

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	تفاسل موج	۱
۱	۱.۱ مساوات شروع و نگر	۱
۲	۱.۲ شماراتی مفہوم	۲
۵	۱.۳ احتمال	۵
۵	۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات	۵
۹	۱.۳.۲ استمراری متغیرات	۹
۱۲	۱.۴ معمول زنی	۱۲
۱۵	۱.۵ معیار حرکت	۱۵
۱۸	۱.۶ اصول عدم یقینیت	۱۸
۲۵	۲ غیر متایج وقت مساوات شروع و نگر	۲۵
۲۵	۲.۱ ساکن حالات	۲۵
۳۱	۲.۲ لامتناہی چوکور کٹواں	۳۱
۴۲	۲.۳ ہارمونی سر تقش	۴۲
۴۴	۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب	۴۴
۵۳	۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب	۵۳
۶۰	۲.۴ آزاد ذرہ	۶۰
۷۰	۲.۵ ڈیلٹا تفاسل محفہ	۷۰
۷۰	۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات	۷۰
۷۲	۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاسل کٹواں	۷۲
۸۱	۲.۶ مستناہی چوکور کٹواں	۸۱
۹۷	۳ قواعد و ضوابط	۹۷
۹۷	۳.۱ ہسٹ فضا	۹۷
۱۰۱	۳.۲ قابل مشاہدہ	۱۰۱
۱۰۱	۳.۲.۱ ہر مشی عاملین	۱۰۱

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	.....	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	.....	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	.....	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	.....	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	.....	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	.....	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	.....	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	.....	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	.....	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	.....	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	.....	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	.....	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	.....	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	.....	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	.....	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	.....	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	.....	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	.....	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	.....	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	.....	تغیری اصول	۷
۲۹۹	.....	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	.....	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	.....	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	.....	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	.....	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	.....	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	.....	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	.....	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	.....	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	.....	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	.....	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	.....	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	.....	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	.....	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن عددی سر A اور B . . . . .	۹.۳.۱
۳۶۲	بجبان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ سرناگزرتخمین . . . . .	۱۰.۱
۳۷۵	سرناگزرتخمین عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ سرناگزرتخمین کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۸۳	بیت بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۸۳	گرگئی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندسی بیت . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۹۱	اہارونو پوہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۴۰۱	بکھراؤ	۱۱
۴۰۱	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۴۰۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۴۰۵	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۴۰۶	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۴۰۶	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۴۰۹	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۱۲	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۱۵	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۱۵	مساوات شروڈنگر کی عملی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۱۹	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۲۳	تسلل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۲۷	پس نوشت	۱۲
۴۲۸	آمنشائن پوڈلکیوروزن تصاد . . . . .	۱۲.۱
۴۲۹	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۳۳	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۳۵	شروڈنگر کی ملی . . . . .	۱۲.۴
۴۳۶	کوانٹائی زینو تصاد . . . . .	۱۲.۵
۴۳۹	جوابات	
۴۴۱	خطی الجبرا	۱
۴۴۱	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۴۱	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۴۲	فتالب . . . . .	۳.۱

۴۴۲	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۲	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۴۲	هر مشی تبادلے	۶.۱

۴۴۳ فهرنگ





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۱۰

# حرناگزرتخمین

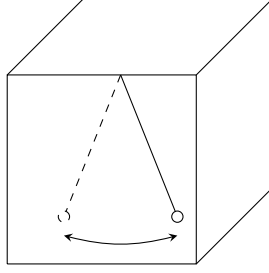
### ۱۰.۱ مسئلہ حرناگزرت

#### ۱۰.۱.۱ حرناگزرت عمل

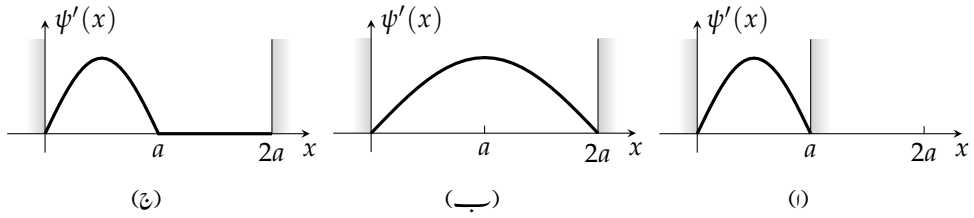
فرض کریں ایک کامل روتاص انتصابی سطح میں بغیر کسی رگڑیا ہوئی مسزاحت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے۔ اگر آپ اس روتاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ امنراتفیری کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا، لیکن اگر آپ بغیر جھٹکا دیے روتاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسرے مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تو یہ اسی سطح (یا اس کی متوازی سطح) میں سٹنگی اور روانی سے، اسی جیٹ کے ساتھ تھلوتارہے گا۔ بیرونی کیفیت کی بہت آہستہ تبدیلی ہی حرناگزرت عمل کی پہچان ہے۔ دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف وقتوں کی بات کی جارتہی ہے: نظام کی اپنی حرکت (جو یہاں روتاص کے ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا) کو ظاہر کرنے والا ”اندرونی“ وقت  $T_i$ ، اور نظام کی معتادیر معلوم میں نمایاں تبدیلی (مثلاً، لرزتے ہوئے چپوترے پر نصب روتاص کی صورت میں چپوترے کی لرزش کا دوری عرصہ) کو ظاہر کرنے والا ”بیرونی“ وقت  $T_e$ ۔ حرناگزرت عمل میں  $T_e \gg T_i$  ہوگا۔

حرناگزرت عمل کے تجزیے کی بنیادی حکمت عملی یہ ہے کہ پہلے بیرونی معتادیر معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے، اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں (بہت آہستہ) وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، مقررہ لمبائی  $L$  کے روتاص کا کلاسیکی دوری عرصہ  $2\pi\sqrt{L/g}$  ہوگا؛ اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو، تو دوری عرصہ ہر  $2\pi\sqrt{L(t)/g}$  ہوگا۔ ہائیڈروجن سالہ (حصہ ۳.۷) پر تبصرہ کے دوران زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی۔ ہم نے مسراکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے آغاز کیا، اور ان کے بیچ فاصلہ  $R$  کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا۔ نظام کی زمینی حال توانائی کو  $R$  کے تقاعیل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد، ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کے انحناسے مسراکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا (سوال ۷.۱۰)۔ طبعیات سالہ میں اس ترکیب کو (جس میں ساکن

adiabatic<sup>1</sup>



شکل ۱۰.۱: حرانگز رنن: اگر ڈبل کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تو رفتاں اسی جیٹہ کے ساتھ ابتدائی سطح کی متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: (ا) لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تو ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تو ذرہ لمحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

سراکزہ سے آغاز کرتے ہوئے، الیکٹران تناسلات موج کا حساب کر کے، ان سے نسبتاً رفتاں سراکزہ کے مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو باران واپن ہائیر تھین<sup>۲</sup> کہتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں، حرانگز تھین<sup>۳</sup> کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ  $H^i$  سے بہت آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ  $H^f$  تک پہنچتی ہے۔ مسئلہ حرانگز<sup>۴</sup> کہتا ہے کہ اگر ذرہ ابتدائی طور پر  $H^i$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہو، تو (زیر مساوات شرودنگر) یہ  $H^f$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا۔ (میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ  $H^i$  سے  $H^f$  تک تھیل کے دوران، طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے، لہذا حالات کی ترتیب میں کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا؛ امتیازی تناسلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے، لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔)

مشال کے طور پر، ہم لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کو زمینی حال:

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-۱)۔ اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ مقام  $2a$  پر منتقل کیا جاتا ہے؛ مسئلہ حرانگز کے تحت (ماسوائے پستی جزو ضربی کے) یہ ذرہ تو سبج شدہ کنویں کے زمینی حال:

$$(۱۰.۲) \quad \psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔ دھیان رہے کہ ہم ہیملٹنی میں چھوٹی تبدیلی (نظریہ اضطراب کی طرح) کی بات نہیں کر رہے ہیں؛ ہاں تبدیلی بہت بڑی ہے۔ فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی آہستہ رونما ہو۔ یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی؛ جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے، نظام سے توانائی حاصل کرے گا، جیسا کہ گاڑی کے انجن کے شافلر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے۔ اس کے برعکس، کنویں کی اچانک وسعت کی صورت میں حال  $\psi^i(x)$  ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج)، جو نئی ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا (سوال ۲.۳۸)۔ یہاں توانائی (کم از کم، اس کی توقعاتی قیمت) کی بقا ہوگی؛ جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے حلاء میں گیس کی آزادانہ پھیالنے سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱۰.۱: ایک لامستثنائی چوکور کنواں، جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار  $v$  سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتی ہے، کو ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے۔ اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳) \quad \Phi_n(x, t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/2\hbar\omega}$$

جہاں  $w(t) \equiv a + vt$  کنویں کی (لحقیقی) چوڑائی اور  $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$  (چوڑائی  $a$ ) کے اصل کنویں کی  $n$  ویں احبازنی توانائی ہے۔ عمومی حل ان  $\Phi$  کا خطی جوڑ:

$$(۱۰.۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t)$$

ہوگا، جہاں عددی سر  $c_n$  وقت  $t$  کے تابع نہیں ہوں گے۔

۱. دیکھیں آیا تابع وقت مساوات شرودنگر بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات ۱۰.۳ مطمئن کرتی ہے۔

ب. فرض کریں اصل کنویں کے زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ( $t = 0$ ) کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ توسیعی عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۵) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz$$

جہاں  $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$  کنویں کے پھیلنے کی رفتار کی بے بعدی پیمائش ہے۔ (بدقسمتی سے اس نکل کی قیمت بنیادی تقاضات کی صورت میں حاصل نہیں کی جاسکتی۔)

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنی چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں، یوں ”بیرونی“ وقت  $w(T_e) = 2a$  ہوگا۔ (ابتدائی) زمینی حال کے تابع وقت قوت ناجز و ضربی کا دوری عرصہ، ”اندرونی“ وقت ہوگا۔ وقت  $T_e$  اور  $T_i$  کا تعین کر کے، دکھائیں کہ حرانگزرتنمین سے مراد  $1 \ll \alpha$  ہوگا، لہذا نکل کے دائرہ کار پر  $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$  ہوگا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے توسیعی عددی سر  $c_n$  کا تعین کریں۔ حال  $\Psi(x, t)$  تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرانگزرتنمین کے مطابق ہے۔

د. دکھائیں کہ  $\Psi(x, t)$  میں پیتی جبز و ضربی کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(10.6) \quad \theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_1(t') dt'$$

جہاں لمحہ  $t$  پر لحاتی امتیازی قدر  $E_n(t) \equiv n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m\omega^2$  ہوگا۔ اس نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

### ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرانگزرتنمین کا ثبوت

مسئلہ حرانگزرتنمین معقول نظر آتا ہے، اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے، تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔ غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں، ایک ذرہ جو  $n$  وی امتیازی حال،  $\psi_n$ ، میں آغاز کرتا ہے،

$$(10.7) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

پیتی جبز و ضربی اپنانے کے علاوہ اسی  $n$  وی امتیازی حال:

$$(10.8) \quad \Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

میں رہتا ہے۔ اگر ہیمیلٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو، تب امتیازی تقاضات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے:

$$(10.9) \quad H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$$

لیکن اب بھی (کسی ایک مخصوص لمحہ پر) یہ معیاری عمودی سلسلہ:

$$(10.10) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

دیں گے، اور یہ مکمل ہیں، لہذا تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$(10.11) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t)\Psi(t)$$

دہمیں معتام (یا چکر، وغیرہ) کا ذکر نہیں کروں گا، چونکہ اس دلیل میں تاہیت وقت کی بات کی جبار ہی ہے۔

کے عمومی حل کو ان کا خطی جوڑ:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)} \quad (10.12)$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.13)$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے  $E_n$  کی صورت میں ”معیاری“ پستی جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے۔ (ہمیشہ کی طرح میں اس کو عددی سر  $c_n(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں، لیکن غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے، لہذا تابعیت وقت کے اس حصے کو صریحاً لکھنا موزوں ہوگا۔)

مساوات ۱۰.۱۲ کو مساوات ۱۰.۱۱ میں پر کرنے سے

$$i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \dot{\theta}_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n} \quad (10.14)$$

حاصل ہوگا (جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ مساوات ۱۰.۹ اور مساوات ۱۰.۱۳ کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے۔

$$\sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \quad (10.15)$$

اس کا  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر، لحاظ امتیازی تفاعلات کی معیاری عمودیت (مساوات ۱۰.۱۰) بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یادرج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)} \quad (10.16)$$

اب مساوات ۱۰.۹ کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H} \psi_n + H \dot{\psi}_n = \dot{E}_n \psi_n + E_n \dot{\psi}_n$$

اور یوں (دوبارہ  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle \quad (10.17)$$

ہم  $H$  کے ہر مشی پن سے مندرجہ اٹھاتے ہوئے  $\langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle$  لکھتے ہیں، یوں  $n \neq m$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۸) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

(یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انخطاطی ہیں) مساوات ۱۰.۱۸ کو مساوات ۱۰.۱۶ میں پُر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا۔

$$(۱۰.۱۹) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$

یہ ٹھیک ٹھیک نتیجہ ہے۔ اب سرناگزرتخمین کی باری آتی ہے: فرض کریں  $H$  نہایت چھوٹا ہے، اور دوسرے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے<sup>۶</sup>

$$(۱۰.۲۰) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle$$

ہوگا، جس کا حل

$$(۱۰.۲۱) \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)}$$

ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔<sup>۷</sup>

$$(۱۰.۲۲) \quad \gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \right. \right\rangle dt'$$

بالخصوص، اگر ذرہ  $n$  وی امتیازی حال (یعنی  $n \neq m$  کیلئے  $c_m(0) = 0$  اور  $c_n(0) = 1$ ) سے آغاز کرے، تب (مساوات ۱۰.۱۲)

$$(۱۰.۲۳) \quad \Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

ہوگا، لہذا (چندیتی جزو ضربی حاصل کرنے کے علاوہ) یہ ذرہ (ارتقائی ہیملٹنی کے)  $n$  وی امتیازی حال میں ہی رہے گا۔

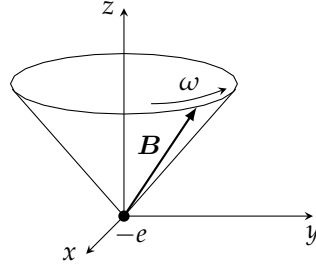
مثال ۱۰.۱: فرض کریں مقناطیسی میدان میں مبدا پر (کمیت  $m$  اور بار  $-e$ ) کا ساکن الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی میدان کی مقدار ( $B_0$ ) مستقل ہے، جبکہ اس کا رخ  $z$  محور کے گرد، مقررہ زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  کے ساتھ، مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے۔ محور  $z$  کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ  $\alpha$  ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$(۱۰.۲۴) \quad B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}]$$

<sup>۶</sup> اس قدم کی پختہ وجہ تلاش کرنا اتنا آسان نہیں۔

<sup>۷</sup> چونکہ  $\psi_m$  کی معمولی زنی سین  $= 0$  حقیقی  $\langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle = 2 \langle \dot{\psi}_m | \psi_m \rangle = \langle d/dt \rangle \langle \psi_m | \psi_m \rangle$  حاصل ہے لہذا  $\gamma$  حقیقی ہوگا۔





شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے مخروطی راہ چلاتا ہے (مسادات ۱۰.۲۴)۔

اس کی ہیملٹنی (مسادات ۱۰.۱۵۸) درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar B_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z] \\
 (10.25) \quad &= \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

جہاں  $\omega_1$  درج ذیل ہے۔

$$(10.26) \quad \omega_1 \equiv \frac{eB_0}{m}$$

ہیملٹنی  $H(t)$  کے معمول شدہ امتیازی چکرکار  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  درج ذیل ہیں

$$(10.27) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(10.28) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو  $B(t)$  کے لمحاتی رخ کے ساتھ، بالستریب، ہم چکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں (سوال ۱۰.۳۰ دیکھیں)۔ ان کی مطابقتی امتیازی افتدار درج ذیل ہوں گی۔

$$(10.29) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

فرض کریں  $B(0)$  کی ہم راہ، الیکٹران ہم چکر:

$$(10.30) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

صورت سے آغاز کرتا ہے۔<sup>۸</sup> تاہم وقت مساوات شرودنگر کا ٹھیک ٹھیک حل درج ذیل ہوگا (سوال ۱۰.۲)

$$(10.31) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \sin(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں  $\lambda$  درج ذیل ہے۔

$$(10.32) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$

اس حل کو  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.33) \quad \chi(t) = \left[ \cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) + i \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ ( $B$  کے موجودہ رخ کے لحاظ سے) حنائ چکر تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(10.34) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

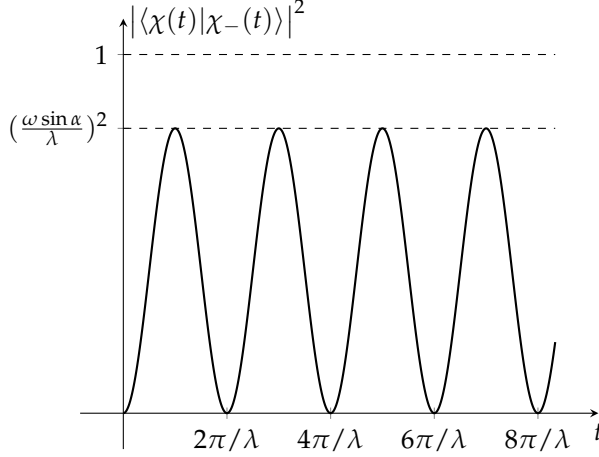
مسئلہ حرانگزرتنمین کے  $T_e \gg T_i$  کی تحدیدی صورت میں تحویل احتمال صفر کو پہنچے گا، جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت  $T_e$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $1/\omega$  ہوگا)، اور تقابل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت  $T_i$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $\hbar/(E_+ - E_-) = 1/\omega_1$  ہوگا)۔ یوں حرانگزرتنمین سے مراد  $\omega \ll \omega_1$  ہے؛ (غیر مضطرب) تقابلات موج کی ہیئت کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے۔ حرانگزرتنمین میں  $\lambda \cong \omega_1$  لہذا

$$(10.35) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

ہوگا، جیسا ہم پہلے سے ذکر کر چکے۔ مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ  $B$  کے ہم رخ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس  $\omega \gg \omega_1$  کی صورت میں  $\lambda \cong \omega$  ہوگا اور نظام ہم میدان اور حنائ  $\square$  میدان صورتوں کے بیچ ٹپکپاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔

سوال ۱۰.۲: تصدیق کریں کہ مساوات ۱۰.۲۵ کی ہیملٹنی کیلئے مساوات ۱۰.۳۱ تاہم وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتی ہے۔ ساتھ ہی مساوات ۱۰.۳۳ کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ، معمول زنی شرط کے عین مطابق، عددی سروں کے مربعوں کا مجموعہ 1 ہوگا۔

<sup>۸</sup> یہ بنیادی طور پر سوال ۹.۲۰ ہی ہے، البتہ یہاں الیکٹران  $B$  کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے، جبکہ سوال ۹.۲۰-د میں یہ  $z$  محور کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: غیر حیرانگیز طریق ( $\omega \gg \omega_1$ ) میں تحویلی احتمال (مساوات ۱۰.۳۳)۔

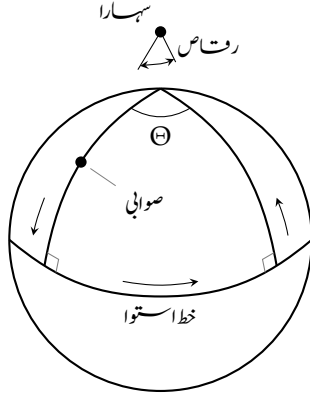
## ۱۰.۲ ہیئت بیری

### ۱۰.۲.۱ گرگنی عمل

آئیں حصہ ۱۰.۱ کے کلاسیکی نمونہ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جس میں ایک ایسے کامل بے رگڑ رفاص، جس کے سہارا کو ایک معتم سے دوسرے اور دوسرے سے تیسرے معتم منتقل کیا جاتا ہو، استعمال کرتے ہوئے حیرانگیز عمل کا تصور اخذ کیا گیا۔ میں نے دعویٰ کیا تھا کہ جب تک سہارا کی حرکت رفاص کے دوری عرصے سے بہت آہستہ ہو (تاکہ سہارا کی نمایاں حرکت کے دوران رفاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہو)، یہ اسی مستوی (یا اس کے متوازی مستوی) میں اسی جیلے (اور اسی تعداد) کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

اگر میں اس کامل رفاص کو شمالی قطب پر لے جا کر، مثلاً صوابی شہر کے رخ، جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) تو کیا ہوگا؟ فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے۔ میں اس کو بہت آہستہ (یعنی حیرانگیز طریقے سے) صوابی سے گزرتے خط طول بلد پر چلتے ہوئے، خط استوا تک پہنچتا ہوں۔ یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے رہا ہوگا۔ میں اس کو خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں (رفاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے)۔ آخر میں نئے خط طول بلند پر چلتے ہوئے، میں رفاص کو واپس شمالی قطب منتقل کرتا ہوں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رفاص اب اسی مستوی میں نہیں جھولے گا جس سے اس نے آغاز کیا تھا؛ یقیناً، نئے اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ  $\Theta$  پایا جاتا ہے، جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے خط طول بلند کے بیچ زاویہ  $\Theta$  ہے۔

جس راہ پر میں رفاص کو اٹھا کر چلتا رہا، وہ راہ (زمین کے مرکز پر) ٹھوس زاویہ  $\Omega$ ، بناتی ہے اور  $\Theta$  اسی ( $\Omega$ ) کے



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر روتاص کی حرانگزر منتقلی۔

برابر ہے۔ یہ راہ شمالی نصف کرہ کا  $\Theta/2\pi$  حصہ گھیرتی ہے، لہذا اس کا رقبہ

$$A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$$

ہوگا (جہاں  $R$  زمین کا رداس ہے)؛ یوں

$$(۱۰.۳۶) \quad \Theta = A/R^2 \equiv \Omega$$

ہوگا جو اس نتیجے کو نہایت عمدہ انداز میں پیش کرتا ہے، چونکہ یہ راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں (شکل ۱۰.۶)۔<sup>۱۰</sup>

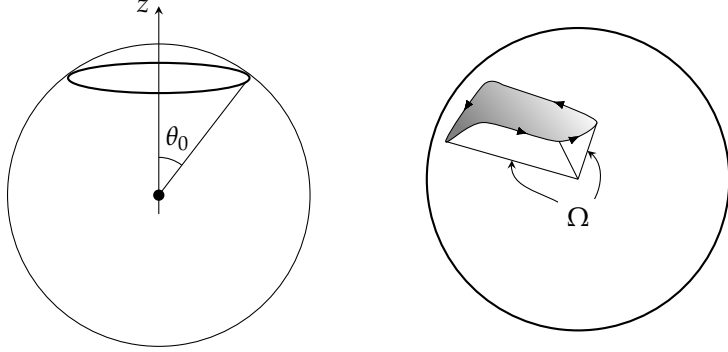
کرہ کی سطح پر بند راہ پر چلتے ہوئے حرانگزر منتقلی کی ایک مثال 'فوق رتاص' ہے، جہاں رتاص کو اٹھا کر چلنے کا کام مجھے نہیں بلکہ زمین کے گھومنے کو سونپا جاتا ہے۔ خط عرض بلد  $\theta_0$  درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$(۱۰.۳۷) \quad \Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos \theta)|_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

زمین کے لحاظ سے (جو اس دوران  $2\pi$  زاویہ گھوم چکی ہوگی) فوق رتاص کی روزانہ استقبالی حرکت  $2\pi \cos \theta_0$  ہوگی؛ اس نتیجہ کو، عموماً، گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس<sup>۱۲</sup> قوتوں کے اثر سے حاصل کیا جاتا ہے، لیکن یہاں یہ حالہ تائیدی مفہوم کا حاصل ہے۔

<sup>۱۰</sup> آپ چاہیں تو اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔ اس راہ کو زمین کے گرد دائری لکیریوں کے چھوٹے چھوٹے حصوں کا مجموعہ تصور کریں۔ رتاص ہر ایسی لکیر کے ساتھ مستقل زاویہ بنائے گا لہذا احتیاطاً زاویائی انحراف کا تعلق کر دی کشیر الاضلاع کے راس زاویوں کے مجموعہ کے ساتھ ہو گا۔

<sup>۱۱</sup> Foucault pendulum  
<sup>۱۲</sup> Coriolis



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ  $\Omega$  بناتی شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقوت اس کی راہ۔

ایسا نظام جو بند راہ پر چلتے ہوئے واپس ابتدائی نقطہ پہنچ کر اپنے ابتدائی حال کو نہیں لوٹا کر گئے<sup>۱۳</sup> کہلاتا ہے۔ (یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد ”حرکت دینا“ ہو؛ اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھیں۔) گر گئی نظام جگہ جگہ پائے جاتے ہیں؛ ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن گر گئی ہے: ہر ایک پھیرے کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی، یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا، وغیرہ۔ اس تصور کا اطلاق، چھوٹے ریٹالڈ عدد<sup>۱۴</sup> پر سیال میں، حبر ٹوموں کی حرکت پر بھی کیا گیا ہے۔ اگلے حصے میں میں گر گئی حرانگزر عمل کی کوانٹائی میکانیات پر غور کروں گا۔ ہم نے دیکھا ہوگا کہ ہیملٹنی کی مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرانگزر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا۔

## ۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ ۱۰.۱.۲ میں دکھایا کہ ایک ذرہ جو  $H(0)$  کے  $n$  وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہے، حرانگزر صورت میں، تابع وقت<sup>۱۵</sup> ہیئت جزو ضربی کے علاوہ،  $H(t)$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں رہتا ہے۔ بالخصوص، اس کا تعلق عمل موج (مساوات ۱۰.۲۳):

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

ہوگا، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.39)$$

حرکے ہیئت<sup>۱۵</sup> ہے (جو وقت کے تغا عمل  $E_n$  کی صورت میں، جب ضروری  $e^{-iE_nt/\hbar}$  کو عموماً دیتی ہے)، اور درج ذیل ہندسہ ہیئت<sup>۱۶</sup> کہلاتی ہے۔

$$(۱۰.۴۰) \quad \gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt'$$

چونکہ ہیملٹنی میں کوئی ایسی مقدار معلوم  $R(t)$  پائی جاتی ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے، لہذا  $\psi_n(t)$  وقت  $t$  کا تابع ہوگا۔ (سوال ۱۰.۱ میں  $R(t)$ ، پھیلتے ہوئے چوکور کنویں کی، چوڑائی ہوگی۔) یوں

$$(۱۰.۴۱) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$

لہذا

$$(۱۰.۴۲) \quad \gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle dR$$

ہوگا، جہاں  $R_i$  اور  $R_f$  مقدار معلوم  $R_t$  کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی۔ بالخصوص، اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا ابتدائی روپ اختیار کرے تب  $R_f = R_i$  لہذا  $\gamma_n(T) = 0$  ہوگا، جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں!

میں نے مساوات ۱۰.۴۱ میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو۔ اب فرض کریں  $N$  عدد مقدار معلوم  $R_1(t)$ ،  $R_2(t)$ ،  $\dots$ ،  $R_N(t)$  تبدیل ہوتے ہوں؛ تب درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۳) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

جہاں  $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$  ہے اور  $\nabla_R$  ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے۔ اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۴) \quad \gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

اور اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا اصل روپ اختیار کرتا ہو تب حالص ہندسی پستی تبدیل درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۴۵) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں بند راہ پر کلیری مکمل ہے، جو عموماً غیر صفر ہوگا۔ مساوات ۱۰.۴۵ کو پہلی مرتبہ 1984 میں<sup>۱۷</sup> میکائل سیری نے حاصل کیا اور یوں  $\gamma_n(T)$  ہیئت<sup>۱۸</sup> کہلاتی ہے۔ دھیان رہے کہ

<sup>۱۵</sup> dynamic phase

<sup>۱۶</sup> geometric phase

<sup>۱۷</sup> اخیرت کی بات ہے کہ 60 سال تک یہ حقیقت کسی کو نظر نہیں آئی۔

<sup>۱۸</sup> Berry's phase

(جب تک حرکت اتنی آہستہ ہو کہ حرانگز کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں)  $\gamma_n(T)$  کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نہ کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر۔ اس کے برعکس، مجموعی حر کی ہیٹ

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کے تابع ہوگی۔

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کی ہیٹ اختیاری ہے؛ طبیعی مقسداوں میں  $|\Psi|^2$  پایا جاتا ہے، لہذا ہیٹ جزو ضربی کثرت جاتا ہے۔ اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندی ہیٹ کی کوئی طبیعی اہمیت نہیں؛ آخر  $\psi_n(t)$  کی ہیٹ بھی تو اختیاری ہے۔ یہ بیری کی دوراندیشی تھی کہ انہوں نے اس حقیقت کو بچھپانا کہ ہیملٹنی کو بند دائرے پر پھیرا دے کر واپس اپنے اصل روپ میں لانے سے ابتدا اور اختتام کے بیچ زائد ہیٹ غیر اختیاری ہوگی، جس کی پیمائش بھی کی جاسکتی ہے۔

مشال کے طور پر، ذرات (تمام حال  $\Psi$  میں) کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے، صرف ایک حصے کو حرانگز تبدیل ہوتے مخفی سے گزارا جاتا ہے۔ دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے درج ذیل روپ کا مجموعی تفاعل موج حاصل ہوگا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \quad (10.41)$$

جہاں  $\Psi_0$  ”سیدھی پہنچی“ شعاع کا تفاعل موج اور  $\Gamma$  تغیر پذیر  $H$  کی بنا پر شعاع کی زائد ہیٹ ہے (جس کا کچھ حصہ حر کی اور کچھ ہندی ہوگا)۔ اس صورت میں درج ذیل ہوگا۔

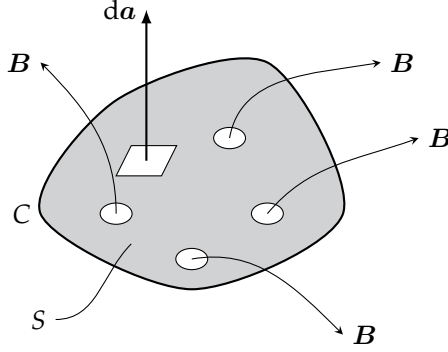
$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \frac{1}{4} |\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma}) (1 + e^{-i\Gamma}) \\ &= \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2) \end{aligned} \quad (10.42)$$

یوں تعبیری اور تباہ کن مداخلت<sup>۱۹</sup> کے نقاط (جہاں  $\Gamma$  کی قیمت  $\pi$  کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی) سے  $\Gamma$  کی پیمائش کی جاسکتی ہے (بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی حر کی ہیٹ کی موجودگی میں ہندی ہیٹ نظر نہیں آئے گی، لیکن انہیں علیحدہ علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے)۔

تین ابعادی مقدار معلوم فضا،  $R = (R_1, R_2, R_3)$ ، میں کلیہ بیری (مساوات ۱۰.۴۵) سستی مخفیہ  $A$  کی صورت میں مقناطیسی بہا<sup>۲۰</sup> کے کلیہ کا یاد دلاتا ہے۔ سطح  $S$  جس کی سرحد مغنی  $C$  ہو سے درج ذیل بہا و گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S B \cdot da \quad (10.48)$$

<sup>۱۹</sup> interference  
<sup>۲۰</sup> magnetic flux



شکل ۱۰.۸: بند مخفی C کے سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہاؤ۔

مقناطیسی میدان کو مستقیم خفیہ کے روپ  $(B = \nabla \times A)$  میں لکھ کر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(10.49) \quad \Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr$$

یوں ہیئت بیری کو مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے ”مقناطیسی میدان“ کا ”بہاؤ“

$$(10.50) \quad “B” = i \nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$$

تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کو دوسری طرف سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے: تین ابعادی صورت میں ہیئت بیری کو سطحی مکمل:

$$(10.51) \quad \gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مقناطیسی ممانٹ کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری مقاصد کے نقطہ نظر سے مساوات ۱۰.۵۱ محض  $\gamma_n(T)$  لکھنے کا دوسرا انداز ہے۔

سوال ۱۰.۳:

۱. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی  $w_1$  سے بڑھ کر  $w_2$  ہوتی ہے؛ مساوات ۱۰.۴۲ سے کنویں کی ہندی تبدیلی ہیئت تلاش کریں۔ نتیجے پر تبصرہ کریں۔

ب. اگر وسعت مستقل شرح  $(dw/dt = v)$  سے ہو، تب حرکی تبدیلی ہیئت کیا ہوگی؟

ج. چوڑائی کم ہو کر واپس  $w_1$  ہو جاتی ہے؛ اس پورے پھیرے کی ہیئت بیری کیا ہوگی؟



سوال ۱۰.۴: ڈیٹا تغا عمل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) واحد ایک مقید حال (مساوات ۲.۱۲۹) کا حاصل ہے۔  $\alpha$  آہستہ آہستہ  $\alpha_1$  سے بڑھ کر  $\alpha_2$  ہوتا ہے؛ ہندی تبدیلی ہیٹ کا حساب لگائیں۔ اگر تبدیلی مستقل شرح  $(d\alpha/dt = c)$  سے رونما ہوتا ہے تب حرکت کی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگی؟

سوال ۱۰.۵: دکھائیں کہ حقیقی  $\psi_n(t)$  کی صورت میں ہندی ہیٹ صفر ہوگی۔ (سوال ۱۰.۳ اور سوال ۱۰.۴ اس کی مثالیں ہیں۔) امتیازی تغا عملات موج کے ساتھ غیر ضروری (لیکن متاؤنی طور پر بالکل جائز) جزو ضربی ہیٹ منسلک کریں:  $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$  جہاں  $\Phi_n(R)$  اختیاری (حقیقی) تغا عمل ہے۔ یقیناً، آپ غیر صفر ہندی ہیٹ حاصل کریں گے، تاہم دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات ۱۰.۲۳ میں پُر کرنے سے کیا ہوگا۔ اور بند راہ پر اس سے صفر حاصل ہوتا ہے۔ سبق: غیر صفر ہیٹ بیری کی خاطر (الف) آپ کو ہیملٹنی میں ایک سے زائد تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی، اور (ب) ایسی ہیملٹنی درکار ہوگی جو غیر مہمل مخلوط امتیازی تغا عملات دیتی ہو۔

مثال ۱۰.۲: ہیٹ بیری کی کلاسیکی مثال مستقل مقدار کے مقناطیسی میدان، جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو، میں مبدا پر الیکٹران ہے۔ پہلے اس مخصوص صورت (جس کا تجزیہ مثال ۱۰.۱ میں کیا گیا) پر غور کرتے ہیں جس میں محور  $z$  کے ساتھ مقررہ زاویہ  $\alpha$  پر رہتے ہوئے، متقل زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے،  $B(t)$  استقبالی حرکت کرتا ہے۔ (میدان  $B$  ہم راہ ”ہم میدان“ الیکٹران کے لئے) مساوات ۱۰.۲۳ اٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے۔ حرانگزر طریق،  $\omega \ll \omega_1$ ، میں

$$(۱۰.۵۲) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا، لہذا مساوات ۱۰.۲۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۱۰.۵۳) \quad \begin{aligned} \chi(t) &\cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ &+ i \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left( \frac{\omega_1 t}{2} \right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t) \end{aligned}$$

دوسرے جزو کو  $0 \rightarrow \omega/\omega_1$  کی صورت میں رد کرتے ہوئے حرانگزر روپ کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا (مساوات ۱۰.۲۳)۔ حرکت کی ہیٹ درج ذیل ہے

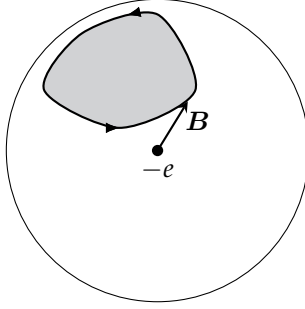
$$(۱۰.۵۴) \quad \theta_+(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_+(t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$

(جہاں مساوات ۱۰.۲۹ سے  $E_+ = \hbar\omega_1/2$  ہوگا)، لہذا ہندی ہیٹ درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۵) \quad \gamma_+(t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پھیرے کے لیے  $T = 2\pi/\omega$  ہوگا، لہذا ہیٹ بیری درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma_+(T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ چھاڑتا ہے۔

اب زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں، جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک  $B_0$  سے  $r$  کرہ کی سطح پر اختیاری بند راہ چھاڑتی ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان  $B(t)$  کی ہم راہ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا (سوال ۳۰.۴ دیکھیں)

$$(۱۰.۵۷) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں  $B$  کے کروی محدد  $\theta$  اور  $\pi$  اب وقت کے تفاعلات ہیں۔ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا، جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۱۰.۵۸) \quad \begin{aligned} \nabla \chi_+ &= \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۵۹) \quad \begin{aligned} \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle &= \frac{1}{2r} \left[ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

مساوات ۱۰.۵۸ کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی۔

$$(۱۰.۶۰) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \mathbf{a}_r = \frac{i}{2r^2} \mathbf{a}_r$$

یوں مساوات ۱۰.۵۱ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{a} \quad (10.41)$$

مکمل کرہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو  $B$  کی نوک ایک پھیرے میں جھاڑتی ہے، لہذا  
اور  $d\mathbf{a} = r^2 d\Omega \mathbf{a}_r$

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega \quad (10.42)$$

ہوگا، جہاں مسدود پر ٹھوس زاویہ  $\Omega$  ہے۔ یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے، جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلے کا یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا (یعنی زمین کی سطح پر بند راہ پر بلا رگڑ و فاص کی منتقلی)۔ اس نتیجے کے تحت، کسی اختیاری بند راہ پر، مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حسرتاگر پھیرا دینے سے، حنا لیں (ہندسی) تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کے جھاڑنے کے ٹھوس زاویہ کی منفی آدھی ہوگی۔ مساوات ۱۰.۳۷ کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مخصوص نتیجہ (مساوات ۱۰.۵۶) کے مطابق ہے، جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے تھا۔ □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر 1 ہو کے لئے مساوات ۱۰.۶۲ کا ماثلاً حاصل کریں۔ جواب:  $-\Omega$  (ایک ذرہ جس کا چکر  $s$  ہو کے لیے نتیجہ  $-s\Omega$  ہوگا۔)

۱۰.۲.۳ اپارونو بولہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں، مخفیہ ( $\varphi$  اور  $A$ ) بلا واسطہ نا تابل پیما نش ہیں؛ برقی اور مقناطیسی میدان:

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A \quad (10.43)$$

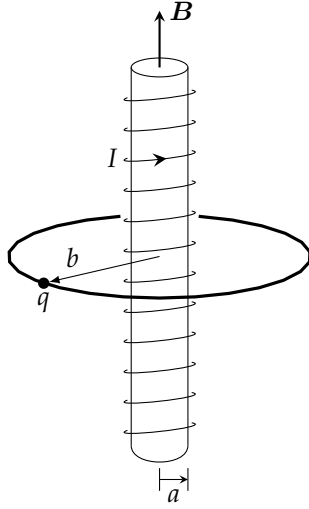
طبیعی مفادیر ہیں۔ بنیادی قوانین (میکسویل مساوات اور لورنز قوت و تاعده) مخفیوں کا کوئی ذکر نہیں کرتے، جو (منطقی نقطہ نظر سے) نظریہ مرتب کرنے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں۔ یقیناً، آپ بغیر خوف و خطر ان مخفیوں کو تبدیل کر سکتے ہیں:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A + \nabla \Lambda \quad (10.44)$$

جہاں  $\Lambda$  معتام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے؛ یہ ماچے تبادلہ<sup>۲۲</sup> کہلاتا ہے، جس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں) جیسا آپ مساوات ۱۰.۶۳ استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں۔

<sup>۲۱</sup> کوانٹائی مکانیات میں رواقی طور پر حرف  $V$  کو مخفی توانائی کے لئے استعمال کیا جاتا ہے، لیکن برقی حرکیات میں یہی حرف غیر مستحق مخفیہ کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ غلط فہمی سے بچنے کے لئے غیر مستحق مخفیہ کے لئے حرف  $\varphi$  استعمال کروں گا۔ اس حصے کے پس منظر کے لئے سوال ۳.۵۹، سوال ۳.۶۰ اور سوال ۳.۶۱ دیکھیں۔

<sup>۲۲</sup> gauge transformation



شکل ۱۰.۱: ایک دائرہ، جس کے اندر سے لمبے بیچوں ال لچھ گزرتا ہو، پر باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

کوانٹائی میکانیات میں مخفی زیادہ اہم کردار ادا کرتے ہیں، چونکہ ہیمیلٹنی کو  $\varphi$  اور  $A$  کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\varphi \quad (10.65)$$

نہ کہ  $E$  اور  $B$  کی صورت میں۔ بہر حال، زیر ماب تبادلہ کوانٹائی نظریہ غیر متغیر رہتا ہے (سوال ۳.۶۱ دیکھیں)، اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا جاتا تھا کہ جن خطوں میں  $E$  اور  $B$  صفر ہوں وہاں، بالکل کلاسیکی نظریہ کی طرح، کسی قسم کا برقی طبعی اثر نہیں پایا جاتا۔ لیکن 1959ء میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطے میں بھی، جہاں میدان صفر ہو، حرکت پذیر باردار ذرہ کے کوانٹائی رویہ پر سمتی مخفیہ اثر انداز ہوگا۔ میں ایک سادہ مثال پیش کر کے اہارونو بوہم اثر پر تبصرہ کروں گا اور اس کے بعد اس کا ہیئت سیری کے ساتھ تعلق دکھاؤں گا۔

فرض کریں ایک ذرے کو رد اس  $b$  کے دائرے پر رہنے کا پابند بنایا جاتا ہے۔ اس دائرے کے محور پر رد اس  $a < b$  کا لمب بیچوں ال لچھا<sup>۲۳</sup> ہے جس میں یک سمتی برقی رو  $I$  ہے (شکل ۱۰.۱)۔ بہت لمبے بیچوں ال لچھے کی صورت میں، بیچوں ال لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا، جبکہ اس کے باہر میدان صفر ہوگا۔ تاہم بیچوں ال لچھے کے باہر سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا؛ یقیناً  $\nabla \cdot A = 0$  کی موزوں ماب شرط لیتے ہوئے (درج ذیل ہوگا

$$A = \frac{\Phi}{2\pi r} a_\phi \quad (r > a) \quad (10.66)$$

جہاں  $\Phi = \pi a^2 B$  بیچوں ال لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہا<sup>۲۴</sup> ہوگا۔ بیچوں ال لچھ خود غیر باردار ہے، لہذا غیر سمتی مخفیہ  $\varphi$

<sup>۲۳</sup>solenoid  
<sup>۲۴</sup>magnetic flux

صفر ہوگا۔ ایسی صورت میں ہیملٹنی (مساوات ۱۰.۶۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۱۰.۶۷) \quad H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla]$$

تفاعل موج صرف استی زاویہ  $\phi$  ( $\theta = \pi/2, r = b$ ) کا تابع ہے، لہذا  $(a_\phi/b)(d/d\phi) \rightarrow \nabla$  ہوگا، اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(۱۰.۶۸) \quad \frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left( \frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E \psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے:

$$(۱۰.۶۹) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon \psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں۔

$$(۱۰.۷۰) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \quad \text{اور} \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2 E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہوں گے

$$(۱۰.۷۱) \quad \psi = A e^{i\lambda\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۷۲) \quad \lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

نقطہ  $\phi = 2\pi$  پر  $\psi(\phi)$  کے استمرار کی بنا پر  $\lambda$  عدد صحیح ہوگا:

$$(۱۰.۷۳) \quad \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۱۰.۷۴) \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہیچواں لچھا دائرے پر ذرے کا دوپشترتا انحطاط ختم کرتا ہے (سوال ۲.۴۶): مثبت  $n$ ، جو ہیچواں لچھے میں روکے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کو ظاہر کرتا ہے ( $q$  مثبت فرض کرتے ہوئے)، کی توانائی منفی  $n$  کے لحاظ سے، جو مخالف رخ ذرے کو

ظاہر کرتا ہے، کم ہوگی۔ زیادہ اہم بات یہ ہے کہ، احبازی توانائیوں کا دارومدار پتچوں لچے کے اندر میدان پر ہوگا، اگر چہ اس مقام پر جہاں ذرہ پایا جاتا ہے میدان صفر ہے! <sup>۲۵</sup>

زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر، فرض کریں ایک ذرہ ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں  $B$  صفر ہے (لہذا  $\nabla \times A = 0$  ہوگا)، لیکن  $A$  خود غیر صفر ہوگا۔ (اگر چہ میں فرض کرتا ہوں کہ  $A$  ساکن ہے، اس ترکیب کو تابع وقت محفے کے لئے عمومیت دی جاسکتی ہے۔) مخفی توانائی  $V$ ، جس میں برقی حصہ  $q\phi$  شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے، کی (تابع وقت) مساوات شروڈنگر

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10.45)$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

$$\Psi = e^{ig} \Psi' \quad (10.46)$$

جہاں

$$g(r) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_0^r A(r') \cdot dr' \quad (10.47)$$

ہے اور  $O$  کوئی (اختیاری منتخب) نقطہ حوالہ ہے۔ دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہوگی جب پورے خطے میں  $\nabla \times A = 0$  ہو؛ ورنہ لکیری عمل  $O$  سے  $r$  تک راہ پر منحصر ہوگا، اور یوں  $r$  کا تعین عمل نہیں ہوگا۔  $\Psi'$  کی صورت میں  $\Psi$  کی ڈھلوان

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i \nabla g) \Psi' + e^{ig} (\nabla \Psi')$$

ہوگی، لیکن  $\nabla g = (q/\hbar) A$  ہے، لہذا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi' \quad (10.48)$$

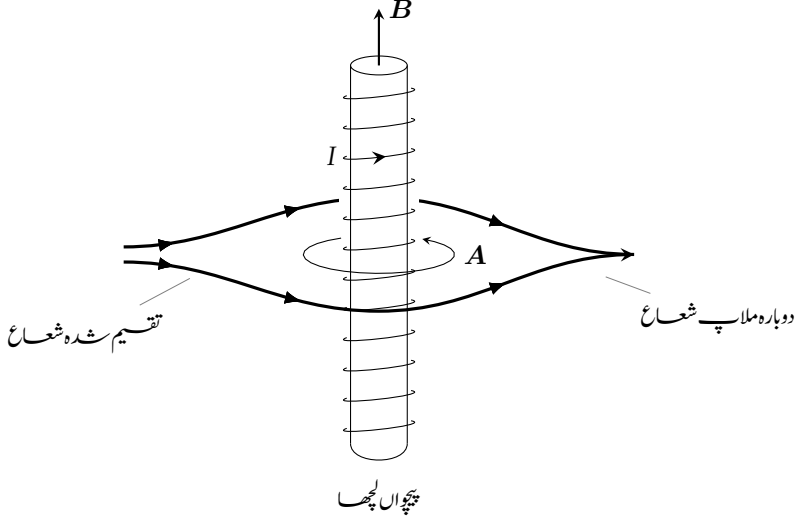
اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi' \quad (10.49)$$

اس کو مساوات ۱۰.۴۵ میں پُر کر کے مشترک جزو ضربی  $e^{ig}$  کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' + V \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (10.50)$$

<sup>۲۵</sup> کامل موصلی پتچوں کی ایک مخصوص خاصیت یہ ہے کہ ان کے احاطہ میں بسا کو اضافی ہوتا ہے:  $\Phi = (2\pi\hbar/q)n'$ ، جہاں  $n'$  عدد صحیح ہوگا۔ ایسی صورت میں یہ اثر متبادل کثیف نہیں ہوگا، چونکہ  $E_n = (\hbar^2/2mb^2)(n+n')^2$  ہوگا اور  $(n+n')$  بھی عدد صحیح ہے۔ اتفاق کی بات ہے کہ یہاں بار  $q$  الیکٹران کے بار کا دگن ہوگا؛ (کامل موصلی الیکٹران جوڑوں کی صورت میں رہتے ہیں۔) لیکن کوٹانازی ہماو کو کامل موصل تافذ کرتا ہے (جو دائری برقی رو کے امالہ کے ذریعہ مشرق کو حتم کرتا ہے)، نہ کہ پتچوں لچھا یا برقی طبعی میدان، اور یہ (غیر کامل موصل) مثال میں نہیں پایا جاتا، جس پر یہاں غور کیا گیا ہے۔



شکل ۱۰.۱۱: اہارونو بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھ حصے لے پتچواں لچھے کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

بظاہر بغیر  $A$  مساوات شرودنگر کو  $\Psi'$  مطمئن کرتا ہے۔ مساوات ۱۰.۸۰ کا حل تلاش کرنے کے بعد (بغیر گردش) سستی مخفیہ کے شعاع کی تصحیح حقیر سا کام ہے: صرف پیتی جزو ضربی  $e^{i\theta}$  ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔

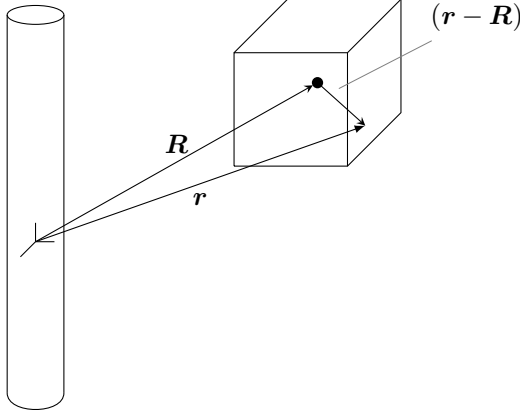
اہارونو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا، جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لے پتچواں لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱)۔ ان شعاعوں کو پتچواں لچھے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے کہ شعاع صرف ان معامات سے گزرتی ہے جہاں  $B = 0$  ہوتا ہے۔ تاہم  $A$ ، جسے مساوات ۱۰.۶۶ پیش کرتی ہے، غصیر صفر ہوگا، اور (دونوں اطراف  $V$  کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے) اختتامی نقطے پر دونوں شعاعوں کی پیتی:

$$(10.81) \quad g = \frac{q}{\hbar} \int A \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{r} a_\phi\right) \cdot (r a_\phi d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}$$

مختلف ہوگی۔ یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہے جو  $A$  کے رخ حرکت کرتے ہیں؛ یعنی پتچواں لچھے میں برقی رو کے رخ۔ دونوں شعاعوں کے پتچیتی مشرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راستہ متناسب ہوگا جسے ان کی راہ گھسیرتی ہیں۔

$$(10.82) \quad \text{پیتی مشرق} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

اس پیتی انتقال سے متاثر پیمائش مداخلت (مساوات ۱۰.۴۷) پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق جیمسز اور ساتھی کر چکے ہیں۔



شکل ۱۰.۱۲: مخفیہ  $V(r - R)$  ایک ذرے کو ڈبلے میں مقید کیے ہوئے ہے۔

ہارونو بوہم اثر کو ہندسی ہیئت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے۔ فرض کریں مخفیہ  $V(r - R)$  باردار ذرے کو ایک ڈبلے میں رہنے کا پابند بناتا ہے (ڈبلے کا مرکز پتچواں لچھے سے باہر نقطہ  $R$  پر ہے)؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ (ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبلے کو پتچواں لچھے کے گرد ایک پھیرا دیں گے، لہذا  $R$  وقت کا قفا عمل ہوگا، تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں۔) اس ہیملٹنی کے امتیازی قفا عملات کا تعین درج ذیل کرتی ہے۔

$$(۱۰.۸۳) \quad \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - qA(r) \right]^2 + V(r - R) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں:

$$(۱۰.۸۴) \quad \psi_n = e^{ig} \psi'_n$$

لیتے ہیں جہاں <sup>۲۶</sup>

$$(۱۰.۸۵) \quad g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r A(r') \cdot d(r')$$

ہے، اور  $A \rightarrow 0$  کی صورت میں  $\psi'$  اسی امتیازی متدر مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$(۱۰.۸۶) \quad \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r - R) \right] \psi'_n = E_n \psi'_n$$

<sup>۲۶</sup> حوالہ نقطہ  $\bigcirc$  کو ڈبلے کے وسط پر منتخب کرنا سودمند ثابت ہوتا ہے، چونکہ ایسا کرنا ضمانت دیتا ہے کہ پتچواں لچھے کے گرد ایک پھیلا رکھل کرنے سے ابتدائی ہیئت روایت حاصل ہوگی۔ اگر آپ، مثلاً، غیر تغیر فضا میں حوالہ نقطہ منتخب کریں، تب راہ پتچواں لچھے کے گرد لپٹی ہوگی، اور ایسے خطے کو گھیرے گی جہاں  $A$  کی گردش غیر صفر ہے، لہذا آپ کو آخری نقطے پر ”ہاتھ سے“ ہیئت درست کرنی ہوگی۔ اگر چہ، اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا، تاہم جواب حاصل کرنے کا یہ بہتر طریقہ نہیں ہے۔ عموماً، قفا عملات موج کی ہیئت روایت طے کرتے ہوئے، ہم چاہیں گے کہ  $\psi_n(x, T) = \psi_n(x, 0)$  ہو تاکہ غیر مطلوب ہیئت مندرجہ شامل نہ ہوں۔



آپ نے دیکھا کہ  $\psi'_n$  صرف ہٹاؤ  $\mathbf{r} - \mathbf{R}$  کا تفاعل ہے، نہ کہ  $(\psi_n$  کی طرح)  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{R}$  کا علیحدہ علیحدہ تفاعل۔

آئیے اب اس ڈب کو لمبے پتچوں لچھے کے گرد ایک پھیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حیرانگیز ہونے کے بھی ضرورت نہیں ہے ہیٹ بیری تسین کرنے کی خاطر ہمیں متدار  $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$  کی قیمت درکار ہوگی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} (10.87) \quad \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{ig} \left[ -i\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 r \\ &= -i\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 r \end{aligned}$$

بغیر زبردشت  $\nabla$  کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  کے تفاعل پر عمل کے دوران  $\nabla_R = -\nabla$  لیا یہاں آخری مکمل ہیملٹنی  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$  کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب  $i/\hbar$  ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہوگا یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.88) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(10.89) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو اہارونو و بوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو و بوہم اثر ہیٹ کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو و بوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جاسکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے  $\mathbf{A}$  خود متابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا ایسا پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گچ غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں وقفہ  $0 \leq x \leq a$  کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t) \delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں  $f(t)$  آہستہ آہستہ صفر سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے مسئلہ حرانگزر کے تحت یہ ذرہ ارتقائی ہیمیلین کے زمینی حال میں ہی رہے گا

۱. وقت  $t \rightarrow \infty$  پر زمینی حال کا حث کہ بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہوگا جس میں  $a/2 + \epsilon$  پر ناقابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرہ بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصے میں رہنے کا پابند ہوگا

ب. وقت  $t$  پر ہیمیلٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

$$\text{جہاں } z \equiv ka \quad T \equiv maf(t)/\hbar^2 \quad \delta \equiv 2\epsilon/a \quad k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$$

ج. اب  $\delta = 0$  لیتے ہوئے  $z$  کے لیے ترقیبی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ  $T$  کی قیمت 0 سے  $\infty$  ہونے سے  $z$  کی قیمت  $\pi$  سے  $2\pi$  ہوگی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب  $\delta = 0.01$  لیتے ہوئے  $T = 0, 1, 5, 20, 100$  اور 1000 کے لیے  $z$  اعدادی طریقے سے حاصل کریں

ه. کنویں کے دائیں نصف حصے میں ذراہ پائے جانے کا احتمال بطور  $z$  اور  $\delta$  کا تفاعل تلاش کریں جواب  $P_r = 1/[1 + (I_+/I_-)]$  جہاں  $I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$  ہوگا  
حبزود (د) میں دیے گئے  $T$  کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و.  $T$  اور  $\delta$  کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترمیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصے میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بعدی ہارمونی مرتعش کمیت  $m$  تردد  $\omega$  پر  $F(t) = m\omega^2 f(t)$  جہاں  $f(t)$  کوئی مخصوص اتفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے  $m\omega^2$  کو صریحاً لکھا ہے یوں  $f(t)$  کا بُعد فاصلہ ہوگا اس کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا

$$(10.90) \quad H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - m \omega^2 x f(t)$$

فرض کریں وقت  $t = 0$  پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہذا  $0 \leq t$  پر  $f(t) = 0$  ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹائی میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے

۱. اگر مرتعش مباد پر ساکن حال  $x_c(0) = \dot{x}_c(0) = 0$  سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی معتم کیا ہوگا جواب

$$(10.91) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش  $n$  وی حال  $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$  جہاں  $\psi_n(x)$  مساوات 61.2 دی جاتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت مساوات شرودنگر کے حل کو درج ذیل

لکھ جاسکتا ہے

$$(۱۰.۹۲) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} \left[ -\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega t + m \dot{x}_c \left(x - \frac{x_c}{2}\right) + \frac{m \omega^2}{2} \int_0^t f(t') x_c(t') x_c(t') dt' \right]}$$

ج. دکھائے کہ  $H(t)$  کے امتیازی تغیرات اور امتیازی افتدار درج ذیل ہونگے

$$(۱۰.۹۳) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 f^2$$

د. دکھائیں کہ حرانگزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی معتمام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے  
 $x_c(t) \cong f(t)$  سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرانگزر تغیرات عمل  $f$  کہ وقتی تغیرات پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ  $\sin[\omega(t - t')] \cos[\omega(t - t')]$  کو  $(1/\omega)(d/dt')$  لکھ کر تکمیل بالخصوص استعمال کریں

ه. اس مثال کے لیے مسئلہ حرانگزر کی تصدیق جزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھ کر کریں

$$(۱۰.۹۴) \quad \Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$$

تصدیق کریں کہ حرکی ہیٹ کاروپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندی ہیٹ آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرانگزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر  $c_m(t)$  کے حرانگزر تسلسل کا پہلا جزو تصور کیا جاسکتا ہے مندرجہ ذیل  $n$  وی حال سے آغاز کرتا ہے حرانگزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندی ہیٹ جزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ  $n$  وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرانگزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$(۱۰.۹۵) \quad c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt'$$

اس سے ہم متعرب حرانگزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی حنا طرہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری مرتعش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کہ متعرب حرانگزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہوگا میں تحویل ممکن ہوگی

$$c_{n+1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

یقیناً حویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے



جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158



- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقابلی عمل، 103  
امتیازی فتر، 103  
امتیازی فتر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطاطی، 90، 104  
انخطاطی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34

- بوسن، 208  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقناطیس، 284  
 بیریان، 191  
 میل  
 کروی تقا عمل، 148  
 بے لچک پھسکی، 173  
 پازیشٹرانیم، 207، 291  
 پاشن ویک اثر، 285  
 پالی اصول مناعت، 208  
 پالی متالب چکر، 177  
 پایان، 191  
 پیال، 234  
 پس پردہ، 219  
 پلانک  
 کلیہ، 162  
 پسیداکار  
 فضا میں انتقال کا، 136  
 وقت میں انتقال، 136  
 پسیداکار  
 تقا عمل، 60  
 گھومتا، 200  
 تجدیدی عرصہ، 89  
 تجربہ  
 شرٹن و گرانج، 184  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 78  
 تسل  
 بالمر، 162  
 پاشن، 162  
 ٹیلر، 42  
 طاقتی، 43  
 فوریئر، 35  
 لیمان، 162  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 209  
 تشکیل، 237  
 تعداد مکین، 237  
 تعیین حال، 103  
 تغیریت، 9  
 تقا عمل  
 ڈیٹا، 72  
 تقا عمل موج، 2  
 تقا علیہ، 128  
 تکمل  
 ڈھانچائی، 312  
 توانی  
 کلیہ، 55  
 توانائی  
 احبازتی، 29  
 توقعاتی  
 قیمت، 7  
 شنائی عددی سر، 239  
 حبرو ڈارون، 280  
 جسم مقیاس، 229  
 جفت، 34  
 تقا عمل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقناطیسی، 181  
 جوہری مدار چوں  
 خطی جوڑ ترکیب، 311  
 جی حبرو ضربی، 278  
 چکر، 173، 174  
 مخالف میدان، 175  
 ہم میدان، 175  
 چکر چکر رابطہ، 290  
 چکر کار، 175  
 چکر و مدار باہم عمل، 279  
 چکر و مدار رابطہ، 272  
 چندر شیکھر حد، 253  
 چوزاویہ تشکل، 298  
 حال  
 بچھراؤ، 70

- 66، سستی  
 66، گروہی سستی  
 86، رمز اور وٹاؤسڈ اثر،  
 194، رواحتال،  
 روڈریگیس  
 142، کلیہ  
 249، ریمان زیٹا تقاسل،  
 زاویائی معیار حرکت  
 170، بق  
 174، خلتی  
 174، غیر خلتی  
 283، زیسان اثر،  
 ساکن  
 27، حالیت،  
 243، شملنگ  
 251، شیفتن و بولسڈ من کلیہ،  
 32، سرحدی شراٹھ،  
 72، 79، سرنک زنی،  
 252، سفید بونا،  
 15، سگرا،  
 220، سلور،  
 128، سمتاویہ،  
 97، سمتیات،  
 224، سمتیہ موج،  
 سوچ  
 4، انکاری،  
 3، تقلید پسند،  
 3، حقیقت پسند،  
 23، سوڈیم،  
 188، سہ تا،  
 250، سیاہ جسی طیف،  
 سیزھی  
 46، عملین،  
 80، سیزھی تقاسل،  
 شمارک اثر، 296  
 شروڈنگر  
 27، غیر تابع وقت،  
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،  
 زمینی، 34، 156  
 مقید، 70  
 34، ہچان  
 236، حراری توازن،  
 حرکت  
 202، سائیکلوٹران،  
 خطی الجبر، 97  
 خطی تبدلہ، 97  
 خطی جوڑ، 28  
 3، خفیہ متغیرات،  
 219، 235، خول،  
 درجہ حرارت آزاد، 254  
 درجہ حرارت، 236  
 234، درز،  
 290، درز توانائی،  
 61، دلیل،  
 56، 96، دم ہلانا،  
 219، دوری جدول،  
 ڈیراک  
 128، علامتیت،  
 229، کنگھی،  
 108، معیاری عمودیت،  
 ڈیلٹا  
 35، کرونیٹر،  
 297، ڈیوٹریم،  
 297، ڈیوٹیران،  
 ذرہ  
 21، غیر مستحکم،  
 رو  
 21، احتمال،  
 146، ردای مساوات،  
 162، رڈبرگ،  
 162، کلیہ،  
 رشتہ  
 295، پترنک،  
 295، کرامرس،  
 رفتار

- فـنـر و نـو س  
ترکیب، 54  
فـنـ
- بیرونی، 23  
دوہری، 128  
فورینسر  
الٹ بدل، 63  
بدل، 63
- قابل مشاہدہ  
غیر ہم آہنگ، 116  
فـنـ
- بچھراؤ، 93، 94  
ترسیل، 95  
فـنـابی ارکان، 125  
فـنـانوں  
کب، 42  
فـنـائی مٹین، 298  
قواعد بن، 220  
قوالب، 98  
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245  
کایان، 191  
کشافت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکشی  
ہرمانڈ، 58  
کرائنگ و پینی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کبھی تشاکل، 298  
کلیہ  
ڈی پروگلی، 19  
روڈریگیس، 60  
پولر، 30  
کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
کیٹ  
تختیف شدہ، 206  
کوارک، 191
- شریک عامل، 103  
شریک گرفتگی بندہ، 214  
شارپائی مفہوم، 2  
شوارز  
عدم مساوات، 437  
شوارز عدم مساوات، 99  
صفر ممتام انقطاع، 34
- طاق، 34  
طامس استقبالی حرکت، 279  
طول موج، 18، 162  
طیف، 104  
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17  
تخلیل، 129  
تقلیل، 166، 46  
رفع، 166، 46  
مبادلہ، 209  
عبور، 161  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عقدہ، 34  
علامتیت  
تفعلیہ و سمتاویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی مستقل، 26  
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105  
غیر موصل، 235
- فـنـری  
توانائی، 227  
درجہ حرارت، 228  
سطح، 227  
فـنـرمیان، 208  
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانشائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانشائی اعداد، 147  
 کوانشائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانشائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرفتتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گروپویشن، 163  
 گیہا تقاعیل، 249
- لاپلائی، 138  
 لارمر تعدد، 184  
 لاگت  
 شریک کشیررکتی، 158  
 کشیررکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لپٹان، 175  
 لتصمیم، 162  
 لگراج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284  
 لوریننز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈ انڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272
- ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم  
 تقاعیل، 72  
 تقسیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کردی، 139  
 محتلف بیٹا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تقاعلات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروع و ڈنگر، 2  
 مسکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وننمن و بلن، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناستائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فصا تقاعیل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 مقطوع

- واٹن فتانون ہشاو، 250  
وسطانیہ، 7  
ونٹرل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون دروالس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپیلا فتاعده، 221  
کاشیہ فراشتاعده، 221  
کادوسرا فتاعده، 221  
ہارمونی  
مر نقش، 32  
ہارمونی مر نقش  
تین البعادی، 193  
ہائیڈروجن  
میونی، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی تسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کاوا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلبت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
باضابطہ، 278  
مکمل، 35، 100  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصل، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزدہیلیم، 217  
نظریہ اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصل، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیومن  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ، 70