طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۲۴ر جنوری ۲۰۲۴

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ v

۱ پیمائش ۱
۱.۱ وقت ۷
۱.۲ کمیت ۹
۱.۲.۱ کثافت ۱۰

۲ مخفی توانائی اور توانائی کی بقا ۱۷
۲.۰.۱ طاقت ۲۱

۳ مرکز کمیت اور خطی معیار حرکت ۲۹
۳.۱ ایک بُعد میں لچکی تصادم ۲۹
۳.۲ دو ابعاد میں تصادم ۳۱
۳.۳ تغیر کمیت کا نظام: ہوائی بان ۳۳

۴ گھماو ۶۱
۴.۱ گھماو کے متغیر ۶۱
۴.۱.۱ کلیدی تصور ۶۷
۴.۲ مستقل اسراع کے ساتھ گھماو ۷۲
۴.۳ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ ۷۵
۴.۴ گھماو کی حرکی توانائی ۸۱
۴.۵ گھمیری جمود کا حساب ۸۳
۴.۶ قوت مروڑ ۸۹
۴.۷ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو ۹۱

جوابات ۹۵

باب ۴

گھماو

۴.۱ گھماو کے متغیر

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے اگر جسم کے تمام حصے ایک محور کے گرد ہم قدم گھومیں، یہ استوار جسم ہو گا۔(اس باب میں ایسے اجسام پر گفتگو کی جائے گی۔)

۲. جان پائیں گے کہ اندرونی حوالہ لکیر اور مقررہ بیرونی حوالہ لکیر کے بیچ زاویہ، استوار جسم کا زاویاتی مقام دیگا۔

۳. ابتدائی اور اختتامی زاویاتی مقام کا زاویاتی ہٹاو کے ساتھ تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. اوسط زاوی سمتی رفتار، زاوی ہٹاو، اور ہٹاو کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۵. اوسط زاوی اسراع، زاوی سمتی رفتار میں تبدیلی، اور اس تبدیلی کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۶. جان پائیں گے کہ خلاف گھڑی حرکت مثبت رخ اور گھڑی وار حرکت منفی رخ ہو گا۔

۷. زاوی مقام کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۸. زاوی مقام بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۹. جان پائیں گے کہ لمحاتی زاوی سمتی رفتار کی قدر لمحاتی زاوی رفتار ہو گی۔

۱۰. زاوی سمتی رفتار کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۱. زاوی سمتی رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاوی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاوی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۲. وقت کے ساتھ زاوی اسراع تفاعل کا تکمل لے کر جسم کی زاوی سمتی رفتار میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔
وقت کے ساتھ زاوی سمتی رفتار تفاعل کا تکمل لے کر جسم کے زاوی مقام میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مقررہ محور، جو محور گھماو کہلاتی ہے، کے گرد استوار جسم کا گھماو بیان کرنے کی خاطر، جسم کے اندر محور کو عمودی حوالہ لکیر فرض کی جاتی ہے جو جسم کے ساتھ ہم قدم محور کے گرد گھومتی ہے۔ ایک مقررہ رخ کے ساتھ اس لکیر کا زاوی مقام θ ناپا جاتا ہے۔ جب θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو، ذیل ہو گا،

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ})$$

جہاں رداس r کے دائری راہ کا قوسی فاصلہ s اور ریڈیئن میں زاویہ θ ہے۔

- زاویہ کی درجہ میں اور چکر میں پیمائش کا ریڈیئن پیمائش سے تعلق ذیل ہے۔

$$1\ \text{چکر} = 360^\circ = 2\pi\ \text{ریڈیئن}$$

- ایک جسم جو محور گھماو کے گرد گھوم کر اپنا زاوی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، ذیل زاوی ہٹاو سے گزرتا ہے،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

جہاں خلاف گھڑی گھماو کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔

- اگر جسم Δt دورانیہ میں $\Delta\theta$ زاوی ہٹاو گھومے، اس کی اوسط زاوی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

جسم کی (لمحاتی) زاوی سمتی رفتار ω ذیل ہو گی۔

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اوسط زاوی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ اور سمتی رفتار ω دونوں سمتی مقادیر ہیں، جن کا رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔ خلاف گھڑی گھماو کے لئے ان کا رخ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔ زاوی سمتی رفتار کی قدر جسم کی زاوی رفتار ہو گی۔

- اگر $\Delta t = t_2 - t_1$ دورانیہ میں جسم کی زاوی سمتی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، اس کا اوسط زاوی اسراع $\alpha_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

جسم کا (لمحاتی) زاوی اسراع α ذیل ہو گا۔

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$\alpha_{\text{اوسط}}$ اور α دونوں سمتی مقادیر ہیں۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے، طبیعیات کی توجہ کا ایک مرکز "حرکیات" ہے۔ تاہم، اب تک ہم صرف **مستقیم حرکت** پر بات کرتے رہے ہیں، جس میں جسم سیدھی یا قوسی لکیر پر حرکت کرتا ہے (شکل 1a-10)۔ اب ہم **گھماو** پر نظر ڈالتے ہیں، جس میں جسم کسی محور کے گرد گھومتا ہے (شکل 1b.10)۔

گھماو تقریباً ہر مشین میں نظر آتا ہے، اور جب آپ دروازہ کھولتے ہیں آپ اس کو دیکھتے ہیں۔ کھیل میں گھماو اہم کردار ادا کرتا ہے، جیسا گیند کو زیادہ دور پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا زیادہ دیر اٹھا کر سکتی ہے)، اور کرکٹ میں گیند قوسی راہ پر پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا دائیں یا بائیں دھکیلتی ہے)۔ گھماو زیادہ اہم مسائل، جیسا عمر رسیدہ ہوائی جہاز میں دھاتی حصوں کا ٹوٹ پھوٹ، میں بھی کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

گھماو پر بحث سے قبل، حرکت میں ملوث متغیرات متعارف کرتے ہیں، جیسا ہم نے باب 2 میں مستقیم حرکت پر بحث سے قبل کیا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ گھماو کے متغیرات عین باب 2 میں یک بُعدی حرکت کے متغیرات کی طرح ہیں؛ ایک اہم خصوصی صورت وہ ہے جہاں اسراع (جو یہاں زاوی اسراع ہو گا) مستقل ہو۔ ہم دیکھتے ہیں نیوٹن کا دوسرا قاعدہ زاوی حرکت کے لئے بھی لکھا جا سکتا ہے، تاہم اب قوت کی بجائے ایک نئی مقدار جو قوت مروڑ کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ کام اور کام و حرکی توانائی مسئلے کا اطلاق بھی گھماو حرکت پر کیا جا سکتا ہے، تاہم کمیت کی بجائے ایک نئی مقدار جو زاوی جمود کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ مختصراً، ہم جو کچھ پڑھ چکے ہیں، اس کا اطلاق گھماو حرکت میں ہو گا، تاہم کبھی کبھار معمولی تبدیلی کی ضرورت پیش آئے گی۔

انتباہ: اگرچہ اس باب میں زیادہ تر حقائق محض دوبارہ پیش کیے گئے ہیں، دیکھا یہ گیا ہے کہ طلبہ و طالبات کو اس باب میں دشواری پیش آتی ہے۔ اساتذہ کرام اس کی کئی وجوہات پیش کرتے ہیں جن میں سے دو پر اتفاق پایا جاتا ہے: 1 یہاں علامت کی تعداد بہت زیادہ ہے (جنہیں یونانی حروف میں لکھ کر مشکل میں مزید اضافہ پیدا ہوتا ہے)، اور 2 آپ خطی حرکت سے زیادہ واقف ہیں (اسی لئے کمرے کے ایک کونے سے دوسرے کونے تک آپ با آسانی جا سکتے ہیں)، لیکن گھماو سے آپ کا واسطہ کم رہا ہے (اسی لئے تفریح گاہ میں آپ تفریحی جھولے پر سوار ہونے کے لئے پیسہ خرچنے کے لئے راضی ہوتے ہیں)۔ جہاں آپ کو دشواری ہو، دیکھیں آیا

مسئلے کو باب 2 کا یک بُعدی خطی مسئلہ تصور کرنے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ مثلاً، اگر آپ سے زاوی فاصلہ معلوم کرنے کو کہا جائے، وقتی طور پر لفظ زاوی کو بھول جائیں اور دیکھیں آیا باب 2 کی ترقیم اور تصورات استعمال کر کے جواب حاصل کرنا آسان ہوتا ہے۔

گھماو کے متغیر

ہم مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماو پر غور کرنا چاہتے ہیں۔ **استوار جسم**[۱] سے مراد وہ جسم ہے جس کے تمام حصے، جسم کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر، ہم قدم گھوم سکتے ہیں۔ **مقررہ محور**[۲] سے مراد وہ محور ہے جو حرکت نہیں کرتی اور جس پر گھوما جا سکتا ہے۔ یوں ہم ایسے جسم پر غور نہیں کریں گے جیسا سورج (جو گیس کا کرہ ہے) جس کے حصے ایک ساتھ حرکت نہیں کرتے۔ ہم زمین پر لڑھکتے گیند کی بھی بات نہیں کرتے چونکہ اس کی محور خود حرکت پذیر ہے (ایسی گیند کی حرکت، گھماو اور مستقیم حرکت کا ملاپ ہے)۔

شکل 2.10 میں مقررہ محور پر، جو **محور گھماو**[۳] یا **گھماو کی محور** کہلاتی ہے، اختیاری شکل کا استوار جسم گھوم رہا ہے۔ خالص گھماو (زاوی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز محور گھماو پر واقع ہے، اور ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی وقفہ میں ایک جتنا زاویہ طے کرتا ہے۔ خالص مستقیم حرکت (خطی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی دورانیہ میں ایک جتنا خطی فاصلہ طے کرتا ہے۔

آئیں باری باری خطی مقادیر مقام، ہٹاو، سمتی رفتار، اور اسراع کے مماثل زاوی مقادیر پر غور کرتے ہیں۔

زاوی مقام

شکل 2.10 میں گھماو کو عمودی، جسم کے ساتھ گھومتی، جسم سے پکی جڑی حوالہ لکیر دکھائی گئی ہے۔ کسی مقررہ رخ کے ساتھ، جس کو ہم **صفر زاوی مقام**[۴] مانتے ہیں، اس لکیر کا زاویہ لکیر کا **زاوی مقام**[۵] ہو گا۔ شکل 3.10 میں محور x کے مثبت رخ کے ساتھ زاوی مقام θ ناپا گیا ہے۔ ہندسہ سے ہم جانتے ہیں درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱}$$

یہاں محور x (جو صفر زاوی مقام ہے) سے حوالہ لکیر تک دائری قوس کی لمبائی s، اور دائرے کا رداس r ہے۔

اس طرح تعین کیا گیا زاویہ، درجہ یا چکر کی بجائے، **ریڈیئن**[۶] میں ناپا جاتا ہے۔ ریڈیئن دو لمبائیوں کی نسبت (تقابلی تعلق) ہے لہٰذا یہ بے بُعد خالص عدد ہو گا۔ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا ایک مکمل دائرے میں 2π

---

[۱] rigidbody
[۲] fixedaxis
[۳] rotationaxis
[۴] zeroangularposition
[۵] angularposition
[۶] radian

ریڈیئن ہوں گے۔

$$1 \text{ چکر} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ ریڈیئن} \quad (۴.۲)$$

یا

$$1 \text{ ریڈیئن} = 57.3^\circ = 0.159 \text{ چکر} \quad (۴.۳)$$

محور گھماو پر حوالہ لکیر کی مکمل چکر کے بعد ہم θ واپس صفر نہیں کرتے۔ اگر حوالہ لکیر صفر زاوی مقام سے ابتدا کر کے دو چکر مکمل کرے، لکیر کا زاوی مقام $\theta = 4\pi$ ریڈیئن ہو گا۔

محور x پر خالص مستقیم حرکت کے لئے $x(t)$، یعنی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم حرکت پذیر جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔ اسی طرح، خالص گھماو کے لئے $\theta(t)$، یعنی زاوی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم گھومتے جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔

زاوی ہٹاو

اگر شکل 3.10 کا جسم محور گھماو پر شکل 4.10 کی طرح گھوم کر حوالہ لکیر کا زاوی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا زاوی ہٹاو $\Delta\theta$ ذیل ہو گا۔

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (۴.۴)$$

زاوی ہٹاو کی یہ تعریف نہ صرف استوار جسم بلکہ جسم کے ہر اندرونی ذرہ کے لئے درست ہے۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ محور x پر مستقیم حرکت کی صورت میں جسم کا ہٹاو Δx مثبت یا منفی ہو گا، جو، محور پر جسم کی حرکت کے رخ پر منحصر ہے۔ اسی طرح، گھماو کی صورت میں جسم کا زاوی ہٹاو $\Delta\theta$ درج ذیل قاعدہ کے تحت مثبت یا منفی ہو گا۔

قاعدہ ۴.۱: خلاف گھڑی زاوی ہٹاو مثبت اور گھڑی وار ہٹاو منفی ہو گا۔

"گھڑیاں منفی ہیں" کا فقرہ اس قاعدے کو یاد رکھنے میں مدد دے سکتا ہے۔ یاد رہے گھڑی کے سیکنڈ کی سوئی کا ہر قدم آپ کی زندگی کاٹتی ہے۔

آزمائش ۱

قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ درج ذیل ابتدائی اور اختتامی زاوی مقام کی مرتب جوڑیوں میں کونسی منفی زاوی ہٹاو دیتی ہیں؟ (ا) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی $+5$ ریڈیئن؛ (ب) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی -7 ریڈیئن؛ (ج) ابتدائی 7 ریڈیئن، اختتامی -3 ریڈیئن۔

زاوی سمتی رفتار

فرض کریں ایک جسم وقت t_1 پر زاوی مقام θ_1 پر اور وقت t_2 پر زاوی مقام θ_2 پر ہو، جیسا شکل 4.10 میں دکھایا گیا ہے۔ہم t_1 تا t_2 وقتی دورانیہ Δt میں جسم کی **اوسط زاوی سمتی رفتار**[۷] $\omega_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل کرتے ہیں،

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{۴.۵}$$

جہاں وقت دورانیہ Δt میں زاوی ہٹاو $\Delta\omega$ ہے۔(زاوی سمتی رفتار کے لئے یونانی حروف تہجی کا، چھوٹی لکھائی میں، آخری حرف **اومیگا** ω استعمال کیا جائے گا۔) مساوات ۴.۵ میں Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی درج ذیل تحدیدی قیمت حاصل ہو گی جو **لمحاتی زاوی سمتی رفتار**[۸] ω (یا مختصراً **زاوی سمتی رفتار**) کہلاتی ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۶}$$

اگر $\theta(t)$ معلوم ہو، اس کا تفرق لے کر زاوی سمتی رفتار ω حاصل ہو گی۔

چونکہ اس جسم کے تمام ذرے ہم قدم ہیں، لہٰذا مساوات ۴.۵ اور مساوات ۴.۶ نا صرف مکمل گھومتے استوار جسم کے لئے بلکہ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاوی سمتی رفتار کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$، چکر فی سیکنڈ، اور چکر فی منٹ ہے۔

محور x پر مثبت رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی سمتی رفتار v مثبت جبکہ منفی رخ حرکت کی صورت میں منفی ہو گی۔ اسی طرح محور پر مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھماو کی صورت میں استوار جسم کی زاوی سمتی رفتار مثبت جبکہ منفی رخ (گھڑی وار) گھماو کی صورت میں منفی ہو گی۔("گھڑیاں منفی ہیں" اب بھی درست ہے۔) زاوی سمتی رفتار کی قدر **زاوی رفتار**[۹] کہلاتی ہے۔ ہم زاوی رفتار کے لئے بھی ω علامت استعمال کریں گے۔

زاوی اسراع

گھومتے ہوئے جسم کی زاوی سمتی رفتار مستقل نہ ہونے کی صورت میں جسم زاوی اسراع سے دوچار ہو گا۔ فرض کریں وقت t_1 پر جسم کی زاوی سمتی رفتار ω_1 اور t_2 پر ω_2 ہے۔ دورانیہ t_1 تا t_2 میں گھومتے ہوئے جسم کی **اوسط زاوی اسراع**[۱۰] $\alpha_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل ہے،

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{۴.۷}$$

---

[۷] averageangularvelocity
[۸] instantaneousangularvelocity
[۹] angularspeed
[۱۰] averageangularacceleration

جہاں $\Delta\omega$ زاوی سمتی رفتار میں Δt کے دوران تبدیلی ہے۔ **لمحاتی زاوی اسراع** [11](یا مختصراً **زاوی اسراع**)، جس سے ہمیں زیادہ دلچسپی ہے، Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی، درج ذیل، تحدیدی قیمت کو کہتے ہیں۔

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۸}$$

مساوات ۴.۷ اور مساوات ۴.۸ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاوی اسراع کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی مربع سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-2}})$ اور چکر فی مربع سیکنڈ ہے۔

نمونی سوال ۴.۱: **زاوی مقام سے زاوی سمتی رفتار کا حصول**

شکل 5a.10 میں قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ قرص پر حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta(t)$ ذیل ہے، جہاں t اور θ بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن میں ہیں، اور صفر زاوی مقام شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\theta = -1.00 - 0.600t + 0.250t^2 \tag{۴.۹}$$

(آپ چاہیں تو مستقل طور پر لفظ "زاوی مقام" سے "زاوی" خارج کر کے اور θ علامت کی جگہ x استعمال کر کے مسئلے کو باب 2 کی ترقیم میں لے جائیں۔ آپ کو باب 2 کی یک بُعدی حرکت کے مقام کی مساوات حاصل ہو گی۔)

(ا) قرص کا زاوی مقام بالمقابل وقت $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 5.4\,\mathrm{s}$ ترسیم کریں۔ قرص اور اس پر زاوی مقام کی حوالہ لکیر کا خاکہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$، اور $t = 4.0\,\mathrm{s}$، اور اس لمحے پر بنائیں جب ترسیم t محور سے گزرتی ہے۔

۴.۱.۱ کلیدی تصور

قرص کے زاوی مقام سے مراد اس پر کھینچی حوالہ لکیر کا مقام $\theta(t)$ ہے، جو مساوات ۴.۹ دیتی ہے؛ لہٰذا ہم مساوات ۴.۹ ترسیم کرتے ہیں؛ نتیجہ شکل 5b.10 میں پیش ہے۔

حساب: قرص اور حوالہ لکیر کا مقام کسی مخصوص لمحے پر خاکہ بنانے کے لئے ضروری ہے کہ اس لمحے پر ہمیں θ معلوم ہو، جو مساوات ۴.۹ میں لمحے کا وقت ڈالنے سے حاصل ہو گا۔ یوں $t = -2.0\,\mathrm{s}$ کے لئے ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\theta &= -1.00 - (0.600)(-2.0) + (0.250)(-2.0)^2\\ &= 1.2\,\mathrm{rad} = 1.2\,\mathrm{rad}\,\frac{360^\circ}{2\pi\,\text{ریڈیئن}} = 69^\circ\end{aligned}$$

یہ نتیجہ کہتا ہے کہ قرص پر موجود حوالہ لکیر لمحہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر صفر مقام سے مثبت رخ (خلاف گھڑی) 1.2 ریڈیئن یعنی 69° گھوم کر ہو گی۔ شکل 5b.10 کے خاکہ 1 میں حوالہ لکیر کا یہ مقام دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح $t = 0$ پر θ کی قیمت -1.00 ریڈیئن یا -57° ہو گی، جس کے تحت حوالہ لکیر صفر زاوی مقام سے 1.0 ریڈیئن یا 57° منفی رخ (گھڑی وار) گھوم کر ہو گی، جیسا خاکہ 3 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر θ کی قیمت

[11] instantaneous angular acceleration

0.60 ریڈیئن یعنی $34°$ ہو گی (خانہ 5)۔ جس لمحے ترسیم محور t سے گزرتی ہے، $\theta = 0$ ہو گا اور حوالہ لکیر لحاتی عین صفر مقام پر ہو گی (خانہ 2 اور 4)۔

(ب) شکل 5b.10 میں $\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت کس $t_{\text{کمتر}}$ پر ہو گی؟ θ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

کلیدی تصور

تفاعل کی انتہا قیمت (یہاں کم سے کم قیمت) معلوم کرنے کی خاطر ہم تفاعل کا ایک گنا تفرق لے کر صفر کے برابر رکھتے ہیں۔

حساب: تفاعل $\theta(t)$ کا ایک گنا تفرق ذیل ہے۔

$$\frac{d\theta}{dt} = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۰}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر t کے لئے حل کرکے لمحہ $t_{\text{کمتر}}$ حاصل ہو گا جس پر $\theta(t)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

$$t_{\text{کمتر}} = 1.2\,\text{s} \qquad \text{(جواب)}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت جاننے کے لئے ہم مساوات ۴.۹ میں $t_{\text{کمتر}}$ ڈالتے ہیں، جو ذیل دیگا۔

$$\theta = \text{ریڈیئن}\ -.136 \approx -77.9° \qquad \text{(جواب)}$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت (شکل 5b.10 میں نشیب) صفر زاوی مقام سے قرص کی زیادہ سے زیادہ گھڑی وار گھماو ہے، جو خانہ 3 سے کچھ زیادہ ہو گا۔

(ج) قرص کی زاوی سمتی رفتار ω وقت $t = -3.0\,\text{s}$ تا $t = 6.0\,\text{s}$ ترسیم کریں۔ قرص کا خانہ $t = -2.0\,\text{s}$ ، $t = 4.0\,\text{s}$ ، اور $t_{\text{کمتر}}$ پر بنائیں، اور بتائیں ان لمحات پر گھومنے کا رخ اور ω کی علامت کیا ہو گی۔

کلیدی تصور

مساوات ۴.۶ کے تحت زاوی سمتی رفتار ω سے مراد $d\theta/dt$ ہے جو مساوات ۴.۱۰ دیتی ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\omega = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۱}$$

اس تفاعل، $\omega(t)$ ، کی ترسیم شکل 5c.10 میں پیش ہے۔ یہ تفاعل خطی ہے لہٰذا اس کی ترسیم ایک سیدھی لکیر ہے۔ ترسیم کی ڈھلوان $0.500\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$ ہے اور انتصابی محور (جو دکھایا نہیں گیا) کو ترسیم $-0.600\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ پر قطع کرتی ہے۔

حساب: قرص کا خانہ $t = -2.0\,\text{s}$ پر بنانے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۱ میں یہ قیمت ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = -1.6\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \qquad \text{(جواب)}$$

منفی کی علامت کہتی ہے کہ $t = -2.0\,\text{s}$ پر قرص گھڑی وار (منفی رخ) گھوم رہا ہے (جیسا شکل 5c.10 میں دائیں ہاتھ خانے میں دکھایا گیا ہے)۔

مساوات ۴.۱۱ میں $t = 4.0\,\text{s}$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\omega = 1.4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \qquad (\text{جواب})$$

مضمر مثبت علامت کہتی ہے قرص مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھوم رہا ہے (شکل 5c.10 میں دایاں ہاتھ خانہ)۔

$t_{\text{کمتر}}$ کے لئے ہم جانتے ہیں $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ ہو گا۔ یوں $\omega = 0$ ہو گا۔ جب حوالہ لکیر، شکل 5b.10 θ میں θ کی کم سے کم قیمت کو پہنچتی ہے، قرص لمحاتی رکتا ہے، جیسا شکل 5c.10 میں وسطی خانہ کہ عندیہ دیتا ہے۔ شکل 5c.10 میں ω بالمقابل t کی ترسیم پر صفر نقطہ، جہاں ترسیم منفی (گھڑی وار) گھماو سے مثبت (خلاف گھڑی) گھماو کا آغاز کرتی ہے، وہ نقطہ ہے جہاں قرص لمحاتی رکتا ہے۔

(د) جزوا تا جزو ج کے نتائج استعمال کر کے $t = -3.0\,\text{s}$ تا $t = 6.0\,\text{s}$ قرص کی حرکت بیان کریں۔

بیان: جب ہم، $t = -3.0\,\text{s}$ پر، قرص پر پہلی مرتبہ نظر ڈالتے ہیں، اس کا زاوی مقام مثبت، گھماو گھڑی وار اور رفتار میں کمی دیکھنے کو ملتی ہے۔ یہ $\theta = -1.36$ ریڈیئن پر لمحاتی رکنے کے بعد خلاف گھڑی گھومنا شروع کرتا ہے اور آخر کار اس کا زاوی مقام دوبارہ مثبت ہوتا ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۲: **زاوی اسراع سے زاوی سمتی رفتار کا حصول**

ایک بچہ لٹو ذیل زاوی اسراع سے گھماتا ہے، جہاں t اور α بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں ہے۔

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

لمحہ $t = 0$ پر لٹو کی زاوی سمتی رفتار $5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$، اور حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta = 2$ ریڈیئن ہے۔

(ا) لٹو کی زاوی سمتی رفتار $\omega(t)$ کا ریاضی فقرہ حاصل کریں؛ یعنی ایسا تفاعل معلوم کریں جو وقت پر زاوی سمتی رفتار کا انحصار صریحاً دے۔ (ہم جانتے ہیں ایسا تفاعل موجود ہے چونکہ لٹو زاوی اسراع سے گزر رہا ہے؛ یوں اس کی زاوی سمتی رفتار تبدیل ہو گی۔)

کلیدی تصور

$\alpha(t)$ تعریف کے رو سے $\omega(t)$ کا وقتی تفرق ہو گا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\alpha(t)$ کا تکمل $\omega(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۴.۸ ذیل کہتی ہے

$$\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا

$$\int \mathrm{d}\omega = \int \alpha \,\mathrm{d}t$$

ہو گا جو ذیل دے گی، جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$$

ہم جانتے ہیں $t = 0$ پر $\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے؛ اس معلومات کو درج بالا میں ڈال کر:

$$5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} = 0 - 0 + C$$

تکمل کا مستقل $C = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ حاصل ہو گا۔ یوں درکار تفاعل ذیل ہو گا۔

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5 \qquad (\text{جواب})$$

(ب) لٹو کے زاوی مقام $\theta(t)$ کا ریاضی فقرہ تلاش کریں۔

کلیدی تصور

تعریف کے رو سے $\theta(t)$ کا وقتی تفرق $\omega(t)$ دیگا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\omega(t)$ کا تکمل $\theta(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۴.۶ کے تحت:

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جس سے ذیل لکھا جا سکتا ہے،

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\,\mathrm{d}t = \int (\frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C'\\ &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

جہاں $t = 0$ پر $\theta = 2\,\mathrm{rad}$ جانتے ہوئے C' کی قیمت حاصل کی گئی۔ □

کیا زاوی مقادیر سمتیات ہیں؟

ہم اکیلے ذرے کا مقام، سمتی رفتار، اور اسراع سمتیات سے بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ذرہ صرف ایک محور پر حرکت کرتا ہو، سمتی ترقیم استعمال کرنا ضرورت نہیں۔ ایسے ذرے کو صرف دو رخ دستیاب ہیں جنہیں مثبت اور منفی علامت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح استوار جسم قائمہ محور پر، محور کے ہمراہ دیکھتے ہوئے، صرف خلاف گھڑی اور گھڑی وار گھوم سکتا ہے۔ ان رخ کو ہم مثبت اور منفی سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں ایک سوال اٹھتا ہے: "کیا ہم گھومتے جسم کے زاوی ہٹاو، زاوی سمتی رفتار، اور زاوی اسراع کو سمتیات سمجھ سکتے ہیں؟" اس کا جواب ہے "جی ہاں" (زاوی ہٹاو کے لئے نیچے پیش انتباہ ضرور دیکھیں۔)

زاوی سمتی رفتار۔ زاوی سمتی رفتار کو دیکھیں۔ شکل 6a.10 میں $\omega = 33\frac{1}{3}$ چکر فی سیکنڈ کی مستقل زاوی رفتار سے گھڑی وار رخ گھومتا ہوا قرص دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل 6b.10 میں دکھایا گیا ہے، ہم اس کی سمتی زاوی رفتار گھماو کے محور پر سمتیہ $\vec{\omega}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس کا طریقہ کار یوں ہے: سمتیہ کی لمبائی کسی موزوں پیمانہ کے تحت رکھی جاتی ہے، مثلاً 1 cm کو 10 چکر فی منٹ کی مطابقت سے رکھا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\vec{\omega}$ کا رخ تعین کرنے کے لئے ہم **دائیں ہاتھ کا قاعدہ** استعمال کرتے ہیں، جو شکل 6c.10 میں پیش ہے: قرص کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ انگلیاں گھماو کے رخ ہوں۔ آپ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا زاوی سمتی رفتار کے سمتیہ کا رخ دیگا۔ اگر قرص مخالف رخ گھومے، دائیں ہاتھ قاعدہ کے تحت $\vec{\omega}$ بھی مخالف رخ ہو گا۔

زاوی مقادیر سمتیات سے ظاہر کرنے کی عادت مشکل سے ڈلتی ہے۔ ہم فوراً سوچتے ہیں کہ سمتیہ کے ہمراہ کوئی چیز حرکت کرے گی۔ یہاں ایسا نہیں ہو گا۔ اس کے بجائے کوئی چیز (جیسا استوار جسم) سمتیہ کے رخ کے گرد گھومتی ہے۔ خالص گھماو کی دنیا میں، سمتیہ کا رخ کسی چیز کی حرکت کا رخ نہیں بلکہ گھماو کی محور دیگا۔ بہر حال، سمتیہ حرکت بھی تعین کرتا ہے۔ مزید، یہ سمتیات سلجھانے کے ان تمام قواعد کی تعمیل کرتا ہے جو باب 3 میں پیش کیے گئے۔ زاوی اسراع $\vec{\alpha}$ بھی ایک سمتیہ ہے، اور یہ بھی ان قواعد کی تعمیل کرتا ہے۔

اس باب میں صرف قائمہ محور پر گھماو کی بات کی جائے گی۔ ان میں سمتیات استعمال کرنے کی ضرورت نہیں؛ ہم زاوی سمتی رفتار کو ω اور زاوی اسراع کو α سے ظاہر کر کے، خلاف گھڑی گھماو کو مثبت اور گھڑی وار گھماو کو منفی کی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

زاوی ہٹاو۔ پہلے انتباہ کی بات کرتے ہیں: زاوی ہٹاو (ماسوائے انتہائی چھوٹا ہٹاو) کو سمتیہ سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ کیوں نہیں؟ ہم یقیناً اس کے رخ اور قدر کی بات کر سکتے ہیں، جیسا شکل 6.10 میں زاوی سمتی رفتار کے لئے کیا گیا۔ تاہم، سمتیہ سے ظاہر کیے جانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ مقدار سمتی جمع کے قواعد پر پورا اترتی ہو۔ ان قواعد میں ایک قاعدہ کہتا ہے کہ سمتیات جمع کرتے وقت ان کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ زاوی ہٹاو اس قاعدہ پر پورا نہیں اترتا۔

شکل 7.10 میں دی گئی مثال پر غور کریں۔ ایک کتاب کو، جو ابتدائی طور پر افقی پڑی ہے، دو مرتبہ $90°$ زاوی ہٹاو سے گزارا گیا ہے؛ ایک مرتبہ شکل 7a.10 اور دوسری مرتبہ شکل 7b.10 کی طرح۔ دونوں میں ہٹاو برابر، لیکن ترتیب ایک نہیں، اور آخر میں کتاب ایک جیسی سمت بند نہیں۔ دوسری مثال لیتے ہیں۔ دایاں

ہاتھ لٹکا کر ہتھیلی ران پر رکھیں۔ کلائی سخت کر کے، (1) بازو سامنے اتنا اٹھائیں کہ افقی ہو، (2) اس کو پورا دائیں لے جائیں، اور (3) اس کے بعد ہاتھ واپس نیچے ران تک لے جائیں۔ آپ کی ہتھیلی اب سامنے رخ ہو گی۔ اگر آپ یہی عمل الٹ ترتیب سے دہرائیں، آپ کی ہتھیلی آخر میں کس رخ ہو گی؟ ان مثال سے ہم دیکھتے ہیں کہ زاوی ہٹاو کا مجموعہ انہیں جمع کرنے کی ترتیب پر منحصر ہے، لہٰذا ہٹاو کو سمتیہ تصور نہیں کیا جا سکتا۔

۴.۲ مستقل اسراع کے ساتھ گھماو

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. مستقل زاوی اسراع کی صورت میں زاوی مقام، زاوی ہٹاو، زاوی سمتی رفتار، زاوی اسراع، اور گزرے دارانیے کے تعلق (جدول ۴.۱) استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مستقل زاوی اسراع (جس میں α مستقل ہو گا) گھماو حرکت کی ایک اہم خصوصی صورت ہے، جس کی مجرد حرکیات مساوات ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\omega &= \omega_0 + \alpha t \\
\theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
\omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\
\theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \\
\theta - \theta_0 &= \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2
\end{aligned}
$$

مستقل زاوی اسراع کا گھماو

مستقیم حرکت میں مستقل خطی اسراع کی حرکت (مثلاً، زمین پر گرتا ہوا جسم) ایک اہم خصوصی صورت ہے۔ جدول 1.2 میں اس طرح کی حرکت کو مطمئن کرتی مساوات پیش کی گئیں۔

خالص گھماو میں مستقل زاوی اسراع ایک اہم خصوصی صورت ہے؛ اس کو مطمئن کرنے والی مطابقتی مساوات پائی جاتی ہیں۔ ہم انہیں یہاں اخذ نہیں کریں گے، بلکہ مطابقتی خطی مساوات میں مساوی زاوی متغیرات ڈال کر انہیں پیش کرتے ہیں۔ جدول ۴.۱ میں مساوات کی دونوں فہرست (مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 تا مساوات 18.2؛ مساوات ۴.۱۲ تا مساوات ۴.۱۶) پیش کی گئی ہیں۔

یاد رہے مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 مستقل خطی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ اس طرح، مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ مستقل زاوی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے زاوی مساوات کی فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ مستقل

جدول ۱.۴: مستقل خطی اسراع اور مستقل زاوی اسراع کی حرکت کی مساوات

خطی مساوات		زاوی مساوات	
(2.11)	$v = v_0 + at$	(۴.۱۲)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۳)	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	(۴.۱۴)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	(۴.۱۵)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	(۴.۱۶)	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

زاوی اسراع کا سادہ مسئلہ حل کرنے کے لئے آپ عموماً زاوی فہرست سے (اگر یہ فہرست آپ کے پاس موجود ہو) ایک مساوات استعمال کر پائیں گے۔ آپ وہ مساوات منتخب کریں گے جس میں صرف وہ متغیر غیر معلوم ہو جو آپ کو درکار ہو۔ بہتر طریقہ یہ ہو گا کہ آپ مساوات ۱۲.۴ اور مساوات ۱۳.۴ یاد کر لیں اور جب ضرورت پیش آئے، انہیں بطور ہمزاد مساوات حل کریں۔

آزمائش ۲

گھومے جسم کا زاوی مقام $\theta(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\theta = 3t - 4$، (ب) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$، (ج) $\theta = 2/t^2 - 4/t$، اور (د) $\theta = 5t^2 - 3$ ہے۔ جدول ۱.۴ کی زاوی مساوات کا اطلاق کن صورتوں پر ہو گا؟

نمونی سوال ۳.۴: **مستقل زاوی اسراع، چکی کا پاٹ**

شکل 8.10 میں پاٹ مستقل زاوی اسراع $\alpha = 0.34\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے گھوم رہا ہے۔ وقت $t = 0$ پر اس کی زاوی سمتی رفتار $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے، اور اس پر کھینچی گئی حوالہ لکیر کا مقام $\theta_0 = 0$ ہے۔

(ا) وقت $t = 0$ سے کتنی دیر بعد حوالہ لکیر زاوی مقام $\theta = 5.0$ چکر پر ہو گی؟

کلیدی تصور

چونکہ زاوی اسراع مستقل ہے لہٰذا ہم جدول ۱.۴ سے مساوات چن سکتے ہیں۔ ہم مساوات ۱۳.۴

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

کا انتخاب اس لئے کرتے ہیں کہ اس میں صرف ایک متغیر، t، نامعلوم ہے اور ہمیں یہی درکار ہے۔

حل: دی گئی معلومات ڈال کر اور $\theta_0 = 0$ اور $\theta = 5.0$ چکر $= 10\pi\,\mathrm{rad}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$10\pi\,\mathrm{rad} = (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})t + \frac{1}{2}(0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}})t^2$$

(اکائیوں کے ثبات کی خاطر ہم 5.0 چکر کو 10π ریڈیئن میں تبدیل کرتے ہیں۔) اس دو درجی الجبرائی مساوات کو حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$t = 32\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

ان ایک عجیب بات پر غور کریں۔ جب ہم پہلی مرتبہ پاٹ پر نظر ڈالتے ہیں یہ منفی رخ گھوم کر $\theta = 0$ سمت بند مقام سے گزرتا ہے۔ اس کے باوجود 32 s بعد ہم اسے $\theta = 5.0$ چکر مثبت سمت بند مقام پر پاتے ہیں۔ اس دورانیے میں ایسا کیا ہوا کہ پاٹ مثبت سمت بند مقام پر ہو سکتا ہے؟

(ب) وقت $t = 0$ اور $t = 32\,\mathrm{s}$ کے بیچ پاٹ کے گھماو پر تبصرہ کریں۔

تبصرہ: پاٹ ابتدائی طور پر منفی (گھڑی وار) رخ $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاوی رفتار سے حرکت کرتا ہے، تاہم اس کا زاوی اسراع α مثبت ہے۔ ابتدائی زاوی رفتار اور زاوی اسراع کی علامتیں الٹ ہونے کی بدولت پاٹ منفی رخ چلتے چلتے بتدریج آہستہ ہوتے رک کر مثبت رخ گھومنا شروع کرتا ہے۔ حوالہ لکیر مثبت رخ چل کر $\theta = 0$ مقام سے دوبارہ گزرتی ہے اور $t = 32\,\mathrm{s}$ گزرنے تک مثبت رخ مزید 5.0 چکر کاٹ چکا ہوتا ہے۔

(ج) پاٹ کس وقت t پر لمحاتی رکتا ہے؟

حل: ہم دوبارہ زاوی مساوات کی فہرست پر نظر ڈالتے ہیں اور ایسی مساوات لینا چاہتے ہیں جس میں صرف t نامعلوم متغیر ہو۔ تاہم، اب مساوات میں ω کا ہونا بھی ضروری ہے، تا کہ ہم اس کو 0 لے کر مطابقتی t کے لئے حل کریں۔ ہم مساوات ۴.۱۲ منتخب کرتے ہیں، جو ذیل دیگی۔

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})}{0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}}} = 13\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

□

نمونی سوال ۴.۴: **مستقل زاوی اسراع، پہیے کی سواری**

تفریح گاہ میں ایک بڑا پہیا چلاتے ہوئے آپ کی نظر پہیے پر سوار ایک شخص پر پڑتی ہے جو پریشان نظر آتا ہے۔ آپ پہیے کی زاوی سمتی رفتار مستقل زاوی اسراع کے ساتھ $3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے 20.0 چکروں میں کم کر کے $2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرتے ہیں۔ (اس شخص کو "گھومتا شخص" تصور کرنے سے "مستقیم حرکت کرتا شخص" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔)

(ا) زاوی سمتی رفتار کی کمی کے دوران مستقل زاوی اسراع کیا ہو گی؟

کلیدی تصور
پہیے کی زاوی اسراع مستقل ہے، لہٰذا ہم اس کی زاوی سمتی رفتار اور زاوی ہٹاو کا تعلق مستقل زاوی اسراع کی مساوات (مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳) سے جان سکتے ہیں۔

حساب: آئیں دیکھیں آیا ہم ان بنیادی مساوات کو حل کر پائیں گے۔ ابتدائی زاوی سمتی رفتار $\omega_0 =$ $3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$، زاوی ہٹاو $\theta-\theta_0 =$ 20.0 چکر، اور ہٹاو کے آخر پر زاوی سمتی رفتار $\omega = 2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ ہم مستقل زاوی اسراع α جاننا چاہتے ہیں۔ دونوں مساوات میں وقت t پایا جاتا ہے، جس میں ضروری نہیں ہم دلچسپی رکھتے ہوں۔

نامعلوم t خارج کرنے کے لئے ہم مساوات ۴.۱۲ سے

$$t = \frac{\omega-\omega_0}{\alpha}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۳ میں ڈالتے ہیں۔

$$\theta-\theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2$$

α کے لئے حل کر کے، دی گئی معلومات پُر کر کے، اور 20.0 چکر کو $125.7\,\mathrm{rad}$ میں بدل کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2(\theta-\theta_0)} = \frac{(2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2-(3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2}{2(125.7\,\mathrm{rad})}\\ &= -0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

(ب) رفتار کتنے وقت میں کم کی گئی؟

حساب: چونکہ اب ہم α جانتے ہیں، مساوات ۴.۱۲ استعمال کر کے t حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}t &= \frac{\omega-\omega_0}{\alpha} = \frac{2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}-3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}{-0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}}}\\ &= 46.5\,\mathrm{s} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

□

۴.۳ خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. قائمہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کے زاوی متغیرات (زاوی مقام، زاوی سمتی رفتار، اور زاوی اسراع) کا جسم پر ایک ذرے، جو کسی رداس پر پایا جاتا ہو، کے خطی متغیرات (مقام، سمتی رفتار، اور اسراع) کے ساتھ تعلق جان پائیں گے۔

۲. مماسی اسراع اور رداسی اسراع میں تمیز کر پائیں گے، اور کسی محور پر گھومتے ہوئے جسم پر موجود ذرے کے لئے بڑھتی زاوی رفتار اور گھٹتی زاوی رفتار کی صورت میں دونوں کے سمتیہ بنا پائیں گے۔

کلیدی تصور

- گھومتے جسم پر محور گھماو سے عمودی فاصلہ r پر پائے جانے والا نقطہ، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ گھومے، یہ نقطہ درج ذیل قوسی فاصلہ s طے کریگا، جہاں θ ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔

$$s = \theta r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کا خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ دائرے کو مماسی ہو گا؛ نقطے کا خطی رفتار ذیل ہو گا، جہاں ω جسم اور نقطے کا (ریڈیئن فی سیکنڈ) زاوی رفتار ہے۔

$$v = \omega r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کے خطی اسراع $\vec{a}$ کے دو حصے ہوں گے؛ ایک مماسی جزو اور دوسرا رداسی جزو۔ مماسی جزو ذیل ہو گا، جہاں α جسم کے (ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) زاوی اسراع کی قدر ہے۔

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

رداسی جزو ذیل ہو گا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اگر یہ نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، اس نقطے اور جسم کا دوری عرصہ T ذیل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

خطی اور زاوی متغیرات کا رشتہ

محور گھماو کے گرد دائرے پر مستقل خطی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی یکساں دائری حرکت پر حصہ 5.4 میں غور کیا گیا۔ جب استوار جسم کسی محور پر گھومتا ہے، جسم کا ہر ذرہ اپنے ایک دائرے پر اسی محور کے گرد گھومتا ہے۔ چونکہ جسم استوار (بلا لچک) ہے، ایسے تمام ذرے ہم قدم چل کر ایک جتنے وقت میں ایک چکر مکمل کرتے ہیں؛ ان سب کی زاوی رفتار ω برابر ہے۔

تاہم، ایک ذرہ جتنا محور سے دور ہو گا، اتنا اس کے دائرے کا محیط بڑا ہو گا، لہٰذا اس کی خطی رفتار v اتنی زیادہ ہو گی۔ **گھومنے والے جھولے**[۱۲] پر بیٹھ کر آپ اسے محسوس کر سکتے ہیں۔ مرکز سے جتنے فاصلے پر بھی آپ ہوں، آپ کی زاوی رفتار ω ایک جتنی ہو گی، تاہم مرکز سے دور ہونے پر آپ کی خطی رفتار v بڑھے گی۔

ہم جسم پر کسی مخصوص نقطے کے خطی متغیرات s، v، اور a اور سی جسم کے زاوی متغیرات θ، ω، اور α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں۔ متغیرات کی ان فہرست کا رشتہ محور گھماو سے نقطے کے عمودی فاصلہ r کے ذریعے ہو گا۔ یہ عمودی فاصلہ، نقطے اور محور گھماو کے بیچ عمودی لکیر پر ناپا جائے گا۔ یہ فاصلہ اس دائرے کا رداس r ہو گا جس پر محور گھماو کے گرد نقطہ حرکت کرتا ہے۔

مقام

اگر استوار جسم پر کھینچی گئی حوالہ لکیر زاویہ θ گھومے، محور گھماو سے r فاصلے پر موجود جسم کے اندر نقطہ دائری قوس پر فاصلہ s طے کرے گا، جہاں s کی قیمت مساوات ۴.۱ دیتی ہے۔

$$s = \theta r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱۷}$$

مساوات ۴.۱۷ ہمارا پہلی خطی و زاوی تعلق ہے۔ انتباہ: زاویہ θ کی ناپ ریڈیئن میں لازمی ہے چونکہ درج بالا مساوات زاویے کی ریڈیئن میں ناپ کی تعریف ہے۔

رفتار

رداس r کو مستقل رکھ کر وقت کے ساتھ مساوات ۴.۱۷ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r$$

لیکن، $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ نقطے کی خطی رفتار (خطی سمتی رفتار کی قدر)، اور $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ گھومتے جسم کی زاوی رفتار ω ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$v = \omega r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱۸}$$

انتباہ: زاوی رفتار ω لازماً ریڈیئن فی سیکنڈ میں ناپی جائے گی۔

استوار جسم کے تمام اندرونی نقطے ایک زاوی رفتار ω سے گھومتے ہیں لہٰذا مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے زیادہ رداس r پر واقع نقطے کی خطی رفتار v زیادہ ہو گی۔ شکل 9a.10 ہمیں یاد دلاتی ہے کہ ہر نقطے کی خطی سمتی رفتار ہمیشہ نقطے کی دائری راہ کو مماسی ہو گی۔

اگر جسم کا زاوی رفتار w مستقل ہو، مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے جسم کے اندر نقطے کی خطی رفتار v بھی مستقل ہو گی۔ یوں، جسم کے اندر موجود ہر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہے۔ استوار جسم کے ہر اندرونی نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T مساوات 35.4 ذیل دیتی ہے۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{۴.۱۹}$$

---

[۱۲] merrygoround

اس مساوات کے تحت، ایک چکر کے فاصلے $2\pi r$ کو اس رفتار سے تقسیم کر کے جس سے فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر r منسوخ کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۰}$$

یہ معادل مساوات کہتی ہے ایک چکر کا زاوی فاصلہ، 2π ریڈیئن، اس زاوی رفتار سے تقسیم کر کے، جس سے زاوی فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔

اسراع

رداس r مستقل رکھ کر t کے لحاظ سے مساوات ۴.۱۸ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}r \tag{۴.۲۱}$$

یہاں ہم ایک پیچیدگی کا سامنا کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱ کا بایاں ہاتھ $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ خطی اسراع کے صرف اس حصے کو ظاہر کرتا ہے جو خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ کی قدر v کی تبدیلی کا ذمہ دار ہے۔ سمتی رفتار $\vec{v}$ کی طرح خطی اسراع کا یہ حصہ نقطے کی راہ کو مماسی ہو گا۔ ہم اسے خطی اسراع کا مماسی جزو a_t کہہ کر ذیل لکھتے ہیں، جہاں $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ ہے۔

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۲}$$

انتباہ: مساوات ۴.۲۲ میں زاوی اسراع α کا ریڈیئن ناپ میں ہونا لازم ہے۔ ساتھ ہی، جیسا مساوات 34.4 ہمیں بتاتی ہے، دائری راہ پر گامزن ذرے (یا نقطے) کے خطی اسراع کا (رداسی مرکز کے رخ) رداسی جزو $a_r = \frac{v^2}{r}$ ہو گا، جو خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ کے رخ میں تبدیلی کا ذمہ دار ہو گا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر یہ جزو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۲۳}$$

یوں، جیسا شکل 9b.10 میں دکھایا گیا ہے، استوار گھومتے جسم پر نقطے کے خطی اسراع کے عموماً دو جزو ہوں گے۔ جب بھی جسم کی زاوی سمتی رفتار غیر صفر ہو، رداسی اندر کی طرف کا جزو a_r موجود ہو گا (جو مساوات ۴.۲۳ دیتی ہے)۔ مماسی جزو a_t (جو مساوات ۴.۲۱ دیتی ہے) اس صورت ہو گا جب زاوی اسراع غیر صفر ہو۔

آزمائش ۳

گھومنے والے جھولے کے حلقے پر چیونٹی بیٹھی ہے۔ اگر اس نظام (گھومنا والا جھولا و چیونٹی) کی زاوی سمتی رفتار مستقل ہو، کیا چیونٹی کا (ا) رداسی اسراع اور (ب) مماسی اسراع ہو گا؟ اگر ω گھٹ رہی ہو، کیا چیونٹی کا (ج) رداسی اسراع اور (د) مماسی اسراع ہو گا؟

نمونی سوال ۴.۵: **تفریح گاہ میں ایک بڑے حلقہ کی بناوٹ**

ہمیں ایک بڑا افقی حلقہ، جس کا رداس $r = 33.1\,\mathrm{m}$ ہو گا، بنانے کو کہا گیا ہے جو انتصابی دھرے پر چلے

گا۔(یہ چین میں موجود دنیا کے سب سے بڑے پہیے جتنا ہو گا۔) سوار حلقے کے بیرونی دیوار میں موجود دروازے سے داخل ہو کر اس دیوار کے ساتھ کھڑے ہوں گے (شکل 10a.10)۔ حلقے پر حوالہ لکیر کا زاوی مقام $\theta(t)$ لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ تک ذیل دیتی ہے، جہاں $c = 6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}}$ ہے۔

$$\theta = ct^3 \tag{۴.۲۴}$$

لمحہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ کے بعد جھولنے کے پھیرا مکمل ہونے تک زاوی رفتار مستقل رکھی جائے گی۔ گھومنا شروع ہونے کے بعد، سوار کے پاؤں تلے فرش ہٹا دی جائے گی، لیکن وہ گرے گا نہیں؛ بلکہ وہ دیوار کے ساتھ مضبوطی سے جکڑا محسوس کرے گا۔ لمحہ $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پر شخص کی زاوی رفتار ω ، خطی رفتار v ،زاوی اسراع α ، مماسی اسراع a_t ، رداسی اسراع a_r ، اور اسراع $\vec{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

کلیدی تصور

(1) مساوات ۴.۶ زاوی رفتار ω دیتی ہے۔ (2) مساوات ۴.۱۸ (دائری راہ پر) خطی رفتار v اور (محور گھماو کے گرد) زاوی رفتار ω کا تعلق $v = \omega r$ دیتی ہے۔ (3) مساوات ۴.۸ زاوی اسراع α دیتی ہے $(\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)$ ۔ (4) مساوات ۴.۲۲ (دائری راہ کے ہمراہ) مماسی اسراع a_t اور (محور گھماو کے گرد) زاوی اسراع α کا تعلق $(a_t = \alpha r)$ دیتی ہے۔ (5) مساوات ۴.۲۳ رداسی اسراع $(a_r = \omega^2 r)$ دیتی ہے۔ (6) مماسی اور رداسی اسراع پورے اسراع $\vec{a}$ کے دو آپس میں عمودی جزو ہیں۔

حساب: آئیں ان اقدام سے گزریں۔ دیے گئے زاوی مقام تفاعل کا وقتی تفرق لے کر $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پُر کر کے زاوی سمتی رفتار معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct^3) = 3ct^2 \\
&= 3(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})^2 \\
&= 0.928\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned} \tag{۴.۲۵}$$

مساوات ۴.۱۸ اس لمحے کی ذیل خطی رفتار دیگی۔

$$\begin{aligned}
v &= \omega r = 3ct^2 r \\
&= 3(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})^2(33.1\,\mathrm{m}) \\
&= 30.7\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})
\end{aligned} \tag{۴.۲۶}$$

اگرچہ یہ رفتار $(111\,\mathrm{km\,h^{-1}})$ تیز ہے، ایسی رفتار تفریح گاہوں میں عام ہیں، اور خطرے کا باعث نہیں؛ (جیسا باب 2 میں ذکر کیا گیا) ہمارا جسم اسراع کو رد عمل کرتا ہے، خطی رفتار کو نہیں (ہم رفتار پیما نہیں سرعت پیما ہیں)۔ مساوات ۴.۲۶ کہتی ہے خطی رفتار، وقت کے مربع کے ساتھ بڑھے گی (تاہم یہ اضافہ $t = 2.20\,\mathrm{s}$ پر رک جائے گا)۔

اس کے بعد، مساوات ۴.۲۵ کا وقت تفرق لے کر زاوی اسراع معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dr} = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct \\ &= 6(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s}) = 0.843\,\mathrm{rad\,s^{-2}} \quad (\text{جواب})\end{aligned}$$

اب مساوات ۴.۲۲ مماسی اسراع a_t دیگی:

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha r = 6ctr \\ &= 6(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})(2.20\,\mathrm{s})(33.1\,\mathrm{m}) \\ &= 27.91\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 27.9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned} \tag{۴.۲۷}$$

جو $2.8g$، جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے، کے برابر ہے (جو مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔ مساوات ۴.۲۷ کہتی ہے مماسی اسراع وقت کے ساتھ بڑھ رہا ہے (تاہم یہ اضافہ $t = 2.30\,\mathrm{s}$ پر رک جائے گا)۔ مساوات ۴.۲۳ سے رداسی اسراع لکھتے کر:

$$a_r = \omega^2 r$$

مساوات ۴.۲۵ سے $\omega = 3ct^2$ ڈالتے ہیں:

$$\begin{aligned}a_r &= (3ct^2)^2 r = 9c^2t^4 r \\ &= 9(6.39 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-3}})^2(2.20\,\mathrm{s})^4(33.1\,\mathrm{m}) \\ &= 28.49\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 28.5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned} \tag{۴.۲۸}$$

جو $2.9g$ دیتا ہے (یہ بھی مناسب ہے اور پُر لطف ہوگا)۔

رداسی اور مماسی اسراع ایک دوسرے کو عمودی ہیں اور سوار کے اسراع $\vec{a}$ کے جزو ہیں (شکل 10b.10)۔ اسراع $\vec{a}$ کی قدر ذیل ہوگی:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \\ &= \sqrt{(28.49\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (27.91\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2} \\ &\approx 39.9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (\text{جواب})\end{aligned} \tag{۴.۲۹}$$

جو $4.1g$ کے برابر ہے (یہ یقیناً پُر لطف ہوگا!)۔ یہ تمام مقادیر مناسب ہیں۔

اسراع $\vec{a}$ کی سمت بندی جاننے کے لئے ہم زاویہ θ معلوم کرتے ہیں (شکل 10b.10)۔

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_r}$$

آئیں اعدادی نتائج پُر کرنے کی بجائے ہم مساوات ۴.۲۷ اور مساوات ۴.۲۸ کے الجبرائی نتائج استعمال کرتے ہیں۔

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6ctr}{9c^2t^4r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3ct^3}\right) \tag{۴.۳۰}$$

ریاضی نتیجے کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ (1) زاویے پر رداس کا کوئی اثر نہیں ہوگا اور (2) اس کی قیمت t کی قیمت 0 تا 2.20 s بڑھانے سے گھٹتی ہے۔ رداسی اسراع (جو t^4 پر منحصر ہے) بہت جلد مماسی اسراع (جو صرف t پر منحصر ہے) پر غالب ہو کر سمتیہ اسراع $\vec{a}$ کو رداسی رخ موڑتا ہے۔ وقت $t = 2.20\,\text{s}$ پر ذیل ہوگا۔

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3(6.39\times10^{-2}\,\text{rad}\,\text{s}^{-3})(2.20\,\text{s})^3} = 44.4^\circ \qquad \text{(جواب)}$$

□

۴.۴ گھماو کی حرکی توانائی

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ذرے کا گھمیری جمود نقطے پر تلاش کر پائیں گے۔

۲. قائمہ محور کے گرد گھومتے ہوئے متعدد ذروں کا کل گھمیری جمود تلاش کر پائیں گے۔

۳. گھمیری جمود اور زاوی رفتار کی صورت میں جسم کی گھمیری حرکی توانائی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- قائمہ محور پر گھومتے استوار جسم کی حرکی توانائی K ذیل ہوگی،

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

جہاں I جسم کا گھمیری جمود کہلاتا ہے، جس کی تعریف انفرادی ذروں کے نظام کے لئے درج ذیل ہے۔

$$I = \sum m_i r_i^2$$

گھماو کی حرکی توانائی

میز آرا کا تیزی سے گھومتا دھار دار پھل یقیناً گھومنے کی بنا حرکی توانائی رکھتا ہے۔ ہم اس توانائی کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں؟ ہم توانائی کے عمومی کلیے $K = \frac{1}{2}mv^2$ سے پورے آرا کی حرکی توانائی حاصل نہیں کر سکتے چونکہ یہ آرے کے مرکز کمیت کی حرکی توانائی دیگا، جو صفر ہے۔

اس کے بجائے، میز آرا (اور کسی بھی دوسرے گھومتے استوار جسم) کو ہم مختلف رفتار سے حرکت کرتے ذروں کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔ ان ذروں کی انفرادی حرکی توانائیاں جمع کر کے پورے جسم کی حرکی توانائی حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں گھومتے جسم کی حرکی توانائی ذیل ہو گی،

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \cdots$$
$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{۴.۳۱}$$

جہاں i ویں ذرے کی کمیت m_i اور رفتار v_i ہے۔ مجموعہ جسم کے تمام ذروں پر لیا جائے گا۔

مساوات ۴.۳۱ میں مشکل یہ ہے کہ ہر ذرے کی رفتار دوسرے سے مختلف ہو سکتی ہے۔ اس مشکل سے بچنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۸ سے $v = \omega r$ ڈال کر ذیل لکھتے ہیں، جس میں ω تمام ذروں کے لئے برابر ہے۔

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum m_i r_i^2\Big)\omega^2 \tag{۴.۳۲}$$

مساوات ۴.۳۲ میں دائیں ہاتھ قوسین میں بند مقدار، محور گھماو کے لحاظ سے گھومتے جسم کی کمیت کی تقسیم پیش کرتی ہے۔ یہ مقدار، محور گھماو کے لحاظ سے گھومتے جسم کا **گھمیری جمود**[13] (یا **جمودی معیار اثر**[14]) کہلاتا ہے، جس کو ہم I سے ظاہر کرتے ہیں۔ محور گھماو کے لحاظ سے جسم کے I کی قیمت اٹل ہو گی۔ (انتباہ: I کی قیمت صرف اس صورت بامعنی ہو گی جب اس محور کا ذکر کیا جائے۔) کسی دوسری محور گھماو پر اسی جسم کا I عموماً مختلف ہو گا، تاہم اب بھی اس کی قیمت مستقل ہو گی۔

ہم ذیل لکھ کر،

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (\text{گھمیری جمود}) \tag{۴.۳۳}$$

مساوات ۴.۳۲ میں ڈال کر مطلوبہ تعلق:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۳۴}$$

حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $v = \omega r$ استعمال کر کے درج بالا تعلق حاصل کیا گیا لہٰذا ω کی قیمت ریڈیئن ناپ میں لکھنی ضروری ہے۔ جمودی معیار اثر I کی اکائی کلوگرام مربع میٹر $(\mathrm{kg\,m^2})$ ہے۔

طریقہ کار۔ اگر جسم چند ذروں پر مشتمل ہو، ہم ہر ذرے کی انفرادی حرکی توانائی mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ، مساوات ۴.۳۳ کی طرح، لے کر جسم کا کل گھمیری جمود I معلوم کر سکتے ہیں۔ جسم کی کل گھمیری حرکی توانائی جاننے کے لئے معلوم شدہ I کو مساوات ۴.۳۴ میں ڈالنا ہو گا۔ چند ذروں کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کیا

[13] rotational inertia
[14] moment of inertia

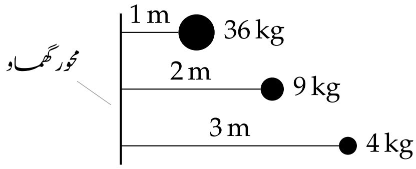
جائے گا؛ اگر جسم میں ذروں کی تعداد بہت زیادہ ہو (جیسا ایک سلاخ میں ہو گا) تب کیا ہو گا؟ اگلے حصے میں ہم اس قسم کے استمراری اجسام کو نپٹنا سیکھیں گے؛ فکر مت کریں، نتائج منٹوں میں حاصل ہوں گے۔

مساوات ۴.۳۴ جو خالص گھماو کی صورت میں استوار جسم کی حرکی توانائی $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ دیتی ہے، خالص مستقیم حرکت کی صورت میں حرکی توانائی کلیہ $K = \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}$ کی زاوی معادل ہے۔ دونوں کلیوں میں $\frac{1}{2}$ جز وضربی پایا جاتا ہے۔ ایک کلیہ میں کمیت M جبکہ دوسرے میں I (جس میں کمیت اور کمیت کی تقسیم دونوں شامل ہیں) پایا جاتا ہے۔ ساتھ ہی دونوں کلیوں میں رفتار کا مربع پایا جاتا ہے (ایک میں مستقیم اور دوسرے میں زاوی)۔ مستقیم اور زاوی حرکت کی حرکی توانائی دو مختلف توانائیاں نہیں۔ دونوں حرکی توانائی ہے، تاہم مسئلہ دیکھ کر موزوں صورت اپنائی گئی ہے۔

ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ گھومتے جسم کا گھمیری جمود نا صرف کمیت بلکہ کمیت کی تقسیم پر بھی منحصر ہو گا۔ آئیں ایک ایسی مثال دیکھیں جس کو آپ حقیقتاً محسوس کر سکتے ہیں۔ ایک لمبی اور بھاری سلاخ، پہلے طولی محور پر (شکل 11a.10) اور اس کے بعد وسطی نقطے سے گزرتی اور سلاخ کو عمودی محور پر (شکل 11b.10) گھمائیں۔ دونوں صورتوں میں کمیت ایک جتنی ہے، تاہم پہلی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔ پہلی صورت میں کمیت کی تقسیم محور گھماو کے زیادہ قریب ہے؛ یوں شکل 11a.10 میں سلاخ کا گھمیری جمود شکل 11b.10 سے کم ہو گا جس کی بدولت شکل 11a.10 میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔ کم گھمیری جمود کی صورت میں گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آزمائش ۴

تین کرہ انتصابی محور کے گرد گھومتے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر کمیت کے مرکز سے محور تک عمودی فاصلہ بھی دیا گیا ہے۔ اس محور پر گھمیری جمود کے لحاظ سے کمیتوں کی درجہ بندی کریں۔ زیادہ قیمت اول رکھیں۔



۴.۵ گھمیری جمود کا حساب

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ان اجسام کا گھمیری جمود معلوم کر پائیں گے جو جدول 1.10 میں دیے گئے ہیں۔

۲. جسم کے کمیتی ٹکڑوں پر تکمل لے کر جسم کا گھمیری جمود تلاش کر پائیں گے۔

۳. جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو سے ہٹ کر متوازی محور کے لئے متوازی محور مسئلے کا اطلاق کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- انفرادی ذروں پر مشتمل جسم کے گھمیری جمود کی تعریف:

$$I=\sum m_i r_i^2$$

اور جس جسم میں کمیت کی تقسیم استمراری ہو ذیل ہے۔

$$I=\int r^2\,\mathrm{d}m$$

انفرادی ذرے کا محور گھماو سے عمودی فاصلہ r_i ہے۔اسی طرح تکمل میں کمیت کے ٹکڑے کا محور گھماو سے عمودی فاصلہ r ہے اور تکمل پورے جسم پر لیا جاتا ہے تا کہ کمیت کے تمام ٹکڑے شامل کیے جائیں۔

- کسی بھی محور پر جسم کے گھمیری جمود I اور مرکز کمیت سے گزرتی متوازی محور پر اسی جسم کے گھمیری جمود کا تعلق:

$$I=I_{\text{مرکز کمیت}}+Mh^2$$

مسئلہ متوازی محور دیتا ہے۔دو محوروں کے بیچ عمودی فاصلہ h ہے،اور مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو پر جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ ہے۔مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو سے جتنا دور اصل محور گھماو ہٹائی گئی،، ہم h کو وہ فاصلہ تصور کر سکتے ہیں۔

گھمیری جمود کا حساب

چند ذروں پر مشتمل استوار جسم کا گھمیری جمود، محور گھماو پر، مساوات ۴.۳۳ $(I=\sum m_i r_i^2)$ دیتی ہے؛یوں ہم ہر ذرے کا mr^2 تلاش کر کے تمام کا مجموعہ لیتے ہیں۔(یاد رکھیں کہ محور گھماو سے ذرے کا عمودی فاصلہ r ہو گا۔)

اگر جسم قریب قریب انتہائی زیادہ ذروں پر مشتمل ہو (جسم استمراری ہو گا)، مساوات ۴.۳۳ کا استعمال بہت لمبا کام ہو گا جس کے لئے کمپیوٹر درکار ہو گا۔ بہتر یہ ہو گا، ہم مساوات ۴.۳۳ کے مجموعہ کی جگہ تکمل لے کر گھمیری جمود کی تعریف ذیل کریں۔

$$I=\int r^2\,\mathrm{d}m \qquad \text{(گھمیری جمود، استمراری جسم)} \tag{۴.۳۵}$$

جدول 2.10 میں نوعام شکل کے اجسام کے لئے، تکمل کے نتائج پیش کیے گئے ہیں اور مستمل محور گھماو کی نشاندہی کی گئی ہے۔

مسئلہ متوازی محور

فرض کریں ہم دی گئی محور گھماو پر ایک جسم کا، جس کی کمیت M ہو، گھمیری جمود I جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً، ہم مساوات ۴.۳۵ کے تکمل سے I حاصل کر سکتے ہیں۔ تاہم، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی ایسی محور گھماو، جو دی گئی محور کے متوازی ہو، پر گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ جانتے ہوئے، ایک آسان راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔ مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو اور دی گئی محور کے بیچ عمودی فاصل h ہونے کی صورت میں (یاد رہے، دونوں محور آپس میں متوازی ہیں) دی گئی محور پر گھمیری جمود I ذیل ہو گا۔

$$I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 \qquad \text{(مسئلہ متوازی محور)} \tag{۴.۳۶}$$

یوں تصور کریں جیسا مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو کو دور ہٹا کر h فاصلے پر رکھا گیا ہے۔ یہ مساوات **مسئلہ متوازی محور**[۱۵] کہلاتی ہے۔

مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

شکل 12.10 میں اختیاری شکل و صورت جسم کا، جس کا مرکز کمیت O ہے، عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ محددی نظام کا مبدا O پر رکھیں۔ شکل کے مستوی کو عمودی، O سے گزرتی، ایک محور لیں؛ اس محور کو متوازی، نقطہ P سے گزرتی، دوسری محور لیں۔ نقطہ P کے محدد a اور b ہیں۔

فرض کریں کسی عمومی محدد x اور y پر $\mathrm{d}m$ کمیت کا چھوٹا ٹکڑا ہے۔ نقطہ P پر محور کے لحاظ سے جسم کا گھمیری جمود مساوات ۴.۳۵ کے تحت ذیل ہو گا،

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \,\mathrm{d}m$$

جس کو ترتیب نو کے بعد ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = \int (x^2+y^2) \,\mathrm{d}m - 2a \int x \,\mathrm{d}m - 2b \int y \,\mathrm{d}m + \int (a^2+b^2) \,\mathrm{d}m \tag{۴.۳۷}$$

مرکز کمیت کی تعریف (مساوات 9.9) کہتی ہے، مساوات ۴.۳۷ کے درمیانے دو تکمل مرکز کمیت (ایک مستقل سے ضرب کر کے) دیتے ہیں، لہٰذا یہ تکمل (انفرادی طور پر) صفر کے برابر ہوں گے۔ چونکہ O سے $\mathrm{d}m$ تک فاصلہ R ہے جو $x^2 + y^2$ کے برابر ہے لہٰذا پہلا تکمل $I_{\text{مرکز کمیت}}$ دیگا۔ شکل 12.10 کو دیکھ کر ہم جانتے ہیں مساوات ۴.۳۷ کا آخری تکمل Mh^2 کے برابر ہے، جہاں جسم کی کل کمیت M ہے۔ یوں مساوات ۴.۳۷ تخفیف کے بعد مساوات ۴.۳۶ دیتی ہے، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

آزمائش ۵

شکل ?? میں کتاب کی طرح جسم (جس کا ایک ضلع دوسرے سے لمبا ہے) اور جسم کے رخ کو عمودی چار ممکن محور گھماو دکھائے گئے ہیں۔ جسم کے گھمیری جمود کے لحاظ سے، اعظم قیمت اول رکھ کر، ان محور کی درجہ بندی کریں۔

---

[۱۵] parallel axis theorem

نمونی سوال ۴.۶: **دو ذروی جسم کا گھمیری جمود**

شکل 13a.10 میں کمیت m کے دو ذروں پر مشتمل استوار جسم دکھایا گیا ہے۔ قابل نظر انداز کمیت کا سلاخ، جس کی لمبائی L ہے کمیتوں کے بیچ لگا ہے۔

(ا) سلاخ کو عمودی، جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے) پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصور

جسم صرف دو ذروں پر (جن کی کمیت ہے) مشتمل ہے، لہٰذا ہم تکمل کے بجائے مساوات ۴.۳۳ استعمال کر کے گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم انفرادی کمیت کا گھمیری جمود تلاش کر کے دونوں کا مجموعہ لیں گے۔

حساب: محور گھماو سے $\frac{1}{2}L$ عمودی فاصلے پر کمیت m کے دو ذروں کا (مجموعی) گھمیری جمود ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mL^2 \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) پہلی محور کو متوازی، سلاخ کے بائیں سر سے گزرتی، محور گھماو (شکل 13b.10) پر جسم کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصورات

اتنی آسان صورت میں I با آسانی دونوں طریقوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ پہلا طریقہ جز (ا) کی طرح ہے۔ دوسرا، زیادہ طاقتور طریقہ مسئلہ متوازی محور استعمال کرتا ہے۔

پہلا طریقہ: ہم جز (ا) کی طرح I معلوم کرتے ہیں، تاہم اب سلاخ کے بائیں سر پر موجود ذرے کا r_i صفر اور دائیں سر پر ذرے کا L ہو گا۔ مساوات ۴.۳۳ اب ذیل دیگی۔

$$I = m(0)^2 + m(L)^2 = mL^2 \qquad (\text{جواب})$$

دوسرا طریقہ: ہم مرکز کمیت سے گزرتی محور گھماو پر جسم کا گھمیری جمود جانتے ہیں اور دوسرا محور مرکز کمیت سے گزرتی محور کو متوازی ہے لہٰذا مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= mL^2 \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

□

نمونی سوال ۴.۷: **یکساں سلاخ کا گھمیری جمود با تکمل**

کمیت M اور لمبائی L کی یکساں سلاخ محور x پر یوں رکھا گیا ہے کہ سلاخ کا وسط مبدا پر ہو (شکل 14.10)۔

(ا) سلاخ کے وسط پر، سلاخ کو عمودی محور گھماو پر سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصورات

(1) سلاخ انتہائی زیادہ ذروں پر، جو محور گھماو سے انتہائی زیادہ تعداد کے مختلف فاصلوں پر موجود ہیں، مشتمل ہے۔ ہم ہر ذرے کا انفرادی گھمیری جمود ہرگز معلوم نہیں کرنا چاہتے۔ (ہم اپنی باقی تمام زندگی اس کام میں گزار سکتے ہیں۔) لہٰذا، ہم محور گھماو سے r فاصلے پر کمیت کے ایک چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}m$ کے لئے گھمیری جمود کا عمومی الجبرائی فقرہ: $r^2\,\mathrm{d}m$ لکھتے ہیں۔ (2) ایک ایک کر کے تمام چھوٹے حصوں کے گھمیری جمود جمع کرنے کے بجائے، ہم اس فقرے کا تکمل لے کر مجموعہ معلوم کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۳۵ سے ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{۴.۳۸}$$

(3) سلاخ یکساں ہے اور محور گھماو عین مرکز کمیت سے گزرتا ہے، لہٰذا ہم گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ معلوم کر رہے ہیں۔

حساب: ہم محدد x کے لحاظ سے تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں (نا کہ کمیت m کے لحاظ سے جیسا تکمل کہتا ہے)، لہٰذا کمیت کے ٹکڑے $\mathrm{d}m$ کا سلاخ کے ہمراہ لمبائی $\mathrm{d}x$ کے ساتھ رشتہ درکار ہو گا۔ (شکل 14.10 میں ایک ایسا ٹکڑا دکھایا گیا ہے۔) سلاخ یکساں ہے، لہٰذا تمام ٹکڑوں کی کمیت اور لمبائی کی نسبت برابر ہو گی۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\frac{\text{ٹکڑے کی کمیت}\ \mathrm{d}m}{\text{ٹکڑے کی لمبائی}\ \mathrm{d}x} = \frac{\text{سلاخ کی کمیت}\ M}{\text{سلاخ کی لمبائی}\ L}$$

یا

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}x$$

مساوات ۴.۳۸ میں r کی جگہ x اور $\mathrm{d}m$ کی جگہ درج بالا نتیجہ ڈال کر، سلاخ کے ایک سر سے دوسرے سر تک (یعنی $x = -\frac{L}{2}$ تا $x = \frac{L}{2}$) تکمل لیتے ہوئے کمیت کے تمام ٹکڑے شامل کرتے ہیں۔ یوں ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3-\left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{12}ML^2 \qquad \text{(جواب)}
\end{aligned}$$

(ب) ایک نئی محور گھماو پر، جو سلاخ کے بائیں سر سے گزرتی اور سلاخ کو عمودی ہے، سلاخ کا گھمیری جمود کیا ہو گا؟

کلیدی تصورات

ہم محور x کا مبدا سلاخ کے بائیں سر پر منتقل کر کے تکمل $0 = x$ تا $L = x$ لے کر I معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم، ہم زیادہ آسان اور طاقتور مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) استعمال کرتے ہیں، جس میں محور گھماو کی سمت بندی تبدیل کیے بغیر اسے دوسری جگہ منتقل کرتے ہیں۔

حساب: مرکز کمیت سے گزرتی محور کے متوازی، سلاخ کے بائیں سر پر، نئی محور رکھ کر ہم مسئلہ متوازی محور (مساوات ۴.۳۶) استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم جزو اسے جانتے ہیں کہ $I_{\text{مرکز کمیت}} = \frac{1}{12}ML^2$ ہے۔ شکل 14.10 میں سلاخ کے وسط سے نئی محور گھماو تک فاصلہ $\frac{1}{2}L$ ہے۔ یوں مساوات ۴.۳۶ ذیل دیگی۔

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= \tfrac{1}{3}ML^2 \qquad \text{(جواب)} \end{aligned}$$

درحقیقت، یہ نتیجہ سلاخ کے بائیں یا دائیں سر پر ہر، سلاخ کو عمودی، محور گھماو کے لئے درست ہے۔ □

نمونی سوال ۴.۸: گھمیری جمودی توانائی؛ چکری پرکھ

مشین کے بڑے حصوں کا، جو لمبے عرصہ تیز رفتار سے چکر کاٹتے ہوں، معائنہ چکری پرکھ کے نظام میں کرنا ضروری ہے۔ اس نظام میں، فولادی بیلن کے اندر، جس کی اندرونی جانب سیسہ کی اینٹیں نسب ہوں، مشین کے حصے کو مخصوص چکری رفتار تک (جس پر حصے کو پرکھنا مقصود ہو) لایا جاتا ہے۔ اس دوران بیلن کا منہ فولادی ڈھکن سے بند رکھا جاتا ہے۔ اگر مشین کا حصہ مطلوبہ چکری رفتار برداشت نہ کرتے ہوئے ٹوٹ جائے، اس کے ٹکڑے سیسہ کی ملائم اینٹوں میں دھنس کر محفوظ ہوں گے، جن کا معائنہ بعد میں کرنا ممکن ہو گا۔

۱۹۸۵ میں ایک ادارہ نے، جو مشین پرکھنے کا کام کرتا ہے، 272 kg ٹھوس فولادی (قرص شکل کا) مدور، جس کا رداس $R = 38.0\,\text{cm}$ تھا، پرکھنے کا کام لیا۔ عین $\omega = 14000$ چکر فی منٹ کی زاویائی رفتار کو پہنچ کر **آزمائش کار معمار**[16] ایک آواز سنتا ہے۔ تفتیش کرنے پر معلوم ہوا سیسہ کی اینٹیں کمرے سے باہر بکھری پڑی ہیں، کمرے کا دروازہ گاڑیاں کھڑی کرنے کی جگہ میں پڑا ملا، ایک سیسہ کی اینٹ پڑوسی کے باورچی خانے کی دیوار توڑ کر اندر پہنچی تھی، ادارے کی عمارت کے ستون ناکارہ ہو چکے تھے، چکر خانہ کا پکا فرش 0.5 cm زمین میں دھنس چکا تھا، اور چکری نظام کا 900 kg ڈھکن اڑ کر چھت سے گزرتے ہوئے بالائی منزل میں داخل ہونے بعد واپس چکری نظام پر گر کر پڑا تھا۔ خوش قسمتی سے کوئی بھی ٹکڑا آزمائش کار معمار کے کمرے کی طرف نہیں گیا۔

اس دھماکے میں کتنی توانائی خارج کی گئی؟

کلیدی تصور

خارج توانائی 14000 چکر فی منٹ پر مدور کی گھمیری حرکی توانائی K کے برابر ہو گی۔

---

[16] testengineer

حل: ہم مساوات ۴.۳۴ سے K کی قیمت $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ تلاش کرتے ہیں، لیکن اس سے پہلے مدور کا گھمیری جمود I جاننا ضروری ہے۔ قرص کا گھمیری جمود جدول 2c.10 کے تحت $(I = \frac{1}{2}MR^2)$ ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(272\,\mathrm{kg})(0.38\,\mathrm{m})^2 = 19.64\,\mathrm{kg\,m^2}$$

مدور کی زاوی رفتار، ریڈیئن ناپ میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\omega &= (\text{14000 چکر فی منٹ})(\text{2}\pi\text{ ریڈیئن فی چکر})\left(\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}}\right)\\ &= 1.466\times10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

یوں مساوات ۴.۳۴ کے تحت خارج توانائی ذیل ہے (جو بہت بڑی مقدار ہے)۔

$$\begin{aligned}K &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19.64\,\mathrm{kg\,m^2})(1.466\times10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2\\ &= 2.1\times10^7\,\mathrm{J} \qquad (\text{جواب})\end{aligned}$$

□

۶.۴ قوت مروڑ

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ جسم پر قوت مروڑ میں قوت اور، محور گھماو سے قوت کے نقطہ اطلاق تک کا، تعین گر سمتیہ شامل ہیں۔

۲. (ا) تعین گر سمتیہ اور سمتیہ قوت کے بیچ زاویے کی مدد سے، (ب) خط عمل اور قوت کے معیار اثر کے بازو کی مدد سے، اور (ج) تعین گر سمتیہ کو قوت کے عمودی جزو کی مدد سے قوت مروڑ تلاش کر پائیں گے۔

۳. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ جاننے کے لئے محور گھماو جاننا لازم ہے۔

۴. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ کو مثبت یا منفی علامت مختص کی جاتی ہے، جس کا دارومدار اس رخ پر ہو گا جس رخ قوت مروڑ جسم کو محور گھماو پر گھمانے کی کوشش کرتی ہے (یاد رہے، "گھڑیاں منفی ہیں")۔

۵. جہاں ایک سے زیادہ قوت مروڑ جسم پر عمل کرتی ہوں، صافی قوت مروڑ حاصل کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- قوت $\vec{F}$ کی، محور گھماو پر جسم کو گھمانے کی، کوشش کو قوت مروڑ کہتے ہیں۔ اگر محور گھماو کے لحاظ سے، $\vec{F}$ جس نقطہ پر عمل کرتی ہو، اس نقطے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہو، تب قوت مروڑ کی قدر ذیل ہو گی،

$$\tau = rF_t = r_\perp R = rF\sin\phi$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی جزو F_t ہے اور ϕ قوت $\vec{F}$ اور سمتیہ $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ہے۔ محور گھماو اور $\vec{F}$ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ $r_\perp$ ہے۔ مبسوط لکیر کو $\vec{F}$ کا "خط عمل"، اور $r_\perp$ کو $\vec{F}$ کا "معیار اثر" کہتے ہیں۔ اسی طرح r کو F_t کا معیار اثر کہیں گے۔

- قوت مروڑ کی اکائی نیوٹن میٹر $(\mathrm{N\,m})$ ہے۔ ساکن جسم کو محور گھماو پر خلاف گھڑی گھمانے کی کوشش کرنے والی قوت مروڑ τ مثبت ہو گی، گھڑی وار گھمانے کی کوشش کرنے والی منفی ہو گی۔

قوت مروڑ

دروازے کا دستہ چول سے دور، کسی مقصد سے، رکھا جاتا ہے۔ دروازہ کھولنے کے لئے قوت لگانی ضروری ہے، تاہم قوت کا رخ اور لگانے کا مقام بھی اہمیت رکھتے ہیں۔ اگر آپ، دستے کے بجائے، چول کے قریب قوت کا اطلاق کریں یا دروازے کی سطح کو قوت 90° پر لاگو نہ کریں، دروازہ کھولنے کے لئے آپ کو اس قوت سے زیادہ قوت درکار ہو گی، جو دستے پر دروازے کی سطح کو عمودی درکار چاہیے۔

شکل 16a.10 میں جسم کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ جسم، O سے گزرتی، تراش کو عمودی محور گھماو پر، آزادی سے گھوم سکتا ہے۔ نقطہ P پر، جس کا O کے لحاظ سے تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے، قوت $\vec{F}$ کا اطلاق کیا گیا ہے۔ $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے رخ آپس میں زاویہ ϕ پر ہیں۔ (ہم اپنی آسانی کے لئے صرف ان قوت کی بات کرتے ہیں، جن کا محور گھماو کو متوازی جزو نہیں پایا جاتا؛ یوں $\vec{F}$ صفحے کی سطح میں ہو گی۔)

یہ جاننے کے لئے کہ محور گھماو پر $\vec{F}$ جسم کو کیسے گھماتی ہے، ہم $\vec{F}$ کو دو اجزاء میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16b.10)۔ ایک جزو، جو رداسی جزو F_r کہلاتا ہے، $\vec{r}$ کے ہمراہ ہو گا۔ چونکہ یہ جزو O سے گزرتی لکیر کے ہمراہ ہے، لہٰذا یہ گھماو میں کردار ادا نہیں کرتا۔ (اگر آپ دروازے کو دروازے کے سطح کے ہمراہ کھینچیں، دروازہ کبھی بھی نہیں کھلے گا۔) $\vec{F}$ کا دوسرا جزو، جو مماسی جزو F_t کہلاتا ہے، $\vec{r}$ کو عمودی ہے اور اس کی قدر $F_t = F\sin\phi$ ہے۔ یہ جزو گھماو کا سبب بنتا ہے۔

قوت مروڑ کا حساب۔ $\vec{F}$ کی جسم گھمانے کی صلاحیت، قوت $\vec{F}$ کے مماسی جزو F_t کی قدر کے علاوہ O سے (قوت کے) اطلاقی نقطے کے فاصلے پر منحصر ہے۔ ان دونوں وجوہات کو شامل کرنے کی خاطر ہم (درج ذیل) ایک نئی مقدار متعارف کرتے ہیں جو **قوت مروڑ**[۱۷] τ کہلاتی ہے، جو دو جزو ضربیوں کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$\tau = (r)(F\sin\phi) \tag{۴.۳۹}$$

قوت مروڑ کا حساب (درج ذیل) دو معادل طریقوں:

$$\tau = (r)(F\sin\phi) = rF_t \tag{۴.۴۰}$$

اور

$$\tau = (r)(F\sin\phi) = r_\perp F \tag{۴.۴۱}$$

[۱۷] torque

سے ممکن ہے، جہاں O پر محور گھماو اور $\vec{F}$ سمتیہ سے گزرتی مبسوط لکیر کے بیچ عمودی فاصلہ $r_{\perp}$ ہے (شکل 16c.10)۔ اس مبسوط لکیر کو $\vec{F}$ کا **خط عمل**[۱۸]، اور $r_{\perp}$ کو $\vec{F}$ کا **معیار اثر کا بازو**[۱۹] کہتے ہیں۔ شکل 16b.10 میں دکھایا گیا ہے کہ ہم $\vec{r}$ کی قدر r کو جزو قوت F_t کا معیار اثر کا بازو کہہ سکتے ہیں۔

جب آپ کسی جسم، مثلاً پیچ کس، پر اس نیت سے قوت لگاتے ہیں کہ یہ گھومے، آپ قوت مروڑ لاگو کرتے ہیں۔ قوت مروڑ کی بین الاقوامی اکائی نیوٹن میٹر $(\mathrm{N\,m})$ ہے۔ انتباہ: نیوٹن میٹر کی اکائی کام کے لئے بھی مستعمل ہے۔ تاہم، قوت مروڑ اور کام دو مختلف مقادیر ہیں۔ کام کے لئے عام طور جاول اکائی $(1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m})$ استعمال کی جاتی ہے جبکہ قوت مروڑ کے لئے صرف نیوٹن میٹر اکائی استعمال ہو گی۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ باب 11 میں قوت مروڑ کے لئے سمتیہ ترقیم استعمال کی جائے گی؛ یہاں واحد محور پر گھماو کی بات کی جائے گی لہٰذا الجبرائی علامت استعمال کی جائے گی۔ اگر قوت مروڑ خلاف گھڑی گھماو پیدا کرنے کی کوشش کرے، یہ مثبت ہو گی اور اگر گھڑی وار کوشش کرے تب منفی ہو گی۔ (حصہ 1.10 میں ہم نے کہا "گھڑیاں منفی ہیں"۔ یہ فقرہ یہاں بھی کارآمد ہے۔)

اصول انطباق (جس کا ذکر باب 5 میں کیا گیا) کو قوت مروڑ مطمئن کرتے ہیں: جب جسم پر کئی قوت مروڑ عمل کرتی ہوں، جسم پر **صافی قوت مروڑ**[۲۰] (یا **حاصل قوت مروڑ**[۲۱]) انفرادی قوت مروڑ کا مجموعہ ہو گا۔ صافی قوت مروڑ کی علامت $\tau_{\text{صافی}}$ ہے۔

آزمائش ۶

میٹر سلاخ کا فضائی جائزہ شکل ؟؟ میں پیش ہے؛ سلاخ کا چول $20\,\mathrm{cm}$ پر پایا جاتا ہے۔ سلاخ پر پانچوں قوت افقی اور ان کی قدریں برابر ہیں۔ اعظم قیمت اول رکھ کر، قوتوں کی درجہ بندی ان کی پیدا قوت مروڑ کے لحاظ سے کریں۔

۷.۴ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. گھماو کی صورت میں جسم پر صافی قوت مروڑ کا، جسم کے گھمیری جمود اور گھمیری اسراع کے ساتھ، رشتہ نیوٹن کے دوسرے قانون سے جان پائیں گے۔ تمام مقادیر مختص محور گھماو کے لحاظ سے ہیں۔

کلیدی تصور

[۱۸] lineofaction
[۱۹] momentarm
[۲۰] nettorque
[۲۱] resultanttorque

- نیوٹن کے دوسرے قانون کا گھمیری مماثل ذیل ہے،

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$$

جہاں ذرے یا استوار جسم پر صافی قوت مروڑ $\tau_{\text{صافی}}$ ہے، محور گھماو پر ذرے یا جسم کا گھمیری جمود I ہے، اور α اس محور پر ماحصل زاوی اسراع ہے۔

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو

قوت مروڑ استوار جسم کو گھما سکتی ہے، جیسا آپ دروازہ قوت مروڑ سے کھولتے اور بند کرتے ہیں۔ ہم استوار جسم پر صافی قوت مروڑ $\tau_{\text{صافی}}$ اور محور گھماو پر جسم کی اس زاوی اسراع α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں جو یہ قوت مروڑ پیدا کرتی ہے۔ ہم نیوٹن کے دوسرے قانون $(F_{\text{صافی}} = ma)$ کو دیکھ کر، جو محددی محور پر کمیت m کے جسم پر صافی قوت $F_{\text{صافی}}$ سے پیدا جسم کی خطی اسراع a کا تعلق دیتا ہے، ایسا کریں گے۔ ہم $F_{\text{صافی}}$ کی جگہ $\tau_{\text{صافی}}$، m کی جگہ I، اور a کی جگہ α رکھ کر ذیل لکھتے ہیں۔

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha \qquad \text{(نیوٹن کا دوسرا قانون برائے گھماو)} \tag{۴.۴۲}$$

مساوات ۴.۴۲ کا ثبوت

پہلے شکل 17.10 میں پیش سادہ صورت کے لئے مساوات ۴.۴۲ ثابت کرتے ہیں۔ بلا کمیت سلاخ اور اس کے ایک سر پر کمیت m کا ذرہ مل کر استوار جسم دیتے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی r ہے اور یہ اپنے دوسرے سر پر، سطح صفحہ کو عمودی محور گھماو (دھرے) پر، گھوم سکتی ہے۔ یوں، ذرہ صرف دائری راہ پر، جس کے وسط پر محور گھماو ہے، حرکت کا مجاز ہے۔

ذرے پر قوت $\vec{F}$ عمل کرتی ہے۔ تاہم، ذرہ صرف دائری راہ پر حرکت کر سکتا ہے، لہٰذا قوت کا صرف مماسی جزو F_t (جو دائری راہ کو مماس ہے) ذرے کو اس راہ پر مسرع کر سکتا ہے۔ ہم F_t اور اس راہ پر ذرے کے مماسی اسراع a_t کا تعلق نیوٹن کے دوسرے قانون سے لکھتے ہیں۔

$$F_t = ma_t$$

ذرے پر قوت مروڑ، مساوات ۴.۴۰ کے تحت ذیل ہوگا۔

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

مساوات ۴.۲۲ $(a_t = \alpha r)$ سے اس کو ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \tag{۴.۴۳}$$

دائیں ہاتھ قوسین میں بند مقدار، محور گھماو پر ذرے کا گھمیری جمود ہے (مساوات ۴.۳۳ دیکھیں، تاہم یہاں صرف ایک ذرے کی بات کی جا رہی ہے)۔ یوں گھمیری جمود کے لئے I لکھ کر مساوات ۴.۴۳ ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\tau = I\alpha \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۴۴}$$

جہاں ایک سے زیادہ قوت ذرے پر عمل کرتی ہوں مساوات ۴.۴۴ ذیل صورت اختیار کرے گی، جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

$$\tau_{\text{صافی}} = I\alpha \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۴۵}$$

چونکہ ہر جسم انفرادی ذروں کا مجموعہ ہو گا لہٰذا اس مساوات کو کسی بھی استوار جسم تک، جو مقررہ محور گھماو پر گھومتا ہو، وسعت دی جا سکتی ہے۔

آزمائش ۷

شکل ؟؟ میں میٹر سلاخ کا فضائی جائزہ پیش ہے۔ سلاخ کے وسط سے بائیں جانب نقطہ چول ہے جس پر سلاخ چکر کاٹ سکتی ہے۔ سلاخ پر دو افقی قوت $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ لاگو کی جاتی ہیں۔ صرف $\vec{F}_1$ دکھائی گئی ہے۔ قوت $\vec{F}_2$ سلاخ کو عمودی ہے اور سلاخ کے دائیں سر پر لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ نہ گھومنے کی صورت میں (ا) $\vec{F}_2$ کا رخ کیا ہو گا اور (ب) کیا F_2 کی قیمت F_1 سے کم ہو گی، زیادہ ہو گا، یا اس کے برابر ہو گی؟

نمونی سوال ۴.۹: **نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماو کا کولا میں استعمال**

کولا کشتی کا وہ داو ہے جس میں پہلوان دوسرے کو کولہے کی زد پر لا کر گراتا ہے۔ آئیں پہلوانوں کی کشتی کو طبیعی دان کے نقطہ نظر سے دیکھیں۔ کولہے پر $80\,\mathrm{kg}$ حریف کو چڑھا کر $\vec{F}$ قوت کے ساتھ دائیں کولہے پر نقطہ گھماو (محور گھماو) رکھ کر $d_1 = 0.30\,\mathrm{m}$ معیار اثر کا بازو استعمال کرتے ہوئے، آپ حریف کو زمین پر مارتے ہیں (شکل 18.10)۔ آپ نقطہ گھماو پر اس کو $\alpha = 6.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ زاوی اسراع سے (جو شکل میں گھڑی وار ہے) گھمانا چاہتے ہیں۔ فرض کریں نقطہ گھماو کے لحاظ سے اس کا جمود گھمیری $I = 15\,\mathrm{kg\,m^2}$ ہے۔

(ا) زمین پر گرانے سے قبل اگر آپ حریف کو آگے جھکا کر اس کا مرکز کمیت اپنے کولہے پر رکھیں تو $\vec{F}$ کی قدر کیا ہو گی (شکل 18a.10)؟

کلیدی تصور

ہم $\boldsymbol{F}$ کا زاوی اسراع سے رشتہ نیوٹن کے قانون دوم برائے گھماو $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ سے جانتے ہیں۔

حساب: زمین سے حریف کے پاوں اٹھنے کے بعد، ہم کہہ سکتے ہیں اس پر تین قوت عمل پیرا ہوں گی: آپ کی کھینچ $\vec{F}$، نقطہ گھماو پر آپ کی حریف پر عمودی قوت $\vec{N}$ (شکل 18.10 میں اسے نہیں دکھایا گیا)، اور تجاذبی قوت $\vec{F}_g$۔ نقطہ گھماو پر تینوں قوتوں کی قوت مروڑ جانتے ہوئے ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ استعمال کر پائیں گے۔

مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ کے تحت آپ کی کھینچ $\vec{F}$ سے پیدا قوت مروڑ $-d_1F$ ہو گی، جہاں d_1 معیار اثر کا بازو $r_\perp$ ہے، اور منفی علامت کہتی ہے کہ یہ مروڑ گھڑی وار گھماو کی کوشش کرتی ہے۔ قوت $\vec{N}$ نقطہ گھماو سے گزرتی ہے لہٰذا اس کا معیار اثر کا بازو $r_\perp = 0$ ہو گا اور یوں اس کی قوت مروڑ بھی صفر ہو گی۔ تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ حریف کے مرکز کمیت پر عمل کرتی ہے۔ مرکز کمیت عین نقطہ گھماو پر ہے لہٰذا $\vec{F}_g$ کا معیار اثر کا بازو

$r_{\perp} = 0$ ہو گا اور یوں اس کی قوت مروڑ بھی صفر ہو گی۔ یوں حریف پر صرف آپ کی کھینچ $\vec{F}$ کی قوت مروڑ عمل کرتی ہے اور ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$-d_1F = I\alpha$$

یوں ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} F &= \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\,\mathrm{kg\,m^2})(-6.0\,\mathrm{rad\,s^{-2}})}{0.30\,\mathrm{m}} \\ &= 300\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

(ب) اگر گرنے سے پہلے آپ کا حریف سیدھا کھڑا رہے تاکہ $\vec{F}_g$ کا معیار اثر کا بازو $d_2 = 0.12\,\mathrm{m}$ ہو تب $\vec{F}$ کی قدر کیا ہو گا (شکل 18b.10)؟

کلیدی تصور

چونکہ $\vec{F}_g = mg$ کا معیار اثر کا بازو اب صفر نہیں، اس کی قوت مروڑ اب d_2mg ہو گی جو خلاف گھڑی ہونے کی بنا مثبت ہے۔

حساب: ہم $\tau_{\text{صافی}} = I\alpha$ اب ذیل لکھتے ہیں

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha$$

جو ذیل دیگا۔

$$\begin{aligned} F &= 300\,\mathrm{N} + \frac{(0.12\,\mathrm{m})(80\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})}{0.30\,\mathrm{m}} \\ &= 613.5\,\mathrm{N} \approx 610\,\mathrm{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

اس نتیجے کے تحت اگر آپ حریف کو جھکا کر اس کا مرکز کمیت اپنے کولہے پر رکھ نہ سکیں، آپ کو کافی زیادہ قوت لگانی ہو گی۔ ایک اچھا پہلوان یہ حقیقت جانتا ہے۔ □

جوابات