کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۷

تغیری اصول

۷.۱ نظریہ

فرض کریں آپ ایک نظام، جسے ہیملٹنی H بیان کرتی ہو، کی زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ (غیر تابع وقت) مساوات شروڈنگر حل نہیں کر پاتے۔ **اصول تغیریت**[1] آپ کو E_{gs} کی بالائی حد بندی دیتا ہے، اور بعض اوقات آپ کو صرف اسی سے غرض ہو گا، اور عموماً، ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے قریب قیمت حاصل کر سکیں گے۔ آئیں اس کا استعمال دیکھیں: کوئی ایک معمول شدہ تفاعل ψ لیں۔ میں درج ذیل دعویٰ کرتا ہوں:

$$E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle \tag{۷.۱}$$

یعنی کسی بھی (ممکنہ طور پر غلط) حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت کی تخمین، زمینی حال توانائی سے زیادہ ہو گی۔ یقیناً، اگر ψ اتفاقاً ہیجان حالات میں سے ایک ہو، تب $\langle H \rangle$ کی قیمت E_{gs} سے تجاوز کرے گی؛ (جاننے والا) اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل ψ کے لیے یہ درست ہو گا۔

ثبوت: چونکہ H کے (نامعلوم) امتیازی تفاعلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہٰذا ہم ψ کو ان کا خطی جوڑ:[2]

$$H\psi_n = E_n \psi_n \quad \text{جہاں} \quad \psi = \sum_n c_n \psi_n$$

ہے لکھ سکتے ہیں۔ چونکہ ψ معمول شدہ ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \Big\langle \sum_m c_m \psi_m \Big| \sum_n c_n \psi_n \Big\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

---

[1] variational principle

[2] اگر ہیملٹنی مقید حالات کے ساتھ بکھر حالات کا بھی حامل ہو، تب ہمیں مجموعہ کے ساتھ تکمل بھی درکار ہو گا، تاہم باقی دلیل یہی رہی گی۔

(جہاں فرض کیا گیا ہے کہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی شدہ ہیں: $\delta_{mn} = \langle \psi_m | \psi_n \rangle$)۔ ساتھ ہی درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m | H \sum_n c_n \psi_n \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* E_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2$$

لیکن تعریف کی رو سے، زمینی حال توانائی کم سے کم امتیازی قیمت ہو گی، لہٰذا $E_{gs} \leq E_n$ ہو گا، جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H \rangle \geq E_{gs} \sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

ہم یہی ثابت کرنا چاہتے تھے۔

□

مثال ۷.۱: فرض کریں ہم یک بُعدی ہارمونی مرتعش:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً، ہم اس کا ٹھیک ٹھیک جواب جانتے ہیں (مساوات ۲.۶۱): $E_{gs} = (1/2)\hbar\omega$؛ جس سے اس ترکیب کو پرکھا جا سکتا ہے۔ ہم گاوسی تفاعل:

$$\psi(x) = A e^{-bx^2} \tag{۷.۲}$$

کو اپنا "آزمائشی" تفاعل موج منتخب کرتے ہیں، جہاں b ایک مستقل ہے، اور A کو معمول زنی

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} \, \mathrm{d}x = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow A = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4} \tag{۷.۳}$$

تعین کرتی ہے۔ اب

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle \tag{۷.۴}$$

ہے، جبکہ یہاں

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} (e^{-bx^2}) \, \mathrm{d}x = \frac{\hbar^2 b}{2m} \tag{۷.۵}$$

اور

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{m\omega^2}{8b}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m\omega^2}{8b} \tag{۷.۶}$$

مساوات ۱.۷ کے تحت کسی بھی b کے لئے یہ E_{gs} سے تجاوز کرے گا؛ سخت سے سخت حد بندی کی خاطر ہم $\langle H \rangle$ کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس $\langle H \rangle$ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H \rangle_{\text{کمتر}} = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{۷.۷}$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہیں، جو حیرانی کی بات نہیں، چونکہ میں نے (اتفاقاً) ایسا آزمائشی تفاعل منتخب کیا جس کا روپ ٹھیک اصل زمینی حال (مساوات ۲.۵۹) کی طرح ہے۔ تاہم، گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے، لہٰذا یہ ایک مقبول آزمائشی تفاعل ہے، اور وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جہاں اصل زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔ □

مثال ۲.۷: فرض کرے ہم ڈیلٹا تفاعل مخفیہ:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \alpha\delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہمیں ٹھیک جواب (مساوات ۲.۱۲۹): $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$ یہاں بھی معلوم ہے۔ پہلے کی طرح، ہم گاوسی آزمائشی تفاعل (مساوات ۲.۷) کا انتخاب کرتے ہیں۔ ہم معمول زنی کر چکے ہیں، اور $\langle T \rangle$ کا حساب کر چکے ہیں؛ ہمیں صرف درج ذیل درکار ہے۔

$$\langle V \rangle = -\alpha|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}\delta(x)\,\mathrm{d}x = -\alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}} \tag{۷.۸}$$

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ تمام b کے لیے E_{gs} سے تجاوز کرے گا۔ اس کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4}$$

لہٰذا

$$\langle H\rangle_{\text{کمتر}} = -\frac{m\alpha^2}{\pi\hbar^2} \tag{۷.۹}$$

ہوگا، جو یقیناً E_{gs} سے معمولی زیادہ ہے (چونکہ $\pi > 2$ ہے)۔ □

میں نے کہا آپ کسی بھی (معمول شدہ) آزمائشی تفاعل ψ کا انتخاب کر سکتے ہیں، جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ، غیر استمراری تفاعلات کے دہرا تفرق (جو $\langle T\rangle$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہوگا) کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے انوکھے چال چلنا ہوگا۔ ہاں، اگر آپ محتاط رہیں تو، استمراری تفاعلات جن میں بل پائے جاتے ہوں کا استعمال نسبتاً آسان ہے۔ اگلی مثال میں ان سے نمٹنا دکھایا گیا ہے۔[۳]

مثال ۷.۳: آزمائشی "تکونی" تفاعل موج (شکل ۷.۱):

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le a/2 \\ A(a-x) & a/2 \le x \le a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۷.۱۰}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کریں، جہاں A معمول زنی سے تعین کیا جائے گا۔

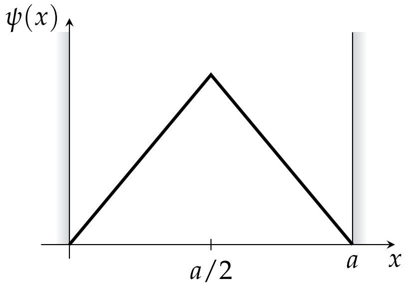
$$1 = |A|^2\Big[\int_0^{a/2} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{a/2}^{a}(a-x)^2\,\mathrm{d}x\Big] = |A|^2\,\frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{3}{a}} \tag{۷.۱۱}$$

جیسا شکل ۷.۲ میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہوگا۔

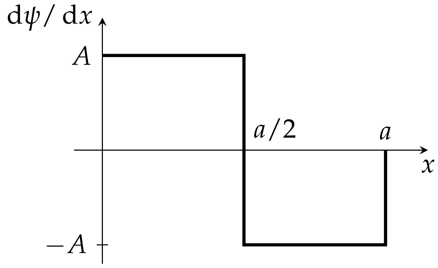
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

---

[۳] ایسا تفاعل (مثلاً گاوسی) جو کنویں سے باہر سرکتا ہو استعمال کرنا بے مقصد ہے، چونکہ آپ $\langle V\rangle = \infty$ حاصل کرتے ہیں اور مساوات ۷.۱ کچھ نہیں بتاتی۔



شکل ۱.۷: لامتناہی چوکور کنواں کے لئے آزمائشی تکونی تفاعل موج (مساوات ۷.۱۰)۔



شکل ۲.۷: تکونی تفاعل موج (شکل ۱.۷) کا تفرق۔

سیڑھی تفاعل کا تفرق ایک ڈیلٹا تفاعل ہے (سوال ۲.۲۴-ب دیکھیں):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x-a/2) + A\delta(x-a) \tag{۷.۱۲}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\langle H\rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m}\int[\delta(x)-2\delta(x-a/2)+\delta(x-a)]\psi(x)\,dx\\ &= -\frac{\hbar^2 A}{2m}[\psi(0)-2\psi(a/2)+\psi(a)] = \frac{\hbar^2 A^2 a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2}\end{aligned} \tag{۷.۱۳}$$

ٹھیک زمینی حال توانائی $E_{gs}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ (مساوات ۲.۲۷) ہے، لہٰذا یہ مسئلہ کار آمد ہے ($12 > \pi^2$)۔ □

اصول تغیریت انتہائی طاقتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سالمہ کی زمینی حال توانائی جاننے کے لئے ماہر کیمیا متعدد مقدار معلوم والا آزمائشی تفاعل موج منتخب کر کے ان مقدار معلوم کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\langle H\rangle$ کی سب سے کم ممکنہ قیمت تلاش کرتا ہے۔ اصل تفاعل موج کے ساتھ ψ کی کوئی مشابہت نہ ہونے کی صورت میں بھی آپ کو E_{gs} کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہو گی۔ ظاہر ہے، اگر آپ ψ کو اصل تفاعل کے جتنا زیادہ قریب منتخب کر پائیں، اتنا بہتر ہو گا۔ اس ترکیب کے ساتھ صرف ایک مسئلہ ہے: آپ کبھی بھی نہیں جان سکتے کہ آپ ہدف کے کتنے قریب ہیں؛ آپ صرف بالائی حد بندی جان پاتے ہو۔[4] مزید، اس روپ میں یہ ترکیب صرف زمینی حال کے لیے کار آمد ہے (البتہ سوال ۷.۴ دیکھیں)۔

[4] عملاً یہ بہت بڑا مسئلہ نہیں اور بعض اوقات درستگی کا اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔ زمینی حال ہیلیم کو کئی بامعنی ہندسوں تک اس طرح حل کیا گیا ہے۔

سوال ۱.۷: درج ذیل مخفیہ کی زمینی حال توانائی جاننے کے لئے گاوسی آزمائشی تفاعل (مساوات ۲.۷) کی سب سے کم بالائی حد بندی تلاش کریں۔

ا. خطی مخفیہ $V(x) = \alpha|x|$ ؛

ب. چوطاقت مخفیہ $V(x) = \alpha x^4$

سوال ۲.۷: یک بُعدی ہارمونی مرتعش کے E_{gs} کی بہترین حد بندی درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کر کے تلاش کریں، جہاں A معمول زنی سے تعین ہوگا اور b قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

سوال ۳.۷: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی E_{gs} کی بہترین بالائی حد بندی کو تکونی آزمائشی تفاعل (مساوات ۱۰.۷، لیکن جس کا وسط مبدا پر ہو) استعمال کر کے تلاش کریں۔ یہاں a قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

سوال ۴.۷:

ا. اصول تغیریت کا درج ذیل ضمنی نتیجہ ثابت کریں: اگر $\langle\psi|\psi_{gs}\rangle = 0$ ہو، تب $\langle H\rangle \geq E_{fe}$ ہوگا، جہاں پہلے ہیجان حال کی توانائی E_{fe} ہے۔

یوں، اگر ہم کسی طرح ایسا آزمائشی تفاعل تلاش کر سکیں جو اصل زمینی حال کو عمودی ہو، تب ہم پہلے ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکیں گے۔ چونکہ ہم زمینی حال تفاعل ψ_{gs} (غالباً) نہیں جانتے، لہٰذا عموماً یہ کہنا مشکل ہوگا کہ ψ ہمارے آزمائشی تفاعل ψ_{gs} کو عمودی ہوگا۔ ہاں، اگر x کے لحاظ سے مخفیہ $V(x)$ جفت تفاعل ہو، تب زمینی حال بھی جفت ہوگا، اور یوں کوئی بھی طاق آزمائشی تفاعل خود بخود اس ضمنی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا۔

ب. آزمائشی تفاعل:

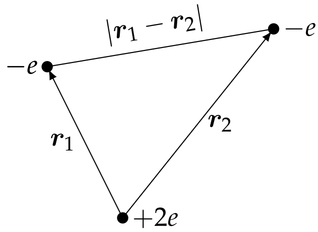
$$\psi(x) = Axe^{-bx^2}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بُعدی ہارمونی مرتعش کے پہلے ہیجان حال کی بہترین بالائی حد بندی تلاش کریں۔

سوال ۵.۷:

ا. اصول تغیریت استعمال کر کے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تجاوز کرے گا (یا کم از کم کبھی بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا)۔

ب. آپ جزو-الف جانتے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دو رتبی تصحیح لازماً منفی ہوگی۔ مساوات ۱۵.۶ کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہوگا۔



شکل ۷.۳: ہیلیم جوہر۔

۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر (شکل ۷.۳) کے مرکزہ میں دو پروٹان (اور دو نیوٹران جو ہمارے مقصد سے غیر متعلقہ ہیں) پائے جاتے ہیں اور مرکزہ کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔ (مہین ساخت اور باریک تصحیح نظر انداز کرتے ہوئے) اس نظام کی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{۷.۱۴}$$

ہم نے زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا ہے۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتی ہے۔ (E_{gs} جانتے ہوئے، ہم ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار "بارداریتی توانائی" معلوم کر سکتے ہیں (سوال ۷.۶ دیکھیں)۔ تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حال توانائی کی قیمت کی پیمائش انتہائی زیادہ درستگی تک کی گئی ہے۔

$$E_{gs} = -78.975\,\text{eV} \qquad (\text{تجرباتی}) \tag{۷.۱۵}$$

ہم نظریہ سے اس عدد کو حاصل کرنا چاہیں گے۔

یہ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنے سادہ اور اہم مسئلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔[۵] الیکٹران الیکٹران دفع:

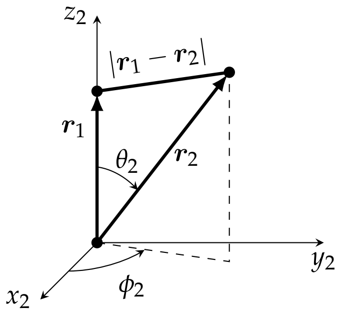
$$V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \tag{۷.۱۶}$$

مسئلہ پیدا کرتا ہے۔ اس جزو کو نظر انداز کرنے سے H دو ہائیڈروجن ہیملٹنیوں میں علیحدہ علیحدہ ہوتا ہے (تاہم مرکزوی بار e کی بجائے $2e$ ہو گا)؛ ٹھیک حل ہائیڈروجنی تفاعلات موج کا حاصل ضرب:

$$\psi_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \equiv \psi_{100}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{100}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3}e^{-2(r_1+r_2)/a} \tag{۷.۱۷}$$

---

[۵] ہیلیم کے کیفی خدوخال والے، ایسے تین جسمی مسئلے پائے جاتے ہیں جن کا ٹھیک ٹھیک حل حاصل کیا جا سکتا ہے، تاہم ان میں مخفی غیر کولمب ہیں (سوال ۷.۱۷ دیکھیں)۔



شکل ۷.۴: محدد کا انتخاب برائے $\boldsymbol{r}_2$ تکمل (مساوات 20.7)۔

ہو گا، اور توانائی $8E_1 = -109\,\text{eV}$ الیکٹران وولٹ (مساوات ۵.۳۱) ہو گی۔[۶] یہ $-79\,\text{eV}$ سے بہت مختلف ہے، تاہم یہ ابھی ابتدا ہے۔

ہم ψ_0 کو آزمائشی تفاعل موج لے کر E_{gs} کی بہتر تخمین اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ یہ ہیملٹنی کے زیادہ تر حصے کا امتیازی تفاعل ہے:

$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0 \tag{۷.۱۸}$$

لہٰذا یہ بہت بہتر انتخاب ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle \tag{۷.۱۹}$$

جہاں درج ذیل ہے۔[۷]

$$\langle V_{ee} \rangle = \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big(\frac{8}{\pi a^3}\Big)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 \tag{۷.۲۰}$$

میں $\boldsymbol{r}_2$ تکمل پہلے حل کرتا ہوں؛ اس مقصد کے لئے $\boldsymbol{r}_1$ مقررہ ہو گا، اور ہم $\boldsymbol{r}_2$ محددی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ اس کا قطبی محور $\boldsymbol{r}_1$ پر پایا جاتا ہو (شکل ۷.۴)۔ قانون کوسائن کے تحت

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2} \tag{۷.۲۱}$$

---

[۶] یہاں a سادہ رداس بوہر ہے اور n ویں بوہر توانائی $E_n = -13.6/n^2\,\text{eV}$ ہے؛ یاد رہے کہ ایک مرکزہ جس کا جوہری عدد Z ہو، کے لئے $E_n \to Z^2 E_n$ اور $a \to a/Z$ ہوں گے (سوال ۴.۱۶)۔ مساوات ۷.۱۷ کے ساتھ وابستہ چکری تشکیل غیر تشاکلی (یکتا) ہو گی۔

[۷] آپ $H' = V_{ee}$ لیتے ہوئے مساوات ۷.۲۰ کا مفہوم اول رتبی نظریہ اضطراب لے سکتے ہیں۔ میں اس کو اس ترکیب کا غلط استعمال سمجھتا ہوں، چونکہ یہاں اضطراب اور غیر مضطرب ہیملٹنی ہم پلہ ہیں۔ اس وجہ سے میں اس کو تغیریتی حساب تصور کرتا ہوں، جس میں ہم E_{gs} کی بالائی حد بندی تلاش کرتے ہیں۔

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\,\mathrm{d}^3 r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}} r_2^2 \sin\theta_2 \,\mathrm{d}r_2 \,\mathrm{d}\theta_2 \,\mathrm{d}\phi_2 \tag{۷.۲۲}$$

متغیر ϕ_2 کا (نہایت آسان) تکمل 2π دے گا؛ متغیر θ_2 کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}\,\mathrm{d}\theta_2 &= \left.\frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}{r_1 r_2}\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{r_1 r_2}\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2}\right) \\
&= \frac{1}{r_1 r_2}[(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{۷.۲۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4\pi\left(\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 \,\mathrm{d}r_2 + \int_{r_1}^{\infty} e^{-4r_2/a} r_2 \,\mathrm{d}r_2\right) \\
&= \frac{\pi a^3}{8r_1}\left[1 - \left(1 + \frac{2r_1}{a}\right)e^{-4r_1/a}\right]
\end{aligned} \tag{۷.۲۴}$$

اسی طرح $\langle V_{ee}\rangle$ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)\int \left[1 - \left(1 + \frac{2r_1}{a}\right)e^{-4r_1/a}\right] e^{-4r_1/a} r_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}r_1 \,\mathrm{d}\theta_1 \,\mathrm{d}\phi_1$$

زاویائی تکملات 4π دیں گے، جبکہ r_1 تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{\infty}\left[r e^{-4r/a} - \left(r + \frac{2r^2}{a}\right)e^{-8r/a}\right]\mathrm{d}r = \frac{5a^2}{128}$$

یوں، آخر کار

$$\langle V_{ee}\rangle = \frac{5}{4a}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) = -\frac{5}{2}E_1 = 34\,\mathrm{eV} \tag{۷.۲۵}$$

جس کی بنا پر درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H\rangle = -109\,\mathrm{eV} + 34\,\mathrm{eV} = -75\,\mathrm{eV} \tag{۷.۲۶}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے (یاد رہے، تجرباتی قیمت $-79\,\mathrm{eV}$ ہے)۔ تاہم ہم اس سے بہتر جواب حاصل کر سکتے ہیں۔

ہم ψ_0 (جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسے یہ ایک دوسرے پر بالکل اثر انداز نہیں ہوتے) سے بہتر زیادہ حقیقت پسند آزمائشی تفاعل سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کے دوسرے الیکٹران پر اثر کو مکمل نظر انداز کرنے کی بجائے، ہم ایک الیکٹران کو اوسطاً منفی بار کا بادل تصور کرتے ہیں، جو مرکزہ کو جزوی طور پر سپر (پناہ) کرتا ہے، جس کی بنا پر دوسرے الیکٹران کو موثر مرکزوی بار (Z) کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آتی ہے۔ یہ تصور ہمیں آمادہ کرتی ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل استعمال کریں۔

$$\psi_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{Z^3}{\pi a^3}e^{-Z(r_1+r_2)/a} \tag{۷.۲۷}$$

ہم Z کو تغیری مقدار معلوم تصور کر کے اس کی وہ قیمت منتخب کرتے ہیں جو H کی قیمت کمتر بناتی ہو (دھیان رہے کہ تغیریت ترکیب میں کبھی بھی ہیملٹنی تبدیل نہیں کی جاتی؛ ہیلیم کی ہیملٹنی مساوات ۷.۱۴ دیتی ہے اور دیتی رہے گی۔ البتہ ہیملٹنی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کر بہتر آزمائشی تفاعل موج حاصل کرنا جائز ہے)۔

یہ تفاعل موج اس "غیر مضطرب" ہیملٹنی (الیکٹران دفع نظر انداز کیا گیا ہے) کا امتیازی حال ہے جس کے کولمب اجزاء میں 2 کی بجائے Z ہے۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے، ہم H (مساوات ۷.۱۴) کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}H=-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2+\nabla_2^2)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{r_1}+\frac{Z}{r_2}\right)\\+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(Z-2)}{r_1}+\frac{(Z-2)}{r_2}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\right)\end{aligned} \tag{۷.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ H کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle H\rangle=2Z^2E_1+2(Z-2)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle+\langle V_{ee}\rangle \tag{۷.۲۹}$$

یہاں $\langle 1/r\rangle$ سے مراد (یک ذروی) ہائیڈروجنی زمینی حال ψ_{100} (جس میں مرکزوی بار Z ہو) میں $1/r$ کی توقعاتی قیمت ہے؛ مساوات ۶.۵۵ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\frac{Z}{a} \tag{۷.۳۰}$$

یہاں بھی V_{ee} کی توقعاتی قیمت وہی ہو گی جو پہلے تھی (مساوات ۷.۲۵)، لیکن اب ہم $Z=2$ کی بجائے اختیاری Z استعمال کرنا چاہتے ہیں؛ لہٰذا ہم a کو $2/Z$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\langle V_{ee}\rangle=\frac{5Z}{8a}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)=-\frac{5Z}{4}E_1 \tag{۷.۳۱}$$

ان تمام کو اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H\rangle = \left[2Z^2 - 4Z(Z-2) - (5/4)Z\right]E_1 = [-2Z^2 + (27/4)Z]E_1 \tag{۷.۳۲}$$

اصول تغیریت کے تحت Z کی کسی بھی قیمت کے لیے یہ مقدار E_{gs} سے تجاوز کرے گی۔ بالائی حد بندی کی سب سے کم قیمت تب پائی جائے گی جب $\langle H\rangle$ کی قیمت کمتر ہو:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\langle H\rangle = [-4Z + (27/4)]E_1 = 0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$Z = \frac{27}{16} = 1.69 \tag{۷.۳۳}$$

یہ ایک معقول نتیجہ نظر آتا ہے؛ جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکزہ کو سپر کرتا ہے جس کی بنا پر مرکزہ کا موثر بار 2 کی بجائے 1.69 نظر آتا ہے۔ اس قیمت کو Z لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

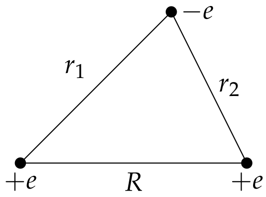
$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^6 E_1 = -77.5\,\mathrm{eV} \tag{۷.۳۴}$$

قابل تبدیل مقدار معلوم کی تعداد بڑھا کر، زیادہ پیچیدہ آزمائشی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے، ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اس طرح انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے۔ ہم اصل جواب کے دو فی صد سے بھی کم قریب ہیں، لہٰذا اس کو یہی پر چھوڑتے ہیں۔[۸]

سوال ۷.۶: ہیلیم کی زمینی حال توانائی $E_{gs} = -79\,\mathrm{eV}$ لیتے ہوئے بارداریتی توانائی (صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی) کا حساب کریں۔ اشارہ: پہلے ہیلیم باردار یہ He^+، جس کے مرکزہ کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے، کی زمینی حال توانائی تلاش کریں؛ اس کے بعد دونوں توانائیوں کا فرق لیں۔

سوال ۷.۷: اس حصہ میں مستعمل ترکیبات کا اطلاق H^- اور Li^+ باردار یہ پر کریں (جن میں ہیلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں، لیکن مرکزوی بار بالترتیب $Z = 1$ اور $Z = 3$ ہیں)۔ ایک ایک باردار یہ کا موثر (جزوی سپر شدہ) مرکزوی بار تلاش کر کے، E_{gs} کی بہترین بالائی حد بندی تعین کریں۔ تبصرہ: باردار یہ H^- کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ $\langle H\rangle > -13.6\,\mathrm{eV}$ ہے، جس کے تحت مقید حال نہیں ہو گا، چونکہ توانائی کے نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورت حال یہ ہو گی کہ ایک الیکٹران نکل کر اڑ جائے اور پیچھے معادل ہائیڈروجن جوہر چھوڑے۔ یہ حیرت کی بات نہیں چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے مرکزہ کے ساتھ الیکٹران کی قوت کشش کم ہے، اور الیکٹران کی باہم قوت دفع جوہر کو توڑنا چاہتی ہے۔ البتہ، حقیقت میں یہ سب غلط ہے۔ زیادہ نفیس آزمائشی تفاعل (سوال ۷.۲۰ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے دکھایا جا سکتا ہے کہ $E_{gs} < -13.6\,\mathrm{eV}$ ہے، لہٰذا مقید

[۸] ایسا آزمائشی تفاعل، جو زمینی حال کو عمودی ہو، منتخب کر کے ہیلیم کا پہلا ہیجان حال اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۷.۵: ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ، H_2^+

حال موجود ہو گا۔ تاہم، یہ بمشکل مقید ہے، اور ہیجان حال نہیں پائے جاتے، اور یوں H^- کا کوئی غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا (تمام استمراریہ سے اور استمراریہ میں ہوں گے)۔ نتیجتاً، تجربہ گاہ میں اس کا مطالعہ کرنا دشوار ہوتا ہے، اگرچہ سورج کی سطح پر یہ وافر مقدار میں پائے جاتے ہیں۔

۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ

اصول تغیریت کا ایک اور کلاسیکی استعمال ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ، H_2^+، جو دو پروٹان کے کولمب میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے،، کا معائنہ ہے (شکل ۷.۵)۔ میں فی الوقت فرض کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان کا مقام مقررہ، اور ان کے بیچ فاصلہ R ہے، اگرچہ اس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ R کی اصل قیمت ہو گی۔ ہیملٹنی درج ذیل ہے

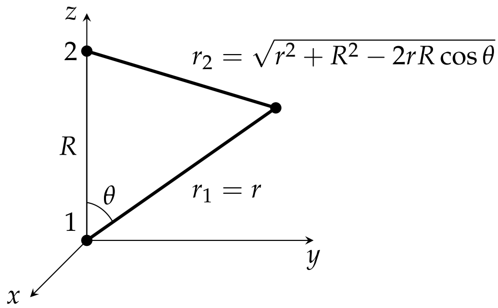
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{۷.۳۵}$$

جہاں الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلے r_1 اور r_2 ہیں۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک معقول آزمائشی تفاعل موج منتخب کر کے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے دریافت کریں۔ (در حقیقت، ہماری دلچسپی یہ جاننے میں ہے کہ آیا اس نظام میں بندھن پیدا ہو گی؛ یعنی کیا ایک معادل ہائیڈروجن جوہر جمع ایک آزاد پروٹان سے اس نظام کی توانائی کم ہو گی۔ اگر ہمارا آزمائشی تفاعل موج دکھائے کہ مقید حال پایا جاتا ہے، اس سے بہتر آزمائشی تفاعل اس بندھ کو صرف زیادہ طاقتور بنا سکتا ہے۔)

آزمائشی تفاعل موج تیار کرنے کی خاطر فرض کریں کہ زمینی حال (مساوات ۴.۸۰)

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{۷.۳۶}$$

میں ہائیڈروجن جوہر کے قریب فاصلہ R پر، دوسرا پروٹان "لامتناہی" سے لا کر رکھتے ہوئے باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس بوہر سے R کافی زیادہ ہو تب الیکٹران کا تفاعل موج غالباً زیادہ تبدیل نہیں ہو گا۔ تاہم ہم دونوں پروٹان کو ایک نظر سے دیکھنا چاہیں گے، لہٰذا دونوں کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک جیسا ہو گا۔ یوں ہم



شکل ۷.۶: مقدار I کے حساب کی خاطر محدد (مساوات ۷.۳۹)۔

آمادہ ہوتے ہیں کہ درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل استعمال کریں۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)] \tag{۷.۳۷}$$

(چونکہ ہم سالماتی تفاعل موج کو جوہری مدارچوں کا خطی جوڑ لکھتے ہیں لہٰذا ماہر کوانٹائی کیمیا اس کو **جوہری مدارچوں کی خطی جوڑ ترکیب**[۹] کہتے ہیں۔)

پہلا کام آزمائشی تفاعل کی معمول زنی ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = |A|^2 \Big[\int |\psi_0(r_1)|^2 \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \\ + \int |\psi_0(r_2)|^2 \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + 2\int \psi_0(r_1)\psi_0(r_2) \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \Big] \end{aligned} \tag{۷.۳۸}$$

پہلے دو تکملات 1 ہیں (چونکہ ψ_0 معمول شدہ ہے)؛ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درج ذیل لیں۔

$$I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{۷.۳۹}$$

ایسا محددی نظام کھڑا کرکے، جس کے مبدا پر پروٹان 1 اور z محور پر R فاصلے پر پروٹان 2 ہو (شکل ۷.۶)،

$$r_1 = r \quad \text{اور} \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta} \tag{۷.۴۰}$$

ہوں گے لہٰذا درج ہو گا۔

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\frac{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}{a}} \, r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{۷.۴۱}$$

---

[۹] LCAO technique

متغیر ϕ کا (نہایت آسان) تکمل 2π دے گا۔ متغیر θ کا تکمل کرنے کی خاطر درج ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}(y^2) = 2y\,\mathrm{d}y = 2rR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-\frac{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}{a}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{rR}\int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a}y\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{a}{rR}\Big[e^{-(r+R)/a}(r+R+a) - e^{-|r-R|/a}(|r-R|+a)\Big]\end{aligned}$$

اب تکمل r باآسانی حل ہو گا۔

$$\begin{aligned}I = \frac{2}{a^2R}\Big[-e^{-R/a}\int_0^{\infty}(r+R+a)e^{-2r/a}r\,\mathrm{d}r + e^{-R/a}\int_0^{R}(R-r+a)r\,\mathrm{d}r\\ + e^{R/a}\int_R^{\infty}(r-R+a)e^{-2r/a}r\,\mathrm{d}r\Big]\end{aligned}$$

ان تکملات کی قیمتوں کے حساب کے بعد الجبرائی تسہیل سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$I = e^{-R/a}\Big[1 + \Big(\frac{R}{a}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{R}{a}\Big)^2\Big] \tag{۷.۴۲}$$

ہم I کو **ڈھانپائی تکمل**[10] کہتے ہیں؛ جو $\psi_0(r_1)$ کے $\psi_0(r_2)$ پر چڑھنے کی مقدار کی پیمائش ہے (دھیان رہے کہ $R \to 0$ کی صورت میں یہ 1 کو، اور $R \to \infty$ کی صورت 0 کو پہنچتا ہے) ڈھانپائی تکمل I کی صورت میں مستقل معمول زنی (مساوات ۷.۳۸) درج ذیل ہو گا۔

$$|A|^2 = \frac{1}{2(1+I)} \tag{۷.۴۳}$$

اس کے بعد ہمیں آزمائشی حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہو گا۔ یاد رہے کہ

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1}\Big)\psi_0(r_1) = E_1\psi_0(r_1)$$

ہو گا (جہاں $E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$ جوہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے)؛ اور r_1 کی جگہ r_2 کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا؛ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}H\psi &= A\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big)\Big][\psi_0(r_1)+\psi_0(r_2)]\\ &= E_1\psi - A\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big[\frac{1}{r^2}\psi_0(r_1) + \frac{1}{r_1}\psi_0(r_2)\Big]\end{aligned}$$

[10] overlap integral

یوں H کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle H\rangle = E_1 - 2|A|^2\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left[\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_2}\right|\psi_0(r_1)\rangle + \langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_1}\right|\psi_0(r_2)\rangle\right] \tag{۷.۴۴}$$

میں آپ کے لئے باقی دو مقدار جو **بلا واسطہ تکمل**:[11]

$$D \equiv a\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_2}\right|\psi_0(r_1)\rangle \tag{۷.۴۵}$$

اور **مبادلہ تکمل**:[12]

$$X \equiv a\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_1}\right|\psi_0(r_2)\rangle \tag{۷.۴۶}$$

کہلاتے ہیں، حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلا واسطہ تکمل کا نتیجہ:

$$D = \frac{a}{R} - \left(1+\frac{a}{R}\right)e^{-2R/a} \tag{۷.۴۷}$$

اور مبادلہ تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے (سوال ۷.۸ دیکھیں)۔

$$X = \left(1+\frac{R}{a}\right)e^{-R/a} \tag{۷.۴۸}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور (مساوات ۷.۴۰ اور مساوات ۷.۴۲ کو) یاد کرتے ہوئے کہ $E_1 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a}$ ہے، ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$\langle H\rangle = \left[1+2\frac{(D+X)}{(1+I)}\right]E_1 \tag{۷.۴۹}$$

اصول تغیریت کے تحت، زمینی حال توانائی $\langle H\rangle$ سے کم ہو گی۔ یقیناً، یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے؛ اس کے علاوہ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی:

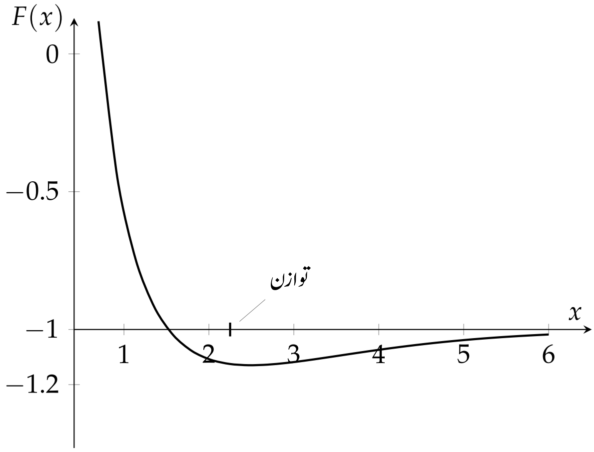
$$V_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{2a}{R}E_1 \tag{۷.۵۰}$$

بھی پائی جاتی ہے۔ یوں نظام کی کل توانائی ($-E_1$ کی اکائیوں میں)، $x \equiv R/a$ کا تفاعل لکھتے ہوئے، درج ذیل سے کم ہو گی۔

$$F(x) = -1 + \frac{2}{x}\left\{\frac{(1-(2/3)x^2)e^{-x} + (1+x)e^{-2x}}{1+(1+x+(1/3)x^2)e^{-x}}\right\} \tag{۷.۵۱}$$

---

[11] direct integral
[12] exchange integral



شکل ۷.۷: تفاعل $F(x)$ (مساوات ۷.۵۱) کی ترسیم مقید حال کی موجودگی دکھاتی ہے (بوہر رداس کی اکائیوں میں x دو پروٹان کے بیچ فاصلہ ہے)۔

اس تفاعل کو شکل ۷.۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ -1 سے نیچے ہے، جہاں معادل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی $(-13.6\,\text{eV})$ سے کم ہے، لہٰذا اس نظام میں بندھ پیدا ہو گا۔ یہ ایک شریک گرفتی بندھ ہو گا، جہاں الیکٹران دونوں پروٹان کا برابر شریک ہو گا۔ پروٹان کے بیچ توازنی فاصلہ تقریباً 2.4 رداس بوہر، یعنی $0.13\,\text{nm}$ ہے (تجرباتی قیمت $0.106\,\text{nm}$ ہے)۔ بندشی توانائی کے حساب سے حاصل قیمت $1.8\,\text{eV}$ ، جبکہ پیمائشی قیمت $2.8\,\text{eV}$ ہے (اصول تغیریت ہمیشہ زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے، لہٰذا یہ طاقت بندھ کی کم قیمت دے گا؛ بہر حال اس کی فکر نہ کریں:) یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندھ پایا جاتا ہے؛ بہتر تغیری تفاعل اس مخفیہ کو مزید گہرا بنائے گا۔

سوال ۷.۸: بلاواسطہ تکمل D اور مبادلہ تکمل X مساوات ۷.۴۵ اور مساوات ۷.۴۶ کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوات ۷.۴۷ اور مساوات ۷.۴۸ کے ساتھ کریں۔

سوال ۷.۹: فرض کریں ہم نے آزمائشی تفاعل موج (مساوات ۷.۳۷) میں منفی علامت استعمال کی ہوتی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)] \tag{۷.۵۲}$$

کوئی نیا تکمل حل کیے بغیر (مساوات ۷.۵۱ کا مماثل) $F(x)$ معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بندھ پیدا ہونے کا کوئی ثبوت نہیں ملتا۔[۱۳] (چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے، لہٰذا اس سے یہ ثابت نہیں ہو گا کہ ایسے حال میں بندھ نہیں پایا جائے گا، تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی

[۱۳] بندھن اس صورت پیدا ہوتا ہے جب دو پروٹان کے بیچ رہنے کو الیکٹران ترجیح دیتا ہو، اور ان کے بیچ رہ کر یہ دونوں پروٹان کو اندر جانب کھینچتا ہے۔ لیکن طاق خطی جوڑ (مساوات ۷.۵۲) کا وسط میں عقدہ پایا جاتا ہے، لہٰذا حیرانی کی بات نہیں کہ یہ تشکیل پروٹان کو ایک دوسرے سے دور کرتی ہے۔

چاہیے۔) تبصرہ: درحقیقت درج ذیل روپ کے ہر تفاعل

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)] \tag{۷.۵۳}$$

کی خاصیت یہ ہے کہ الیکٹران دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم، چونکہ باہمی ادل بدل $P : r_1 \leftrightarrow r_2$ کی صورت میں ہیملٹنی (مساوات ۷.۳۵) غیر متغیر ہے، لہٰذا اس کے امتیازی تفاعلات کو بیک وقت P کے امتیازی تفاعلات چنا جا سکتا ہے۔ امتیازی قدر $+1$ کے ساتھ مثبت علامت (مساوات ۷.۳۷) اور امتیازی قدر -1 کے ساتھ منفی علامت (مساوات ۷.۵۲) ہو گی۔ زیادہ عمومی صورت (مساوات ۷.۵۳) کے استعمال سے مزید فائدہ نہیں ہو گا؛ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔

سوال ۷.۱۰: نقطہ توازن پر $F(x)$ کے دوہرا تفرق سے ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ (حصہ ۲.۳ دیکھیں) میں دونوں پروٹان کے ارتعاش کی قدرتی تعدد (ω) کی اندازاً قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔ اگر اس مرتعش کی زمینی حال توانائی $(\hbar\omega/2)$ نظام کی بند شی توانائی سے زیادہ ہو، تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں مرتعش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہو گا، اور ساتھ ہی مقید لرزشی سطحوں کی اندازاً تعداد دریافت کریں۔ تبصرہ: آپ تحلیلی طور پر کم سے کم نقطہ، یا اس نقطہ پر دوہرا تفرق حاصل نہیں کر پائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کریں۔

اضافی سوالات برائے باب ۷

سوال ۷.۱۱:

ا. درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بُعدی ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں۔ متغیر a کی "بہترین" قیمت کیا ہو گی؟ $\langle H\rangle_{\text{کمتر}}$ کا موازنہ اصل توانائی سے کریں۔ تبصرہ: آزمائشی تفاعل میں $\pm a/2$ پر ایک "بل" (غیر استمراری تفرق) پایا جاتا ہے؛ کیا آپ کو اس سے نمٹنا ہو گا، جیسا مجھے مثال ۷.۳ میں کرنا پڑا؟

ب. وقفہ $(-a, a)$ پر $\psi(x) = B\sin(\pi x/a)$ استعمال کرتے ہوئے پہلے ہیجان حال کی حد بندی تلاش کریں۔ اپنے جواب کا اصل جواب سے موازنہ کریں۔

سوال ۷.۱۲:

ا. درج ذیل آزمائشی تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2+b^2)^n}$$

جہاں n اختیاری مستقل ہے، استعمال کرتے ہوئے سوال ۷.۲ کو عمومیت دیں۔ جزوی جواب: مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گی۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left[\frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)}\right]^{1/2}$$

ب. ہارمونی مرتعش کے پہلے ہیجان حال کی بالائی حد بندی کی سب سے کم قیمت درج ذیل آزمائشی تفاعل استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2+b^2)^n}$$

جزوی جواب: مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گی۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left[\frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)}\right]^{1/2}$$

ج. آپ دیکھیں گے کہ $n \to \infty$ سے حد بندیاں بالکل ٹھیک توانائیوں تک پہنچتی ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: آزمائشی تفاعلات موج کو $n = 2$ ، $n = 3$ اور $n = 4$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا موازنہ اصل تفاعلات موج (مساوات ۲.۵۹ اور مساوات ۲.۶۲) کے ساتھ کریں۔ تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل مماثل سے آغاز کریں۔

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

سوال ۷.۱۳: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی سب سے کم حد بندی، گاوسی آزمائشی موج تفاعل:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں، جہاں A معمول زنی سے تعین ہو گا، جبکہ b قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔ جواب: $-11.5\,\mathrm{eV}$

سوال ۷.۱۴: اگر نوریہ کی کمیت غیر صفر $(m_\gamma \neq 0)$ ہوتی تب مخفیہ کی جگہ **یوکاوا مخفیہ**:[14]

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۷.۵۴}$$

استعمال ہوتا، جہاں $\mu = m_\gamma c/\hbar$ ہے۔ اپنی مرضی کا آزمائشی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیہ کے "ہائیڈروجن" جوہر کی بندشی توانائی کی اندازاً قیمت معلوم کریں۔ آپ $\mu a << 1$ لیں اور اپنے جواب کو $(\mu a)^2$ رتبی درستگی تک لکھیں۔

[14] Yukawa potential

سوال ۷.۱۵: فرض کریں آپکو ایک ایسا کوانٹائی نظام دیا جاتا ہے جس کا ہیملٹنی H_0 صرف دو امتیازی حالات کا حامل ہو ψ_a جس کی توانائی E_a اور ψ_b جس کی توانائی E_b ہو۔ یہ عموری معمول شدہ اور غیر انحطاتی ہے۔ مزید فرض کریں کہ $E_a < E_b$ ہے۔ اب ہم اضطراب H' چالو کرتے ہیں۔ جس کے قالبی ارکان درج ذیل ہیں۔

$$\langle\psi_a|H'|\psi a\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi b\rangle = 0 \quad \langle\psi_a|H'|\psi b\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi a\rangle = h \tag{۷.۵۵}$$

جہاں h کوئی مخصوص مستقل ہے۔ الف) مضطرب ہیملٹنی کی امتیازی اقدار کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں تلاش کریں۔ ب) رتبہ دوم نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے مضطرب نظام کی توانائیوں کی اندازی قیمت معلوم کریں۔ ج) مضطرب نظام کی زمینی حال کی توانائی کی اندازی قیمت درج ذیل روپ کا برقی تفاعل

$$\psi = (\cos\phi)\psi_a + (\sin\phi)\psi_b \tag{۷.۵۶}$$

استعمال کر کہ اصول تغیریت سے حاصل کریں۔ جہاں ϕ قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔ تبصرہ: اضطراب کا خطی جوڑ لازماً معمول شدہ دے گا۔ د) اپنے جوابات کا جزو الف، ب، اور ج کے ساتھ موازنہ کریں۔ یہاں اصول تغیریت اتنا زیادہ درست کیوں ہے؟

سوال ۷.۱۶: ہم سوال 7-15 میں تیار کی گئی ترکیب مثال کے طور پر یکساں مقناطیسی میدان $B_z\hat{k}$ = $\boldsymbol{B}$ میں ایک ساکن الیکٹران پر غور کرتے ہیں۔ جس کا ہیملٹنی مساوات 4-158 درج ذیل ہو گا

$$H_0 = \frac{eB_z}{m}S_z \tag{۷.۵۷}$$

امتیازی چکر کار x_a اور x_b ان کی مطابقتی توانائیاں E_a اور E_b مساوات 161.7 میں دی گئی ہیں۔ اب ہم x رخ درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$H' = \frac{eB_x}{m}S_x \tag{۷.۵۸}$$

کے اضطراب کو چالو کرتے ہیں۔ الف) اضطراب H' کے قالبی ارکان تلاش کر کہ تصدیق کریں کہ ان کا ساخت مساوات 55.7 تو طرح ہے یہاں H کیا ہو گا؟ ب) دوم رتبی نظریہ اضطراب میں نئی زمینی حال توانائی کو سوال 15.7 (ب) استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ ج) زمینی حال توانائی کی حد بندی سوال 15.7 (ج) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اصول تغیریت سے حاصل کریں

سوال ۷.۱۷: 17.7
اگرچہ ہیلیم کے لیے مساوات شروڈنگر کو ٹھیک ٹھیک حل نہیں کیا جا سکتا ہے مگر ہیلیم کے ایسے نظام پائے جاتے ہیں جن کے ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اس کی ایک سادہ مثال ربڑی پٹی ہیلیم ہے جس میں کولوموں کی بجائے قانون ہک کی درج ذیل قوتیں استعمال ہو نگی

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4}m\omega^2|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|^2 \tag{۷.۵۹}$$

الف) دکھائیں کہ متغیرات $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}$ کی بجائے متغیرات

$$\boldsymbol{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}) \quad \boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) \tag{۷.۶۰}$$

استعمال کرنے سے ہیملٹنی دو علیحدہ علیحدہ تین آبادی ہارمونی مرتعشات میں تقسیم ہو گا۔

$$H = [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\mu^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mu^2] + [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\nu^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)m\omega^2\nu^2] \tag{۷.۶۱}$$

ب) اس نظام کی ٹھیک ٹھیک زمینی حال توانائی کیا ہو گی؟ ج) ٹھیک ٹھیک حل نہ جاننے تو صورت میں ہم ہیملٹنی کی اصل صورت مساوات 59.7 پر حصہ 2.7 کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔ سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے حساب کیجیے گا۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $\langle H\rangle = 3\hbar\omega(1-\lambda/4)$

سوال۷.۱۸: 18.7

ہم نے سوال 7.7 میں دیکھا کہ سپر شدہ برقی تفاعل موج، مساوات 27.7 جو ہیلیم کے لیے مفید ثابت ہوا منفی ہائیڈروجن باردار یہ میں مقید حال میں موجودگی کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چندر شیکر نے درج ذیل کا برقی تفاعل موج استعمال کیا

$$\psi(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) + \psi_2(r_1)\psi_1(r_2)] \tag{۷.۶۲}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{z_1^3}{\pi a^3}}e^{-z_1 r/a} \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{z_2^3}{\pi a^3}}e^{-z_2 r/a} \tag{۷.۶۳}$$

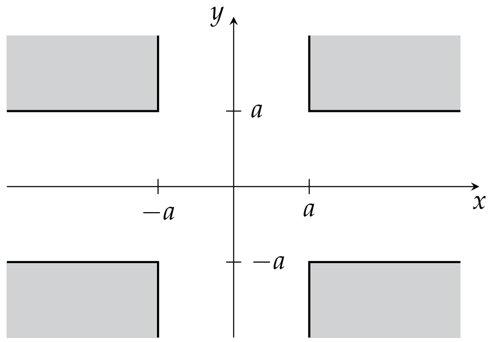
یعنی انہوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی اجازت دی ایک الیکٹران کو مرکزہ کے قریب اور دوسرے کو مرکزہ سے دور تصور کیا گیا۔ چونکہ الیکٹران متماثل ذرہ ہے لہٰذا فضائی تفاعل موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشاکلی بنانا ہو گا چکر حال جس کا موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا خلاف تشاکلی ہے۔ دکھائیں کہ قابل تبدیل مقدار معلوم Z_1 اور Z_2 کی قیمتوں کو سوچ کہ منتخب کرنے سے $\langle H\rangle$ کی قیمت -13.6eV سے کم حاصل کی جا سکتی ہے۔ جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{E_1}{x^6+y^6}(-x^8+2x^7+\frac{1}{2}x^6y^2-\frac{1}{2}x^5y^2-\frac{1}{8}x^3y^4+\frac{11}{8}xy^6-\frac{1}{2}y^8) \tag{۷.۶۴}$$

جہاں $x \equiv Z_1 + Z_2 z$ اور $y \equiv 2\sqrt{Z_1 Z_2}$ ہیں۔ چندر شیکر نے $Z_1 = 1.039$ چونکہ یہ ایک سے بڑا ہے لہٰذا اس کو موثر مرکزی بار تصور نہیں کیا جا سکتا ہے۔ تاہم اس کے باوجود اس کو برقی تفاعل موج قبول کیا جا سکتا ہے۔ اور $Z_2 = 0.283$ استعمال کیا

سوال۷.۱۹: 7-19

جو بری بر کن کو برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ دو ذرات مثلاً دو ڈیوٹران کو ایک دوسرے کے اتنا قریب لانا ہے



شکل ۷.۸: صلیبی خطہ برائے سوال 20.7

کہ کولمب قوت دفع پر ان کے بیچ کششی تاہم اثر قریب مرکزی قوتیں سبقت لے جائیں ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کہ ان کو بلا منصوبہ تصادم کے ذریعے انہیں ایک دوسرے کے قریب زبردستی لا سکتے ہیں۔ دوسری تجویز میون عمل انگیز کا استعمال ہے جس میں ہم ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ اثان کی جگہ ڈیوٹران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹران کے بیچ توازنی فاصلہ کی پیش گوئی کریں اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی خاطر کیوں الیکٹران سے میون بہتر ثابت ہو گا۔

سوال ۷.۲۰: 20.7
کوانٹائی نقطے فرض کریں ایک ذرہ تو شکل ۷.۸ میں دکھائے گئے سلیبی خطہ پر دو ابعاد میں حرکت کرنے کا پابند بنایا جائے سلیبی ہاتھ لامتناہی تک پہنچتے ہیں۔ سلیب کے اندر مخفیہ صفر ہے جو کہ اس کے باہر لامتناہی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تشکیل مثبت توانائی مقید حال کا حامی ہے۔

الف) دکھائیں کہ کم سے کم توانائی جو لامتناہی تک پہنچتی ہے درج ذیل ہے

$$E_{\text{threshold}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}; \tag{۷.۶۵}$$

اس سے کم توانائی کا ہر حل لامتناہی کا مقید ہو گا۔ اشارہ: ایک بازو پر $(x \quad >> \quad a)$ مساوات شروڈنگر کو علیحدگی متغیرات کو مدد سے حل کریں۔ اگر تفاعل موج لامتناہی تک پہنچتی ہے تب اس کا x پر انحصار $e^{ik_x x}$ جہاں $k_x \quad > \quad 0$ ہے کو روپ میں ہو گا۔ ب) اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ E سے کم توانائی زمینی حال کا ہو گا۔ درج ذیل برقی تفاعل موج استعمال کریں

$$\psi(x.y) = A\begin{cases} (1-|xy|\ /a^2)e^{-\alpha} & |x| \le a, |y| \le a \\ (1-|x|\ /a)e^{-\alpha|y|/a} & |x| \le a, |y| > a \\ (1-|y|\ /a)e^{-\alpha|x|/a} & |x| > a, |y| \le a \\ 0 \end{cases} \tag{۷.۶۶}$$

اس کی معمول زنی کر کے A تعین کریں۔ اور H کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2}\Big(\frac{\alpha^2+2\alpha+3}{6+11\alpha}\Big) \tag{۷.۶۷}$$

اب α کے لحاظ سے کم سے کم قیمت تلاش کر کہ دکھائیں تہ نتیجہ E سے کم ہوگا۔ سلیب کی تشاکل سے پورا فائدہ اٹھائیں آپکو صرف خطہ $1/8$ پر تکمل لینا ہوگا۔ باقی سات تکمل بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دھیان رہے کہ اگرچہ برقی تفاعل موج استمراری ہے اس کے تفرقات غیر استمراری ہیں۔ رکاوٹی لکیریں $x = \pm a$, $y = 0$, $x = 0$ اور $y = \pm a$ پر پائی جاتی ہیں۔ جہاں آپکو مثال 7-3 کی تکنیک بروئے کارلانی ہوگی۔

جوابات