طبیعیات کے اصول

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@hotmail.com

۲؍ فروری ۲۰۲۴

عنوان

باب ۵

لڑھکاو، قوت مروڑ، اور زاوی معیار حرکت

۵.۱ مستقیم حرکت اور گھماو مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ لڑھکاو خالص مستقیم حرکت اور خالص گھماو کا مجموعہ ہے۔

۲. ہموار لڑھکاو میں مرکز کمیت کی رفتار اور جسم کی زاوی رفتار کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- رداس R کے پہیا کے لئے جو ہموار سطح پر لڑھک رہا ہو ذیل ہو گا:

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$$

جہاں $v_{\text{مرکز کمیت}}$ پہیے کے مرکز کمیت کی خطی رفتار اور ω پہیے کے وسط پر پہیے کی زاوی رفتار ہے۔

- پہیے کو نقطہ P کے گرد، جو "فرش" کے ساتھ مس ہے، لمحاتی گھومتا تصور کیا جا سکتا ہے۔ مرکز کمیت کے گرد اور اس نقطہ کے گرد جسم کی زاوی رفتار برابر ہے۔

طبیعیات کیا ہے؟

جیسا باب ۴ میں ذکر کیا گیا، گھماو کا مطالعہ طبیعیات میں شامل ہے۔ غالباً، اس مطالعے کا اہم ترین اطلاق پہیے اور پہیے نما اجسام کا لڑھکاو ہے۔ یہ اطلاقی طبیعیات بہت عرصہ سے استعمال میں ہے۔ قدیم

زمانے میں بھاری اجسام لٹھا پر لڑھکاتے ہوئے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیے جاتے تھے۔ آج کل ہم گاڑی میں سامان رکھ کر ایک جگہ سے دوسری جگہ لڑھکاتے ہیں۔

لڑھکاو کی طبیعیات اور انجینئری اتنی پرانی ہے کہ اس میں نئے تصور ممکن نظر نہیں آتے۔ تاہم، **پہیے دار تختہ**[1] زیادہ پرانا نہیں۔ ہمارا کام یہاں لڑھکاو کی حرکت کو سادہ بنانا ہے۔

مستقیم حرکت اور گھماو مل کر لڑھکاو دیتے ہیں

سطح پر ہمواری سے لڑھکتے اجسام پر یہاں غور کیا جائے گا؛ یعنی جسم بغیر اچھلے یا پھسلے سطح پر حرکت کرتا ہے۔ شکل 2.11 میں ہموار لڑھکاو کی پیچیدگی دکھائی گئی ہے: اگرچہ جسم کا مرکز کمیت سیدھی لکیر پر حرکت کرتا ہے، چکا پر نقطہ یقیناً ایسا نہیں کرتا۔ بہر حال، اس حرکت کو مرکز کمیت کی مستقیم حرکت اور باقی جسم کا، اس مرکز پر، گھماو تصور کیا جا سکتا ہے۔

اسے سمجھنے کے لئے، فرض کریں آپ سڑک کے کنارے کھڑے ہو کر، گزرتے ہوئے سائیکل کے پہیے کا مطالعہ کرتے ہیں (شکل 3.11)۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، پہیے کا مرکز کمیت O مستقل رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ سے آگے بڑھتا ہے۔ نقطہ P، جہاں پہیا سڑک کو مس کرتا ہے، بھی $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے آگے بڑھتا ہے، اور یوں P ہمیشہ O کے ٹھیک نیچے رہتا ہے۔

وقتی دورانیہ t کے دوران، O اور P دونوں فاصلہ s طے کرتے ہیں۔ سائیکل سوار کے نقطہ نظر سے، پہیا زاویہ θ طے کرتا ہے اور جو نقطہ t کے آغاز میں زمین پر تھا قوسی فاصلہ s طے کرتا ہے۔ مساوات ۱۷.۴ قوسی فاصلہ s اور زاویہ θ کا تعلق دیتی ہے:

$$s = \theta R \tag{۵.۱}$$

جہاں R پہیے کا رداس ہے۔ پہیے کے مرکز (یہاں پہیے کا مرکز کمیت) کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ ہم $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ سے جان سکتے ہیں۔ پہیے کے مرکز پر پہیے کی زاوی رفتار $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ہو گی۔ یوں R مستقل رکھتے ہوئے، مساوات ۵.۱ کا وقت کے ساتھ تفرق ذیل دیگا۔

$$v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R \qquad (\text{ہموار لڑھکاو حرکت}) \tag{۵.۲}$$

دونوں کا ملاپ۔ شکل 4.11 میں دکھایا گیا ہے کہ پہیے کی لڑھکتی حرکت خالص مستقیم حرکت اور خالص گھمیری حرکت کا مجموعہ ہے۔ شکل 4a.11 خالص گھمیری حرکت پیش کرتی ہے (جس میں مرکز پر محور گھماو ساکن تصور کیا جاتا ہے): پہیے کا ہر نقطہ، مرکز پر، زاوی رفتار ω سے گھومتا ہے۔ (ایسی حرکت پر باب ۴ میں غور کیا گیا۔) پہیے کے باہری کنارے (چکا) پر ہر نقطے کی خطی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ مساوات ۵.۲ دیتی ہے۔ شکل 4b.11 میں خالص مستقیم حرکت پیش ہے (جس میں تصور کیا جاتا ہے کہ پہیا گھوم نہیں رہا): پہیے کا ہر نقطہ $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے دائیں حرکت کرتا ہے۔

[1] skateboards

شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 مل کر، شکل 4c.11 میں پیش، پہیے کی اصل لڑھکنی حرکت دیتی ہیں۔ حرکات کے ملاپ میں پہیے کا نچلا نقطہ (P) ساکن ہے جبکہ پہیے کا بالا نقطہ (T)، کسی بھی دوسرے نقطہ سے زیادہ تیز، $2v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ شکل 5.11 میں ان نتائج کا اثباتی مظاہرہ کیا گیا ہے، جہاں سائیکل کے لڑھکنی پہیے کا **وقتیہ افشا**[۲] پیش ہے۔ آپ دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پہیے کا بالا حصہ زیادہ تیزی سے حرکت کرتا ہے، چونکہ اس حصے کی تیلیاں مدھم نظر آتی ہیں۔

سطح پر دائری جسم کی ہموار لڑھکنی حرکت کو، شکل 4a.11 اور شکل 4b.11 کی طرح، خالص گھمیری حرکت اور خالص مستقیم حرکت میں علیحدہ علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔

لڑھکاو بطور خالص گھماو

شکل 6.11 میں پہیے کا لڑھکاو نئے انداز میں پیش کیا گیا ہے؛ جس نقطے پر پہیا سڑک مس کرتا ہے، اس نقطے سے گزرتی محور پر پہیا گھومتا ہے؛ یہ محور $v_{\text{مرکز کمیت}}$ رفتار سے حرکت میں ہو گی۔ ہم لڑھکاو کو، شکل 4c.11 میں نقطہ P سے گزرتی، پہیے کو عمود دار، محور پر خالص گھماو تصور کرتے ہیں۔ یوں شکل 6.11 میں سمتیات، لڑھکنی پہیے پر نقطوں کی لمحاتی سمتی رفتار دیتے ہیں۔

سوال: ساکن مشاہدہ کار اس محور پر سائیکل کے لڑھکنی پہیے کو کیا زاوی رفتار مختص کرے گا؟

جواب: وہی زاوی رفتار ω جو سائیکل سوار مرکز کمیت کے گرد خالص گھماو کا مشاہدہ کرتے ہوئے پہیے کو مختص کرتا ہے۔

اس جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر، ہم ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پہیے کے فراز کی خطی رفتار تلاش کرتے ہیں۔ پہیے کا رداس R لیتے ہوئے، پہیے کا فراز شکل 6.11 میں P پر واقع محور سے $2R$ فاصلے پر ہو گا، لہٰذا فراز کی خطی رفتار (مساوات ۲.۱۵ استعمال کر کے) ذیل ہو گی:

$$v_{\text{فراز}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{مرکز کمیت}}$$

جو شکل 4c.11 کے عین مطابق ہے۔ آپ شکل 4c.11 میں پیش، نقطہ O اور P کی، خطی رفتار کی تصدیق بھی اس طرح کر سکتے ہیں۔

آزمائش ۱

ایک سائیکل کے پچھلے پہیے کا رداس اگلے پہیے کے رداس کا دگنا ہے۔ (ا) کیا چلنے کے دوران بڑے پہیے کے فراز کی خطی رفتار چھوٹے پہیے کے فراز کی خطی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا اس کے برابر ہے؟ (ب) کیا پچھلے پہیے کی زاوی رفتار اگلے پہیے کی زاوی رفتار سے زیادہ ہے، کم ہے، یا دونوں برابر ہیں؟

---

[۲] timeexposure

۵.۲ لڑھکاو کی قوتیں اور حرکی توانائی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. مرکز کمیت کی مستقیم حرکی توانائی اور مرکز کمیت کے گرد گھمیری حرکی توانائی کا مجموعہ حاصل کر کے جسم کی حرکی توانائی معلوم کر پائیں گے۔

۲. ہمواری کے ساتھ لڑھکنی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اور جسم پر سرانجام کام کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۳. ہموار لڑھکاو (لہٰذا بغیر پھسلن) کے لئے، میکانی توانائی کی بقا استعمال کر کے ابتدائی توانائی کی قیمتوں اور اختتامی توانائی کی قیمتوں کا تعلق جان پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ہموار لڑھکنی پہیے کی حرکی توانائی ذیل ہے،

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2_{\text{مرکز کمیت}}$$

جہاں مرکز کمیت پر جسم کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$ اور پہیے کی کمیت M ہے۔

- اگر پہیا مسرع کیا جائے، اور پہیا اب بھی ہمواری کے ساتھ لڑھکتا ہے، مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ اور مرکز پر زاوی اسراع α کا تعلق ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R$$

- اگر θ زاویہ کے میلان پر پہیا ہمواری کے ساتھ اترتے ہوئے لڑھکتا ہو، اس کا اسراع، میلان کے ہمراہ اوپر رخ محور x پر، ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2}$$

لڑھکاو کی حرکی توانائی

آئیں ساکن مشاہدہ کار کے نقطہ نظر سے لڑھکنی پہیے کی حرکی توانائی معلوم کریں۔ اگر ہم شکل 6.11 میں نقطہ P سے گزرتی محور پر لڑھکاو کو خالص گھماو تصور کریں، تب مساوات ۴.۳۴ ذیل دیگی،

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \tag{۵.۳}$$

جہاں P پر واقع محور کے گرد پہیے کا گھمیری جمود I_P اور پہیے کی زاوی رفتار ω ہے۔ مساوات ۴.۳۶ کے مسئلہ متوازی محور ($I = I_{\text{مرکز کمیت}} + Mh^2$) کے تحت ذیل ہو گا،

$$I_P = I_{\text{مرکز کمیت}} + MR^2 \tag{۵.۴}$$

جہاں M پہیے کی کمیت، مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، اور R (پہیے کا رداس) عمود دار فاصلہ h ہے۔ مساوات ۵.۴ کو مساوات ۵.۳ میں ڈال کر:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

اور مساوات ۵.۲ ($v_{\text{مرکز کمیت}} = \omega R$) استعمال کر کے ذیل حاصل ہو گا۔

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2_{\text{مرکز کمیت}} \tag{۵.۵}$$

جزو $\frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2$ کو مرکز کمیت سے گزرتی محور پر پہیے کے لڑھکاو سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4a.11)، اور جزو $\frac{1}{2} M v^2_{\text{مرکز کمیت}}$ کو پہیے کے مرکز کمیت کی مستقیم حرکت سے وابستہ حرکی توانائی تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 4b.11)۔ یوں ذیل قاعدہ ابھرتا ہے۔

قاعدہ: لڑھکنی جسم کی دو قسم کی حرکی توانائیاں ہوں گی: مرکز کمیت پر گھماو کی بدولت گھمیری حرکی توانائی ($\frac{1}{2} I_{\text{مرکز کمیت}} \omega^2$) اور مرکز کمیت کی مستقیم حرکت کی بدولت مستقیم حرکی توانائی ($\frac{1}{2} M v^2_{\text{مرکز کمیت}}$)۔

لڑھکاو کی قوتیں

رگڑ اور لڑھکاو

اگر پہیا مستقل رفتار سے لڑھکتا ہو، جیسا شکل 3.11 میں دکھایا گیا ہے، نقطہ تماس P پر پہیا ہرگز نہیں پھسلتا لہٰذا اس نقطے پر رگڑ نہیں ہو گی۔ تاہم، اگر صافی قوت پہیے کو تیز یا آہستہ کرتی ہو، تب یہ صافی قوت مرکز کمیت کو حرکت کے رخ اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ بخشے گی۔ ساتھ ہی پہیا تیز یا آہستہ گھومے گا، لہٰذا زاوی اسراع α بھی ہو گا۔ ان اسراع کی بدولت پہیا P پر پھسل سکتا ہے۔ یوں P پر رگڑی قوت عمل کرتی ہوئے پہیے کو پھسلنے سے روکتی ہے۔

اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی اور حرکت ہموار لڑھکاو ہو گا۔ ایسی صورت میں، (R مستقل رکھ کر) وقت کے ساتھ مساوات ۵.۲ کا تفرق لے کر خطی اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کی قدر اور زاوی اسراع کی قدر α کا تعلق حاصل کر سکتے ہیں۔ بائیں ہاتھ $\mathrm{d}v_{\text{مرکز کمیت}}/\mathrm{d}t$ در حقیقت $a_{\text{مرکز کمیت}}$ اور دائیں ہاتھ $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ در حقیقت α ہے۔ یوں ہموار لڑھکاو کے لئے ذیل ہو گا۔

$$a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R \qquad \text{(ہموار لڑھکنی حرکت)} \tag{۵.۶}$$

جب پہیے پر عمل پیرا اضافی قوت کی بدولت پہیا پھسلے، تب شکل 3.11 میں P پر حرکی رگڑی قوت $\vec{f}_k$ عمل کرے گی؛ حرکت تب ہموار لڑھکاو نہیں ہو گی، اور مساوات ۵.٦ کا اطلاق نہیں ہو گا۔ اس باب میں صرف ہموار لڑھکنی حرکت پر بات کی جائے گی۔

شکل 7.11 میں، افقی سطح پر دائیں رخ لڑھکتے ہوئے، سائیکل مقابلے کے آغاز کی طرح، پہیا زیادہ تیز گھمایا جاتا ہے۔ زیادہ تیز گھماو کی بدولت P پر پہیا پھسل کر بائیں جانا چاہتا ہے۔ نقطہ P پر دائیں رخ رگڑی قوت اس رجحان کا مقابلہ کرتی ہے۔ اگر پہیا پھسلے نہیں، یہ قوت سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ ہو گی (جیسا دکھایا گیا ہے)، حرکت ہموار لڑھکاو ہو گی، اور مساوات ۵.٦ کا اطلاق ہو گا۔ (رگڑ کی غیر موجودگی میں سائیکل مقابلہ ممکن نہیں ہو گا۔)

اگر شکل 7.11 میں پہیا آہستہ کیا جائے، ہمیں شکل دو طرح تبدیل کرنی ہو گی: مرکز کمیت کے اسراع $\vec{a}_{\text{مرکز کمیت}}$ کا رخ اور نقطہ P پر رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کا رخ اب بائیں رخ ہو گا۔

میلان سے نیچے لڑھکاو

شکل 8.11 میں گول یکساں جسم، جس کی کمیت M اور رداس R ہے، زاویہ θ کے میلان پر ہمواری سے، محور x کے ہمراہ، نیچے لڑھک رہا ہے۔ ہم میلان کے ہمراہ اترائی کے رخ جسم کے اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ کا ریاضی فقرہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ نیوٹن کے قانون دوم کی خطی صورت $(F_{\text{صافی}} = Ma)$ اور زاوی صورت $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ صورت دونوں استعمال کر کے ایسا کرتے ہیں۔

جسم پر قوتوں کا خاکہ بنانے سے آغاز کرتے ہیں (شکل 8.11)۔

۱. جسم پر تجاذبی قوت $\vec{F}_g$ نشیب وار ہے۔ اس سمتیہ کی دم جسم کے مرکز کمیت پر رکھی جاتی ہے۔ میلان کے ہمراہ جزو $F_g \sin\theta$ ہے جو $Mg \sin\theta$ کے برابر ہو گا۔

۲. میلان کو عمودی دار جزو $\vec{F}_N$ ہے۔ یہ جزو نقطہ تماس P پر عمل کرتا ہے، تاہم شکل 8.11 میں، $\vec{F}_N$ کا رخ تبدیل کیے بغیر، اس کو یوں کھسکایا گیا ہے کہ اس کی دم جسم کے مرکز کمیت پر ہو۔

۳. نقطہ تماس P پر عمل پیرا سکونی رگڑی قوت $\vec{f}_s$ میلان کے ہمراہ چڑھائی کے رخ ہے۔ (کیا آپ بتا سکتے ہیں، کیوں؟ اگر P پر جسم پھسلے، وہ اترائی کے رخ پھسلے گا۔ یوں مخالف رگڑی قوت چڑھائی کے رخ ہو گی۔)

ہم شکل 8.11 میں محور x کے ہمراہ اجزاء کے لئے نیوٹن کا قانون دوم $(F_{\text{صافی},x} = ma_x)$ لکھتے ہیں۔

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{صافی},x} \tag{۵.۷}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور $a_{\text{صافی},x}$، پائے جاتے ہیں۔ (ہم f_s کی قیمت، رگڑی قوت کی زیادہ سے زیادہ قیمت، $f_{s,\text{بلند ترین}}$ فرض نہیں کر سکتے۔ ہم صرف اتنا جانتے ہیں کہ رگڑی قوت اتنی ہے کہ جسم پھسلتا نہیں اور میلان پر ہمواری سے لڑھکتا اترتا ہے۔)

ہم اب جسم کے مرکز کمیت پر جسم کے گھماو پر نیوٹن کے قانون دوم کا اطلاق کرتے ہیں۔ پہلے، مساوات ۴.۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ استعمال کر کے مرکز کمیت کے لحاظ سے جسم پر قوت مروڑ لکھتے ہیں۔ رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے معیار اثر کا بازو R ہے، لہٰذا اس کی قوت مروڑ Rf_s ہو گی، جو اس لئے مثبت ہے کہ شکل 8.11 میں یہ جسم کو خلاف

گھڑی گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ مرکز کمیت کے لحاظ سے قوت $\vec{F}_g$ اور $\vec{F}_N$ کے معیار اثر بازو صفر ہیں، لہٰذا ان کی قوت مروڑ صفر ہوں گی۔ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر نیوٹن کا قانون دوم زاوی روپ $(\tau_{\text{صافی}} = I\alpha)$ میں لکھتے ہیں۔

$$Rf_s = I_{\text{مرکز کمیت}}\alpha \tag{۵.۸}$$

اس مساوات میں دو نامعلوم متغیرات، f_s اور α، پائے جاتے ہیں۔

جسم ہموار لڑھکتا ہے لہٰذا مساوات ۵.۶ $(a_{\text{مرکز کمیت}} = \alpha R)$ استعمال کرکے نامعلوم $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ اور α کا تعلق لکھا جا سکتا ہے۔ تاہم، ہمیں ہوشیاری سے کام لینا ہوگا، چونکہ یہاں $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ منفی (محور x پر منفی رخ ہے) اور α مثبت (خلاف گھڑی) ہے۔ یوں مساوات ۵.۸ میں α کی جگہ $-a_{\text{مرکز کمیت},x}/R$ ڈال کر f_s کے لئے حل کرکے ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$f_s = -I_{\text{مرکز کمیت}}\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} \tag{۵.۹}$$

مساوات ۵.۷ میں f_s کی جگہ مساوات ۵.۹ کا دایاں ہاتھ ڈال کر ذیل ملتا ہے۔

$$a_{\text{مرکز کمیت},x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{مرکز کمیت}}/MR^2} \tag{۵.۱۰}$$

اس مساوات کو استعمال کر کے، افق کے ساتھ زاویہ θ کے میلان پر کے ہمراہ لڑھکتے جسم کا خطی اسراع $a_{\text{مرکز کمیت},x}$ حاصل ہوگا۔

یاد رہے، تجاذبی قوت جسم کو میلان پر اترنے پر مجبور کرتی ہے، تاہم جسم کو گھومنے اور یوں لڑھکنے پر رگڑی قوت مجبور کرتی ہے۔ اگر آپ رگڑ خارج کر دیں (مثلاً، میلان کو تیل سے چپکنا کر کے) یا $Mg\sin\theta$ کو $f_{s,\text{بلند تر}}$ سے زیادہ کر دیں، ہموار لڑھکاو خارج ہو جائے گا اور جسم لڑھکنے کی بجائے میلان پر پھسل کر اترے گا۔

آزمائش ۲

قرص A اور B ایک جیسے ہیں اور فرش پر ایک جتنی رفتار سے لڑھکتے ہیں۔ قرص A کے سامنے میلان آتا ہے جس پر یہ زیادہ سے زیادہ h تک پہنچتا ہے۔ قرص B متماثل، لیکن بلا رگڑ، میلان پر چڑھتا ہے۔ کیا h سے زیادہ، کم، یا اس کے برابر بلندی تک B پہنچے گا؟

نمونی سوال ۵.۱: یکساں گیند، جس کی کمیت $M = 6.00\,\text{kg}$ اور رداس R ہے، زاویہ $\theta = 30.0°$ میلان سے، ساکن حالت سے آغاز کر کے، ہموار لڑھکتا اترتا ہے (شکل 8.11)۔

(ا) انتصابی $h = 1.20\,\text{m}$ نیچے زمین کو پہنچتا کر گیند کی رفتار کیا ہوگی؟

کلیدی تصورات

چونکہ صرف تجاذبی قوت، جو بقائی قوت ہے، گیند پر کام سر انجام دیتی ہے، لہٰذا میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند و زمین نظام کی میکانی توانائی E کی بقا ہو گی۔ میلان سے گیند پر عمودی دار قوت گیند کی راہ کو عمودی ہونے کی وجہ سے کوئی کام سر انجام نہیں دیتی۔ گیند پھسلتا نہیں (ہموار لڑھکتا ہے) لہٰذا رگڑی قوت کوئی توانائی حرارت توانائی میں تبدیل نہیں کرتی۔

یوں میکانی توانائی کی بقا ہو گی $E_f = E_i$:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{۵.۱۱}$$

جہاں زیر نوشت f اور i بالترتیب (زمین پر پہنچ کر) اختتامی اور (ساکن حالت) ابتدائی قیمتیں ظاہر کرتی ہیں۔ تجاذبی مخفی توانائی کی ابتدائی قیمت $U_i = Mgh$ (جہاں M گیند کی کمیت ہے) اور اختتامی قیمت $U_f = 0$ ہے۔ ابتدائی حرکی توانائی $K_i = 0$ ہے اختتامی حرکی توانائی جاننے کے لئے اضافی تصور درکار ہے: چونکہ گیند لڑھکتا ہے اس کی حرکی توانائی میں مستقیم اور گھمیری جزو شامل ہوں گے، جنہیں شامل کرنے کے لئے مساوات ۵.۵ کا دایاں ہاتھ استعمال کرتے ہیں۔

حساب: مساوات ۵.۱۱ میں ڈالنے سے ذیل حاصل ہو گا:

$$(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}}) + 0 = 0 + Mgh \tag{۵.۱۲}$$

جہاں گیند کے مرکز کمیت سے گزرتی محور پر گیند کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکز کمیت}}$، زمین پر پہنچ کر گیند کی رفتار (جو ہم تلاش کرنا چاہتے ہیں) $v_{\text{مرکز کمیت}}$، اور زمین پر پہنچ کر زاوی رفتار ω ہے۔

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، ہم مساوات ۵.۲ استعمال کر کے ω کی جگہ $v_{\text{مرکز کمیت}}/R$ پُر کر کے مساوات ۵.۱۲ میں نامعلوم متغیرات کی تعداد کم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے، اور جدول 2f.10 سے $I_{\text{مرکز کمیت}}$ کی جگہ $\frac{2}{5}MR^2$ ڈال کر $v_{\text{مرکز کمیت}}$ کے لئے حل کرنے سے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\tfrac{10}{7})gh} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(1.20\,\mathrm{m})} \\ &= 4.10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

یاد رہے، جواب M اور R پر منحصر نہیں۔

(ب) میلان پر لڑھک کر اترنے کے دوران گیند پر رگڑی قوت کی قدر اور رخ کیا ہیں؟

کلیدی تصور

چونکہ گیند ہموار لڑھکتا ہے، مساوات ۵.۹ گیند پر رگڑی قوت دیگی۔

حل: مساوات ۵.۹ استعمال کرنے سے قبل ہمیں مساوات ۵.۱۰ سے گیند کا اسراع معلوم کرنا ہوگا۔

$$\begin{aligned} a_{\text{مرکز کمیت},x} &= -I_{\text{مرکز کمیت}}\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}MR^2\frac{a_{\text{مرکز کمیت},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma_{\text{مرکز کمیت},x} \\ &= -\frac{2}{5}(6.00\,\text{kg})(-3.50\,\text{m}\,\text{s}^{-2}) = 8.40\,\text{N} \qquad (\text{جواب}) \end{aligned}$$

یاد رہے ہمیں کمیت M درکار تھی جبکہ رداس R نہیں تھا۔ یوں، $30°$ میلان پر $6.00\,\text{kg}$ ہموار لڑھکتے گیند پر، گیند کے رداس سے قطع نظر، رگڑی قوت $8.40\,\text{N}$ ہوگی، تاہم بڑی کمیت کی صورت میں رگڑی قوت زیادہ ہوگی۔ □

۵.۳ ڈوری دار لٹو

مقاصد اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے **ڈوری دار لٹو**[۳] کا آزاد جسمی خاکہ بنا پائیں گے۔

۲. جان پائیں گے کہ ڈوری دار لٹو، ایسا جسم ہے جو $90°$ زاویہ میلان پر ہموار اوپر نیچے لڑھکتا ہے۔

۳. ڈوری پر اوپر نیچے حرکت کرتے ڈوری دار لٹو کے اسراع اور گھمیری جمود کا تعلق استعمال کر پائیں گے۔

۴. ڈوری پر اوپر یا نیچے حرکت کے دوران ڈوری دار لٹو کی ڈور میں تناو تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصور

- ڈوری دار لٹو جو ڈور پر اوپر یا نیچے حرکت کرتا ہو کو $90°$ میلان پر ہموار لڑھکتا جسم تصور کیا جا سکتا ہے۔

ڈوری دار لٹو

ڈوری پر h فاصلہ اتر کر ڈوری دار لٹو کی مخفی توانائی میں mgh کی واقع ہوگی جبکہ اس کی حرکی توانائی کے مستقیم جزو $(\frac{1}{2}Mv^2_{\text{مرکز کمیت}})$ اور گھمیری جزو $(\frac{1}{2}I_{\text{مرکز کمیت}}\omega^2)$ میں اضافہ ہوگا۔

ڈوری دار لٹو کی ایک نئی قسم میں ڈور کو دھرے کے ساتھ سخت باندھنے کے بجائے ڈور کو دھرے کے گرد ڈھیلا گھیرا دیا جاتا ہے۔ جب لٹو نیچے اترتے ہوئے ڈور کے پیندا کو "ٹکراتا" ہے، دھرے پر ڈور اوپر وار قوت لاگو کر کے لٹو کی نشیبی حرکت روکتی ہے۔ اس کے بعد لٹو صرف گھمیری حرکی توانائی کے ساتھ (دھرا گھیرے میں چکر کاٹتا ہوا) گھومتا ہے۔ لٹو ("سوتے ہوئے") چکر کاٹتا رہتا ہے؛ ڈور کو جھٹکا دینے پر ڈور دھرے کو پکڑتی ہے، "لٹو بیدار ہوتا ہے"، اور اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ ڈور کے پیندا پر لٹو کی گھمیری حرکی توانائی (اور یوں سونے کا دورانیہ) بڑھانے کی خاطر لٹو کو ساکن حالت سے روانا کرنے کی بجائے ابتدائی رفتار $v_{\text{مرکز کمیت}}$ اور ω کے ساتھ نشیب وار پھینکا جاتا ہے۔

---

[۳] Yo-Yo

ڈور پر نشیب وار اترنے کے دوران لٹو کا خطی اسراع $a_{\text{مرکزکمیت}}$ جاننے کے لئے، شکل 8.11 میں میلان پر اترتے لڑھکتے جسم کی طرح، نیوٹن کا قانون دوم (خطی اور گھمیری روپ میں) استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ماسوائے ذیل، تجزیہ بالکل اسی طرح ہو گا۔

۱. افق کے ساتھ θ زاویے کے میلان پر اترنے کے بجائے ڈوری دار لٹو افق کے ساتھ $90°$ زاویے کی ڈور پر اترتا ہے۔

۲. رداس R کی بیرونی سطح پر لڑھکنے کے بجائے ڈوری دار لٹو رداس R_0 کے دھرے پر لڑھکتا ہے (شکل 9a.11)۔

۳. رگڑی قوت $\vec{f}_s$ کے بجائے، ڈوری دار لٹو کو ڈور کا تناو $\vec{T}$ آہستہ کرتا ہے (شکل 9b.11)۔

موجودہ تجزیہ بھی مساوات ۵.۱۰ دے گا۔ آئیں مساوات ۵.۱۰ کی ترقیم تبدیل کر کے اور $\theta = 90°$ ڈال کر خطی اسراع ذیل لکھتے ہیں:

$$a_{\text{مرکزکمیت}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{مرکزکمیت}}/MR_0^2} \tag{۵.۱۳}$$

جہاں لٹو کے مرکز کمیت پر لٹو کا گھمیری جمود $I_{\text{مرکزکمیت}}$ اور کمیت M ہے۔ ڈوری پر اوپر چڑھنے کے دوران ڈوری دار لٹو کا اسراع یہی نشیبی اسراع ہو گا۔

۵.۴ قوت مروڑ پر نظر ثانی

مقاصد

اس حصہ کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ قوت مروڑ ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس نقطہ پر قوت مروڑ تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. ذرے پر عمل پیرا قوت کی ذرے پر قوت مروڑ، اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم کے روپ میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور قوت سمتیہ کے صلیبی ضرب سے حاصل کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے قوت مروڑ کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- تین ابعاد میں، قوت مروڑ $\vec{\tau}$ ایک سمتیہ مقدار ہو گی، جو کسی مقررہ نقطہ (عموماً مبدا) کے لحاظ سے تعین کی جاتی ہے؛ اس کی تعریف ذیل ہے:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جہاں $\vec{F}$ ذرے پر لاگو قوت اور $\vec{r}$ کسی مقررہ نقطے کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ ہے، جو ذرے کا مقام دیتا ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی قدر τ ذیل ہو گی:

$$\tau = rF\sin\phi = rF_\perp = r_\perp F$$

جہاں $\vec{F}$ اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{F}$ کا عمودی جزو $F_\perp$، اور $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو $r_\perp$ ہے۔

- قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کا رخ صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

قوت مروڑ پر نظر ثانی

باب ۴ میں مقررہ محور کے گرد گھومنے کے قابل استوار جسم کے لئے قوت مروڑ τ کی تعریف پیش کی گئی۔ ہم قوت مروڑ کی تعریف کو وسعت دے کر (مقررہ محور کے بجائے) مقررہ نقطے کے لحاظ سے کسی بھی راہ پر حرکت کرتے ہوئے انفرادی ذرے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ راہ کا دائری ہونا ضروری نہیں، اور ہم قوت مروڑ کو سمتیہ $\vec{\tau}$ لکھتے ہیں جس کا رخ کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ قوت مروڑ کی قدر کلیہ سے اور رخ صلیبی ضرب کے دایاں ہاتھ قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 10a.11 میں، نقطہ A پر مستوی xy میں ایسا ایک ذرہ دکھایا گیا ہے۔ ذرے پر، مستوی میں قوت $\vec{F}$، عمل کرتی ہے، اور مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا مقام تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ دیتا ہے۔ مقررہ نقطہ O کے لحاظ سے ذرے پر عمل پیرا **قوت** مروڑ $\vec{\tau}$ کی تعریف ذیل ہے۔

قوت مروڑ کی تعریف
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{۵.۱۴}$$

قوت مروڑ $\vec{\tau}$ کی اس تعریف میں سمتی (صلیبی) ضرب کی تحسیب حصہ 3.3 کے قواعد سے کی جا سکتی ہے۔ $\vec{\tau}$ کا رخ جاننے کے لئے، سمتیہ $\vec{F}$ کو (رخ تبدیل کیے بغیر) کھسکا کر اس کی دم مبدا O پر رکھی جاتی ہے؛ یوں، جیسا شکل 10b.11 میں دکھایا گیا ہے، سمتی ضرب کے دونوں سمتیات کی دم ایک نقطے پر ہو گی۔ اب ہم شکل 19a.3 میں پیش دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ پر رکھ کر (ضرب میں پہلا سمتیہ ہے) $\vec{F}$ کی طرف جھکاتے ہیں (جو ضرب میں دوسرا سمتیہ ہے)۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\tau}$ کا رخ دیگا۔ شکل 10b.11 میں $\vec{\tau}$ کا رخ محور z کے مثبت رخ ہے۔

$\vec{\tau}$ کی قدر جاننے کے لئے، ہم مساوات 27.3 $(c = ab\sin\phi)$ کا عمومی نتیجہ بروئے کار لاتے ہیں، جو ذیل دیگا:

$$\tau = rF\sin\phi \tag{۵.۱۵}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے دم ایک نقطے پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 10b.11 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۵.۱۵ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = rF_\perp \tag{۵.۱۶}$$

جہاں $F_\perp$ (جو $F\sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{r}$ کا $\vec{F}$ کا عمودی جزو ہے۔ شکل 10c.11 کو دیکھ کر مساوات ۵.۱۵ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\tau = r_\perp F \tag{۵.۱۷}$$

جہاں $r_\perp$ (جو $r\sin\phi$ کے برابر ہے) $\vec{F}$ کا معیار اثر کا بازو ($\vec{F}$ کے خط عمل اور O کے بیچ عمودداری فاصلہ) ہے۔

آزمائش ۳

ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، مثبت محور z کے ہمراہ پایا جاتا ہے۔ اگر ذرے پر قوت مروڑ (ا) صفر ہو، (ب) محور x کے منفی رخ ہو، اور (ج) محور y کے منفی رخ ہو، قوت مروڑ پیدا کرنے والی قوت کا رخ کیا ہو گا؟

نمونی سوال ۵.۲: **قوت کی بدولت ذرے پر قوت مروڑ**

شکل 11a.11 میں، $2.0\,\mathrm{N}$ قدر کی تین قوت ذرے پر عمل کرتی ہیں۔ ذرہ، مستوی xy میں، نقطہ A پر ہے، جس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$، جہاں $r = 3.0\,\mathrm{m}$ اور $\theta = 30°$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ہر قوت کی انفرادی قوت مروڑ کیا ہے؟

کلیدی تصور

چونکہ قوت ایک مستوی میں نہیں پائی جاتیں، ہمیں صلیبی ضرب استعمال کرنا ہو گی، جس کی قدر مساوات ۵.۱۵ $(\tau = rF\sin\phi)$ دیگی اور رخ دایاں ہاتھ قاعدہ دیگا۔

حساب: ہم مبدا O کے لحاظ سے قوت مروڑ جاننا چاہتے ہیں لہٰذا دیا گیا تعین گر سمتیہ صلیبی ضرب میں درکار سمتیہ $\vec{r}$ ہو گا۔ قوت اور $\vec{r}$ کے بیچ زاویہ ϕ جاننے کے لئے ہم شکل 11a.11 میں دیے گئے سمتیہ قوت باری باری یوں کھسکاتے ہیں کہ ان کی دم O پر ہو۔ انتقال کے بعد قوت $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، اور $\vec{F}_3$ بالترتیب شکل 11b.11، شکل 11c.11، اور شکل 11d.11 میں، جو مستوی xz کا نظارہ دیتی ہیں، دکھائی گئی ہیں (جن میں سمتیہ قوت اور تعین گر سمتیہ کے بیچ زاویے با آسانی نظر آتے ہیں)۔ شکل 11d.11 میں $\vec{r}$ اور $\vec{F}_3$ کے رخ کے بیچ زاویہ $90°$ ہے اور علامت $\otimes$ کہتی ہے $\vec{F}_3$ صفحہ میں عمودداراندر رخ ہے۔ (صفحہ سے عمودداری نکلنے کی صورت میں $\odot$ علامت استعمال کی جاتی ہے۔)

مساوات ۵.۱۵ استعمال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= rF_1\sin\phi_1 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 150°) = 3.0\,\mathrm{N\,m}\\
\tau_2 &= rF_2\sin\phi_2 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 120°) = 5.2\,\mathrm{N\,m}\\
\tau_3 &= rF_3\sin\phi_3 = (3.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{N})(\sin 90°) = 6.0\,\mathrm{N\,m} \qquad \text{(جواب)}
\end{aligned}
$$

اب دائیں ہاتھ قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ رکھ کر $\vec{F}$ کے رخ (سمتیات کے رخ کے بیچ چھوٹے زاویے) گھماتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کا انگوٹھا، جو چار انگلیوں کو عمودداررکھا گیا ہے، قوت مروڑ کا رخ دیگا۔ یوں $\vec{\tau}_1$ شکل 11b.11 میں صفحے کے اندر جانے کے رخ ہو گا؛ $\vec{\tau}_2$ شکل 11c.11 میں صفحہ سے باہر نکلنے کے رخ ہو گا؛ اور $\vec{\tau}_3$ کا رخ شکل 11d.11 میں دکھایا گیا ہے۔ تینوں قوت مروڑ سمتیات شکل 11e.11 میں پیش ہیں۔ □

۵.۵ زاوی معیار حرکت

مقاصد

اس حصے کو پڑھنے کے بعد آپ ذیل کے قابل ہوں گے۔

۱. جان پائیں گے کہ زاوی معیار حرکت ایک سمتیہ مقدار ہے۔

۲. جان پائیں گے کہ جس مقررہ نقطے کے لحاظ سے زاوی معیار حرکت تعین کیا جائے اس کا ذکر صریحاً کرنا لازم ہے۔

۳. اکائی سمتیہ ترقیم یا قدر و زاویہ ترقیم میں، ذرے کے تعین گر سمتیہ اور معیار حرکت سمتیہ کا صلیبی ضرب لے کر ذرے کا زاوی معیار حرکت تعین کر پائیں گے۔

۴. صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے زاوی معیار حرکت کا رخ تعین کر پائیں گے۔

کلیدی تصورات

- ایک ذرہ، جس کا خطی معیار حرکت $\vec{p}$، کمیت m، اور خطی سمتی رفتار $\vec{v}$ ہو، کا مقررہ نقطے کے لحاظ سے (جو عموماً مبدا ہو گا) زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی تعریف ذیل سمتی مقدار ہے۔

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

- زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر ℓ ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\ell &= rmv\sin\phi \\ &= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \\ &= r_{\perp}p = r_{\perp}mv\end{aligned}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کے بیچ زاویہ ϕ ہے، $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ اور $\vec{v}$ کے عمودی دار جزو $p_{\perp}$ اور $v_{\perp}$ ہیں، اور مقررہ نقطے سے مبسوط $\vec{p}$ تک عمودی دار فاصلہ $r_{\perp}$ ہے۔

- دایاں ہاتھ قاعدہ $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا: دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\vec{r}$ کے رخ پر (ابتدائی طور) رکھ کر انہیں گھما کر $\vec{p}$ کے رخ پر رکھیں۔ دائیں ہاتھ کا سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ دیگا۔

زاوی معیار حرکت

یاد کریں، خطی معیار حرکت $\vec{p}$ اور خطی معیار حرکت کی بقا کا اصول انتہائی طاقتور اوزار ہیں۔ انہیں استعمال کر کے نتائج کی، مثلاً دو گاڑیوں کے تصادم کی تفصیل جانے بغیر تصادم کی، پیشگوئی کی جا سکتی ہے۔ یہاں ہم $\vec{p}$ کے زاوی مد مقابل پر تبصرہ شروع کرتے ہیں جس کا اختتام حصہ 8.11 میں بقائی اصول کے مد مقابل پر ہو گا۔

شکل 12.11 میں سطح xy میں نقطہ A سے کمیت m اور خطی معیار حرکت $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ کا ذرہ گزرتا دکھایا گیا ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے ذرے کا **زاوی معیار حرکت**[۴] $\vec{\ell}$ سمتیہ مقدار ہو گا جس کی تعریف ذیل ہے،

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \text{(زاوی معیار حرکت کی تعریف)} \tag{۵.۱۸}$$

جہاں O کے لحاظ سے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔ مبدا O کے لحاظ سے جب ذرہ معیار حرکت $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ کے رخ کرتا ہے، اس کا تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ مبدا O کے گرد گھمیری حرکت کرتا ہے۔ غور کریں، O پر زاوی معیار حرکت کے لئے ضروری نہیں کہ ذرہ خود O کے گرد گھومتا ہو۔ مساوات ۵.۱۴ اور مساوات ۵.۱۸ کا موازنہ کرنے سے معلوم ہو گا کہ زاوی معیار حرکت اور خطی معیار حرکت کا آپس میں وہی رشتہ ہے جو قوت مروڑ کا قوت کے ساتھ ہے۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں زاوی معیار حرکت کی اکائی کلوگرام مربع میٹر فی سیکنڈ $(\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}})$ ہے، جو جاول سیکنڈ $(\mathrm{J\,s})$ کا معادل ہے۔

رخ۔ شکل 12.11 میں زاوی معیار حرکت سمتیہ $\vec{\ell}$ کا رخ جاننے کے لئے، ہم سمتیہ $\vec{p}$ کو کھسکا کر کے اس کی دم مبدا O پر رکھتے ہیں۔ اس کے بعد صلیبی ضرب کا دایاں ہاتھ قاعدہ استعمال کر کے انگلیوں کو $\vec{r}$ سے $\vec{p}$ لپیٹتے ہیں۔ سیدھا کھڑا انگوٹھا $\vec{\ell}$ کا رخ، شکل 12.11 میں، محور z کا مثبت رخ دیتا ہے۔ یہ مثبت رخ، محور z پر تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ کے خلاف گھڑی گھماو کے عین مطابق ہے، جو ذرے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ($\vec{\ell}$ کی منفی قیمت محور z پر گھڑی وار گھماو ظاہر کرے گی۔)

قدر۔ زاوی معیار حرکت $\vec{\ell}$ کی قدر معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات 27.3 کا عمومی نتیجہ ذیل لکھتے ہیں:

$$\ell = rmv\sin\phi \tag{۵.۱۹}$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کی دم ایک نقطہ پر رکھ کر سمتیات کے بیچ چھوٹا زاویہ ϕ ہے۔ شکل 12a.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp} \tag{۵.۲۰}$$

جہاں $\vec{r}$ کو $\vec{p}$ کا عمودار جزو $p_{\perp}$ ہے، اور $\vec{r}$ کو $\vec{v}$ کا عمودار جزو $v_{\perp}$ ہے۔ شکل 12b.11 دیکھ کر مساوات ۵.۱۹ ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے:

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \tag{۵.۲۱}$$

جہاں مبسوط $\vec{p}$ سے O کا عمودار فاصلہ $r_{\perp}$ ہے۔

اہم۔ دو پہلو پر غور کریں: (1) زاوی معیار حرکت صرف کسی مخصوص مبدا کے لحاظ سے معنی خیز ہے اور (2) اس کا رخ ہر صورت اس سطح کو عمودی ہو گا جو تعین گر سمتیہ $\vec{r}$ اور خطی معیار حرکت سمتیہ $\vec{p}$ مل کر بناتے ہیں۔

---

[۴] angular momentum

جوابات