طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۱۴ر فروری ۲۰۲۴

عنوان

باب ۵

لڑھکاو، قوت مروڑ، اور زاوی معیار حرکت

۵.۱ مستقیم حرکت اور گھماو مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ لڑھکاو خالص مستقیم حرکت اور خالص گھماو کا مجموعہ ہے۔

۲. ہموار لڑھکاو میں مرکز کمیت کی رفتار اور جسم کی زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- رداس R کے پہیا کے لئے جو ہموار سطح پر لڑھک رہا ہو ذیل ہو گا:

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$$

جہاں $v_{\text{مرکز کمیت}}$ پہیے کے مرکز کمیت کی خطی رفتار اور ω پہیے کے وسط پر پہیے کی زاوی رفتار ہے۔

- پہیے کو نقطہ P کے گرد، جو "فرش" کے ساتھ مس ہے، لمحاتی گھومتا تصور کیا جا سکتا ہے۔ مرکز کمیت کے گرد اور اس نقطہ کے گرد جسم کی زاوی رفتار برابر ہے۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا باب ۴ میں ذکر کیا گیا، گھماو کا مطالعہ طبیعیات میں شامل ہے۔ غالباً، اس مطالعے کا اہم ترین اطلاق پہیے اور پہیے نما اجسام کا لڑھکاو ہے۔ یہ اطلاقی طبیعیات بہت عرصہ سے استعمال میں ہے۔ قدیم

زمانے میں بھاری اجسام لٹھا پر لڑھکاتے ہوئے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیے جاتے تھے۔ آج کل ہم گاڑی میں سامان رکھ کر ایک جگہ سے دوسری جگہ لڑھکاتے ہیں۔

لڑھکاو کی طبیعیات اور انجینئری اتنی پرانی ہے کہ اس میں نئے تصور ممکن نظر نہیں آتے۔ تاہم، **پہیے دار تختہ**[۱] زیادہ پرانا نہیں۔ ہمارا کام یہاں لڑھکاو کی حرکت کو سادہ بنانا ہے۔

مستقیم حرکت اور گھماوت مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

سطح پر ہمواری سے لڑھکتے اجسام پر یہاں غور کیا جائے گا؛ یعنی جسم بغیر اچھلے یا پھسلے سطح پر حرکت کرتا ہے۔ شکل 2.11 میں ہموار لڑھکاو کی پیچیدگی دکھائی گئی ہے: اگرچہ جسم کا مرکز کمیت سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، چکا پر نقطہ یقیناً ایسا نہیں کرتا۔ بہر حال، اس حرکت کو مرکز کمیت کی مستقیم حرکت اور باقی جسم کا، اس مرکز پر، گھماو تصور کیا جا سکتا ہے۔

اسے سمجھنے کے لئے، فرض کریں آپ سڑک کے کنارے کھڑے ہو کر، گزرتے ہوئے سائیکل کے پہیے کا مطالعہ کرتے ہیں (شکل 3.11)۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، پہیے کا مرکز کمیت O مستقل رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ سے آگے بڑھتا ہے۔ نقطہ P، جہاں پہیا سڑک کو مس کرتا ہے، بھی $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے آگے بڑھتا ہے، اور یوں P ہمیشہ O کے ٹھیک نیچے رہتا ہے۔

وقتی دورانیہ t کے دوران، O اور P دونوں فاصلہ s طے کرتے ہیں۔ سائیکل سوار کے نقطہ نظر سے، پہیا زاویہ θ طے کرتا ہے اور جو نقطہ t کے آغاز میں زمین پر تھا قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے۔ مساوات ۱۷.۴ قوسی فاصلہ s اور زاویہ θ کا تعلق دیتی ہے:

$$s = \theta R \tag{۵.۱}$$

جہاں R پہیے کا رداس ہے۔ پہیے کے مرکز (یہاں پہیے کا مرکز کمیت) کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ ہم $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ سے جان سکتے ہیں۔ پہیے کے مرکز پر پہیے کی زاوی رفتار $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ہو گی۔ یوں R مستقل رکھتے ہوئے، مساوات ۵.۱ کا وقت کے ساتھ تفرق ذیل دیگا۔

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R \qquad \text{(ہموار لڑھکاو حرکت)} \tag{۵.۲}$$

دونوں کا ملاپ۔ شکل 4.11 میں دکھایا گیا ہے کہ پہیے کی لڑھکتی حرکت خالص مستقیم حرکت اور خالص گھمیری حرکت کا مجموعہ ہے۔ شکل 4a.11 خالص گھمیری حرکت پیش کرتی ہے (جس میں مرکز پر محور گھماو ساکن تصور کیا جاتا ہے): پہیے کا ہر نقطہ، مرکز پر، زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ (ایسی حرکت پر باب ۴ میں غور کیا گیا۔) پہیے کے باہری کنارے (چکا) پر ہر نقطے کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ مساوات ۵.۲ دیتی ہے۔ شکل 4b.11 میں خالص مستقیم حرکت پیش ہے (جس میں تصور کیا جاتا ہے کہ پہیا گھوم نہیں رہا): پہیے کا ہر نقطہ $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے دائیں حرکت کرتا ہے۔

---

[۱] skateboards

شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 مل کر، شکل 4c.11 میں پیش، پہیے کی اصل لڑھکنی حرکت دیتی ہیں۔ حرکات کے ملاپ میں پہیے کا نچلا نقطہ (P) ساکن ہے جبکہ پہیے کا بالا نقطہ (T)، کسی بھی دوسرے نقطہ سے زیادہ تیز، $2v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ شکل 5.11 میں ان نتائج کا اثباتی مظاہرہ کیا گیا ہے، جہاں سائیکل کے لڑھکنی پہیے کا **وقتیہ افشا**[۲] پیش ہے۔ آپ دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پہیے کا بالا حصہ زیادہ تیزی سے حرکت کرتا ہے، چونکہ اس حصے کی تیلیاں مدھم نظر آتی ہیں۔

سطح پر دائری جسم کی ہموار لڑھکنی حرکت کو، شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 کی طرح، خالص گھمیری حرکت اور خالص مستقیم حرکت میں علیحدہ علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔

لڑھکاو بطور خالص گھماو

شکل 6.11 میں پہیے کا لڑھکاو نئے انداز میں پیش کیا گیا ہے؛ جس نقطے پر پہیا سڑک مس کرتا ہے، اس نقطے سے گزرتی محور پر پہیا گھومتا ہے؛ یہ محور $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت میں ہو گی۔ ہم لڑھکاو کو، شکل 4c.11 میں نقطہ P سے گزرتی، پہیے کو عمود دار، محور پر خالص گھماو تصور کرتے ہیں۔ یوں شکل 6.11 میں سمتیات، لڑھکنی پہیے پر نقطوں کی لمحاتی سمتی رفتار دیتے ہیں۔

سوال: ساکن مشاہدہ کار اس محور پر سائیکل کے لڑھکنی پہیے کو کیا زاوی رفتار مختص کرے گا؟

جواب: وہی زاوی رفتار ω جو سائیکل سوار مرکز کمیت کے گرد خالص گھماو کا مشاہدہ کرتے ہوئے پہیے کو مختص کرتا ہے۔

اس جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر، ہم ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پہیے کے فراز کی خطی رفتار تلاش کرتے ہیں۔ پہیے کا رداس R لیتے ہوئے، پہیے کا فراز شکل 6.11 میں P پر واقع محور سے $2R$ فاصلے پر ہو گا، لہٰذا فراز کی خطی رفتار (مساوات ۱۵.۲ استعمال کر کے) ذیل ہو گی:

$$v_{\text{فراز}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{مرکز کمیت}}$$

جو شکل 4c.11 کے عین مطابق ہے۔ آپ شکل 4c.11 میں پیش، نقطہ O اور P کی، خطی رفتار کی تصدیق بھی اس طرح کر سکتے ہیں۔

آزمائش ۱

ایک سائیکل کے پچھلے پہیے کا رداس اگلے پہیے کے رداس کا دگنا ہے۔ (ا) کیا چلنے کے دوران بڑے پہیے کے فراز کی خطی رفتار چھوٹے پہیے کے فراز کی خطی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس کے برابر ہے؟ (ب) کیا پچھلے پہیے کی زاوی رفتار اگلے پہیے کی زاوی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا دونوں برابر ہیں؟

---

[۲] timeexposure

۵.۲ لڑھکاو کی قوتیں اور حرکی توانائی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. مرکز کمیت کی مستقیم حرکی توانائی اور مرکز کمیت کے گرد گھمیری حرکی توانائی کا مجموعہ حاصل کر کے جسم کی حرکی توانائی معلوم کر پائیں گے۔

۲. ہمواری کے ساتھ لڑھکنی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اور جسم پر سرانجام کام کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. ہموار لڑھکاو (لہٰذا بغیر پھسلن) کے لئے، میکانی توانائی کی بقا استعمال کر کے ابتدائی توانائی کی قیمتوں اور اختتامی توانائی کی قیمتوں کا تعلق جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ہموار لڑھکنی پہیے کی حرکی توانائی ذیل ہے،

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$$

جہاں مرکز کمیت پر جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ اور پہیے کی کمیت M ہے۔

- اگر پہیا مسرع کیا جائے، اور پہیا اب بھی ہمواری کے ساتھ لڑھکتا ہے، مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ اور مرکز پر زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R$$

- اگر θ زاویہ کے میلان پر پہیا ہمواری کے ساتھ اترتے ہوئے لڑھکتا ہو، اس کا اسراع، میلان کے ہمراہ اوپر رخ محور x پر، ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2}$$

لڑھکاو کی حرکی توانائی

آئیں ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پہیے کی حرکی توانائی معلوم کریں۔ اگر ہم شکل 6.11 میں نقطہ P سے گزرتی محور پر لڑھکاو کو خالص گھماو تصور کریں، تب مساوات ۴.۳۴ ذیل دیگی،

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{۵.۳}$$

جہاں P پر واقع محور کے گرد پہیے کا گھمیری جمود I_P اور پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ مساوات ۴.۳۶ کے مسئلہ متوازی محور ($I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2$) کے تحت ذیل ہو گا،

$$I_P = I_{\text{مرکز کمیت}} + MR^2 \tag{۵.۴}$$

جہاں M پہیے کی کمیت، مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، اور R (پہیے کا رداس) عمودوار فاصلہ h ہے۔ مساوات ۵.۴ کو مساوات ۵.۳ میں ڈال کر:

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

اور مساوات ۵.۲ ($v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$) استعمال کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۵.۵}$$

جزو $\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2$ کو مرکز کمیت سے گزرتی محور پر پہیے کے لڑھکاو سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4a.11)، اور جزو $\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$ کو پہیے کے مرکز کمیت کی مستقیم حرکت سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4b.11)۔ یوں ذیل قاعدہ ابھرتا ہے۔

لڑھکنی جسم کی دو قسم کی حرکی توانائیاں ہوں گی: مرکز کمیت پر گھماو کی بدولت گھمیری حرکی توانائی ($\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2$) اور مرکز کمیت کی مستقیم حرکت کی بدولت مستقیم حرکی توانائی ($\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$)۔

لڑھکاو کی قوتیں

رگڑ اور لڑھکاو

اگر پہیا مستقل رفتار سے لڑھکتا ہو، جیسا شکل 3.11 میں دکھایا گیا ہے، نقطہ تماس P پر پہیا ہرگز نہیں پھسلتا لہٰذا اس نقطے پر رگڑ نہیں ہو گی۔ تاہم، اگر صافی قوت پہیے کو تیز یا آہستہ کرتی ہو، تب یہ صافی قوت مرکز کمیت کو حرکت کے رخ اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ بخشے گی۔ ساتھ ہی پہیا تیز یا آہستہ گھومے گا، لہٰذا زاوی اسراع α بھی ہو گا۔ ان اسراع کی بدولت پہیا P پر پھسل سکتا ہے۔ یوں P پر رگڑی قوت عمل کرتی ہوئے پہیے کو پھسلنے سے روکتی ہے۔

اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی اور حرکت ہموار لڑھکاو ہو گا۔ ایسی صورت میں، (R مستقل رکھ کر) وقت کے ساتھ مساوات ۵.۲ کا تفرق لے کر خطی اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کی قدر اور زاوی اسراع کی قدر α کا تعلق حاصل کر سکتے ہیں۔ بائیں ہاتھ $\mathrm{d}v_{\text{مرکز کمیت}}/\mathrm{d}t$ در حقیقت $a_{\text{مرکز کمیت}}$ اور دائیں ہاتھ $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ در حقیقت α ہے۔ یوں ہموار لڑھکاو کے لئے ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R \qquad (\text{ہموار لڑھکنی حرکت}) \tag{۵.۶}$$

جب پہیے پر عمل پیرا اضافی قوت کی بدولت پہیا پھسلے، تب شکل 3.11 میں P پر حرکی رگڑی قوت $\vec{f}_k$ عمل کرے گی؛ حرکت تب ہموار لڑھکاو نہیں ہو گی، اور مساوات ۵.٦ کا اطلاق نہیں ہو گا۔ اس باب میں صرف ہموار لڑھکنی حرکت پر بات کی جائے گی۔

شکل 7.11 میں، افقی سطح پر دائیں رخ لڑھکتے ہوئے، سائیکل مقابلے کے آغاز کی طرح، پہیا زیادہ تیز گھمایا جاتا ہے۔ زیادہ تیز گھماو کی بدولت P پر پہیا پھسل کر بائیں جانا چاہتا ہے۔ نقطہ P پر دائیں رخ رگڑی قوت اس رجحان کا مقابلہ کرتی ہے۔ اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی (جیسا دکھایا گیا ہے)، حرکت ہموار لڑھکاو ہو گی، اور مساوات ۵.٦ کا اطلاق ہو گا۔ (رگڑ کی غیر موجودگی میں سائیکل مقابلہ ممکن نہیں ہو گا۔)

اگر شکل 7.11 میں پہیا آہستہ کیا جائے، ہمیں شکل دو طرح تبدیل کرنی ہو گی: مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کا رخ اور نقطہ P پر رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کا رخ اب بائیں رخ ہو گا۔

میلان سے نیچے لڑھکاو

شکل 8.11 میں گول یکساں جسم، جس کی کمیت M اور رداس R ہے، زاویہ θ کے میلان پر ہمواری سے، محور x کے ہمراہ، نیچے لڑھک رہا ہے۔ ہم میلان کے ہمراہ اترائی کے رخ جسم کے اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ کا ریاضی فقرہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ نیوٹن کے قانون دوم کی خطی صورت $(F_{\text{صافی}} = Ma)$ اور زاوی صورت $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ صورت دونوں استعمال کر کے ایسا کرتے ہیں۔

جسم پر قوتوں کا خاکہ بنانے سے آغاز کرتے ہیں (شکل 8.11)۔

۱. جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ نشیب وار ہے۔ اس سمتیہ کی دم جسم کے مرکز کمیت پر رکھی جاتی ہے۔ میلان کے ہمراہ جزو $F_g \sin\theta$ ہے جو $Mg\sin\theta$ کے برابر ہو گا۔

۲. میلان کو عمودی دار جزو $\vec{F}_N$ ہے۔ یہ جزو نقطہ تماس P پر عمل کرتا ہے، تاہم شکل 8.11 میں، $\vec{F}_N$ کا رخ تبدیل کیے بغیر، اس کو یوں کھسکایا گیا ہے کہ اس کی دم جسم کے مرکز کمیت پر ہو۔

۳. نقطہ تماس P پر عمل پیرا سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ میلان کے ہمراہ چڑھائی کے رخ ہے۔ (کیا آپ بتا سکتے ہیں، کیوں؟ اگر P پر جسم پھسلے، وہ اترائی کے رخ پھسلے گا۔ یوں مخالف رگڑی قوت چڑھائی کے رخ ہو گی۔)

ہم شکل 8.11 میں محور x کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم $(F_{\text{صافی},x} = ma_x)$ لکھتے ہیں۔

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{صافی},x} \tag{۵.۷}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور $a_{\text{صافی},x}$، پائے جاتے ہیں۔ (ہم f_s کی قیمت، رگڑی قوت کی زیادہ سے زیادہ قیمت، $f_{s,\text{بلند ترین}}$ فرض نہیں کر سکتے۔ ہم صرف اتنا جانتے ہیں کہ رگڑی قوت اتنی ہے کہ جسم پھسلتا نہیں اور میلان پر ہمواری سے لڑھکتا اترتا ہے۔)

ہم اب جسم کے مرکز کمیت پر جسم کے گھماو پر نیوٹن کے قانون دوم کا اطلاق کرتے ہیں۔ پہلے، مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ استعمال کر کے مرکز کمیت کے لحاظ سے جسم پر قوت مروڑ لکھتے ہیں۔ رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے معیار اثر کا بازو R ہے، لہٰذا اس کی قوت مروڑ Rf_s ہو گی، جو اس لئے مثبت ہے کہ شکل 8.11 میں یہ جسم کو خلاف

گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ مرکز کمیت کے لحاظ سے قوت $\vec{F}_g$ اور $\vec{F}_N$ کے معیار اثر بازو صفر ہیں، لہٰذا ان کی قوت مروڑ صفر ہوں گی۔ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ میں لکھتے ہیں۔

$$Rf_s = I_{\text{مرکز کمیت}}\alpha \tag{۵.۸}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور α، پائے جاتے ہیں۔

جسم ہموار لڑھکتا ہے لہٰذا مساوات ۵.۶ $(a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R)$ استعمال کر کے نامعلوم $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ اور α کا تعلق لکھا جا سکتا ہے۔ تاہم، ہمیں ہوشیاری سے کام لینا ہو گا، چونکہ یہاں $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ منفی (محور x پر منفی رخ ہے) اور α مثبت (خلاف گھڑی) ہے۔ یوں مساوات ۵.۸ میں α کی جگہ $-a_{\text{مرکز کمیت},x}/R$ ڈال کر f_s کے لئے حل کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$f_s = -I_{\text{مرکز کمیت}}\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} \tag{۵.۹}$$

مساوات ۵.۷ میں f_s کی جگہ مساوات ۵.۹ کا دایاں ہاتھ ڈال کر ذیل ملتا ہے۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2} \tag{۵.۱۰}$$

اس مساوات کو استعمال کر کے، افق کے ساتھ زاویہ θ کے میلان پر کے ہمراہ لڑھکتے جسم کا خطی اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ حاصل ہو گا۔

یاد رہے، تجاذبی قوت جسم کو میلان پر اترنے پر مجبور کرتی ہے، تاہم جسم کو گھومنے اور یوں لڑھکنے پر رگڑی قوت مجبور کرتی ہے۔ اگر آپ رگڑ خارج کر دیں (مثلاً، میلان کو تیل سے چکنا کر کے) یا $Mg\sin\theta$ کو $f_{s,\text{بلند تر}}$ سے زیادہ کر دیں، ہموار لڑھکاو خارج ہو جائے گا اور جسم لڑھکنے کی بجائے میلان پر پھسل کر اترے گا۔

آزمائش ۲

قرص A اور B ایک جیسے ہیں اور فرش پر ایک جتنی رفتار سے لڑھکتے ہیں۔ قرص A کے سامنے میلان آتا ہے جس پر یہ زیادہ سے زیادہ h تک پہنچتا ہے۔ قرص B متماثل، لیکن بلا رگڑ، میلان پر چڑھتا ہے۔ کیا h سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر بلندی تک B پہنچے گا؟

نمونی سوال ۵.۱: یکساں گیند، جس کی کمیت $M = 6.00\,\text{kg}$ اور رداس R ہے، زاویہ $\theta = 30.0°$ میلان سے، ساکن حالت سے آغاز کر کے، ہموار لڑھکتا اترتا ہے (شکل 8.11)۔

(ا) انتصابی $h = 1.20\,\text{m}$ نیچے زمین کو پہنچتا کر گیند کی رفتار کیا ہو گی؟

کلیدی تصورات

چونکہ صرف تجاذبی قوت، جو بقائی قوت ہے، گیند پر کام سر انجام دیتی ہے، لہٰذا میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند و زمین نظام کی میکانی توانائی E کی بقا ہو گی۔ میلان سے گیند پر عمودی دار قوت گیند کی راہ کو عمودی ہونے کی وجہ سے کوئی کام سر انجام نہیں دیتی۔ گیند پھسلتا نہیں (ہموار لڑھکتا ہے) لہٰذا رگڑی قوت کوئی توانائی حرری توانائی میں تبدیلی نہیں کرتی۔

یوں میکانی توانائی کی بقا ہو گی $E_f = E_i$:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{۵.۱۱}$$

جہاں زیر نوشت f اور i بالترتیب (زمین پر پہنچ کر) اختتامی اور (ساکن حالت) ابتدائی قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ تجاذبی مخفی توانائی کی ابتدائی قیمت $U_i = Mgh$ (جہاں M گیند کی کمیت ہے) اور اختتامی قیمت $U_f = 0$ ہے۔ ابتدائی حرکی توانائی $K_i = 0$ ہے اختتامی حرکی توانائی جاننے کے لئے اضافی تصور درکار ہے: چونکہ گیند لڑھکتا ہے اس کی حرکی توانائی میں مستقیم اور گھمیری جزو شامل ہوں گے، جنہیں شامل کرنے کے لئے مساوات ۵.۵ کا دایاں ہاتھ استعمال کرتے ہیں۔

حساب: مساوات ۵.۱۱ میں ڈالنے سے ذیل حاصل ہو گا:

$$(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}) + 0 = 0 + Mgh \tag{۵.۱۲}$$

جہاں گیند کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گیند کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، زمین پر پہنچ کر گیند کی رفتار (جو ہم تلاش کرنا چاہتے ہیں) $v_{\text{مرکز کمیت}}$، اور زمین پر پہنچ کر زاوی رفتار ω ہے۔

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، ہم مساوات ۵.۲ استعمال کر کے ω کی جگہ $v_{\text{مرکز کمیت}}/R$ پُر کر کے مساوات ۵.۱۲ میں نامعلوم متغیرات کی تعداد کم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے، اور جدول 2f.10 سے $I_{\text{مرکز کمیت}}$ کی جگہ $\frac{2}{5}MR^2$ ڈال کر $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کے لئے حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\tfrac{10}{7})gh} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(1.20\,\mathrm{m})} \\ &= 4.10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

یاد رہے، جواب M اور R پر منحصر نہیں۔

(ب) میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند پر رگڑی قوت کی قدر اور رخ کیا ہیں؟

کلیدی تصور

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، مساوات ۵.۹ گیند پر رگڑی قوت دیگی۔

حل: مساوات ۵.۹ استعمال کرنے سے قبل ہمیں مساوات ۵.۱۰ سے گیند کا اسراع معلوم کرنا ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -I_{\text{مرکز کمیت}}\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}MR^2\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma_{\text{مرکز کمیت},x}$$
$$= -\frac{2}{5}(6.00\,\text{kg})(-3.50\,\text{m s}^{-2}) = 8.40\,\text{N} \qquad (\text{جواب})$$

یاد رہے ہمیں کمیت M درکار تھی جبکہ رداس R نہیں تھا۔ یوں، $30°$ میلان پر $6.00\,\text{kg}$ ہموار لڑھکتے گیند پر، گیند کے رداس سے قطع نظر، رگڑی قوت $8.40\,\text{N}$ ہو گی، تاہم بڑی کمیت کی صورت میں رگڑی قوت زیادہ ہو گی۔ □

۵.۳ ڈوری دار لٹو

مقاصد اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے **ڈوری دار لٹو**[۳] کا آزاد جسمی خاکہ بنا پائیں گے۔

۲. جان پائیں گے کہ ڈوری دار لٹو، ایسا جسم ہے جو $90°$ زاویہ میلان پر ہموار اوپر نیچے لڑھکتا ہے۔

۳. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے ڈوری دار لٹو کے اسراع اور گھمیری جمود کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. ڈوری پر اوپر یا نیچے حرکت کے دوران ڈوری دار لٹو کی ڈور میں تناو تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- ڈوری دار لٹو جو ڈور پر اوپر یا نیچے حرکت کرتا ہو کو $90°$ میلان پر ہموار لڑھکتا جسم تصور کیا جا سکتا ہے۔

ڈوری دار لٹو

ڈوری پر h فاصلہ اتر کر ڈوری دار لٹو کی مخفی توانائی میں mgh کمی واقع ہو گی جبکہ اس کی حرکی توانائی کے مستقیم جزو $(\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}})$ اور گھمیری جزو $(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2)$ میں اضافہ ہو گا۔

ڈوری دار لٹو کی ایک نئی قسم میں ڈور کو دھرے کے ساتھ سخت باندھنے کے بجائے ڈور کو دھرے کے گرد ڈھیلا گھیرا دیا جاتا ہے۔ جب لٹو نیچے اترتے ہوئے ڈور کے پیندا کو "ٹکراتا" ہے، دھرے پر ڈور اوپر وار قوت لاگو کر کے لٹو کی نشیبی حرکت روکتی ہے۔ اس کے بعد لٹو صرف گھمیری حرکی توانائی کے ساتھ (دھرا گھیر میں چکر کاٹتا ہوا) گھومتا ہے۔ لٹو ("سوتے ہوئے") چکر کاٹتا رہتا ہے؛ ڈور کو جھٹکا دینے پر ڈور دھرے کو پکڑتی ہے، "لٹو بیدار ہوتا ہے"، اور اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ ڈور کے پیندا پر لٹو کی گھمیری حرکی توانائی (اور یوں سونے کا دورانیہ) بڑھانے کی خاطر لٹو کو ساکن حالت سے روانا کرنے کی بجائے ابتدائی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ اور ω کے ساتھ نشیب وار پھینکا جاتا ہے۔

---

[۳] Yo-Yo

ڈور پر نشیب وار اترنے کے دوران لٹو کا خطی اسراع $a_{\text{مرکز کمیت}}$ جاننے کے لئے، شکل 8.11 میں میلان پر اترتے لڑھکتے جسم کی طرح، نیوٹن کا قانون دوم (خطی اور گھمیری روپ میں) استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ماسوائے ذیل، تجزیہ بالکل اسی طرح ہو گا۔

۱. افق کے ساتھ θ زاویے کے میلان پر اترنے کے بجائے ڈوری دار لٹو افق کے ساتھ $90°$ زاویے کی ڈور پر اترتا ہے۔

۲. رداس R کی بیرونی سطح پر لڑھکنے کے بجائے ڈوری دار لٹو رداس R_0 کے دھرے پر لڑھکتا ہے (شکل 9a.11)۔

۳. رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے بجائے، ڈوری دار لٹو کو ڈور کا تناو $\vec{T}$ آہستہ کرتا ہے (شکل 9b.11)۔

موجودہ تجزیہ بھی مساوات ۵.۱۰ دے گا۔ آئیں مساوات ۵.۱۰ کی ترقیم تبدیل کر کے اور $\theta = 90°$ ڈال کر خطی اسراع ذیل لکھتے ہیں:

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR_0^2} \tag{۵.۱۳}$$

جہاں لٹو کے مرکز کمیت پر لٹو کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ اور کمیت M ہے۔ ڈوری پر اوپر چڑھنے کے دوران ڈوری دار لٹو کا اسراع یہی نشیبی اسراع ہو گا۔

۵.۴ قوت مروڑ پر نظر ثانی

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس نقطے پر قوت مروڑ تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. ذرے پر عمل پیرا قوت کی ذرے پر قوت مروڑ، اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم کے روپ میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور قوت سمتیہ کے صلیبی ضرب سے حاصل کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے قوت مروڑ کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- تین ابعاد میں، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ ایک سمتیہ مقدار ہو گی، جو کسی مقررہ نقطے (عموماً مبدا) کے لحاظ سے تعین کی جاتی ہے؛ اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جہاں $\vec{F}$ ذرے پر لاگو قوت اور $\vec{r}$ کسی مقررہ نقطے کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ ہے، جو ذرے کا مقام دیتا ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی قدر τ ذیل ہو گی:

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

جہاں $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی دار جزو $F_{\perp}$، اور $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو $r_{\perp}$ ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کا رخ صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

قوت مروڑ پر نظر ثانی

باب ۴ میں مقررہ محور کے گرد گھومنے کے قابل استوار جسم کے لئے قوت مروڑ τ کی تعریف پیش کی گئی۔ ہم قوت مروڑ کی تعریف کو وسعت دے کر (مقررہ محور کے بجائے) مقررہ نقطے کے لحاظ سے کسی بھی راہ پر حرکت کرتے ہوئے انفرادی ذرے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ راہ کا دائری ہونا ضروری نہیں، اور ہم قوت مروڑ کو سمتیہ $\vec{\tau}$ لکھتے ہیں جس کا رخ کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ قوت مروڑ کی قدر کلیہ سے اور رخ صلیبی ضرب کے دایاں ہاتھ قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 10a.11 میں، نقطہ A پر مستوی xy میں ایسا ایک ذرہ دکھایا گیا ہے۔ ذرے پر، مستوی میں قوت، $\vec{F}$ عمل کرتی ہے، اور مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ دیتا ہے۔ مقررہ نقطہ O کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا **قوت** مروڑ $\vec{\tau}$ کی تعریف ذیل ہے۔

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad \text{قوت مروڑ کی تعریف} \tag{۵.۱۴}$$

قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی اس تعریف میں سمتی (صلیبی) ضرب کی تحسیب حصہ 3.3 کے قواعد سے کی جا سکتی ہے۔ $\vec{\tau}$ کا رخ جاننے کے لئے، سمتیہ $\vec{F}$ کو (رخ تبدیل کیے بغیر) کھسکا کر اس کی دم مبدا O پر رکھی جاتی ہے؛ یوں، جیسا شکل 10b.11 میں دکھایا گیا ہے، سمتی ضرب کے دونوں سمتیات کی دم ایک نقطے پر ہو گی۔ اب ہم شکل 19a.3 میں پیش دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ پر رکھ کر (ضرب میں پہلا سمتیہ ہے) $\vec{F}$ کی طرف جھکاتے ہیں (جو ضرب میں دوسرا سمتیہ ہے)۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\tau}$ کا رخ دیگا۔ شکل 10b.11 میں $\vec{\tau}$ کا رخ محور z کے مثبت رخ ہے۔

$\vec{\tau}$ کی قدر جاننے کے لئے، ہم مساوات 27.3 $(c = ab\sin\phi)$ کا عمومی نتیجہ بروئے کار لاتے ہیں، جو ذیل دیگا:

$$\tau = rF\sin\phi \tag{۵.۱۵}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے دم ایک نقطے پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 10b.11 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۵.۱۵ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = rF_{\perp} \tag{۵.۱۶}$$

جہاں $F_{\perp}$ (جو $F\sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{r}$ کا $\vec{F}$ کا عمودی دار جزو ہے۔ شکل 10c.11 کو دیکھ کر مساوات ۵.۱۵ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = r_{\perp}F \tag{۵.۱۷}$$

جہاں $r_\perp$ (جو $r\sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو ($\vec{F}$ کے خط عمل اور O کے بیچ عمودی فاصلہ) ہے۔

آزمائش ۳

ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، مثبت محور z کے ہمراہ پایا جاتا ہے۔ اگر ذرے پر قوت مروڑ (ا) صفر ہو، (ب) محور x کے منفی رخ ہو، اور (ج) محور y کے منفی رخ ہو، قوت مروڑ پیدا کرنے والی قوت کا رخ کیا ہوگا؟

نمونی سوال ۵.۲: **قوت کی بدولت ذرے پر قوت مروڑ**

شکل 11a.11 میں، $2.0\,\mathrm{N}$ قدر کی تین قوت ذرے پر عمل کرتی ہیں۔ ذرہ، مستوی xy میں، نقطہ A پر ہے، جس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، جہاں $r = 3.0\,\mathrm{m}$ اور $\theta = 30°$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ہر قوت کی انفرادی قوت مروڑ کیا ہے؟

کلیدی تصور

چونکہ قوت ایک مستوی میں نہیں پائی جاتیں، ہمیں صلیبی ضرب استعمال کرنا ہوگی، جس کی قدر مساوات ۵.۱۵ $(\tau = rF\sin\phi)$ دیگی اور رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

حساب: ہم مبدا O کے لحاظ سے قوت مروڑ جاننا چاہتے ہیں لہٰذا دیا گیا تعین گر سمتیہ صلیبی ضرب میں درکار سمتیہ $\vec{r}$ ہوگا۔ قوت اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ جاننے کے لئے ہم شکل 11a.11 میں دیے گئے سمتیہ قوت باری باری یوں کھسکاتے ہیں کہ ان کی دم O پر ہو۔ انتقال کے بعد قوت $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، اور $\vec{F}_3$ بالترتیب شکل 11b.11، شکل 11c.11، اور شکل 11d.11 میں، جو مستوی xz کا نظارہ دیتی ہیں، دکھائی گئی ہیں (جن میں سمتیہ قوت اور تعین گر سمتیہ کے بیچ زاویے با آسانی نظر آتے ہیں)۔ شکل 11d.11 میں $\vec{r}$ اور $\vec{F}_3$ کے رخ کے بیچ زاویہ $90°$ ہے اور علامت $\otimes$ کہتی ہے $\vec{F}_3$ صفحہ میں عمودی اندر رخ ہے۔ (صفحہ سے عمودی نکلنے کی صورت میں $\odot$ علامت استعمال کی جاتی ہے۔)

مساوات ۵.۱۵ استعمال کر ذیل حاصل ہوگا۔

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= rF_1\sin\phi_1 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 150°) = 3.0\,\mathrm{N\,m}\\
\tau_2 &= rF_2\sin\phi_2 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 120°) = 5.2\,\mathrm{N\,m}\\
\tau_3 &= rF_3\sin\phi_3 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 90°) = 6.0\,\mathrm{N\,m} \qquad \text{(جواب)}
\end{aligned}
$$

اب دائیں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ رکھ کر $\vec{F}$ کے رخ (سمتیات کے رخ کے بیچ چھوٹے زاویے) گھماتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کا انگوٹھا، جو چار انگلیوں کو عمودی رکھا گیا ہے، قوت مروڑ کا رخ دیگا۔ یوں $\vec{\tau}_1$ شکل 11b.11 میں صفحے کے اندر جانے کے رخ ہوگا؛ $\vec{\tau}_2$ شکل 11c.11 میں صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہوگا؛ اور $\vec{\tau}_3$ کا رخ شکل 11d.11 میں دکھایا گیا ہے۔ تینوں قوت مروڑ سمتیات شکل 11e.11 میں پیش ہیں۔ □

۵.۵ زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ زاوی معیار حرکت ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس مقررہ نقطے کے لحاظ سے زاوی معیار حرکت تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور معیار حرکت سمتیہ کا صلیبی ضرب لے کر ذرے کا زاوی معیار حرکت تعین کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے زاوی معیار حرکت کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ایک ذرہ، جس کا خطی معیار حرکت $\vec{p}$، کمیت m، اور خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ ہو، کا مقررہ نقطے کے لحاظ سے (جو عموماً مبدا ہو گا) زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی تعریف ذیل سمتی مقدار ہے۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

- زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر ℓ ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\ell &= rmv\sin\phi \\ &= rp_\perp = rmv_\perp \\ &= r_\perp p = r_\perp mv\end{aligned}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ اور $\vec{v}$ کے عمودی دار جزو $p_\perp$ اور $v_\perp$ ہیں، اور مقررہ نقطے سے مبسوط $\vec{p}$ تک عمودی دار فاصلہ $r_\perp$ ہے۔

- دایاں ہاتھ قاعدہ $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا: دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ پر (ابتدائی طور) رکھ کر انہیں گھما کر $\vec{p}$ کے رخ پر رکھیں۔ دائیں ہاتھ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا۔

زاوی معیار حرکت

یاد کریں، خطی معیار حرکت $\vec{p}$ اور خطی معیار حرکت کی بقا کا اصول انتہائی طاقتور اوزار ہیں۔ انہیں استعمال کر کے نتائج کی، مثلاً دو گاڑیوں کے تصادم کی تفصیل جانے بغیر تصادم کی، پیشگوئی کی جا سکتی ہے۔ یہاں ہم $\vec{p}$ کے زاوی مد مقابل پر تبصرہ شروع کرتے ہیں جس کا اختتام حصہ 8.11 میں بقائی اصول کے مد مقابل پر ہو گا۔

شکل 12.11 میں مستوی xy میں نقطہ A سے کمیت m اور خطی معیار حرکت $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ کا ذرہ گزرتا دکھایا گیا ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا **زاوی معیار حرکت**[۴] $\vec{\ell}$ سمتیہ مقدار ہو گا جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \text{(زاوی معیار حرکت کی تعریف)} \tag{۵.۱۸}$$

جہاں O کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے جب ذرہ معیار حرکت $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ کے رخ کرتا ہے، اس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ مبدا O کے گرد گھمیری حرکت کرتا ہے۔ غور کریں، O پر زاوی معیار حرکت کے لئے ضروری نہیں کہ ذرہ خود O کے گرد گھومتا ہو۔ مساوات ۵.۱۴ اور مساوات ۵.۱۸ کا موازنہ کرنے سے معلوم ہو گا کہ زاوی معیار حرکت اور خطی معیار حرکت کا آپس میں وہی رشتہ ہے جو قوت مروڑ کا قوت کے ساتھ ہے۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں زاوی معیار حرکت کی اکائی کلوگرام مربع میٹر فی سیکنڈ $(\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}})$ ہے، جو جاول سیکنڈ $(\mathrm{J\,s})$ کا معادل ہے۔

رخ۔ شکل 12.11 میں زاوی معیار حرکت سمتیہ $\vec{\ell}$ کا رخ جاننے کے لئے، ہم سمتیہ $\vec{p}$ کو کھسکا کر کے اس کی دم مبدا O پر رکھتے ہیں۔ اس کے بعد صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے انگلیوں کو $\vec{r}$ سے $\vec{p}$ لپیٹتے ہیں۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ، شکل 12.11 میں، محور z کا مثبت رخ دیتا ہے۔ یہ مثبت رخ، محور z پر تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ کے خلاف گھڑی گھماو کے عین مطابق ہے، جو ذرے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ($\vec{\ell}$ کی منفی قیمت محور z پر گھڑی وار گھماو ظاہر کرے گی۔)

قدر۔ زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات 27.3 کا عمومی نتیجہ ذیل لکھتے ہیں:

$$\ell = rmv\sin\phi \tag{۵.۱۹}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کی دم ایک نقطہ پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 12a.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp \tag{۵.۲۰}$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ کا عمود دار جزو $p_\perp$ ہے، اور $\vec{r}$ کو $\vec{v}$ کا عمود دار جزو $v_\perp$ ہے۔ شکل 12b.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv \tag{۵.۲۱}$$

جہاں مبسوط $\vec{p}$ سے O کا عمود دار فاصلہ $r_\perp$ ہے۔

اہم۔ دو پہلو پر غور کریں: (1) زاوی معیار حرکت صرف کسی مخصوص مبدا کے لحاظ سے معنی خیز ہے اور (2) اس کا رخ ہر صورت اس مستوی کو عمودی ہو گا جو تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ اور خطی معیار حرکت سمتیہ $\vec{p}$ مل کر بناتے ہیں۔

آزمائش ۴

---

[۴] angular momentum

شکل ؟؟ ا میں ذرہ 1 اور 2 نقطہ O کے گرد بالترتیب رداس $2\,\text{m}$ اور $4\,\text{m}$ کے دائروں پر حرکت کرتے ہیں۔ شکل ب میں ذرہ 3 اور 4 نقطہ O سے بالترتیب $4\,\text{m}$ اور $2\,\text{m}$ عمود دار فاصلوں پر خط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ ذرہ 5 نقطہ O سے باہری رخ حرکت کرتا ہے۔ تمام ذروں کی کمیت اور رفتار برابر ہیں۔ (ا) نقطہ O پر زاوی معیار حرکت کے لحاظ سے، اعظم اول رکھ کر، ذروں کی درجہ بندی کریں۔ (ب) نقطہ O پر کن ذروں کا زاوی معیار حرکت منفی ہے؟

نمونی سوال ۵.۳: **دو ذروی نظام کا زاوی معیار حرکت**

افقی راہوں پر دو ذرے مستقل معیار حرکت کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔ شکل 13.11 میں ان کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ ذرہ 1، جس کے معیار حرکت کی قدر $p_1 = 5.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ $\vec{r}_1$ ہے، نقطہ O سے $2.0\,\text{m}$ فاصلے پر گزرے گا۔ ذرہ 2، جس کے معیار حرکت کی قدر $p_2 = 2.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ اور تعین گر سمتیہ $\vec{r}_2$ ہے، نقطہ O سے $4.0\,\text{m}$ فاصلے پر گزرے گا۔ دو ذروی نظام کا نقطہ O پر صافی زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کیا ہوگا؟

کلیدی تصور

انفرادی زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_1$ اور $\vec{\ell}_2$ معلوم کرنے کے بعد جمع کر کے ہم صافی معیار حرکت $\vec{L}$ تلاش کر سکتے ہیں۔ ان کی قدریں مساوات ۵.۱۸ تا مساوات ۵.۲۱ میں ہر ایک سے تعین کی جا سکتی ہیں۔ البتہ، ہمیں عمود دار فاصلے $r_{\perp 1}$ $(= 2.0\,\text{m})$ اور $r_{\perp 2}$ $(= 4.0\,\text{m})$ اور معیار حرکت کی قدریں p_1 اور p_2 دی گئی ہیں لہٰذا مساوات ۵.۲۱ کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔

حساب: ذرہ 1 کے لئے مساوات ۵.۲۱ ذیل دیگی۔

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= r_{\perp 1} p_1 = (2.0\,\text{m})(5.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) \\
&= 10\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

سمتیہ $\vec{\ell}_1$ کا رخ مساوات ۵.۱۸ اور سمتیات کے صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ دے گا۔ صلیبی ضرب $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ، شکل 13.11 کے مستوی کو عمود دار ہوگا۔ یہ مثبت رخ ہے، جو ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ $\vec{r}_1$ کا نقطہ O کے گرد خلاف گھڑی گھماو کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 1 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$
\ell_1 = +10\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}
$$

اسی طرح $\vec{\ell}_2$ کی قدر ذیل

$$
\begin{aligned}
\ell_2 &= r_{\perp 2} p_2 = (4.0\,\text{m})(2.0\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) \\
&= 8.0\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

اور $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ سمتیہ حاصل ضرب صفحہ سے باہر رخ ہے، جو منفی رخ ہے، اور جو ذرہ 2 کی حرکت کے دوران O کے گرد $\vec{r}_2$ کے گھڑی وار حرکت کے عین مطابق ہے۔ یوں ذرہ 2 کا زاوی معیار حرکت سمتیہ ذیل ہوگا۔

$$
\ell_2 = -8.0\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}
$$

دو ذروی نظام کا صافی زاوی معیار حرکت ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} L &= \ell_1 + \ell_2 = +10\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} + (-8.0\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}) \\ &= +2.0\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

مثبت علامت کہتی ہے O پر نظام کا صافی معیار حرکت صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہے۔ □

۵.۶ نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. زاوی روپ میں نیوٹن کا قانون دوم استعمال کر کے، کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، ذرے پر عمل پیرا قوت مروڑ اور ذرے کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کا رشتہ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

- نیوٹن کا قانون دوم کا زاوی روپ ذیل ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$$

جہاں $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ ذرے پر صافی قوت مروڑ اور $\vec{\ell}$ ذرے کا زاوی معیار حرکت ہے۔

نیوٹن کا قانون دوم، زاوی روپ

نیوٹن کا قانون دوم ذیل روپ میں:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(واحد ذرہ)} \tag{۵.۲۲}$$

واحد ذرے کے لئے، قوت اور خطی معیار حرکت کے بیچ قریبی رشتہ اجاگر کرتا ہے۔ ہم خطی اور زاوی مقادیر کی متوازیت دیکھ چکے ہیں اور توقع کر سکتے ہیں کہ قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کے بیچ بھی قریبی تعلق ہو گا۔ مساوات ۵.۲۲ کو دیکھ کر ہم ذیل تعلق کی توقع کرتے ہیں۔

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(واحد ذرہ)} \tag{۵.۲۳}$$

یقیناً، مساوات ۵.۲۳ واحد ذرے کے لئے نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے:

ذرے پر تمام قوت مروڑ کا (سمتی) مجموعہ ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی کے برابر ہو گا۔

□

کسی مخصوص نقطہ کے لحاظ سے، جو عموماً محددی نظام کا مبدا ہو گا، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ اور زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ تعین کیے بغیر مساوات ۵.۲۳ بے معنی ہو گی۔

مساوات ۵.۲۳ کا ثبوت

ہم مساوات ۵.۱۸ سے آغاز کرتے ہیں، جو ذرے کے زاوی معیار حرکت کی تعریف ہے:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

جہاں $\vec{r}$ ذرے کا تعین گر سمتیہ اور $\vec{v}$ ذرے کی سمتی رفتار ہے۔ دونوں اطراف کا تفرق[۵] t کے لحاظ سے لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m\left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}\right) \tag{۵.۲۴}$$

البتہ، $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ ذرے کا اسراع $\vec{a}$، اور $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ ذرے کی سمتی رفتار ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۴ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

اب $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ہے (چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے لہٰذا سمتیہ کا اپنے ساتھ سمتی ضرب ہمیشہ صفر کے برابر ہو گا۔) یوں آخری جزو خارج ہو گا اور ذیل رہ جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

ہم نیوٹن کا قانون دوم $(\vec{F}_{\text{صافی}} = m\vec{a})$ استعمال کر کے $m\vec{a}$ کی جگہ $\vec{F}_{\text{صافی}}$ ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{صافی}} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) \tag{۵.۲۵}$$

یہاں علامت $\sum$ کہتی ہے تمام قوتوں کے سمتی ضرب $\vec{r} \times \vec{F}$ کا مجموعہ لینا ہو گا۔ البتہ، مساوات ۵.۱۴ سے ہم جانتے ہیں (درج بالا) ہر سمتی ضرب کسی ایک قوت سے وابستہ قوت مروڑ ہو گا۔ یوں، مساوات ۵.۲۵ ذیل کہتی ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$$

---

[۵] سمتی حاصل ضرب کا تفرق لیتے ہوئے مستعمل مقادیر کی ترتیب برقرار رکھیں۔ یوں یہاں $\vec{r}$ ہمیشہ $\vec{v}$ سے پہلے ہو گا۔

جو مساوات ۵.۲۳ ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش ۵

کل ؟؟ میں کسی ایک لمحے پر ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، اور ذرے کو مسرع کرنے والی قوتوں کے چار ممکنہ رخ دیے گئے ہیں۔ تمام قوت سطح xy میں ہیں۔(ا) نقطہ O پر ذرے کے زاوی معیار حرکت میں تبدیلی $(\mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t)$ کی قدر کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی کریں۔(ب) نقطہ O پر کونسی قوت تبدیلی کی منفی شرح دیتی ہے؟

نمونی سوال ۵.۴: **قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کا وقتی تفرق**

ایک ذرہ جس کی کمیت $0.500\,\mathrm{kg}$ ہے اور جس کا تعین گر سمتیہ ذیل ہے، مستقیم خط پر حرکت میں ہے (شکل 14a.11):

$$\vec{r} = (-2.00t^2 - t)\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$$

جہاں $\vec{r}$ میٹر میں اور t سیکنڈ میں ہے، اور آغاز $t = 0$ پر ہوتا ہے۔ تعین گر سمتیہ مبدا سے ذرے کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ اکائی سمتیہ ترقیم میں، ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ اور ذرے پر قوت مروڑ $\vec{\tau}$ مبدا کے لحاظ سے (یا مبدا پر) تلاش کریں۔ ذرے کی حرکت کو مد نظر رکھتے ہوئے ان مقادیر کی الجبرائی علامت کی وجہ پیش کریں۔

کلیدی تصورات

(1) جس نقطہ پر ذرے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرنا ہو اس کی نشاندہی کرنا لازم ہے۔ یہاں وہ نقطہ مبدا پر واقع ہے۔(2) مساوات ۵.۱۸ $(\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}))$ ذرے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ دیتی ہے۔(3) ذرے کے زاوی معیار حرکت سے وابستہ علامت ($+$ یا $-$)، ذرے کی حرکت کے دوران ذرے کے تعین گر سمتیہ کے (محور گھماو کے گرد) گھماو کی سمت دیتی ہے: گھڑی وار منفی اور خلاف گھڑی مثبت ہوگا۔(4) اگر ذرے پر قوت مروڑ اور ذرے کا زاوی معیار حرکت ایک نقطہ پر حاصل کیے گئے ہوں، تب قوت مروڑ اور زاوی معیار حرکت کا تعلق مساوات ۵.۲۳ $(\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t)$ دیگی۔

حساب: مساوات ۵.۱۸ استعمال کر کے مبدا پر زاوی معیار حرکت تلاش کرنے کے لئے ضروری ہے کہ پہلے تعین گر سمتیہ کا وقتی تفرق لے کر ذرے کی سمتی رفتار کا الجبرائی فقرہ حاصل کیا جائے۔ مساوات 10.4 $(\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t)$ کو دیکھ کر ہم ذیل لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((-2.00t^2 - t)\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\,) \\ &= (-4.00t - 1.00)\hat{\imath}\end{aligned}$$

جہاں $\vec{v}$ میٹر فی سیکنڈ میں ہے۔

اس کے بعد مساوات 27.3 میں صلیبی ضرب کا دکھایا گیا ڈھانچہ استعمال کر کے $\vec{r}$ اور $\vec{v}$ کا صلیبی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

یہاں $\vec{r}$ کو عمومی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{v}$ کو عمومی سمتیہ $\vec{b}$ ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ، ہم ضرورت سے زیادہ کام نہیں کرنا چاہتے، آئیں عمومی صلیبی ضرب میں پُر کردہ بدل پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $\vec{r}$ میں z جزو اور $\vec{v}$ میں y اور z اجزاء نہیں پائے جاتے، اس عمومی صلیبی ضرب کا صرف آخری جزو $(-b_x a_y)\hat{k}$ غیر صفر ہے۔ یوں، زیادہ الجبرائی دوڑ کے بغیر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-4.00t - 1.00)(5.00)\hat{k} = (20.0t + 5.00)\hat{k}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

یاد رہے، ہمیشہ کی طرح صلیبی ضرب جو سمتیہ دیتی ہے وہ ابتدائی سمتیات کو عمودی دار ہو گا۔
مساوات ۵.۱۸ پوری کرنے کے لئے، کمیت سے ضرب دے کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= (0.500\,\mathrm{kg})[(20.0t + 5.00)\hat{k}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}]\\ &= (10.0t + 2.50)\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

مبدا پر قوت مروڑ اب مساوات ۵.۲۳ سے فوراً حاصل ہو گا:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10.0t + 2.50)\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\\ &= 10.0\hat{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = 10.0\hat{k}\ \mathrm{N\,m} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

جو محور z کے مثبت رخ ہے۔

ہمارا $\vec{\ell}$ کا نتیجہ کہتا ہے زاوی معیار حرکت محور z کے مثبت رخ ہے۔ تعین گر سمتیہ کے گھماو کی صورت میں "مثبت" نتیجہ کا مطلب سمجھنے کے لئے اس سمتیہ کی قیمت مختلف اوقات پر معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
t &= 0, & \vec{r}_0 &= 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}\\
t &= 1.00\,\mathrm{s}, & \vec{r}_1 &= -3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}\\
t &= 2.00\,\mathrm{s}, & \vec{r}_2 &= -10.0\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

یہ نتائج شکل 14b.11 میں پیش ہیں؛ ہم دیکھتے ہیں کہ ذرے کے ساتھ ساتھ چلنے کے لئے $\vec{r}$ خلاف گھڑی گھومتا ہے۔ یہی گھماو کا مثبت رخ ہے۔ یوں، اگرچہ ذرہ خود سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، مبدا کے لحاظ سے یہ اس کی حرکت خلاف گھڑی ہے، اور یوں اس کا زاوی معیار حرکت مثبت ہے۔

ہم $\vec{\ell}$ کے رخ کا مطلب، صلیبی ضرب (یہاں $\vec{v} \times \vec{r}$ یا آپ چاہیں $\vec{v} \times m\vec{r}$، جو ایک رخ دیتے ہیں) کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے سمجھ سکتے ہیں۔ ذرے کی حرکت کے دوران کسی بھی معیار اثر کے لئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں

صلیبی ضرب کے اول سمتیہ $\vec{r}$ کے رخ رکھی جاتی ہیں (شکل 14c.11)۔ ہاتھ یوں سمت بند کیا جاتا ہے کہ ہتھیلی کے گرد انگلیاں با آسانی گھما کر صلیبی ضرب کے دوسرے سمتیہ $\vec{v}$ کے رخ کی جائیں (شکل 14d.11)۔ اس پورے عمل کے دوران انگوٹھے کو چار انگلیوں کے لحاظ سے عمود دار رکھا جاتا ہے۔ انگوٹھا صلیبی ضرب کے نتیجے کا رخ دیگا۔ جیسا شکل 14e.11 میں دکھایا گیا ہے، ماحصل سمتیہ محور z کے مثبت رخ (جو شکل کے مستوی سے سیدھا باہر نکلتا ہے) اور گزشتہ نتیجے کے عین مطابق ہے۔ شکل 14e.11 میں $\vec{\ell}$ کا رخ بھی دیا گیا ہے، جو محور z کے مثبت رخ ہے؛ چونکہ، زاوی معیار حرکت اسی رخ ہے اور اس کی قدر بڑھ رہی ہے۔ □

۵.۷ استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ذروں پر مشتمل نظام کے لئے، نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ میں استعمال کر کے نظام پر صافی قوت مروڑ اور نظام کے زاوی معیار حرکت میں پیدا تبدیلی کی شرح کا تعلق جان پائیں گے۔

۲. مقررہ محور کے گرد گھومتے استوار جسم کے زاوی معیار حرکت اور اسی محور کے گرد جسم کے گھمیری جمود اور زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. اگر دو جسم ایک ہی محور گھماو کے گرد گھومتے ہوں، ان کے کل زاوی معیار حرکت کا حساب کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ذروں پر مشتمل نظام، کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت کا مجموعہ ہو گا۔

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$

- اس زاوی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ کے برابر ہو گی (جو نظام کے اندرونی ذروں اور نظام کے باہر ذروں کے باہم عمل سے پیدا قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ ہو گا)۔

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ذروں پر مشتمل نظام})$$

- مقررہ محور پر گھومتے استوار جسم کے لئے،، محور گھماو کے متوازی زاوی معیار حرکت کا جزو ذیل ہو گا۔

$$L = I\omega \qquad (\text{استوار جسم، مقررہ محور})$$

ذروں پر مشتمل نظام کا زاوی معیار حرکت

مبدا کے لحاظ سے ذروں پر مشتمل نظام کے زاوی معیار حرکت پر غور کرتے ہیں۔ نظام کا کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ انفرادی ذروں کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کا (سمتی) مجموعہ ہو گا۔

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \tag{۵.۲۶}$$

انفرادی زاوی معیار حرکت کو زیر نوشت i سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دیگر ذروں کے ساتھ یا نظام کے بیرون کے ساتھ باہم عمل کی بنا انفرادی ذرے کا زاوی معیار حرکت وقت کے ساتھ تبدیل ہو سکتا ہے۔ ہم $\vec{L}$ میں پیدا تبدیلی مساوات ۵.۲۶ کا (ذیل) وقتی تفرق معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_i}{\mathrm{d}t} \tag{۵.۲۷}$$

مساوات ۵.۲۳ سے ہم دیکھتے ہیں کہ i ویں ذرے پر صافی قوت مروڑ $\mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t$ ہو گی۔ مساوات ۵.۲۷ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\text{صافی},i} \tag{۵.۲۸}$$

یعنی، نظام کے زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تبدیلی کی شرح انفرادی ذروں پر قوت مروڑ کے سمتی مجموعہ کے برابر ہو گا۔ ان قوت مروڑ میں (ذروں کے بیچ قوتوں کی بنا) اندرونی قوت مروڑ اور (ذروں پر نظام سے باہر اجسام کی قوت کی بنا) بیرونی قوت مروڑ شامل ہیں۔ تاہم، ذروں کے بیچ قوت (نیوٹن کے قانون سوم کی بنا) جوڑیوں کے روپ میں ہو گی لہٰذا ان کی مجموعی قوت مروڑ صفر ہو گی۔ یوں، نظام کے کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کو صرف نظام پر عمل پیرا بیرونی قوت مروڑ تبدیل کرتی ہیں۔

صافی بیرونی قوت مروڑ۔ نظام میں تمام ذروں پر بیرونی قوت مروڑ کا سمتی مجموعہ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ صافی بیرونی قوت مروڑ کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں مساوات ۵.۲۸ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ذروں پر مشتمل نظام}) \tag{۵.۲۹}$$

جو نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے۔ اس کے تحت ذیل ہو گا۔

ذروں پر مشتمل نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ $\vec{\tau}_{\text{صافی}}$ نظام کے کل زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہو گی۔

مساوات ۵.۲۹ اور $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{صافی}}$ (مساوات 27.9) مماثل ہیں تاہم اول الذکر زیادہ احتیاط مانگتی ہے: قوت مروڑ اور نظام کا زاوی معیار حرکت ایک مبدا کے لحاظ سے ناپنا لازمی ہے۔ اگر اندرونی جمودی چھوکٹ کے لحاظ سے نظام کا مرکز کمیت مسرع نہ ہو، مبدا کسی بھی نقطے پر ہو سکتا ہے؛ اگر مسرع ہو، تب لازم ہے کہ مبدا مرکز کمیت پر ہو۔ مثال کے طور پر، پہیے کو ذروں پر مشتمل نظام تصور کریں۔ اگر زمین کے لحاظ سے ساکن محور پر پہیا گھومتا ہو، تب مساوات ۵.۲۹ استعمال کرتے وقت زمین کے لحاظ سے کوئی بھی ساکن نقطہ بطور مبدا تسلیم کیا جا سکتا ہے۔ البتہ، اگر پہیا مسرع محور کے گرد گھومتا ہو (جیسے جب پہیا میلان پر لڑھکتا نیچے آتا ہے)، تب صرف پہیے کا مرکز کمیت مبدا تسلیم کیا جا سکتا ہے۔

مقررہ محور پر استوار جسم کا زاوی معیار حرکت

ذروں پر مشتمل نظام (ذروی نظام) جو ایک استوار جسم دیتا ہے کا زاوی معیار حرکت تلاش کرتے ہیں۔ شکل 15a.11 میں ایسا ایک جسم دکھایا گیا ہے۔ محور z یہاں مقررہ محور گھماو ہے جس کے گرد جسم مستقل زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ اس محور پر ہم جسم کا زاوی معیار حرکت جاننا چاہتے ہیں۔

ہم جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کا انفرادی زاوی معیار حرکت معلوم کر کے ان کے z جزو کا مجموعہ لے کر ایسا کر سکتے ہیں۔ شکل 5a.11 میں کمیت Δm_i کا کمیتی ٹکڑا محور z کے گرد دائری راہ پر حرکت کرے گا۔ مبدا O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}_i$ دیگا۔ اس ٹکڑے کے دائری راہ کا رداس $r_{\perp i}$ ہو گا، جو ٹکڑے اور محور z کے بیچ عمودی دار فاصلہ ہے۔

مبدا O کے لحاظ سے اس کمیتی ٹکڑے کے زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ کی قدر مساوات ۵.۱۹ دیگی:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

جہاں p_i اور v_i کمیتی ٹکڑے کا خطی معیار حرکت اور خطی رفتار ہے، اور $\vec{r}_i$ اور $\vec{p}_i$ کے بیچ زاویہ 90° ہے۔ اس کمیتی ٹکڑے کا زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}_i$ شکل 5b.11 میں دکھایا گیا ہے؛ اس کا رخ $\vec{r}_i$ اور $\vec{p}_i$ دونوں کو لازماً عمود دار ہو گا۔

جزو z ۔ ہم محور گھماو کے، جو یہاں محور z ہے، متوازی $\vec{\ell}_i$ کا جزو جاننا چاہتے ہیں۔ جزو z ذیل ہو گا۔

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

پورے جسم کے زاوی معیار حرکت کا z جزو معلوم کرنے کے لئے جسم کے تمام کمیتی ٹکڑوں کے زاوی معیار حرکت کے z جزو کا مجموعہ لینا ہو گا۔ چونکہ $v = \omega r_{\perp}$ ہے لہٰذا ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_i \\ &= \omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2 \Big) \end{aligned} \tag{۵.۳۰}$$

جدول ۱.۵: مستقیم اور گھمیری حرکت کے مزید مطابقتی متغیرات اور رشتے

مستقیم		گھمیری	
قوت	$\vec{F}$	قوت مروڑ	$\vec{\tau}\,(=\vec{r}\times\vec{F})$
خطی معیار حرکت	$\vec{p}$	زاوی معیار حرکت	$\vec{\ell}\,(=\vec{r}\times\vec{p})$
خطی معیار حرکت	$\vec{P}\,(=\sum\vec{p}_i)$	زاوی معیار حرکت	$\vec{L}\,(=\sum\vec{\ell}_i)$
خطی معیار حرکت	$\vec{P}=M\vec{v}_{\text{مرکز کمیت}}$	زاوی معیار حرکت	$L=I\omega$
نیوٹن کا قانون دوم	$\vec{F}_{\text{صافی}}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$	نیوٹن کا قانون دوم	$\vec{\tau}_{\text{صافی}}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
قانون بقا	$\vec{P}=\text{مستقل}$	قانون بقا	$\vec{L}=\text{مستقل}$

یہاں ω مستقل (جسم کے تمام نقطوں کے لئے ایک برابر) ہے لہٰذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات ۵.۳۰ میں $\sum\Delta m_i r_{\perp i}^2$ مقررہ محور کے گرد جسم کا گھمیری جمود I ہے (مساوات ۴.۳۳ دیکھیں)۔ یوں مساوات ۵.۳۰ ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L=I\omega \qquad \text{(استوار جسم، مقررہ محور)} \tag{۵.۳۱}$$

ہم نے زیر نوشت z نہیں لکھا، تاہم آپ نے یاد رکھنا ہو گا کہ مساوات ۵.۳۱ میں زاوی معیار حرکت محور گھماو پر زاوی معیار حرکت ہو گا۔ (ہم نے کوئی محور گھماو لینی تھی۔ یہاں محور z لی گئی۔ لہٰذا زاوی معیار حرکت اس محور گھماو کے لحاظ سے ہو گا جس پر اسے حاصل کیا گیا ہو۔) ساتھ ہی اس مساوات میں I بھی اسی محور گھماو کے لحاظ سے ہو گا۔

جدول ۱.۵، جو جدول ۱.۴ کو وسعت دیتا ہے، مطابقتی خطی اور زاوی رشتے پیش کرتا ہے۔

آزمائش ۶

قرص، گھیرا، اور کرہ کو، لٹو کی طرح دھاگا لپیٹ کر، مقررہ وسطی محور پر گھمایا جاتا ہے (شکل ؟؟)۔ دھاگا تینوں جسم پر ایک جتنی مستقل مماسی قوت $\vec{F}$ لاگو کرتا ہے۔ تینوں جسم ابتدائی طور ساکن ہیں، ان کی کمیت اور رداس ایک برابر ہیں۔ گھومتے اجسام کی درجہ بندی (ا) وسطی محور پر زاوی معیار حرکت اور (ب) زاوی رفتار کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، کریں۔

۵.۸ زاوی معیار حرکت کی بقا

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. کسی مخصوص محور کے ہمراہ نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ کی عدم موجودگی میں، زاوی معیار حرکت کی بقا استعمال کر کے محور پر ابتدائی زاوی معیار حرکت کی قیمت کا رشتہ بعد کی قیمت کے ساتھ جان پائیں گے۔

کلیدی تصور

- نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ صفر ہونے کی صورت میں، نظام کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ ایک مستقل ہو گا۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \qquad (\text{جدا نظام})$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad (\text{جدا نظام})$$

اس کو زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون کہتے ہیں۔

زاوی معیار حرکت کی بقا

ہم توانائی کی بقا اور خطی معیار حرکت کی بقا کی بات کر چکے، جو طاقتور قوانین بقا ہیں۔ اب زاوی معیار حرکت کی بقا کی بات کرتے ہیں، جو تیسرا قانون بقا ہے۔ ہم مساوات ۵.۲۹ $(\vec{\tau}_{\text{صافی}} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t)$ سے آغاز کرتے ہیں، جو نیوٹن کے قانون دوم کا زاوی روپ ہے۔ بیرونی صافی قوت مروڑ کے عدم موجودگی میں یہ مساوات $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = 0$ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\vec{L} = \text{مستقل} \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۲}$$

یہ نتیجہ، جو ذیل دو طرح بھی لکھا جا سکتا ہے، **زاوی معیار حرکت کی بقا کا قانون**[۲] کہلاتا ہے۔

$$\left(\begin{array}{c}\text{بعد میں وقت } t_f \text{ پر}\\ \text{صافی زاوی معیار حرکت}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{ابتدائی وقت } t_i \text{ پر}\\ \text{صافی زاوی معیار حرکت}\end{array}\right)$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad (\text{جدا نظام}) \tag{۵.۳۳}$$

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ ذیل کہتی ہیں۔

نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ صفر ہونے کی صورت میں، اس سے قطع نظر کہ نظام کے اندر کیا تبدیلیاں رونما ہوں، نظام کا زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ برقرار رہے گا (ایک مستقل ہو گا)۔

---

[۲] law of conservation of angular momentum

مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ سمتیہ مساوات ہیں: جو تین آپس میں عمود دار رخ پر زاوی معیار حرکت کی بقا کی تین جزوی مساوات دیں گی۔ نظام پر بیرونی صافی قوت مروڑ موجود ہونے کی صورت میں، قوت مروڑ پر منحصر ہو گا، آیا زاوی معیار حرکت کی بقا صرف ایک یا دو رخ ہو، تاہم، تینوں رخ زاوی معیار حرکت کی بقا کبھی نہیں ہو گی۔

اگر کسی محور کے ہمراہ نظام پر صافی بیرونی قوت مروڑ کا جزو صفر ہو، تب اس سے قطع نظر کہ نظام میں کیا تبدیلیاں رونما ہوں، اس محور کے ہمراہ نظام کے زاوی معیار حرکت کا جزو تبدیل نہیں ہو گا۔

یہ ایک طاقتور فقرہ ہے: یہاں ہم نظام کے ابتدائی اور اختتامی حالت میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ درمیانی حالت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔

اس قاعدے کا اطلاق شکل 15.11 میں پیش جدا جسم پر، جو محور z کے گرد گھومتا ہے، کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کسی طرح جسم، محور گھماو کے لحاظ سے کمیت کی تقسیم نو کر کے، محور گھماو پر اپنا گھمیری جمود تبدیل کرتا ہے۔ مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ کہتی ہیں جسم کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ مساوات ۵.۳۳ میں (گھمیری محور پر زاوی معیار حرکت کی) مساوات ۵.۳۱ ڈال کر یہ قانون بقا کو ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \tag{۵.۳۴}$$

اس مساوات میں زیر نوشت i اور f کمیتی تقسیم نو سے قبل اور اس کے بعد گھمیری جمود اور زاوی رفتار ظاہر کرتے ہیں۔

باقی دو قوانین بقا کی طرح، جن پر ہم بحث کر چکے ہیں، مساوات ۵.۳۲ اور مساوات ۵.۳۳ نیوٹنی میکانیات کی حدود سے باہر بھی قابل اطلاق ہیں۔ ان کا اطلاق ان ذروں پر بھی ہو گا جو روشنی کی رفتار کے قریب رفتار پر حرکت میں ہوں (جہاں نیوٹنی میکانیات کارآمد نہیں رہتی اور جہاں خصوصی نظریہ اضافت استعمال کرنا ہو گا)، اور ان کا اطلاق زیر جوہر ذروں پر بھی ہو گا (جہاں کوانٹم میکانیات کا راج چلتا ہے)۔ آج تک ایسی کوئی مثال نہیں دیکھی گئی جو زاوی معیار حرکت کی بقا کے قانون کو مطمئن نہ کرتی ہو۔

اب ہم چار ایسی مثالوں پر بحث کرتے ہیں جن میں اس قانون کی دخل اندازی پائی جاتی ہے۔

۱. **چکر کھاتا رضاکار** شکل 16.11 میں ایک طالب علم تپائی پر، جو انتصابی محور پر گھوم سکتی ہے، بیٹھا دکھایا گیا ہے۔ پھیلے ہاتھوں میں وزن تھامے طالب علم کو ابتدائی زاوی رفتار ω_i سے گھمایا گیا۔ اس کا زاوی معیار حرکت سمتیہ $\vec{L}$ انتصابی محور پر اوپر رخ ہے۔

طالب علم ہاتھ جسم کے قریب کرتا ہے؛ کمیت محور گھماو کے قریب کرنے سے طالب علم کا گھمیری جمود I_i سے گھٹ کر I_f ہو گا، اور اس کے گھومنے کی شرح ω_i سے بڑھ کر ω_f ہو گی۔ ہاتھ پھیلا کر (وزن دور کر کے) طالب علم اپنی رفتار دوبارہ گھٹاتا ہے۔ طالب علم، تپائی، اور وزن پر مشتمل نظام پر کوئی صافی بیرونی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی۔ یوں، اس سے قطع نظر کہ طالب علم اپنے ہاتھ کہاں رکھتا ہے، محور گھماو پر نظام کا

زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو گا۔ شکل 16a.11 میں طالب علم کا زاوی رفتار ω_i کافی کم ہے اور اس کا گھمیری جمود I_i نسبتاً زیادہ۔ مساوات ۵.۳۴ کے تحت شکل 16b.11 میں I_f کے گھٹنے کی تلافی، زاوی رفتار میں اضافہ کرتا ہے۔

۲. **غوطہ باز** شکل 17.11 میں کمانی دار تختہ سے غوطہ باز ڈیڑھ کلابازیاں کھاتا دکھایا گیا ہے۔ جیسا آپ توقع کر سکتے ہیں، اس کا مرکز کمیت قطع مکافی راہ پر چلتا ہے۔ کمانی دار تختے سے، کلاباز اپنے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر، غیر مبہم زاوی معیار حرکت $\vec{L}$ کے ساتھ روانا ہوتا ہے، جو شکل 17.11 میں صفحہ کو عمود دار ہو گا۔ پرواز کے دوران کلاباز پر کوئی صافی بیرونی قوت مروڑ عمل نہیں کرتی، لہٰذا محور گھماو پر اس کا زاوی معیار حرکت تبدیل نہیں ہو سکتا۔ ہاتھ اور پیر جسم کے قریب کرنے پر اسی محور کے لحاظ سے، اس کے گھمیری جمود میں کمی رونما ہو گی، اور یوں مساوات ۵.۳۴ کے تحت اس کے زاوی رفتار میں اضافہ پیدا ہو گا۔ سطح پانی کو پہنچ کر کلاباز پورے جسم کو سیدھ میں کر کے گھمیری جمود بڑھا کر اور زاوی رفتار گھٹاتا ہے، تا کہ پانی میں داخل ہوتے وقت کم سے کم چھینٹیں اڑائے۔ زیادہ پیچیدہ غوطہ، جس میں کلاباز جسم کو بل دیتے ہوئے کلابازیاں کھاتا ہے، پوری پرواز کے دوران، غوطہ باز کے زاوی معیار حرکت کی، قدر اور رخ دونوں میں، بقا لازماً ہو گی۔

۳. 3itemp314,heream???

جوابات