کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۰

حرناگزر تخمین

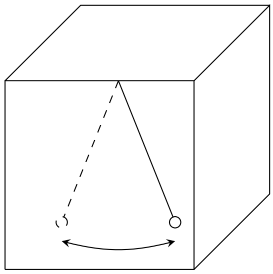
۱۰.۱ مسئلہ حرناگزر

۱۰.۱.۱ حرناگزر عمل

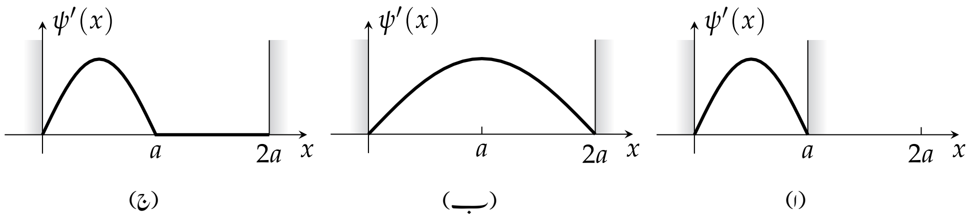
فرض کریں ایک کامل رقاص انتصابی سطح میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے۔ اگر آپ اس رقاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ افراتفری کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا، لیکن اگر آپ بغیر جھٹکا دیے رقاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسرے مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تو یہ اسی سطح (یا اس کی متوازی سطح) میں شائستگی اور روانی سے، اسی حیطہ کے ساتھ جھولتا رہے گا۔ بیرونی کیفیت کی بہت آہستہ تبدیلی ہی **حرناگزر**[1] عمل کی پہچان ہے۔ دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف وقتوں کی بات کی جا رہی ہے: نظام کی اپنی حرکت (جو یہاں رقاص کے ارتعاش کا دوری عرصہ ہو گا) کو ظاہر کرنے والا "اندرونی" وقت T_i، اور نظام کی مقادیر معلوم میں نمایاں تبدیلی (مثلاً، لرزتے ہوئے چبوترے پر نصب رقاص کی صورت میں چبوترے کی لرزش کا دوری عرصہ) کو ظاہر کرنے والا "بیرونی" وقت T_e۔ حرناگزر عمل میں $T_e \gg T_i$ ہو گا۔

حرناگزر عمل کے تجزیے کی بنیادی حکمت عملی یہ ہے کہ پہلے بیرونی مقادیر معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے، اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں (بہت آہستہ) وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، مقررہ لمبائی L کے رقاص کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہو گا؛ اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو، تو دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہو گا۔ ہائیڈروجن سالمہ (حصہ ۷.۳) پر تبصرہ کے دوران زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی۔ ہم نے مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے آغاز کیا، اور ان کے بیچ فاصلہ R کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا۔ نظام کی زمینی حال توانائی کو R کے تفاعل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد، ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کے انحنا سے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا (سوال ۱۰.۷)۔ طبیعیات سالمہ میں اس ترکیب کو (جس میں ساکن

[1] adiabatic



شکل ۱.۱۰: حرناگزر حرکت: اگر ڈبے کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تو رقاص اسی حیطہ کے ساتھ ابتدائی سطح کی متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۲.۱۰: (ا) لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تو ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تو ذرہ لمحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

مراکزہ سے آغاز کرتے ہوئے، الیکٹرانی تفاعلات موج کا حساب کر کے، ان سے نسبتاً سست رفتار مراکزہ کے مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو) **بارن واوپن ہائیمر تخمین**[۲] کہتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں، **حرناگزر تخمین**[۳] کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ H^i سے بہت آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ H^f تک پہنچتی ہے۔ **مسئلہ حرناگزر**[۴] کہتا ہے کہ اگر ذرہ ابتدائی طور پر H^i کے n ویں امتیازی حال میں پایا جاتا ہو، تو (زیر مساوات شروڈنگر) یہ H^f کے n ویں امتیازی حال میں منتقل ہو گا۔ (میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ H^i سے H^f تک تحویل کے دوران، طیف غیر مسلسل اور غیر انحطاطی ہے، لہٰذا احالات کی ترتیب میں کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا؛ امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جا سکتا ہے، لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔)

[۲] Born-Oppenheimer approximation
[۳] adiabatic approximation
[۴] adiabatic theorem

مثال کے طور پر، ہم لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کو زمینی حال:

$$\psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{۱۰.۱}$$

میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-ا)۔ اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ مقام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے؛ مسئلہ حرناگزر کے تحت (ماسوائے ہیّتی جز وضربی کے) یہ ذرہ توسیع شدہ کنویں کے زمینی حال:

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \tag{۱۰.۲}$$

میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔ دھیان رہے کہ ہم ہیملٹنی میں چھوٹی تبدیلی (نظریہ اضطراب کی طرح) کی بات نہیں کر رہے ہیں؛ ہاں تبدیلی بہت بڑی ہے۔ فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی آہستہ رونما ہو۔ یہاں توانائی کی بقا نہیں ہو گی: جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے، نظام سے توانائی حاصل کرے گا، جیسا کہ گاڑی کے انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے۔ اس کے برعکس، کنویں کی اچانک وسعت کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج)، جو نئی ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا (سوال ۲.۳۸)۔ یہاں توانائی (کم از کم، اس کی توقعاتی قیمت) کی بقا ہو گی؛ جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے خلاء میں گیس کی آزادانہ پھیلانے سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱.۱۰: ایک لامتناہی چوکور کنواں، جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتی ہے، کو ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے۔ اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$\Phi_n(x,t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega}}\sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right)e^{i(mvx^2-2E_n^i at)/2\hbar\omega} \tag{۱۰.۳}$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنویں کی (لمحاتی) چوڑائی اور $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ (چوڑائی a) کے اصل کنویں کی n ویں اجازتی توانائی ہے۔ عمومی حل ان Φ کا خطی جوڑ:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\Phi_n(x,t) \tag{۱۰.۴}$$

ہوگا، جہاں عددی سر c_n وقت t کے تابع نہیں ہوں گے۔

ا. دیکھیں آیا تابع وقت مساوات شروڈنگر بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات ۱۰.۳ مطمئن کرتی ہے۔

ب. فرض کریں اصل کنویں کے زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز $(t = 0)$ کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کے توسیعی عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\alpha z^2}\sin(nz)\sin(z)\,dz \tag{۱۰.۵}$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنویں کے پھیلنے کی رفتار کی بے بُعدی پیمائش ہے۔ (بدقسمتی سے اس تکمل کی قیمت بنیادی تفاعلات کی صورت میں حاصل نہیں کی جا سکتی۔)

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنی چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں، یوں "بیرونی" وقت $2a = w(T_e)$ ہوگا۔ (ابتدائی) زمینی حال کے تابع وقت قوت نما جزو ضربی کا دوری عرصہ، "اندرونی" وقت ہوگا۔ وقت T_e اور T_i کا تعین کرکے، دکھائیں کہ حرناگزر طریق سے مراد $\alpha \ll 1$ ہوگا، لہٰذا تکمل کے دائرہ کار پر $e^{-i\alpha z^2} \cong 1$ ہوگا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے توسیعی عددی سر c_n کا تعین کریں۔ حال $\Psi(x,t)$ تیار کرکے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرناگزر کے مطابق ہے۔

د. دکھائیں کہ $\Psi(x,t)$ میں پیّتی جزو ضربی کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\theta(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۶}$$

جہاں لمحہ t پر لمحاتی امتیازی قدر $E_n(t) \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$ ہوگا۔ اس نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

۱۰.۱.۲ مسئلہ حرناگزر کا ثبوت

مسئلہ حرناگزر بظاہر معقول نظر آتا ہے، اور اسے با آسانی بیان کیا جا سکتا ہے، تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔ غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں، ایک ذرہ جو n ویں امتیازی حال،[۵] ψ_n، میں آغاز کرتا ہے،

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۷}$$

پیّتی جزو ضربی اپنانے کے علاوہ اسی n ویں امتیازی حال:

$$\Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۱۰.۸}$$

میں رہتا ہے۔ اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو، تب امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے:

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \tag{۱۰.۹}$$

لیکن اب بھی (کسی ایک مخصوص لمحہ پر) یہ معیاری عمودی سلسلہ:

$$\langle\psi_n(t)|\psi_m(t)\rangle\delta_{nm} \tag{۱۰.۱۰}$$

دیں گے، اور یہ مکمل ہیں، لہٰذا تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) \tag{۱۰.۱۱}$$

[۵] میں مقام (یا چکر، وغیرہ) کا ذکر نہیں کروں گا، چونکہ اس دلیل میں تابعیت وقت کی بات کی جا رہی ہے۔

کے عمومی حل کو ان کا خطی جوڑ:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)} \tag{۱۰.۱۲}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۱۳}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے E_n کی صورت میں "معیاری" ہیئتی جز ضربی کو عمومیت دیتا ہے۔ (ہمیشہ کی طرح میں اس کو عددی سر $c_n(t)$ میں ضم کر سکتا تھا، لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے، لہٰذا تابعیت وقت کے اس حصے کو صریحاً لکھنا موزوں ہو گا۔)

مساوات ۱۰.۱۲ کو مساوات ۱۰.۱۱ میں پر کرنے سے

$$i\hbar\sum_n[\dot{c}_n\psi_n + c_n\dot{\psi}_n + ic_n\psi_n\dot{\theta}_n]e^{i\theta_n} = \sum_n c_n(H\psi_n)e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۴}$$

حاصل ہو گا (جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ مساوات ۱۰.۹ اور مساوات ۱۰.۱۳ کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹتے ہیں، لہٰذا درج ذیل باقی رہتا ہے۔

$$\sum_n \dot{c}_n\psi_n e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۵}$$

اس کا ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر، لمحاتی امتیازی تفاعلات کی معیاری عمودیت (مساوات ۱۰.۱۰) بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n\delta_{mn}e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle e^{i\theta_n}$$

یا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\dot{c}_m(t) = -\sum_n c_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle e^{i(\theta_n-\theta_m)} \tag{۱۰.۱۶}$$

اب مساوات ۱۰.۹ کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H}\psi_n + H\dot{\psi}_n = \dot{E}_n\psi_n + E_n\dot{\psi}_n$$

اور یوں (دوبارہ ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle + \langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = \dot{E}_n\delta_{mn} + E_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۷}$$

ہم H کے ہرمشی پن سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = E_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle$ لکھتے ہیں، یوں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle = (E_n - E_m)\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۸}$$

(یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انحطاطی ہیں) مساوات ۱۰.۱۸ کو مساوات ۱۰.۱۶ میں پُر کر کے درج ذیل اخذ ہو گا۔

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle - \sum_{n\neq m} c_n \frac{\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar)\int_0^t [E_n(t') - E_m(t')]\, dt'} \tag{۱۰.۱۹}$$

یہ ٹھیک ٹھیک نتیجہ ہے۔ اب حرناگزر تخمین کی باری آتی ہے: فرض کریں $\dot{H}$ نہایت چھوٹا ہے، اور دوسرے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے[6]

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle \tag{۱۰.۲۰}$$

ہو گا، جس کا حل

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\gamma_m(t)} \tag{۱۰.۲۱}$$

ہے، جہاں درج ذیل ہو گا۔[7]

$$\gamma_m(t) \equiv i\int_0^t \left\langle \psi_m(t') \middle| \frac{\partial}{\partial t'}\psi_m(t') \right\rangle dt' \tag{۱۰.۲۲}$$

بالخصوص، اگر ذرہ n ویں امتیازی حال (یعنی $c_n(0) = 1$ اور $m \neq n$ کیلئے $c_m(0) = 0$ ہو) سے آغاز کرے، تب (مساوات ۱۰.۱۲)

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)}\psi_n(t) \tag{۱۰.۲۳}$$

ہو گا، لہٰذا (چند ہیّتی جزو ضربی حاصل کرنے کے علاوہ) یہ ذرہ (ارتقائی ہیملٹنی کے) n ویں امتیازی حال میں ہی رہے گا۔

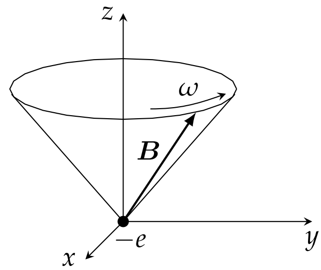
مثال ۱۰.۱: فرض کریں مقناطیسی میدان میں مبدا پر (کمیت m اور بار $-e$ کا) ساکن الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی میدان کی مقدار (B_0) مستقل ہے، جبکہ اس کا رخ z محور کے گرد، مقررہ زاویائی سمتی رفتار ω کے ساتھ، مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے۔ محور z کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ α ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0[\sin(\alpha)\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha)\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k}] \tag{۱۰.۲۴}$$

---

[6] اس قدم کی پختہ وجہ تلاش کرنا اتنا آسان نہیں۔

[7] چونکہ ψ_m کی معمول زنی میں $(d/dt)\langle\psi_m|\psi_m\rangle = \langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle + \langle\dot{\psi}_m|\psi_m\rangle = 2(\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$ شامل ہے لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔



شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار ω سے مخروطی راہ جھاڑتا ہے (مساوات ۱۰.۲۴)۔

اس کی ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہو گی

$$
\begin{aligned}
H(t) &= \frac{e}{m}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{e\hbar B_0}{2m}\left[\sin\alpha\cos(\omega t)\sigma_x + \sin\alpha\sin(\omega t)\sigma_y + \cos\alpha\sigma_z\right] \\
&= \frac{\hbar\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & e^{-i\omega t}\sin\alpha \\ e^{i\omega t}\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۰.۲۵}
$$

جہاں ω_1 درج ذیل ہے۔

$$
\omega_1 \equiv \frac{eB_0}{m} \tag{۱۰.۲۶}
$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکر کار χ_+ اور χ_- درج ذیل ہیں

$$
\chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t}\sin(\alpha/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۷}
$$

$$
\chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t}\sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۸}
$$

جو $\boldsymbol{B}(t)$ کے لحاتی رخ کے ساتھ، بالترتیب، ہم چکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں (سوال ۴.۳۰ دیکھیں)۔ ان کی مطابقتی امتیازی اقدار درج ذیل ہوں گی۔

$$
E\pm = \pm\frac{\hbar\omega_1}{2} \tag{۱۰.۲۹}
$$

فرض کریں $\boldsymbol{B}(0)$ کی ہم راہ، الیکٹران ہم چکر:

$$
\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۰}
$$

صورت سے آغاز کرتا ہے۔[۸] تابع وقت مساوات شروڈنگر کا ٹھیک حل درج ذیل ہو گا (سوال ۱۰.۲)

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1-\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(\alpha/2)e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1+\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\sin(\alpha/2)e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۱}$$

جہاں λ درج ذیل ہے۔

$$\lambda \equiv \sqrt{\omega^2+\omega_1^2-2\omega\omega_1\cos\alpha} \tag{۱۰.۳۲}$$

اس حل کو χ_+ اور χ_- کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\chi(t) = \Big[\cos\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big) - i\frac{(\omega_1-\omega\cos\alpha)}{\lambda}\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) \\ + i\Big[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t)\end{aligned} \tag{۱۰.۳۳}$$

ظاہر ہے کہ ($\boldsymbol{B}$ کے موجودہ رخ کے لحاظ سے) خلاف چکر تحویل کا ٹھیک احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$\big|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\big|^2 = \Big[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]^2 \tag{۱۰.۳۴}$$

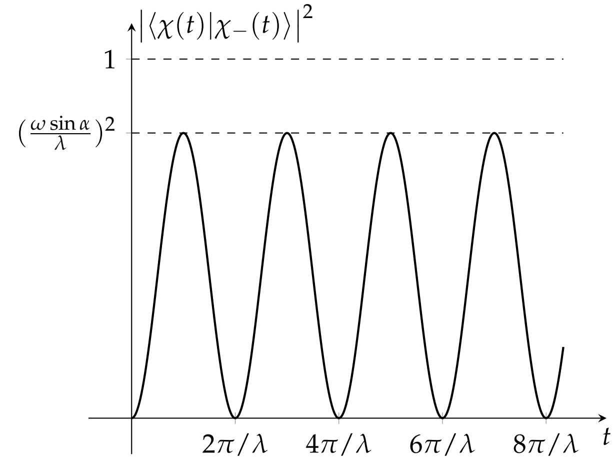
مسئلہ حسر ناگزر کہتا ہے کہ $T_i \gg T_e$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا، جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت T_e ہے (جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہو گا)، اور تفاعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت T_i ہے (جو موجودہ صورت میں $\hbar/(E_+-E_-)=1/\omega_1$ ہو گا)۔ یوں حسر ناگزر تخمین سے مراد $\omega_1 \gg \omega$ ہے: (غیر مضطرب) تفاعلات موج کی ہیئت کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے۔ حسر ناگزر طریق میں $\lambda \cong \omega_1$ لہٰذا

$$\big|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\big|^2 \cong \Big[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]^2 \to 0 \tag{۱۰.۳۵}$$

ہو گا، جیسا ہم پہلے سے ذکر کر چکے۔ مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ $\boldsymbol{B}$ کے ہم رخ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس $\omega_1 \ll \omega$ کی صورت میں $\lambda \cong \omega$ ہو گا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ ٹپکیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کریں کہ مساوات ۱۰.۲۵ کی ہیملٹنی کیلئے مساوات ۱۰.۳۱ تابع وقت مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتی ہے۔ ساتھ ہی مساوات ۱۰.۳۳ کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ، معمول زنی شرط کے عین مطابق، عددی سروں کے مربعوں کا مجموعہ 1 ہو گا۔

[۸] یہ بنیادی طور پر سوال ۹.۲۰ ہی ہے، البتہ یہاں الیکٹران $\boldsymbol{B}$ کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے، جبکہ سوال ۹.۲۰-د میں یہ z محور کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۴: غیر حرناگزر طریق ($\omega \gg \omega_1$) میں تحویلی احتمال (مساوات ۱۰.۳۴)۔

۱۰.۲ ہیئت بیری

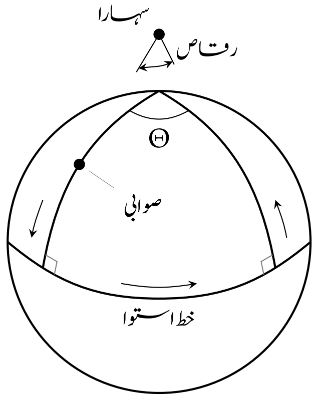
۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل

آئیں حصہ ۱۰.۱.۱ کے کلاسیکی نمونہ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جس میں ایک ایسے کامل بے رگڑ رقاص، جس کے سہارا کو ایک مقام سے دوسرے اور دوسرے سے تیسرے مقام منتقل کیا جاتا ہو، استعمال کرتے ہوئے حرناگزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا۔ میں نے دعویٰ کیا تھا کہ جب تک سہارا کی حرکت رقاص کے دوری عرصے سے بہت آہستہ ہو (تاکہ سہارا کی نمایاں حرکت کے دوران رقاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہو)، یہ اسی مستوی (یا اس کے متوازی مستوی) میں اسی حیطے (اور اسی تعدد) کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

اگر میں اس کامل رقاص کو شمالی قطب پر لے جا کر، مثلاً صوابی شہر کے رخ، جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) تو کیا ہو گا؟ فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے۔ میں اس کو بہت آہستہ (یعنی حرناگزر طریقے سے) صوابی سے گزرتے خط طول بلد پر چلتے ہوئے، خط استوا تک پہنچتا ہوں۔ یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے رہا ہو گا۔ میں اس کو خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں (رقاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے)۔ آخر میں نئے خط طول بلند پر چلتے ہوئے، میں رقاص کو واپس شمالی قطب منتقل کرتا ہوں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقاص اب اسی مستوی میں نہیں جھولے گا جس سے اس نے آغاز کیا تھا؛ یقیناً، نئے اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ Θ پایا جاتا ہے، جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے خط طول بلند کے بیچ زاویہ Θ ہے۔

جس راہ پر میں رقاص کو اٹھا کر چلتا رہا، وہ راہ (زمین کے مرکز پر) **ٹھوس زاویہ**[۹]، Ω، بناتی ہے اور Θ اسی (Ω) کے

[۹]solid angle



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر رقاص کی حرناگزر منتقلی۔

برابر ہے۔ یہ راہ شمالی نصف کرہ کا $\Theta/2\pi$ حصہ گھیرتی ہے، لہٰذا اس کا رقبہ

$$A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$$

ہوگا (جہاں R زمین کا رداس ہے)؛ یوں

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \tag{۱۰.۳۶}$$

ہوگا جو اس نتیجے کو نہایت عمدہ انداز میں پیش کرتا ہے، چونکہ یہ راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں (شکل ۱۰.۶)۔[۱۰]

کرہ کی سطح پر بند راہ پر چلتے ہوئے حرناگزر منتقلی کی ایک مثال **فوقو رقاص**[۱۱] ہے، جہاں رقاص کو اٹھا کر چلنے کا کام مجھے نہیں بلکہ زمین کے گھومنے کو سونپا جاتا ہے۔ خط عرض بلد θ_0 درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$\Omega = \int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta_0} = 2\pi(1-\cos\theta_0) \tag{۱۰.۳۷}$$

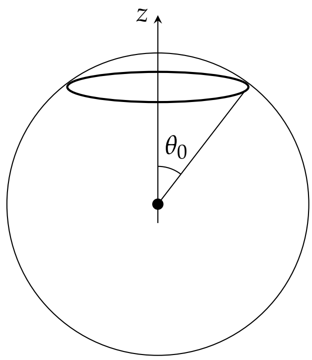
زمین کے لحاظ سے (جو اس دوران 2π زاویہ گھوم چکی ہوگی) فوقو رقاص کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi\cos\theta_0$ ہوگی؛ اس نتیجہ کو، عموماً، گھومتی حوالہ چوکھٹ پر **کوریولس**[۱۲] قوتوں کے اثر سے حاصل کیا جاتا ہے، لیکن یہاں یہ خالصتاً ہندسی مفہوم کا حامل ہے۔

---

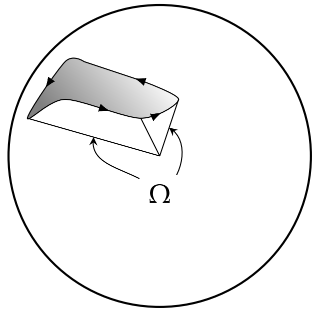
[۱۰] آپ چاہیں تو اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔ اس راہ کو زمین کے گرد دائری لکیروں کے چھوٹے چھوٹے حصوں کا مجموعہ تصور کریں۔ رقاص ہر ایسی لکیر کے ساتھ مستقل زاویہ بنائے گا لہٰذا خالص زاویائی انحراف کا تعلق کروی کثیر الاضلاع کے راس زاویوں کے مجموعہ کے ساتھ ہو گا۔

[۱۱] Foucault pendulum

[۱۲] Coriolis



شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقو رقاص کی راہ۔



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ Ω بناتی ہے۔

ایسا نظام جو بند راہ پر چلتے ہوئے واپس ابتدائی نقطہ پہنچ کر اپنے ابتدائی حال کو نہیں لوٹتا **گر گٹی**[13] کہلاتا ہے۔ (یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد "حرکت دینا" ہو؛ اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھیں۔) گر گٹی نظام جگہ جگہ پائے جاتے ہیں؛ ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن گر گٹی ہے: ہر ایک پھیرے کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہو گی، یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہو گا، وغیرہ۔ اس تصور کا اطلاق، چھوٹے **رینالڈ عدد**[14] پر سیال میں، جرثوموں کی حرکت پر بھی کیا گیا ہے۔ اگلے حصہ میں میں گر گٹی حرناگزر عمل کی کوانٹائی میکانیات پر غور کروں گا۔ ہم نے دیکھنا ہو گا کہ ہیملٹنی کی مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرناگزر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہو گا۔

۱۰.۲.۲ ہندسی ہیّت

میں نے حصہ ۱۰.۱.۲ میں دکھایا کہ ایک ذرہ جو $H(0)$ کے n ویں امتیازی حال سے آغاز کرتا ہے، حرناگزر صورت میں، تابع وقت ہیّتی جزو ضربی کے علاوہ، $H(t)$ کے n ویں امتیازی حال میں رہتا ہے۔ بالخصوص، اس کا تفاعل موج (مساوات ۱۰.۲۳):

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t)+\gamma_n(t)]}\psi_n(t) \tag{۱۰.۳۸}$$

ہو گا، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۳۹}$$

---

[13] nonholonomic
[14] Reynolds number

حرکی ہیئت[15] ہے (جو وقت کے تفاعل E_n کی صورت میں، جزو ضربی $e^{(-iE_n t/\hbar)}$ کو عمومیت دیتی ہے)، اور درج ذیل ہندسی ہیئت[16] کہلاتی ہے۔

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \middle| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right\rangle \mathrm{d}t' \tag{۱۰.۴۰}$$

چونکہ ہیملٹنی میں کوئی ایسی مقدار معلوم $R(t)$ پائی جاتی ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے، لہٰذا $\psi_n(t)$ وقت t کا تابع ہو گا۔ (سوال ۱۰.۱ میں $R(t)$، پھیلتے ہوئے چوکور کنویں کی، چوڑائی ہو گی۔) یوں

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۱}$$

لہٰذا

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n \middle| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right\rangle \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \middle| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right\rangle \mathrm{d}R \tag{۱۰.۴۲}$$

ہو گا، جہاں R_i اور R_f مقدار معلوم R_t کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی۔ بالخصوص، اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہٰذا $0 = \gamma_n(T)$ ہو گا، جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں!

میں نے مساوات ۱۰.۴۱ میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو۔ اب فرض کریں N عدد مقدار معلوم $R_1(t)$، $R_2(t)$، . . .، $R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں؛ تب درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{\mathrm{d}R_N}{\mathrm{d}t} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۳}$$

جہاں $\boldsymbol{R} \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ ہے اور ∇_R ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے۔ اس مرتبہ درج ذیل ہو گا

$$\gamma_n(t) = i \int_{\boldsymbol{R}_i}^{\boldsymbol{R}_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۴}$$

اور اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا اصل روپ اختیار کرتا ہو تب خالص ہندسی ہیئتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۵}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں بند راہ پر لکیری تکمل ہے، جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مساوات ۱۰.۴۵ کو پہلی مرتبہ 1984 میں[17] میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ **ہیئت بیری**[18] کہلاتی ہے۔ دھیان رہے کہ

---

[15] dynamic phase

[16] geometric phase

[17] حیرت کی بات ہے کہ 60 سال تک یہ حقیقت کسی کو نظر نہیں آئی۔

[18] Berry's phase

(جب تک حرکت اتنی آہستہ ہو کہ حرناگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں) $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہو گی جس پر چلا جائے نہ کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر۔ اس کے برعکس، مجموعی حر کی ہیئت

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(t')\,\mathrm{d}t'$$

گزرے ہوئے وقت کے تابع ہو گی۔

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کی ہیئت اختیاری ہے؛ طبعی مقداروں میں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے، لہٰذا ابتدائی جزو ضربی کٹ جاتا ہے۔ اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندسی ہیئت کی کوئی طبعی اہمیت نہیں؛ آخر $\psi_n(t)$ کی ہیئت بھی تو اختیاری ہے۔ یہ بیری کی دور اندیشی تھی کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو بند دائرے پر پھیرا دے کر واپس اپنے اصل روپ میں لانے سے ابتدا اور اختتام کے بیچ زائد ہیئت غیر اختیاری ہو گی، جس کی پیمائش بھی کی جا سکتی ہے۔

مثال کے طور پر، ذرات (تمام حال Ψ میں) کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے، صرف ایک حصے کو حرناگزر تبدیل ہوتے مخفیہ سے گزارا جاتا ہے۔ دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے درج ذیل روپ کا مجموعی تفاعل موج حاصل ہو گا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \tag{۱۰.۴۶}$$

جہاں Ψ_0 "سیدھی پہنچتی" شعاع کا تفاعل موج اور Γ تغیر پذیر H کی بنا پر شعاع کی زائد ہیئت ہے (جس کا کچھ حصہ حر کی اور کچھ ہندسی ہو گا)۔ اس صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|\Psi|^2 &= \frac{1}{4}|\Psi_0|^2\left(1+e^{i\Gamma}\right)\left(1+e^{-i\Gamma}\right)\\ &= \frac{1}{2}|\Psi_0|^2\left(1+\cos\Gamma\right) = |\Psi_0|^2\cos^2(\Gamma/2)\end{aligned} \tag{۱۰.۴۷}$$

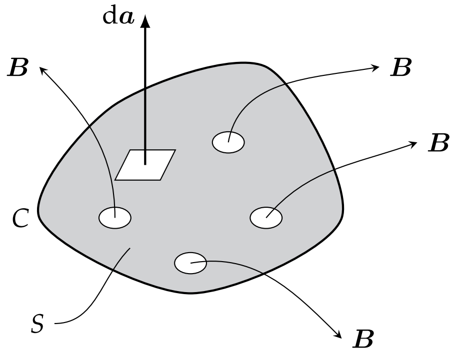
یوں تعمیری اور تباہ کن مداخلت کے نقاط (جہاں Γ کی قیمت π کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہو گی) سے Γ کی پیمائش کی جا سکتی ہے (بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی حر کی ہیئت کی موجودگی میں ہندسی ہیئت نظر نہیں آئے گی، لیکن انہیں علیحدہ علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے)۔

تین ابعادی مقدار معلوم فضا، $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)$، میں کلیہ بیری (مساوات ۱۰.۴۵) سمتی مخفیہ $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں **مقناطیسی بہاو**[۱۹] کے کلیہ کا یاد دلاتا ہے۔ سطح S جس کی سرحد منحنی C ہو سے درج ذیل بہاو گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۴۸}$$

---

[۱۹] magnetic flux



شکل ۱۰.۸: بند منحنی C کے بیچ سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہاو۔

مقناطیسی میدان کو سمتی مخفیہ کے روپ $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ میں لکھ کر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۱۰.۴۹}$$

یوں ہیئت بیری کو مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے "مقناطیسی میدان" کا "بہاو"

$$\text{“}\boldsymbol{B}\text{”} = i\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \tag{۱۰.۵۰}$$

تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کو دوسری طرف سے بھی بیان کیا جا سکتا ہے: تین ابعادی صورت میں ہیئت بیری کو سطحی تکمل:

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۵۱}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جا سکتا ہے، تاہم ہماری مقاصد کے نقطہ نظر سے مساوات ۱۰.۵۱ محض $\gamma_n(T)$ لکھنے کا دوسرا انداز ہے۔

سوال ۱۰.۳:

ا. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی w_1 سے بڑھ کر w_2 ہوتی ہے؛ مساوات ۱۰.۴۲ سے کنویں کی ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں۔ نتیجے پر تبصرہ کریں۔

ب. اگر وسعت مستقل شرح $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}t = v)$ سے ہو، تب حرکی تبدیلی ہیئت کیا ہو گی؟

ج. چوڑائی کم ہو کر واپس w_1 ہو جاتی ہے؛ اس پورے پھیرے کی ہیئت بیری کیا ہو گی؟

سوال ۱۰.۴: ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) واحد ایک مقید حال (مساوات ۲.۱۲۹) کا حامل ہے۔ α آہستہ آہستہ α_1 سے بڑھ کر α_2 ہوتا ہے؛ ہندسی تبدیلی ہیّت کا حساب لگائیں۔ اگر تبدیلی مستقل شرح $(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = c)$ سے رونما ہو تب حرکی تبدیلی ہیّت کیا ہو گی؟

سوال ۱۰.۵: دکھائیں کہ حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہندسی ہیّت صفر ہو گی۔ (سوال ۱۰.۳ اور سوال ۱۰.۴ اس کی مثالیں ہیں۔) امتیازی تفاعلات موج کے ساتھ غیر ضروری (لیکن قانونی طور پر بالکل جائز) جزو ضربی ہیّت منسلک کریں: $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n}\psi_n(t)$، جہاں $\Phi_n(\boldsymbol{R})$ اختیاری (حقیقی) تفاعل ہے۔ یقیناً، آپ غیر صفر ہندسی ہیّت حاصل کریں گے، تاہم دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات ۱۰.۲۳ میں پُر کرنے سے کیا ہو گا۔ اور بند راہ پر اس سے صفر حاصل ہوتا ہے۔ سبق: غیر صفر ہیّت بیری کی خاطر (الف) آپ کو ہیملٹنی میں ایک سے زائد تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہو گی، اور (ب) ایسی ہیملٹنی درکار ہو گی جو غیر مہمل مخلوط امتیازی تفاعلات دیتی ہو۔

مثال ۱۰.۲: ہیّت بیری کی کلاسیکی مثال مستقل مقدار کے مقناطیسی میدان، جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو، میں مبدا پر الیکٹران ہے۔ پہلے اس مخصوص صورت (جس کا تجزیہ مثال ۱۰.۱ میں کیا گیا) پر غور کرتے ہیں جس میں محور z کے ساتھ مقررہ زاویہ α پر رہتے ہوئے، مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے، $\boldsymbol{B}(t)$ استقبالی حرکت کرتا ہے۔ (میدان B کی ہم راہ "ہم میدان" الیکٹران کے لئے) مساوات ۱۰.۳۳ ٹھیک حل دیتی ہے۔ حرناگزر طریق، $\omega \ll \omega_1$، میں

$$\lambda = \omega_1\sqrt{1-2\frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha+\Big(\frac{w}{w_1}\Big)^2} \cong \omega_1\Big(1-\frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha\Big) = \omega_1-\omega\cos\alpha \tag{۱۰.۵۲}$$

ہو گا، لہٰذا مساوات ۱۰.۳۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\chi(t) &\cong e^{-i\omega_1 t/2}e^{i(\omega\cos\alpha)t/2}e^{-i\omega t/2}\chi_+(t)\\ &\quad + i\Big[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\omega_1 t}{2}\Big)\Big]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t)\end{aligned} \tag{۱۰.۵۳}$$

دوسرے جزو کو $\omega/\omega_1 \to 0$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے حرناگزر روپ کے مطابق نتیجہ حاصل ہو گا (مساوات ۱۰.۲۳)۔ حرکی ہیّت درج ذیل ہے

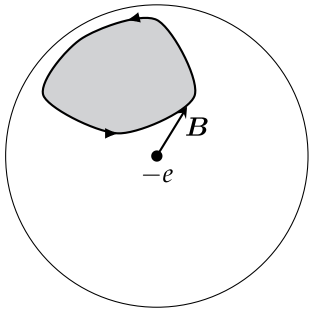
$$\theta_+(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_+(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{\omega_1 t}{2} \tag{۱۰.۵۴}$$

(جہاں مساوات ۱۰.۲۹ سے $E_+ = \hbar\omega_1/2$ ہو گا)، لہٰذا ہندسی ہیّت درج ذیل ہو گی۔

$$\gamma_+(t) = (\cos\alpha-1)\frac{\omega t}{2} \tag{۱۰.۵۵}$$

ایک مکمل پھیرے کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہو گا، لہٰذا ہیّت بیری درج ذیل ہو گی۔

$$\gamma_+(T) = \pi(\cos\alpha-1) \tag{۱۰.۵۶}$$



شکل ۹.۱۰: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ جھاڑتا ہے۔

اب زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں، جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس $B_0 = r$ کرہ کی سطح پر اختیاری بند راہ جھاڑتی ہے (شکل ۹.۱۰)۔ میدان $\boldsymbol{B}(t)$ کی ہم راہ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا (سوال ۴.۳۰ دیکھیں)

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۵۷}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ کے کروی محدد θ اور π اب وقت کے تفاعلات ہیں۔ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا، جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\chi_+ &= \frac{\partial\chi_+}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_+}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi_+}{\partial\phi}\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -(1/2)\sin(\theta/2) \\ (1/2)e^{i\phi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}\boldsymbol{a}_\phi \end{aligned} \tag{۱۰.۵۸}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle &= \frac{1}{2r}\Big[-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}_\theta + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}_\theta + 2i\,\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta}\boldsymbol{a}_\phi\Big] \\ &= i\,\frac{\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}\boldsymbol{a}_\phi \end{aligned} \tag{۱۰.۵۹}$$

مساوات ۱۰.۵۱ کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی۔

$$\nabla\times\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\sin\theta\Big(\frac{i\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}\Big)\Big]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{i}{2r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{۱۰.۶۰}$$

یوں مساوات ۱۰.۵۱ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۶۱}$$

تکمل کرہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو $\boldsymbol{B}$ کی نوک ایک پھیرے میں جھاڑتی ہے، لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = r^2\,\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اور

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{2}\Omega \tag{۱۰.۶۲}$$

ہو گا، جہاں مبدا پر ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے، جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلے کا یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا (یعنی زمین کی سطح پر بند راہ پر بلا رگڑ رقاص کی منتقلی)۔ اس نتیجے کے تحت، کسی اختیاری بند راہ پر، مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرنا گزر پھیرا دینے سے، خالص (ہندسی) تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کے جھاڑنے کے ٹھوس زاویہ کی منفی آدھی ہو گی۔ مساوات ۱۰.۳۷ کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مخصوص نتیجہ (مساوات ۱۰.۵۶) کے مطابق ہے، جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے تھا۔ □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر 1 ہو کے لئے مساوات ۱۰.۶۲ کا مماثل حاصل کریں۔ جواب: $-\Omega$ (ایک ذرہ جس کا چکر s ہو کے لیے نتیجہ $-s\Omega$ ہو گا۔)

۱۰.۲.۳ اہارونوو بوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ φ اور $\boldsymbol{A}$ بلاواسطہ ناقابل پیمائش ہیں

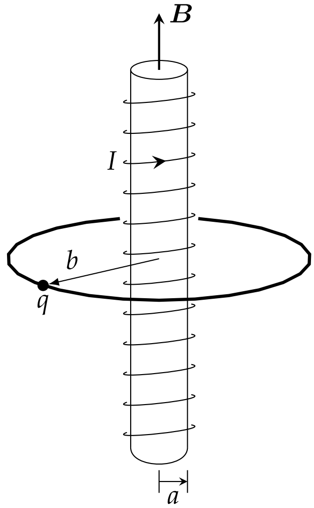
$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{۱۰.۶۳}$$

میکسول مساوات اور قاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیہ کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ مرتب کرنے کے لیے کار آمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیہ کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$\varphi\to\varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t},\quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}+\nabla\Lambda \tag{۱۰.۶۴}$$

جہاں Λ مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں ہو گا کوانٹائی میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو φ اور $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں نہ کہ $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\Big)^2 + q\varphi \tag{۱۰.۶۵}$$



شکل ۱۰.۱۰: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمبا پیچواں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

بہر حال زیر ماپ تبادلہ یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں E اور B صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سمتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرہ کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہو گا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو وبوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیئت بیری کے ساتھ پیش کروں گا۔

فرض کریں ایک ذرہ کو رداس b کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $a < b$ کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو I ہے (شکل ۱۰.۱۰) بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہو گا جبکہ بیرونی میدان صفر ہو گا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہو گا یقیناً موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\boldsymbol{a}_{\phi}, \quad (r > a) \tag{۱۰.۶۶}$$

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہاو ہو گا ساتھ ہی لچھا خود غیر باردار ہے لہٰذا غیر سمتی مخفیہ φ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$H = \frac{1}{2m}[-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2i\hbar q\boldsymbol{A}\cdot\nabla] \tag{۱۰.۶۷}$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ اسمت $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$ پر منحصر ہے لہٰذا $\nabla \rightarrow$

$(p\hat{h}i/b)(\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\phi)$ ہوگا اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$\frac{1}{2m}\Big[-\frac{\hbar^2}{b^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}+\Big(\frac{q\Phi}{2\pi b}\Big)^2+i\frac{hq\Phi}{\pi b^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\Big]\psi(\phi)=E\psi(\phi) \tag{۱۰.۶۸}$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\phi^2}-2i\beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi}+\epsilon\psi=0 \tag{۱۰.۶۹}$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta\equiv\frac{q\Phi}{2\pi\hbar},\qquad \epsilon\equiv\frac{2mb^2E}{\hbar^2}-\beta^2 \tag{۱۰.۷۰}$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$\psi=Ae^{i\lambda\phi} \tag{۱۰.۷۱}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\lambda=\beta\pm\sqrt{\beta^2+\epsilon}=\beta\pm\frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} \tag{۱۰.۷۲}$$

نقطہ $\phi=2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا پر λ عدد صحیح

$$\beta\pm\frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE}=n \tag{۱۰.۷۳}$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2mb^2}\Big(n-\frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\Big)^2,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{۱۰.۷۴}$$

لچھا دائرے پر ذرہ کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت n جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کو ظاہر کرتا ہے q مثبت لیتے ہوئے منفی n کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرہ کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ اجازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرہ پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک ذرہ ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ ہے لہٰذا $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ ہوگا تاہم $\boldsymbol{A}$ خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ $\boldsymbol{A}$ ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیہ کے لئے عمومیت دی جا سکتی ہے مخفی توانائی V جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی مساوات شروڈنگر

$$\Big[\frac{1}{2m}\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A}\Big)^2+V\Big]\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{۱۰.۷۵}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جا سکتی ہے

$$\Psi = e^{ig}\Psi' \tag{۱۰.۷۶}$$

جہاں $g(\boldsymbol{r})$ درج ذیل ہے

$$g(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\mathcal{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{۱۰.۷۷}$$

اور $\mathcal{O}$ کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہو گی جب پورا خطہ میں $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل $\mathcal{O}$ سے $\boldsymbol{r}$ تک راہ پر منحصر ہو گا اور یوں $\boldsymbol{r}$ کا تفاعل نہیں ہو گا Ψ' کی صورت میں Ψ کا ڈھلوان درج ذیل ہو گا

$$\nabla\Psi = e^{ig}(i\nabla g)\Psi' + e^{\nabla\Psi'}$$

لیکن $\nabla g = (q/\hbar)\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\Big)\Psi = \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' \tag{۱۰.۷۸}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\Big)^2\Psi = -\hbar^2 e^{ig}\nabla^2\Psi' \tag{۱۰.۷۹}$$

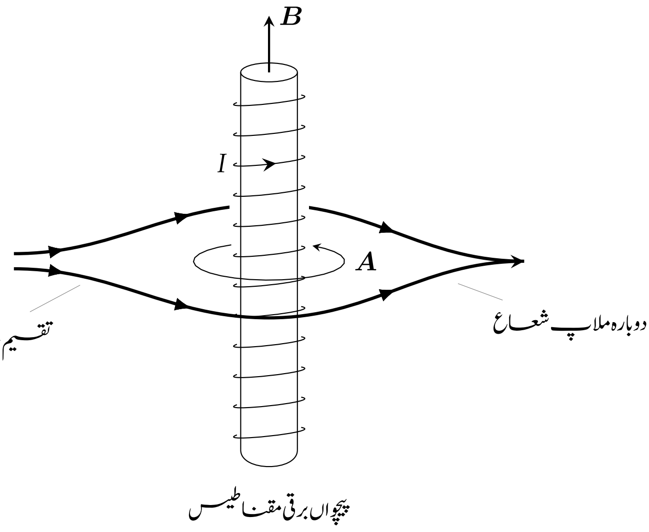
اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی e^{ig} کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \tag{۱۰.۸۰}$$

بظاہر Ψ' بغیر $\boldsymbol{A}$ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا حقیر سا کام ہو گا: ہمیں صرف ہیّتی جزو ضربی e^{ig} ساتھ منسلک کرنا ہو گا۔

عہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱) ان شعاعوں کو لچھے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = 0$ ہو تاہم $\boldsymbol{A}$ جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہو گا اور دونوں اطراف V کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہیّتی فرق پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar}\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\int\Big(\frac{1}{r}\boldsymbol{a}_\phi\Big)\cdot(r\boldsymbol{a}_\phi\,\mathrm{d}\phi) = \pm\frac{q\Phi}{2\hbar} \tag{۱۰.۸۱}$$



شکل ۱۰.۱۱: اہارانو و بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پیچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہو گی جو لمبے لچھے میں A کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہیّتی فرق اس مقناطیسی بہاو کے راست متناسب ہو گا جس سے ان کی راہ گھیرتے ہیں

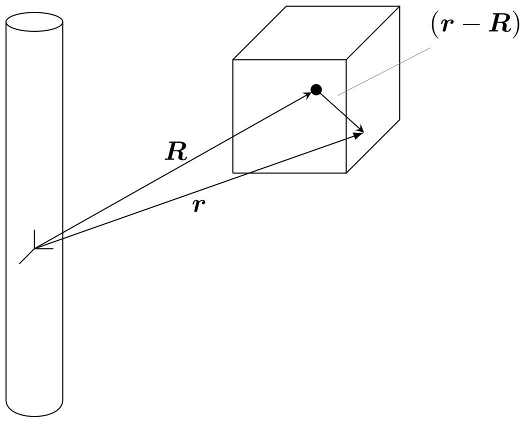
$$\text{ہیّتی فرق} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۸۲}$$

اس ہیّتی یتتقل سے قابل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کر چکے ہیں اہارانو و بوہم اثر کو ہندسی ہیّت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے فرض کریں مخفیہ $V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$ ایک بار دار ذرہ کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لچھے سے باہر نقطہ $\boldsymbol{R}$ پر ہے؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پھیرا دیں گے لہٰذا $\boldsymbol{R}$ وقت کا تفاعل ہو گا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]^2 + V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})\right\}\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۸۳}$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا جانتے ہیں ہم

$$\psi_n = e^{ig}\psi'_n \tag{۱۰.۸۴}$$



شکل ۱۰.۱۲: مخفیہ $V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$ ایک ذرہ کو ڈبہ میں مقید کیے ہوئے ہے۔

لیتے ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$g \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{r}') \tag{۱۰.۸۵}$$

اور ψ' اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب $\boldsymbol{A}\to 0$ ہو

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big]\psi' = E_n\psi_n' \tag{۱۰.۸۶}$$

آپ نے دیکھا کہ ψ_n' ہٹاؤ $\boldsymbol{R}$ − $\boldsymbol{r}$ کا تفاعل ہے نہ کہ ψ_n کی طرح علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{R}$ کا تفاعل آیئے اب اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پھیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حرناگزر ہونے کی بھی ضرورت نہیں ہے ہیئت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle\psi_n|\nabla\psi_n\rangle$ کی قیمت درکار ہو گی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R\psi_n = \nabla_R[e^{ig}\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})] = -\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})e^{ig}\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) + e^{ig}\nabla_R\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|\nabla\psi_n\rangle &\\ = \int e^{-ig}[\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^* e^{ig}\Big[-i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) &+ \nabla_R\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big]\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\ &= -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) - \int[\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^*\nabla\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{۱۰.۸۷}$$

بغیر زیر نوشت ∇ $\boldsymbol{r}$ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$ کے تفاعل پر عمل کے دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری تکمل ہیملٹنی $-(\hbar^2/2m)\nabla^2+V$ کے امتیازی حال میں معیار

حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب $i/\hbar$ ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \tag{۱۰.۸۸}$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{q}{\hbar}\int (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۸۹}$$

جو اہارونو و بوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو و بوہم اثر ہنسی ہیئت کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو و بوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جا سکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے $\boldsymbol{A}$ خود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا بہاو پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گیج غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں وقفہ $0 \leq x \leq a$ کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t)\delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں $f(t)$ آہستہ آہستہ صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے مسئلہ حرناگزر کے تحت یہ ذرہ ارتقائی ہیملٹن کے زمینی حال میں ہی رہے گا

ا. وقت $t \to \infty$ پر زمینی حال کا خاکہ بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہو گا جس میں $a/2+\epsilon$ پر ناقابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرہ بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصہ میں رہنے کا پابند ہو گا

ب. وقت t پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

جہاں $z \equiv ka$ ، $T \equiv maf(t)/\hbar^2$ ، $\delta \equiv 2\epsilon/a$ اور $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہیں

ج. اب $\delta = 0$ لیتے ہوئے z کے لیے ترسیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ T کی قیمت 0 تا ∞ ہونے سے z کی قیمت π تا 2π ہو گی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب $\delta = 0.01$ لیتے ہوئے $T = 0, 1, 5, 20, 100$ اور 1000 کے لیے z اعدادی طریقہ سے حاصل کریں

ھ. کنویں کے دائیں نصف حصہ میں ذرہ پائے جانے کا احتمال بطور z اور δ کا تفاعل تلاش کریں جواب $P_r = 1/[1+(I_+/I_-)]$ جہاں $I_\pm \equiv [1 \pm \delta - (1/z)\sin(z(1\pm\delta))]\sin^2[z(1\mp\delta)/2]$ ہوگا جزو (د) میں دیے گئے T کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و. T اور δ کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترسیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بُعدی ہارمونی مرتعش کمیت m تعدد ω پر $F(t) = m\omega^2 f(t)$ جہاں $f(t)$ کوئی مخصوص التفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے $m\omega^2$ کو صریحاً لکھا ہے یوں $f(t)$ کا بُعد فاصلہ ہوگا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - m\omega^2 x f(t) \tag{۱۰.۹۰}$$

فرض کریں وقت $t = 0$ پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہٰذا $0 \leq t$ پر $f(t) = 0$ ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹائی میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے

ا. اگر مرتعش مبدا پر ساکن حال $0 = (x_c(0) = \dot{x}_c(0))$ سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہوگا جواب

$$x_c(t) = \omega\int_0^t f(t')\sin[\omega(t-t')]\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۱}$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش n وی حال $(\psi_n(x) = \Psi(x,0))$ جہاں $\psi_n(x)$ مساوات 61.2 دیتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت مساوات شروڈنگر کے حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Psi(x,t) = \psi_n(x-x_c)e^{\frac{i}{\hbar}\left[-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega t + m\dot{x}_c(x-\frac{x_c}{2}) + \frac{m\omega^2}{2}\int_0^t f(t')x_c(t')x_c(t')\,\mathrm{d}t'\right]} \tag{۱۰.۹۲}$$

ج. دکھائے کہ $H(t)$ کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x-f);\quad E_n(t) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2 f^2 \tag{۱۰.۹۳}$$

د. دکھائیں کہ حرناگزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے $x_c(t) \cong f(t)$ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرناگزر تفاعل f کہ وقتی تفرق پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ $\sin[\omega(t-t')]$ کو $(1/\omega)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t')\cos[\omega(t-t')]$ لکھ کر تکمل بالحصص استعمال کریں

ھ. اس مثال کے لیے مسئلہ حر ناگزر کی تصدیق جزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$\Psi(x,t) \cong \psi_n(x,t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \tag{۱۰.۹۴}$$

تصدیق کریں کہ حر کی ہیّت کا روپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندسی ہیّت آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حر ناگزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر $c_m(t)$ کے حر ناگزر تسلسل کا پہلا جزو تصور کیا جا سکتا ہے فرض کریں نظام n وی حال سے آغاز کرتا ہے حر ناگزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندسی ہیّتی جزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ n وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حر ناگزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} \, \mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۵}$$

اس سے ہم قریب حر ناگزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری مرتعش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کے قریب حر ناگزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہو گا میں تحویل ممکن ہو گی

$$c_{n+1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{i\omega t'} \, \mathrm{d}t'$$
$$c_{n-1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{-i\omega t'} \, \mathrm{d}t'$$

یقیناً حویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

جوابات

فرہنگ