# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

# ضمیمہ ا

# ضمیمہ

## خطی الجبرا

کالج کی سطح پر پڑھائے جانے والے سادہ سمتیات کے حساب کو خطی الجبرا تصوراتی جامع پہناتا اور عمومیت دیتا ہے۔ عمومیت دو رخوں میں دی جاتی ہے: (1) ہم غیر سمتیات کو مخلوط اعداد ہونے کی اجازت دیتے ہیں، اور (2) ہم اپنے آپ کو تین ابعاد میں رہنے کا پابند نہیں رکھتے۔

### ا.ا سمتیات

**سمتیات** $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، . . . کے سلسلہ اور **غیر سمتیات** ($a$ ، $b$ ، $c$ ، . . .)[1] کے سلسلہ پر **سمتی فضا**[2] مشتمل ہو گا جو سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کے زیر عمل **بند**[3] ہو گا۔[4]

- **سمتی جمع**

کسی بھی دو سمتیات کا **مجموعہ** بھی سمتیہ ہو گا۔

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \tag{ا}$$

[1] ہمارے مقصد کے لئے غیر سمتیات سادہ مخلوط اعداد ہوں گے۔ ریاضی دان آپ کو زیادہ پر اسرار میدانوں پر سمتی فضاؤں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، تاہم ان کا کوانٹائی میکانیات میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ یاد رہے کہ $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ ، . . . (عموماً) اعداد نہیں ہوں گے؛ یہ نام ہوں گے، مثلاً "جمشید"، یا "F43A-9GL"، یا، زیر غور سمتیہ کو جو بھی آپ پکارنا چاہیں۔

[2] vector space

[3] closed

[4] یعنی یہ اعمال پوری طرح معین ہیں، اور کبھی بھی آپ کو سمتی فضا سے باہر منتقل نہیں کریں گے۔

سمتی مجموعہ **استبدالی**[5]:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle \tag{۲}$$

اور **تلازمی**[6]:

$$|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle \tag{۳}$$

ہے۔ ایک **معدوم**[7] (یا **صفر**[8]) سمتیہ $|0\rangle$ پایا جاتا ہے[9] جو ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لئے درج ذیل خاصیت رکھتا ہے

$$|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle \tag{۴}$$

اور ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کا شریک **مخالف سمتیہ**[10] ($|-\alpha\rangle$)[11] پایا جاتا ہے جو درج ذیل دیتا ہے۔

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۵}$$

- **غیر سمتی ضرب**

کسی بھی غیر سمتیہ اور سمتیہ کا حاصل ضرب:

$$a|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \tag{۶}$$

ایک سمتیہ ہو گا۔ غیر سمتی ضرب سمتی مجموعہ کے لحاظ سے **جزئیتی تقسیمی**[12]

$$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle \tag{۷}$$

اور غیر سمتی جمع کے لحاظ سے بھی جزئیتی تقسیمی ہے۔

$$(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle \tag{۸}$$

یہ غیر سمتیات کے سادہ ضرب کے لحاظ سے **تلازمی** بھی ہے۔

$$a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle \tag{۹}$$

---

[5] commutative
[6] associative
[7] null
[8] zero
[9] جہاں غلط فہمی کا امکان نہ ہو، وہاں روایتی طور پر معدوم سمتیہ کو سادہ صفر لکھا جاتا ہے: $|0\rangle \to 0$
[10] inverse vector
[11] یہ ایک انوکھی علامت ہے چونکہ $\alpha$ عدد نہیں۔ میں ایک سمتیہ جس کا نام "جمشید" ہے کے مخالف سمتیہ کو "جمشید-" کا نام دے رہا ہوں۔ کچھ ہی دیر میں ہم بہتر اصطلاح دیکھ پائیں گے۔
[12] distributive

غیر سمتیات 0 اور 1 کے ساتھ ضرب آپ کی توقع کے مطابق نتائج دیں گے۔

$$1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle; \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle \qquad (۱۰)$$

ظاہر ہے $|-\alpha\rangle = (-1)|\alpha\rangle$ ہو گا جس کو ہم $-|\alpha\rangle$ لکھتے ہیں۔

یہاں جتنا نظر آ رہا ہے، حقیقتاً اتنا ہے نہیں؛ پس میں نے سمتیات کی جوڑ توڑ کے عام فہم قواعد کو تصوراتی روپ میں پیش کیا ہے۔ نتیجتاً دیگر نظام جو یہی باضابطہ خواص رکھتے ہوں پر ہم سادہ سمتیات کے رویّہ کے بارے میں معلوم علم اور وجدان بروئے کار لا سکیں گے۔

سمتیات $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$، $|\gamma\rangle$، $\cdots$ کا **خطی مجموعہ**[13] درج ذیل روپ کا فقرہ ہو گا۔

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + \cdots \qquad (۱۱)$$

ایک سمتیہ $|\lambda\rangle$ جس کو سلسلہ $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$، $|\gamma\rangle$، $\cdots$ کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن نہ ہو **خطی غیر تابع**[14] کہلاتا ہے۔ (مثلاً، تین ابعاد میں اکائی سمتیہ $\hat{k}$ سمتیات $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کا خطی غیر تابع ہے، جبکہ $xy$ مستوی میں ہر سمتیہ $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ کا خطی تابع ہو گا۔) اسی کی توسّط سے، سمتیات کا وہ ذخیرہ جس میں ہر ایک سمتیہ باقی تمام سمتیات کا خطی غیر تابع ہو "خطی غیر تابع" کہلاتا ہے۔ جب ہر سمتیہ کو سمتیات کے ایک ذخیرہ کے ارکان کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو، ہم کہتے ہیں کہ سمتیات کا یہ ذخیرہ فضا کا **احاطہ**[15] کرتے[16] ہیں۔ فضا کا احاطہ کرنے والے خطی غیر تابع سمتیات کا سلسلہ **اساس**[17] کہلاتا ہے۔ اساس میں سمتیات کی تعداد فضا کا **بُعد**[18] کہلاتا ہے۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ بُعد $(n)$ متناہی ہے۔

دیے گئے اساس

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle \qquad (۱۲)$$

کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle \qquad (۱۳)$$

کو اس اساس کے **ارکان** کی (مرتب) $n$ اجزائی سلسلہ

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (۱۴)$$

---

[13] linear combination

[14] linearly independent

[15] span

[16] فضا کا احاطہ کرنے والے سمتیات کا سلسلہ **مکمل** (complete) بھی کہلاتا ہے، اگرچہ میں اس اصطلاح کو لامتناہی بُعد کی صورت کے لئے رکھتا ہوں جہاں ارتکاز پر سوالات اٹھائے جا سکتے ہیں۔

[17] basis

[18] dimension

سے یکتا طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ عموماً سمتیات کی بجائے ان اجزاء کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سمتیات جمع کرنے کے لئے ان کے مطابقتی اجزاء آپس میں جمع کئے جاتے ہیں:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \tag{۱۵}$$

غیر سمتیہ سے ضرب کے لئے ہر جزو کو اس غیر سمتیہ سے ضرب کریں:

$$c|\alpha\rangle \leftrightarrow (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) \tag{۱۶}$$

معدوم سمتیہ کو صفروں کی ایک کھڑی ظاہر کرتی ہے:

$$|0\rangle \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0) \tag{۱۷}$$

اور مخالف سمتیہ کے ارکان کی علامتیں الٹ کی جاتی ہیں۔

$$|-\alpha\rangle \leftrightarrow (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \tag{۱۸}$$

ارکان کے ساتھ کام کرنے کی واحد قباحت یہ ہے کہ آپ کو کسی ایک مخصوص اساس کے ساتھ کام کرنا ہو گا، اور یہی حسابی عمل کسی دوسری اساس میں بالکل مختلف نظر آئے گا۔

سوال ا.۱: مخلوط اجزاء والے تین ابعادی سادہ سمتیات $(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})$ پر غور کریں۔

ا کیا وہ ذیلی سلسلہ جس میں تمام سمتیات کے لئے $a_z = 0$ ہو سمتی فضا قائم کرتے ہیں؟ اگر کرتا ہو تب اس کا بُعد کیا ہو گا؛ اگر نہیں کرتا تو کیوں نہیں کرتا؟

ب اس ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے جن کا $z$ جزو $1$ کے برابر ہو؟ اشارہ: کیا ایسے دو سمتیات کا مجموعہ اسی ذیلی سلسلہ میں پایا جائے گا؟ معدوم سمتیہ کے بارے میں سوچیں؟

ج ان سمتیات کے ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جن کے تمام ارکان برابر ہوں؟

سوال ا.۲: ان تمام کثیر رکنیوں، (جن کے عددی سر مخلوط ہوں اور) جن کا $x$ میں درجہ $N$ سے کم ہو کے ذخیرہ پر غور کریں۔

ا کیا یہ سلسلہ سمتی فضا قائم کرتا ہے (جہاں کثیر رکنیاں بطور "سمتیات" ہوں)؟ اگر فضا قائم کرتا ہو تو مناسب اساس تجویز کریں اور اس فضا کا بُعد بتائیں۔ اگر فضا قائم نہ کرتا ہو تو تعریفی خصوصیات میں سے کونسی اس میں نہیں پائی جاتی (جاتیں)؟

ب اگر ہم چاہیں کہ تمام کثیر رکنیاں جفت تفاعلات ہوں تب کیا ہو گا؟

ج اگر ہم چاہیں کہ پہلا عددی سر (جو $x^{N-1}$ کو ضرب کرتا ہے) $1$ ہو تب کیا ہو گا؟

د اگر ہم چاہیں کہ $x = 1$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت $0$ ہو تب کیا ہو گا؟

ھ اگر ہم چاہیں کہ $x = 0$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت $1$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال ۱.۳: ثابت کریں کہ کسی بھی ایک اساس کے لحاظ سے سمتیہ کے ارکان یکتا ہوں گے۔

## ۱.۲ اندرونی ضرب

تین ابعاد میں دو اقسام کے سمتی ضرب پائے جاتے ہیں: نقطی ضرب اور صلیبی ضرب۔ موخر الذکر کی قدرتی توسیع کسی طرح بھی $n$ ابعاد سمتی فضاؤں میں نہیں کی جا سکتی، جبکہ اول الذکر کی کی جا سکتی ہے؛ اور اس سیاق و سباق میں اسے عموماً **اندرونی ضرب**[19] پکارا جاتا ہے۔ دو سمتیات ($\langle\alpha|$ اور $|\beta\rangle$) کا اندرونی ضرب ایک مخلوط عدد ہوگا جسے $\langle\alpha|\beta\rangle$ لکھا جاتا ہے اور جس کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \tag{۱۹}$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad \text{اور} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \leftrightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۲۰}$$

$$\langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle \tag{۲۱}$$

مخلوط اعداد تک عمومیت کے علاوہ یہ مسلمات نقطی ضرب کے جانے پہچانے رویّوں کو ریاضی کی زبان میں پیش کرتے ہیں۔ ایسی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب بھی شامل ہو **اندرونی ضرب فضا**[20] کہلاتی ہے۔

چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ اندرونی ضرب غیر منفی عدد ہے (مساوات ۲۰) لہٰذا اس کا جذر حقیقی ہوگا؛ جو سمتیہ کا **معیار**[21] کہلاتا ہے:

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} \qquad \text{معیار} \tag{۲۲}$$

اور جو "لمبائی" کے تصور کو وسعت دیتا ہے۔ **اکائی سمتیہ**[22] (جس کا معیار 1 ہوگا) **معمول شدہ**[23] کہلاتا ہے۔ دو سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر ہو **قائمہ**[24] کہلاتے ہیں (جو "سیدھا کھڑا" ہونے کے تصور کو عمومیت دیتا ہے)۔ باہمی قائمہ معمول شدہ سمتیات:

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} \tag{۲۳}$$

کے ذخیرہ کو **معیاری عمودی سلسلہ**[25] کہتے ہیں۔ معیاری عمودی اساس ہر صورت منتخب کیا جا سکتا ہے (سوال ۱.۴ دیکھیں) اور ایسا کرنا عموماً بہتر بھی ثابت ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو ان کے اجزاء کے روپ میں نہایت خوبصورتی سے لکھا جا سکتا ہے:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_n^* b_n \tag{۲۴}$$

---

[19] inner product
[20] inner product space
[21] norm
[22] unit vector
[23] normalized
[24] orthogonal
[25] orthonormal set

لہٰذا معیار کا مربع

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 \qquad (۲۵)$$

ہو گا جبکہ اجزاء از خود درج ذیل ہونگے۔

$$a_i = \langle e_i|\alpha\rangle \qquad (۲۶)$$

(یہ نتائج تین ابعادی معیاری عمودی اساس $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ کے مشہور کلیات $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، $|\boldsymbol{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ اور $a_x = \hat{i}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_y = \hat{j}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_z = \hat{k}\cdot\boldsymbol{a}$ کو عمومیت دیتے ہیں۔) یہاں سے آگے ہم صرف معیاری عمودی اساس استعمال کریں گے، ماسوائے جب صریحاً ایسا نہ کرنے کا کہا گیا ہو۔

دو سمتیات کے بیچ زاویہ ایسی ہندسی مقدار ہے جس کو ہم عمومیت دینا چاہیں گے۔ سادہ سمتی تجزیہ میں $\cos\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ہے۔ تاہم اندرونی ضرب عموماً مخلوط عدد ہو گا، لہٰذا (اختیاری اندرونی ضرب فضا میں) مماثل کلیہ (حقیقی) زاویہ $\theta$ نہیں دیگا۔ بہر حال، اس مقدار کی مطلق قیمت ایسا عدد ہو گا جو $1$ سے تجاوز نہیں کرتا۔

$$\left|\langle\alpha|\beta\rangle\right|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \qquad (۲۷)$$

(اس اہم نتیجہ کو **شوارز عدم مساوات**[۲۶] کہتے ہیں؛ جس کا ثبوت سوال ا.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں، آپ چاہیں تو، $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے بیچ زاویہ کی تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle}} \qquad (۲۸)$$

سوال ا.۴: فرض کریں آپ اساس ($|e_1\rangle$، $|e_2\rangle$، $\cdots$، $|e_n\rangle$) سے آغاز کرتے ہیں جو معیاری عمودی نہیں ہے۔ اس اساس سے، **گرام و شمد حکمت عملی**[۲۷] کے ذریعہ (جو ایک منظم ترکیب ہے) معیاری عمودی اساس ($|e'_1\rangle$، $|e'_2\rangle$، $\cdots$، $|e'_n\rangle$) حاصل کی جا سکتی ہے۔ یہ ترکیب کچھ یوں ہے:

ا اساس کے پہلے سمتیہ $|e_1\rangle$ کو (اس کے معیار سے تقسیم کر کے) معمول شدہ بنائیں۔

$$|e'_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

ب پہلے سمتیہ پر دوسرے سمتیہ کا تظلیل دریافت کر کے اس تظلیل کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e'_1|e_2\rangle|e'_1\rangle$$

---

[۲۶] Schwarz inequality
[۲۷] Gram-Schmidt procedure

(سمتیہ $|e_2\rangle$ کا $|e_1'\rangle$ کے رخ غیر سمتیہ تظلیل $\langle e_1'|e_2\rangle$ ہے جس کے دائیں جانب اکائی سمتیہ $|e_1'\rangle$ چسپاں کرنے سے سمتیہ تظلیل حاصل کیا گیا۔) درج بالا سمتیہ $|e_1'\rangle$ کا قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول شدہ کر کے $|e_2'\rangle$ حاصل کریں۔

ج سمتیہ $|e_3\rangle$ کی $|e_1'\rangle$ پر تظلیل اور $|e_2'\rangle$ پر تظلیل کو $|e_3\rangle$ سے منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e_1'|e_3\rangle|e_1'\rangle - \langle e_2'|e_3\rangle|e_2'\rangle$$

یہ $|e_1'\rangle$ اور $|e_2'\rangle$ کو قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول شدہ کر کے $|e_3'\rangle$ حاصل کریں؛ وغیرہ، وغیرہ۔

گرام و شمد حکمت عملی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تین ابعادی فضائی اساس کو معیاری عمودی شدہ کریں۔

$$|e_1\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{(}j) + (i)\hat{k}, |e_2\rangle = (i)\hat{i} + (3)\hat{j} + (1)\hat{k}, |e_3\rangle = (0)\hat{i} + (28)\hat{j} + (0)\hat{k}$$

سوال ۱.۵: شوارز عدم مساوات (مساوات ۲۷) ثابت کریں۔ اشارہ: $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle / \langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$ لیں اور $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ استعمال کریں۔

سوال ۱.۶: سمتیات $|\alpha\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}$ اور $|\beta\rangle = (4-i)\hat{i} + (0)\hat{j} + (2-2i)\hat{k}$ کے بیچ (مساوات ۲۸ کی معنوں میں) زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۷: تکونی عدم مساوات $\|(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ ثابت کریں۔

## ۱.۳ قوالب

فرض کریں آپ (تین بُعدی فضا میں) ہر سمتیہ کو 17 سے ضرب دیں، یا ہر سمتیہ کو $z$ محور کے گرد $39°$ گھمائیں، یا $xy$ مستوی میں ہر سمتیہ کا عکس لیں؛ یہ تمام **خطی تبادلہ**[۲۸] کی مثالیں ہیں۔ خطی مبدل $\hat{T}$ [۲۹] سمتی فضا میں ہر ایک سمتیہ کا کسی دوسرے سمتیہ ($|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle$) میں تبادلہ کرتا ہے جہاں کسی بھی سمتیات $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$ اور کسی بھی غیر سمتیات $a$، $b$ کے لئے اس عمل کا خطی ہونا:

$$\hat{T}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a(\hat{T}|\alpha\rangle) + b(\hat{T}|\beta\rangle) \tag{۲۹}$$

لازمی شرط ہے۔

یہ جانتے ہوئے کہ اساسی سمتیات کے سلسلہ کے ساتھ خطی مبدل کیا کرتا ہے، آپ با آسانی جان سکتے ہیں کہ وہ کسی بھی سمتیہ کے ساتھ کیا کرے گا۔ مثلاً، اگر $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ ، $\cdots$ ، $|e_n\rangle$ اساس قائم کرتے ہوں اور خطی مبدل $\hat{T}$ اساسی سمتیہ $|e_1\rangle$ پر عمل ($\hat{T}|e_1\rangle$) کر کے ایک نیا سمتیہ پیدا کرتا ہے؛ ظاہر ہے، کسی بھی سمتیہ کی طرح، اس نئے سمتیہ کو بھی اس اساس میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle$

[۲۸] linear transformation

[۲۹] اس باب میں خطی تبادلہ کو ٹوپی کی علامت (^) سے ظاہر کیا جائے گا؛ جیسا ہم دیکھیں گے، کوانٹائی عامل بھی خطی مبدل ہیں اور ان کو بھی ٹوپی کی نشان سے ظاہر کیا جائے گا۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں $T_{11}$ ، $T_{21}$ ، $\cdots$ ، $T_{n1}$ عددی سر ہیں۔ اسی طرح باقی اساسی سمتیات کے لئے ایسا کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\hat{T}|e_1\rangle &= T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle \\
\hat{T}|e_2\rangle &= T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle \\
&\vdots \\
\hat{T}|e_n\rangle &= T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle
\end{aligned}$$

جس کو مختصراً درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\hat{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} T_{ij}|e_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{۳۰}$$

اگر $|\alpha\rangle$ ایک اختیاری سمتیہ ہو (جس کو ہم ان اساسی سمتیات میں لکھتے ہیں):

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_3|e_3\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j|e_j\rangle \tag{۳۱}$$

تب

$$\hat{T}|\alpha\rangle = a_1\hat{T}|e_1\rangle + a_2\hat{T}|e_2\rangle + a_3\hat{T}|e_3\rangle + \cdots + a_n\hat{T}|e_n\rangle$$

ہو گا جس میں $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle$ وغیرہ پُر کر کے

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\alpha\rangle = \quad & a_1(T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + T_{31}|e_3\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle) \\
&+a_2(T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + T_{32}|e_3\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle) \\
&+a_3(T_{13}|e_1\rangle + T_{23}|e_2\rangle + T_{33}|e_3\rangle + \cdots + T_{n3}|e_n\rangle) \\
&\quad\vdots \\
&+a_n(T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + T_{3n}|e_3\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle)
\end{aligned}$$

ترتیب نو کرتے ہوئے اکائی سمتیات کے عددی سر اکٹھے کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\alpha\rangle = \quad & (a_1T_{11} + a_2T_{12} + a_3T_{13} + \cdots + a_nT_{1n})|e_1\rangle \\
&+(a_1T_{21} + a_2T_{22} + a_3T_{23} + \cdots + a_nT_{2n})|e_2\rangle \\
&+(a_1T_{31} + a_2T_{32} + a_3T_{33} + \cdots + a_nT_{3n})|e_3\rangle \\
&\quad\vdots \\
&+(a_1T_{n1} + a_2T_{n2} + a_3T_{n3} + \cdots + a_nT_{nn})|e_n\rangle
\end{aligned}$$

اس مساوات میں اساسی سمتیہ $|e_1\rangle$ کے عددی سر $(a_1T_{11} + a_2T_{12} + \cdots + a_nT_{1n})$ کو $\sum_{j=1}^{n} a_jT_{1j}$ لکھا جا سکتا ہے، اور اسی طرح باقی اساسی سمتیات کے عددی سروں کے لئے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_jT_{1j}|e_1\rangle + \sum_{j=1}^{n} a_jT_{2j}|e_2\rangle + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_jT_{nj}|e_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_jT_{ij}|e_i\rangle\end{aligned}$$

ہم مساوات ۳۱ سے یہاں تک کے حساب کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\hat{T}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\hat{T}|e_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_jT_{ij}|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j\right)|e_i\rangle \tag{۳۲}$$

ظاہر ہے کہ $\hat{T}$ ایک سمتیہ کو جس کے ارکان $a_1$ ، $a_2$ ، $\cdots$ ، $a_n$ ہوں کا تبادلہ ایک نئے سمتیہ میں کرتا ہے جس کے ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j \tag{۳۳}$$

(مساوات ۳۰ اور مساوات ۳۲ میں اشاریہ آگے پیچھے کئے گئے ہیں۔ یہ لکھتے ہوئے غلطی نہیں کی گئی۔ دوسرے لفظوں میں ( $i$ اور $j$ آپس میں تبدیل کرنے $j \quad \leftrightarrow \quad i$ سے مراد یہ ہے کہ) اگر اجزاء کا تبادلہ $T_{ij}$ سے ہو، تب اساسی سمتیات کا تبادلہ $T_{ji}$ سے ہو گا۔)

یوں جس طرح کسی اساس کے لحاظ سے $n$ ارکان $a_i$ سمتیہ یا $|\alpha\rangle$ کو یکتا طور ظاہر کرتے ہیں اسی طرح $T_{ij}$ کے $n^2$ **ارکان**[۳۰] خطی مبدل $\hat{T}$ کو اسی اساس کے لحاظ سے یکتا طور پر بیان کرتے ہیں۔

$$\hat{T} \leftrightarrow (T_{11}, T_{12}, \cdots, T_{nn}) \tag{۳۴}$$

اگر اساس معیاری عمودی ہو، مساوات ۳۰ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T_{ij} = \langle e_i|\hat{T}|e_j\rangle \tag{۳۵}$$

[۳۰]elements

ان مخلوط اعداد کو **قالب**[31] کے روپ[32] میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

یوں خطی مبدل کا مطالعہ محض قوالب کے نظریہ کا مطالعہ ہوگا۔ دو خطی مبدل کے مجموعہ $(\hat{S} + \hat{T})$ کی تعریف:

$$(\hat{S} + \hat{T})|\alpha\rangle = \hat{S}|\alpha\rangle + \hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۷}$$

ہماری توقع کے عین مطابق قوالب جمع کرنے کے مترادف ہے (جہاں آپ انکے مطابقتی ارکان جمع کرتے ہیں)۔

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ij} = S_{ij} + T_{ij} \tag{۳۸}$$

دو خطی تبادلہ کا حاصل ضرب $(\hat{S}\hat{T})$، پہلے $\hat{T}$ اور اس کے بعد $\hat{S}$ تبادلہ کرنے کے مترادف ہے۔

$$|\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle; \quad |\alpha''\rangle = \hat{S}|\alpha'\rangle = \hat{S}(\hat{T}|\alpha\rangle) = \hat{S}\hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۹}$$

مجموعی مبدل $\hat{U} = \hat{S}\hat{T}$ کو کونسا قالب $\mathbf{U}$ ظاہر کرتا ہے؟ اسے حاصل کرنا مشکل نہیں۔

$$a_i'' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}a_j' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} T_{jk}a_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij}T_{jk}\right)a_k = \sum_{k=1}^{n} U_{ik}a_k$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}\,\mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ik} = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}T_{jk} \tag{۴۰}$$

قوالب ضرب کرنے کا یہ رائج طریقہ ہے؛ آپ $\mathbf{S}$ کے $i$ ویں صف اور $\mathbf{T}$ کے $k$ ویں قطار کے مطابقتی اندراج آپس میں ضرب کر کے تمام کا مجموعہ لے کر حاصل ضرب $\mathbf{ST}$ کا $ik$ ویں رکن تلاش کرتے ہیں۔ یہی طریقہ کار بروئے کار لاتے ہوئے مستطیل قوالب ضرب کیے جاتے ہیں، بس اتنا ضروری ہے کہ پہلے قالب میں قطاروں کی تعداد دوسرے قالب میں صفوں کی تعداد کے برابر ہو۔ بالخصوص $|\alpha\rangle$ کے ارکان کے $n$ اجزائی سلسلہ کو

---

[31] matrix

[32] میں چوکور قوالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی بڑے حروف، مثلاً $\mathbf{T}$، سے ظاہر کروں گا۔

$n \times 1$ **قطار قالب**[۳۳] (یا "قطار سمتیہ"):[۳۴]

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{۴۱}$$

لکھ کر قاعدہ تبادلہ (مساوات ۳۳) کو قالبی حاصل ضرب:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}\,\mathbf{a} \tag{۴۲}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں اب قالبی اصطلاحات سیکھیں:

- قالب کا **تبدیل محل**[۳۵] (جس کو ہم لاطینی حرف پر "مد" ڈال کر لکھتے ہیں: $\tilde{T}$) انہی ارکان پر مشتمل ہو گا، تاہم اس میں صف اور قطار آپس میں جگہیں تبدیل کرتی ہیں۔ بالخصوص قطار قالب کا تبدیل محل **صف قالب**[۳۶] ہو گا۔

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{۴۳}$$

چوکور قالب کے (بالائی بائیں سے زیریں دائیں) **مرکزی وتر**[۳۷] میں عکس اس کا تبدیل محل ہو گا۔

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \dots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۴۴}$$

ایسا (چوکور) قالب جو اپنے تبدیل محل کے برابر ہو **تشاکلی**[۳۸] کہلاتا ہے؛ اگر تبدیل محل کی علامت الٹ ہو تب یہ **خلاف تشاکلی**[۳۹] ہو گا۔

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \quad \text{تشاکلی} \qquad\qquad \tilde{\mathbf{T}} = -\mathbf{T} \quad \text{خلاف تشاکلی} \tag{۴۵}$$

---

[۳۳] column matrix

[۳۴] میں قطار قوالب اور صف قوالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی چھوٹے حروف، مثلاً $\mathbf{a}$، سے ظاہر کروں گا۔

[۳۵] transpose

[۳۶] row matrix

[۳۷] main diagonal

[۳۸] symmetric

[۳۹] antisymmetric

- ہر رکن کا مخلوط جوڑی دار لینے سے قالب کا (مخلوط) **جوڑی دار**[۴۰] (جس کو ہم ہمیشہ کی طرح ستارہ، $\mathbf{T}^*$ سے ظاہر کرتے ہیں) حاصل ہوگا۔

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & \dots & T_{1n}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \dots & T_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}^* & T_{n2}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۶}$$

تمام ارکان حقیقی ہونے کی صورت میں قالب **حقیقی**[۴۱] ہوگا، جبکہ تمام ارکان خیالی ہونے کی صورت میں قالب **خیالی**[۴۲] ہوگا۔

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} \quad \text{حقیقی} \qquad\qquad \mathbf{T}^* = -\mathbf{T} \quad \text{خیالی} \tag{۴۷}$$

- قالب کا تبدیل محل وجوڑی دار اس کا **ہرمشی جوڑی دار**[۴۳] (یا **شریک**[۴۴]) ہوگا (جسے خنجر کے نشان، $\mathbf{T}^\dagger$ سے ظاہر کیا جاتا ہے)۔

$$\mathbf{T}^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{T}}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & \dots & T_{n1}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* & \dots & T_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n}^* & T_{2n}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{a}}^* = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۸}$$

ایسا چوکور قالب جو اپنے ہرمشی جوڑی دار کے برابر ہو **ہرمشی**[۴۵] (یا **خود شریک**[۴۶]) قالب کہلاتا ہے؛ اگر ہرمشی جوڑی دار منفی علامت متعارف کرتا ہو قالب **منحرف ہرمشی**[۴۷] (یا **خلاف ہرمشی**[۴۸]) ہوگا۔

$$\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T} \quad \text{ہرمشی} \qquad\qquad \mathbf{T}^\dagger = -\mathbf{T} \quad \text{منحرف ہرمشی} \tag{۴۹}$$

اس علامتیت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو (معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے) نہایت خوبصورتی کے ساتھ قالبی ضرب (مساوات ۲۴) لکھا جا سکتا ہے۔

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} \tag{۵۰}$$

---

[۴۰] conjugate
[۴۱] real
[۴۲] imaginary
[۴۳] hermitian conjugate
[۴۴] adjoint
[۴۵] hermitian
[۴۶] adjoint
[۴۷] skew hermitian
[۴۸] anti-hermitian

یاد رہے کہ درج بالا رکوع میں متعارف تینوں اعمال (تبدیلی محل، جوڑی دار، ہرمشی جوڑی دار) کا دو مرتبہ اطلاق سے واپس اصل قالب حاصل ہو گا۔

عام طور پر قالبی ضرب غیر مقلبی $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$ ہو گا؛ ضرب لکھنے کے دونوں طریقوں کے بیچ فرق کو **مقلب**[۴۹] کہتے ہیں۔[۵۰]

$$[\mathbf{S}, \mathbf{T}] \equiv \mathbf{ST} - \mathbf{TS} \qquad \text{مقلب} \tag{۵۱}$$

حاصل ضرب کا تبدیل محل الٹ ترتیب میں تبدیل محلوں کا حاصل ضرب:

$$(\widetilde{\mathbf{ST}}) = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{S}} \tag{۵۲}$$

ہو گا (سوال ۱.۱۱ دیکھیں)، اور یہی کچھ ہرمشی جوڑی دار کے لئے بھی درست ہو گا۔

$$(\mathbf{ST})^{\dagger} = \mathbf{T}^{\dagger}\,\mathbf{S}^{\dagger} \tag{۵۳}$$

**اکائی قالب**[۵۱] کے مرکزی وتر پر ارکان کی قیمت ایک اور باقیوں کی قیمت صفر ہو گی۔

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{۵۴}$$

(اکائی قالب خطی تبادلہ کو ظاہر کرتا ہے جو ہر سمتیہ کا تبادلہ اسی سمتیہ میں کرتا ہے۔) دوسرے لفظوں میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{I}_{ij} = \delta_{ij} \tag{۵۵}$$

چوکور قالب کے **معکوس**[۵۲]، جسے $\mathbf{T}^{-1}$ لکھا جاتا ہے، کی تعریف بدیہی ہے۔[۵۳]

$$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\,\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} \tag{۵۶}$$

قالب کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب اس کا **مقطع**[۵۴] غیر صفر ہو؛ درحقیقت

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}\tilde{\mathbf{C}} \qquad \text{قالب کا معکوس} \tag{۵۷}$$

---

[۴۹] commutator

[۵۰] صرف چوکور قوالب کے لئے مقلب معنی خیز ہے۔ غیر چوکور قوالب میں دونوں ضرب کی جسامت بھی ایک جیسی نہیں ہو گی۔

[۵۱] unit matrix

[۵۲] inverse

[۵۳] دھیان رہے کہ بایاں معکوس، دائیں معکوس کے برابر ہے، چونکہ اگر $\mathbf{AT} = \mathbf{I}$ اور $\mathbf{TB} = \mathbf{I}$ ہوں، تب (دوسرے کو بائیں سے $\mathbf{A}$ سے ضرب کر کے پہلا استعمال کرنے سے) ہمیں $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ حاصل ہو گا۔

[۵۴] determinant

ہو گا، جہاں ہم ضربیوں[۵۵] کا قالب $\mathbf{C}$ ہے اور $|\mathbf{T}|$ قالب کا مقطع ہے (قالب $\mathbf{T}$ سے $i$ ویں صف اور $j$ ویں قطار خارج کر کے حاصل ذیلی قالب کے مقطع کو $(-1)^{i+j}$ سے ضرب دینے سے رکن $T_{ij}$ کا ہم ضربی حاصل ہو گا)۔ (چوکور) قالب کے مرکزی ارکان کے مجموعہ کو قالب کے آثار[۵۶] کہتے ہیں۔

$$\text{آثار}(\mathbf{T}) = \sum_{i}^{n} T_{ii}$$

ایسا قالب جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نادر[۵۷] کہلاتا ہے۔ حاصل ضرب کا معکوس (اگر موجود ہو) الٹ ترتیب میں انفرادی معکوس کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$(\mathbf{ST})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{S}^{-1} \tag{۵۸}$$

ایسا قالب جس کا معکوس اس کے ہرمشی جوڑی دار کے برابر ہو اکہرا[۵۸] کہلاتا ہے۔[۵۹]

$$\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1} \qquad \text{اکہرا} \tag{۵۹}$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اساس معیاری عمودی ہے، اکہرا قالب کے قطار معیاری عمودی سلسلہ قائم کرتے ہیں، اور اس کے صف بھی ایسا کرتے ہیں (سوال ا۔۱۲ دیکھیں)۔ ایسے خطی تبادلہ جنہیں اکہرا قوالب ظاہر کرتے ہوں، مساوات ۵۰ کی بدولت، اندرونی ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

$$\langle \alpha' | \beta' \rangle = \mathbf{a}'^{\dagger}\,\mathbf{b}' = (\mathbf{Ua})^{\dagger}(\mathbf{Ub}) = \mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{U}^{\dagger}\,\mathbf{Ub} = \mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{b} = \langle \alpha | \beta \rangle \tag{۶۰}$$

سوال ا۔۸: درج ذیل قوالب لیتے ہوئے

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

درج ذیل کا حساب لگائیں: (الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$، (ب) $\mathbf{AB}$، (ج) $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$، (د) $\tilde{\mathbf{A}}$، (ہ) $\mathbf{A}^*$، (و) $\mathbf{A}^{\dagger}$، (ز) آثار ($\mathbf{B}$)، (ح) مقطع ($\mathbf{B}$)، اور (ط) $\mathbf{B}^{-1}$۔ دکھائیں کہ $\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ ہے۔ کیا $\mathbf{A}$ کا معکوس پایا جاتا ہے؟

سوال ا۔۹: قطار قوالب

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

[۵۵] cofactors
[۵۶] trace
[۵۷] singular
[۵۸] unitary
[۵۹] حقیقی سمتیہ فضا (یعنی جس میں غیر سمتیات حقیقی ہوں) میں ہرمشی جوڑی دار اور تبدیل محل ایک ہوں گے، اور اکہرا قالب قائمہ: $\tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{O}^{-1}$ ہو گا۔ مثلاً، سادہ تین بُعدی فضا میں گھومنے کو قائمہ قوالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اور سوال ۱.۸ میں مستعمل چو کور قوالب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔(الف) $\mathbf{Aa}$، (ب) $\mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{b}$، (ج) $\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{Bb}$، (د) $\mathbf{ab}^{\dagger}$

سوال ۱.۱۰: درج ذیل میں صریحاً قوالب تیار کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی قالب $T$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

۱. تشاکلی قالب $\mathbf{S}$ اور خلاف تشاکلی قالب $\mathbf{A}$ کا مجموعہ۔

۲. حقیقی قالب $\mathbf{R}$ اور خیالی قالب $\mathbf{M}$ کا مجموعہ۔

۳. ہرمشی قالب $\mathbf{H}$ اور منحرف ہرمشی قالب $\mathbf{K}$ کا مجموعہ۔

سوال ۱.۱۱: مساوات ۵۲، مساوات ۵۳ اور مساوات ۵۸ ثابت کریں۔ دکھائیں کہ دو اکہرا قوالب کا حاصل ضرب اکہرا ہو گا۔ کن شرائط کے تحت دو ہرمشی قوالب کا حاصل ضرب بھی ہرمشی ہو گا؟ کیا دو اکہرا قوالب کا مجموعہ اکہرا ہو گا؟ کیا دو ہرمشی قوالب کا مجموعہ ہرمشی ہو گا؟

سوال ۱.۱۲: دکھائیں کہ اکہرا قالب کے صف اور قطار عمودی معیاری سلسلہ قائم کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۳: یہ جانتے ہوئے کہ مقطع $\mathbf{T} =$ مقطع $\tilde{\mathbf{T}}$ ہے دکھائیں کہ ہرمشی قالب کا مقطع حقیقی ہو گا، اکہرا قالب کے مقطع کا معیار $1$ ہو گا (جس کی بنا اس کا نام اکہرا قالب ہے) اور معیاری عمودی قالب کا مقطع $+1$ یا $-1$ ہو گا۔

## ۱.۴ تبدیلی اساس

خطی تبادلہ کو ظاہر کرنے والے قالب کے ارکان یا سمتیہ کے ارکان یقیناً اساس کے انتخاب پر منحصر ہوں گے۔ آئیں اس بات پر غور کرتے ہیں کہ اساس کی تبدیل سے یہ اعداد کس طرح تبدیل ہوں گے۔

پرانے اساسی سمتیات $|e_i\rangle$، کسی بھی سمتیہ کی طرح، ان نئے سمتیات $|f_i\rangle$ کا خطی مجموعہ ہوں گے:

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= S_{11}|f_1\rangle + S_{21}|f_2\rangle + \cdots + S_{n1}|f_n\rangle \\
|e_2\rangle &= S_{12}|f_1\rangle + S_{22}|f_2\rangle + \cdots + S_{n2}|f_n\rangle \\
&\cdots \\
|e_n\rangle &= S_{1n}|f_1\rangle + S_{2n}|f_2\rangle + \cdots + S_{nn}|f_n\rangle
\end{aligned}$$

(جہاں $S_{ij}$ مخلوط اعداد کا سلسلہ ہو گا) یا مختصراً درج ذیل۔

$$|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}|f_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{۶۱}$$

یہ از خود ایک خطی تبادلہ ہے (مساوات ۳۰ سے موازنہ کریں)،[۲۰] اور یوں ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا تبادلہ کس

[۲۰] یاد رہے کہ یہاں موجودہ بحث میں ہم ایک ہی سمتیہ کا دو مکمل مختلف اساس میں بات کر رہے ہیں، جبکہ وہاں بالکل مختلف سمتیہ کی بات اسی ایک اساس میں کی جا رہی تھی۔

طرح ہوگا:

$$a_i^f = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j^e \tag{۶۲}$$

(جہاں زیر بالا اساس کو ظاہر کرتی ہے، یعنی $a^e$ سے مراد اساسی سمتیات $\langle e_i|$ میں لکھے گئے ارکان ہیں)۔ قالبی روپ میں درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{a}^f = \mathbf{S}\,\mathbf{a}^e \tag{۶۳}$$

خطی تبادلہ $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب، اساس کی تبدیلی سے کس طرح تبدیل ہوگا؟ پرانے اساس میں ہمارے پاس (مساوات ۴۲)

$$\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{T}^e\,\mathbf{a}^e$$

اور مساوات ۶۳ تھے؛ مساوات ۶۳ کے دونوں اطراف کو $\mathbf{S}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\mathbf{a}^e = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{a}^f$، لہٰذا

$$\mathbf{a}^{f'} = \mathbf{S}\,\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{S}(\mathbf{T}^e\,\mathbf{a}^e) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}^e\,\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{a}^f$$

حاصل[61] ہوگا (مساوات ۶۳ میں $\mathbf{a}^f$ کی جگہ $\mathbf{a}^{f'}$، وغیرہ لکھا گیا ہے)۔ ظاہری طور پر

$$\mathbf{T}^f = \mathbf{S}\,\mathbf{T}^e\,\mathbf{S}^{-1} \tag{۶۴}$$

ہوگا۔ عمومی طور پر دو قوالب ($\mathbf{T}_1$ اور $\mathbf{T}_2$) اس صورت **متشابہ**[62] ہونگے جب کسی (غیر نادر) قالب $\mathbf{S}$ کے لئے $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{S}^{-1}$ ہو۔ یوں ہم دریافت کر چکے کہ، مختلف اساس کے لحاظ سے، ایک ہی خطی تبادلہ کو ظاہر کرنے والے قوالب میثابہ ہونگے۔ اتفاقی طور پر، اگر پہلی اساس معیاری عمودی ہو تب دوسری اساس صرف اس صورت معیاری عمودی ہوگی جب قالب $\mathbf{S}$ اکہرا ہو (سوال ا.۱۶ دیکھیں)۔ چونکہ ہم صرف معیاری عمودی اساس میں کام کرتے ہیں لہٰذا ہماری دلچسپی بنیادی طور پر اکہرا میثابہت تبادلہ میں ہے۔

اگرچہ نئی اساس میں خطی تبادلہ کے ارکان بہت مختلف نظر آتے ہیں، قالب سے وابستہ دو اعداد، مقطع اور **آثار**[63] قالب، تبدیل نہیں ہوتے۔ چونکہ حاصل ضرب کا مقطع، مقطعوں کا حاصل ضرب ہوگا، لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\left|\mathbf{T}^f\right| = \left|\mathbf{S}\,\mathbf{T}^e\,\mathbf{S}^{-1}\right| = |\mathbf{S}|\left|\mathbf{T}^e\right|\left|\mathbf{S}^{-1}\right| = \left|\mathbf{T}^e\right| \tag{۶۵}$$

آثار قالب ($\mathrm{Tr}$) جو وتری ارکان کا مجموعہ ہے:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}) \equiv \sum_{i=1}^{m} T_{ii} \tag{۶۶}$$

---

[61] یاد رہے کہ $\mathbf{S}^{-1}$ لازماً موجود ہوگا؛ اگر $\mathbf{S}$ نادر ہوتا، تب $\langle f_i|$ فضا کا احاطہ نہ کرتے، لہٰذا اساس قائم نہ کرتے۔
[62] similar
[63] trace

درج ذیل خاصیت رکھتا ہے (سوال ۱.۱۷ دیکھیں)

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1) \tag{۶۷}$$

(جہاں $\mathbf{T}_1$ اور $\mathbf{T}_2$ کوئی بھی دو قوالب ہیں)، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}^f) = \mathrm{Tr}(\mathbf{S}\,\mathbf{T}^e\,\mathbf{S}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}_e\,\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{S}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}^e) \tag{۶۸}$$

سوال ۱.۱۴: تین ابعاد میں سمتیات کی لئے معیاری اساس $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے۔

ا. (مبدا کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھڑی $z$ محور کے گرد زاویہ $\theta$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

ب. نقطہ $(1,1,1)$ سے گزرتے ہوئے محور کے گرد (محور سے مبدا کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھڑی $120°$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

ج. مستوی $xy$ میں عکس کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

د. تصدیق کریں کہ یہ تمام قوالب معیاری عمودی ہیں اور ان کے مقطعات تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۵: عمومی اساس $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ میں محور $x$ کے گرد زاویہ $\theta$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب $\mathbf{T}_x$، اور محور $y$ کے گرد زاویہ $\theta$ گھومنے کو ظاہر کرنے والے قالب $\mathbf{T}_y$ تیار کریں۔ فرض کریں اب ہم اساس تبدیل کر کے $\hat{\imath}' = \hat{\jmath}$ ، $\hat{\jmath}' = -\hat{\imath}$ ، $\hat{k}' = \hat{k}$ لیتے ہیں۔ اساس کی اس تبدیلی کو پیدا کرنے والا قالب $\mathbf{S}$ تیار کریں، اور تصدیق کریں کہ آیا $\mathbf{S}\,\mathbf{T}_x\,\mathbf{S}^{-1}$ اور $\mathbf{S}\,\mathbf{T}_y\,\mathbf{S}^{-1}$ آپ کے توقعات کے مطابق ہیں یا نہیں۔

سوال ۱.۱۶: دکھائیں کہ مشابہت قالبی ضرب برقرار رکھتا ہے (یعنی $\mathbf{A}^e\,\mathbf{B}^e = \mathbf{C}^e$ ہونے کی صورت میں $\mathbf{A}^f\,\mathbf{B}^f = \mathbf{C}^f$ ہو گا)۔ مشابہت عمومی طور پر تشاکلی، حقیقت یا ہرمشی پن برقرار نہیں رکھتا؛ لیکن، دکھائیں اگر $\mathbf{S}$ اکہرا ہو، اور $\mathbf{H}^e$ ہرمشی ہو، تب $\mathbf{H}^f$ ہرمشی ہو گا۔ دکھائیں کہ $\mathbf{S}$ صرف اور صرف اس صورت معیاری عمودی اساس کو دوسری معیاری عمودی اساس میں منتقل کرے گا اگر یہ اکہرا ہو۔

سوال ۱.۱۷: ثابت کریں کہ $\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1)$ ہو گا۔ یوں $\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_3) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_3\,\mathbf{T}_1)$ ہو گا، لیکن کیا عام طور پر $\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_3) = \mathrm{Tr}(\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_3)$ ہو گا؟ اس کو ٹھیک یا غلط ثابت کریں۔ اشارہ: غلط ثابت کرنے کا بہترین ثبوت اس کی اُلٹ مثال پیش کرنا ہے؛ جتنا مثال سادہ ہو اتنا ہی بہتر ہے۔

## ۱.۵ امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار

تہرا فضا میں کسی مخصوص محور کے گرد زاویہ $\theta$ گھمانے کو ظاہر کرنے والے خطی تبادلہ پر غور کریں۔ زیادہ تر سمتیات پیچیدہ انداز سے تبدیل ہوں گے (یہ اس محور کے گرد مخروط پر حرکت کریں گے)، لیکن وہ سمتیات جو اسی محور پر پائے جاتے ہوں کا رویہ نہایت سادہ ہو گا: وہ بالکل تبدیل نہیں ہوں گے ($\hat{T}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$)۔ اگر $\theta$ کی قیمت $180°$ ہو تب

"استوائی" مستوی میں پائے جانے والے سمتیات کی علامت تبدیل ہو گی ($\hat{T}|\alpha\rangle = -|\alpha\rangle$)۔ مخلوط سمتی فضا[۶۴] میں ہر خطی تبادلہ کے، اس طرح کے "مخصوص" سمتیات پائے جاتے ہیں جو اپنے آپ کے غیر سمتی مضرب میں تبدیل ہوتے:

$$\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle \tag{۶۹}$$

انہیں اس تبادلہ کے **امتیازی سمتیات**[۶۵] کہتے ہیں، اور (مخلوط) عدد $\lambda$ ان کا **امتیازی قدر**[۶۶] ہے۔ (اگرچہ، معدوم سمتیہ مہمل معنوں میں مساوات ۶۹ کو کسی بھی $\hat{T}$ اور $\lambda$ کے لئے مطمئن کرتا ہے، اسے امتیازی سمتیات میں نہیں گنا جاتا۔ تکنیکی طور پر امتیازی سمتیہ سے مراد وہ غیر صفر سمتیہ ہے جو مساوات ۶۹ کو مطمئن کرتا ہو۔) دھیان رہے کہ امتیازی سمتیہ کا ہر (غیر صفر) مضرب بھی امتیازی سمتیہ ہو گا، اور اس کی امتیازی قدر وہی ہو گی۔

کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے، امتیازی سمتیہ مساوات قالبی روپ:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{a} \tag{۷۰}$$

(جہاں $\mathbf{a}$ غیر صفر ہے) یا

$$(\mathbf{T} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{۷۱}$$

اختیار کرتی ہے۔ (یہاں $\mathbf{0}$ ایسا **صفر قالب**[۶۷] ہے جس کے تمام ارکان صفر ہیں۔) اب، اگر قالب $(\mathbf{T} - \lambda\,\mathbf{I})$ کا معکوس پایا جاتا، ہم مساوات ۷۱ کے دونوں اطراف کو $(\mathbf{T} - \lambda\,\mathbf{I})^{-1}$ سے ضرب دے کر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ اخذ کرتے۔ لیکن ہم $\mathbf{a}$ کو غیر صفر فرض کر چکے ہیں، لہٰذا $(\mathbf{T} - \lambda\,\mathbf{I})$ حقیقتاً نادر ہو گا، جس سے مراد یہ ہے کہ اس کا مقطع صفر ہو گا۔

$$\text{مقطع}(\mathbf{T} - \lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & (T_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{۷۲}$$

مقطع کھولنے سے $\lambda$ کی الجبرائی مساوات:

$$C_n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad \text{امتیازی مساوات} \tag{۷۳}$$

حاصل ہوتی ہے، جہاں عددی سر $C_i$ کی قیمتیں $T$ کے ارکان کی تابع ہیں (سوال ا.۲۰ دیکھیں)۔ اس کو قالب کی **امتیازی مساوات**[۶۸] کہتے ہیں؛ اور اس کے حل امتیازی اقدار کا تعین کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہ $n$ رتبی مساوات

[۶۴] حقیقی سمتی فضا میں (جہاں غیر سمتیہ کی قیمتیں حقیقی ہونے کی پابند ہوں گی) ایسا لازمی نہیں۔ سوال ا.۱۸ دیکھیں۔
[۶۵] eigenvectors
[۶۶] eigenvalue
[۶۷] zero matrix
[۶۸] characteristic equation

ہے، لہٰذا (**الجبرا کے بنیادی مسئلہ**[۶۹] کے تحت) اس کے $n$ (مخلوط) جذر ہوں گے۔[۷۰] تاہم، ان میں سے چند **متعدد جذر**[۷۱] ہو سکتے ہیں، لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $n \times n$ قالب کا کم سے کم ایک اور زیادہ سے زیادہ $n$ منفرد امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ قالب کے تمام امتیازی اقدار کے ذخیرہ کو اس کا **طیف**[۷۲] کہتے ہیں؛ اگر دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کا ایک ہی امتیازی قدر ہو، ہم کہتے ہیں طیف **انحطاطی**[۷۳] ہے۔

عام طور پر، امتیازی سمتیات تیار کرنے کا سادہ ترین طریقہ یہ ہو گا کہ مساوات ۷۰ میں ہر ایک $\lambda$ ڈال کر $\mathbf{a}$ کے ارکان کے لئے قلم و کاغذ سے حل کیا جائے۔ میں یہ عمل ایک مثال حل کر کے سمجھاتا ہوں۔

مثال ۱.۱: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۷۴}$$

**حل:** اس کی امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -2 \\ -2i & (i-\lambda) & 2i \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1+i)\lambda^2 - i\lambda = 0 \tag{۷۵}$$

ہے، جس کے جذر $0$، $1$ اور $i$ ہیں۔ پہلے امتیازی سمتیہ کے جزو $(a_1, a_2, a_3)$ لیتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہو گا، جو درج ذیل تین مساوات دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= 0 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

---

[۶۹] fundamental theorem of algebra

[۷۰] یہ وہ مقام ہے جہاں حقیقی سمتی فضا کا مسئلہ مزید پیچیدہ ہوتا ہے، چونکہ ضروری نہیں امتیازی مساوات کا کوئی بھی (حقیقی) حل پایا جاتا ہو۔ سوال ۱.۱۸ دیکھیں۔

[۷۱] multiple roots

[۷۲] spectrum

[۷۳] degenerate

ان میں سے پہلی مساوات ( $a_1$ کی صورت میں ) $a_3$ کا تعین کرتی ہے: $a_3 = a_1$؛ دوسری مساوات $a_2$ کا تعین کرتی ہے: $a_2 = 0$؛ اور تیسری مساوات زائد از ضرورت ہے۔ ہم $a_1 = 1$ چن سکتے ہیں (چونکہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی مضرب امتیازی سمتیہ ہی ہوگا)۔

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0 \text{ کے لئے} \tag{۷۶}$$

دوسرے امتیازی سمتیہ کے لئے (جزو کی وہی علامتیں استعمال کرتے ہوئے)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ہوگا، جس سے درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی:

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= a_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= a_2 \\ a_1 - a_3 &= a_3 \end{aligned}$$

جن کے حل $a_3 = (1/2)a_1$ ، $a_2 = [(1-i)/2]a_1$ ہیں؛ اس مرتبہ میں $a_1 = 2$ لیتا ہوں، لہٰذا

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 \text{ کے لئے} \tag{۷۷}$$

ہوگا۔ آخر میں، تیسرا امتیازی سمتیہ کے لئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ia_2 \\ ia_3 \end{pmatrix}$$

درج ذیل مساوات دیگا

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= ia_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= ia_2 \\ a_1 - a_3 &= ia_3 \end{aligned}$$

جس کے حل $a_3 = a_1 = 0$ ہیں، جہاں $a_2$ غیر متعین ہے۔ ہم $a_2 = 1$ چنتے ہیں، یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = i \text{ کے لئے} \tag{۷۸}$$

□

اگر امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں (جیسا گزشتہ مثال میں کرتے تھے)، ہم انہیں اساس کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|f_1\rangle &= \lambda_1|f_1\rangle,\\ \hat{T}|f_2\rangle &= \lambda_2|f_2\rangle,\\ &\dots\\ \hat{T}|f_n\rangle &= \lambda_n|f_n\rangle\end{aligned}$$

اس اساس میں $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب انتہائی سادہ روپ اختیار کرتا ہے، جس میں امتیازی اقدار مرکزی وتر پر پائے جاتے ہیں، جبکہ باقی تمام ارکان صفر ہوں گے:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{۷۹}$$

اور (معمول شدہ) امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix} \tag{۸۰}$$

ایسا قالب جس کو اساس کی تبدیلی سے **وتری روپ**[۷۴] (مساوات ۷۹) میں لایا جا سکے **وتر پذیر**[۷۵] کہلاتا ہے (ظاہر ہے کہ ایک قالب صرف اور صرف اس صورت وتر پذیر ہوگا جب اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں)۔ (پرانی اساس میں) معمول شدہ امتیازی سمتیات کو $\mathbf{S}^{-1}$ کے قطار لیتے ہوئے، میں شابہت قالب جو **وتری سازی**[۷۶] کرتا ہے، تیار کیا جا سکتا ہے۔

$$(\mathbf{S}^{-1})_{ij} = (\mathbf{a}^{(j)})_i \tag{۸۱}$$

---

[۷۴] diagonal form
[۷۵] diagonalizable
[۷۶] diagonalization

مثال ا.۲: ہم مثال ا.ا میں حاصل $\mathbf{a}^1$ (مساوات ۷۶)، $\mathbf{a}^2$ (مساوات ۷۷) اور $\mathbf{a}^3$ (مساوات ۷۸) کو $\mathbf{S}^{-1}$ کے قطار لکھتے ہیں:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (1-i) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا (مساوات ۵۷ استعمال کرتے ہوئے)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ (i-1) & 1 & (1-i) \end{pmatrix}$$

اور آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$\mathbf{Sa}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Sa}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Sa}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اور

$$\mathbf{SMS}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

ہوں گے۔ □

قالب کو وتری روپ میں لانے کا فائدہ صاف ظاہر ہے: اس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے۔ بد قسمتی سے، ہر قالب کو وتری نہیں بنایا جا سکتا؛ امتیازی سمتیات کو فضا کا احاطہ کرنا ہو گا۔ اگر امتیازی مساوات کے $n$ منفرد جذر ہوں، تب قالب لازماً وتر پذیر ہو گا، لیکن بعض اوقات متعدد جذر کی صورت میں بھی یہ وتر پذیر ہو گا۔ (غیر وتر پذیر قابل قالب کی مثال کے لئے سوال ا.۱۹ دیکھیں۔) کیا بہتر ہوتا (اگر تمام امتیازی سمتیات معلوم کرنے سے قبل) ہم جان سکتے کہ آیا قالب وتر پذیر ہے یا نہیں۔ ایک کارآمد کافی (تاہم غیر لازمی) شرط درج ذیل ہے: ایک قالب جو اپنے ہرمشی جوڑی دار کے ساتھ مقلوب ہو **عمودی**[77] قالب کہلاتا ہے۔

$$[\mathbf{N}^\dagger, \mathbf{N}] = \mathbf{0}, \qquad \text{عمودی} \tag{۸۲}$$

ہر عمودی قالب وتر پذیر ہو گا (اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں)۔ بالخصوص، ہر ہرمشی قالب، اور اکہرا قالب، وتر پذیر ہو گا۔

---

[77] normal

فرض کریں ہمارے پاس دو وتر پذیر قوالب ہوں؛ کوانٹائی معاملات میں عموماً ایک سوال کھڑا ہوتا ہے: کیا انہیں (ایک ہی میثابہت قالب $S$ کے ذریعہ) **بیک وقت وتری**[۴۸] بنایا جا سکتا ہے؟ دوسرے لفظوں میں، کیا ایسی اساس موجود ہے جس میں دونوں وتری ہوں؟ اس کا جواب ہے کہ صرف اور صرف اس صورت ایسا ممکن ہوگا جب دونوں قالب آپس میں مقلوبی ہوں (سوال ۱.۲۲ دیکھیں)۔

سوال ۱.۱۸: درج ذیل قالب مستوی $xy$ میں گھومنے کو ظاہر کرنے والا $2 \times 2$ قالب ہے۔

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{۸۳}$$

دکھائیں کہ (ماسوائے مخصوص زاویوں کے؛ بتائیں وہ کون سے زاویے ہیں؟) اس قالب کے کوئی حقیقی امتیازی اقدار نہیں پائے جاتے۔ (یہ اس ہندسی حقیقت کی عکاسی کرتا ہے کہ مستوی میں کسی بھی سمتیہ کو ایسا گھما کر اپنے آپ میں نہیں پہنچایا جا سکتا؛ اس کا موازنہ تین ابعاد میں گھمانے سے کریں۔) اس قالب کے، البتہ، مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات پائے جاتے ہیں۔ انہیں تلاش کریں۔ قالب $\mathbf{T}$ کا وتری ساز قالب $\mathbf{S}$ تیار کریں۔ میثابہت تبادلہ $\mathbf{STS}^{-1}$ صریحاً کریں، اور دکھائیں کہ یہ $\mathbf{T}$ کو وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ۱.۱۹: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کیا یہ قالب وتر پذیر ہے؟

سوال ۱.۲۰: دکھائیں کہ امتیازی مساوات (مساوات ۷۳) کا پہلا، دوسرا اور آخری عددی سر درج ذیل ہے۔

$$C_n = (-1)^n, \quad C_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{T}), \quad \text{اور} \quad C_0 = |\mathbf{T}| \tag{۸۴}$$

ایک $3 \times 3$ قالب جس کے ارکان $T_{ij}$ ہوں کا $C_1$ کیا ہوگا؟

سوال ۱.۲۱: صاف ظاہر ہے کہ وتری قالب کا آثار، اس قالب کے امتیازی اقدار کا مجموعہ، اور اس کا مقطع ان کا حاصل ضرب ہوگا (صرف مساوات ۷۹ کو دیکھنے کی دیر ہے)۔ یوں (مساوات ۶۵ اور مساوات ۶۸ کے تحت) کسی بھی وتر پذیر قالب کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا۔ ہر قالب کے لئے درج ذیل ہوگا؛ اسے ثابت کریں۔

$$|\mathbf{T}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{۸۵}$$

(یہاں کے $\lambda$، امتیازی مساوات کے $n$ حل ہیں؛ متعدد جذر کی صورت میں، خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کی تعداد، حلوں کی تعداد سے کم ہو سکتی ہے، لیکن ہم $\lambda$ کو اتنی مرتبہ ہی گنتے ہیں جتنی مرتبہ یہ پایا جاتا ہے۔) اشارہ: امتیازی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھیں

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) = 0$$

---

[۴۸] simultaneously diagonalized

اور سوال ا.۲۰ کا نتیجہ زیر استعمال لائیں۔

سوال ا.۲۲:

ا دکھائیں اگر دو قالب کسی ایک اساس میں مقلوبی ہوں تب وہ ہر اساس میں مقلوبی ہوں گے۔ یعنی درج ذیل ہو گا۔

$$[\mathbf{T}_1^e, \mathbf{T}_2^e] = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathbf{T}_1^f, \mathbf{T}_2^f] = \mathbf{0} \tag{۸۶}$$

اشارہ: مساوات ۱۶۴ استعمال کریں۔

ب دکھائیں کہ اگر دو قالب بیک وقت وتر پذیر ہوں، وہ مقلوبی ہوں گے۔[۷۹]

سوال ا.۲۳: درج ذیل قالب لیں۔

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

ا کیا یہ عمودی ہے؟

ب کیا یہ وتر پذیر ہے؟

## ۶.ا ہرمشی تبادلہ

میں نے مساوات ۴۸ میں قالب کے تبدیل محل وجوڑی دار $\mathbf{T}^\dagger = \tilde{\mathbf{T}}^*$ کو اس کے ہرمشی جوڑی دار (یا شریک قالب) کی تعریف قرار دیا۔ میں اب خطی تبادلہ کے ہرمشی جوڑی دار کی زیادہ بنیادی تعریف پیش کرتا ہوں۔ یہ وہ تبادلہ $\hat{\mathbf{T}}^\dagger$ ہے جس کا اطلاق (ہر $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ سمتیات کے) اندرونی ضرب کے پہلے رکن پر وہی نتیجہ دیتا ہے جو دوسرے سمتیہ پر $\hat{\mathbf{T}}$ کا اطلاق دیگا۔[۸۰]

$$\langle \hat{\mathbf{T}}^\dagger \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{T}} \beta \rangle \tag{۸۷}$$

میں آپ کو خبردار کرتا چلوں کہ اگرچہ ہر کوئی اسے استعمال کرتا ہے یہ فرسودہ علامتیت ہے۔ سمتیات $\langle\alpha|$ اور $|\beta\rangle$ ہیں ناکہ $\alpha$ اور $\beta$ جو درحقیقت محض نام ہیں۔ بالخصوص، ان کے کوئی ریاضیاتی خواص نہیں پائے جاتے، اور "$\hat{T}\beta$" کا فقرہ بے معنی ہے۔ خطی تبادلہ سمتیہ پر ناکہ نام پر عمل کرتے ہیں۔ تاہم، اس علامت کا مطلب صاف ظاہر ہے: سمتیہ $\hat{T}|\beta\rangle$ کا نام $\hat{T}\beta$ ہے اور سمتیہ $\hat{T}^\dagger|\alpha\rangle$ اور سمتیہ $|\beta\rangle$ کا اندرونی ضرب $\langle \hat{T}^\dagger \alpha | \beta \rangle$ ہے۔ بالخصوص

$$\langle \alpha | c\beta \rangle = c \langle \alpha | \beta \rangle \tag{۸۸}$$

---

[۷۹] اس کا الٹ (یعنی اگر دو وتر پذیر قالب مقلوبی ہوں تب وہ بیک وقت وتر پذیر ہوں گے) ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔
[۸۰] آپ پوچھ سکتے ہیں، کیا ایسا تبادلہ لازماً موجود ہوگا؟ یہ ایک اچھا سوال ہے۔ اس کا جواب ہے "جی ہاں"۔

ہوگا، جبکہ جہاں کسی بھی غیر سمتیہ $c$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\langle c\alpha|\beta\rangle = c^*\langle\alpha|\beta\rangle \tag{۸۹}$$

اگر آپ (ہمیشہ کی طرح) معیاری عمودی اساس میں کام کر رہے ہوں، خطی تبادلہ کے ہرمشی جوڑی دار کو مطابقتی قالب کا ہرمشی جوڑی دار ظاہر کریگا؛ چونکہ (مساوات ۵۰ اور مساوات ۱۵۳ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{T}\mathbf{b} = (\mathbf{T}^\dagger\,\mathbf{a})^\dagger\,\mathbf{b} = \langle\hat{T}^\dagger\alpha|\beta\rangle \tag{۹۰}$$

یوں یہ علامتیت شباتی ہے، اور ہم چاہیں تو تبادلہ کی زبان اور چاہیں تو قوالب کی زبان میں بات کر سکتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں، **ہرمشی تبادلہ**[۸۱] $(\hat{T}^\dagger = \hat{T})$ بنیادی کردار ادا کرتے ہیں۔ ہرمشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تین نہایت اہم خواص رکھتے ہیں۔

**ا ہرمشی تبادلہ کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔**

**ثبوت:** فرض کریں $\hat{T}$ کی ایک امتیازی قدر $\lambda$ ہے: $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$، جہاں $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$ ہے۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$\langle\alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle\alpha|\lambda\alpha\rangle = \lambda\langle\alpha|\alpha\rangle$$

ساتھ ہی $\hat{T}$ ہرمشی ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle\alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\alpha\rangle = \langle\lambda\alpha|\alpha\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\alpha\rangle$$

لیکن $\langle\alpha|\alpha\rangle \neq 0$ ہے (مساوات ۲۰) لہٰذا $\lambda = \lambda^*$ اور یوں $\lambda$ حقیقی ہوگا۔

**ب ہرمشی تبادلہ کے منفرد امتیازی اقدار والے امتیازی سمتیات قائمہ ہونگے۔**

**ثبوت:** فرض کریں $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ اور $\hat{T}|\beta\rangle = \mu|\beta\rangle$ ہیں، جہاں $\lambda \neq \mu$ ہے۔ تب

$$\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\alpha|\mu\beta\rangle = \mu\langle\alpha|\beta\rangle$$

اور اگر $\hat{T}$ ہرمشی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle = \langle\lambda\alpha|\beta\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\beta\rangle$$

لیکن (جزو-الف کے تحت) $\lambda = \lambda^*$ ہے، اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ $\mu \neq \lambda$ ہے، لہٰذا $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ ہوگا۔

---

[۸۱] hermitian transformation

## ج ہرمشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں، یہ اس فقرہ کے مترادف ہے کہ ہر ہرمشی قالب کو وتری بنایا جا سکتا ہے (مساوات ۸۲ دیکھیں)۔ یہ حقیقت جو خاصی تکنیکی ہے، وہ ریاضیاتی سہارا ہے جس پر، ایک لحاظ سے، زیادہ تر کوانٹائی میکانیات کھڑی ہے۔ چونکہ اس ثبوت کو لامتناہی ابعادی سمتی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی، لہٰذا یہ ایک نہایت نازک اور باریک لڑی ہے جس پر کوانٹائی میکانیات منحصر ہے۔

سوال ا.۲۴: ہرمشی خطی تبادلہ کو تمام سمتیات $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ کے لئے لازماً $\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle$ مطمعن کرنا ہو گا۔ دکھائیں کہ اتنی حیرانی کی بات ہے کہ کافی ہے کہ تمام سمتیات $\langle\gamma|$ کے لئے $\langle\hat{T}\gamma|\gamma\rangle = \langle\gamma|\hat{T}\gamma\rangle$ ہو۔ اشارہ: پہلے $|\gamma\rangle = |\alpha + |\beta\rangle$ اور اس کے بعد $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + i|\beta\rangle$ لیں۔

سوال ا.۲۵: درج ذیل لیں

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

(الف) تصدیق کریں کہ $T$ ہرمشی ہے۔

(ب) اس کی امتیازی اقدار تلاش کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ حقیقی ہیں)۔

(ج) امتیازی سمتیات تلاش کر کے انکی معمولزنی کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ معیاری عمودی ہیں)۔

(د) اکہرا اور تر پذیر قالب $S$ تیار کریں اور صریحاً تصدیق کریں کہ یہ $T$ کو وتری بناتا ہے۔

(ھ) تصدیق کریں کہ $T$ اور اسکے وتری روپ کے لئے مقطع $T$ اور آثار $T$ ایک جیسے ہیں۔

سوال ا.۲۶: درج ذیل ہرمشی قالب لیں

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

(الف) اس قالب کا مقطع $\det(T)$ اور آثار $Tr(T)$ تلاش کریں۔

(ب) قالب $T$ کی امتیازی اقدار تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ انکا مجموعہ اور حاصل ضرب مساوات $A.85$ کے معنوں میں جزو (الف) کے عین مطابق ہے۔ قالب $T$ کو وتری روپ میں لکھیں۔

(ج) قالب $T$ کے امتیازی سمتیات تلاش کریں۔ انحطاطی حلقہ میں دو خطی غیر طابع امتیازی سمتیات تیار کریں ہرمشی قالب کے لئے یہ قدم ہر صورت ممکن ہو گا لیکن کسی بھی اختیاری قالب کے لئے لازمی نہیں کہ ایسا ممکن ہو سوال $A.19$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ انہیں قائمہ بنائیں اور تصدیق کریں کہ تیسرے کے لحاظ سے دونوں قائمہ ہیں۔ تینوں امتیازی سمتیات کی معمولزنی کریں۔

(د) قالب $T$ کا وتری ساز اکہرا قالب $S$ تیار کریں اور صریحاً دکھائیں کہ مشابہت تبادلہ $S$ کو استعمال کرتے ہوئے $T$ کو موضوع وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ۱.۲۷: اکہرا تبادلہ وہ ہے جس کے لئے $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$ ہو۔

(الف) دکھائیں کہ کسی بھی سمتیات $\langle\alpha|$ ، $|\beta\rangle$ کے لئے $\langle \hat{U}\alpha|\hat{U}\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$ کے معنوں میں اکہرا تبادلہ اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

(ب) دکھائیں کہ اکہرا تبادلہ کا امتیازی اقدار کا معیار $1$ ہے۔

(ج) دکھائیں کہ منفرد امتیازی اقدار سے متعلق اکہرا قالب کی امتیازی سمتیات قائمہ ہوں گے۔

سوال ۱.۲۸: قوالب کے تفاعلات ٹیلر تسلسل توسیعات دیتے ہیں مثلاً

$$e^M \equiv I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \tag{۹۱}$$

(الف) درج ذیل کے لئے $\exp(M)$ تلاش کریں

$$(i) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (ii) M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) اگر $M$ وتر پذیر ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\det\left(e^M\right) = e^{Tr(M)} \tag{۹۲}$$

تبصرہ: اگر $M$ وتر پذیر نہ ہو تب بھی یہ درست ہو گا تاہم ایسی عمومی صورت کے لئے اسکو ثابت کرنا مشکل ہے۔

(ج) دکھائیں اگر قوالب $M$ اور $N$ مقلوبی ہوں تب درج ذیل ہو گا

$$e^{M+N} = e^M e^N \tag{۹۳}$$

ثابت کریں کہ غیر مقلوبی قالب کے لئے مساوات $A.93$ درست نہیں سادہ ترین متضاد مثال دیکر ایسا کریں۔

(د) اگر $H$ ہر مشی ہوں تب دکھائیں کہ $e^{iH}$ اکہرا ہو گا۔