیاں جمع کر کے پورے جسم کی حرکی توانائی حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں گھومتے جسم کی حرکی توانائی ذیل ہوگی،

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots$$

$$(۴.۳۱) \quad = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

جہاں i ویں ذرے کی کیت m_i اور رفتار v_i ہے۔ مجموعہ جسم کے تمام ذروں پر لیا جائے گا۔
 مساوات ۴.۳۱ میں مشکل یہ ہے کہ ہر ذرے کی رفتار دوسرے سے مختلف ہو سکتی ہے۔ اس مشکل سے بچنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۸ سے $v = \omega r$ ڈال کر ذیل لکھتے ہیں، جس میں ω تمام ذروں کے لئے برابر ہے۔

$$(۴.۳۲) \quad K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2$$

مساوات ۴.۳۲ میں دائیں ہاتھ قوسین میں بند مقدار، محور گھماؤ کے لحاظ سے گھومتے جسم کی کیت کی تقسیم پیش کرتی ہے۔ یہ مقدار، محور گھماؤ کے لحاظ سے گھومتے جسم کا گھمیریہ جمود^{۱۳} (یا جمودی معیار اثر^{۱۴}) کہلاتا ہے، جس کو ہم I سے ظاہر کرتے ہیں۔ محور گھماؤ کے لحاظ سے جسم کے I کی قیمت اٹل ہوگی۔ (انتباہ: I کی قیمت صرف اس صورت بامعنی ہوگی جب اس محور کا ذکر کیا جائے۔) کسی دوسری محور گھماؤ پر اسی جسم کا I عموماً مختلف ہوگا، تاہم اب بھی اس کی قیمت مستقل ہوگی۔
 ہم ذیل لکھ کر،

$$(۴.۳۳) \quad I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{گھمیریہ جمود})$$

مساوات ۴.۳۲ میں ڈال کر مطلوبہ تعلق:

$$(۴.۳۴) \quad K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{ریڈینن ناپ})$$

حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $v = \omega r$ استعمال کر کے درج بالا تعلق حاصل کیا گیا لہذا ω کی قیمت ریڈینن ناپ میں لکھنی ضروری ہے۔ جمودی معیار اثر I کی اکائی کلوگرام مربع میٹر (kg m^2) ہے۔

طریقہ کار۔ اگر جسم چند ذروں پر مشتمل ہو، ہم ہر ذرے کی انفرادی حرکی توانائی mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ، مساوات ۴.۳۳ کی طرح، لے کر جسم کا کل گھمیریہ جمود I معلوم کر سکتے ہیں۔ جسم کی کل گھمیریہ حرکی توانائی جاننے کے لئے معلوم شدہ I کو مساوات ۴.۳۴ میں ڈالنا ہوگا۔ چند ذروں کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کیا

^{۱۳} rotational inertia
^{۱۴} moment of inertia

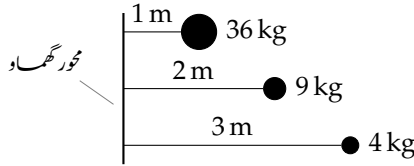
جائے گا: اگر جسم میں ذروں کی تعداد بہت زیادہ ہو (جیسا ایک سلاخ میں ہوگا) تب کیا ہوگا؟ اگلے حصے میں ہم اس قسم کے استمراری اجسام کو نیپٹا سکیں گے؛ منکمرت کریں، نتائج منٹوں میں حاصل ہوں گے۔

مساوات ۴.۳۴ جو خالص گھماؤ کی صورت میں استوار جسم کی توانائی $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ دیتی ہے، خالص مستقیم حرکت کی صورت میں جسم کی توانائی کلیہ مرکزیت $K = \frac{1}{2} M v^2$ کی زاوی معادل ہے۔ دونوں کلیوں میں $\frac{1}{2}$ جب زوضری پایا جاتا ہے۔ ایک کلیہ میں کیت M جبکہ دوسرے میں I (جس میں کیت اور کیت کی تقسیم دونوں شامل ہیں) پایا جاتا ہے۔ ساتھ ہی دونوں کلیوں میں رفتار کا مربع جمع پایا جاتا ہے (ایک میں مستقیم اور دوسرے میں زاوی)۔ مستقیم اور زاوی حرکت کی توانائی دو مختلف توانائیاں نہیں۔ دونوں حرکت کی توانائی ہے، تاہم مسئلہ دیکھ کر موزوں صورت اپنائی گئی ہے۔

ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ گھومتے جسم کا گھمیری جمود ناصرف کیت بلکہ کیت کی تقسیم پر بھی منحصر ہوگا۔ آئیں ایک ایسی مثال دیکھیں جس کو آپ حقیقتاً محسوس کر سکتے ہیں۔ ایک لمبی اور بھاری سلاخ، پہلے طوی محور پر (شکل 11a.10) اور اس کے بعد وسطی نقطہ سے گزرتی اور سلاخ کو عمودی محور پر (شکل 11b.10) گھمائیں۔ دونوں صورتوں میں کیت ایک جتنی ہے، تاہم پہلی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہوگا۔ پہلی صورت میں کیت کی تقسیم محور گھماؤ کے زیادہ قریب ہے؛ یوں شکل 11a.10 میں سلاخ کا گھمیری جمود شکل 11b.10 سے کم ہوگا جس کی بدولت شکل 11a.10 میں گھمانا زیادہ آسان ہوگا۔ کم گھمیری جمود کی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہوگا۔

آزمائش ۴

تین کرہ انتصابی محور کے گرد گھومتے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر کیت کے مرکز سے محور تک عمودی فاصلہ بھی دیا گیا ہے۔ اس محور پر گھمیری جمود کے لحاظ سے کیتوں کی درجہ بندی کریں۔ زیادہ قیمت اول رکھیں۔



۴.۵ گھمیری جمود کا حساب

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مقابل ہوں گے۔

۱. ان اجسام کا گھمیری جمود معلوم کر پائیں گے جو جدول 1.10 میں دیے گئے ہیں۔
۲. جسم کے کیت ٹکڑوں پر مکمل لے کر جسم کا گھمیری جمود تلاش کر پائیں گے۔
۳. جسم کے مرکز کیت سے گزرتی محور گھماؤ سے ہٹ کر متوازی محور کے لئے متوازی محور مسئلے کا اطلاق کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

• انفرادی ذروں پر مشتمل جسم کے گھمیری جھود کی تعریف:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

اور جس جسم میں کیت کی تقسیم استمراری ہو ذیل ہے۔

$$I = \int r^2 dm$$

انفرادی ذرے کا محور گھماؤ سے عمودی فاصلہ r_i ہے۔ اسی طرح مکمل میں کیت کے ٹکڑے کا محور گھماؤ سے عمودی فاصلہ r ہے اور مکمل پورے جسم پر لیا جاتا ہے تاکہ کیت کے تمام ٹکڑے شامل کیے جائیں۔

• کسی بھی محور پر جسم کے گھمیری جھود I اور مرکز کیت سے گزرتی متوازی محور پر اسی جسم کے گھمیری جھود کا تعلق:

$$I = I_{\text{مرکز کیت}} + Mh^2$$

مسئلہ متوازی محور دیتا ہے۔ دو محوروں کے بیچ عمودی فاصلہ h ہے، اور مرکز کیت سے گزرتی محور گھماؤ پر جسم کا گھمیری جھود مرکز کیت I ہے۔ مرکز کیت سے گزرتی محور گھماؤ سے جتنا دور اصل محور گھماؤ ہٹائی گئی، ہم h کو وہ فاصلہ تصور کر سکتے ہیں۔

گھمیری جھود کا حساب

چند ذروں پر مشتمل استوار جسم کا گھمیری جھود، محور گھماؤ پر، مساوات (۴.۳۳) $(I = \sum m_i r_i^2)$ دیتی ہے؛ یوں ہم ہر ذرے کا mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ لیتے ہیں۔ (یاد رکھیں کہ محور گھماؤ سے ذرے کا عمودی فاصلہ r ہوگا۔)

اگر جسم قریب قریب انتہائی زیادہ ذروں پر مشتمل ہو (جسم استمراری ہوگا)، مساوات (۴.۳۳) کا استعمال بہت لمبا کام ہوگا جس کے لئے کمپیوٹر درکار ہوگا۔ بہتر یہ ہوگا، ہم مساوات (۴.۳۳) کے مجموعہ کی جگہ مکمل لے کر گھمیری جھود کی تعریف ذیل کریں۔

$$(۴.۳۵) \quad I = \int r^2 dm \quad (\text{گھمیری جھود، استمراری جسم})$$

جدول 2.10 میں عام شکل و صورت کے نواحام کے لئے، مکمل کے نتائج پیش کیے گئے ہیں اور مشتمل محور گھماؤ کی نشاندہی کی گئی ہے۔

مسئلہ متوازی محور

فرض کریں ہم دی گئی محور گھماؤ پر ایک جسم کا، جس کی کمیت M ہو، گھمیری جمود I جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً، ہم مساوات ۴.۳۵ کے مکمل سے I حاصل کر سکتے ہیں۔ تاہم، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی ایسی محور گھماؤ، جو دی گئی محور کے متوازی ہو، پر گھمیری جمود مرکز کمیت I جاننے ہوئے، ایک آسان راستہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماؤ اور دی گئی محور کے بیچ عمودی فاصلہ h ہونے کی صورت میں (یاد رہے، دونوں محور آپس میں متوازی ہیں) دی گئی محور پر گھمیری جمود I ذیل ہوگا۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 \quad (\text{مسئلہ متوازی محور}) \quad (۴.۳۶)$$

یوں تصور کریں جیسا مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماؤ کو دور ہٹ کر h فاصلے پر رکھا گیا ہے۔ یہ مساوات مسئلہ متوازی محور^{۱۵} کہلاتی ہے۔

مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

شکل 12.10 میں اختیاری شکل و صورت جسم کا، جس کا مرکز کمیت O ہے، عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ محدد نظام کا مبدا O پر رکھیں۔ شکل کے مستوی کو عمودی، O سے گزرتی، ایک محور لیں؛ اس محور کو متوازی، نقطہ P سے گزرتی، دوسری محور لیں۔ نقطہ P کے محدد a اور b ہیں۔ فرض کریں کسی عمومی محدد x اور y پر dm کمیت کا چھوٹا ٹکڑا ہے۔ نقطہ P پر محور کے لحاظ سے جسم کا گھمیری جمود مساوات ۴.۳۵ کے تحت ذیل ہوگا،

$$I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm$$

جس کو ترتیب نو کے بعد ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm \quad (۴.۳۷)$$

مرکز کمیت کی تعریف (مساوات 9.9) کہتی ہے، مساوات ۴.۳۷ کے درمیانے دو مکمل مرکز کمیت (ایک مستقل سے ضرب کر کے) دیتے ہیں، لہذا یہ مکمل (انفرادی طور پر) صفر کے برابر ہوں گے۔ چونکہ O سے dm تک فاصلہ R ہے جو $x^2 + y^2$ کے برابر ہے لہذا پہلا مکمل مرکز کمیت I دیگا۔ شکل 12.10 کو دیکھ کر ہم جاننے ہیں مساوات ۴.۳۷ کا آخری مکمل Mh^2 کے برابر ہے، جہاں جسم کی کل کمیت M ہے۔ یوں مساوات ۴.۳۷ تخفیف کے بعد مساوات ۴.۳۶ دیتی ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش ۵

شکل ۱؟ میں کتاب کی طرح جسم (جس کا ایک ضلع دوسرے سے لمبا ہے) اور جسم کے رخ کو عمودی چار ممکنہ محور گھماؤ دکھائے گئے ہیں۔ جسم کے گھمیری جمود کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، ان محور کی درجہ بندی کریں۔

^{۱۵} parallel axis theorem

نمونہ سوال ۴.۶: دو ذروں کا گھمیریہ جمود

شکل 13a.10 میں کمیت m کے دو ذروں پر مشتمل استوار جسم دکھایا گیا ہے۔ متبادل نظر انداز کمیت کا سلاخ، جس کی لمبائی L ہے کمیتوں کے بیچ لگا ہے۔

(۱) سلاخ کو عمودی، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماؤ (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے) پر جسم کا گھمیریہ جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصور

جسم صرف دو ذروں پر (جن کی کمیت ہے) مشتمل ہے، لہذا ہم مکمل کے بجائے مساوات ۱۴.۳۳ استعمال کر کے گھمیریہ جمود مرکز کمیت I تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم انفرادی کمیت کا گھمیریہ جمود تلاش کر کے دونوں کا مجموعہ لیں گے۔

حصہ: محور گھماؤ سے $\frac{1}{2}L$ عمودی فاصلے پر کمیت m کے دو ذروں کا (مجموعی) گھمیریہ جمود ذیل ہوگا۔

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m) \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (m) \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ = \frac{1}{2}mL^2 \quad (\text{جواب})$$

(ب) پہلی محور کو متوازی، سلاخ کے بائیں سرے سے گزرتی، محور گھماؤ (شکل 13b.10) پر جسم کا گھمیریہ جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصورات

اتنی آسان صورت میں I با آسانی دونوں طریقوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ پہلا طریقہ جزو کی طرح ہے۔ دوسرا، زیادہ طاقتور طریقہ مسئلہ متوازی محور استعمال کرتا ہے۔

پہلا طریقہ: ہم جزو کی طرح I معلوم کرتے ہیں، تاہم اب سلاخ کے بائیں سرے پر موجود ذرے کا r_i صفر اور دائیں سرے پر ذرے کا L ہوگا۔ مساوات ۱۴.۳۳ اب ذیل دی گئی۔

$$I = m(0)^2 + m(L)^2 = mL^2 \quad (\text{جواب})$$

دوسرا طریقہ: ہم مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماؤ پر جسم کا گھمیریہ جمود جانتے ہیں اور دوسرا محور مرکز کمیت سے گزرتی محور کو متوازی ہے لہذا مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m) \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ = mL^2 \quad (\text{جواب})$$

□

نمونہ سوال ۴.۷: یکساں سلاخ کا گھمیریہ جمود بالکل

کمیت M اور لمبائی L کی یکساں سلاخ محور x پر یوں رکھا گیا ہے کہ سلاخ کا وسط مبدا پر ہو (شکل 14.10)۔

(۱) سلاخ کے وسط پر، سلاخ کو عمودی محور گھماؤ پر سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصورات

(۱) سلاخ انتہائی زیادہ ذروں پر، جو محور گھماؤ سے انتہائی زیادہ تعداد کے مختلف فاصلوں پر موجود ہیں، مشتمل ہے۔ ہم ہر ذرے کا انفرادی گھمیری جمود ہرگز معلوم نہیں کرنا چاہتے۔ (ہم اپنی باقی تمام زندگی اس کام میں گزار سکتے ہیں۔) لہذا، ہم محور گھماؤ سے r فاصلے پر کیت کے ایک چھوٹے ٹکڑے dm کے لئے گھمیری جمود کا عمومی الجبرائی فکترہ: $r^2 dm$ لکھتے ہیں۔ (۲) ایک ایک کر کے تمام چھوٹے حصوں کے گھمیری جمود جمع کرنے کے بجائے، ہم اس فکترے کا تکمل لے کر مجموعہ معلوم کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۳۵ سے ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$I = \int r^2 dm \quad (۴.۳۸)$$

(۳) سلاخ یکساں ہے اور محور گھماؤ عین مرکز کیت سے گزرتا ہے، لہذا ہم گھمیری جمود مرکز کیت I معلوم کر رہے ہیں۔

حما: ہم محدود x کے لحاظ سے تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں (ناکہ کیت m کے لحاظ سے جیسا تکمل کہتا ہے)، لہذا کیت کے ٹکڑے dm کا سلاخ کے ہمراہ لمبائی dx کے ساتھ رشتہ درکار ہوگا۔ (شکل 14.10 میں ایک ایسا ٹکڑا دکھایا گیا ہے۔) سلاخ یکساں ہے، لہذا تمام ٹکڑوں کی کیت اور لمبائی کی نسبت برابر ہوگی۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \quad \text{سلاخ کی کیت} \quad \text{سلاخ کی لمبائی}$$

یا

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

مساوات ۴.۳۸ میں r کی جگہ x اور dm کی جگہ درج بالا منتخب ڈال کر، سلاخ کے ایک سرے سے دوسرے سر تک (یعنی $x = -\frac{L}{2}$ تا $x = \frac{L}{2}$) تکمل لیتے ہوئے کیت کے تمام ٹکڑے شامل کرتے ہیں۔ یوں ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=L/2} x^2 \left(\frac{M}{L} \right) dx \\ &= \frac{M}{3L} \left[x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{12} ML^2 \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) ایک نئی محور گھماؤ پر، جو سلاخ کے بائیں سرے گزرتی اور سلاخ کو عمودی ہے، سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہوگا؟

کلیدی تصورات

ہم محور x کا مبد اسلاخ کے بائیں سرپر منتقل کر کے تھمل $x = 0$ تا $x = L$ لے کر I معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم، ہم زیادہ آسان اور طاقتور مسئلہ متوازی محور (ساوات ۴.۳۶) استعمال کرتے ہیں، جس میں محور گھماو کی سمت بندی تبدیل کیے بغیر اسے دوسری جگہ منتقل کرتے ہیں۔

حاجے: مرکز کیت سے گزرتی محور کے متوازی، اسلاخ کے بائیں سرپر، نئی محور رکھ کر ہم مسئلہ متوازی محور (ساوات ۴.۳۶) استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم جزو اسے جانتے ہیں کہ $\frac{1}{12}ML^2 = I_{\text{مرکز کیت}}$ ہے۔ شکل 14.10 میں اسلاخ کے وسط سے نئی محور گھماو تک فاصلہ $\frac{1}{2}L$ ہے۔ یوں ساوات ۴.۳۶ ذیل دی گئی۔

$$I = I_{\text{مرکز کیت}} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + (M)\left(\frac{1}{2}L\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}ML^2 \quad (\text{جواب})$$

□ درحقیقت، یہ نتیجہ اسلاخ کے بائیں یا دائیں سرپر ہر، اسلاخ کو عمودی، محور گھماو کے لئے درست ہے۔

نمونہ سوال ۸.۴: گھمیری جو دیوانائی، پکڑ پرکھ

مشین کے بڑے حصوں کا، جو لمبے عرصہ میں رفتار سے چکر کاٹتے ہوں، معائنہ چکری پرکھ کے نظام میں کرنا ضروری ہے۔ اس نظام میں، فولادی سیلن کے اندر، جس کی اندرونی جانب سیہ کی اینٹیں نصب ہوں، مشین کے حصے کو مخصوص چکری رفتار تک (جس پر حصے کو پرکھنا مقصود ہو) لایا جاتا ہے۔ اس دوران، سیلن کا منہ فولادی ڈھکن سے بند رکھا جاتا ہے۔ اگر مشین کا حصہ مطلوب چکری رفتار پر داشت نہ کرتے ہوئے ٹوٹ جائے، اس کے ٹکڑے سیہ کی ملائم اینٹوں میں دھنس کر محفوظ ہوں گے، جن کا معائنہ بعد میں کرنا ممکن ہوگا۔

۱۹۸۵ء میں ایک ادارہ نے، جو مشین پر کھنے کا کام کرتا ہے، 272 kg ٹھوس فولادی (مترص شکل کا) مدور، جس کا رداس $R = 38.0 \text{ cm}$ تھا، پر کھنے کا کام لیا۔ سین 14000 ω چکری منصف کی زاویائی رفتار کو پہنچ کر آزمائش کار معمار^{۱۱} ایک آواز سنتا ہے۔ تفتیش کرنے پر معلوم ہوا سیہ کی اینٹیں کسرے سے باہر بھسکی پڑی ہیں، کسرے کا دروازہ گاڑیاں کھڑی کرنے کی جگہ میں پڑا ملا، ایک سیہ کی اینٹ پڑوسی کے باورچی خانے کی دیوار توڑ کر اندر پہنچی تھی، ادارے کی عمارت کے ستون ناکارہ ہو چکے تھے، چکر خانہ کا پکا مندرش 0.5 cm زمین میں دھنس چکا تھا، اور چکری نظام کا 900 kg ڈھکن اڑ کر چھت سے گزرتے ہوئے بالائی منزل میں داخل ہونے بعد واپس چکری نظام پر گر کر پڑا تھا۔ خوش قسمتی سے کوئی بھی ٹکڑا آزمائش کار معمار کے کسرے کی طرف نہیں گیا۔

اس دھماکے میں کتنی توانائی خارج کی گئی؟

کلیدی تصور

خارج توانائی 14000 چکری منصف پر مدور کی گھمیری حسر کی توانائی K کے برابر ہوگی۔

حاجے: ہم مساوات ۴.۳۴ سے K کی قیمت $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ تلاش کرتے ہیں، لیکن اس سے پہلے مدور کا گھمیری جود I جاننا ضروری ہے۔ فطرص کا گھمیری جود جدول 2c.10 کے تحت ($I = \frac{1}{2} MR^2$) ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} (272 \text{ kg}) (0.38 \text{ m})^2 = 19.64 \text{ kg m}^2$$

مدور کی زاوی رفتار، ریڈین ناپ میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = (2\pi \text{ ریڈین فی سپر}) (14000 \text{ سپر فی منٹ}) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)$$

$$= 1.466 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$$

یوں مساوات ۴.۳۴ کے تحت حنارچ توانائی ذیل ہے (جو بہت بڑی مقدار ہے)۔

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (19.64 \text{ kg m}^2) (1.466 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1})^2$$

$$= 2.1 \times 10^7 \text{ J} \quad (\text{جواب})$$

□

۴.۶ قوت مسروڑ

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. حبان پائیں گے کہ جسم پر قوت مسروڑ میں قوت اور، محور گھماوے قوت کے نقطہ اطلاق تک، تعین کر سکتے شامل ہیں۔
۲. (۱) تعین کر سکتے اور سمتیہ قوت کے بیچ زاویہ کی مدد سے، (ب) خط عمل اور قوت کے معیار اثر کے بازو کی مدد سے، اور (ج) تعین کر سکتے قوت کے عمودی جزو کی مدد سے قوت مسروڑ تلاش کر پائیں گے۔
۳. حبان پائیں گے کہ قوت مسروڑ حبانے کے لئے محور گھماو حباننا لازم ہے۔
۴. حبان پائیں گے کہ قوت مسروڑ کو مثبت یا منفی علامت مختص کی جاتی ہے، جس کا دارومدار اس رخ پر ہوگا جس رخ قوت مسروڑ جسم کو محور گھماو پر گھمانے کی کوشش کرتی ہے (یاد رہے، ”گھڑیاں منفی ہیں“۔)
۵. جہاں ایک سے زیادہ قوت مسروڑ جسم پر عمل کرتی ہوں، صافی قوت مسروڑ حاصل کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- قوت $\vec{\tau}$ کی، محور گھماو پر جسم کو گھمانے کی، کوشش کو قوت مسروڑ کہتے ہیں۔ اگر محور گھماو کے لحاظ سے، $\vec{\tau}$ جس نقطہ پر عمل کرتی ہو، اس نقطے کا تعین کر سکتے ہو، تب قوت مسروڑ کی قدر ذیل ہوگی،

$$\tau = rF_t = r_{\perp} R = rF \sin \phi$$

جہاں \vec{r} کو \vec{F} کا عمودی جزو F_t ہے اور ϕ قوت \vec{F} اور سمتیہ \vec{r} کے بیچ زاویہ ہے۔ محور گھماو اور \vec{F} سے گزرتی مہبوط لکسیر کے بیچ عمودی فاصلہ r_\perp ہے۔ مہبوط لکسیر کو \vec{F} کا ”خط عمل“، اور r_\perp کو \vec{F} کا ”معیار اثر“ کہتے ہیں۔ اسی طرح r کو F_t کا معیار اثر کہیں گے۔

• قوت مسروڑ کی اکائی نیوٹن میٹر (Nm) ہے۔ ساکن جسم کو محور گھماو پر خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرنے والی قوت مسروڑ τ مثبت ہوگی، گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرنے والی منفی ہوگی۔

قوت مسروڑ

دروازے کا دستہ چول سے دور، کسی مقصد سے، رکھا جاتا ہے۔ دروازہ کھولنے کے لئے قوت لگانی ضروری ہے، تاہم قوت۔ کارخ اور لگانے کا مقصد ہم بھی اہمیت رکھتے ہیں۔ اگر آپ، دستے کے بجائے، چول کے متریب قوت کا اطلاق کریں یا دروازے کی سطح کو قوت 90° پر لاگو نہ کریں، دروازہ کھولنے کے لئے آپ کو اس قوت سے زیادہ قوت درکار ہوگی، جو دستے پر دروازے کی سطح کو عمودی درکار چاہیے۔

شکل 16a.10 میں جسم کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ جسم، O سے گزرتی، تراش کو عمودی محور گھماو پر، آزادی سے گھوم سکتا ہے۔ نقطہ P پر، جس کا O کے لحاظ سے تقسین گر سمتیہ \vec{r} ہے، قوت \vec{F} کا اطلاق کیا گیا ہے۔ \vec{F} اور \vec{r} کرخ آپس میں زاویہ ϕ پر ہیں۔ (ہم اپنی آسانی کے لئے صرف ان قوت کی بات کرتے ہیں، جن کا محور گھماو کو متوازی جزو نہیں پایا جاتا؛ یوں \vec{F} صفحے کی سطح میں ہوگی۔)

یہ جاننے کے لئے کہ محور گھماو پر \vec{F} جسم کو کیسے گھماتی ہے، ہم \vec{F} کو دو اجزاء میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16b.10)۔ ایک جزو، جو ردای جزو F_r کہلاتا ہے، \vec{r} کے ہمراہ ہوگا۔ چونکہ یہ جزو O سے گزرتی لکسیر کے ہمراہ ہے، لہذا یہ گھماو میں کردار ادا نہیں کرتا۔ (اگر آپ دروازے کو دروازے کے سطح کے ہمراہ کھینچیں، دروازہ کبھی بھی نہیں کھلے گا۔) \vec{F} کا دوسرا جزو، جو مماسی جزو F_t کہلاتا ہے، \vec{r} کو عمودی ہے اور اس کی قدر $F_t = F \sin \phi$ ہے۔ یہ جزو گھماو کا سبب بنتا ہے۔

قوتے مروڑ کا حصہ \vec{F} کی جسم گھمانے کی صلاحیت، قوت \vec{F} کے مماسی جزو F_t کی قدر کے علاوہ O سے (قوت کے) اطلاقی نقطے کے فاصلے پر منحصر ہے۔ ان دونوں وجوہات کو شامل کرنے کی خاطر ہم (درج ذیل) ایک نئی مقدار متعارف کرتے ہیں جو قوتے مروڑ τ کہلاتی ہے، جو دو جزو ضربوں کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$\tau = (r)(F \sin \phi) \quad (۴.۳۹)$$

قوت مسروڑ کا حساب (درج ذیل) دو معادل طریقوں:

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t \quad (۴.۴۰)$$

اور

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = r_\perp F \quad (۴.۴۱)$$

سے ممکن ہے، جہاں O پر محور گھماؤ اور \vec{F} سمتیہ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ r_{\perp} ہے (شکل 16c.10)۔ اس مبسوط لکیر کو \vec{F} کا نقطہ عمل^{۱۸} اور r_{\perp} کو \vec{F} کا معیار اثر کا بازو^{۱۹} کہتے ہیں۔ شکل 16b.10 میں دکھایا گیا ہے کہ ہم \vec{r} کی قدر r کو جزو قوت F_t کا معیار اثر کا بازو کہہ سکتے ہیں۔

جب آپ کسی جسم، مثلاً بیچ کس، پر اس نیت سے قوت لگاتے ہیں کہ یہ گھومے، آپ قوت مسروڑ لاگو کرتے ہیں۔ قوت مسروڑ کی بین الاقوامی اکائی نیوٹن میٹر (Nm) ہے۔ انتباہ: نیوٹن میٹر کی اکائی کام کے لئے بھی مستعمل ہے۔ تاہم، قوت مسروڑ اور کام دو مختلف معنایں ہیں۔ کام کے لئے عام طور حوال اکائی (1 J = 1 Nm) استعمال کی جاتی ہے جبکہ قوت مسروڑ کے لئے صرف نیوٹن میٹر اکائی استعمال ہوگی۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ باب 11 میں قوت مسروڑ کے لئے سمتیہ ترقیم استعمال کی جائے گی؛ یہاں واحد محور پر گھماؤ کی بات کی جائے گی لہذا الجبرائی علامت استعمال کی جائے گی۔ اگر قوت مسروڑ خلاف گھڑی گھماؤ پیدا کرنے کی کوشش کرے، یہ مثبت ہوگی اور اگر گھڑی وار کوشش کرے تب منفی ہوگی۔ (حصہ 1.10 میں ہم نے کہا ”گھڑیاں منفی ہیں“۔ یہ فترہ یہاں بھی کارآمد ہے۔)

اصول الطباق (جس کا ذکر باب 5 میں کیا گیا) کو قوت مسروڑ مطبق کرتے ہیں: جب جسم پر کئی قوت مسروڑ عمل کرتی ہوں، جسم پر صافی قوت مسروڑ^{۲۰} (یا ماحصل قوت مسروڑ^{۲۱}) انفرادی قوت مسروڑ کا مجموعہ ہوگا۔ صافی قوت مسروڑ کی علامت صافی ہے۔

آزمائش ۶

میٹر صلاح کا فضائی جہازہ شکل ۴.۷ میں پیش ہے؛ صلاح کا چول 20 cm پر پایا جاتا ہے۔ صلاح پر پانچوں قوت افقی اور ان کی قدریں برابر ہیں۔ اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی ان کی پیدا قوت مسروڑ کے لحاظ سے کریں۔

۴.۷ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماؤ

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مقابل ہوں گے۔

۱. گھماؤ کی صورت میں جسم پر صافی قوت مسروڑ کا، جسم کے گھمیری جہود اور گھمیری اسراع کے ساتھ، رشتہ نیوٹن کے دوسرے قانون سے حبان پائیں گے۔ تمام معنایں مختص محور گھماؤ کے لحاظ سے ہیں۔

کلیدی تصویر

line of action^{۱۸}
moment arm^{۱۹}
net torque^{۲۰}
resultant torque^{۲۱}

• نیوٹن کے دوسرے قانون کا گھمیری مثال ذیل ہے،

$$\tau_{\text{مافی}} = I\alpha$$

جہاں ذرے یا استوار جسم پر مافی قوت مسروڑ $\tau_{\text{مافی}}$ ہے، محور گھماو پر ذرے یا جسم کا گھمیری جمود I ہے، اور α اس محور پر ماحصل زاوی اسراع ہے۔

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو

قوت مسروڑ استوار جسم کو گھما سکتی ہے، جیسا آپ دروازہ قوت مسروڑ سے کھولتے اور بند کرتے ہیں۔ ہم استوار جسم پر مافی قوت مسروڑ $\tau_{\text{مافی}}$ اور محور گھماو پر جسم کی اس زاوی اسراع α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں جو یہ قوت مسروڑ پیدا کرتی ہے۔ ہم نیوٹن کے دوسرے قانون ($F_{\text{مافی}} = ma$) کو دیکھ کر، جو محدودی محور پر کمیت m کے جسم پر مافی قوت $F_{\text{مافی}}$ سے پیدا جسم کی خطی اسراع a کا تعلق دیتا ہے، ایسا کریں گے۔ ہم $F_{\text{مافی}}$ کی جگہ m ، $\tau_{\text{مافی}}$ کی جگہ I ، اور a کی جگہ α رکھ کر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\tau_{\text{مافی}} = I\alpha \quad (\text{نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو}) \quad (۴.۴۲)$$

مساوات ۴.۴۲ کا ثبوت

پہلے شکل 17.10 میں پیش سادہ صورت کے لئے مساوات ۴.۴۲ ثابت کرتے ہیں۔ بلا کمیت سلاخ اور اس کے ایک سر پر کمیت m کا ذرہ مل کر استوار جسم دیتے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی r ہے اور یہ اپنے دوسرے سر پر، سطح صغف کو عمودی محور گھماو (دھرے) پر، گھوم سکتی ہے۔ یوں، ذرہ صرف دائری راہ پر، جس کے وسط پر محور گھماو ہے، حرکت کا محباز ہے۔

ذرے پر قوت \vec{F} عمل کرتی ہے۔ تاہم، ذرہ صرف دائری راہ پر حرکت کر سکتا ہے، لہذا قوت کا صرف مماسی جزو F_t (جو دائری راہ کو مماس سے) ذرے کو اس راہ پر مسرع کر سکتا ہے۔ ہم F_t اور اس راہ پر ذرے کے مماسی اسراع a_t کا تعلق نیوٹن کے دوسرے قانون سے لکھتے ہیں۔

$$F_t = ma_t$$

ذرے پر قوت مسروڑ، مساوات ۴.۴۰ کے تحت ذیل ہوگا۔

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

مساوات ۴.۴۲ ($a_t = \alpha r$) سے اس کو ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \quad (۴.۴۳)$$

دائیں ہاتھ تو سین میں بند متدار، محور گھماو پر ذرے کا گھمیری جمود ہے (مساوات ۴.۴۳ دیکھیں، تاہم یہاں صرف ایک ذرے کی بات کی جا رہی ہے)۔ یوں گھمیری جمود کے لئے I لکھ کر مساوات ۴.۴۳ ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\tau = I\alpha \quad (\text{ریڈینن نا پ}) \quad (۴.۴۴)$$

جہاں ایک سے زیادہ قوت ذرے پر عمل کرتی ہوں مساوات ۴.۴۳ ذیل صورت اختیار کرے گی، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

$$\tau_{\text{نتی}} = I\alpha \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۴۵)$$

چونکہ ہر جسم انفرادی ذروں کا مجموعہ ہو گا لہذا اس مساوات کو کسی بھی استوار جسم تک، جو مقصورہ محور گھماؤ پر گھومتا ہو، وسعت دی جاسکتی ہے۔

آزمائش ۷

شکل ۴.۹ میں میسرہ سلاخ کا فصائی جانبہ پیش ہے۔ سلاخ کے وسط سے بائیں جانب نقطہ پچل ہے جس پر سلاخ چکر کاٹ سکتی ہے۔ سلاخ پر دو افقی قوت \vec{F}_1 اور \vec{F}_2 لگاؤ کی جانب ہیں۔ صرف \vec{F}_1 دکھائی گئی ہے۔ قوت \vec{F}_2 سلاخ کو عمودی ہے اور سلاخ کے دائیں سر پر لگاؤ کی جانب ہے۔ سلاخ نہ گھومنے کی صورت میں \vec{F}_2 کا رخ کیا ہو گا اور (ب) کی قیمت F_1 سے کم ہوگی، زیادہ ہوگا، یا اس کے برابر ہوگی؟

نمونہ سوال ۴.۹: نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماؤ کا کولامیہ استعمال

کولام کشتی کا وہ داو ہے جس میں پہلوان دو سرے کو کولہ کی زد پر لا کر گراتا ہے۔ آئیں پہلوانوں کی کشتی کو طبعی دان کے نقطہ نظر سے دیکھیں۔ کولہ پر 80 kg حریف کو چڑھا کر \vec{F} قوت کے ساتھ دائیں کولہ پر نقطہ گھماؤ (محور گھماؤ) رکھ کر $d_1 = 0.30 \text{ m}$ معیار اثر کا بازو استعمال کرتے ہوئے، آپ حریف کو زمین پر مارتے ہیں (شکل 18.10)۔ آپ نقطہ گھماؤ پر اس کو $\alpha = 6.0 \text{ rad s}^{-2}$ زاوی اسراع سے (جو شکل میں گھڑی وار ہے) گھماتا چاہتے ہیں۔ فرض کریں نقطہ گھماؤ کے لحاظ سے اس کا گھمیری جھود $I = 15 \text{ kg m}^2$ ہے۔

(۱) زمین پر گرانے سے قبل اگر آپ حریف کو آگے جھکا کر اس کا مرکز کیت اپنے کولہ پر رکھیں تو \vec{F} کی قدر کیا ہوگی (شکل 18a.10)؟

کلیدی تصویر

ہم F کا زاوی اسراع سے رشتہ نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماؤ $\tau_{\text{نتی}} = I\alpha$ سے جانتے ہیں۔

حماچہ: زمین سے حریف کے پاؤں اٹھنے کے بعد، ہم کہہ سکتے ہیں اس پر تین قوت عمل پیرا ہوں گی: آپ کی کھینچ \vec{F} ، نقطہ گھماؤ پر آپ کی حریف پر عمودی قوت \vec{N} (شکل 18.10 میں اے نہیں دکھایا گیا)، اور تجاذبی قوت \vec{F}_g ۔ نقطہ گھماؤ پر تینوں قوتوں کی قوت سروژ جانتے ہوئے ہم $\tau_{\text{نتی}} = I\alpha$ استعمال کر پائیں گے۔

مساوات ۴.۴۱ ($\tau = r_{\perp} F$) کے تحت آپ کی کھینچ \vec{F} سے پیدا قوت سروژ $F d_1 -$ ہوگی، جہاں d_1 معیار اثر کا بازو r_{\perp} ہے، اور منفی علامت کہتی ہے کہ یہ سروژ گھڑی وار گھماؤ کی کوشش کرتی ہے۔ قوت \vec{N} نقطہ گھماؤ سے گزرتی ہے لہذا اس کا معیار اثر کا بازو $r_{\perp} = 0$ ہوگا اور یوں اس کی قوت سروژ بھی صفر ہوگی۔ تجاذبی قوت \vec{F}_g حریف کے مرکز کیت پر عمل کرتی ہے۔ مرکز کیت عین نقطہ گھماؤ پر ہے لہذا \vec{F}_g کا معیار اثر کا بازو

$r_{\perp} = 0$ ہوگا اور یوں اس کی قوت سروڑ بھی صفر ہوگی۔ یوں حرینف پر صرف آپ کی کھینچ \vec{F} کی قوت سروڑ عمل کرتی ہے اور ہم $I\alpha = \tau_{\text{نیٹ}}$ ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$-d_1 F = I\alpha$$

یوں ذیل حاصل ہوگا۔

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15 \text{ kg m}^2)(-6.0 \text{ rad s}^{-2})}{0.30 \text{ m}}$$

$$= 300 \text{ N} \quad (\text{جواب})$$

(ب) اگر کرنے سے پہلے آپ کا حرینف سیدھا کھڑا ہے تاکہ \vec{F}_g کا معیار اثر کا بازو $d_2 = 0.12 \text{ m}$ ہو تب \vec{F} کی مقدار کیا ہوگا (شکل 18b.10)؟

کلیدی تصور

چونکہ $\vec{F}_g = mg$ کا معیار اثر کا بازو صفر نہیں، اس کی قوت سروڑ اب $d_2 mg$ ہوگی جو خلاف گھڑی ہونے کی بنیشت ہے۔

حاجے: ہم $I\alpha = \tau_{\text{نیٹ}}$ اب ذیل لکھتے ہیں

$$-d_1 F + d_2 mg = I\alpha$$

جو ذیل دیگا۔

$$F = 300 \text{ N} + \frac{(0.12 \text{ m})(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m s}^{-2})}{0.30 \text{ m}}$$

$$= 613.5 \text{ N} \approx 610 \text{ N} \quad (\text{جواب})$$

اس نتیجے کے تحت اگر آپ حرینف کو جھکا کر اس کا مرکز کمیت اپنے کولہے پر رکھ سکیں، آپ کو کافی زیادہ قوت لگانی ہوگی۔ ایک اچھا پہلو ان یہ حقیقت جانتا ہے۔

□

نمونہ سوال ۴.۱۰: نیوٹن کا دوسرا قانون، قوت سروڑ، قرص

کمیت $M = 2.5 \text{ kg}$ اور رداس $R = 20 \text{ cm}$ کا یکساں قرص مقررہ افقی دھڑے پر نصب شکل 19a.10 میں دکھایا گیا ہے۔ قرص کے چکا ^{۲۲} پر بلا کمیت دھاگہ لپیٹ کر اس سے $m = 1.2 \text{ kg}$ کمیت کی اینٹ لٹکائی گئی ہے۔ ساکن اینٹ رہا کی جاتی ہے۔ اینٹ کی اسراع، قرص کی زاوی اسراع، اور دھاگے میں تناؤ تلاش کریں۔ دھاگہ پھسلتا نہیں اور دھڑا لے رکڑ ہے۔

کلیدی تصورات

(1) اینٹ کو ایک نظام تصور کر کے اس کی اسراع a اور اس پر عمل پیرا قوت کا تعلق ہم نیوٹن کے قانون دوم ($\vec{F}_{\text{نتی}} = m\vec{a}$) سے لکھ سکتے ہیں۔ (2) مقررہ کو ایک نظام تصور کرتے ہوئے ہم اس کے زاوی اسراع α اور اس پر قوت مسرور کا تعلق نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماؤ ($\tau_{\text{نتی}} = I\alpha$) سے لکھ سکتے ہیں۔ (3) اینٹ اور مقررہ کی حرکات کو ملانے کے لئے ہم اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہیں کہ اینٹ کا خطی اسراع a اور مقررہ کے چکا کا (مماسی) خطی اسراع a_t برابر ہیں۔ (الچھنے سے بچنے کی خاطر ہم اسراع کی متدروں اور الجبرائی علامتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔)

اینٹ پر **قوتیں**: شکل 19b.10 کے آزاد جسی حنا کے میں اینٹ پر لاگو قوتیں دکھائی گئی ہیں: دھماگے سے قوت \vec{T} ، اور تھبازی قوت \vec{F}_g کی متدر mg ہے۔ انتصابی y محور کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم $F_{\text{نتی},y} = ma_y$ لکھتے ہیں:

$$(۴.۴۶) \quad T - mg = m(-a)$$

جہاں (محور y کے ہمراہ نیچے رخ) اسراع کی متدر a ہے۔ تاہم، ہم اس مساوات کو a کے لئے حل نہیں کر سکتے، چونکہ اس میں دوسرا نامعلوم متغیر T بھی پایا جاتا ہے۔

قرص پر قوتیں: گزشتہ مرتبہ جب ہم محور y سے آگے بڑھ نہیں سکے، ہم نے محور x کا سہارا لیا۔ اس مرتبہ ہم مقررہ کے گھماؤ کا سہارا اٹھاتے ہوئے نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ میں لکھتے ہیں۔ قوت مسرور اور گھمیری جمود I تلاش کرنے کے لئے، ہم نقطہ O پر، مقررہ کو عمودی اور اس کے وسط سے گزرتی لکیر، محور گھماؤ لیتے ہیں (شکل 19c.10)۔

مساوات ۴.۴۰ ($\tau = rF_t$) قوت مسرور دیتی ہے۔ مقررہ پر تھبازی قوت اور دھسے کی قوت دونوں مقررہ کے وسط پر عمل کرتے ہیں لہذا ان کا فاصلہ $r = 0$ اور یوں قوت مسرور صفر ہوں گی۔ مقررہ پر دھماگے کی قوت $\vec{r} = R \vec{T}$ فاصلے پر مقررہ کے چکا پر مماسی عمل کرتی ہے۔ اس طرح، اس کی قوت مسرور RT ہوگی؛ چونکہ قوت مسرور مقررہ کو ساکن حالت سے گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرتی ہے لہذا اس کی علامت منفی ہے۔ منفی (گھڑی وار) زاوی اسراع کی متدر α لیتے ہیں۔ جدول 2c.10 کے تحت مقررہ کا گھمیری جمود $\frac{1}{2}MR^2$ ہے۔ یوں عمومی مساوات $I\alpha = \tau$ ذیل لکھی جائے گی،

$$(۴.۴۷) \quad -RT = \frac{1}{2}MR^2(-\alpha)$$

بظاہر، یہ مساوات کسی کام کی نہیں ہے؛ اس میں دو نامعلوم متغیرات α اور T پائے جاتے ہیں جبکہ ہمیں a چاہیے۔ طبعی علم بروئے کار لاتے ہوئے ہم اس کو فائدہ مند ٹھہرا سکتے ہیں: چونکہ دھماگہ پھسلتا نہیں، اینٹ کے خطی اسراع کی متدر a اور مقررہ کے چکا کے (مماسی) اسراع کی متدر a_t برابر ہوں گی۔ یوں، مساوات ۴.۴۲ ($a_t = \alpha r$) کے تحت $\alpha = a/R$ ہوگا۔ مساوات ۴.۴۷ میں یہ معلومات ڈال کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۸) \quad T = \frac{1}{2}Ma$$

نتائج کی بجائے: مساوات ۴.۲۶ اور مساوات ۴.۲۸ ملا کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$a = g \frac{2m}{M + 2m} = (9.8 \text{ m s}^{-2}) \frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})}$$

$$= 4.8 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{جواب})$$

اب مساوات ۴.۲۸ سے T حاصل ہوگا۔

$$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2} (2.5 \text{ kg}) (4.8 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 6.0 \text{ N} \quad (\text{جواب})$$

جیسا ہمیں توقع کرنی چاہیے، گرتی اینٹ کا اسراع a آزادانہ گرنے کے اسراع g سے کم، اور دھماگے میں تناؤ $T = 6.0 \text{ N}$ ایسکی اینٹ پر تباہی قوت $mg = 11.8 \text{ N}$ سے کم ہے۔ ساتھ ہی ہم دیکھتے ہیں کہ a اور T دونوں پر مقرر کی کیفیت پر منحصر ہیں جبکہ ان پر رداس کا کوئی اثر نہیں۔

تصدیق کے طور پر، ہم دیکھتے ہیں کہ بلاکسیت مقرر ($M = 0$) کی صورت میں $a = g$ اور $T = 0$ ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں؛ اینٹ ایک آزاد جسم کی طرح زمین پر گرتی ہے۔ مساوات ۴.۲۲ سے مقرر کے زاوی اسراع کی مقرر تلاش کرتے ہیں۔

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4.8 \text{ m s}^{-2}}{0.2 \text{ m}} = 24 \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{جواب})$$

□

۴.۸ کام اور گھمیری حرکی توانائی

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے مسائل ہوں گے۔

۱. گھومتے جسم پر لاگو قوت مسرور کا زاویہ گھماؤ کے لحاظ سے مکمل لے کر، گھومتے جسم پر لاگو قوت مسرور کا سرانجام کام معلوم کر پائیں گے۔

۲. مسئلہ کام و حرکی توانائی استعمال کر کے جسم کے گھمیری حرکی توانائی میں تبدیلی اور سرانجام کام کا رشتہ جان پائیں گے۔

۳. کام اور اس زاویے کے تعلق سے، جس پر جسم گھومتا ہے، متعلق قوت مسرور کا سرانجام کام تلاش کر پائیں گے۔

۴. کام کی شرح معلوم کر کے قوت مسرور کی طاقت جان پائیں گے۔

۵. کسی لمحے پر قوت مسرور اور اس لمحے پر زاوی سستی رفتار کے رشتہ سے قوت مسرور کی طاقت جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- زاوی حرکت میں کام اور طاقت کی ذیل مساوات مستقیم حرکت کی مساوات سے مطابقت رکھتی ہیں۔

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} \tau \omega$$

- جب τ مستقل ہو، مکمل گھٹ کر ذیل دیگا۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$

- گھومتے اجسام کے لئے مسئلہ کام و حرکی توانائی ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = W$$

کام اور گھمیری حرکی توانائی

جیسا ہم باب 7 میں ذکر کر چکے، جب قوت F استوار جسم پر، جس کی کمیت m ہو، عمل کرے اس کو محدد محور پر مسرع کرے، قوت اس جسم پر کام سرانجام دیتی ہے۔ یوں، جسم کی حرکی توانائی ($K = \frac{1}{2}mv^2$) تبدیل ہو سکتی ہے۔ فرض کریں جسم کی صرف یہی توانائی تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں حرکی توانائی کی تبدیلی ΔK اور کام W کا تعلق درج ذیل مسئلہ کام و حرکی توانائی (مساوات 10.7) دیگا۔

$$(۴.۴۹) \quad \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W \quad (\text{مسئلہ کام و حرکی توانائی})$$

محور x پر رہنے کی پابند حرکت کے لئے کام کی درج ذیل مساوات 32.7 دیگی۔

$$(۴.۵۰) \quad W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad (\text{کام، یک بُعدی حرکت})$$

جب F مستقل اور جسم کا ہٹاؤ d ہو، یہ گھٹ کر $W = Fd$ دیتی ہے۔ کام کرنے کی شرح طاقت کہلاتی ہے، جو ہم مساوات 43.7 اور مساوات 48.7 سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(۴.۵۱) \quad P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad (\text{طاقت، یک بُعدی حرکت})$$

آئیں اس سے ملتی جلتی گھمیری صورت پر غور کرتے ہیں۔ جب قوت مسروڑ، مقررہ محور گھماؤ پر، استوار جسم کو مسرع کرے، قوت مسروڑ جسم پر کام W سرانجام دیتی ہے۔ یوں، جسم کی گھمیری حرکی توانائی ($K = \frac{1}{2} I \omega^2$) تبدیل ہو سکتی ہے۔ فرض کریں جسم کی صرف یہی توانائی تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں حرکی توانائی میں تبدیلی ΔK اور کام W کارشتہ مسئلہ کام و حرکی توانائی دیگا، تاہم اب حرکی توانائی کے بجائے گھمیری حرکی توانائی کی بات کی جائے گی۔

$$(۴.۵۲) \quad \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 \quad (\text{مسئلہ کام و حرکی توانائی})$$

یہاں، I مقررہ محور پر جسم کا گھمیری جمود اور ω_i اور ω_f کام سے قبل اور اس کے بعد جسم کی زاوی رفتار ہیں۔

ساتھ ہی، ہم مساوات 52.10 کی معادل گھمیری مساوات سے کام تلاش کر سکتے ہیں:

$$(۴.۵۳) \quad W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (\text{کام، مقررہ محور پر گھماؤ})$$

جہاں τ وہ قوت مسروڑ ہے جو کام W سرانجام دیتی ہے، اور θ_i اور θ_f کام سے قبل اور اس کے بعد، جسم کے زاوی مقام ہیں۔ جب τ مستقل ہو، مساوات ۴.۵۳ گھٹ کر ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۵۴) \quad W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{کام، مستقل قوت مسروڑ})$$

کام کرنے کی شرح طاقت کہلاتی ہے، جو ہم مساوات 51.10 کی معادل گھمیری ذیل مساوات سے تلاش کر سکتے ہیں۔

$$(۴.۵۵) \quad P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega \quad (\text{طاقت، مقررہ محور پر گھماؤ})$$

جدول ۴.۲ میں مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماؤ کی چند مساوات اور مطابقتی مستقیم حرکت کی مساوات پیش ہیں۔

مساوات ۴.۵۲ تا مساوات ۴.۵۵ کا ثبوت

آئیں دوبارہ شکل 17.10 کو دیکھتے ہیں۔ بلا کمیت سلاخ اور اس کے ایک سر پر کمیت m کا ذرہ مسل کر استوار جسم دیتے ہیں۔ گھماؤ کے دوران، قوت \vec{F} جسم پر کام سرانجام دیتی ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ \vec{F} جسم کی صرف حرکی توانائی تبدیل کرتی ہے۔ ایسی صورت میں مساوات ۴.۵۹ کا مسئلہ کام و حرکی توانائی استعمال کیا جاسکتا ہے لہذا ذیل ہوگا۔

$$(۴.۵۶) \quad \Delta K = K_f - K_i = W$$

مساوات ۴.۵۶ میں $K = \frac{1}{2} m v^2$ اور مساوات ۴.۱۸ ($v = \omega r$) استعمال کر کے اسے ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۵۷) \quad \Delta K = \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2 = W$$

جدول ۴.۲: مستقیم اور منحنی گھمیری حرکت کی چند مساوات

منحلی مستقیم حرکت (مقررہ رخ)	منحلی منحنی حرکت (مقررہ محور)
مقام x	زاوی مقام θ
منحلی رفتار $v = dx/dt$	زاوی منحلی رفتار $\omega = d\theta/dt$
اسراع $a = dv/dt$	زاوی اسراع $\alpha = d\omega/dt$
کمیت m	گھمیری جمود I
نیوٹن کا قانون دوم $F = ma$	نیوٹن کا قانون دوم $\tau = I\alpha$
کام $W = \int F dx$	کام $W = \int \tau d\theta$
حرکت کی توانائی $K = \frac{1}{2}mv^2$	حرکت کی توانائی $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
طاقة (مستقل قوت) $P = Fv$	طاقة (مستقل قوت) $P = \tau\omega$
مسئلہ کام و حرکت کی توانائی $W = \Delta K$	مسئلہ کام و حرکت کی توانائی $W = \Delta K$

مساوات ۴.۳۳ کے تحت واحد ذروی جسم کا گھمیری جمود $I = mr^2$ ہے، جو مساوات ۴.۵۷ میں ڈال کر ذیل حاصل ہوگا، جو مساوات ۴.۵۲ ہے۔

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

ہم نے مساوات یک ذروی جسم کے لئے ثابت کی، تاہم ہر جسم متعدد ذروں پر مشتمل ہوگا لہذا یہ مقررہ محور پر گھمائے گئے ہر استوار جسم کے لئے درست ہے۔

آئیں اب شکل 17.10 میں جسم پر سرائخ کام W اور جسم پر \vec{F} کی بنا قوت τ کا تعلق جانیں۔ جب ذرہ دائری راہ پر چلتے ہوئے ds فاصلہ طے کرتا ہے، قوت کا صرف ماسی جزو F_t اس راہ پر ذرے کو اسراع پذیر کرتا ہے۔ یوں صرف F_t ذرے پر کام سرائخام دیگی۔ ہم اس کام dW کو $F_t ds$ لکھتے ہیں۔ ہم ds کی جگہ $r d\theta$ لکھ سکتے ہیں، جہاں ذرہ زاویہ $d\theta$ طے کرتا ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$dW = F_t r d\theta \quad (۴.۵۸)$$

مساوات ۴.۴۰ سے ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل $F_t r$ اور قوت τ برابر ہوں گے لہذا مساوات ۴.۵۸ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$dW = \tau d\theta \quad (۴.۵۹)$$

یوں θ_i تا θ_f کے مستثنای زاوی ہٹاؤ کے دوران سرائخ کام ذیل ہوگا،

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

جو مساوات ۴.۵۳ ہے۔ یہ مساوات مقررہ محور پر گھومتے ہر استوار جسم کے لئے درست ہے۔ مساوات ۴.۵۹ سے بلاواسطہ مساوات ۴.۵۴ حاصل ہوتی ہے۔

گھمیری حرکت کے لئے مساوات ۴.۵۹ سے طاقت P لکھتے ہیں:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

جو مساوات ۴.۵۵ ہے۔

نمونہ سوال ۴.۱۱: کام، گھمیری حرکت توانائی، قوت، مرون، قرص

شکل 19.10 میں وقت $t = 0$ پر مترس ساکن حالت سے آغاز کرتا ہے؛ بلاکیٹ دھاگے میں تناؤ 6.0 N اور مترس کا زاویہ اسراع -24 rad s^{-2} ہے۔ اس کی گھمیری حرکت توانائی $t = 2.5 \text{ s}$ پر کیا ہوگی؟

کلیدی تصور

ہم مساوات ۴.۳۲ ($K = \frac{1}{2} I \omega^2$) سے K تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $I = \frac{1}{2} MR^2$ ہے، تاہم $t = 2.5 \text{ s}$ پر ω نہیں جانتے۔ زاویہ اسراع α کی مستقل قیمت -24 rad s^{-2} لہذا ہم جدول ۴.۱ میں پیش مستقل زاویہ اسراع کی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

حاجے: ہم α اور $\omega_0 = 0$ جانتے ہیں اور ω جاننا چاہتے ہیں، لہذا مساوات ۴.۱۲ استعمال کرتے ہیں۔

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t$$

مساوات ۴.۳۲ میں $\omega = \alpha t$ اور $I = \frac{1}{2} MR^2$ ڈال کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) (\alpha t)^2 = \frac{1}{4} M (\alpha t)^2 \\ &= \frac{1}{4} (2.5 \text{ kg}) [(0.20 \text{ m}) (-24 \text{ rad s}^{-2}) (2.5 \text{ s})]^2 \\ &= 90 \text{ J} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

کلیدی تصور

ہم یہی جواب سرانجام کام سے مترس کی حرکت توانائی معلوم کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

حاجے: پہلے ہم مترس پر صافی سرانجام کام W اور مترس کی حرکت توانائی میں تبدیلی کا رشتہ، مساوات ۴.۵۲ ($K_f - K_i = W$) میں پیش، مسئلہ کام و حرکت توانائی سے لکھتے ہیں۔ K_f کی جگہ K اور K_i کی جگہ 0 ڈال کر ذیل ہوگا۔

$$(۴.۶۰) \quad K = K_i + W = 0 + W = W$$

اس کے بعد، ہم کام W جاننا چاہیں گے۔ مساوات ۴.۵۳ یا مساوات ۴.۵۴ سے W اور مترس پر عمل پیرا قوت مسرود کا تعلق لکھا جاسکتا ہے۔ دھاگے کی قوت \vec{T} واحد قوت ہے جس کی قوت مسرود

($-TR$) زاوی اسراع پیدا کر کے متحرک پر کام سرانجام دیتی ہے۔ چونکہ α مستقل ہے، لہذا یہ قوت سرور بھی مستقل ہوگی۔ یوں مساوات ۸.۵۳ استعمال کی جاسکتی ہے، جس سے ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) \quad (۸.۶۱)$$

چونکہ α مستقل ہے، مساوات ۸.۱۳ استعمال کر کے $\theta_f - \theta_i$ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ یوں $\omega_i = 0$ کے لئے ذیل ہو گا۔

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

اس کو مساوات ۸.۶۱ میں ڈال کر حاصل نتیجہ مساوات ۸.۶۰ میں پُر کرتے ہیں۔ دی گئی معلومات $T = 6.0 \text{ N}$ اور $\alpha = -24 \text{ rad s}^{-2}$ ڈال کر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} K = W &= -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR\left(\frac{1}{2} \alpha t^2\right) = -\frac{1}{2} TR \alpha t^2 \\ &= -\frac{1}{2} (6.0 \text{ N})(0.20 \text{ m})(-24 \text{ rad s}^{-2})(2.5 \text{ s})^2 \\ &= 90 \text{ J} \quad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

نظریاتی اور حلاصہ

زاویہ مقام مقررہ محور پر، جو محور گھماؤ کہلاتی ہے، استوار جسم کے گھاؤ کی بات کرتے ہوئے، ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ جسم کے ساتھ، محور گھماؤ کو عمودی حوالہ لیکر پکی جڑی ہے، جو جسم کے ساتھ گھومتی ہے۔ کسی مخصوص مقررہ رخ کے لحاظ سے ہم اس لکیر کا زاویہ مقام θ ناپتے ہیں۔ جب θ کی پیمائش ریڈیئنز میں ہو، ذیل ہو گا، جہاں دائری راہ کی قوسی لمبائی s ، رداس r ، اور زاویہ θ ہے۔

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ریڈیئنز ناپ}) \quad (۸.۱)$$

ریڈیئنز، چکر، اور درجات میں ناپ کا تعلق ذیل ہے۔

$$1 \text{ چکر} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad (۸.۲)$$

زاویہ ہٹاؤ جب ایک جسم محور گھماؤ پر گھوم کر اپنا زاویہ مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا زاویہ ہٹاؤ ذیل ہو گا،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (۸.۳)$$

جہاں خلاف گھڑی گھماؤ کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھڑی وار کے لئے منفی ہو گا۔

زاویہ سمتی رفتار اور رفتار اگر ومتی دورانیہ Δt میں جسم $\Delta\theta$ زاوی ہٹاؤ گھومے، اس کی اوسط زاویہ سمتی رفتار اوسط θ ذیل ہوگی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (۴.۵)$$

جسم کی (الحاقی) زاویہ سمتی رفتار ذیل ہوگی۔

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (۴.۶)$$

اوسط ω اور ω سمتیات ہیں، جن کا رخ دائیں ہاتھ کا قانون (شکل 6.10)۔ خلاف گھڑی گھماؤ کے لئے دونوں مثبت اور گھڑی وار گھماؤ کے لئے منفی ہوں گے۔ جسم کے زاویہ سمتی رفتار کی مقدار اس کی زاویہ رفتار کہلاتی ہے۔

زاویہ اسراع اگر t_1 تا t_2 کے ومتی وقفہ Δt میں جسم کی زاویہ سمتی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، جسم کا اوسط زاویہ اسراع ذیل ہوگا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (۴.۷)$$

جسم کی (الحاقی) زاویہ اسراع ذیل ہوگا۔

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (۴.۸)$$

اوسط α اور α دونوں سمتیات ہیں۔

مستقل زاویہ اسراع کے مجرد حرکیات مساواتے مستقل زاویہ اسراع (مستقل α) گھیری حرکت کی ایک خاص قسم ہے۔ اس کی مجرد حرکیات مساواتے، جو جدول ۴.۱ میں دی گئی ہیں، ذیل ہیں۔

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (۴.۱۲)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (۴.۱۳)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (۴.۱۴)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \quad (۴.۱۵)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (۴.۱۶)$$

ظہ اور زاویہ متغیرات کا تعلق گھومتے استوار جسم کا اندرونی نقطہ، جو محور گھماؤ سے r عمودی فاصلہ پر ہو، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ سے گھومے، یہ نقطہ ذیل قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے، جہاں θ کا ناپ ریڈین میں ہے۔

$$s = \theta r \quad (\text{ریڈین ناپ}) \quad (۴.۱۷)$$

نقطے کا خطی سمتی رفتار \vec{v} دائرے کو مماسی ہوگا؛ نقطے کی خطی رفتار v ذیل ہوگی،

$$v = \omega r \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۱۸)$$

جہاں ω جسم کی (ریڈیئن فی سیکنڈ میں) زاوی رفتار ہے۔

نقطے کے خطی اسراع \vec{a} کا مماسی اور رداسی جزو ہوگا۔ مماسی جزو ذیل ہوگا،

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۲)$$

جہاں (ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) جسم کے زاوی اسراع کی قدر α ہے۔ اسراع \vec{a} کا رداسی جزو ذیل ہوگا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۳)$$

اگر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، جسم اور نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T ذیل ہوگا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۲۰, ۴.۱۹)$$

گھمیری حرکت توانائی اور گھمیری جمود مقررہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کی حرکی توانائی K ذیل ہوگی،

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{ریڈیئن ناپ}) \quad (۴.۳۲)$$

جہاں I جسم کا گھمیری جمود ہے، جس کی تعریف انفرادی ذروں کے نظام کے لئے:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (۴.۳۳)$$

اور استمراری کمیتی تقسیم کے جسم کے لئے ذیل ہے۔

$$I = \int r^2 dm \quad (۴.۳۵)$$

ان مساوات میں، محور گھماوے مطلوب کمیتی نکلے تک عمودی فاصلہ r_i اور r ہے، اور تکمل پورے جسم پر لیا جائے گا تاکہ اس میں تمام کمیتی نکلے شامل ہوں۔

مسئلہ متوازی محور کسی بھی محور پر جسم کے گھمیری جمود I کا تعلق، اسی جسم کے مرکز کمیت پر متوازی محور کے لحاظ سے گھمیری جمود کے ساتھ مسئلہ متوازی محور دیتا ہے۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 \quad (۴.۳۶)$$

یہاں دونوں محور کے بیچ منسلک h ہے، اور مرکز کثیت پر محور کے لحاظ سے جسم کا گھمیری جھود مرکز کثیت I ہے۔ ہم h کو مرکز کثیت پر واقع محور سے اصل محور گھماؤ کا ہٹاؤ تصور کر سکتے ہیں۔

قوتیں مروڑ گھمیری محور پر قوت \vec{F} کی بنا جسم پر گھومنے کے اثر کو قوت مروڑ کہتے ہیں۔ اگر محور گھماؤ کے لحاظ سے جس نقطہ پر \vec{F} عمل پیرا ہوا اس کا تسین گر سمتیہ \vec{r} ہو، تب قوت مروڑ کی قدر ذیل ہوگی،

$$\tau = rF_t = r_{\perp}F = rF \sin \phi \quad (۴.۳۹, ۴.۴۰, ۴.۴۱)$$

جہاں \vec{r} کو \vec{F} کا عمودی جہزو F_t ، اور \vec{r} اور \vec{F} کے بیچ زاویہ ϕ ہے۔ محور گھماؤ اور \vec{F} سمتیہ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی منسلک r_{\perp} ہے اس لکیر کو \vec{F} کا خط عمل کہتے ہیں، اور r_{\perp} کو \vec{F} کے معیار اثر کا بازو کہتے ہیں۔ اسی طرح F_t کے معیار اثر کا بازو r ہے۔

قوت مروڑ کی بین الاقوامی اکائی نیوٹن میٹر (Nm) ہے۔ اگر ساکن جسم کو قوت مروڑ τ خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرے، τ مثبت ہوگی اور اگر گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرے تب منفی ہوگی۔

نیوٹن کے قانون دوم کا زاویہ روچہ نیوٹن کے قانون دوم کا زاویہ مثال ذیل ہے،

$$\tau_{\text{مافی}} = I\alpha \quad (۴.۴۵)$$

جہاں ذرے یا استوار جسم پر قوت مروڑ $\tau_{\text{مافی}}$ ، محور گھماؤ پر ذرے یا جسم کا گھمیری جھود I ، اور α اس محور پر ماحصل زاویہ اسراع ہے۔

کام اور گھمیریہ حرکت توانائی گھمیری حرکت میں کام اور طاقت کے حساب کی (درج ذیل) مساوات مستقیم حرکت کی مساوات سے مطابقت رکھتی ہیں۔

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (۴.۵۳)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad (۴.۵۵)$$

جب τ مستقل ہو مساوات ۴.۵۳ گھٹ کر ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (۴.۵۴)$$

گھومتے اجسام کے لئے مسئلہ کام و حرکت کی توانائی ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad (۴.۵۶)$$

سوالات

سوال ۳.۱: انتضابی دھرے پر مقرر کی زاوی سستی رفتار بالمقابل وقت ترسیم شکل 20.10 میں پیش ہے۔ مقرر کے چکا پر ایک نقطہ کے لئے لمحات a ، b ، c اور d کی درجہ بندی، اعظم اول رکھ کر، (۱) مماسی اور (ب) رداسی اسراع کی قدر کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۳.۲: انتضابی دھرے پر مقرر کے گھاؤ کی تین صورتوں کے لئے زاوی معتام θ بالمقابل قوت t شکل 21.10 میں پیش ہے۔ ہر ایک صورت میں گھاؤ کا رخ کسی زاوی معتام θ واپس ہوگا۔ (۱) ہر صورت کے لئے کیا $\theta = 0$ کے لحاظ سے واپس θ گھڑی وار ہے، خلاف گھڑی ہے، یا عین $\theta = 0$ پر ہے؟ ہر ایک صورت میں (ب) کیا $t = 0$ سے قبل، اس کے بعد، یا اسی لمحے ω منصر ہوگا اور (ج) کیا α مثبت، منفی، یا منصر ہوگا؟

سوال ۳.۳: مقرر کے وسط سے گزرتا انتضابی دھرے پر گھومتے مقرر کے چکا پر قوت لاگو کر کے اس کی زاوی سستی رفتار تبدیل کی جاتی ہے۔ اس کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی سستی رفتار چار مختلف صورتوں میں ذیل ہیں: (۱) ابتدائی -2 rad s^{-1} ، اختتامی 5 rad s^{-1} ؛ (ب) 2 rad s^{-1} ، 5 rad s^{-1} ؛ (ج) -2 rad s^{-1} ، -5 rad s^{-1} ؛ (د) 2 rad s^{-1} ، -5 rad s^{-1} ۔ اعظم قیمت اول رکھ کر ان صورتوں کی درجہ بندی قوت سرود کے سرانجام کام کے لحاظ سے کریں۔

سوال ۳.۴: شکل 22a.10 کے مقرر کا زاوی معتام شکل 22b.10 دیتی ہے۔ کیا (۱) $t = 1 \text{ s}$ پر، (ب) $t = 2 \text{ s}$ پر، اور (ج) $t = 3 \text{ s}$ پر اس کی زاوی سستی رفتار مثبت، منفی، یا منصر ہے؟ (د) کیا زاوی اسراع مثبت یا منفی ہے؟

سوال ۳.۵: مقرر کے وسط سے گزرتا انتضابی دھرے پر گھومتے مقرر پر قوت \vec{F}_1 اور \vec{F}_2 عمل کرتی ہیں (شکل 23.10)۔ گھاؤ کے دوران، جو خلاف گھڑی اور مستقل ہے، قوت دکھائے گئے زاویہ پر مقرر رکھتی ہیں۔ تاہم، ہم چاہتے ہیں کہ \vec{F}_1 کی قدر تبدیل کیے بغیر \vec{F}_1 کا زاویہ θ گھٹائیں۔ (۱) سستی زاوی رفتار تبدیل نہ ہونے کے لئے کیا \vec{F}_2 کی قدر بڑھانی ہوگی، گھٹانی ہوگی، یا برقرار رکھنی ہوگی؟ کیا (ب) \vec{F}_1 اور (ج) \vec{F}_2 مقرر کو گھڑی وار یا خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہیں؟

سوال ۳.۶: ایک چوکور جو نقطہ P پر انتضابی دھرے کے گرد گھوم سکتا ہے، کافضائی جہازہ شکل 24.10 میں لیا گیا ہے۔ چوکور پر برابر مقرر کی پانچ قوت عمل کرتی ہیں، اور P ضلع کا وسطی نقطہ ہے۔ نقطہ P پر قوت سرود کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۳.۷: افقی چول دار سلاخ کافضائی جہازہ شکل 25a.10 میں پیش ہے۔ سلاخ پر دو قوت عمل کرتی ہیں، تاہم سلاخ ساکن رہتا ہے۔ اب اگر سلاخ اور \vec{F}_2 کے بیچ زاویہ 90° سے گھٹائیں اور سلاخ اب بھی ساکن رہے، کیا \vec{F}_2 بڑھانی ہوگی، گھٹانی ہوگی، یا برقرار رکھنی ہوگی؟

سوال ۳.۸: افقی چول دار سلاخ کافضائی جہازہ شکل 25b.10 میں پیش ہے۔ سلاخ کو قوت \vec{F}_1 اور \vec{F}_2 چول پر گھاتی ہیں؛ \vec{F}_2 اور سلاخ کے بیچ زاویہ ϕ ہے۔ سلاخ کے زاوی اسراع کی قدر کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، زاویہ ϕ کی درج ذیل قیمتوں کی درجہ بندی کریں: 90° ، 70° ، اور 110° ۔

سوال ۳.۹: یکساں موٹائی کے دھاتی چار چوکور جس سے % 25 حصہ کاٹا گیا ہے، شکل 26.10 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل پر تین حسی نقطے دیے گئے ہیں۔ ان نقطوں پر انتضابی محور کے گرد چادر کے گھمیری جود کے لحاظ سے، اعظم اول

رکھ کر، نقطوں کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۴.۱۰: تین چٹے (ایک جتنے رداس کے) فطرص، جو فطرص کے وسط پر انتہائی دھرے کے گرد گھوم سکتے ہیں، شکل 27.10 میں پیش ہیں۔ تینوں فطرص وہی دو مادہ سے بنے ہیں۔ ایک مادہ دوسرے سے زیادہ کثیف ہے (فی اکائی حجم کثیت کو کثافت کہتے ہیں)۔ فطرص 1 اور 3 کا بیرونی نصف حصہ کثیف مادے کا ہے۔ فطرص 2 کا اندرونی نصف حصہ کثیف مادے کا ہے۔ ایک جتنی فطرص کی دو قوتیں فطرص کے بیرونی کنارے پر یا دو مادہ کے جوڑ پر، مساوی عمل کرتی ہیں۔ (ا) فطرص کے وسط پر قوت مسروڑ، (ب) فطرص کے وسط پر گھمیری جود، اور (ج) فطرص کے اسراع کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، فطرص کی درجہ بندی کریں۔

سوال ۴.۱۱: میٹر سلاخ کا آدھا حصہ لکڑی کا اور آدھا فولاد کا بنا ہوا ہے (شکل 28a.10)۔ لکڑی والے سر O پر چول ہے۔ فولادی سر a پر قوت F عمل کرتی ہے۔ شکل 28b.10 میں سلاخ الٹی رکھی جاتی ہے اور فولادی سر O' پر چول جبکہ لکڑی والے سر a' پر قوت لاگو کی جاتی ہے۔ کیا شکل 28a.10 میں پیداواری اسراع شکل 28b.10 میں پیداواری اسراع سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر ہے؟

سوال ۴.۱۲: یکساں کثیتی تقسیم کے تین فطرص شکل 29.10 میں پیش ہیں۔ فطرص کا رداس R اور کثیت M دیے گئے ہیں۔ فطرص کے وسط پر فطرص کو عمودی محور گھماو کے گرد فطرص گھوم سکتے ہیں۔ اپنے اپنے محور گھماو پر گھمیری جود کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، فطرص کی درجہ بندی کریں۔

سوالات

گھمیری متغیرات

سوال ۴.۱۳: ایک اچھا کھلاڑی 60 فٹ دور کھلاڑی تک 85 میل فی گھنٹہ کی رفتار اور 1800 چکر فی منٹ کے گھماو سے گیند پھینک سکتا ہے۔ دوسرے کھلاڑی تک پہنچ کر گیند نے کتنے چکر مکمل کیے ہوں گے؟

سوال ۴.۱۴: گھڑی کی (ا) سیکنڈوں کی سوئی، (ب) منٹوں کی سوئی، اور (ج) گھنٹوں کی سوئی کی زاویہ رفتار ریڈیئن فی سیکنڈ میں تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۵: ڈبل روٹی کا مکھن لگا ٹکڑا میز سے پھسل کر زمین پر چپک کر کھاتا کرتا ہے۔ میز سے زمین تک فاصلہ 76 cm اور 1 سے کم چپکری صورت میں (ا) کم سے کم اور (ب) زیادہ سے زیادہ زاویہ رفتار کیا ہوگی کہ زمین پر لگنے کے بعد مکھن لگا طرف زمین پر ہو؟

سوال ۴.۱۶: گھومتے ہوئے پر ایک نقطے کا زاویہ معتم $\theta = 2.0 + 4.0t^2 + 2.0t^3$ ہے، جہاں θ کاناپ ریڈیئن اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر نقطے کا (ا) زاویہ معتم اور (ب) زاویہ سمتی رفتار کیا ہوگا؟ لمحہ $t = 4.0$ s پر اس کا زاویہ سمتی رفتار کیا ہوگا؟ (ج) لمحہ $t = 2.0$ s پر اس کا زاویہ اسراع تلاش کریں۔ (د) کیا اس کا زاویہ اسراع مستقل ہے؟

سوال ۴.۱۷: پانی تک 10 m بلند چپ بوتل سے تیراک 2.5 چکر کھاکر پہنچتا ہے۔ صفر ابتدائی انتہائی سمتی رفتار فرض کر کے، پرواز کے دوران تیراک کی اوسط زاویہ سمتی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۱۸.۴: گھومتے پیسے کے چکر پر ایک نقطے کا زاوی معام $\theta = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$ ہے، جہاں θ کاناپ ریڈیئن اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ لمحہ (ا) $t = 2.0$ s اور (ب) $t = 4.0$ s پر زاوی سستی رفتار کیا ہوں گی؟ (ج) وقت $t = 2.0$ s سے $t = 4.0$ s تک دورانیے میں اوسط زاوی اسراع کیا ہوگا؟ اس دورانیے کے (ج) آغاز میں اور (د) اختتام پر لمحاتی زاوی اسراع کیا ہوگا؟

سوال ۱۹.۴: ایک پہیا میں، جس جبار داس 30 cm ہے، آٹھ تیلیاں برابر فاصلوں پر نسب ہیں۔ یہ مقررہ دھرے پر 2.5 چکر فی سیکنڈ گھوم رہا ہے۔ آپ 20 cm لمبا تیسر مار کر، دھرے کے متوازی، تیلیوں کو چھوئے بغیر، پیسے کے اندر سے گزارنا چاہتے ہیں۔ تیسر اور تیلیوں کو انتہائی پستلا تصور کریں۔ (ا) تیسر کی کم سے کم رفتار کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) کیا دھرے اور چکر کے بیچ مارنے کا نقطہ اہمیت رکھتا ہے؟ اگر اہمیت رکھتا ہو، بہترین معام کیا ہوگا؟

سوال ۲۰.۴: پیسے کا زاوی اسراع $\alpha = 6.0t^4 - 4.0t^2$ ہے، جہاں α کاناپ ریڈیئن فی مربع سیکنڈ اور t کا سیکنڈ میں ہے۔ وقت $t = 0$ پر پیسے کی زاوی سستی رفتار 2.0 rad s^{-1} اور زاوی معام 1.0 rad ہے۔ (ا) زاوی سستی رفتار (rad s^{-1}) اور (ب) زاوی معام (ریڈیئن) کے قفا عمل وقت (سیکنڈ) کے لحاظ سے لکھیں۔

مستقل زاوی اسراع کا گھما

سوال ۲۱.۴: اپنے وسطی محور پر ڈرم 12.60 rad s^{-1} زاوی سستی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اگر اب ڈرم 4.20 rad s^{-2} کی مستقل شرح سے آہستہ ہو، اس کو رکھنے تک (ا) کتنا وقت چاہیے ہوگا اور (ب) رکھنے تک یہ کتنا زاوی گھومے گا؟

سوال ۲۲.۴: ساکن حالت سے آغاز کر کے ایک مقرر اپنے وسطی محور پر مستقل زاوی اسراع سے گھومتا ہے۔ ابتدائی 5.0 s میں مقرر 25 rad گھومتا ہے۔ اس دورانیے میں (ا) زاوی اسراع اور (ب) اوسط زاوی سستی رفتار کی مقدار کیا ہیں؟ (ج) اس 5.0 s دورانیے کے اختتام پر لمحاتی سستی رفتار کیا ہوگی؟ (د) زاوی اسراع برقرار رہنے کی صورت میں اگلے 5.0 s میں مقرر مزید کتنا زاوی طے کرتا ہے؟

سوال ۲۳.۴: ایک مقرر جو ابتدائی طور 120 rad s^{-1} سے گھوم رہا ہے، 4.0 rad s^{-2} قدر کے مستقل اسراع سے آہستہ ہوتا ہے۔ (ا) مقرر کے رکھنے تک کتنا وقت درکار ہوگا؟ (ب) رکھنے تک مقرر کتنا زاوی طے کریگا؟

سوال ۲۴.۴: ایک گاڑی کی کھڑکی 1200 چکر فی منٹ سے بڑھا کر 3000 چکر فی منٹ کی جاتی ہے۔ (ا) اس کا اسراع چکر فی مربع منٹ میں کیا ہوگا؟ (ب) ان 12 s میں کل (انجن) کتنے چکر کاٹتی ہے؟

سوال ۲۵.۴: اڑنے پہیا 40 چکروں میں 1.5 rad s^{-1} زاوی رفتار سے ساکن حالت کو پہنچتا ہے۔ (ا) مستقل زاوی اسراع مندرجہ کرتے ہوئے، رکھنے کے لئے درکار وقت معلوم کریں۔ (ب) اس کا زاوی اسراع کیا ہوگا؟ (ج) 40 چکر میں سے ابتدائی 20 چکر اڑنے پہیا کتنے وقت میں کاٹتا ہے؟

سوال ۴.۲۶: ساکن حالت سے آغاز کر کے، مستقل اسراع کے ساتھ، اپنی وسطی محور پر مقرر گھومتا ہے۔ کسی ایک لمحے مقرر 10 چکر فی سیکنڈ سے گھومتا ہے؛ 60 چکر بعد اس کی زاوی رفتار 15 چکر فی سیکنڈ ہے۔ (ا) مقرر کا زاوی اسراع، (ب) یہ 60 چکر کو درکار دورانہ، (ج) 10 چکر فی سیکنڈ رفتار تک پہنچنے کے لئے درکار دورانہ، اور (د) ساکن حالت سے 10 چکر فی سیکنڈ رفتار تک پہنچنے تک کل چکر تلاش کریں۔

سوال ۴.۲۷: مقرر کے وسطی نقطہ سے گزرتی انتہائی دھڑے پر ساکن حالت سے مقرر آغاز کر کے $\alpha = 3.0 \text{ rad s}^{-2}$ سے چل پڑتا ہے۔ کسی مخصوص 4.0 s دورانے میں مقرر 120π ریڈیئن گھومتا ہے۔ مقرر کتنے وقت میں 4.0 s دورانے کو پہنچتا ہے؟

سوال ۴.۲۸: ساکن حالت سے آغاز کر کے محور گھماؤ پر مقرر زاوی اسراع 1.50 rad s^{-2} سے چلتا ہے۔ (ا) ابتدائی 2.00 چکر اور (ب) اگلے 2.00 چکر کتنے وقت میں طے ہوں گے؟

سوال ۴.۲۹: لمحہ $t = 0$ پر اڑن پیسے کی زاوی سمتی رفتار 4.7 rad s^{-1} ، مستقل زاوی اسراع -0.25 rad s^{-2} ، اور حوالہ لکیر پر $\theta_0 = 0$ ہے۔ (ا) حوالہ لکیر مثبت رخ زیادہ سے زیادہ کتنا زاویہ بلند θ طے کرے گی؟ کس وقت حوالہ لکیر (ب) پہلی مرتبہ اور (ج) دوسری مرتبہ بلند $\theta = \frac{1}{2}\theta_0$ پر ہوگی؟ کس (د) منفی وقت اور (ه) مثبت وقت پر حوالہ لکیر $\theta = 10.5 \text{ rad}$ پر ہوگی؟ (و) θ بالقابل t ترسیم کر کے اس پر اپنے جوابات کی نشاندہی کریں۔

سوال ۴.۳۰: نابض^{۲۵} تیزی سے گھومتے نیوٹران تارہ کو کہتے ہیں جو منارہ نور کی طرہ شعاع خارج کرتا ہے۔ نابض ہر چکر کے دوران زمین پر ایک مرتب شعاع مارتا ہے۔ دو متواتر شعاعوں کے بیچ دورانہ ناپ کر گھومنے کا دوری عرصہ T معلوم کیا جاتا ہے۔ سدیم السرطان^{۲۶} میں موجود نابض کا دوری عرصہ $T = 0.033 \text{ s}$ ہے، جو ایک سال میں 1.26×10^{-5} سیکنڈ شرح سے بڑھ رہا ہے۔ (ا) نابض کا زاوی اسراع α کیا ہے؟ (ب) اگر α مستقل ہو، نابض آج سے کتنے سال بعد رک جائے گا؟ (ج) یہ نابض ۱۰۵۴ء میں دیکھے گئے مستعر اعظم^{۲۷} دھماکے میں پیدا ہوا۔ مستقل α تصور کر کے ابتدائی T تلاش کریں۔

خطی اور زاوی متغیرات کا تعلق

سوال ۴.۳۱: خلائی طیارہ $29\,000 \text{ km h}^{-1}$ رفتار سے چلتے ہوئے 3220 km رداس کا دائری موڑ کاٹتا ہے۔ طیارے (ا) کی زاوی سمتی رفتار، (ب) رداسی اسراع، اور (ج) مماسی اسراع کی قدریں کیا ہیں؟

سوال ۴.۳۲: ایک جسم مقررہ محور پر گھومتا ہے، اور جسم پر حوالہ لکیر مازاوی مقام $\theta = 0.40e^{2t}$ ہے، جہاں θ ریڈیئن میں اور t سیکنڈوں میں ہے۔ محور گھماؤ سے 4.0 cm فاصلے پر نقطہ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر نقطہ (ا) کے اسراع کے مماسی جزو اور (ب) اسراع کے رداسی جزو کی قدر کیا ہوگی؟

سوال ۴.۳۳: ۱۹۱۱ء اور ۱۹۹۰ء کے بیچ اطالیہ کے شہر پیماس میں واقع جھکا بڑھ^{۲۸} کی چوٹی جنوب کے رخ لالانہ اوسطاً

^{۲۵}pulsar
^{۲۶}Crabnebula
^{۲۷}supernova
^{۲۸}leaning tower of Pisa

1.2 mm حسیرت کرتی رہی۔ برج 55 m بلند ہے۔ برج کے پسند اپر برج کی زاوی رفتار ریڈین فی سیکنڈ میں کتنی ہے؟

سوال ۴.۳۴: حنلابز کو 10 m رداس کے مرکز گریہ^{۲۹} میں $\theta = 0.30t^2$ کے لحاظ سے گھا کر حانچا جاتا ہے۔ وقت $t = 5.0$ s پر (ا) زاوی سستی رفتار، (ب) خطی سستی رفتار، (ج) مساسی اسراع، اور (د) رداسی اسراع کی فدریں کیا ہوں گی؟

سوال ۴.۳۵: ایک اڑن پھیا جس کا قطر 1.20 m ہے 200 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ (ا) اڑن پیسے کی زاوی رفتار ریڈین فی سیکنڈ میں کتنی ہے؟ (ب) اڑن پیسے کے چکا پر نقطے کی خطی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) پیسے کی زاوی رفتار 60 s میں بڑھا کر 1000 چکر فی منٹ کرنے کے لئے مستقل زاوی اسراع (چکر فی مربع منٹ میں) کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۶: گراموفون^{۳۰} کی سوئی (پلاسٹک کی بنی ہوئی) تھالی^{۳۱} کی چوڑیوں پر چیل کر آواز پیدا کرتی ہے۔ چوڑی میں بیچ و حنم پر چیل کر سوئی ارتعاش پذیر ہو گی۔ گراموفون میکانی ارتعاش کو پہلے برقی ارتعاش میں اور اس کے بعد آواز میں تبدیل کرتا ہے۔ فرض کریں ہتالی $33\frac{1}{2}$ چکر فی منٹ شرح سے گھومتی ہے، جس چوڑی کو بجایا حبارا ہے، اس کا رداس 10.0 cm ہے، اور چوڑی میں حنم یکساں 1.75 mm فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ حنم کس شرح (حکر فی سیکنڈ) سے سوئی کو ٹکراتے ہیں؟

سوال ۴.۳۷: (ا) سطح زمین پر 40° شمال کے خط عرض^{۳۲} پر واقع نقطے کی قطبی محور پر زاوی رفتار ω کیا ہو گی؟ (ب) زمین قطبی محور پر گھومتی ہے۔ (ب) اس نقطے کی خطی رفتار v کیا ہو گی؟ خط استوا^{۳۳} پر واقع نقطے کی (ج) ω اور (د) v کیا ہوں گی؟

سوال ۴.۳۸: دغانی^{۳۴} (دحانی انجن) کا اڑن پھیا 150 چکر فی منٹ کی مستقل زاوی سستی رفتار سے حسیرت میں ہے۔ بھاپ روکنے پر سیرنگ کی رگڑ اور ہوائی رگڑ پیسے کو 2.2 گھنٹوں میں روکتی ہیں۔ (ا) رکنے کے دوران پیسے کا مستقل زاوی اسراع، چکر فی مربع منٹ میں، کیا ہو گا؟ (ب) رکنے تک پھیا کتنے چکر کاٹتا ہے؟ (ج) جس لمح اڑن پیسے کی زاوی رفتار 75 چکر فی منٹ ہے، پیسے پر محور گھاوے 50 cm فاصلے پر نقطے کے خطی اسراع کا مساسی حسیرت کیا ہو گا؟ (د) ذرے کے صافی اسراع کی فدر کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۹: تھینہ گھوم^{۳۵} پر، جو $33\frac{1}{3}$ چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے، بیچ کا داس^{۳۶} محور گھاوے 6.0 cm فاصلے پر پڑا ہے۔ (ا) بیچ کا اسراع کیا ہے اور (ب) پھسلنے سے بچنے کے لئے کم سے کم سکونی رگڑ کا مستقل کیا ہو گا؟ (ج) اگر ساکن حاسلت سے تحت اس رفتار تک 0.25 s میں مستقل زاوی اسراع سے پہنچا ہو، پھسلنے سے بچنے کے لئے کم سے کم سکونی رگڑ کا مستقل کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۰: رداس $r_A = 10$ cm اور $r_C = 25$ cm کے پیسوں کو پونٹ B ملاتا ہے (شکل 31.10)۔ ساکن حاسلت سے پھیا A کی زاوی رفتار 1.6 rad s^{-2} مستقل شرح سے بڑھتی جاتی ہے۔ پھیا C کو 1000 چکر

centrifuge^{۲۹}
gramophone^{۳۰}
vinyl record^{۳۱}
latitude^{۳۲}
equator^{۳۳}
steam engine^{۳۴}
turntable^{۳۵}

نی منٹ تک پہنچنے کے لئے کتنا وقت درکار ہوگا (پٹہ پھلتا نہیں ہے)؟ (اشارہ: اگر پٹہ بھٹے نہیں، دونوں پہیوں کے چپے برابر خطی رفتار سے حرکت کریں گے۔)

سوال ۴.۴۱: روشنی کی رفتار نانے کی ایک پرانی ترکیب شکل 32.10 میں دکھائی گئی ہے، جس میں شگاف دار گھومتا پہیا استعمال کیا جاتا ہے۔ پہیے کے بیرونی کنارے پر شگاف سے کرن گزر کر دور آئینہ سے ٹکرا کر، اسی راہ پر واپس چلتے ہوئے، پہیے پر پہنچتی ہے؛ اس دوران میں پہیا ایک شگاف آگے بڑھتا ہے؛ یوں کرن اگلے شگاف سے گزرتا ہے۔ پہیے کا رداس 5.0 cm، شگافوں کی تعداد 500، اور آئینے تک فاصلہ $L = 500 \text{ m}$ ہے۔ پیمائش سے معلوم ہوتا ہے کہ روشنی کی رفتار $3.0 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ ہے۔ (ا) پہیے کی مستقل (زاوی) رفتار کیا ہے؟ (ب) پہیے کے کنارے پر نقطے کی خطی رفتار کیا ہے؟

سوال ۴.۴۲: مکینز پڑھی کے اڑن پہیے کو، جس کا رداس 2.83 cm ہے، ساکن حالت سے 14.2 rad s^{-2} سے سرع کر کے 2760 چکر فی منٹ کی زاوی رفتار تک لایا جاتا ہے۔ (ا) اس دوران پہیے کے چکا پر واقع نقطے کے ماسی اسراع کیا ہوگا؟ (ب) پوری رفتار پر گھومنے کے دوران نقطے کا رداسی اسراع کیا ہوگا؟ (ج) اختتامی رفتار تک پہنچنے تک چکا پر واقع نقطے کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

سوال ۴.۴۳: ایک فطرص، جس کا رداس 0.25 m ہے، فطرص کی وسطی انتصابی محور پر 800 rad گھمانا مقصود ہے۔ ساکن حالت سے آغاز کر کے، ابتدائی 400 rad کے دوران فطرص کو مستقل α_1 شرح سے سرع کیا جاتا ہے جس کے بعد مستقل $\alpha_1 -$ شرح سے اس کی زاوی رفتار گھٹائی جاتی ہے، حتیٰ کہ فطرص رک جاتا ہے۔ ضروری ہے کہ فطرص کے کسی حصے کے مرکز مائل اسراع کی قدر 400 m s^{-2} سے تجاوز نہ کرے۔ (ا) گھماؤ کا کم دوران کیا ہو سکتا ہے؟ (ب) مطابقتی α_1 کی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۴.۴۴: ساکن حالت سے آغاز کر کے گاڑی 30.0 m رداس کی دائری راہ پر چلتی ہے۔ اس کی رفتار 0.500 m s^{-2} مستقل شرح سے بڑھتی ہے۔ (ا) مسانی خطی اسراع کی قدر 15.0 s بعد کیا ہوگی؟ (ب) اس لمحے پر گاڑی کا مسانی سمتیہ اسراع اور گاڑی کی سمتی رفتار آپس میں کس زاویے پر ہیں؟

گھماؤ کی حرکت کی توانائی

سوال ۴.۴۵: ایک پہیا 602 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے اور اس کی حرکت کی توانائی 24 400 J ہے۔ پہیے کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۶: ایک پستلی سلاخ ایک سر پر گھمائی جاتی ہے۔ شکل 33.10 میں سلاخ کی زاوی رفتار بالمتقابل وقت پیش ہے۔ محور کا بیس $\omega = 6.0 \text{ rad s}^{-1}$ تعیین کرتا ہے۔ (ا) سلاخ کے زاوی اسراع کی قدر کیا ہے؟ (ب) لمحہ $t = 4.0 \text{ s}$ پر سلاخ کی گھمیری حرکت کی توانائی 1.60 J ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سلاخ کی حرکت کی توانائی کیا ہوگی؟

گھمیری جمود کا حساب

سوال ۴.۴۷: دو یکساں ٹھوس بیلن اپنے اپنے وسطی (طولی) محور پر 235 rad s^{-1} سے گھوم رہے ہیں۔ ان کی انفرادی کمیت 1.25 kg تاہم رداس مختلف ہیں۔ (۱) چھوٹے بیلن کی، جس کا رداس 0.25 m ہے، اور (ب) بڑے بیلن کی، جس کا رداس 0.75 m ہے، گھمیری حسر کی توانائی کیا ہوگی؟

سوال ۴.۴۸: مقررہ کے وسط سے رداس h فاصلے پر محور کے گرد مقررہ گھوم سکتا ہے (شکل 34a.10)۔ مقررہ کے وسط سے کنارے تک h کی قیتوں کے لئے مقررہ کا گھمیری جمود I شکل 34b.10 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ محور I کا پیما $I_A = 0.050 \text{ kg m}^2$ اور $I_B = 0.150 \text{ kg m}^2$ تعین کرتے ہیں۔ مقررہ کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹: میٹر سلاخ، جس کی کمیت 0.56 kg ہے، کا گھمیری جمود 20 cm نشان پر واقع سلاخ کو عمودی محور پر تلاش کریں۔ (میٹر سلاخ کو پستلی سلاخ تصور کریں۔)

سوال ۴.۵۰: بلا کمیت سلاخ کے ساتھ تین ذرے چسپاں کیے گئے ہیں (شکل 35.10)۔ سلاخ کی لمبائی $L = 6.00 \text{ cm}$ اور ذروں کی انفرادی کمیت 0.0100 kg ہے۔ یہ نظام سلاخ کے بائیں سر پر واقع نقطہ O سے گزرتی عمودی محور پر گھوم سکتا ہے۔ ہم ایک ذرہ ہٹاتے ہیں (جو 33% کمیت ہٹاتا ہے)۔ محور سے (۱) مقررہ ترین ذرہ اور (ب) دور ترین ذرہ ہٹانے پر، نظام کا گھمیری جمود کتنے فی صد کم ہوگا؟

سوال ۴.۵۱: اٹن پیپے کو برقی موٹر سے 200π ریڈیئن فی سیکنڈ رفتار تک پہنچا کر گھومتے اٹن پیپے میں ذخیرہ توانائی سے ٹرک چلایا جا سکتا ہے۔ فرض کریں اٹن پیپا ٹھوس اور یکساں بیلن ہے، جس کی کمیت 500 kg اور رداس 1.0 m ہے۔ (۱) بھرائی کے بعد اٹن پیپے کی حسر کی توانائی کتنی ہوگی؟ (ب) اگر ٹرک اوسطاً 8.0 kW طاقت استعمال کرتا ہو، بھرائی کتنی دیر میں دوبارہ کرنی ہوگی؟

سوال ۴.۵۲: بالکل ایک جیسے 15 مقررہ سیدھ میں رکھ کر سلاخ کی شکل میں، جس کی لمبائی $L = 1.0000 \text{ m}$ اور (کل) کمیت $M = 100.0 \text{ mg}$ ہے، جوڑے گئے ہیں (شکل 36.10)۔ مقررہ یکساں ہیں اور پورا نظام درمیانے مقررہ کے وسطی نقطہ O پر گھوم سکتا ہے۔ (۱) اس محور پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (ب) نظام کو M کمیت اور L لمبائی کی سلاخ تصور کرنے سے جبدول $2e.10$ کا کلیہ استعمال کرنے سے گھمیری جمود کے حساب میں کتنے فی صد سہو پیدا ہوگا۔

سوال ۴.۵۳: دو ذروں کو، جن کی انفرادی کمیت $m = 0.85 \text{ kg}$ ہے، ایک دوسرے کے ساتھ اور O پر واقع محور گھماؤ کے ساتھ سے دو سلاخ جوڑتی ہیں۔ ان سلاخوں کی انفرادی کمیت اور لمبائی $M = 1.2 \text{ kg}$ اور $d = 5.6 \text{ cm}$ ہے (شکل 37.10)۔ نظام محور گھماؤ پر $\omega = 0.30 \text{ rad s}^{-2}$ زاویہ رفتار سے گھومتا ہے۔ محور O پر نظام (۱) کا گھمیری جمود اور (ب) حسر کی توانائی کیا ہیں؟

سوال ۴.۵۴: چار ذروں کی کمیتیں اور محدود ذیل ہیں: $x = 0 \text{ cm}$ ، $y = 2.0 \text{ cm}$ ، $x = 2.0 \text{ cm}$ ، $y = 5.0 \text{ cm}$ ، $x = -3.0 \text{ cm}$ ، $y = -3.0 \text{ cm}$ ، $x = -2.0 \text{ cm}$ ، $y = 4.0 \text{ cm}$ ، $x = 4.0 \text{ cm}$ ۔ محور (۱) x ، (ب) y ، (ج) z پر نظام کا گھمیری جمود تلاش کریں۔ (د) ہم جبڑو اور جبڑو کے جوابات کو بالترتیب A اور B سے ظاہر کرتے ہیں۔ جبڑو کا جواب A اور B کے روپ میں لکھیں۔

سوال ۴.۵۵: ٹھوس سل کی کیت 0.172 kg اور اضلاع $a = 3.5 \text{ cm}$ ، $b = 8.4 \text{ cm}$ ، اور $c = 1.4 \text{ cm}$ ہیں (شکل 38.10)۔ بڑی سطح کو عمودی، ایک کونے سے گزرتی، محور گھماؤ پر سل کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

سوال ۴.۵۶: چار ایک جیسے ذروں کو، جن کی انفرادی کیت 0.50 kg ہے، $2.0 \text{ m} \times 2.0 \text{ m}$ چوکور کی چار اس پر رکھے جاتے ہیں، اور انہیں بلا کیت سلاخوں سے، جو چوکور کے اضلاع بناتے ہیں، جوڑا جاتا ہے۔ (ا) مخالف اضلاع کے وسطی نقطوں سے گزرتی محور گھماؤ پر، جو چوکور کی سطح میں پایا جاتا ہے، (ب) ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گزرتی محور گھماؤ پر، جو چوکور کی سطح کو عمودی ہے، اور (ج) دوتری مخالف ذروں سے گزرتی محور گھماؤ پر، جو چوکور کی سطح میں پایا جاتا ہے، اس استوار جسم کا گھمیری جمود تلاش کریں۔

قوت مسروڑ

سوال ۴.۵۷: ایک جسم پر، جس کا چول نقطہ O پر ہے، دو قوت عمل کرتی ہیں (شکل 39.10)۔ اگر $r_1 = 1.30 \text{ m}$ ، $r_2 = 2.15 \text{ m}$ ، $F_1 = 4.20 \text{ N}$ ، $\theta_1 = 75.0^\circ$ اور $\theta_2 = 60.0^\circ$ ہو، چول پر صافی قوت مسروڑ کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۸: ایک جسم پر، جس کا چول O پر ہے، تین قوت عمل کرتی ہیں (شکل 40.10) جو ذیل ہیں: نقطہ A پر جو O سے 8.0 m فاصلے پر ہے $F_A = 10 \text{ N}$ ؛ نقطہ B پر جو O سے 4.0 m فاصلے پر ہے $F_B = 16 \text{ N}$ ؛ اور نقطہ C پر جو O سے 3.0 m فاصلے پر ہے $F_C = 19 \text{ N}$ ۔ چول پر صافی قوت مسروڑ تلاش کریں۔

سوال ۴.۵۹: بلا کیت، لمبی، سلاخ کے ایک سر پر 0.75 kg گیند باندھ کر، سلاخ کا دوسرا سر چول سے لٹکایا جاتا ہے۔ جب حاصل روتاص انتصاب کے ساتھ 30° پر ہو، چول پر تحب ذبی قوت مسروڑ کی مقدار کیا ہوگی؟

سوال ۴.۶۰: سائیکل کے پائیدان کا بازو 0.152 m ہے اور سائیکل سوار پائیدان پر 111 N نشینی قوت لاگو کرتا ہے۔ پائیدان بازو کے چول پر اس وقت قوت مسروڑ کی مقدار کیا ہوگی جب انتصاب کے ساتھ پائیدان کا زاویہ (ا) 30° ، (ب) 90° ، اور (ج) 180° ہو؟

نیوٹن کا تانوں دوم برائے گھماؤ

جوابات

