

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

|     |       |                                 |
|-----|-------|---------------------------------|
| ۱   | ۱     | تفاسل موج                       |
| ۱   | ۱.۱   | ۱. مساوات شروڈنگر               |
| ۲   | ۱.۲   | ۲. شماراتی مفہوم                |
| ۵   | ۱.۳   | ۳. احتمال                       |
| ۵   | ۱.۳.۱ | ۱. غیر مسلسل متغیرات            |
| ۹   | ۱.۳.۲ | ۲. استمراری متغیرات             |
| ۱۲  | ۱.۴   | ۴. معمول زنی                    |
| ۱۵  | ۱.۵   | ۵. معیار حرکت                   |
| ۱۸  | ۱.۶   | ۶. اصول عدم یقینیت              |
| ۲۵  | ۲     | ۲. غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر |
| ۲۵  | ۲.۱   | ۱. ساکن حالات                   |
| ۳۱  | ۲.۲   | ۲. لامتناہی چوکور کنواں         |
| ۴۲  | ۲.۳   | ۳. ہارمونی سر تقش               |
| ۴۴  | ۲.۳.۱ | ۱. الجبرائی ترکیب               |
| ۵۳  | ۲.۳.۲ | ۲. تحلیلی ترکیب                 |
| ۶۰  | ۲.۴   | ۴. آزاد ذرہ                     |
| ۷۰  | ۲.۵   | ۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه            |
| ۷۰  | ۲.۵.۱ | ۱. مقید حالات اور بجھراو حالات  |
| ۷۲  | ۲.۵.۲ | ۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں            |
| ۸۱  | ۲.۶   | ۶. مستناہی چوکور کنواں          |
| ۹۷  | ۳     | ۳. قواعد و ضوابط                |
| ۹۷  | ۳.۱   | ۱. ہسٹ فضا                      |
| ۱۰۱ | ۳.۲   | ۲. قابل مشاہدہ                  |
| ۱۰۱ | ۳.۲.۱ | ۱. ہر مشی عاملین                |

|     |                                  |       |
|-----|----------------------------------|-------|
| ۱۰۳ | تعیین حال                        | ۳.۲.۲ |
| ۱۰۵ | ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل    | ۳.۳   |
| ۱۰۶ | غیر مسلسل طیف                    | ۳.۳.۱ |
| ۱۰۸ | استمراری طیف                     | ۳.۳.۲ |
| ۱۱۱ | متعمم شمار یاتی مفہوم            | ۳.۴   |
| ۱۱۵ | اصول عدم یقینیت                  | ۳.۵   |
| ۱۱۵ | اصول عدم یقینیت کا ثبوت          | ۳.۵.۱ |
| ۱۱۸ | کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ | ۳.۵.۲ |
| ۱۱۹ | توانائی و وقت اصول عدم یقینیت    | ۳.۵.۳ |
| ۱۲۳ | ڈیراک علاقیت                     | ۳.۶   |
| ۱۳۷ | تین البادی کوانٹائی میکانیات     | ۴     |
| ۱۳۷ | کروی محدود میں مساوات شروع و نگر | ۴.۱   |
| ۱۳۹ | علیحدگی متغیرات                  | ۴.۱.۱ |
| ۱۴۱ | زاویائی مساوات                   | ۴.۱.۲ |
| ۱۴۶ | ردای مساوات                      | ۴.۱.۳ |
| ۱۵۰ | ہائیڈروجن جوہر                   | ۴.۲   |
| ۱۵۱ | ردای تفاعل موج                   | ۴.۲.۱ |
| ۱۶۱ | ہائیڈروجن کا طیف                 | ۴.۲.۲ |
| ۱۶۴ | زاویائی معیار حرکت               | ۴.۳   |
| ۱۶۴ | امتیازی اقتدار                   | ۴.۳.۱ |
| ۱۷۰ | امتیازی تفاعلات                  | ۴.۳.۲ |
| ۱۷۳ | چکر                              | ۴.۴   |
| ۱۸۱ | مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران  | ۴.۴.۱ |
| ۱۸۷ | زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ     | ۴.۴.۲ |
| ۲۰۵ | متنائل ذرات                      | ۵     |
| ۲۰۵ | دو ذروی نظام                     | ۵.۱   |
| ۲۰۷ | بوسن اور فرمیان                  | ۵.۱.۱ |
| ۲۱۱ | قوت مبادلہ                       | ۵.۱.۲ |
| ۲۱۵ | جوہر                             | ۵.۲   |
| ۲۱۶ | ہیلیم                            | ۵.۲.۱ |
| ۲۱۹ | دوری جدول                        | ۵.۲.۲ |
| ۲۲۳ | ٹھوس اجسام                       | ۵.۳   |
| ۲۲۳ | آزاد الیکٹران گیس                | ۵.۳.۱ |
| ۲۲۹ | پٹی دار ساخت                     | ۵.۳.۲ |
| ۲۳۶ | کوانٹائی شمار یاتی میکانیات      | ۵.۴   |
| ۲۳۶ | ایک مثال                         | ۵.۴.۱ |
| ۲۳۹ | عمومی صورت                       | ۵.۴.۲ |

|     |       |                                           |       |
|-----|-------|-------------------------------------------|-------|
| ۲۴۲ | ..... | سب سے زیادہ محتمل تشکیل                   | ۵.۴.۳ |
| ۲۴۵ | ..... | $\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت       | ۵.۴.۴ |
| ۲۴۹ | ..... | سیاہ جسی طیف                              | ۵.۴.۵ |
| ۲۵۵ | ..... | غیر تابع وقت نظریہ اضطراب                 | ۶     |
| ۲۵۵ | ..... | غیر انخطاطی نظریہ اضطراب                  | ۶.۱   |
| ۲۵۵ | ..... | عمومی ضابطہ بندی                          | ۶.۱.۱ |
| ۲۵۷ | ..... | اول رتی نظریہ                             | ۶.۱.۲ |
| ۲۶۱ | ..... | دوم رتی توانائیاں                         | ۶.۱.۳ |
| ۲۶۲ | ..... | انخطاطی نظریہ اضطراب                      | ۶.۲   |
| ۲۶۲ | ..... | دو پڑتا انخطاط                            | ۶.۲.۱ |
| ۲۶۷ | ..... | بلند رتی انخطاط                           | ۶.۲.۲ |
| ۲۷۲ | ..... | ہائیڈروجن کا مہین ساخت                    | ۶.۳   |
| ۲۷۳ | ..... | اضافیتی تصحیح                             | ۶.۳.۱ |
| ۲۷۶ | ..... | چکر و مدار ربط                            | ۶.۳.۲ |
| ۲۸۳ | ..... | زیمان اثر                                 | ۶.۴   |
| ۲۸۳ | ..... | کمزور میدان زیمان اثر                     | ۶.۴.۱ |
| ۲۸۵ | ..... | طاقتور میدان زیمان اثر                    | ۶.۴.۲ |
| ۲۸۷ | ..... | درمیانہ میدان زیمان اثر                   | ۶.۴.۳ |
| ۲۸۹ | ..... | نہایت مہین بخوارا                         | ۶.۵   |
| ۲۹۹ | ..... | تغیری اصول                                | ۷     |
| ۲۹۹ | ..... | نظریہ                                     | ۷.۱   |
| ۳۰۵ | ..... | ہیلمی کا زمینی حال                        | ۷.۲   |
| ۳۱۰ | ..... | ہائیڈروجن سال باردار                      | ۷.۳   |
| ۳۲۱ | ..... | ونزل و کرامرس و برلوان تخمین              | ۸     |
| ۳۲۲ | ..... | کلاسیکی خطہ                               | ۸.۱   |
| ۳۲۷ | ..... | سرنگ زنی                                  | ۸.۲   |
| ۳۳۱ | ..... | کلیات پیوند                               | ۸.۳   |
| ۳۴۵ | ..... | تابع وقت نظریہ اضطراب                     | ۹     |
| ۳۴۶ | ..... | دو سطحی نظام                              | ۹.۱   |
| ۳۴۶ | ..... | مضطرب نظام                                | ۹.۱.۱ |
| ۳۴۹ | ..... | تابع وقت نظریہ اضطراب                     | ۹.۱.۲ |
| ۳۵۱ | ..... | سائنس اضطراب                              | ۹.۱.۳ |
| ۳۵۳ | ..... | اشعاعی اخراج اور انجذاب                   | ۹.۲   |
| ۳۵۳ | ..... | برقناطیسی امواج                           | ۹.۲.۱ |
| ۳۵۶ | ..... | انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج | ۹.۲.۲ |
| ۳۵۸ | ..... | غیر اتقاقی اضطراب                         | ۹.۲.۳ |

|     |                                               |        |
|-----|-----------------------------------------------|--------|
| ۳۶۰ | خود با خود احسراج . . . . .                   | ۹.۳    |
| ۳۶۰ | آمنشائن عددی سر $A$ اور $B$ . . . . .         | ۹.۳.۱  |
| ۳۶۲ | بیجان حال کا عرصہ حیات . . . . .              | ۹.۳.۲  |
| ۳۶۵ | قواعد انتخاب . . . . .                        | ۹.۳.۳  |
| ۳۷۵ | ۱۰. حرانگزرتخمین                              |        |
| ۳۷۵ | ۱۰.۱ مسئلہ حرانگزرتخمین . . . . .             | ۱۰.۱   |
| ۳۷۵ | ۱۰.۱.۱ حرانگزرتخمین . . . . .                 | ۱۰.۱.۱ |
| ۳۷۸ | ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرانگزرتخمین . . . . .           | ۱۰.۱.۲ |
| ۳۸۳ | ۱۰.۲ بیئتیری . . . . .                        | ۱۰.۲   |
| ۳۸۳ | ۱۰.۲.۱ گرگی عمل . . . . .                     | ۱۰.۲.۱ |
| ۳۸۵ | ۱۰.۲.۲ ہندسی بیئت . . . . .                   | ۱۰.۲.۲ |
| ۳۹۱ | ۱۰.۲.۳ اہارونوہوہم اثر . . . . .              | ۱۰.۲.۳ |
| ۴۰۱ | ۱۱. بکھراؤ                                    |        |
| ۴۰۱ | ۱۱.۱ تعارف . . . . .                          | ۱۱.۱   |
| ۴۰۱ | ۱۱.۱.۱ کلانی نظریہ بکھراؤ . . . . .           | ۱۱.۱.۱ |
| ۴۰۵ | ۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .        | ۱۱.۱.۲ |
| ۴۰۷ | ۱۱.۲ جزوی موج تخمین . . . . .                 | ۱۱.۲   |
| ۴۰۷ | ۱۱.۲.۱ اصول وضوابط . . . . .                  | ۱۱.۲.۱ |
| ۴۱۱ | ۱۱.۲.۲ لائحہ عمل . . . . .                    | ۱۱.۲.۲ |
| ۴۱۳ | ۱۱.۳ پیتی انتقال . . . . .                    | ۱۱.۳   |
| ۴۱۶ | ۱۱.۴ بارن تخمین . . . . .                     | ۱۱.۴   |
| ۴۱۶ | ۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ . . . . . | ۱۱.۴.۱ |
| ۴۲۱ | ۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول . . . . .               | ۱۱.۴.۲ |
| ۴۲۵ | ۱۱.۴.۳ شل بارن . . . . .                      | ۱۱.۴.۳ |
| ۴۲۹ | ۱۲. پس نوشت                                   |        |
| ۴۳۰ | ۱۲.۱ آمنشائن پوڈلکیووزن تضاد . . . . .        | ۱۲.۱   |
| ۴۳۱ | ۱۲.۲ مسئلہ بل . . . . .                       | ۱۲.۲   |
| ۴۳۶ | ۱۲.۳ مسئلہ کلیم . . . . .                     | ۱۲.۳   |
| ۴۳۷ | ۱۲.۴ شرودنگر کی پٹی . . . . .                 | ۱۲.۴   |
| ۴۳۸ | ۱۲.۵ کوانٹائی زینو تضاد . . . . .             | ۱۲.۵   |
| ۴۴۱ | ۱۳. جوابات                                    |        |
| ۴۴۳ | ۱. خطی الجبرا                                 |        |
| ۴۴۳ | ۱.۱ سمتیات . . . . .                          | ۱.۱    |
| ۴۴۳ | ۲.۱ اندرونی ضرب . . . . .                     | ۲.۱    |
| ۴۴۴ | ۳.۱ قتالب . . . . .                           | ۳.۱    |

|     |                                    |     |
|-----|------------------------------------|-----|
| ۴۴۴ | تبدیلی اساس                        | ۴.۱ |
| ۴۴۴ | امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار | ۵.۱ |
| ۴۴۴ | هر مشی تبالے                       | ۶.۱ |





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۱۱

### بکھراؤ

#### ۱۱.۱ تعارف

##### ۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

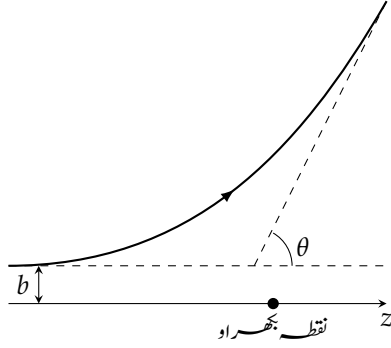
فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرے کی آمد ہوتی ہے (مثلاً، پروٹان ایک بھاری مرکزہ پر دافعہ جاتا ہے)۔ یہ توانائی  $E$  اور ٹکراؤ مقدار معلوم  $b$  کے ساتھ آکر، زاویہ بکھراؤ  $\theta$  پر ابھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ (میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استستی شکل ہے، یوں خط حرکت<sup>۳</sup> مستوی میں پایا جائے گا، اور ساتھ ہی فرض کرتا ہوں کہ نشانہ بھاری ہے، لہذا تصادم کی بنا پر اس کی اچھال نظر انداز کی جاسکتی ہے۔) کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم جانتے ہوئے، زاویہ بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً، عام طور پر، ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو، زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سخت کرہ بکھراؤ۔ فرض کریں رداس  $R$  کا ایک سخت بھاری گیند ہدف، جبکہ ہوائی بندوق کا چھرا (جس کو ہم نقطہ تصور کرتے ہیں) آمدی ذرہ ہے، جو لچکیلا شپکھاکر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ  $\alpha$  کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم  $b = R \sin \alpha$  اور زاویہ بکھراؤ  $\theta = \pi - 2\alpha$  ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

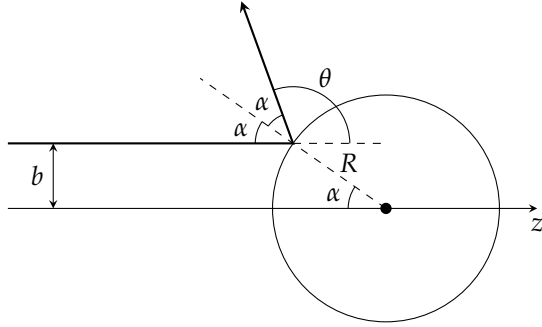
$$(11.1) \quad b = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

ظاہر اور درج ذیل ہوگا۔

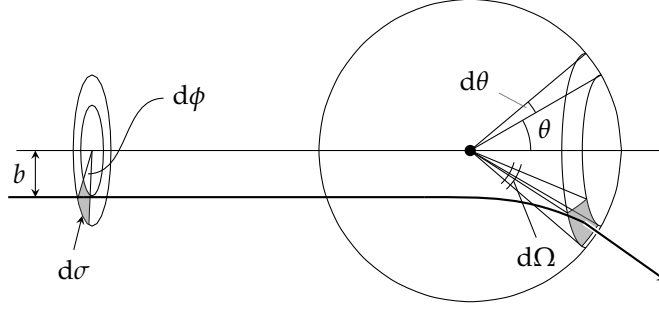
impact parameter<sup>۱</sup>  
scattering angle<sup>۲</sup>  
trajectory<sup>۳</sup>



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراؤ، جس میں نکتہ اور مقدار معلوم  $b$  اور زاویہ بکھراؤ  $\theta$  کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے پسگردار بکھراؤ۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ  $d\sigma$  میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرتے ہیں۔

$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$

□

عمومی طور پر، لامتناہی چھوٹے قطعے، جس کا رقبہ عمودی تراش  $d\sigma$  ہو، میں آمدی ذرات، مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ جتنا  $d\sigma$  بڑا ہو، اتنا  $d\Omega$  بڑا ہوگا؛ ان کے تناسبی جزو ضربی  $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$  کو تفریقی (بکھراؤ) عمودی تراش<sup>۴</sup> کہتے ہیں۔ ہیوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

عکراؤ متدار معلوم اور استی زاویہ  $\phi$  کی صورت میں  $d\sigma = b db d\phi$  اور  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  ہیں، لہذا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

ہوگا۔ (عمومی طور پر  $\theta$  متدار معلوم  $b$  کا گھٹا ہوا تفاعل ہوگا، لہذا یہ تفریق حقیقتاً منفی ہوگا؛ اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔)

مثال ۱۱.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال بارے رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ (مثال ۱۱.۱) کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

<sup>۴</sup>differential (scattering) cross-section

ہیہ ناقص زبان ہے:  $D$  تفریقی نہیں ہے، اور نہ ہی یہ عمودی تراش ہے۔

لہذا

$$(11.۶) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left( \frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□ ہوگا۔ اس مثال میں تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کی تابع نہیں ہے، جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

تمام ٹھوس زاویوں پر  $D(\theta)$  کا مکمل:

$$(11.۷) \quad \sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega$$

کل عمودی تراش<sup>۱</sup> ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہے جس کو ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر، سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں

$$(11.۸) \quad \sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2$$

ہوگا، جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے: یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے؛ اس رقبہ کے اندر آمدی چھپرے ہدف کو مار پائیں گے، جبکہ اس سے باہر چھپرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات ”نرم“ اہداف (جیسا مرکزہ کا کولمب میدان) کے لئے بھی کارآمد ہے، جن میں صرف نشانے پر ”لگنا یا نہ لگنا“ کے علاوہ بھی بات کی جائے گی۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت (یا تاہم  $\mathcal{L}$ ) کی ایک شعاع ہو۔

$$(11.۹) \quad \mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد}$$

فی اکائی وقت، رقبہ  $d\sigma$  میں داخل ہونے والے ذرات (اور یوں ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرنے والے ذرات) کی تعداد  $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$  ہوگی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۱۰) \quad D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتی ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جاسکتا ہے، لہذا اس کو عموماً تفسیری عمودی تراش کی تعریف لی جاتی ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرے ذرات کا کشف تک پہنچتے ہوں، ہم اکائی وقت میں کشف کیے گئے ذرات کی گشتی کو  $d\Omega$  سے تقسیم کر کے، آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول زنی کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: ردرفورڈ بکھراؤ<sup>۸</sup> بار  $q_1$  اور حسر کی توانائی  $E$  کا ایک آمدی ذرہ بھاری ساکن ذرے سے، جس کا بار  $q_2$  ہو، بکھرتا ہے۔

<sup>۱</sup> total cross-section  
<sup>۲</sup> luminosity  
<sup>۸</sup> Rutherford scattering

۱. ٹکراؤ متدار معلوم اور زاویہ بکھراؤ کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2)$$

ب. تفسیری بکھراؤ عمودی تراش تعین کریں۔ جواب:

$$D(\theta) = \left[ \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.11)$$

ج. دکھائیں کہ رد فورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ  $1/r$  مخفیہ کی "لامتناہی سعت" ہے؛ آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

## ۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹائی نظریے میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ  $z$  رخ حرکت کرتی ہوئی آمدی مستوی موج،  $\psi(z) = Ae^{ikz}$ ، کا مخفیہ بکھرے سامنا ہوتا ہے، جس کے نتیجے میں ایک رخصتی کروئی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۲)۔<sup>۹</sup> یعنی، ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لئے} \quad (11.12)$$

(احتمال کے بقا کی خاطر  $|\psi|^2$  کے اس حصے کو لازماً  $1/r^2$  سے تبدیل ہونا ہوگا، لہذا کروئی موج میں جب زو ضربی  $1/r$  پایا جاتا ہے)۔ عدد موج  $k$  کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح رشتہ:

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (11.13)$$

ہوگا۔ یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف استمقی تشاکلی ہے؛ زیادہ عمومی صورت میں، رخصتی کروئی موج کا حیظ  $f$  متغیرات  $\phi$  اور  $\theta$  کا تابع ہو سکتا ہے۔

ہمیں حیظ "بکھراؤ"  $f(\theta)$  کا تعین کرنا ہوگا؛ یہ رخ  $\theta$  میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے، لہذا اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً، رفتار  $v$  پر چلتے ہوئے آمدی ذرے کا لامتناہی چھوٹے رقبہ  $d\sigma$  میں سے وقت  $dt$

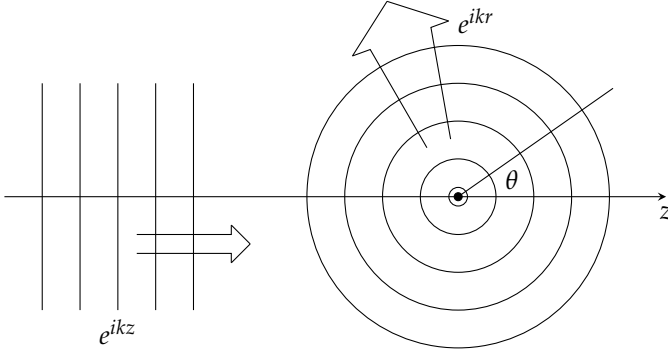
فی الحال، یہاں کوئی خاص کوانٹائی میکینکات نہیں ہے؛ ہم درحقیقت، کلاسیکی ذرات کی بجائے امواج کے بکھراؤ کی بات کر رہے ہیں، اور آپ شکل ۱۱.۳ کو پانی کے امواج کا پتھر کے ساتھ ٹکراؤ تصور کر سکتے ہیں، یا (چونکہ، ہم تین بُدی بکھراؤ میں دلچسپی رکھتے ہیں، لہذا ابستریہ ہوگا کہ انہیں) ایک گیسندے صوتی امواج کا بکھراؤ تصور کریں۔ ایسی صورت میں ہم قس عمل موج کو حقیقی روپ:

$$A[\cos(kz) + f(\theta) \cos(kr + \delta)/r]$$

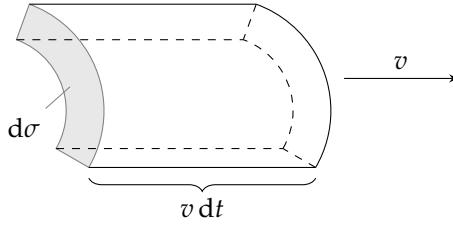
میں لکھتے ہیں اور  $\theta$  رخ بکھرتے صوتی موج کے حیظ کو  $f(\theta)$  ظاہر کرتا ہے۔

wave number<sup>۱۰</sup>

scattering amplitude<sup>۱۱</sup>



شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراؤ؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروئی موج پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۱.۵: وقت \$dt\$ کے دوران رقبہ \$d\sigma\$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم \$dV = (d\sigma)(v dt)\$ ہے۔



میں گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں)

$$dP = |\psi_{آمدی}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

ہوگا۔ لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں اس ذرے کے بکھراؤ کا احتمال:

$$dP = |\psi_{بکھرا}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا، لہذا  $d\sigma = |f|^2 d\Omega$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (11.14)$$

ظاہر ہے کہ، تفسیری عمودی تراش (جس میں تجربیت پسند دلچسپی رکھتا ہے) جیٹہ بکھراؤ (جو مساوات شرودنگر کے حل سے حاصل ہوگا) کے مطابق مربع کے برابر ہوگا۔ آنے والے حصوں میں ہم جیٹہ بکھراؤ کے باب کے دو تراکیب: جزوی موج تجزیہ اور بارلے تخیل پر غور کریں گے۔

سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لئے مساوات ۱۱.۱۲ کے مماثل تیار کریں۔

## ۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

### ۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب ۴ میں دیکھا کہ کروئی تشکلی مخفیہ  $V(r)$  کے لئے مساوات شرودنگر متبل علیحدگی حلوں:

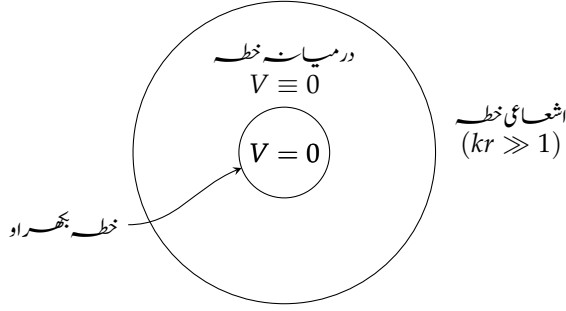
$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (11.15)$$

کا حاصل ہوگا، جہاں  $Y_{\ell}^m$  کروئی ہارمونی (مساوات ۴.۳۲) ہے اور  $rR(r)$  مساوات  $u(r)$  ردای مساوات (مساوات ۴.۳۷):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (11.16)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ بہت بڑے  $r$  کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے، اور مرکز گریز حصہ متبل نظر انداز ہوگا، لہذا

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$



شکل ۱۱.۶: معتمانی مخفیہ سے بکھراؤ، خط بکھراؤ، درمیانہ خط، اور اشعاعی خط۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا عمومی حل

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

ہے؛ پہلا جزو رخصتی کروئی موج کو اور دوسرا جزو آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ ظاہر ہے کہ بکھرے موج کے لئے ہم  $D = 0$  چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑے  $r$  کی صورت میں

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

ہوگا، جسے ہم گزشتہ حصہ میں (طبیعی بنیادوں پر) اخذ کر چکے (مساوات ۱۱.۱۲)۔

یہ بہت بڑے  $r$  کے لئے تھا (یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ  $kr \gg 1$  کے لئے تھا؛ بصریات میں اسے خط اشعاع<sup>۱۲</sup> کہیں گے)۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح، ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ "معتمانی" ہے، جس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ کسی مستثنائی بکھراؤ خط کے باہر مخفیہ تفسیر صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانہ خط میں (جہاں  $V$  کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے) لیکن مرکز گریز جزو کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا،<sup>۱۳</sup> اور اسی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(11.14) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل (مساوات ۴.۴۵) کروئی۔ بیسل تفرعات کا خطی جوڑ:

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_\ell(kr) + B r n_\ell(kr)$$

<sup>۱۲</sup> radiation zone

<sup>۱۳</sup> یہاں سے آگے تبصرہ کولمب مخفیہ کے لئے درست نہیں، چونکہ  $r \rightarrow \infty$  کرنے سے  $1/r^2$  کے لحاظ سے  $1/r$  صفر تک زیادہ آہستہ پہنچتا ہے، اور مرکز گریز جزو اس خط میں غالب نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے کولمب مخفیہ معتمانی نہیں ہے، اور جزوی موج تجزیہ متاثر اطلاق نہیں ہوگا۔

ہوگا۔ لیکن نہ ہی  $j_\ell$  (جو سائن تفاعل کی طرح ہے) اور نہ ہی  $n_\ell$  (جو مستقیم کوسائن کی طرح ہے) رخصتی (یا آمدی) موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں  $e^{ikr}$  اور  $e^{-ikr}$  کے مائل خطی جوڑ درکار ہوں گے؛ انہیں کروئی **مینکل تفاعلات**<sup>۱۴</sup>:

$$(11.19) \quad h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

کہتے ہیں۔ جدول ۱۱.۱ میں چند ابتدائی کروئی مینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑے  $r$  کی صورت میں،

$$\text{جدول ۱۱.۱: کروئی مینکل تفاعلات } h_\ell^{(1)}(x) \text{ اور } h_\ell^{(2)}(x)$$

|                                                                                                                                                                                  |                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$                                                                                                                                                | $h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$                                                 |
| $h_1^{(1)} = \left( -\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$                                                                                                                 | $h_1^{(2)} = \left( \frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$                  |
| $h_2^{(1)} = \left( -\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$                                                                                                | $h_2^{(2)} = \left( \frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$ |
| $\left. \begin{aligned} h_\ell^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{\ell+1} e^{ix} \\ h_\ell^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{\ell+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1$ |                                                                                   |

$h_\ell^{(1)}(kr)$  (جسے ”مینکل تفاعل کی پہلی قسم“ کہتے ہیں)  $e^{ikr}/r$  کی طرح سے تبدیل ہوتا ہے، جبکہ  $h_\ell^{(2)}(kr)$  (مینکل تفاعل کی دوسری قسم)  $e^{-ikr}/r$  سے تبدیل ہوگا۔ یوں، رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروئی مینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہوگی۔

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر ( $V(r) = 0$  ہوگا) ٹھیک ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_\ell^{(1)}(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جبزو آمدی مستوی موج ہے، جبکہ مجموعہ  $(C_{\ell, m})$  (جس کے عددی سر  $C_{\ell, m}$  ہیں) موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشکلی ہے، لہذا تفاعل موج  $\phi$  کا تابع نہیں ہو سکتا۔<sup>۱۵</sup> یوں صرف وہ اجزاء

<sup>۱۴</sup>spherical Hankel functions

<sup>۱۵</sup>چونکہ آمدی موج  $z$  رخ کا تعین کرتی ہے جو کروئی تشاکل حصار اب کرتی ہے، لہذا تابعیت  $\theta$  کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتی۔ تاہم انتہی تشاکل بر مزار رہتا ہے؛ آمدی مستوی موج میں تابعیت  $\phi$  نہیں پائی جاتی، اور بکھراؤ کے عمل میں ایسی کوئی تابعیت نہیں جو رخصتی موج میں تابعیت  $\phi$  پیدا کرے۔

باقی رہیں گے جن میں  $m = 0$  ہو (یاد رہے،  $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$ )۔ اب مساوات ۱۴.۲ اور مساوات ۴.۳۲ سے درج ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta)$$

جہاں  $\ell$  ویں لیٹنڈر کنٹریبر کنٹری کو  $P_\ell$  ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر  $a_\ell \equiv i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)}$  لکھ کر عددی سروں کی تعریف نوکی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_\ell h_\ell^{(1)}(kr) P_\ell(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص عاقبت کیوں بہتر ہے؛  $a_\ell$  کو  $\ell$  واں جزوی موج جیلہ<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں۔ اب بہت بڑے  $r$  کے لئے میٹکل تفاعل  $e^{ikr}/kr$  ( $-i$ ) <sup>$\ell+1$</sup>  صورت اختیار کرتا ہے (جدول ۱۱.۱)، لہذا

$$(11.24) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

ہوگا، جہاں  $f(\theta)$  درج ذیل ہے۔

$$(11.25) \quad f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

یہ مساوات ۱۱.۱۲ میں میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی زیادہ پختہ تصدیق کرتا ہے، اور ہمیں جزوی موج جیلوں ( $a_\ell$ ) کی صورت میں جیلہ بکھراؤ،  $f(\theta)$ ، حاصل کرنے کے قابل بناتا ہے۔ تشریفاتی عمودی تراش:

$$(11.26) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) a_\ell^* a_{\ell'} P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

ہوگا، اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.27) \quad \sigma = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |a_\ell|^2$$

(زاویائی عمل کو حل کرنے کے لئے میں نے لیٹنڈر کنٹریبر کنٹری کی عمودیت مساوات ۱۴.۳۳ استعمال کی۔)

<sup>۱۶</sup> partial wave amplitude

## ۱۱.۲.۲ لائحہ عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے حبزوی موج حیطوں،  $a_\ell$ ، کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ (جہاں  $V(r)$  واضح طور پر غیر صفر ہے) میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل (مساوات ۱۱.۲۳) کے ساتھ، مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے، ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مسئلہ صرف اتنا ہے کہ میں نے دو مختلف محدودی نظام استعمال کیے ہیں: یکسر او موج کے لئے  $k$  کوئی محدود جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدود۔ ہمیں تقابلی عمل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً،  $V = 0$  کے لئے مساوات شرودنگر کو  $e^{ikz}$  مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی، میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ  $V = 0$  کے لئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\sum_{\ell, m} [A_{\ell, m} j_\ell(kr) + B_{\ell, m} n_\ell(kr)] Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

یوں بالخصوص،  $e^{ikz}$  کو اس روپ میں لکھنا ممکن ہونا چاہیے۔ لیکن مبدا پر  $e^{ikz}$  مستثنیٰ ہے، لہذا نیومن تقابلیات کی اجازت نہیں ہوگی ( $r = 0$  پر  $n_\ell(kr)$  بے متابوڑ ہوتے ہیں)، اور چونکہ  $z = r \cos \theta$  میں تابعیت  $\phi$  نہیں پائی جاتی، لہذا صرف  $m = 0$  اجزاء واقع ہوں گے۔  $m$  کی صورت میں مستوی موج کی صریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے<sup>۱۷</sup>:

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

دیتی ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تقابلی عمل موج کو صرف  $r$  اور  $\theta$  کی صورت:

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(kr) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(kr)] P_\ell(\cos \theta)$$

میں پیش کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۱.۳: کوٹانائی تختے کرہ بکھر او۔ مندرجہ کریں:

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

تب، سرحدی شرط

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

ہوگا۔ یوں تمام  $\theta$  کے لئے

$$(11.32) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(ka) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(ka)] P_\ell(\cos \theta) = 0$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے (سوال ۱۱.۳)۔

$$(11.33) \quad a_\ell = i \frac{j_\ell(ka)}{kh_\ell^{(1)}(ka)}$$

بالخصوص کل عمودی تراش

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left| \frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)} \right|^2$$

ہوگا۔ یہ بالکل ٹھیک جواب ہے، لیکن اس کو دیکھ کر زیادہ معلومات منراہم نہیں ہوتیں، لہذا انہیں کم توانائی بکھراؤ،  $ka \ll 1$ ، کی تحدیدی صورت پر غور کریں۔ چونکہ  $k = 2\pi/\lambda$  ہے، اس سے مراد یہ لیا جاسکتا ہے کہ کرہ کے رداس سے طول موج بہت بڑا ہے۔ جدول ۴.۴ (صفحہ ۱۳۸) سے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے  $z$  کے لئے  $n_\ell(z)$  کی مقدار  $j_\ell(z)$  سے بہت زیادہ ہوگی، لہذا

$$(11.35) \quad \begin{aligned} \frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} &= \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z) + in_\ell(z)} \approx -i \frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)} \\ &\approx -i \frac{2^\ell \ell! z^\ell / (2\ell+1)!}{-(2\ell)! z^{-\ell-1} / 2^\ell \ell!} = \frac{i}{2\ell+1} \left[ \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^2 z^{2\ell+1} \end{aligned}$$

اور درج ذیل ہوگا۔

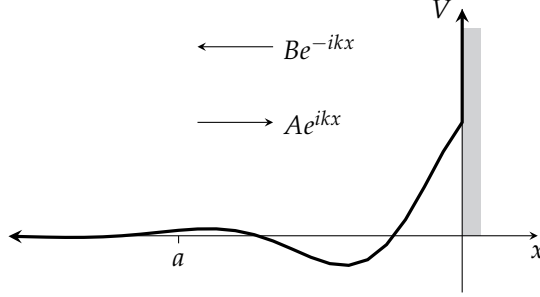
$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^4 (ka)^{4\ell+2}$$

لیکن ہم  $ka \ll 1$  فرض کر رہے ہیں، لہذا بلند طاقتیں متاثر نظر انداز ہوں گی؛ کم توانائی تخمین میں  $\ell = 0$  جنزو، بکھراؤ میں غالب ہوگا (یوں کلاسیکی صورت کے طرح، تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کی تابع نہیں ہوگی)۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(11.36) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت ہندسی عمودی تراش کے چار گنا ہے؛ درحقیقت،  $\sigma$  کی قیمت کرہ کا کل سطحی رقبہ ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت ”بڑی موثر جامت“ ہے (جو بصریات میں بھی درست ہوگا)؛ ایک لحاظ سے، یہ امواج کرہ کو ”چھوتے ہوئے“ اس کے اوپر سے گزرتے ہیں، نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف (سیدھا دیکھتے ہوئے) عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات ۱۱.۳۲ سے آغاز کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۳۳ ثابت کریں۔ اشارہ: لیڈنڈر کشیر رکنیوں کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ  $\ell$  کی مختلف قیمتوں والے عددی سرعہ علیحدہ علیحدہ لازمًا منفرہ ہوں گے۔



شکل ۱۱.۷: معتمی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامستثنیٰ دیوار پائی جاتی ہے، سے یک بُعدی بکھراؤ۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا انتفاصل خول:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں، جہاں  $\alpha$  اور  $a$  مستقلات ہیں۔ حیثہ بکھراؤ،  $f(\theta)$ ، تفسریقی عمودی تراش،  $D(\theta)$ ، اور کل عمودی تراش،  $\sigma$ ، کا حساب کریں۔ ان میں  $ka \ll 1$  فرض کریں، لہذا صرف  $\ell = 0$  جزو حنا طر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ (چیزوں کو آسان بنانے کی حنا طر، آغاز سے ہی  $\ell \neq 0$  والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔) یہاں  $a_0$  کا تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار  $\beta \equiv 2ma_0/\hbar^2$  کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2 \quad \text{جواب:}$$

### ۱۱.۳ پیتی انتقال

نصف لکیر  $x < 0$  پر معتمی مخفیہ  $V(x)$  سے یک بُعدی بکھراؤ کے مسئلے پر، پہلے، غور کرتے ہیں (شکل ۱۱.۷)۔ میں  $x = 0$  پر ایسنوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \quad (x < -a) \quad (11.37)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگی۔

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \quad (x < -a) \quad (11.38)$$

باہم عمل خطے  $(-a < x < 0)$  میں جو کچھ بھی ہو، احتمال کی بقا کی بنا پر، منعکس موج کا حیثہ لازماً آمدی موج کے حیثہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ ان کے حیثے بھی برابر ہوں۔ اگر  $x = 0$  پر دیوار کے سوا کوئی مخفیہ نہیں ہو، تب چونکہ مبدا پر کل

تفاعل موج (آمدی جمع منعکس) صفر ہوگا:

$$(11.39) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لہذا  $B = -A$  ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں،  $(x < -a)$  کے لئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(11.40) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی، کسی مخصوص مخفیہ کے لئے ( $k$ )، لہذا توانائی  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  کی صورت میں، **انتقال**<sup>۱۸</sup>  $\delta$  کے حساب کا دو سرانام ہے۔<sup>۱۹</sup> ہم خط بکھراؤ  $(-a < x < 0)$  میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط عائد کر کے ایسا کرتے ہیں (سوال ۱۱.۵ دیکھیں)۔ (مخلوط حیطہ  $B$  کے بجائے) پستی انتقال کے ساتھ کام کرنے سے طبیعیات عیاں ہوتی ہے (احتمال کے بقا کے بدولت مخفیہ منعکس موج کا صرف پستی منتقل کر سکتا ہے) اور (ایک) مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے (ریاضی آسان ہوتی ہے)۔

آئیں اب تین بُدی صورت پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ آمدی مستوی موج ( $Ae^{ikz}$ ) کا  $z$  رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا (کلیریلے میں  $m \neq 0$  والا کوئی جہز نہیں پایا جاتا)، لیکن اس میں کل زاویائی معیار حرکت ( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ) کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ  $\ell$  کی تبدیلی کا تعلق زاویائی معیار حرکت کا بقا کرتا ہے، لہذا ہر ایک **جزوی موج**<sup>۲۰</sup> (جسے کسی ایک مخصوص  $\ell$  سے نام دیا جاتا ہے) انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ<sup>۲۱</sup> میں (اب بھی) کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی؛ تاہم اس کی پستی تبدیل ہوگی۔ مخفیہ نہ ہونے کی صورت میں،  $\psi_0 = Ae^{ikz}$  ہوگا، لہذا  $\ell$  ویں جہزوی موج درج ذیل ہوگی (مساوات ۱۱.۲۸)۔

$$(11.41) \quad \psi_0^{(\ell)} = Ai^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

لیکن مساوات ۱۱.۱۹ اور جدول ۱۱.۱ کے تحت

$$(11.42) \quad j_\ell(x) = \frac{1}{2} [h^{(1)}(x) + h^{(2)}(x)] \approx \frac{1}{2x} [(-i)^{\ell+1} e^{ix} + i^{\ell+1} e^{-ix}] \quad (x \gg 1)$$

ہوگا۔ یوں بڑے  $r$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.43) \quad \psi_0^{(\ell)} \approx A \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}] P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

<sup>۱۸</sup> مساوات ۱۱.۴۰ میں  $\delta$  کے آگے روایتی طور پر 2 لکھا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ آمدی موج آتے ہوئے ایک مرتبہ اور جاتے ہوئے ایک مرتبہ پستی منتقل ہوتی ہے؛ ہم ”ایک“ رخ پستی انتقال کو  $\delta$  سے ظاہر کرتے ہیں لہذا اکل  $2\delta$  ہوگا۔

<sup>۲۰</sup> ”مضمون“ میں اس لئے بھی غلط فہمی پیدا ہوتی ہے کہ ہر دوسری چیز ”حیطہ“ پکارا جاتا ہے:  $f(\theta)$  ”بکھراؤ حیطہ“ ہے،  $a_\ell$  ”جہزوی موج حیطہ“ ہے، لیکن اول الذکر  $\theta$  کا تفاعل ہے، اور دونوں مخلوط اعداد ہیں۔ میں اب ”حیطہ“ کو اس کی اصل مفہوم (سائن نموج کی بلندی) میں استعمال کر رہا ہوں۔

phase shift<sup>۱۸</sup>

partial wave<sup>۲۰</sup>



چو کور قوسین میں دوسرا جزو آمدی کردی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ مخفیہ بکھر او متعارف کرنے سے یہ جزو تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جزو رخصتی موج ہے جو پیتی انتتال  $\delta_\ell$

$$(11.33) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[ e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

اٹھاتا ہے۔ آپ  $e^{ikz}$  میں  $h_\ell^{(2)}$  جزو کی بنا پر اس کو کروی سرکوز موج تصور کر سکتے ہیں، جس میں  $2\delta_\ell$  پیتی انتتال (حاشیہ ۱۹ دیکھیں) پایا جاتا ہے اور جو  $e^{ikz}$  میں  $h_\ell^{(1)}$  حصہ کے ساتھ بکھری موج شامل کر کے رخصتی کردی موج کے طور پر ابھرتی ہے۔

حصہ ۱۱.۲.۱ میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں  $a_\ell$  کی صورت میں پیش کیا گیا؛ یہاں اس کو پیتی انتتال  $\delta_\ell$  کی صورت میں پیش کیا جائے گا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق ہوگا۔ یقیناً مساوات ۱۱.۲۳ کے بڑے  $r$  کی صورت میں) متقارب روپ:

$$(11.35) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[ e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] + \frac{(2\ell+1)}{r} a_\ell e^{ikr} \right\} P_\ell(\cos \theta)$$

کا  $\delta_\ell$  کی صورت میں عمومی روپ (مساوات ۱۱.۳۴) کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔<sup>۲۲</sup>

$$(11.36) \quad a_\ell = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell)$$

اس طرح بالخصوص (مساوات ۱۱.۲۵)

$$(11.37) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا (مساوات ۱۱.۲۷)۔

$$(11.38) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell)$$

اب بھی (جزوی موج حیطوں کی بجائے) پیتی انتتال کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے، چونکہ ان سے طبعی مفہوم یا آسانی سمجھ جاسکتے ہیں، اور ریاضی آسان ہوتی ہے؛ پیتی انتتال، زاویائی معیار حرکت کے بقا کو برائے کار لاتے ہوئے، (دو حقیقی اعداد پر مشتمل) مخلوط مقدار  $a_\ell$  کی تخفیف ایک حقیقی عدد  $\delta_\ell$  میں کرتا ہے۔

<sup>۲۲</sup> اگرچہ میں نے تفاعل موج کا متقارب روپ استعمال کرتے ہوئے  $a_\ell$  اور  $\delta_\ell$  کے بیچ تعلق دریافت کیا، نتائج (مساوات ۱۱.۳۶) میں کوئی تخمین نہیں پایا جاتا۔ دونوں ( $r$  کے غیر تابع) مستقلات ہیں، اور متقارب خط (جہاں مشکل تفاعلات  $e^{\pm ikr}/kr$  روپ اختیار کر چکے ہوں گے) میں  $\delta_\ell$  سے مراد پیتی انتتال ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  اور توانائی  $E$  ہے درج ذیل مخفیہ پربائیں سے آمدی ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a) \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0) \\ \infty, & (x > 0) \end{cases}$$

۱. آمدی موج  $Ae^{ikx}$  (جہاں  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے) لے کر منعکس موج تلاش کریں۔ جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[ \frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

ب. تصدیق کریں کہ منعکس موج کا جیٹ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

ج. بہت گہرے کنویں ( $E \ll V_0$ ) کے لئے یقینی انتقال  $\delta$  (مساوات ۱۱.۴۰) تلاش کریں۔

جواب:  $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لئے جزوی موج پیمائش انتقال ( $\delta_\ell$ ) کیا ہوں گے (مشال ۱۱.۳)؟

سوال ۱۱.۷: ڈیلٹا تفاعل خول (سوال ۱۱.۴) سے  $S$  موج ( $\ell = 0$ ) جزوی موج پیمائش انتقال  $\delta_0(k)$  تلاش کریں۔ فرض کریں کہ  $r \rightarrow \infty$  پر رداسی تفاعل موج  $u(r)$  صفر کو پہنچتا ہے۔ جواب:

$$-\cot^{-1} \left[ \cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

## ۱۱.۴ بارن تخمین

### ۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ

غیر تاج وقت مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{اور} \quad Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$

اس کاروپ سرسری طور پر مساواتے ہلم ہولٹز<sup>۲۳</sup> کی طرح ہے؛ البتہ، غیر متجانس جزو (Q) خود  $\psi$  کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل  $G(r)$  دریافت کر پائیں جو ڈیلتا تفاعل علی ”منبع“ کے لئے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(11.52) \quad (\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r)$$

ایسی صورت میں ہم  $\psi$  کو بطور مکمل:

$$(11.53) \quad \psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم با آسانی دکھا سکتے ہیں کہ یہ مساوات ۱۱.۵۰ کے روپ کی مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)]Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل  $G(r)$  کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین<sup>۲۴</sup> کہتے ہیں۔ (عمومی طور پر، خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلتا تفاعل علی منبع کو ”رد عمل“ ظاہر کرتا ہے۔)

ہمارا پہلا کام،  $G(r)$  کے لئے مساوات ۱۱.۵۲ کا حل تلاش کرنا ہے۔<sup>۲۵</sup> آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فورسیر بدل لیں، جو تفرقی مساوات کو الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں۔

$$(11.54) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

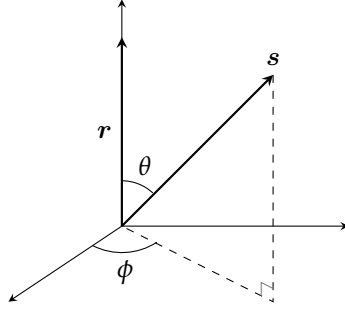
ہوگا۔ لیکن

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

<sup>۲۳</sup>Helmholtz equation

<sup>۲۴</sup>Green's function

<sup>۲۵</sup>خبردار کہتا ہوں کہ اگلے دو صفحات میں آپ کا سامنا مشکل ترین تجربے ہوگا، جس میں ارتقائی مکمل شامل ہیں۔ آپ چاہیں تو سیدھا جواب دیکھیں (مساوات ۱۱.۶۵)۔



شکل ۱۱.۸: موزوں محدود برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا مکمل۔

اور (مساوات ۲.۱۴۳ دیکھیں)

$$(11.56) \quad \delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} d^3 s$$

ہیں، لہذا مساوات ۱۱.۵۲ درج ذیل کہے گی۔

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا۔<sup>۲۶</sup>

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (k^2 - s^2)}$$

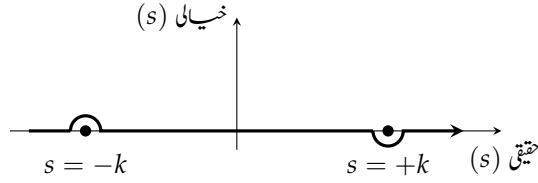
اس کو واپس مساوات ۱۱.۵۴ میں پڑ کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(11.58) \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب،  $s$  مکمل کے نقطہ نظر سے  $\mathbf{r}$  غیر متغیر ہے، لہذا ہم کر دی محدود  $(s, \theta, \phi)$  کو یوں چن سکتے ہیں کہ  $\mathbf{r}$  قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = sr \cos \theta$  ہوگا،  $\phi$  کا مکمل  $2\pi$  جبکہ  $\theta$  مکمل

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

<sup>۲۶</sup> صاف ظاہر ہے کہ یہ کافی ہے، البتہ یہ لازم بھی ہے، جیسا آپ ان دونوں اجزاء کا ایک مکمل لکھ کر مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔



شکل ۱۱.۹: ارتقائی مکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۶۰) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds$$

باقی مکمل آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیات استعمال کر کے نصب نم کو اجزاء ضربی کے روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔

$$(11.۶۱) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right\}$$

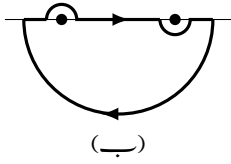
$$= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

اگر  $z_0$  خط ارتقاع کے اندر پایا جاتا ہو، تب کوشش کلیہ مکمل:

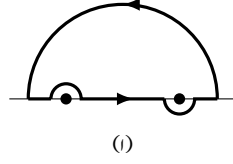
$$(11.۶۲) \quad \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے، (بصورت دیگر مکمل صفر ہوگا)۔ یہاں حقیقی محور،  $\pm k$  پر قطبی نادر نقاط کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے، کی ہم راہ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا؛ میں  $-k$  کے اوپر سے  $+k$  کے نیچے سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں؛ مثلاً، آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں، جس سے آپ کو مختلف تقاسم عمل گرین حاصل ہوگا، لیکن جیسا میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا، یہ تمام متبادل مقبول ہوں گے۔

مساوات ۱۱.۶۱ میں ہر ایک مکمل کے لئے ہمیں اس طرح ”خط استوا کو بند“ کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالتا ہو۔ مکمل  $I_1$  کی صورت میں، جب  $s$  کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جبزو ضربی  $e^{isr}$  صفر کو پہنچتا ہے؛ اس مکمل کے لئے ہم دائرہ اوپر سے بند کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-الف)۔ خط ارتقاع



(ب)



(i)

شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

صرف  $s = +k$  پر تادر نقطہ کو گھیرتا ہے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.63) \quad I_1 = \oint \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

تکمل  $I_2$  کی صورت میں، جب  $s$  کا خیالی جزو بہت بڑا اور منفی ہو تب جزو ضربی  $e^{-isr}$  صفر کو پہنچتا ہے لہذا ہم دائرے کو نیچے سے بند کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقاع  $s = -k$  پر تادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے (اور یہ گھڑی وار ہے، جس سے اضافی منفی علامت حاصل ہوگی)۔

$$(11.64) \quad I_2 = - \oint \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.65) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[ \left( i\pi e^{ikr} \right) - \left( -i\pi e^{ikr} \right) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات ۱۱.۵۲ کا حل؛ مساوات ہولٹنز کا تفاعل گرین ہے۔ (اگر آپ ریاضیاتی تجزیہ میں کہیں پھنس گئے ہوں، بلا واسطہ تفرق سے نتیجے کی تصدیق کریں؛ سوال ۱۱.۸ دیکھیں۔) بلکہ، یہ مساوات ہولٹنز کا تفاعل گرین ہے، چونکہ ہم  $G(r)$  کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل  $G_0(r)$  جمع کر سکتے ہیں جو متبائن ہولٹنز مساوات کو مطمئن کرتا ہو:

$$(11.66) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات ۱۱.۵۲ کو  $(G + G_0)$  بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ایہام کی وجہ، قطبین کے متعرب سے گزرتے ہوئے، راہ کے انتخاب میں ایہام کی بنا پر ہے؛ ایک نئی راہ منتخب کرنا، ایک نئے تفاعل  $G_0(r)$  کے انتخاب کے مترادف ہے۔

مساوات ۱۱.۵۳ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں؛ مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.67) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں  $\psi_0$  آزاد ذروی مساوات شرودنگر کو مطمئن:

$$(11.68) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

کرتا ہے۔ مساوات ۱۱.۶۷ مساواتے شرودنگر کا مکمل روپ<sup>۲۸</sup> ہے، جو زیادہ معروف تفرقی روپ کے مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ (کسی بھی مخفیہ کے لئے) یہ مساوات شرودنگر کا صریح حل ہے؛ جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکا مست ہوں: دائیں ہاتھ مکمل کی علامت کے اندر  $\psi$  پایا جاتا ہے، لہذا حل جانے بغیر آپ مکمل حل نہیں کر سکتے۔ تاہم، مکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے، اور جیسا ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے، یہ بالخصوص بکھراؤ مسائل کے لئے نہایت موزوں ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات ۱۱.۶۵ کو مساوات ۱۱.۵۲ میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ:  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ  $V$  اور  $E$  کی مناسب قیمتوں کے لئے، مساوات شرودنگر کے مکملی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال (مساوات ۴.۸۰) مطمئن کرتا ہے (یاد رہے کہ  $E$  منفی ہے، لہذا  $i\kappa = k$  ہوگا، جہاں  $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$  ہے)۔

## ۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں  $r_0 = 0$  پر  $V(r_0)$  مقامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطے کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر  $\psi(r)$  جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی مکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لئے  $|r| \gg |r_0|$  ہوگا لہذا

$$(11.69) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.70) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.71) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.72) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.43) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نام میں ہم زیادہ بڑی تخمین  $r \cong |r-r_0|$  دے سکتے ہیں قوت نام میں ہمیں دوسرا جزو بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نام میں دوسرے جزو کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار  $(r_0/r)$  کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتی جزو کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکسراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$(11.44) \quad \psi_0(r) = A e^{ikz}$$

یوں بڑی  $r$  کے لئے درج ذیل ہوگا

$$(11.45) \quad \psi(r) \cong A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکسراو پڑھ سکتے ہیں

$$(11.46) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروئے کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ و تابل ذکر تبدیل نہیں کرتا تاہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(11.47) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = A e^{ikz_0} = A e^{ik' \cdot r_0}$$

جہاں تکمیل کے اندر  $k'$  درج ذیل ہے

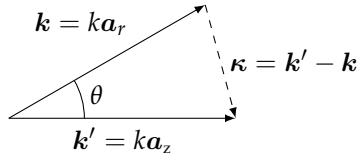
$$(11.48) \quad k' \equiv k \hat{z}$$

مخفیہ  $V$  صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا ہے بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k'-k) \cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$

ہو سکتا ہے کہ آپ  $k'$  اور  $k$  کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار  $k$  ہے تاہم اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ موخر الذکر کا رخ کاغذ کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں  $\hbar(k - k')$  منتقلی معیار





شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج:  $k'$  آمدی رخ جبکہ  $k$  بکھر اور رخ ہے۔

حسرت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خط بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراؤ کے لئے قوت نمائی جزو ضروری بنیادی طور پر منتقل ہو گا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.80) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں  $r$  کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا امید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔  
مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.81) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں  $\theta$  اور  $\phi$  کا غیر تابع خط بکھراؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.82) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفسیری عمودی تراش

$$(11.83) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.84) \quad \sigma \cong 4\pi \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

ایک کروئی تشاکلی مخفیہ  $V(r) = V(r)$  کے لئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.85) \quad \kappa \equiv k' - k$$

$r_0$  تکمل کے قطبی محور کو  $\kappa$  پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.87) \quad (k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.88) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

متغیر  $\phi_0$  کے لحاظ سے تکمل  $2\pi$  دیگا اور  $\theta_0$  تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں  $r$  کے زیر نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$(11.89) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروی تشاکل}$$

$f$  کی زاویائی تابعت  $\kappa$  میں سمونی گئی ہے شکل ۱۱.۱۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.90) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کاروپی درج ذیل ہے جہاں  $\beta$  اور  $\mu$  مستقلات ہیں

$$(11.91) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)}$$

□

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۶: رد فورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں  $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$  اور  $\mu = 0$  پُر کرنے سے مخفیہ کو لب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیظ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.93) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa^2}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.94) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}$$

اس کا مربع ہمیں تفسیری عمودی تراش دیگا

$$(11.94) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

جو ٹھیک کلیہ ردور فورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کالسی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹائی نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردور فورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے نرم کرہ بھراؤ کا محیط بھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں مکمل کی قیمت تلاش کر کے دائیں ہاتھ ریاضی فہترہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یو کا دوا مخفیہ سے بھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو  $E$  کا تناسب عمل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں  $f(\theta, D(\theta))$  اور  $\sigma$  کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے  $f(\theta)$  کا حساب لگائیں۔

(ج) دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

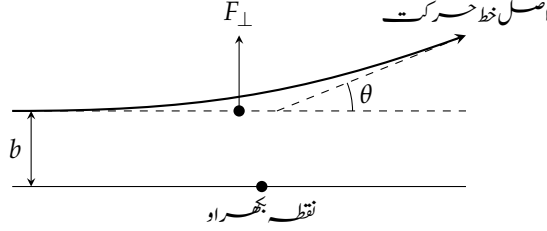
### ۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لسیکر پر ہی چلے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.95) \quad I = \int F_{\perp} dt$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں  $p$  آمدی معیار حرکت ہے

$$(11.96) \quad \theta \cong \tan^{-1}(I/p)$$



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں۔ صورت کو صفر رتبہ کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبہ تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ درحقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مہر کوڑ ہو سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی مکملی روپ درج ذیل ہے

$$(11.94) \quad \psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r-r_0)V(r_0)\psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں  $\psi_0$  آمدی موج ہے

$$(11.98) \quad g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے جزو ضربی  $2m/\hbar^2$  شامل کیا ہے اور  $V$  مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$(11.99) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

فرض کریں ہم  $\psi$  کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے مکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$(11.100) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi$$

اس عمل کے بار بار دہرانے سے ہمیں  $\psi$  کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$(11.101) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots$$

شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظیری مفہوم۔

سوال 11.1: مبداء پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ  $-\infty < x < \infty$  پر یک بُعدی پتھر اوکے لئے

سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمینہ بن تیار کریں۔ یعنی  $\psi_0(x_0) \cong \psi(x_0)$  تصور کرتے ہوئے  $\psi_0(x)$

$Ae^{ikx}$  منتخب کر کے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی عمودی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left( \frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2 \quad (11.103)$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا انتفاع مساوات 2.114 اور ایک مستثنائی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لئے تفصیلی عمودی سر ( $T = 1 - R$ ) کو یک بُعدی تخمینہ بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ جیٹ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے پچر رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0)) \quad (11.104)$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \quad (11.105)$$

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229



- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتفاقی  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقابلی عمل، 103  
امتیازی فتر، 103  
امتیازی فتر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطاطی، 90، 104  
انخطاطی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34

- 237، تفکیک  
 تعداد مکین، 237  
 تعیین حال، 103  
 تغییریت، 9  
 تفعل  
 ذیل، 72  
 تفعل موج، 2  
 تفعل علیہ، 128  
 تکمل  
 ڈھانپائی، 312  
 توالی  
 کلیہ، 55  
 توانائی  
 اجبازتی، 29  
 توقعاتی  
 قیت، 7  
 شنائی عددی سر، 239  
 جزو وارون، 280  
 جسم مقیاس، 229  
 جفت، 34  
 تفعل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقنطری، 181  
 جوہری مدار چوں  
 خطی جوڑ ترکیب، 311  
 جی جزو ضربی، 278  
 چکر، 173، 174  
 مخالف میدان، 175  
 ہم میدان، 175  
 چکر چکر رابطہ، 290  
 چکر کار، 175  
 چکر و مدار باہم عمل، 279  
 چکر و مدار رابطہ، 272  
 چندر شیکھر حد، 253  
 چوزاویہ تشکل، 298  
 حال  
 بھراؤ، 70  
 بوسن، 208  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقنطریہ، 284  
 بیریان، 191  
 میل  
 کروی تفعل، 148  
 بے لچک پھسکی، 173  
 پازیشٹرانیم، 207، 291  
 پاشن ویک اثر، 285  
 پالی اصول مناعت، 208  
 پالی متالب چکر، 177  
 پایان، 191  
 پٹیاں، 234  
 پس پردہ، 219  
 پلانک  
 کلیہ، 162  
 پسیداکار  
 فضا میں انتقال کا، 136  
 وقت میں انتقال، 136  
 پسیداکار  
 تفعل، 60  
 گھومتا، 200  
 تجدیدی عرصہ، 89  
 تجربہ  
 شرٹن و گرلاخ، 184  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 78  
 تسل  
 بالمر، 162  
 پاشن، 162  
 ٹیلر، 42  
 طاقتی، 43  
 فوریئر، 35  
 لیمان، 162  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 209

- دوری سستی، 66  
 گروہی سستی، 66  
 رمسز اور وٹاؤسڈ اثر، 86  
 رواحتال، 194  
 روڈریگیس  
 کلیہ، 142  
 ریمان زیستاقفا عمل، 249  
 زاویائی معیار حرکت  
 بق، 170  
 خنقی، 174  
 غیر خنقی، 174  
 زیسان اثر، 283  
 ساکن  
 حالیت، 27  
 سٹرلنگ تخمین، 243  
 شیفتن و بولسٹمن کلیہ، 251  
 سرحدی شراظ، 32  
 سرنک زنی، 72، 79  
 سفید بونا، 252  
 سگرا، 15  
 سلور، 220  
 سمتاویہ، 128  
 سمتیات، 97  
 سمتیہ موج، 224  
 سوچ  
 انکاری، 4  
 تقلید پسند، 3  
 حقیقت پسند، 3  
 سوڈیم، 23  
 سہ تا، 188  
 سیاہ جسی طیف، 250  
 سیزھی  
 عاملین، 46  
 سیزھی تفاع عمل، 80  
 شمارک اثر، 296  
 شرودنگر  
 غیر تابع وقت، 27  
 شرودنگر نقطہ نظر، 136  
 زمینی، 34، 156  
 مقید، 70  
 ہچکان، 34  
 حرارتی توازن، 236  
 حرکت  
 سائیکلوثران، 202  
 خطی الجبر، 97  
 خطی تبدلہ، 97  
 خطی جوڑ، 28  
 خفیہ متغیرات، 3  
 خول، 219، 235  
 درجہ حرارت آزاد، 254  
 درجہ حرارت، 236  
 درز، 234  
 درز توانائی، 290  
 دلیل، 61  
 دم ہلانا، 56، 96  
 دوری جدول، 219  
 ڈیراک  
 علاقیت، 128  
 کنگھی، 229  
 معیاری عمودیت، 108  
 ڈیلٹا  
 کرونیٹر، 35  
 ڈیوٹریم، 297  
 ڈیوٹیران، 297  
 ذرہ  
 غیر مستحکم، 21  
 رو  
 احتمال، 21  
 ردای مساوات، 146  
 رڈبرگ، 162  
 کلیہ، 162  
 رشتہ  
 پترنک، 295  
 کرامرس، 295  
 رفتار

- فـنـر و نوس  
ترکیب، 54  
فـنـس  
بیرونی، 23  
دوہری، 128  
فورینسر  
الٹ بدل، 63  
بدل، 63
- فـنـس  
غیر ہم آہنگ، 116  
فـنـس  
بچھراؤ، 93، 94  
ترسیل، 95  
فـنـس اہل ارکان، 125  
فـنـس  
کب، 42  
فـنـس مین، 298  
قواعد بن، 220  
قوالب، 98  
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245  
کایان، 191  
کشافت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکشی  
ہرمانڈ، 58  
کرائنگ و پینی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کبھی تشاکل، 298  
کلیہ  
ڈی پروگلی، 19  
روڈریگیس، 60  
پولر، 30  
کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
کیٹ  
تختیف شدہ، 206  
کوارک، 191
- شریک عامل، 103  
شریک گرفتگی بندہ، 214  
شارپائی مفہوم، 2  
شوارز  
عدم مساوات، 437  
شوارز عدم مساوات، 99  
صفر متام انقطاع، 34
- طاق، 34  
طامس استقبالی حرکت، 279  
طول موج، 18، 162  
طیف، 104  
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17  
تخلیل، 129  
تقلیل، 166، 46  
رفع، 166، 46  
مبادلہ، 209  
عبور، 161  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عقدہ، 34  
علائیت  
تفعلیہ و سمتاویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی مستقل، 26  
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105  
غیر موصل، 235
- فـنـری  
توانائی، 227  
درجہ حرارت، 228  
سطح، 227  
فـنـرمیان، 208  
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247



- کوانٹائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247  
 گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرافتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گروپویشن، 163  
 گیما تقاسم عمل، 249  
 لاپلائی، 138  
 لارمر تردد، 184  
 لاگنج  
 شریک کشیررکتی، 158  
 کشیررکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لپٹان، 175  
 لتصمیم، 162  
 لگراج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284  
 لوریننز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈ انڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272  
 ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313  
 متعمم  
 تقاسم عمل، 72  
 تقسیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کردی، 139  
 مخالف بیتا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تقاسمات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروع و ڈنگر، 2  
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وننمن و بلن، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناسٹائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فضا تقاسم عمل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250  
وسطانیہ، 7  
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپیلا فٹا عدہ، 221  
کاشیہ فٹا عدہ، 221  
کادو سرافٹا عدہ، 221  
ہار مونی  
سر نقش، 32  
ہار مونی سر نقش  
تین البعدی، 193  
ہائیڈروجن  
میو، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی تسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلدیت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
مکمل، 35، 100  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصول، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزدہیلیم، 217  
نظریہ اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصول، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیو من  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ ط، 70