کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۴

تین ابعادی کوانٹائی میکانیات

۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر

تین ابعاد تک توسیع با آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شروڈنگر

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = H\Psi \tag{۴.۱}$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۴.۲}$$

ہیملٹنی عامل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{۴.۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{۴.۴}$$

---

[۱] جہاں کلاسیکی قابل مشاہدہ اور عامل میں فرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عامل پر "ٹوپی" کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہٰذا یہاں سے عاملین پر "ٹوپی" کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۴.۵}$$

کارتیسی محدد میں **لاپلاسی**[۲] ہے۔

مخفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $\left|\Psi(\boldsymbol{r}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int \left|\Psi\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = 1 \tag{۴.۶}$$

جہاں تکمل کو پوری فضا پر لینا ہوگا۔ اگر مخفیہ وقت کے تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۷}$$

جہاں فضائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۴.۸}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۹}$$

جہاں مستقلات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\boldsymbol{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ **استمراریہ**[۳] حالات دیتا ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے تکمل ہوگا۔)

سوال ۴.۱:

ا. عاملین $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{p}$ کے تمام **باضابطہ مقلبیت رشتے**[۴]: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

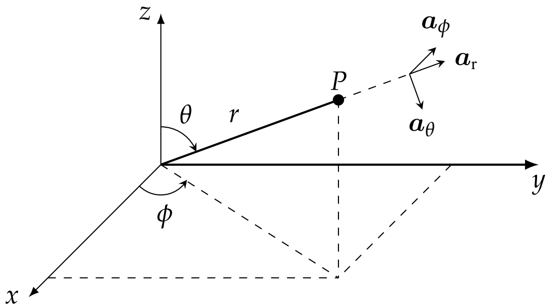
جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{۴.۱۰}$$

جہاں اشاریہ x ، y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔

---

[۲] Laplacian
[۳] continuum
[۴] canonical commutation relations



شکل ۴.۱: کروی محدد: رداس r ، قطبی زاویہ θ ، اور اسمتی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفسٹ کی تصدیق کریں:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle \boldsymbol{p}\rangle \tag{۴.۱۱}$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جزو کے لیے ہو گی۔)
اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات ۳.۷۱ تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۲}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x\sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبدا سے فاصلہ کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں **کروی محدد**[۵] (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہو گا (شکل ۴.۱)۔ کروی محدد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{۴.۱۳}$$

---

[۵] spherical coordinates

یوں کروی محدد میں غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر درج ذیل ہو گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\Big]+V\psi=E\psi \tag{۴.۱۴}$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi) \tag{۴.۱۵}$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے؛

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big]+VRY=ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{gathered}\Big\{\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\Big\}\\+\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=0\end{gathered}$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہٰذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $\ell(\ell+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہو گی۔[۶]

$$\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=\ell(\ell+1) \tag{۴.۱۶}$$

$$\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=-\ell(\ell+1) \tag{۴.۱۷}$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی کعبی کنواں (یا ڈبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x، y \text{ اور } z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں}\\ \infty & \text{بصورت دیگر}\end{cases}$$

حل کریں۔

---

[۶] ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں ℓ کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ ℓ کو لازماً عدد صحیح ہونا ہو گا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انحطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بُعدی صورت میں انحطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال ۲.۴۵)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انحطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y\sin^2\theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=-\ell(\ell+1)Y\sin^2\theta \tag{۴.۱۸}$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانتے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{۴.۱۹}$$

استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Big\{\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta\Big\}+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

پہلا جزو صرف θ کا تفاعل ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تفاعل ہے، لہٰذا ہر جزو ایک مستقل ہو گا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل[۷] کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+\ell(\ell+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{۴.۲۰}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2 \tag{۴.۲۱}$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2\Phi \implies \Phi(\phi)=e^{im\phi} \tag{۴.۲۲}$$

---

[۷]یہاں بھی ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہو گا۔ انتباہ: اب حرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہو گی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جا سکتا ہے جسے ہم Θ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مخفیہ لازماً حقیقی ہوں گے لہٰذا برقی حرکیات میں اسمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں لکھا جاتا ہے نہ کہ قوت نمائی صورت میں۔ کوانٹائی میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل ۴.۱ دیکھیں) لہٰذا درج ذیل شرط[8] عائد کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \tag{۴.۲۳}$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)}=e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im}=1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{۴.۲۴}$$

مساوات θ

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)+[\ell(\ell+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0 \tag{۴.۲۵}$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta)=AP_\ell^m(\cos\theta) \tag{۴.۲۶}$$

جہاں P_ℓ^m **شریک لیژانڈر تفاعل**[9] ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_\ell^m(x)\equiv(1-x^2)^{|m|/2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{|m|}P_\ell(x) \tag{۴.۲۷}$$

اور ℓ ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_\ell(x)$ ظاہر کرتا ہے[10] جس کی تعریف **کلیہ روڈریگیس**[11]:

$$P_\ell(x)\equiv\frac{1}{2^\ell\ell!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^\ell(x^2-1)^\ell \tag{۴.۲۸}$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{4\cdot2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2(x^2-1)^2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_\ell(x)$ متغیر x کی

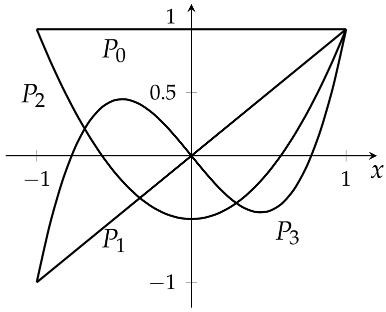
[8] یہ بظاہر سادہ شرط اتنی سادہ نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کثافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ ۴.۳ میں ایک مختلف طریقے سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر عائد شرط حاصل کریں گے۔

[9] associated Legendre function

[10] دھیان رہے کہ $P_\ell^{-m}=P_\ell^m$ ہوگا۔

[11] Rodrigues formula

جدول ۱.۴: چند ابتدائی لیژانڈر کثیر رکنیاں $P_\ell(x)$ ۔(ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات۔



(ب)

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1\\
P_1 &= x\\
P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5 &= \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
$$
(ا)

درجہ ℓ کثیر رکنی ہے، اور ℓ کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت یا طاق ہو گی۔ تاہم $P_\ell^m(x)$ عموماً کثیر رکنی نہیں ہو گا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$
P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3x\sqrt{1-x^2},
$$
$$
P_2^2(x) = (1-x^2)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3(1-x^2),
$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_\ell^m(\cos\theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ہوتا ہے لہٰذا $P_\ell^m(\cos\theta)$ ہر صورت $\cos\theta$ کا کثیر رکنی ہو گا جسے طاق m کی صورت میں $\sin\theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۲.۴ میں $\cos\theta$ کے چند شریک لیژانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح ℓ کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہو گا؛ مزید $|m| > \ell$ کی صورت میں مساوات ۲۷.۴ کے تحت $P_\ell^m = 0$ ہو گا۔ یوں ℓ کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2\ell+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

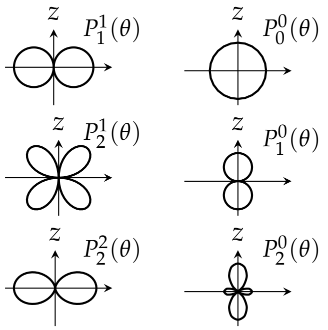
$$
\ell = 0,1,2,\dots; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots -1, 0, 1, \dots \ell-1, \ell \tag{۴.۲۹}
$$

ذرا رکیے! مساوات ۲۵.۴ دو رتبی تفرقی مساوات ہے: ℓ اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے، تاہم $\theta = 0$ اور (یا) $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے قابو بڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدد میں حجمی رکن درج ذیل ہو گا

$$
\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۴.۳۰}
$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیژانڈر تفاعلات $P_\ell^m(\cos\theta)$: (ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات برائے $r = P_\ell^m(\cos\theta)$ (ان ترسیمات میں r آپ کو θ رخ تفاعل کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیں۔)



(ب)

$$
\begin{aligned}
P_0^0 &= 1 & P_2^0 &= \tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\\
P_1^1 &= \sin\theta & P_3^3 &= 15\sin\theta(1-\cos^2\theta)\\
P_1^0 &= \cos\theta & P_3^2 &= 15\sin^2\theta\cos\theta\\
P_2^2 &= 3\sin^2\theta & P_3^1 &= \tfrac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)\\
P_2^1 &= 3\sin\theta\cos\theta & P_3^0 &= \tfrac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)
\end{aligned}
$$
(ا)

لہٰذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int |R|^2 r^2 \,\mathrm{d}r \int |Y|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1$$

یہاں R اور Y کی علیحدہ علیحدہ معمول زنی کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 \,\mathrm{d}r = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi}\int_0^\pi |Y|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1 \tag{۴.۳۱}$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات [۱۲] کو **کروی ہارمونیات** [۱۳] کہتے ہیں:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\,e^{im\phi}P_\ell^m(\cos\theta \tag{۴.۳۲}$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہو گا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروی ہارمونیات عمودی ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi [Y_\ell^m(\theta,\phi)]^*[Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{۴.۳۳}$$

[۱۲] معمول زنی مستقل کو سوال ۴.۵۴ میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علامتیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہو گی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_\ell^{-m} = (-1)^m(Y_\ell^m)^*$ ہو گا۔

[۱۳] spherical harmonics

جدول ۳.۴: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_\ell^m(\theta,\phi)$

$Y_0^0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = (\frac{15}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2}\cos\theta$	$Y_3^0 = (\frac{7}{16\pi})^{1/2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp(\frac{3}{8\pi})^{1/2}\sin\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp(\frac{21}{64\pi})^{1/2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = (\frac{5}{16\pi})^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = (\frac{105}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_2^{\pm 1} = \mp(\frac{15}{8\pi})^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp(\frac{35}{64\pi})^{1/2}\sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

جدول ۳.۴ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر ℓ کو **اسمتی کوانٹائی عدد**[14] جب کہ m کو **مقناطیسی کوانٹائی عدد**[15] کہتے ہیں۔

سوال ۳.۴: مساوات ۲۷.۴، ۲۸.۴ اور ۳۲.۴ استعمال کرکے Y_0^0 اور Y_2^1 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $\ell = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A\ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۲۵.۴) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) ناقابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۵.۴: مساوات ۳۲.۴ استعمال کرکے $Y_\ell^\ell(\theta,\phi)$ اور $Y_3^2(\theta,\phi)$ مرتب کریں۔ (آپ P_3^2 کو جدول ۲.۴ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_ℓ^ℓ آپ کو مساوات ۲۷.۴ اور ۲۸.۴ کی مدد سے مرتب کرنا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ ℓ اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۱۸.۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۶.۴: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کرکے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{2}{2\ell+1}\Big)\delta_{\ell\ell'} \tag{۳۴.۴}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: تکمل بالحصص استعمال کریں۔)

[14] azimuthal quantum number
[15] magnetic quantum number

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$، ایک دوسرے جیسا ہو گا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$، پر اثر انداز ہو گی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]R=\ell(\ell+1)R \tag{۴.۳۵}$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r)\equiv rR(r) \tag{۴.۳۶}$$

$R=u/r$، $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r=[r(\mathrm{d}u/\mathrm{d}r)-u]/r^2$، $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[r^2(\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)]=r\,\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2$ لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\left[V+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u=Eu \tag{۴.۳۷}$$

اس کو **رداسی مساوات**[۱۶] کہتے ہیں[۱۷] جو شکل و صورت کے لحاظ سے یک بُعدی مساوات شروڈنگر (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں **موثر مخفیہ**[۱۸] درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}}=V+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \tag{۴.۳۸}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[\ell(\ell+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو **مرکز گریز جزو**[۱۹] کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدا سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2\,\mathrm{d}r=1 \tag{۴.۳۹}$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے۔

مثال ۴.۱: درج ذیل **لامتناہی کروی کنویں**[۲۰] پر غور کریں۔

$$V(r)=\begin{cases}0 & r\le a\\ \infty & r>a\end{cases} \tag{۴.۴۰}$$

---

[۱۶] radial equation

[۱۷] یہاں m کمیت کو ظاہر کرتی ہے; رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

[۱۸] effective potential

[۱۹] centrifugal term

[۲۰] infinite spherical well

اس کے تفاعلات موج اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنویں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنویں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2\Big]u \tag{۴.۴۱}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۴.۴۲}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مسلط کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $\ell = 0$ کی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = -k^2 u \implies u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \to 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے قابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب[21] کرنا ہو گا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہٰذا $ka = n\pi$ ہو گا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$E_{n0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۴.۴۳}$$

جو عین یک بُعدی لامتناہی چکور کنویں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کی معمول زنی کرنے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہو گا۔ زاویائی جزو (جو $Y_0^0(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ ہے لہٰذا اس کی شمولیت یہاں ایک حقیر سا کام ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \tag{۴.۴۴}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین **کوانٹائی اعداد**[22] n، ℓ اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nm\ell}(r,\theta,\phi)$؛ جبکہ توانائی، $E_{n\ell}$، صرف n اور ℓ پر منحصر ہو گی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح ℓ کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_\ell(kr) + Brn_\ell(kr). \tag{۴.۴۵}$$

---

[21] در حقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج قابل معمول زنی ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ متناہی ہو: مساوات ۴.۳۱ میں r^2 کی بنا پر مبدا پر $R(r) \sim 1/r$ قابل معمول زنی ہے۔

[22] quantum numbers

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_\ell(x)$؛ چھوٹی x کے لئے متقاربی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$
$n_\ell \to -\frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}\frac{1}{x^{\ell+1}}, \quad x \ll 1$	$j_\ell \to \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!}x^\ell$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_\ell(x)$ رتبہ ℓ کا **کروی بیسل تفاعل**[23] ہے اور $n_\ell(x)$ رتبہ ℓ کا **کروی نیومن تفاعل**[24] ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$j_\ell(x) \equiv (-x)^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\ell \frac{\sin x}{x}; \quad n_\ell(x) \equiv -(-x)^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\ell \frac{\cos x}{x} \tag{۴.۴۶}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\\
j_1(x) &= (-x)\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x};\\
j_2(x) &= (-x)^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\sin x}{x} = x^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\\
&= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

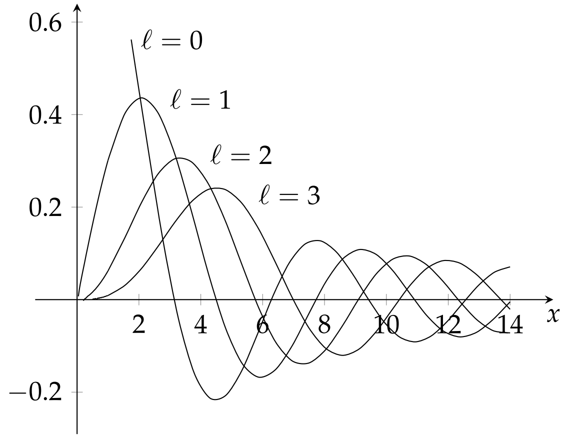
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

---

[23] spherical Bessel function
[24] spherical Neumann function



شکل ۴.۲: ابتدائی چار کروی بیسل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات متناہی ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے قابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_\ell = 0$ منتخب کرنا ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$R(r) = Aj_\ell(kr) \tag{۴.۴۷}$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہو گا

$$j_\ell(ka) = 0 \tag{۴.۴۸}$$

یعنی ℓ رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہو گا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۴.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بدقسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہو گا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{1}{a}\beta_{n\ell} \tag{۴.۴۹}$$

جہاں $\beta_{n\ell}$ رتبہ ℓ کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہو گا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{n\ell}^2. \tag{۴.۵۰}$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = A_{n\ell}j_\ell(\beta_{n\ell}r/a)Y_\ell^m(\theta,\phi). \tag{۴.۵۱}$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ ℓ کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2\ell+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا توانائی کی ہر سطح $(2\ell+1)$ گنا انحطاطی ہو گی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ $\square$

سوال ۴.۷:

ا. کروی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶ میں پیش کی گئی تعریفات سے) تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $x \ll 1$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر بے قابو بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $\ell = 1$ کے لئے $Arj_\ell(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروی کنویں کیلئے $\ell = 1$ کی صورت میں اجازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$ ہو گا۔ (اشارہ: پہلے دکھائیں $j_1(x) = 0 \implies x = \tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو متناہی کروی کنواں:

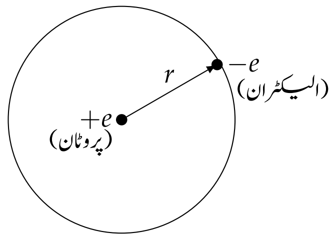
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $\ell = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ قانون کولمب کے تحت مخفی توانائی (بین الاقوامی اکائیوں میں) درج ذیل ہو گی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۴.۵۲}$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

لہٰذا رداسی مساوات (مساوات ۴.۳۷) درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Big]u=Eu \tag{۴.۵۳}$$

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے اجازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہٰذا میں اس کو، ہارمونی مرتعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراو کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہو گا)

$$\kappa\equiv\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۴.۵۴}$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}=\Big[1-\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)}+\frac{\ell(\ell+1)}{(\kappa r)^2}\Big]u$$

حاصل ہو گا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho\equiv\kappa r,\quad \rho_0\equiv\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa} \tag{۴.۵۵}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \Big[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\Big]u \tag{۴.۵۶}$$

اس کے بعد ہم حالات کے متقاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \to \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہو گا لہٰذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{۴.۵۷}$$

تاہم ($\rho \to \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $B = 0$ لینا ہو گا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \tag{۴.۵۸}$$

اس کے برعکس $\rho \to 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہو گا؛[۲۵] لہٰذا تخمیناً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

تاہم ($\rho \to 0$ کی صورت میں) $\rho^{-\ell}$ بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا $D = 0$ ہو گا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{\ell+1} \tag{۴.۵۹}$$

اگلے قدم پر متقاربی رویہ کو چھیلنے کی خاطر نیا تفاعل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۶۰}$$

[۲۵] یہ دلیل $\ell = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہو گی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علامتیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $v(\rho)$ سے $u(\rho)$ زیادہ سادہ ہو گا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \rho^{\ell} e^{-\rho}\Big[(\ell+1-\rho)v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\Big]$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \rho^{\ell} e^{-\rho}\Big\{\Big[-2\ell-2+\rho+\frac{\ell(\ell+1)}{\rho}\Big]v + 2(\ell+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2}\Big\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + 2(\ell+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + [\rho_0 - 2(\ell+1)]v = 0 \tag{۴.۶۱}$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$، کو ρ کا طاقتی تسلسل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \tag{۴.۶۲}$$

ہمیں عددی سر (c_0، c_1، c_2، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعہ میں "فرضی اشاریہ" j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ نیا مجموعہ $j=-1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جزو ضربی $(j+1)$ اس جزو کو ختم کرتا ہے لہٰذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^j + 2(\ell+1) + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j \\ -2\sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(\ell+1)]\sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j = 0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(\ell+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(\ell+1)]c_j = 0$$

یا

$$c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+\ell+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2\ell+2)} \right\} c_j \tag{۴.۶۳}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ توالی عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کا روپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔[۲۶]

آئیں j کی بڑی قیمت (جو ρ کی بڑی قیمت کی مطابقتی ہو گی جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ توالی درج ذیل کہتا ہے۔[۲۷]

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کریں کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \tag{۴.۶۴}$$

لہٰذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{\ell+1} e^{\rho} \tag{۴.۶۵}$$

---

[۲۶] آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متقاربی رویہ کو کیوں (جزو ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جزو ضربی $\rho^{\ell+1}$ باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر $c_{\ell+1}$ ہو گا)؛ $\rho^{\ell+1}$ باہر نکالنے سے تسلسل کا پہلا جزو ρ^0 حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس جزو ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ توالی حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

[۲۷] آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - (1+\ell)2$ اور نسب نما میں $2\ell + 2$ رد کرنے کی طرح $j+1$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جا سکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہو گا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے قابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نما والی غیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے کیونکہ یہ ناقابل معمول زنی ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا اعظم عدد صحیح، $j_{\text{اعظم}}$، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{اعظم}}+1)} = 0 \tag{۴.۶۶}$$

(یوں کلیہ توالی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$2(j_{\text{اعظم}} + \ell + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کوانٹائی عدد[۲۸]

$$n \equiv j_{\text{اعظم}} + \ell + 1 \tag{۴.۶۷}$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\rho_0 = 2n \tag{۴.۶۸}$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon^2\hbar^2\rho^2} \tag{۴.۶۹}$$

لہٰذا اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴.۷۰}$$

یہ مشہور زمانہ **کلیہ بوہر**[۲۹] ہے جو غالباً پورے کوانٹائی میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹائی میکانیات کے ذریعہ اس کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شروڈنگر 1924 میں منظر عام پر آئی۔)

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \tag{۴.۷۱}$$

[۲۸] principal quantum number
[۲۹] Bohr formula

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10}\,\text{m} \tag{۴.۷۲}$$

رداس بوہر[۳۰] کہلاتا[۳۱] ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \tag{۴.۷۳}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تفاعلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، ℓ اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = R_{n\ell}(r)Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{۴.۷۴}$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{n\ell}(r) = \frac{1}{r}\rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۷۵}$$

ہو گا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $j_{\text{اعظم}} = n - \ell - 1$ کا کثیر رکنی ہو گا، جس کے عددی سر درج ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تفاعل کی معمول زنی کرنا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+\ell+1-n)}{(j+1)(j+2\ell+2)}c_j \tag{۴.۷۶}$$

زمینی حال[۳۲] (یعنی اقل توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہو گا؛ طبعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_1 = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] = -13.6\,\text{eV} \tag{۴.۷۷}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی **بندشی توانائی**[۳۳] (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) $13.6\,\text{eV}$ ہے۔ مساوات ۴.۶۷ کے تحت $\ell = 0$ لہٰذا $m = 0$ ہو گا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi) \tag{۴.۷۸}$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہٰذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a}e^{-r/a} \tag{۴.۷۹}$$

---

[۳۰] Bohr radius

[۳۱] رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہٰذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

[۳۲] ground state

[۳۳] binding energy

اس کی مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول زنی کرنے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{|c_0|^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 \,\mathrm{d}r = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہو گا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہٰذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{۴.۸۰}$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6\,\mathrm{eV}}{4} = -3.4\,\mathrm{eV} \tag{۴.۸۱}$$

ہو گی جو پہلی ہیجان حال، بلکہ حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $\ell = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہو گا) یا $\ell = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1، 0 یا $+1$ ہو گی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہو گی۔ کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) $\ell = 0$ کے لئے $j = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہٰذا $v(\rho) = c_0(1-\rho)$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a} \tag{۴.۸۲}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹائی اعداد ℓ اور n کے لئے توسیعی عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہ توالی $\ell = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \tag{۴.۸۳}$$

(ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہو گا سوال ۴.۱۱ دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) ℓ کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$\ell = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۴.۸۴}$$

جبکہ ہر ℓ کے لئے m کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2\ell + 1)$ ہو گی (مساوات ۴.۲۹)، لہٰذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہو گی۔

$$d(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell + 1) = n^2 \tag{۴.۸۵}$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگیغ کثیر رکنیاں، $L^p_{q-p}(x)$

$L^2_0 = 2$	$L^0_0 = 1$
$L^2_1 = -6x + 18$	$L^0_1 = -x + 1$
$L^2_2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L^0_2 = x^2 - 4x + 2$
$L^3_0 = 6$	$L^1_0 = 1$
$L^3_1 = -24x + 96$	$L^1_1 = -2x + 4$
$L^3_2 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L^1_2 = 3x^2 - 18x + 18$

کثیر رکنی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہو گی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$v(\rho) = L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(2\rho) \tag{۴.۸۶}$$

جہاں

$$L^p_{q-p}(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^p L_q(x) \tag{۴.۸۷}$$

ایک **شریک لاگیغ کثیر رکنی**[۳۴] ہے جبکہ

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^q (e^{-x} x^q) \tag{۴.۸۸}$$

q ویں **لاگیغ کثیر رکنی**[۳۵] ہے۔[۳۶] (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

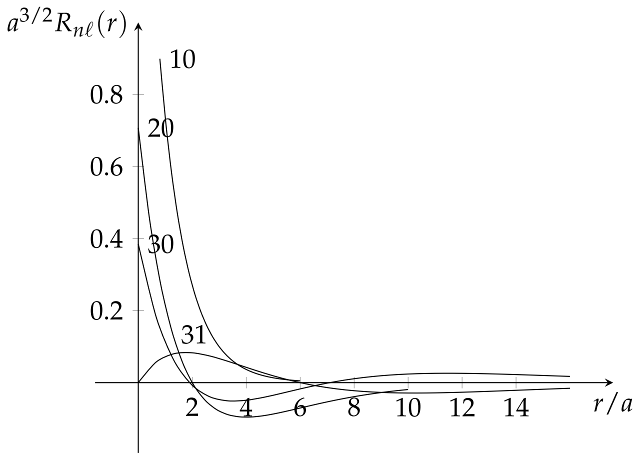
[۳۴] associated Laguerre polynomial

[۳۵] Laguerre polynomial

[۳۶] دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۴.۷: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاعلات، $R_{n\ell}(r)$

$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$
$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$
$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$
$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$
$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$
$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$
$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$
$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تفاعل موج $R_{n\ell}(r)$ کی ترسیمات۔

جدول ۴.۸: ہائیڈروجن نما جوہروں کے ابتدائی چند تفاعلات موج۔ ہائیڈروجن کے لئے $Z=1$ ہو گا۔

Ψ_{100}	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}}$
Ψ_{200}	$\frac{1}{\sqrt{32\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(2-\frac{Zr}{a})e^{-\frac{Zr}{2a}}$
Ψ_{210}	$\frac{1}{\sqrt{32\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(\frac{Zr}{a})e^{-\frac{Zr}{2a}}\cos(\theta)$
$\Psi_{21\pm1}$	$\frac{1}{\sqrt{64\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(\frac{Zr}{a})e^{-\frac{Zr}{2a}}\sin(\theta)e^{\pm i\phi}$
Ψ_{300}	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(27-18(\frac{Zr}{a})+2(\frac{Zr}{a})^2\right)e^{-\frac{Zr}{3a}}$
Ψ_{310}	$\frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(6(\frac{Zr}{a})-(\frac{Zr}{a})^2\right)e^{-\frac{Zr}{3a}}\cos(\theta)$
$\Psi_{31\pm1}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\left(6(\frac{Zr}{a})-(\frac{Zr}{a})^2\right)e^{-\frac{Zr}{3a}}\sin(\theta)e^{\pm i\phi}$
Ψ_{320}	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(\frac{Zr}{a})^2e^{-\frac{Zr}{3a}}(3\cos^2(\theta)-1)$
$\Psi_{32\pm1}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(\frac{Zr}{a})^2e^{-\frac{Zr}{3a}}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{\pm i\phi}$
$\Psi_{32\pm2}$	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(\frac{Zr}{a})^2e^{-\frac{Zr}{3a}}\sin^2(\theta)e^{\pm i2\phi}$

چند ابتدائی شریک لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعلات موج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درج ذیل ہیں۔

$$\psi_{n\ell m} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+\ell)!]^3}}\, e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^{\ell} [L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(2r/na)] Y^m_\ell(\theta,\phi) \tag{۴.۸۹}$$

(جدول ۴.۸ میں ہائیڈروجنی (ہائیڈروجن جیسے) جوہروں کے چند ابتدائی تفاعلات موج دیے گئے ہیں، جہاں ہائیڈروجن کے لئے $Z = 1$ ہو گا۔) یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولمب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنویں میں توانائیاں ℓ پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$\int \psi^*_{n\ell m}\psi_{n'\ell' m'} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{۴.۹۰}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور $(n \neq n')$ کی صورت میں H کی منفرد امتیازی قیمتوں کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا پر ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل ۴.۵)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل ۴.۶) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ ان کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کی معمول زنی کر کے ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کی معمول زنی کر کے ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

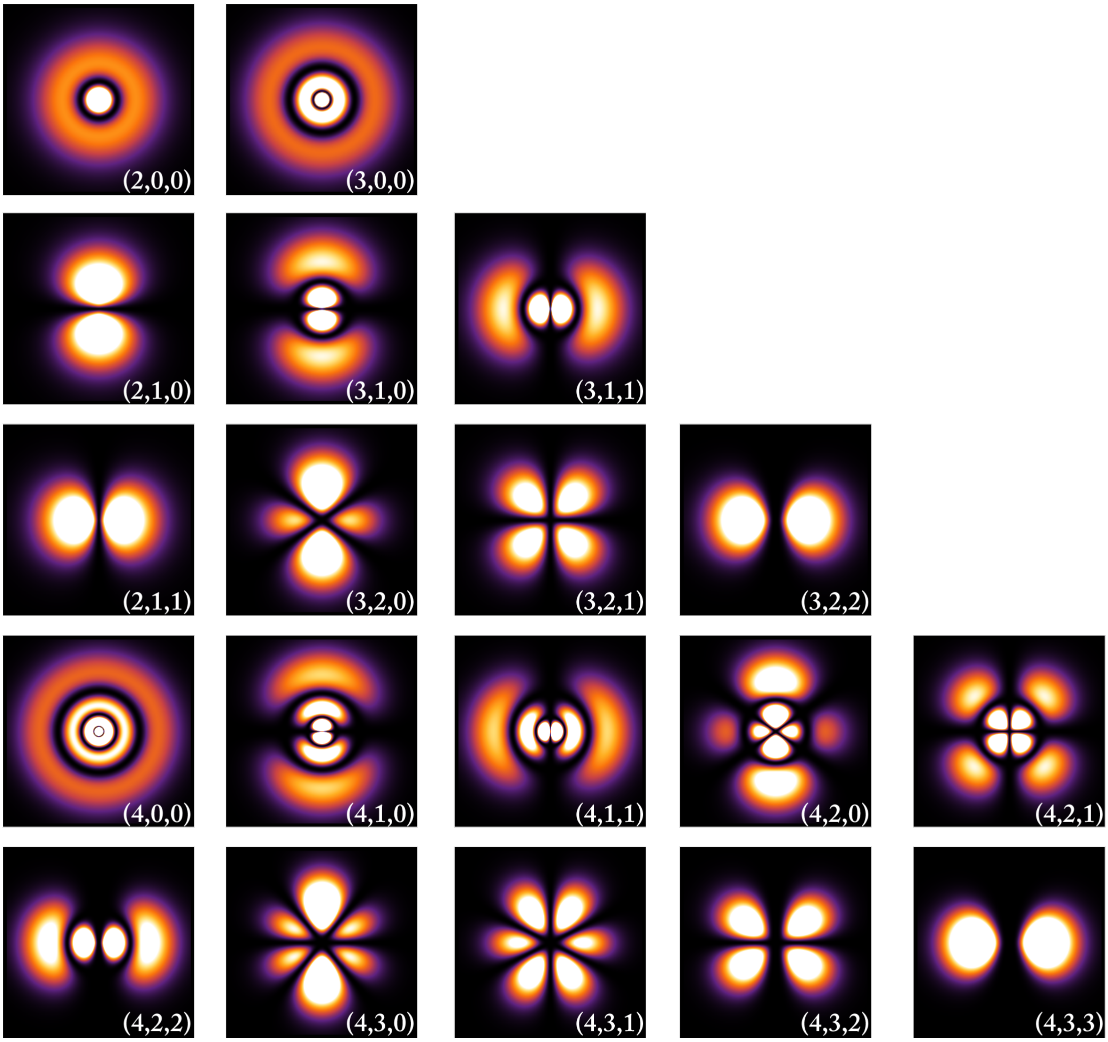
ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگیغ کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $\ell = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

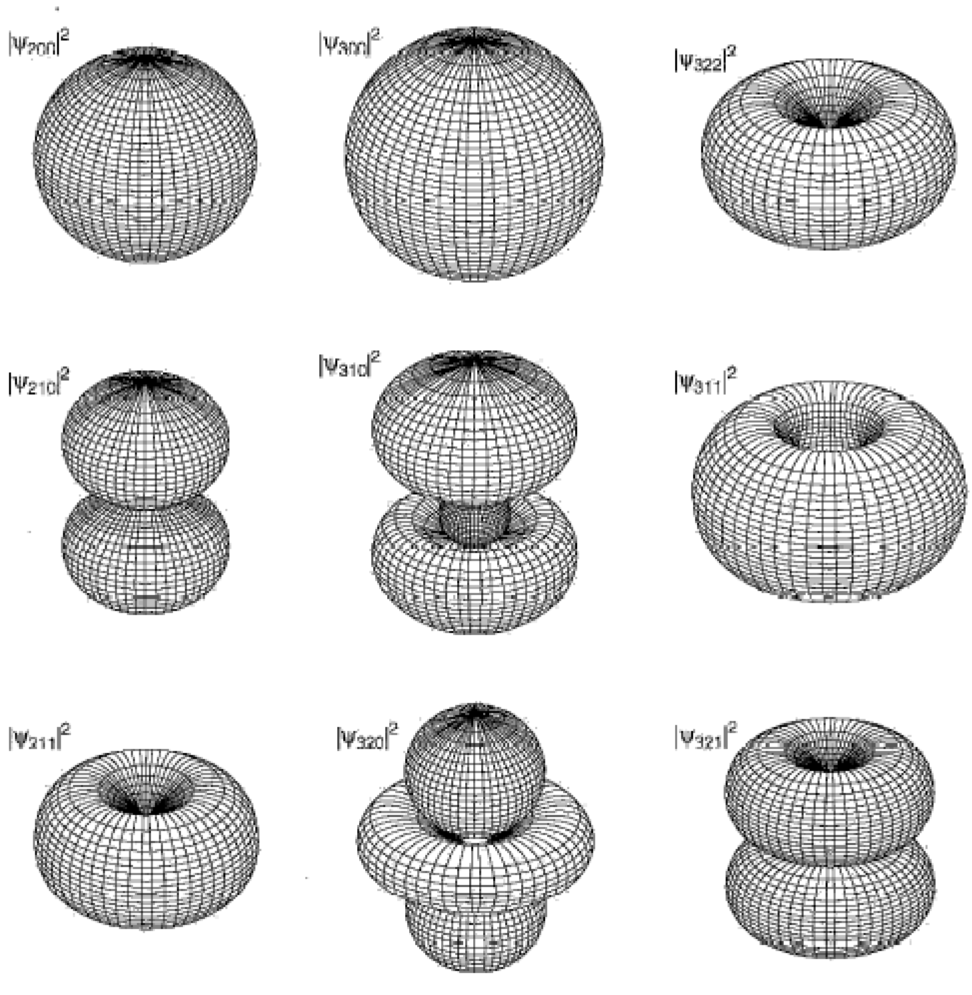
ج. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $\ell = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن تفاعل موج (n, ℓ, m) کی کثافتی ترسیمات۔



شکل ۴.۶: چند ابتدائی ہائیڈروجن تفاعل موج کی مستقل $|\Psi|^2$ سطحیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x\rangle$ اور $\langle x^2\rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا تکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہوگا، اور از مینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2$ ، $\ell = 1$ ، $m = 1$ کے لیے $\langle x^2\rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x ، y اور z کے لحاظ سے تشاکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r\sin\theta\cos\phi$ استعمال کرنا ہو گا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہو گی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہو گا کہ r اور $r + \mathrm{d}r$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2$ ، $\ell = 1$ ، $m = 1$ اور $n = 2$ ، $\ell = 1$ ، $m = -1$ کے درج ذیل خطی مجموعہ سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(\boldsymbol{r},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت ی $\langle V\rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہو گی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ توصورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال $\psi_{n\ell m}$ میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں **تحویل**[۳۷] کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقناطیسی نوریہ کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔[۳۸] عملاً ایسی چھیڑخانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہٰذا تحویل (جنہیں "کوانٹائی چھلانگ" کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا پر ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (نوریہ) خارج ہو گی جس کی تونائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \tag{۴.۹۱}$$

کے برابر ہو گا۔

---

[۳۷] transition

[۳۸] فطرتاً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب **کلیہ پلانک**[۳۹،۴۰] کے تحت نوریہ کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہو گی:

$$E_\gamma = h\nu \tag{۴.۹۲}$$

جبکہ **طول موج** $\lambda = c/\nu$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R\Big(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\Big) \tag{۴.۹۳}$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}\Big)^2 = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \tag{۴.۹۴}$$

رڈبرگ مستقل[۴۱] کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا **کلیہ رڈبرگ**[۴۲] ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقلات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال $(n_f = 1)$ میں تحویل، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کار **لیمان تسلسل**[۴۳] کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال $(n_f = 2)$ میں تحویل، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**[۴۴] کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں تحویل، **پاشن تسلسل**[۴۵] دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۷ دیکھیں۔ اس شکل میں مساوات ۴.۷ سے حاصل E_1 ، E_2 ، اور E_3 بھی دکھائے گئے ہیں۔) (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: **ہائیڈروجنی جوہر**[۴۶] Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ **ہیلیم**[۴۷] میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ **لتھیم**[۴۸] میں $Z = 3$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل

[۳۹] Planck's formula

[۴۰] نوریہ درحقیقت برقناطیسی اخراج کا ایک کوانٹائی ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹائی میکانیات قابل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر نوریہ کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

[۴۱] Rydberg constant

[۴۲] Rydberg formula

[۴۳] Lyman series

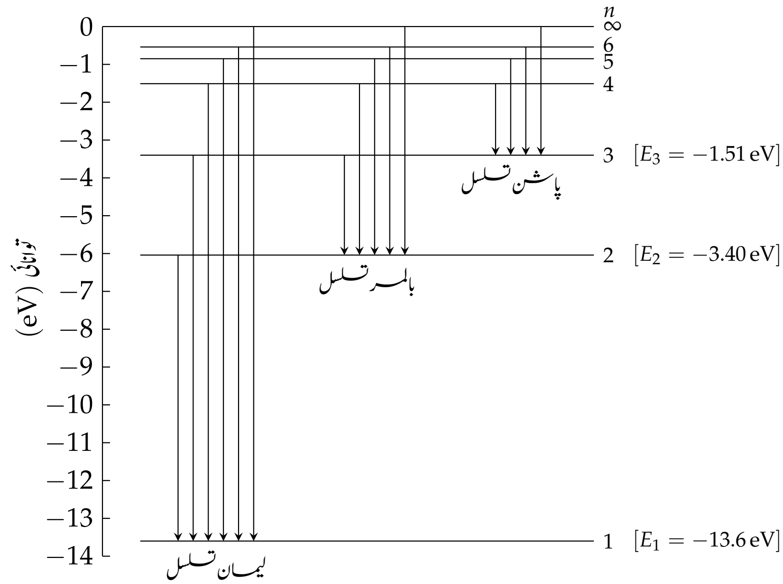
[۴۴] Balmer series

[۴۵] Paschen series

[۴۶] hydrogenic atom

[۴۷] Helium

[۴۸] Lithium



شکل ۴.۷: ہائیڈروجن طیف میں سطحیں توانائی اور تحویلات۔

$R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقناطیسی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \to Ze^2$ ہوگا لہٰذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں۔)

ب. اس نظام کا "رداس بوہر" a_g کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں تحویل کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہوگا؟ جواب جاول میں دیں۔ خارج نوریہ (یازیادہ ممکنہ طور پر گریویٹان[۳۹]) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

[۳۹] graviton

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، ℓ اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹائی عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ ℓ اور m مدارچی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹائی میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{۴.۹۵}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{۴.۹۶}$$

ان کے متعلقہ کوانٹائی عاملین معیاری نسخہ $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x$ ، $p_y \to -i\hbar\partial/\partial y$ ، $p_z \to -i\hbar\partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجازتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی قیمتیں حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی قیمتیں

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہو گا۔[۵۰]

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]\end{aligned} \tag{۴.۹۷}$$

باضابطہ مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \tag{۴.۹۸}$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل $(x \to y, y \to z, z \to x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{۴.۹۹}$$

---

[۵۰] کوانٹائی میکانیات میں تمام عاملین قانون جزیتی تقسیم: $(B + C) = AB + AC$ پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۱۷ پر حاشیہ ۳۶ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A + C]$ ہو گا۔

جو زاویائی معیار حرکت کے **بنیادی مقلبیت رشتے**[۵۱] ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ L_x L_y اور L_z غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

یا

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right| \tag{۴.۱۰۰}$$

ہو گا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہو گا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{۴.۱۰۱}$$

عامل L_x کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

(مقالب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہو گا۔) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہو گا

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \tag{۴.۱۰۲}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \tag{۴.۱۰۳}$$

اس طرح $\mathbf{L}$ کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہو گا اور ہم L^2 کا (مثلاً) L_z کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f \tag{۴.۱۰۴}$$

[۵۱] fundamental commutation relations

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$L\pm \equiv L_x \pm iL_y \tag{۴.۱۰۵}$$

L_z کے ساتھ مقلب درج ذیل ہو گا

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہٰذا

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{۴.۱۰۶}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہو گا۔

$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{۴.۱۰۷}$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_\pm(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہو گا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۸}$$

لہٰذا اسی امتیازی قیمت λ کے لیے $L_\pm f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہو گا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_\pm f) &= (L_z L_\pm - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \end{aligned} \tag{۴.۱۰۹}$$

لہٰذا نئے امتیازی قیمت $\mu \pm \hbar$ کے لیے L_z کا $L_\pm f$ امتیازی تفاعل ہو گا۔ ہم L_+ کو **عامل رفعت**[۵۲] کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قیمت کو $\hbar$ بڑھاتا ہے جبکہ L_- **عامل تقلیل**[۵۳] کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو $\hbar$ کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے، جس کا ہر پایہ قریبی پایہ سے L_z کی امتیازی قیمت کے لحاظ سے $\hbar$ کی ایک اکائی فاصلہ پر ہو گا (شکل ۴.۸)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفعت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچیں گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہو گا جو ایک ناممکن صورت[۵۴] ہے۔ لازماً سیڑھی کا ایسا "بالاترین پایہ" f_t، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن[۵۵] کرے گا۔

$$L_+ f_t = 0 \tag{۴.۱۱۰}$$

فرض کریں اس بالاترین پایہ پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar\ell$ ہو (حرف ℓ کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

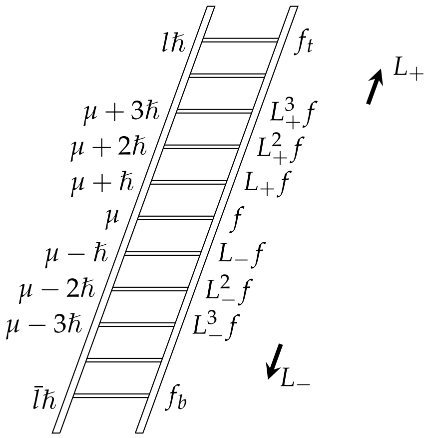
---

[۵۲] raising operator

[۵۳] lowering operator

[۵۴] باضابطہ طور پر $\langle L^2\rangle = \langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle + \langle L_z^2\rangle$ ہو گا، لیکن $\langle L_x^2\rangle = \langle f|L_x^2 f\rangle = \langle L_x f|L_x f\rangle \geq 0$ ہے (اور L_y کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا) لہٰذا $\lambda = \langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہو گا۔

[۵۵] در حقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ $L_+ f_t$ ناقابل معمول زنی ہے؛ اس کا معیار صفر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔ سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۴.۸: زاویائی معیار حرکت حالات کی "سیڑھی"۔

$$L_z f_t = \hbar \ell f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \tag{۴.۱۱۱}$$

اب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} L_\pm L_\mp &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z) \end{aligned}$$

یا دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہو گا۔

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z \tag{۴.۱۱۲}$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 \ell^2 + \hbar^2 \ell) f_t = \hbar^2 \ell(\ell + 1) f_t$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \tag{۴.۱۱۳}$$

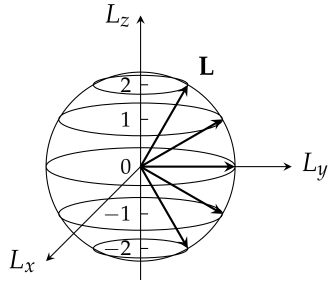
یہ ہمیں L_z کی امتیازی قیمت کی اعظم قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی قیمت دیتی ہے۔

ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ f_b بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$L_- f_b = 0 \tag{۴.۱۱۴}$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر L_z کا امتیازی قیمت $\hbar\bar{\ell}$ ہو:

$$L_z f_b = \hbar \bar{\ell} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \tag{۴.۱۱۵}$$



شکل ۴.۹: زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $\ell = 2$)۔

مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{\ell}^2 - \hbar^2 \bar{\ell}) f_b = \hbar^2 \bar{\ell}(\bar{\ell} - 1) f_b$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{\ell}(\bar{\ell} - 1) \tag{۴.۱۱۶}$$

مساوات ۴.۱۱۳ اور مساوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $\ell(\ell+1) = \bar{\ell}(\bar{\ell} - 1)$ ہو گا لہٰذا یا $\bar{\ell} = \ell + 1$ ہو گا (جو بے معنی ہے، چونکہ نچلا ترین پایہ، بالاترین پایہ سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{\ell} = -\ell \tag{۴.۱۱۷}$$

ظاہر ہے کہ L_z کی امتیازی قیمتیں $m\hbar$ ہوں گے، جہاں m (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت N عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-\ell$ تا $+\ell$ ہو گی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\ell = -\ell + N$ یعنی $\ell = N/2$ ہو گا، لہٰذا ℓ لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہو گا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد ℓ اور m کرتے ہیں:

$$L^2 f_\ell^m = \hbar^2 \ell(\ell+1) f_\ell^m; \quad L_z f_\ell^m = \hbar m f_\ell^m \tag{۴.۱۱۸}$$

جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots ; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell \tag{۴.۱۱۹}$$

ℓ کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2\ell + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی "سیڑھی" کے $2\ell + 1$ "پائے" ہوں گے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۴.۹ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $\ell = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیر کے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں $\hbar$ کی اکائیوں میں

$\sqrt{\ell(\ell+1)}$ ہو گی جو (یہاں $2.45 = \sqrt{6}$ ہے) جبکہ ان کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں (-2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2) ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کا رداس)، z جزو کی اعظم قیمت سے بڑا ہے! (ماسوائے $\ell = 0$ کی "حقیر" صورت میں، عموماً $\ell > \sqrt{\ell(\ell+1)}$ ہو گا۔) آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ "کیا میں z محدد کو زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟" اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقاً z محدد کو $\mathbf{L}$ کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ $\mathbf{L}$ کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعیین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت تعیین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر L_z کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب L_x اور L_y ہم نہیں جان سکتے ہیں شکل ۴.۹ میں سمتیات گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہو تا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y بلا تعیین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، L^2 اور L_z کی امتیازی قیمتوں کا تعیین کیا۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہو گا۔ میں کانٹے کی بات $f_\ell^m = Y_\ell^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات وہی کروی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حروف ℓ اور m استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی قیمتوں کے ہرمشی عاملین (L^2 اور L_z) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm} f_\ell^m = (A_\ell^m) f_\ell^{m\pm1} \tag{۴.۱۲۰}$$

جہاں A_ℓ^m کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کی معمول زنی کرنے کی خاطر A_ℓ^m کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ $L_{\mp}$ اور $L_{\pm}$ ایک دوسرے کے ہرمشی جوڑی دار ہیں (چونکہ L_x اور L_y قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہرمشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_\ell^m = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)} = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)} \tag{۴.۱۲۱}$$

دیکھیے گا کہ سیڑھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہو گا (جب آپ f_ℓ^ℓ پر L_+ یا $f_\ell^{-\ell}$ پر L_- لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

ا. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل

مقالب حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
&[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\
&[L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0
\end{aligned} \tag{۴.۱۲۲}
$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. مقالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ہیں) تلاش کریں۔

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کے ہیملٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل $\mathbf{L}$ کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں H ، L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفیہ $V(\boldsymbol{r})$ میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت $\mathbf{L}$ کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathbf{L} \rangle = \langle \mathbf{N} \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہرنفسٹ کا مماثل گھومتا تعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشاکلی مخفیہ کے لیے $\mathrm{d}\langle \mathbf{L} \rangle\, \mathrm{d}t = 0$ ہوگا۔ (یہ **زاویائی معیار حرکت کی بقا**[۵۲] کا کوانٹائی میکانی روپ ہے۔)

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا۔ اب $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla})$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{۴.۱۲۳}$$

جہاں $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\Big[r(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\frac{\partial}{\partial r} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta)\frac{\partial}{\partial \theta} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\phi)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big]$$

[۵۲] conservation of angular momentum

اب $(\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_r) = 0$ ، $(\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_\theta) = \boldsymbol{a}_\phi$ اور $(\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_\phi) = -\boldsymbol{a}_\theta$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\Big(\boldsymbol{a}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۴}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a}_\theta = (\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} - (\sin\theta)\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۲۵}$$

$$\boldsymbol{a}_\phi = -(\sin\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\phi)\boldsymbol{j} \tag{۴.۱۲۶}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}[(-\sin\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\phi\,\boldsymbol{j})\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\phi}]$$

ہو گا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۷}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\Big(+\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۸}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{۴.۱۲۹}$$

ہمیں عامل رفعت اور عامل تقلیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i}\Big[(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

تاہم $\cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$ ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۰}$$

بالخصوص (سوال ۴.۲۱-ا) درج ذیل

$$L_+L_- = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۱}$$

لہٰذا (سوال ۴.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$L^2 = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big] \tag{۴.۱۳۲}$$

ہم اب $f_\ell^m(\theta,\phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ L^2 کا امتیازی تفاعل ہے، جس کا امتیازی قیمت $\hbar^2\ell(\ell+1)$ ہے۔

$$L^2 f_\ell^m = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]f_\ell^m = \hbar^2\ell(\ell+1)f_\ell^m$$

یہ ٹھیک "زاویائی مساوات" (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قیمت $m\hbar$ ہو گا:

$$L_z f_\ell^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}f_\ell^m = \hbar m f_\ell^m$$

جو اِسّمتی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروی ہارمونیات $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروی ہارمونیات ہوں گے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقلوبی عاملین H L^2 اور L_z کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi,\quad L^2\psi = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi,\quad L_z\psi = \hbar m\psi \tag{۴.۱۳۳}$$

ہم مساوات ۱۳۲.۴ استعمال کرتے ہوئے مساوات مساوات شروڈنگر ۴.۱۴ کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2}\Big[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+L^2\Big]\psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورت حال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح ℓ قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہوئیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، ℓ کی (اور لہٰذا m کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: آزمائشی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہٰذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_\ell^l$ کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جزو-ا کا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $L_z Y_\ell^\ell = \hbar l Y_\ell^\ell$ ہوگا، $Y_\ell^\ell(\theta, \phi)$ کی قیمت معمول زنی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلاواسطہ تکمل کے ذریعے معمول زنی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجے کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۳ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$$

عامل رفت کا $Y_2^2(\theta, \phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے، کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

ا. دکھائیں کہ اس بے لچک پھرکی[57] کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انحطاطیت کیا ہوگی؟

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے **مداری**[58] $(\mathbf{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم **چکر**[59] $(\mathbf{S} = I\omega)$ کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا پر زمین کا مدارچی زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنا پر اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ فرق محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی "مداری" زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ $\mathbf{S}$ کے برابر ہوگا۔ کوانٹائی میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی فرق پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنا پر مدارچی زاویائی معیار حرکت (جسے کروی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار

[57] rigid rotor
[58] orbital
[59] spin

حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو مقام کے متغیرات r θ اور ϕ سے بیان نہیں کیا جا سکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہٰذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطی ذرہ ہے، لہٰذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدارچی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہو گا کہ بنیادی ذرات **غیر خلقی**[۶۰] زاویائی معیار حرکت $\mathbf{L}$ کے ساتھ ساتھ **خلقی**[۶۱] زاویائی معیار حرکت $\mathbf{S}$ بھی رکھتے ہیں۔

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مدارچی زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبیت رشتوں[۶۲] سے شروع کرتے ہیں۔

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \tag{۴.۱۳۴}$$

یوں (پہلے کی طرح) S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات[۶۳]

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \tag{۴.۱۳۵}$$

اور

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle \tag{۴.۱۳۶}$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات (θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں) لہٰذا یہ کروی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنا پر ہم s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتوں

(۴.۱۳۷)

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص اور ناقابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) **چکر**[۶۴] کہتے ہیں: π میزان کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1 ؛ ڈیلٹا کا چکر $3/2$ ؛ گریویٹان کا چکر 2 ؛ وغیرہ

---

[۶۰] extrinsic

[۶۱] intrinsic

[۶۲] ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ مداری زاویائی معیار حرکت کے مماثل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ نفیس انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماو کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقلوبی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکری، مداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ مداری شامل ہوں گے۔

[۶۳] چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے "سمتاویہ" علامتیت استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے Y_ℓ^m کو $|\ell m\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہٰذا میں S_z کے امتیازی قیمت کے لئے m استعمال کروں گا، جیسا میں نے L_z کے لئے بھی کیا (بعض مصنفین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں m_ℓ اور m_s لکھتے ہیں)۔

[۶۴] spin

وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران کا) مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حامل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہو گا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہو گا، جس کی بنا پر نظریہ چکر نسبتاً سادہ ہے۔[65]

سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{۴.۱۳۸}$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنشٹائن کلیہ $E = mc^2$ سے **کلاسیکی الیکٹران رداس**[66]، r_c، حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب "خط استوا" پر کسی نقطے کی رفتار ($\mathrm{m\,s^{-1}}$ میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (در حقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید غلط قرار دیتا ہے۔)

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ **کوارک**[67] اور تمام **لپٹان**[68] کیلئے $s = \frac{1}{2}$ ہو گا لہٰذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف "دو" امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر $\uparrow$) ہے جو ہم **میدان چکر**[69] پکارا جاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو **مخالف میدان چکر**[70] ($\downarrow$) کہلاتا ہے۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو رکنی قالب قطار (یا **چکر کار**[71]) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \tag{۴.۱۳۹}$$

---

[65] یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے 1/2 چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ پیچیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی ہلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُعدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ 2×2 قالب اور 2 رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مصنفین کوانٹائی میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی سادگی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

[66] classical electron radius

[67] quarks

[68] leptons

[69] spin up

[70] spin down

[71] spinor

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۰}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۱}$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

ساتھ ہی، عاملین چکر 2×2 قالب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2\,\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2\,\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \tag{۴.۱۴۲}$$

ہم $\mathbf{S}^2$ کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا قالب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہو گا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۳}$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z\,\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\,\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{۴.۱۴۴}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۵}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$\mathbf{S}_+ \chi_- = \hbar\chi_+, \quad \mathbf{S}_- \chi_+ = \hbar\chi_-, \quad \mathbf{S}_+ \chi_+ = \mathbf{S}_- \chi_- = 0,$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۶}$$

اب چونکہ $S_\pm = S_x \pm iS_y$ ہے لہٰذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۷}$$

چونکہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں زیادہ صاف روپ $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۸}$$

یہ **پالی قالب چکر**[۴۲] ہیں۔ دھیان رکھیں کہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ اور $\mathbf{S}^2$ تمام ہرمشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس $\mathbf{S}_+$ اور $\mathbf{S}_-$ غیر ہرمشی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔

یقیناً $\mathbf{S}_z$ کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت}\right); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت}\right) \tag{۴.۱۴۹}$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیمائش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $+\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا (یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہو گا)۔[۴۳]

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{۴.۱۵۰}$$

---

[۴۲] Pauli spin matrices

[۴۳] لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہتے ہیں کہ اگر S_z کی پیمائش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہو گا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۴۲ دیکھیں۔)

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شماریاتی مفہوم کے تحت ہمیں $\mathbf{S}_x$ کے امتیازی قیمتیں اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

لہٰذا $\beta = \pm\alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{S}_x$ کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(+\frac{\hbar}{2}\ \text{امتیازی قیمت}\right); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(-\frac{\hbar}{2}\ \text{امتیازی قیمت}\right) \tag{۴.۱۵۱}$$

بطور ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات سے فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \tag{۴.۱۵۲}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a+b|^2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a-b|^2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہونگے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہٰذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $(1/2)\left|(3+i)/\sqrt{6}\right|^2 = 5/6$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $(1/2)\left|(-1+i)/\sqrt{6}\right|^2 = 1/6$ ہوگا۔اتفاقاً S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big)+\frac{1}{6}\Big(-\frac{\hbar}{2}\Big)=\frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلاواسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x\rangle = \chi^\dagger \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix}\frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک فرضی پیمائشی تجربہ سے گزارتا ہوں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ فرض کریں ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ''اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا z جزو کیا ہے؟''، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہے؛ چونکہ S_z کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ''اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو کیا ہوگا؟''، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ گر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ''حقیقت پسند'' ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: ''کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟'' نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک معلوم ہے جو ψ_+ ہے۔ ''تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟'' اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر S_x اور S_z کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا x جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ فرض کریں وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھتا ہے) ''اس ذرے کی S_x قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔'' جی آپ درست فرما رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربہ سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔ ''ظاہر ہے، آپ بال کی کھال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بنا؟ میں اب S_x اور S_z دونوں کو جانتا ہوں۔'' جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں جبکہ S_z کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔ ''لیکن

S_x کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون خراب نہ ہو۔" اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سر انجام دینے سے نصف مرتبہ $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: "اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک مقام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے"، ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹائی میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تقریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب $1/2$ چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹائی میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

ا. تصدیق کیجیے گا کہ چکری قالب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

ب. دکھائیں کہ پالی چکری قالب (مساوات ۴.۱۴۸) قاعدہ ضرب

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_{\ell}\epsilon_{jk\ell}\sigma_\ell \tag{۴.۱۵۳}$$

کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ x ، y اور z کو ظاہر کرتے ہیں، اور $\epsilon_{jk\ell}$ علامت **لوی و چویتا**[47] ہے، جس کی قیمت $jk\ell = 123$ یا 231 یا 312 کی صورت میں $+1$ جبکہ $jk\ell = 132$ یا 213 یا 321 کی صورت میں -1 اور بصورت دیگر 0 ہوگی۔

سوال ۴.۲۷: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A\begin{pmatrix}3i\\4\end{pmatrix}$$

ا. معمول زنی مستقل A تعین کریں۔

ب. S_x ، S_y ، اور S_z کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. "عدم یقینیت" σ_{S_x} ، σ_{S_y} اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں σ سے مراد معیاری انحراف ہے نہ کہ پالی قالب!)

د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکردار ترتیبی مرتب اجتماعات جہاں L کی جگہ S ہوگا) کے عین مطابق ہیں۔

---

[47] Levi-Civita

سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے $\langle S_x \rangle$ ، $\langle S_y \rangle$ ، $\langle S_z \rangle$ ، $\langle S_x^2 \rangle$ ، $\langle S_y^2 \rangle$ ، اور $\langle S_z^2 \rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ $\langle S^2 \rangle = \langle S_z^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_x^2 \rangle$ ہے۔

سوال ۴.۲۹:

ا. S_y کی امتیازی قیمتیں اور امتیازی چکر کار تلاش کریں۔

ب. عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہو گا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ a اور b غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!

ج. S_y^2 کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا قالب $\mathbf{S}_r$ تیار کریں۔ کروی محدد استعمال کریں جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۵۴}$$

قالب $\mathbf{S}_r$ کی امتیازی قیمتیں اور (معمول شدہ) امتیازی چکر کار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \tag{۴.۱۵۵}$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری جز و ضرب، مثلاً $e^{i\phi}$ ، سے ضرب دے سکتے ہو لہٰذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چکر ایک (1) ہے کے لیے چکری قالب ($\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ اور $\mathbf{S}_z$) تیار کریں۔ اشارہ: S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے؟ ہر (ان) حال پر S_z ، S_+ اور S_- کا عمل تعین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چکر کاٹتا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا **مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر**[۴۵] $\boldsymbol{\mu}$ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت $\mathbf{S}$ کا راست متناسب ہو گا:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\,\mathbf{S} \tag{۴.۱۵۶}$$

---

[۴۵] magnetic dipole moment

جہاں تناسبی مستقل γ **مسکن مقناطیسی نسبت**[۷۶] کہلاتا[۷۷] ہے۔ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت مروڑ $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت مروڑ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{۴.۱۵۷}$$

لہٰذا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں، ایک مقام پر ساکن[۷۸]، باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\gamma \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{S} \tag{۴.۱۵۸}$$

مثال ۴.۳: **لارمر استقبالی حرکت**[۷۹]: فرض کریں z رخ یکساں مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{k} \tag{۴.۱۵۹}$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ قالبی روپ میں ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہو گی۔

$$\mathbf{H} = -\gamma B_0 \, \mathbf{S}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۰}$$

ہیملٹنی $\mathbf{H}$ کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو $\mathbf{S}_z$ کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \tag{۴.۱۶۱}$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی اقل توانائی اس صورت ہو گی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیملٹنی غیر تابع وقت ہے لہٰذا تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{H} \chi \tag{۴.۱۶۲}$$

---

[۷۶] gyromagnetic ratio

[۷۷] کلاسیکی طور پر ایک جسم، جس میں بار q اور کمیت m کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت $q/2m$ ہو گی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریہ سے ممکن ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کلاسیکی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی $(\gamma = -e/m)$ ہے۔

[۷۸] اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہو گی، اور مزید اس کو قوت لورنز $(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ کا بھی سامنا ہو گا، جس کو مخفی توانائی تفاعل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے، لہٰذا اس کو (اب تک متعارف) مساوات شروڈنگر میں نسب نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (سوال ۴.۵۹)، تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن بصورت دیگر ساکن ہے۔

[۷۹] Larmor precession

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہو گا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \qquad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں[80] جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۳}$$

آئیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں:

$$\begin{aligned}\langle S_x \rangle =& \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_x \, \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ & \times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ =& \frac{\hbar}{2} \sin\alpha \cos(\gamma B_0 t)\end{aligned} \tag{۴.۱۶۴}$$

اسی طرح

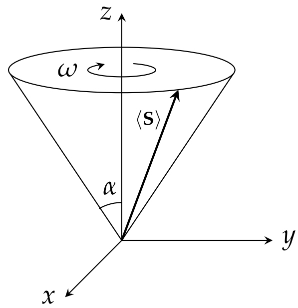
$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_y \, \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin\alpha \sin(\gamma B_0 t) \tag{۴.۱۶۵}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_z \, \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos\alpha \tag{۴.۱۶۶}$$

---

[80] یہاں a اور b کو حقیقی فرض کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو t کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔



شکل ۴.۱۰: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle \mathbf{S} \rangle$ کی استقبالی حرکت۔

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۱۰) محور z کے ساتھ $\langle \mathbf{S} \rangle$ مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد **لارمر تعدد**[81]

$$\omega = \gamma B_0 \tag{۴.۱۶۷}$$

سے استقبالی حرکت[82] کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہرنفسٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle \mathbf{S} \rangle$ ارتقا پائے گا۔ بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سباق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

مثال ۴.۴: **تجربہ شٹرن و گرلاخ:**[83] ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت مروڑ بلکہ قوت:[84]

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۶۸}$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقہ سے علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تعدیلی[85] جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان:

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = -\alpha x \boldsymbol{i} + (B_0 + \alpha z)\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۶۹}$$

کے خطہ سے گزرتی ہے (شکل ۴.۱۱)، جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف z جزو سے غرض ہے، لیکن بد قسمتی

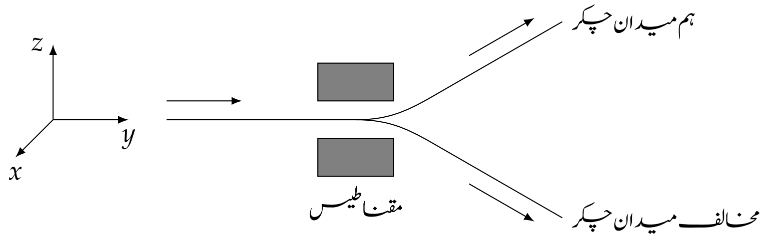
[81] Larmor frequency

[82] کلاسیکی صورت میں صرف توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقناطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔

[83] Stern-Gerlach experiment

[84] توانائی (مساوات ۴.۱۵۷) کی منفی ڈھلوان کے برابر قوت $\boldsymbol{F}$ ہو گی۔

[85] ہم تعدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت لورنز کی بنا پر شعاع کے جھکنے سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تا کہ ہم مقامی موجی اکٹھ مرتب کر کے حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عملاً، شٹرن و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہو گا۔



شکل ۴.۱۱: شٹرن وگرلاخ آلہ۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقناطیسی قانون $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا۔) ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگی۔

$$\boldsymbol{F} = \gamma\alpha(-S_x\boldsymbol{i} + S_z\boldsymbol{k})$$

تاہم B_0 کے گرد لارمر استقبالی حرکت کی بنا، S_x تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اوسط قیمت دیگا، لہٰذا z رخ خالص قوت درج ذیل ہوگی

$$F_z = \gamma\alpha S_z \tag{۴.۱۷۰}$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ S_z کوانٹاشدہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہوکر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹازنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مدارچی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہٰذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہوگا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی۔)

اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل خالصتاً کلاسیکی تھا جبکہ کوانٹائی میکانیات میں "قوت" کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہٰذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوکٹ کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوکٹ میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت T (جس دوران ذرہ مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہوکر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{۴.۱۷۱}$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں B کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \qquad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} \qquad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت)

$$E_\pm = \mp\gamma(B_0 + \alpha z)\frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۲}$$

ہو گا لہٰذا ($t \geq T$ کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$\chi(t) = \left(ae^{i\gamma TB_0/2}\chi_+\right)e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(be^{-i\gamma TB_0/2}\chi_-\right)e^{-i(\alpha\gamma T/2)z} \tag{۴.۱۷۳}$$

ان دونوں اجزاء کا اب z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مساوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہو گا

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۴}$$

اور یہ مثبت z رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان جزو کا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی z رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہو گی۔ (چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_zT$ ہے لہٰذا مساوات ۴.۱۷۴ پہلے حاصل کردہ نتیجہ (مساوات ۴.۱۷۰) کے مطابق ہے۔)

کوانٹائی میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گرلاخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹائی حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جا سکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر تقطیب شدہ شعاع کو شٹرن و گرلاخ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z جزو جاننا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گرلاخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

ا. وقت t پر چکری زاویائی معیار حرکت کی x رخ جزو کا پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا ؟

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہو گا؟

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \cos(\omega t)\,\boldsymbol{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

ا. اس نظام کا ہیملٹنی قالب تیار کریں۔

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹران ہم میدان حال (یعنی $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے، لہٰذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تابع وقت مساوات شروڈنگر (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلاواسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج. S_x کی پیمائش سے $\hbar/2$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟ جواب:

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے اقل درکار میدان (B_0) کتنا ہو گا؟

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال[86] میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہٰذا کل چار ممکنات ہوں گی:[87]

$$\uparrow\uparrow,\quad \uparrow\downarrow,\quad \downarrow\uparrow,\quad \downarrow\downarrow \tag{۴.۱۷۵}$$

جہاں پہلا تیر کا نشان (یعنی بایاں تیر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہو گا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)} \tag{۴.۱۷۶}$$

[86] میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ نہ تو مدارچی زاویائی معیار حرکت ہو اور نہ ہی ہمیں اس کے بارے میں فکرمند ہونے کی ضرورت ہو۔

[87] یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہو گا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہو گا۔

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک، S_z کا امتیازی حال ہو گا؛ ان کے z اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقے سے جمع ہوتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
S_z\chi_1\chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)})\chi_1\chi_2 = (S_z^{(1)}\chi_1)\chi_2 + \chi_1(S_z^{(2)}\chi_2) \\
&= (\hbar m_1\chi_1)\chi_2 + \chi_1(\hbar m_2\chi_2) = \hbar(m_1 + m_2)\chi_1\chi_2
\end{aligned}
$$

دیتے ہیں۔ یاد رہے $\mathbf{S}^{(1)}$ صرف χ_1 پر عمل کرتا ہے اور $\mathbf{S}^{(2)}$ صرف $\chi 2$ پر عمل کرتا ہے۔ یہ علامتیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہو گا:

$$
\begin{aligned}
\uparrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\uparrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\
\downarrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
\downarrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1
\end{aligned}
$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے: m کو چاہیے کہ $-s$ تا $+s$ عدد صحیح قدموں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ $s = 1$ ہے لیکن یہاں ایک "اضافی" حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ لاگو کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)}\uparrow)\uparrow + \uparrow(S_-^{(2)}\uparrow) \\
&= (\hbar\downarrow)\uparrow + \uparrow(\hbar\downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات ($|sm\rangle$ علامتی روپ میں) درج ذیل ہوں گے۔

$$
\left\{
\begin{aligned}
|11\rangle \quad &= \uparrow\uparrow \\
|10\rangle \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\
|1\,-1\rangle &= \downarrow\downarrow
\end{aligned}
\right\} \quad s = 1 \ (\text{سہ تا}) \tag{۴.۱۷۷}
$$

(تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-ا دیکھیں۔) اسی بنا پر اسے سہ تا[۸۸] ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو $s = 0$ کا حاصل ہو گا۔

$$
\left\{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right\} \qquad s = 0 \ (\text{یک تا}) \tag{۴.۱۷۸}
$$

[۸۸] triplet

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے صفر حاصل ہو گا (سوال ۴.۳۴-ب دیکھیں۔)

یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک (1) یا صفر (0) ہو گا، جو اس پر منحصر ہو گا کہ آیا وہ سہ تایا یک تا تنظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہو گا کہ سہ تا حالات، S^2 کے امتیازی سمتیات ہیں جن کا امتیازی قیمت $2\hbar^2$ ہے، اور یک تا حالات، S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قیمت صفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\,\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} \tag{۴.۱۷۹}$$

مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}(\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)}\uparrow)(S_x^{(2)}\downarrow) + (S_y^{(1)}\uparrow)(S_y^{(2)}\downarrow) + (S_z^{(1)}\uparrow)(S_z^{(2)}\downarrow)\\
&= \Big(\frac{\hbar}{2}\downarrow\Big)\Big(\frac{\hbar}{2}\uparrow\Big) + \Big(\frac{i\hbar}{2}\downarrow\Big)\Big(\frac{-i\hbar}{2}\uparrow\Big) + \Big(\frac{\hbar}{2}\uparrow\Big)\Big(\frac{-\hbar}{2}\downarrow\Big)\\
&= \frac{\hbar^2}{4}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow)
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}(2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}\,|10\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}|10\rangle \tag{۴.۱۸۰}$$

اور

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}\,|00\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle \tag{۴.۱۸۱}$$

ہوں گے۔

مساوات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور مساوات ۴.۱۴۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$S^2|10\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\Big)|10\rangle = 2\hbar^2|10\rangle \tag{۴.۱۸۲}$$

ہے لہٰذا $|10\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قیمت $2\hbar^2$ ہو گی؛ اور

$$S^2|00\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\Big)|00\rangle = 0 \tag{۴.۱۸۳}$$

ہے لہٰذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قیمت 0 ہو گی۔ (میں آپ کے لئے سوال ۴.۳۴-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہو گی کہ $|11\rangle$ اور $|1\;-1\rangle$ موزوں امتیازی قیمت کے، S^2 کے امتیازی تفاعلات ہیں۔)

ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر 1 چکر اور 0 چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکریں s کیا حاصل ہونگے؟[89] اس کا جواب[90] ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_2 > s_1$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک؛ اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک، نیچے آتے ہوئے ہر چکر:

$$s = (s_1 + s_2),\ (s_1 + s_2 - 1),\ (s_1 + s_2 - 2),\ \dots\ ,|s_1 - s_2| \tag{۴.۱۸۴}$$

حاصل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، اعظم کل چکر اس صورت حاصل ہو گا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صف بند ہوں، اور اقل اس صورت ہو گا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ 2 چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو $7/2$، $5/2$، $3/2$، یا $1/2$ کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تشکیل پر منحصر ہو گا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال $\psi_{n\ell m}$ کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا خالص زاویائی معیار حرکت (چکر جمع مدارچی) $\ell + 1/2$ یا $\ell - 1/2$ ہو گا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد $\ell + 1$، ℓ، یا $\ell - 1$ ہو گا (جہاں ℓ کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہو گا کہ آیا کہ الیکٹران خود $\ell + 1/2$ تشکیل یا $\ell - 1/2$ تشکیل میں ہے)۔

(چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہٰذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہٰذا) مجموعی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s ہو اور z جزو m ہو، مرکب حالات $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1 + m_2 = m} C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \tag{۴.۱۸۵}$$

ہو گا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامتیت $|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle =\uparrow$، $|\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\rangle =\downarrow$ استعمال کیا ہے)۔ مستقلات $C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}$ کو **کلیبش و گورڈن عددی سر**[91] کہتے ہیں۔ جدول ۴.۹ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر 2×1 جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1\,-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\,-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈبہ میں (2 چکر اور 1 چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3، اور z جزو 0 ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش ($1/5$ احتمال کے ساتھ) $\hbar$ یا ($3/5$ احتمال کے ساتھ) 0 یا ($1/5$ احتمال کے

[89] میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یا دونوں) مدارچی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم حرف l استعمال کرتے)۔

[90] ثبوت کے لئے آپ کو اعلیٰ نصاب دیکھنا ہو گا۔

[91] Clebsch–Gordon coefficients

ساتھ) $\hbar-$ قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ 1 ہے۔(کلیبش و گورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے مربعوں کا مجموعہ 1 ہو گا۔)

ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |sm\rangle \tag{۴.۱۸۶}$$

بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سایہ دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|10\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{5}}|\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{15}}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور 1 چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لئے $m_2 = 0$ ہے (m لازماً $1/2$ ہو گا) اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ ($3/5$ احتمال کے ساتھ) $5/2$ یا ($1/15$ احتمال کے ساتھ) $3/2$ یا ($1/3$ احتمال کے ساتھ) $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ 1 ہو گا (کلیبش و گورڈن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ 1 ہو گا)۔

یہاں آپ کا کوئی قصور نہیں ہو گا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیبش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ **عملی گروہی نظریہ**[۹۲] کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ $\sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$ حاصل ہو گا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں $|00\rangle$ پر $S_\pm$ کا اطلاع کر کے تصدیق کیجیے کہ 0 حاصل ہو گا۔

ج. دکھائی کہ $|11\rangle$ اور $|1\ -1\rangle$ (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے) S^2 کے موزوں امتیازی قیمت والے امتیازی تفاعلات ہیں۔

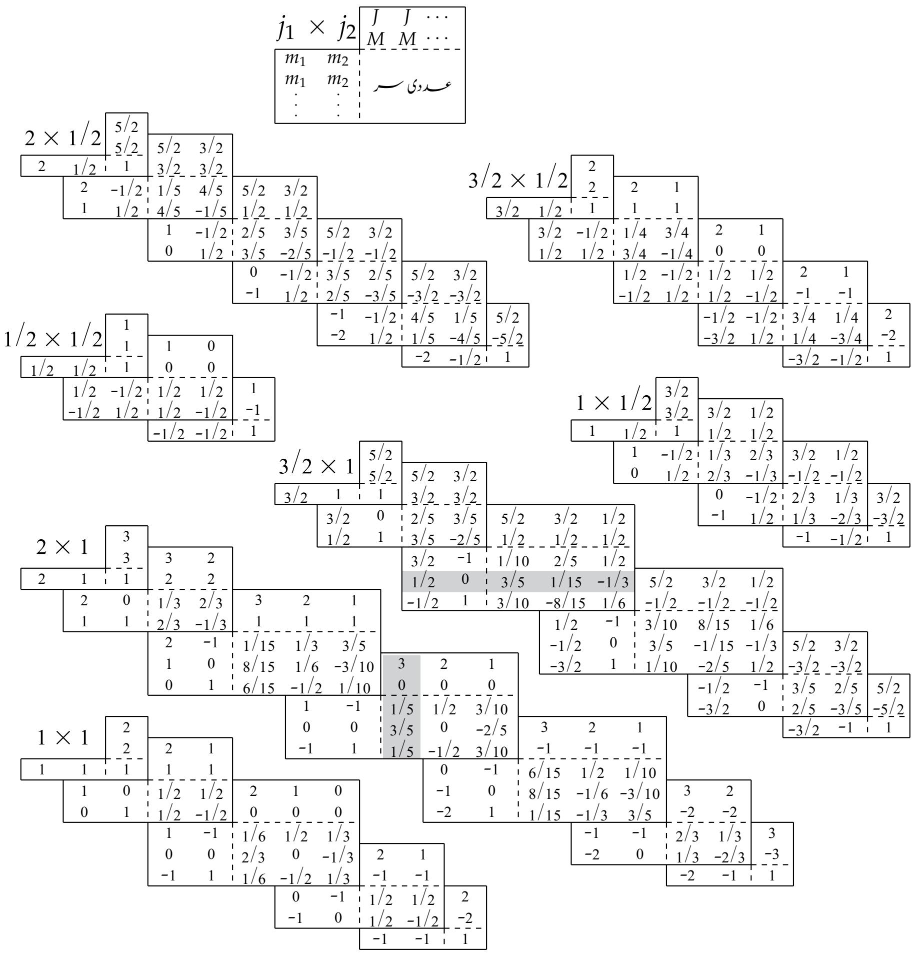
سوال ۴.۳۵: **کوارک**[۹۳] کا چکر $1/2$ ہے۔ تین کوارک مل کر ایک **بیریان**[۹۴] مرتب کرتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کوارک (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک) مل کر ایک **میزان**[۹۵] مرتب کرتے ہیں (مثلاً **پایان**[۹۶] یا **کایان**[۹۷])۔ فرض کریں یہ کوارک زمینی حال میں ہیں (لہٰذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہو گا)۔

ا. بیریان کے کیا ممکن چکر ہوں گے؟

---

[۹۲] group theory
[۹۳] quark
[۹۴] baryon
[۹۵] meson
[۹۶] pion
[۹۷] kion

جدول ۴.۹: کلیبش و گورڈن عددی سر۔ درحقیقت ہر عددی سر در، جذر کی علامت کے اندر ہو گا اور منفی عددی سر کی صورت میں منفی کی علامت جذر کے باہر ہو گی۔ یوں $-1/3$ سے مراد $-\sqrt{1/3}$ ہو گا۔



ب. میذان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

ا. چکر 1 کا ایک ساکن ذرہ اور چکر 2 کا ایک ساکن ذرہ اس تشکیل میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3، اور z جزو $\hbar$ ہے۔ چکر 2 ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال ψ_{510} میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۷: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں (جہاں $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ ہوگا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, \mathbf{S}^{(1)}] = 2i\hbar(\mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)}) \tag{۴.۱۸۷}$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیبش و گورڈن عددی سر یہی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ مقلوبی ہوگا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

اضافی سوالات برائے باب ۴

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے **تین ابعادی ہارمونی مرتعش**[۹۸] پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{۴.۱۸۸}$$

ا. کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بُعدی مرتعش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، اجازتی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \tag{۴.۱۸۹}$$

ب. E_n کی انحطاطیت $d_{(n)}$ تعین کریں۔

---

[۹۸] three-dimensional harmonic oscillator

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ مسیں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی مسرتعش مخفیہ کروی تشاکلی ہے لہٰذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدد کے علاوہ کروی محدد مسیں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جا سکتا ہے۔ طاقتی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداسی مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے اجازتی توانائیاں تعین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

ا. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل **تین ابعادی مسئلہ وریل**[99] ثابت کریں۔

$$2\langle T\rangle = \langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla V\rangle \tag{۴.۱۹۰}$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T\rangle = -E_n;\quad \langle V\rangle = 2E_n \tag{۴.۱۹۱}$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونی مسرتعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T\rangle = \langle V\rangle = E_n/2 \tag{۴.۱۹۲}$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت مسیں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۱۴ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی **رو احتمال**[100] کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) \tag{۴.۱۹۳}$$

ا. دکھائے کہ $\mathbf{J}$ **استمراری مساوات**[101]:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 \tag{۴.۱۹۴}$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مقامی **بقا احتمال**[102] کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاو کے تحت) درج ذیل ہو گا

$$\int_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V |\Psi|^2\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۵}$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ مسیں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم مسیں ذرہ پائے جانے کے احتمال مسیں کمی کے برابر ہو گا۔

---

[99] three-dimensional virial theorem
[100] probability current
[101] continuity equation
[102] conservation of probability

ب. حال $n = 2$، $\ell = 1$، $m = 1$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے $\mathbf{J}$ تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin\theta \boldsymbol{a}_\phi$$

ج. اگر ہم کمیت کے بہاو کو $m\mathbf{J}$ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{L} = m \int (\boldsymbol{r} \times \mathbf{J})\, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تابع وقت) **معیار حرکی فضا تفاعل موج**[103] کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۳.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})/\hbar} \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۶}$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حرکی فضا تفاعل موج تلاش کریں۔ اشارہ: کروی محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو $\boldsymbol{p}$ کے رخ رکھیں اور θ کا تکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \tag{۴.۱۹۷}$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ $\phi(\boldsymbol{p})$ معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے $\psi(\boldsymbol{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ وریل (مساوات ۴.۱۹۱) کا بلا تضاد ہے۔

سوال ۴.۴۳:

ا. حال $n = 3$، $l = 2$، $m = 1$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل موج (ψ) تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف r، θ، ϕ اور a (رداس بوہر) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر (ρ، z، وغیرہ) یا تفاعلات (Y، v، وغیرہ) یا مستقلات (A، c_0، وغیرہ) یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں π e اور 2، وغیرہ استعمال کیے جا سکتے ہیں)۔

ب. r، θ اور ϕ کے لحاظ سے موزوں تکملات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ s کی کس سعت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب متناہی ہو گا؟

---

[103] momentum space wave function

سوال ۴.۴۴:

ا. حال $n = 4$، $\ell = 3$، $m = 3$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو کروی محدد r، θ اور ϕ کا تفاعل لکھیں۔

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ (تکملات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

ج. اس حال میں ایک جوہر کے قابل مشاہدہ $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہو گا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج (مساوات ۴.۸۰) $r = 0$ تک درست ہے اور مرکزہ کا رداس b لیتے ہوئے بالکل ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ قلیل رتبی جزو کعبی: $P \approx (4/3)(b/a)^3$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $b \ll a$ کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہو گی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہو گا لہٰذا $P \approx (4/3)\pi b^3 \left|\psi(0)\right|^2$ لیا جا سکتا ہے۔ تصدیق کیجیے گا کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہو گا۔

د. $b \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$ اور $a \approx 0.5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ لیتے ہوئے P کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہو گا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴۶:

ا. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $\ell = n - 1$ کی صورت میں رداسی تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ تکمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں۔

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کے ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں "عدم یقینیت" $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہو گی۔ دھیان رہے کہ n بڑھانے سے r میں نسبتی وسعت گھٹتی ہے (یوں n کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آنا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پہچانے جا سکتے ہیں)۔ رداسی تفاعل امواج کا خاکہ، n کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۷: ہم **مکانی طیفی خطوط:**[۱۰۴] کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات

[۱۰۴] coincident spectral lines

کے صدر کوانٹائی اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہو گی۔

سوال ۴.۴۸: قابل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں۔

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

ب. حال $\psi_{n\ell m}$ میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں۔

ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

ا. χ کی معمول زنی کرتے ہوئے مستقل A تعین کریں۔

ب. اس الیکٹران کے S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

ج. اس الیکٹران کے S_x کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتیں متوقع ہونگی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

د. اس الیکٹران کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ S_y کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات یکتا تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_a$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_a^{(1)}$ ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_b$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_b^{(2)}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں $\boldsymbol{a}_a$ اور $\boldsymbol{a}_b$ کے بیچ زاویہ θ ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos\theta \tag{۴.۱۹۸}$$

سوال ۴.۵۱:

ا. کلیبش گورڈن عددی سر کو، $s_1 = 1/2$ اور s_2 کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے S^2 کا امتیازی حال $|sm\rangle$ ہو۔

$$|sm\rangle = A|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|s_2(m-\tfrac{1}{2})\rangle + B|\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\rangle|s_2(m+\tfrac{1}{2})\rangle$$

مساوات ۴.۱۷۹ تا مساوات ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ (مثلاً) $S_x^{(2)}$ حال $|s_2 m_2\rangle$ کو کیا کرتا ہے، تب مساوات ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مساوات ۴.۱۴۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; \qquad B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۹ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: (ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے) $3/2$ چکر ذرہ کے لیے قالب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷ میں $1/2$ چکر، سوال ۴.۳۱ میں 1 چکر، اور سوال ۴.۵۲ میں $3/2$ چکر کے قالبوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکری قالب تلاش کریں۔ جواب:

$$\boldsymbol{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j \equiv \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہے۔

سوال ۴.۵۴: کروی ہارمونیات کے لیے معمول زنی ضربیہ درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ ۴.۱.۲ سے درج ذیل جانتے ہیں۔

$$Y_\ell^m = B_\ell^m e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\theta)$$

آپ کو جزو B_ℓ^m تعین کرنا ہو گا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات ۴.۳۲ میں کیا)۔ مساوات ۴.۱۲۰، مساوات ۴.۱۲۱، اور مساوات ۴.۱۳۰ استعمال کرتے ہوئے B_ℓ^m کی صورت میں B_ℓ^{m+1} کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخوذ کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_ℓ^m کو مجموعی مستقل $C(\ell)$ تک حل کریں۔ آخر میں سوال ۴.۲۲ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کی قیمت تلاش کریں۔ شریک لیژانڈر تفاعل کے تفرق کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-x^2}P_\ell^{m+1} - mxP_\ell^m \tag{۴.۱۹۹}$$

سوال ۴.۵۵: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے۔

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi_-)$$

ا. مدارچی زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

ب. یہی کچھ مدارچی زاویائی معیار حرکت کے z جزو (L_z) کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو (S_z) کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$ لیں۔

ھ. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں۔ آپ کیا قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس کی r، θ، ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟

ح. آپ چکر کا z جزو اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں)۔ ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟

سوال ۴.۵۶:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ٹیلر تسلسل میں پھیلایا جا سکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہو گا

$$f(\phi+\varphi) = e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}}f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔اسی کی بنا پر $L_z/\hbar$ کو z کے گرد **گھومنے کا پیداکار**[105] کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۲۹ استعمال کریں اور سوال ۳.۳۹ سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}}/\hbar$ ہو گا جو $\boldsymbol{a}_{\text{n}}$ رخ گھومنے کا پیداکار ہے، یعنی $e^{(i\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}}\varphi/\hbar)}$ محور $\boldsymbol{a}_{\text{n}}$ کے گرد (دائیں ہاتھ سمت میں) زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیداکار $\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}}/\hbar$ ہو گا۔ بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}})\varphi/2}\chi \tag{۴.۲۰۰}$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور x کے لحاظ سے $180°$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) قالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ، ہماری توقعات کے عین مطابق، ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے۔

ج. محور y کے لحاظ سے $90°$ گھومنے والا قالب تیار کریں اور (χ_+) پر اس کا اثر دیکھیں؟

د. محور z کے لحاظ سے $360°$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ھ. درج ذیل دکھائیں۔

$$e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\boldsymbol{a}_{\text{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\varphi/2) \tag{۴.۲۰۱}$$

سوال ۴.۵۷: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتے (مساوات ۴.۹۹) امتیازی قیمتوں کی (عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ) نصف عدد صحیح قیمتوں کی اجازت دیتے ہیں، جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ خصوصی روپ $\mathbf{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ پر ضرور کوئی اضافی شرط مسلط ہے جو نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتی ہے۔ ہم مستقل a جس کا بُعد لمبائی ہو (مثلاً، ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر) لیتے ہوئے درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں۔

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; \qquad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; \qquad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y]$$

ا. تصدیق کیجیے کہ $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$؛ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$ ہیں۔ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں کو تمام q اور p مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

[105] generator of rotation

ج. تصدیق کیجیے کہ ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کمیت $m = \hbar/a^2$ اور تعدد $\omega = 1$ ہو کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ ہو گا جہاں H ہیملٹنی ہیں۔

د. ہم جانتے ہیں ہارمونی مرتعش ہیملٹنی کی امتیازی قیمتیں $(n + 1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ہو گا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کے روپ اور باضابطہ مقلبیت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا)۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کریں کہ L_z کی امتیازی قیمتیں لازماً عدد صحیح ہوں گے۔

سوال ۴.۵۸: عمومی حال (مساوات ۴.۱۳۹) میں $1/2$ چکر کے S_z اور S_y کی اقل عدم یقینیت کے لئے شرط معلوم کریں (یعنی، فقرہ $\sigma_{S_x}\sigma_{S_y} \geq (\hbar/2)|\langle S_z\rangle|$ میں مساوی $(=)$ صورت تلاش کریں)۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر ہم a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں؛ تب عدم یقینیت کی اقل قیمت اس صورت حاصل ہو گی جب b خالص حقیقی یا خالص خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۹: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ، جس کا بار q ہو اور جو برقی میدان $\boldsymbol{E}$ اور مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جسے **لورینز قوت کا قانون**[106]:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{۴.۲۰۲}$$

پیش کرتا ہے۔ اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ (مساوات ۱.۱) میں اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے۔ تاہم اس کا نفیس روپ:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{۴.۲۰۳}$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتا ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \tag{۴.۲۰۴}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مخفیہ $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ اور φ غیر سمتی مخفیہ $(\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ ہے، لہٰذا مساوات شروڈنگر (باضابطہ متبادل $(\boldsymbol{p} \to ((\hbar/i)\nabla)$ پر کر کے) درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Big[\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi\Big]\Psi \tag{۴.۲۰۵}$$

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle r\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\langle(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\rangle \tag{۴.۲۰۶}$$

[106] Lorentz force law

ب. ہمیشہ کی طرح (مساوات ۴.۳۲ دیکھیں) ہم $\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{r}\rangle}{\mathrm{d}t}$ کو $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$m\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{v}\rangle}{\mathrm{d}t} = q\langle \boldsymbol{E}\rangle + \frac{q}{2m}\langle(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{p})\rangle - \frac{q^2}{m}\langle(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\rangle \tag{۴.۲۰۷}$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$m\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{v}\rangle}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E}+\langle \boldsymbol{v}\rangle\times\boldsymbol{B}) \tag{۴.۲۰۸}$$

اس طرح $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی، جیسا ہم مسئلہ اہرنفسٹ کے تحت توقع کر سکتے تھے۔

سوال ۴.۶۰: [پس منظر جاننے کے لیے سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] فرض کریں

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B_0}}{2}(x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i}) \quad \text{اور} \quad \varphi = Kz^2$$

ہیں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں۔

ا. میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ تلاش کریں۔

ب. ان میدان اس ذرہ کے امتیازی تفاعلات اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں جس کی کمیت m اور بار q ہو۔
جواب:

$$E(n_1,n_2) = (n_1+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2+\tfrac{1}{2})\hbar\omega, \quad (n_1,n_2 = 0,1,2,3,\cdots) \tag{۴.۲۰۹}$$

جہاں $q\boldsymbol{B_0}/m \equiv \omega_1$ اور $\sqrt{2qK\mathrm{m}} \equiv \omega_2$ ہیں۔ تبصرہ: $K = 0$ کی صورت میں یہ **سائیکلوٹران حرکت**[107] کا کوانٹائی مماثل ہوگا؛ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہوگا۔ اجازتی توانائیاں $(n_1+\frac{1}{2})\hbar\omega_1$ **لنڈو سطحیں**[108] کہلاتی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: [پس منظر جاننے کی خاطر سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفیہ $\boldsymbol{A}$ اور φ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جا سکتے ہیں؛ طبعی مقداریں میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہوں گے۔

ا. دکھائیں کہ مخفیہ

$$\varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۴.۲۱۰}$$

(جہاں Λ مقام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان دیتے ہیں جو φ اور $\boldsymbol{A}$ دیتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱۰ **ماپ تبادلہ**[109] کہلاتی ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ **ماپ غیر متغیر**[110] ہے۔

---

[107] cyclotron motion
[108] Landau Levels
[109] gauge transformation
[110] gauge invariant

ب. کوانٹائی میکانیات میں مخفیہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ ماپ غیر متغیر رہتا ہے یا نہیں۔ دکھائیں کہ ماپ تبادلہ مخفیے φ' اور $\boldsymbol{A}$ لیتے ہوئے درج ذیل

$$\Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi \tag{۴.۲۱۱}$$

مساوات شروڈنگر (مساوات ۴.۲۰۵) کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف ہیّتی جزو ضربی کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ ایک ہی طبعی حال [111] کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ ماپ غیر متغیر ہو گا (مزید معلومات کے لیے حصہ ۱۰.۲.۳ سے رجوع کیجیے گا)۔

سوال ۴.۶۲: ہائیڈروجنی جوہروں کے چند ابتدائی تفاعلات موج جدول ۴.۸ میں پیش کیے گئے ہیں۔ انہیں مساوات ۴.۸۹ کی مدد سے حاصل کریں۔ آپ کو Z خود شامل کرنا ہو گا۔

---

[111] یعنی $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ، $\mathrm{d}\langle \boldsymbol{r} \rangle / \mathrm{d}t$ ، وغیرہ تبدیل نہیں ہوں گے۔ چونکہ Λ مقام کا تابع ہے، $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ (جہاں $\boldsymbol{p}$ کو عامل $(\hbar/i)\nabla$ ظاہر کرتا ہے) تبدیل ہو گا، تاہم جیسا ہم نے مساوات ۴.۲۰۶ میں دیکھا، $\boldsymbol{p}$ موجودہ سیاق و سباق میں میکانی معیار حرکت $(m\boldsymbol{v})$ کو ظاہر نہیں کرتا ہے (لگرانج میکانیات میں اس کو **باضابطہ معیار حرکت** کہتے ہیں)۔

فرہنگ