طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۲۱ر جنوری ۲۰۲۴

عنوان

باب ۴

گھماو

۴.۱ گھماو کے متغیر

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ درج ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے اگر جسم کے تمام حصے ایک محور کے گرد ہم قدم گھومیں، یہ استوار جسم ہو گا۔(اس باب میں ایسے اجسام پر گفتگو کی جائے گی۔)

۲. جان پائیں گے کہ اندرونی حوالہ لکیر اور مقررہ بیرونی حوالہ لکیر کے بیچ زاویہ، استوار جسم کا زاویاتی مقام دیگا۔

۳. ابتدائی اور اختتامی زاویاتی مقام کا زاویاتی ہٹاو کے ساتھ تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. اوسط زاویائی سمتی رفتار، زاویائی ہٹاو، اور ہٹاو کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۵. اوسط زاویائی اسراع، زاویائی سمتی رفتار میں تبدیلی، اور اس تبدیلی کو درکار دورانیے کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۶. جان پائیں گے کہ خلاف گھڑی حرکت مثبت رخ اور گھڑی وار حرکت منفی رخ ہو گا۔

۷. زاویائی مقام کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویائی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویائی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۸. زاویائی مقام بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویائی سمتی رفتار اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویائی سمتی رفتار تعین کر پائیں گے۔

۹. جان پائیں گے کہ لمحاتی زاویائی سمتی رفتار کی قدر لمحاتی زاویائی رفتار ہو گی۔

۱۰. زاویائی سمتی رفتار کو وقت کا تفاعل جانتے ہوئے، کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویائی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویائی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۱. زاویائی سمتی رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم سے کسی بھی لمحے پر لمحاتی زاویائی اسراع اور دو مختلف وقتوں کے بیچ اوسط زاویائی اسراع تعین کر پائیں گے۔

۱۲. وقت کے ساتھ زاویائی اسراع تفاعل کا تکمل لے کر جسم کی زاویائی سمتی رفتار میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔

وقت کے ساتھ زاویائی سمتی رفتار تفاعل کا تکمل لے کر جسم کے زاویائی مقام میں تبدیلی تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مقررہ محور، جو محور گھماو کہلاتی ہے، کے گرد استوار جسم کا گھماو بیان کرنے کی خاطر، جسم کے اندر محور کو عمودی حوالہ لکیر فرض کی جاتی ہے جو جسم کے ساتھ ہم قدم محور کے گرد گھومتی ہے۔ ایک مقررہ رخ کے ساتھ اس لکیر کا زاویائی مقام θ ناپا جاتا ہے۔ جب θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو، ذیل ہو گا،

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ})$$

جہاں رداس r کے دائری راہ کا قوسی فاصلہ s اور ریڈیئن میں زاویہ θ ہے۔

- زاویہ کی درجے میں اور چکر میں پیمائش کا ریڈیئن پیمائش سے تعلق ذیل ہے۔

$$1\ \text{چکر} = 360^\circ = 2\pi\ \text{ریڈیئن}$$

- ایک جسم جو محور گھماو کے گرد گھوم کر اپنا زاویائی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، ذیل زاویائی ہٹاو سے گزرتا ہے،

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

جہاں خلاف گھڑی گھماو کے لئے $\Delta\theta$ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔

- اگر جسم Δt دورانیہ میں $\Delta\theta$ زاویائی ہٹاو گھومے، اس کی اوسط زاویائی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گی۔

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

جسم کی (لمحاتی) زاویائی سمتی رفتار ω ذیل ہو گی۔

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اوسط زاویائی سمتی رفتار $\omega_{\text{اوسط}}$ اور سمتی رفتار ω دونوں سمتی مقدار ہیں، جن کا رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔ خلاف گھڑی گھماو کے لئے ان کا رخ مثبت اور گھڑی وار گھماو کے لئے منفی ہو گا۔ زاویائی سمتی رفتار کی قدر جسم کی زاویائی رفتار ہو گی۔

- اگر $\Delta t = t_2 - t_1$ دورانیہ میں جسم کی زاویائی سمتی رفتار ω_1 سے تبدیل ہو کر ω_2 ہو، اس کا اوسط زاویائی اسراع $\alpha_{\text{اوسط}}$ ذیل ہو گا۔

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

جسم کا (لمحاتی) زاویائی اسراع α ذیل ہو گا۔

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$\alpha_{\text{اوسط}}$ اور α دونوں سمتی مقادیر ہیں۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے، طبیعیات کی توجہ کا ایک مرکز "حرکیات" ہے۔ تاہم، اب تک ہم صرف **مستقیم حرکت** پر بات کرتے رہے ہیں، جس میں جسم سیدھی یا قوسی لکیر پر حرکت کرتا ہے (شکل 1a-10)۔ اب ہم **گھماو** پر نظر ڈالتے ہیں، جس میں جسم کسی محور کے گرد گھومتا ہے (شکل 1b.10)۔

گھماو تقریباً ہر مشین میں نظر آتا ہے، اور جب آپ دروازہ کھولتے ہیں آپ اس کو دیکھتے ہیں۔ کھیل میں گھماو اہم کردار ادا کرتا ہے، جیسا گیند کو زیادہ دور پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا زیادہ دیر اٹھا کر سکتی ہے)، اور کرکٹ میں گیند قوسی راہ پر پھینکنے کے لئے (گھومتے گیند کو ہوا دائیں یا بائیں دھکیلتی ہے)۔ گھماو زیادہ اہم مسائل، جیسا عمر رسیدہ ہوائی جہاز میں دھاتی حصوں کا ٹوٹ پھوٹ، میں بھی کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

گھماو پر بحث سے قبل، حرکت میں ملوث متغیرات متعارف کرتے ہیں، جیسا ہم نے باب 2 میں مستقیم حرکت پر بحث سے قبل کیا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ گھماو کے متغیرات عین باب 2 میں یک بُعدی حرکت کے متغیرات کی طرح ہیں؛ ایک اہم خصوصی صورت وہ ہے جہاں اسراع (جو یہاں زاویائی اسراع ہو گا) مستقل ہو۔ ہم دیکھتے ہیں نیوٹن کا دوسرا قاعدہ زاویائی حرکت کے لئے بھی لکھا جا سکتا ہے، تاہم اب قوت کی بجائے ایک نئی مقدار جو قوت مروڑ کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ کام اور کام و حرکی توانائی مسئلے کا اطلاق بھی گھماو حرکت پر کیا جا سکتا ہے، تاہم کمیت کی بجائے ایک نئی مقدار جو زاویائی جمود کہلاتی ہے استعمال کرنا ہو گا۔ مختصراً، ہم جو کچھ پڑھ چکے ہیں، اس کا اطلاق گھماو حرکت میں ہو گا، تاہم کبھی کبھار معمولی تبدیلی کی ضرورت پیش آئے گی۔

انتباہ: اگرچہ اس باب میں زیادہ تر حقائق محض دوبارہ پیش کیے گئے ہیں، دیکھا یہ گیا ہے کہ طلبہ و طالبات کو اس باب میں دشواری پیش آتی ہے۔ اساتذہ کرام اس کی کئی وجوہات پیش کرتے ہیں جن میں سے دو پر اتفاق پایا جاتا ہے: 1 یہاں علامت کی تعداد بہت زیادہ ہے (جنہیں یونانی حروف میں لکھ کر مشکل میں مزید اضافہ پیدا ہوتا ہے)، اور 2 آپ خطی حرکت سے زیادہ واقف ہیں (اسی لئے کمرے کے ایک کونے سے دوسرے کونے تک آپ با آسانی جا سکتے ہیں)، لیکن گھماو سے آپ کا واسطہ کم رہا ہے (اسی لئے تفریح گاہ میں آپ تفریحی جھولے پر سوار ہونے کے لئے پیسہ خرچنے کے لئے راضی ہوتے ہیں)۔ جہاں آپ کو دشواری ہو، دیکھیں

آیا مسئلے کو باب 2 کا یک بُعدی خطی مسئلہ تصور کرنے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ مثلاً، اگر آپ سے زاویائی فاصلہ معلوم کرنے کو کہا جائے، وقتی طور پر لفظ زاویائی کو بھول جائیں اور دیکھیں آیا باب 2 کی ترقیم اور تصورات استعمال کر کے جواب حاصل کرنا آسان ہوتا ہے۔

گھماو کے متغیر

ہم مقررہ محور پر استوار جسم کے گھماو پر غور کرنا چاہتے ہیں۔ **استوار جسم** [1] سے مراد وہ جسم ہے جس کے تمام حصے، جسم کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر، ہم قدم گھوم سکتے ہیں۔ **مقررہ محور** [2] سے مراد وہ محور ہے جو حرکت نہیں کرتی اور جس پر گھوما جا سکتا ہے۔ یوں ہم ایسے جسم پر غور نہیں کریں گے جیسا سورج (جو گیس کا کرہ ہے) جس کے حصے ایک ساتھ حرکت نہیں کرتے۔ ہم زمین پر لڑھکتے گیند کی بھی بات نہیں کرتے چونکہ اس کا محور خود حرکت پذیر ہے (ایسی گیند کی حرکت، گھماو اور مستقیم حرکت کا ملاپ ہے)۔

شکل 2.10 میں مقررہ محور پر، جو **محور گھماو** [3] یا **گھماو کی محور** کہلاتی ہے، اختیاری شکل کا استوار جسم گھوم رہا ہے۔ خالص گھماو (زاویائی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے، جس کا مرکز محور گھماو پر واقع ہے، اور ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی وقفہ میں ایک جتنا زاویہ طے کرتا ہے۔ خالص مستقیم حرکت (خطی حرکت) میں، جسم کا ہر نقطہ کسی مخصوص وقتی دورانیہ میں ایک جتنا خطی فاصلہ طے کرتا ہے۔

آئیں باری باری خطی مقادیر مقام، ہٹاو، سمتی رفتار، اور اسراع کے مماثل زاویائی مقادیر پر غور کرتے ہیں۔

زاویائی مقام

شکل 2.10 میں گھماو کو عمودی، جسم کے ساتھ گھومتی، جسم سے پکی جڑی حوالہ لکیر دکھائی گئی ہے۔ کسی مقررہ رخ کے ساتھ، جس کو ہم **صفر زاویائی مقام** [4] مانتے ہیں، اس لکیر کا زاویہ لکیر کا **زاویائی مقام** [5] ہو گا۔ شکل 3.10 میں محور x کے مثبت رخ کے ساتھ زاویائی مقام θ ناپا گیا ہے۔ ہندسہ سے ہم جانتے ہیں درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱}$$

یہاں محور x (جو صفر زاویائی مقام ہے) سے حوالہ لکیر تک دائری قوس کی لمبائی s، اور دائرے کا رداس r ہے۔

اس طرح تعین کیا گیا زاویہ، درجہ یا چکر کی بجائے، **ریڈیئن** [6] میں ناپا جاتا ہے۔ ریڈیئن دو لمبائیوں کی نسبت (تقابلی تعلق) ہے لہٰذا یہ بے بُعد خالص عدد ہو گا۔ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا ایک مکمل دائرے میں 2π

---

[1] rigidbody
[2] fixedaxis
[3] rotationaxis
[4] zeroangularposition
[5] angularposition
[6] radian

ریڈیئن ہوں گے۔

$$1 \text{ چکر} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ ریڈیئن} \tag{۴.۲}$$

یا

$$1 \text{ ریڈیئن} = 57.3^\circ = 0.159 \text{ چکر} \tag{۴.۳}$$

محور گھماو پر حوالہ لکیر کی مکمل چکر کے بعد ہم θ واپس صفر نہیں کرتے۔ اگر حوالہ لکیر صفر زاویائی مقام سے ابتدا کر کے دو چکر مکمل کرے، لکیر کا زاویائی مقام $\theta = 4\pi$ ریڈیئن ہو گا۔

محور x پر خالص مستقیم حرکت کے لئے $x(t)$، یعنی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم حرکت پذیر جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔ اسی طرح، خالص گھماو کے لئے $\theta(t)$، یعنی زاویائی مقام بالمقابل وقت، جانتے ہوئے ہم گھومتے جسم کے بارے میں وہ سب کچھ معلوم کر سکتے ہیں جنہیں جاننا مقصود ہو۔

زاویائی ہٹاو

اگر شکل 3.10 کا جسم محور گھماو پر شکل 4.10 کی طرح گھوم کر حوالہ لکیر کا زاویائی مقام θ_1 سے تبدیل کر کے θ_2 کرے، جسم کا زاویائی ہٹاو $\Delta\theta$ ذیل ہو گا۔

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{۴.۴}$$

زاویائی ہٹاو کی یہ تعریف نہ صرف استوار جسم بلکہ جسم کے ہر اندرونی ذرہ کے لئے درست ہے۔

گھڑیاں منفی ہیں۔ محور x پر مستقیم حرکت کی صورت میں جسم کا ہٹاو Δx مثبت یا منفی ہو گا، جو، محور پر جسم کی حرکت کے رخ پر منحصر ہے۔ اسی طرح، گھماو کی صورت میں جسم کا زاویائی ہٹاو $\Delta\theta$ درج ذیل قاعدہ کے تحت مثبت یا منفی ہو گا۔

قاعدہ ۴.۱: خلاف گھڑی زاویائی ہٹاو مثبت اور گھڑی وار ہٹاو منفی ہو گا۔

"گھڑیاں منفی ہیں" کا فقرہ اس قاعدے کو یاد رکھنے میں مدد دے سکتا ہے۔ یاد رہے گھڑی کے سیکنڈ کی سوئی کا ہر قدم آپ کی زندگی کاٹتی ہے۔

آزمائش ۱

قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ درج ذیل ابتدائی اور اختتامی زاویائی مقام کی مرتب جوڑیوں میں کونسی منفی زاویائی ہٹاو دیتی ہیں؟ (ا) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی $+5$ ریڈیئن؛ (ب) ابتدائی -3 ریڈیئن، اختتامی -7 ریڈیئن؛ (ج) ابتدائی 7 ریڈیئن، اختتامی -3 ریڈیئن۔

زاویائی سمتی رفتار

فرض کریں ایک جسم وقت t_1 پر زاویائی مقام θ_1 پر اور وقت t_2 پر زاویائی مقام θ_2 پر ہو، جیسا شکل 4.10 میں دکھایا گیا ہے۔ہم t_1 تا t_2 وقتی دورانیے Δt میں جسم کی **اوسط زاویائی سمتی رفتار**[7] $\omega_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل کرتے ہیں،

$$\omega_{\text{اوسط}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{۴.۵}$$

جہاں وقتی دورانیے Δt میں زاویائی ہٹاو $\Delta\omega$ ہے۔(زاویائی سمتی رفتار کے لئے یونانی حروف تہجی کا، چھوٹی لکھائی میں، آخری حرف **اومیگا** ω استعمال کیا جائے گا۔) مساوات ۴.۵ میں Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی درج ذیل تحدیدی قیمت حاصل ہو گی جو **لمحاتی زاویائی سمتی رفتار**[8] ω (یا مختصراً **زاویائی سمتی رفتار**) کہلاتی ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۶}$$

اگر $\theta(t)$ معلوم ہو، اس کا تفرق لے کر زاویائی سمتی رفتار ω حاصل ہو گی۔

چونکہ اس جسم کے تمام ذرے ہم قدم ہیں، لہٰذا مساوات ۴.۵ اور مساوات ۴.۶ نا صرف مکمل گھومتے استوار جسم کے لئے بلکہ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔زاویائی سمتی رفتار کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$، چکر فی سیکنڈ، اور چکر فی منٹ ہے۔

محور x پر مثبت رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی سمتی رفتار v مثبت جبکہ منفی رخ حرکت کی صورت میں منفی ہو گی۔اسی طرح محور پر مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھماو کی صورت میں استوار جسم کی زاویائی سمتی رفتار مثبت جبکہ منفی رخ (گھڑی وار) گھماو کی صورت میں منفی ہو گی۔("گھڑیاں منفی ہیں" اب بھی درست ہے۔) زاویائی سمتی رفتار کی قدر **زاویائی رفتار**[9] کہلاتی ہے۔ہم زاویائی رفتار کے لئے بھی ω علامت استعمال کریں گے۔

زاویائی اسراع

گھومتے ہوئے جسم کی زاویائی سمتی رفتار مستقل نہ ہونے کی صورت میں جسم زاویائی اسراع سے دوچار ہو گا۔فرض کریں وقت t_1 پر جسم کی زاویائی سمتی رفتار ω_1 اور t_2 پر ω_2 ہے۔دورانیے t_1 تا t_2 میں گھومتے ہوئے جسم کی **اوسط زاویائی اسراع**[10] $\alpha_{\text{اوسط}}$ کی تعریف ذیل ہے،

$$\alpha_{\text{اوسط}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{۴.۷}$$

---

[7] average angular velocity
[8] instantaneous angular velocity
[9] angular speed
[10] average angular acceleration

جہاں ی $\Delta\omega$ زاویائی سمتی رفتار میں Δt کے دوران تبدیل ہے۔ **لمحاتی زاویائی اسراع** [۱۱](یا مختصراً **زاویائی اسراع**)، جس سے ہمیں زیادہ دلچسپی ہے، Δt صفر کے قریب تر کرنے سے نسبت کی، درج ذیل، تحدیدی قیمت کو کہتے ہیں۔

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{۴.۸}$$

مساوات ۴.۷ اور مساوات ۴.۸ جسم کے ہر ذرے کے لئے درست ہیں۔ زاویائی اسراع کی عمومی مستعمل اکائی ریڈیئن فی مربع سیکنڈ ($\mathrm{rad\,s^{-2}}$) اور چکر فی مربع سیکنڈ ہے۔

نمونی سوال ۴.۱: زاویائی مقام سے زاویائی سمتی رفتار کا حصول

شکل 5a.10 میں قرص اپنے وسطی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ قرص پر حوالہ لکیر کا زاویائی مقام $\theta(t)$ ذیل ہے، جہاں t اور θ بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن میں ہیں، اور صفر زاویائی مقام شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\theta = -1.00 - 0.600t + 0.250t^2 \tag{۴.۹}$$

(آپ چاہیں تو وقتی طور پر لفظ "زاویائی مقام" سے "زاویائی" خارج کر کے اور θ علامت کی جگہ x استعمال کر کے مسئلے کو باب 2 کی ترقیم میں لے جائیں۔ آپ کو باب 2 کی یک بُعدی حرکت کے مقام کی مساوات حاصل ہو گی۔)

(ا) قرص کا زاویائی مقام بالمقابل وقت $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 5.4\,\mathrm{s}$ ترسیم کریں۔ قرص اور اس پر زاویائی مقام کی حوالہ لکیر کا خاکہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$، اور $t = 4.0\,\mathrm{s}$، اور اس لمحے پر بنائیں جب ترسیم t محور سے گزرتی ہے۔

۴.۱.۱ کلیدی تصور

قرص کے زاویائی مقام سے مراد اس پر کھینچی حوالہ لکیر کا مقام $\theta(t)$ ہے، جو مساوات ۴.۹ دیتی ہے؛ لہٰذا ہم مساوات ۴.۹ ترسیم کرتے ہیں؛ نتیجہ شکل 5b.10 میں پیش ہے۔

حساب: قرص اور حوالہ لکیر کا مقام کسی مخصوص لمحے پر خاکہ بنانے کے لئے ضروری ہے کہ اس لمحے پر ہمیں θ معلوم ہو، جو مساوات ۴.۹ میں لمحے کا وقت ڈالنے سے حاصل ہو گا۔ یوں $t = -2.0\,\mathrm{s}$ کے لئے ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\theta &= -1.00 - (0.600)(-2.0) + (0.250)(-2.0)^2\\ &= 1.2\,\mathrm{rad} = 1.2\,\mathrm{rad}\,\frac{360^\circ}{2\pi\,\text{ریڈیئن}} = 69^\circ\end{aligned}$$

یہ نتیجہ کہتا ہے کہ قرص پر موجود حوالہ لکیر لمحہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر صفر مقام سے مثبت رخ (خلاف گھڑی) 1.2 ریڈیئن یعنی 69° گھوم کر ہو گی۔ شکل 5b.10 کے خاکہ 1 میں حوالہ لکیر کا یہ مقام دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح $t = 0$ پر θ کی قیمت -1.00 ریڈیئن یا -57° ہو گی، جس کے تحت حوالہ لکیر صفر زاویائی مقام سے 1.0 ریڈیئن یا 57° منفی رخ (گھڑی وار) گھوم کر ہو گی، جیسا خاکہ 3 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 4.0\,\mathrm{s}$ پر θ کی

[۱۱] instantaneous angular acceleration

قیمت 0.60 ریڈیئن یعنی $34°$ ہوگی (خانہ 5)۔ جس لمحے ترسیم محور t سے گزرتی ہے، $\theta = 0$ ہوگا اور حوالہ لکیر لمحاتی عین صفر مقام پر ہوگی (خانہ 2 اور 4)۔

(ب) شکل 5b.10 میں $\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت کس $t_{\text{کمتر}}$ پر ہوگی؟ θ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

کلیدی تصور

تفاعل کی انتہا قیمت (یہاں کم سے کم قیمت) معلوم کرنے کی خاطر ہم تفاعل کا ایک گنا تفرق لے کر صفر کے برابر رکھتے ہیں۔

حساب: تفاعل $\theta(t)$ کا ایک گنا تفرق ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۰}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر t کے لئے حل کر کے لمحہ $t_{\text{کمتر}}$ حاصل ہوگا جس پر $\theta(t)$ کی قیمت کم سے کم ہوگی۔

$$t_{\text{کمتر}} = 1.2\,\mathrm{s} \qquad (\text{جواب})$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت جاننے کے لئے ہم مساوات ۴.۹ میں $t_{\text{کمتر}}$ ڈالتے ہیں، جو ذیل دیگا۔

$$\theta = -1.36\ \text{ریڈیئن} \approx -77.9° \qquad (\text{جواب})$$

$\theta(t)$ کی کم سے کم قیمت (شکل 5b.10 میں نشیب) صفر زاویائی مقام سے قرص کی زیادہ سے زیادہ گھڑی وار گھماو ہے، جو خانہ 3 سے کچھ زیادہ ہوگا۔

(ج) قرص کی زاویائی سمتی رفتار ω وقت $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 6.0\,\mathrm{s}$ ترسیم کریں۔ قرص کا خانہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$، $t = 4.0\,\mathrm{s}$، اور $t_{\text{کمتر}}$ پر بنائیں، اور بتائیں ان لمحات پر گھومنے کا رخ اور ω کی علامت کیا ہوگی۔

کلیدی تصور

مساوات ۴.۶ کے تحت زاویائی سمتی رفتار ω سے مراد $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ہے جو مساوات ۴.۱۰ دیتی ہے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\omega = -0.600 + 0.500t \tag{۴.۱۱}$$

اس تفاعل، $\omega(t)$، کی ترسیم شکل 5c.10 میں پیش ہے۔ یہ تفاعل خطی ہے لہٰذا اس کی ترسیم ایک سیدھی لکیر ہے۔ ترسیم کی ڈھلوان $0.500\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ ہے اور انتصابی محور (جو دکھایا نہیں گیا) کو ترسیم $-0.600\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر قطع کرتی ہے۔

حساب: قرص کا خانہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر بنانے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۱ میں یہ قیمت ڈال کر ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = -1.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب})$$

منفی کی علامت کہتی ہے کہ $t = -2.0\,\mathrm{s}$ پر قرص گھڑی وار (منفی رخ) گھوم رہا ہے (جیسا شکل 5c.10 میں دائیں ہاتھ خاکے میں دکھایا گیا ہے)۔

مساوات ۴.۱۱ میں $t = 4.0\,\mathrm{s}$ ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\omega = 1.4\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \qquad \text{(جواب)}$$

مضمر مثبت علامت کہتی ہے قرص مثبت رخ (خلاف گھڑی) گھوم رہا ہے (شکل 5c.10 میں دایاں ہاتھ خاکہ)۔

$t_{\text{کمتر}}$ کے لئے ہم جانتے ہیں $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ ہو گا۔ یوں $\omega = 0$ ہو گا۔ جب حوالہ لکیر، شکل 5b.10 θ میں θ کی کم سے کم قیمت کو پہنچتی ہے، قرص لمحاتی رکتا ہے، جیسا شکل 5c.10 میں وسطی خاکہ عندیہ دیتا ہے۔ شکل 5c.10 میں ω بالمقابل t کی ترسیم پر صفر نقطہ، جہاں ترسیم منفی (گھڑی وار) گھماو سے مثبت (خلاف گھڑی) گھماو کا آغاز کرتی ہے، وہ نقطہ ہے جہاں قرص لمحاتی رکتا ہے۔

(د) جزو تا جزو ج کے نتائج استعمال کر کے $t = -3.0\,\mathrm{s}$ تا $t = 6.0\,\mathrm{s}$ قرص کی حرکت بیان کریں۔

بیان: جب ہم، $t = -3.0\,\mathrm{s}$ پر، قرص پر پہلی مرتبہ نظر ڈالتے ہیں، اس کا زاویائی مقام مثبت، گھماو گھڑی وار اور رفتار میں کمی دیکھنے کو ملتی ہے۔ یہ $\theta = -1.36$ ریڈیئن پر لمحاتی رکنے کے بعد خلاف گھڑی گھومنا شروع کرتا ہے اور آخر کار اس کا زاویائی مقام دوبارہ مثبت ہوتا ہے۔ □

نمونی سوال ۲.۴: **زاویائی اسراع سے زاویائی سمتی رفتار کا حصول**

ایک بچہ لٹو ذیل زاویائی اسراع سے گھماتا ہے، جہاں t اور α بالترتیب سیکنڈ اور ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں ہے۔

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

لمحہ $t = 0$ پر لٹو کی زاویائی سمتی رفتار $5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$، اور حوالہ لکیر کا زاویائی مقام $\theta = 2$ ریڈیئن ہے۔

(ا) لٹو کی زاویائی سمتی رفتار $\omega(t)$ کا ریاضی فقرہ حاصل کریں؛ یعنی ایسا تفاعل معلوم کریں جو وقت پر زاویائی سمتی رفتار کا انحصار صریحاً دے۔ (ہم جانتے ہیں ایسا تفاعل موجود ہے چونکہ لٹو زاویائی اسراع سے گزر رہا ہے؛ یوں اس کی زاویائی سمتی رفتار تبدیل ہو گی۔)

کلیدی تصور

$\alpha(t)$ تعریف کے رو سے $\omega(t)$ کا وقتی تفرق ہو گا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\alpha(t)$ کا تکمل $\omega(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۸.۴ ذیل کہتی ہے

$$\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا

$$\int \mathrm{d}\omega = \int \alpha \,\mathrm{d}t$$

ہو گا جو ذیل دے گی، جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$$

ہم جانتے ہیں $t = 0$ پر $\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے؛ اس معلومات کو درج بالا میں ڈال کر:

$$5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} = 0 - 0 + C$$

تکمل کا مستقل $C = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ حاصل ہو گا۔ یوں درکار تفاعل ذیل ہو گا۔

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5 \qquad \text{(جواب)}$$

(ب) لٹو کے زاویائی مقام $\theta(t)$ کا ریاضی فقرہ تلاش کریں۔

کلیدی تصور

تعریف کے رو سے $\theta(t)$ کا وقتی تفرق $\omega(t)$ دیگا۔ یوں، وقت کے لحاظ سے $\omega(t)$ کا تکمل $\theta(t)$ دیگا۔

حساب: مساوات ۴.۶ کے تحت:

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جس سے ذیل لکھا جا سکتا ہے،

$$\begin{aligned}
\theta &= \int \omega\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + 5\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\
&= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \qquad \text{(جواب)}
\end{aligned}$$

جہاں $t = 0$ پر $\theta = 2\,\mathrm{rad}$ جانتے ہوئے C' کی قیمت حاصل کی گئی۔ □

کیا زاویائی مقادیر سمتیات ہیں؟

ہم اکیلے ذرے کا مقام، سمتی رفتار، اور اسراع سمتیات سے بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ذرہ صرف ایک محور پر حرکت کرتا ہو، سمتی ترقیم استعمال کرنا ضرورت نہیں۔ ایسے ذرے کو صرف دو رخ دستیاب ہیں جنہیں مثبت اور منفی علامت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح استوار جسم قائمہ محور پر، محور کے ہمراہ دیکھتے ہوئے، صرف خلاف گھڑی اور گھڑی وار گھوم سکتا ہے۔ ان رخ کو ہم مثبت اور منفی سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں ایک سوال اٹھتا ہے: "کیا ہم گھومتے جسم کے زاویائی ہٹاو، زاویائی سمتی رفتار، اور زاویائی اسراع کو سمتیات سمجھ سکتے ہیں؟" اس کا جواب ہے "جی ہاں" (زاویائی ہٹاو کے لئے نیچے پیش انتباہ ضرور دیکھیں۔)

زاویائی سمتی رفتار۔ زاویائی سمتی رفتار کو دیکھیں۔ شکل 6a.10 میں $\omega = 33\frac{1}{3}$ چکر فی سیکنڈ کی مستقل زاویائی رفتار سے گھڑی وار رخ گھومتا ہوا قرص دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل 6b.10 میں دکھایا گیا ہے، ہم اس کی سمتی زاویائی رفتار گھماو کے محور پر سمتیہ $\vec{\omega}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس کا طریقہ کار یوں ہے: سمتیہ کی لمبائی کسی موزوں پیمانہ کے تحت رکھی جاتی ہے، مثلاً 1 cm کو 10 چکر فی منٹ کی مطابقت سے رکھا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\vec{\omega}$ کا رخ تعین کرنے کے لئے ہم **دائیں ہاتھ کا قاعدہ** استعمال کرتے ہیں، جو شکل 6c.10 میں پیش ہے: قرص کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ انگلیاں گھماو کے رخ ہوں۔ آپ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا زاویائی سمتی رفتار کے سمتیہ کا رخ دیگا۔ اگر قرص مخالف رخ گھومے، دائیں ہاتھ قاعدہ کے تحت $\vec{\omega}$ بھی مخالف رخ ہو گا۔

زاویائی مقادیر سمتیات سے ظاہر کرنے کی عادت مشکل سے ڈلتی ہے۔ ہم فوراً سوچتے ہیں کہ سمتیہ کے ہمراہ کوئی چیز حرکت کرے گی۔ یہاں ایسا نہیں ہو گا۔ اس کے بجائے کوئی چیز (جیسا استوار جسم) سمتیہ کے رخ کے گرد گھومتی ہے۔ خالص گھماو کی دنیا میں، سمتیہ کا رخ کسی چیز کی حرکت کا رخ نہیں بلکہ گھماو کا محور دیگا۔ بہر حال، سمتیہ حرکت بھی تعین کرتا ہے۔ مزید، یہ سمتیات سلجھانے کے ان تمام قواعد کی تعمیل کرتا ہے جو باب 3 میں پیش کیے گئے۔ زاویائی اسراع $\vec{\alpha}$ بھی ایک سمتیہ ہے، اور یہ بھی ان قواعد کی تعمیل کرتا ہے۔

اس باب میں صرف قائمہ محور پر گھماو کی بات کی جائے گی۔ ان میں سمتیات استعمال کرنے کی ضرورت نہیں؛ ہم زاویائی سمتی رفتار کو ω اور زاویائی اسراع کو α سے ظاہر کر کے، خلاف گھڑی گھماو کو مثبت اور گھڑی وار گھماو کو منفی کی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

زاویائی ہٹاو۔ پہلے انتباہ کی بات کرتے ہیں: زاویائی ہٹاو (ماسوائے انتہائی چھوٹا ہٹاو) کو سمتیہ سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ کیوں نہیں؟ ہم یقیناً اس کے رخ اور قدر کی بات کر سکتے ہیں، جیسا شکل 6.10 میں زاویائی سمتی رفتار کے لئے کیا گیا۔ تاہم، سمتیہ سے ظاہر کیے جانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ مقدار سمتی جمع کے قواعد پر پورا اترتی ہو۔ ان قواعد میں ایک قاعدہ کہتا ہے کہ سمتیات جمع کرتے وقت ان کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ زاویائی ہٹاو اس قاعدہ پر پورا نہیں اترتا۔

شکل 7.10 میں دی گئی مثال پر غور کریں۔ ایک کتاب کو، جو ابتدائی طور پر افقی پڑی ہے، دو مرتبہ 90° زاویائی ہٹاو سے گزارا گیا ہے؛ ایک مرتبہ شکل 7a.10 اور دوسری مرتبہ شکل 7b.10 کی طرح۔ دونوں میں ہٹاو برابر، لیکن ترتیب ایک نہیں، اور آخر میں کتاب ایک جیسی سمت بند نہیں۔ دوسری مثال لیتے

ہیں۔ دایاں ہاتھ لٹکا کر ہتھیلی ران پر رکھیں۔ کلائی سخت کر کے، (1) بازو سامنے اتنا اٹھائیں کہ افقی ہو، (2) اس کو پورا دائیں لے جائیں، اور (3) اس کے بعد ہاتھ واپس نیچے ران تک لے جائیں۔ آپ کی ہتھیلی اب سامنے رخ ہو گی۔ اگر آپ یہی عمل الٹ ترتیب سے دہرائیں، آپ کی ہتھیلی آخر میں کس رخ ہو گی؟ ان مثال سے ہم دیکھتے ہیں کہ زاویائی ہٹاو کا مجموعہ انہیں جمع کرنے کی ترتیب پر منحصر ہے، لہٰذا ہٹاو کو سمتیہ تصور نہیں کیا جا سکتا۔

۴.۲ مستقل اسراع کے ساتھ گھماو

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. مستقل زاویائی اسراع کی صورت میں زاویائی مقام، زاویائی ہٹاو، زاویائی سمتی رفتار، زاویائی اسراع، اور گزرے دارانیے کے تعلق (جدول ۴.۱) استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- مستقل زاویائی اسراع (جس میں α مستقل ہو گا) گھماو حرکت کی ایک اہم خصوصی صورت ہے، جس کی مجرد حرکیات مساوات ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\omega &= \omega_0 + \alpha t \\
\theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
\omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\
\theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \\
\theta - \theta_0 &= \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2
\end{aligned}
$$

مستقل زاویائی اسراع کا گھماو

مستقیم حرکت میں مستقل خطی اسراع کی حرکت (مثلاً، زمین پر گرتا ہوا جسم) ایک اہم خصوصی صورت ہے۔ جدول 1.2 میں اس طرح کی حرکت کو مطمئن کرتی مساوات پیش کی گئیں۔

خالص گھماو میں مستقل زاویائی اسراع ایک اہم خصوصی صورت ہے؛ اس کو مطمئن کرنے والی مطابقتی مساوات پائی جاتی ہیں۔ ہم انہیں یہاں اخذ نہیں کریں گے، بلکہ مطابقتی خطی مساوات میں مساوی زاویائی متغیرات ڈال کر انہیں پیش کرتے ہیں۔ جدول ۴.۱ میں مساوات کی دونوں فہرست (مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 تا مساوات 18.2؛ مساوات ۴.۱۲ تا مساوات ۴.۱۶) پیش کی گئی ہیں۔

یاد رہے مساوات 11.2 اور مساوات 15.2 مستقل خطی اسراع کی بنیادی مساوات ہیں، جن سے فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ اس طرح، مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ مستقل زاویائی اسراع کی

جدول ۴.۱: مستقل خطی اسراع اور مستقل زاویائی اسراع کی حرکت کی مساوات

زاویائی مساوات		خطی مساوات	
(۴.۱۲)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(2.11)	$v = v_0 + at$
(۴.۱۳)	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
(۴.۱۴)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
(۴.۱۵)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$
(۴.۱۶)	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$

بنیادی مساوات ہیں، جن سے زاویائی مساوات کی فہرست کی باقی تمام مساوات اخذ کی جا سکتی ہیں۔ مستقل زاویائی اسراع کا سادہ مسئلہ حل کرنے کے لئے آپ عموماً زاویائی فہرست سے (اگر یہ فہرست آپ کے پاس موجود ہو) ایک مساوات استعمال کر پائیں گے۔ آپ وہ مساوات منتخب کریں گے جس میں صرف وہ متغیر غیر معلوم ہو جو آپ کو درکار ہو۔ بہتر طریقہ یہ ہو گا کہ آپ مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳ یاد کر لیں اور جب ضرورت پیش آئے، انہیں بطور ہمزاد مساوات حل کریں۔

آزمائش ۲

گھومے جسم کا زاویائی مقام $\theta(t)$ چار مختلف صورتوں میں (ا) $\theta = 3t - 4$، (ب) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$، (ج) $\theta = 2/t^2 - 4/t$، اور (د) $\theta = 5t^2 - 3$ ہے۔ جدول ۴.۱ کی زاویائی مساوات کا اطلاق کن صورتوں پر ہو گا؟

نمونی سوال ۴.۳: **مستقل زاویائی اسراع، چکی کا پاٹ**

شکل 8.10 میں پاٹ مستقل زاویائی اسراع $\alpha = 0.34\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ سے گھوم رہا ہے۔ وقت $t = 0$ پر اس کی زاویائی سمتی رفتار $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے، اور اس پر کھینچی گئی حوالہ لکیر کا مقام $\theta_0 = 0$ ہے۔

(ا) وقت $t = 0$ سے کتنی دیر بعد حوالہ لکیر زاویائی مقام $\theta = 5.0$ چکر پر ہو گی؟

کلیدی تصور

چونکہ زاویائی اسراع مستقل ہے لہٰذا ہم جدول ۴.۱ سے مساوات چن سکتے ہیں۔ ہم مساوات ۴.۱۳

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

کا انتخاب اس لئے کرتے ہیں کہ اس میں صرف ایک متغیر، t، نامعلوم ہے اور ہمیں یہی درکار ہے۔

حل: دی گئی معلومات ڈال کر اور $\theta_0 = 0$ اور $\theta = 5.0$ چکر $= 10\pi\,\mathrm{rad}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$10\pi\,\mathrm{rad} = (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})t + \frac{1}{2}(0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}})t^2$$

(اکائیوں کے ثبات کی خاطر ہم 5.0 چکر کو 10π ریڈیئن میں تبدیل کرتے ہیں۔) اس دو درجی الجبرائی مساوات کو حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$t = 32\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

ان ایک عجیب بات پر غور کریں۔ جب ہم پہلی مرتبہ پاٹ پر نظر ڈالتے ہیں یہ منفی رخ گھوم کر $\theta = 0$ سمت بند مقام سے گزرتا ہے۔ اس کے باوجود 32 s بعد ہم اسے $\theta = 5.0$ چکر مثبت سمت بند مقام پر پاتے ہیں۔ اس دورانیے میں ایسا کیا ہوا کہ پاٹ مثبت سمت بند مقام پر ہو سکتا ہے؟

(ب) وقت $t = 0$ اور $t = 32\,\mathrm{s}$ کے بیچ پاٹ کے گھماو پر تبصرہ کریں۔

تبصرہ: پاٹ ابتدائی طور پر منفی (گھڑی وار) رخ $\omega_0 = -4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاویائی رفتار سے حرکت کرتا ہے، تاہم اس کا زاویائی اسراع α مثبت ہے۔ ابتدائی زاویائی رفتار اور زاویائی اسراع کی علامتیں الٹ ہونے کی بدولت پاٹ منفی رخ چلتے چلتے بتدریج آہستہ ہوتے رک کر مثبت رخ گھومنا شروع کرتا ہے۔ حوالہ لکیر مثبت رخ چل کر $\theta = 0$ مقام سے دوبارہ گزرتی ہے اور $t = 32\,\mathrm{s}$ گزرنے تک مثبت رخ مزید 5.0 چکر کاٹ چکا ہوتا ہے۔

(ج) پاٹ کس وقت t پر لمحاتی رکتا ہے؟

حل: ہم دوبارہ زاویائی مساوات کی فہرست پر نظر ڈالتے ہیں اور ایسی مساوات لینا چاہتے ہیں جس میں صرف t نامعلوم متغیر ہو۔ تاہم، اب مساوات میں ω کا ہونا بھی ضروری ہے، تا کہ ہم اس کو 0 لے کر مطابقتی t کے لئے حل کریں۔ ہم مساوات ۴.۱۲ منتخب کرتے ہیں، جو ذیل دیگی۔

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}})}{0.35\,\mathrm{rad\,s^{-2}}} = 13\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}$$

□

نمونی سوال ۴.۴: **مستقل زاویائی اسراع، پہیے کی سواری**

تفریح گاہ میں ایک بڑا پہیا چلاتے ہوئے آپ کی نظر پہیے پر سوار ایک شخص پر پڑتی ہے جو پریشان نظر آتا ہے۔ آپ پہیے کی زاویائی سمتی رفتار مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ $3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے 20.0 چکروں میں کم کر کے $2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کرتے ہیں۔ (اس شخص کو "گھومتا شخص" تصور کرنے سے "مستقیم حرکت کرتا شخص" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔)

(ا) زاویائی سمتی رفتار کی کمی کے دوران مستقل زاویائی اسراع کیا ہو گی؟

کلیدی تصور
پہیے کی زاویائی اسراع مستقل ہے، لہٰذا ہم اس کی زاویائی سمتی رفتار اور زاویائی ہٹاو کا تعلق مستقل زاویائی اسراع کی مساوات (مساوات ۴.۱۲ اور مساوات ۴.۱۳) سے جان سکتے ہیں۔

حساب: آئیں دیکھیں آیا ہم ان بنیادی مساوات کو حل کر پائیں گے۔ ابتدائی زاویائی سمتی رفتار $= \omega_0$ ،$3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ زاویائی ہٹاو 20.0 چکر $= \theta - \theta_0$، اور ہٹاو کے آخر پر زاویائی سمتی رفتار $= \omega$ $2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ ہم مستقل زاویائی اسراع α جاننا چاہتے ہیں۔ دونوں مساوات میں وقت t پایا جاتا ہے، جس میں ضروری نہیں ہم دلچسپی رکھتے ہوں۔

نامعلوم t خارج کرنے کے لئے ہم مساوات ۴.۱۲ سے

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۳ میں ڈالتے ہیں۔

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2$$

α کے لئے حل کر کے، دی گئی معلومات پُر کر کے، اور 20.0 چکر کو $125.7\,\mathrm{rad}$ میں بدل کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} &= \frac{(2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2 - (3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}})^2}{2(125.7\,\mathrm{rad})}\\ &= -0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}} \qquad \text{(جواب)}\end{aligned}$$

(ب) رفتار کتنے وقت میں کم کی گئی؟

حساب: چونکہ اب ہم α جانتے ہیں، مساوات ۴.۱۲ استعمال کر کے t حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} &= \frac{2.00\,\mathrm{rad\,s^{-1}} - 3.40\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}{-0.0301\,\mathrm{rad\,s^{-2}}}\\ &= 46.5\,\mathrm{s} \qquad \text{(جواب)}\end{aligned}$$

□

۴.۳ خطی اور زاویائی متغیرات کا رشتہ

مقاصد
اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. قائمہ محور پر گھومتے ہوئے استوار جسم کے زاویائی متغیرات (زاویائی مقام، زاویائی سمتی رفتار، اور زاویائی اسراع) کا جسم پر ایک ذرے، جو کسی رداس پر پایا جاتا ہو، کے خطی متغیرات (مقام، سمتی رفتار، اور اسراع) کے ساتھ تعلق جان پائیں گے۔

۲. مماسی اسراع اور رداسی اسراع میں تمیز کر پائیں گے، اور کسی محور پر گھومتے ہوئے جسم پر موجود ذرے کے لئے بڑھتی زاویائی رفتار اور گھٹتی زاویائی رفتار کی صورت میں دونوں کے سمتیہ بنا پائیں گے۔

کلیدی تصور

- گھومتے جسم پر محور گھماو سے عمودی فاصلہ r پر پائے جانے والا نقطہ، رداس r کے دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ اگر جسم زاویہ θ گھومے، یہ نقطہ درج ذیل قوسی فاصلہ s طے کریگا، جہاں θ ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔

$$s = \theta r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کا خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ دائرے کو مماسی ہو گا؛ نقطے کا خطی رفتار ذیل ہو گا، جہاں ω جسم اور نقطے کا (ریڈیئن فی سیکنڈ) زاویائی رفتار ہے۔

$$v = \omega r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اس نقطے کے خطی اسراع $\vec{a}$ کے دو حصے ہوں گے؛ ایک مماسی جزو اور دوسرا رداسی جزو۔ مماسی جزو ذیل ہو گا، جہاں α جسم کے (ریڈیئن فی مربع سیکنڈ میں) زاویائی اسراع کی قدر ہے۔

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

رداسی جزو ذیل ہو گا۔

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

- اگر یہ نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہو، اس نقطے اور جسم کا دوری عرصہ T ذیل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)}$$

خطی اور زاویائی متغیرات کا رشتہ

محور گھماو کے گرد دائرے پر مستقل خطی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی یکساں دائری حرکت پر حصہ 5.4 میں غور کیا گیا۔ جب استوار جسم کسی محور پر گھومتا ہے، جسم کا ہر ذرہ اپنے ایک دائرے پر اسی محور کے گرد گھومتا

ہے۔ چونکہ جسم استوار (بلا لچک) ہے، ایسے تمام ذرے ہم قدم چل کر ایک جتنے وقت میں ایک چکر مکمل کرتے ہیں؛ ان سب کی زاویائی رفتار ϖ برابر ہے۔

تاہم، ایک ذرہ جتنا محور سے دور ہو گا، اتنا اس کے دائرے کا محیط بڑا ہو گا، لہٰذا اس کی خطی رفتار v اتنی زیادہ ہو گی۔ **گھومنے والے جھولے**[۱۲] پر بیٹھ کر آپ اسے محسوس کر سکتے ہیں۔ مرکز سے جتنے فاصلے پر بھی آپ ہوں، آپ کی زاویائی رفتار ω ایک جتنی ہو گی، تاہم مرکز سے دور ہونے پر آپ کی خطی رفتار v بڑھے گی۔

ہم جسم پر کسی مخصوص نقطے کے خطی متغیرات s، v، اور a اور سی جسم کے زاویائی متغیرات θ، ω، اور α کا تعلق جاننا چاہتے ہیں۔ متغیرات کی ان فہرست کا رشتہ محور گھماو سے نقطے کے عمودی فاصلہ r کے ذریعے ہو گا۔ یہ عمودی فاصلہ، نقطے اور محور گھماو کے بیچ عمودی لکیر پر ناپا جائے گا۔ یہ فاصلہ اس دائرے کا رداس r ہو گا جس پر محور گھماو کے گرد نقطہ حرکت کرتا ہے۔

مقام

اگر استوار جسم پر کھینچی گئی حوالہ لکیر زاویہ θ گھومے، محور گھماو سے r فاصلے پر موجود جسم کے اندر نقطہ دائری قوس پر فاصلہ s طے کرے گا، جہاں s کی قیمت مساوات ۴.۱ دیتی ہے۔

$$s = \theta r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱۷}$$

مساوات ۴.۱۷ ہمارا پہلی خطی وزاویائی تعلق ہے۔ انتباہ: زاویہ θ کی ناپ ریڈیئن میں لازمی ہے چونکہ درج بالا مساوات زاویے کی ریڈیئن میں ناپ کی تعریف ہے۔

رفتار

رداس r کو مستقل رکھ کر وقت کے ساتھ مساوات ۴.۱۷ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r$$

لیکن، $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ نقطے کی خطی رفتار (خطی سمتی رفتار کی قدر)، اور $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ گھومتے جسم کی زاویائی رفتار ω ہے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$v = \omega r \qquad \text{(ریڈیئن ناپ)} \tag{۴.۱۸}$$

انتباہ: زاویائی رفتار ω لازماً ریڈیئن فی سیکنڈ میں ناپی جائے گی۔

استوار جسم کے تمام اندرونی نقطے ایک زاویائی رفتار ω سے گھومتے ہیں لہٰذا مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے زیادہ رداس r پر واقع نقطے کی خطی رفتار v زیادہ ہو گی۔ شکل 9a.10 ہمیں یاد دلاتی ہے کہ ہر نقطے کی خطی سمتی رفتار ہمیشہ نقطے کی دائری راہ کو مماسی ہو گی۔

اگر جسم کا زاویائی رفتار ϖ مستقل ہو، مساوات ۴.۱۸ کہتی ہے جسم کے اندر نقطے کی خطی رفتار v بھی مستقل ہو گی۔ یوں، جسم کے اندر موجود ہر نقطہ یکساں دائری حرکت کرتا ہے۔ استوار جسم کے ہر اندرونی نقطے کی حرکت کا دوری عرصہ T

[۱۲] merrygoround

مساوات 35.4 ذیل دیتی ہے۔

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{۴.۱۹}$$

اس مساوات کے تحت، ایک چکر کے فاصلے $2\pi r$ کو اس رفتار سے تقسیم کر کے جس سے فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔ مساوات ۴.۱۸ سے v ڈال کر r منسوخ کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۲۰}$$

یہ معادل مساوات کہتی ہے ایک چکر کا زاویائی فاصلہ، 2π ریڈیئن، اس زاویائی رفتار سے تقسیم کر کے، جس سے زاویائی فاصلہ طے کیا جائے، ایک چکر کا وقت حاصل ہو گا۔

اسراع

رداس r مستقل رکھ کر t کے لحاظ سے مساوات ۴.۱۸ کا تفرق ذیل دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r \tag{۴.۲۱}$$

یہاں ہم ایک پیچیدگی کا سامنا کرتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱ کا بایاں ہاتھ $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ خطی اسراع کے صرف اس حصے کو ظاہر کرتا ہے جو خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ کی قدر v سے وابستہ ہے۔ سمتی رفتار $\vec{v}$ کی طرح خطی اسراع کا یہ حصہ نقطے کی راہ کو مماسی ہو گا۔ ہم اسے خطی اسراع کا مماسی جزو a_t کہہ کر ذیل لکھتے ہیں۔

$$a_t = \alpha r \qquad (\text{ریڈیئن ناپ}) \tag{۴.۲۲}$$

جوابات