

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمولی زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع نمبر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زبان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۵	انجذاب، تحریق شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۶	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۸	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۵۸	آمنٹائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۳۶۰	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۶۳	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۳	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۳۷۳	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۷۳	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۷۶	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۸۱	ہیٹ بیری	۱۰.۲
۳۸۱	گرگنی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۳	ہندی ہیٹ	۱۰.۲.۲
۳۸۸	اہارو نوو پو ہم اثر	۱۰.۲.۳
۳۹۷	بکھراؤ	۱۱
۳۹۷	تعارف	۱۱.۱
۳۹۷	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۴۰۱	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۴۰۲	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۲	اصول و ضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۵	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۰۸	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۱۱	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۱۱	مساوات شرودنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۵	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۱۹	تسل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۳	پس نوشت	۱۲
۴۲۴	آمنٹائن پوڈلکیو روزن تضاد	۱۲.۱
۴۲۵	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۰	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۳۱	شرودنگر کی ملی	۱۲.۴
۴۳۲	کوانٹائی زینو تضاد	۱۲.۵
۴۳۵	جوابات	
۴۳۷	خطی الجبرا	۱
۴۳۷	سمتیات	۱.۱
۴۳۷	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۳۸	قتالب	۳.۱

۴۳۸	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۸	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۸	هر مشی تباولے	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۸

ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین

ونٹزل وکرامرس وبرلوان ترکیب سے غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کی یک بُعدی تخمینہ حل حاصل کیے جاسکتے ہیں (اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفسیقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شرودنگر کی رداسی حصے پر کیا جاسکتا ہے)۔ یہ مقید حال توانائیوں اور مخفی رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں خصوصاً مفید ثابت ہوتا ہے۔

اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ایک ذرہ جس کی توانائی E ہو ایک ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ $V(x)$ مستقل ہو۔ تفاعل موج، $E > V$ کی صورت میں، درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لئے منفی علامت استعمال ہوگا (یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا)۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے، جس کا طول موج $(\lambda = 2\pi/k)$ اٹل اور حیطہ (A) غیر تغیری ہے۔ اب فرض کریں $V(x)$ مستقل نہیں، بلکہ λ کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہو، لہذا کئی مکمل طول موج پر مخفیہ مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ψ عملائن نہ ہوگا، تاہم اس کا طول موج اور حیطہ x کے ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین کے تصور کی بنیاد ہے۔ درحقیقت، یہ x پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے: تیز ارتعاشات، اور ان کے طول موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی۔

اسی طرح، $E < V$ (جہاں V مستقل ہے) کی صورت میں ψ قوت نہائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V - E)}}{\hbar}$$

WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)¹

اور اگر $V(x)$ مستقل نہ ہو، بلکہ $1/\kappa$ کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو، تب حل عملاً قوت نہائی ہوگا، البتہ A اور κ اب x کے قفا عمل ہوں گے جو آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔

یہ پورا قصہ کلاسیکی نقطہ والہیہ^۲، جہاں $V \approx E$ ہو، کے مترسی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا۔ چونکہ یہاں λ (یا $1/\kappa$) لامتناہی تک بڑھتا ہے، اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ $V(x)$ مقابلے میں ”آہستہ آہستہ“ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا ہم دیکھیں گے، اس تخمین میں نقاط واپس سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا، اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شرڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے، جس کی کل توانائی E اور محلی توانائی $V(x)$ ہے۔ فی الحال میں منرض کرتا ہوں کہ $E > V(x)$ ہے، لہذا $p(x)$ حقیقی ہوگا؛ اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں چونکہ کلاسیکی طور پر یہ ذرہ سعت x پر رہنے کا پابند ہوگا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر، ψ ایک مخلوط قفا عمل ہوگا؛ اس کو جیٹ، $A(x)$ ، اور ہیٹ، $\phi(x)$ ، جہاں دونوں حقیقی ہیں، کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

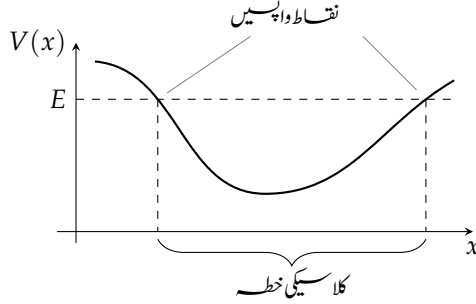
ہم x کے لحاظ سے تفرق کو قوت نہائی میں چھوٹی لکیر ('') سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

turning point^۳



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خط میں مقید ہوگا جہاں $E \geq V(x)$ ہو۔

لکھ سکتے ہیں۔ اس کو مساوات ۸.۱ میں پُر کرتے ہیں۔

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$

دونوں ہاتھ کے حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات:

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \Rightarrow A'' = A \left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

جبکہ خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسری حقیقی مساوات:

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0 \Rightarrow (A^2\phi')' = 0$$

حاصل ہوگی۔

مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ ہر لحاظ سے اصل مساوات شرودنگر کے معادل ہیں۔ ان میں سے دوسری یا آسانی حل ہوتی ہے:

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2 \Rightarrow A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں C (حقیقی) مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۸.۶) عموماً حل نہیں کی جاسکتی ہے، لہذا ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے: ہم فرض کرتے ہیں کہ جب A بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے، لہذا اجزاء A'' متابل نظر انداز ہوگا (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ہم فرض کرتے ہیں کہ $(\phi')^2$ اور p^2/\hbar^2 سے A''/A بہت کم ہے)۔ ایسی صورت میں ہم مساوات ۸.۶ کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے:

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

حاصل کرتے ہیں، لہذا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

ہوگا۔ (میں فی الحال اس کو ایک غیر قطعی عمل لکھتا ہوں؛ کسی بھی مستقل کو C میں ضم کیا جاسکتا ہے، جس کے تحت C مخلوط ہو سکتا ہے۔) اس طرح

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (\text{ونڈل وکرامرس و برلوان کلیہ})$$

ہوگا، اور (تخمینی) عمومی حل اس طرح کے دو اجزاء کا خطی جوڑ ہوگا، جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت، نقطہ x پر ذرہ پایا جانے کا احتمال، اس نقطہ پر ذرے کے (کلاسیکی) معیار حرکت (لہذا سمتی رفتار) کا بالکل عکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں، چونکہ جس مقام پر ذرے کی رفتار تیز ہو، وہاں اس کے پائے جانے کا احتمال کم ہوگا۔ درحقیقت، بعض اوقات تفسیقی مساوات میں جزو A'' نظر انداز کرنے کی بجائے، اس نیم کلاسیکی مشاہدے سے آغاز کرتے ہوئے ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ موحنر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے، لیکن اول الذکر بہتر طبعی و جب پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ موڑے دار ہو (شکل ۸.۲)۔

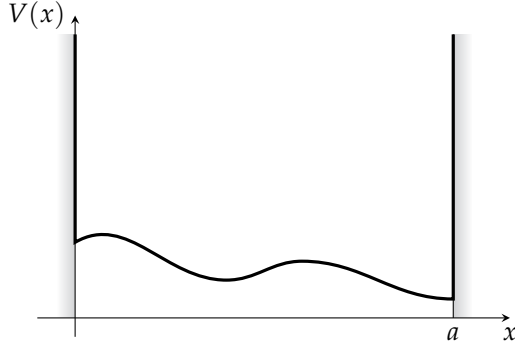
$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کوئی منتخب تناسب} & 0 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کنویں کے اندر (ہر جگہ $E > V(x)$ مندرجہ کرتے ہوئے)

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

ہوگا، جس کو بہتر انداز میں

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$



شکل ۸.۲: ایسا لامستثنائی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

لکھا جاسکتا ہے، جہاں (یہ جانتے ہوئے کہ ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی سے منتخب کر سکتے ہیں) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۱۴) \quad \phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'$$

اب $x = 0$ پر $\psi(x)$ لازماً صفر کو پہنچے گا، لہذا (چونکہ $\psi(0) = 0$ ہے) $C_2 = 0$ ہوگا۔ ساتھ ہی $x = a$ پر بھی $\psi(x)$ صفر کو پہنچے گا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۱۵) \quad \phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ماخوذ:

$$(۸.۱۶) \quad \int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar$$

یہ کوانٹائی شرط (تخمینی) احبازی توانائیوں کا تعین کرتی ہے۔

مثلاً، اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو ($V(x) = 0$)، تب $p(x) = \sqrt{2mE}$ (ایک مستقل) ہوگا، اور مساوات ۸.۱۶ کے تحت $p(x) = n\pi\hbar$ یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

ہوگا، جو لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرائما کلیہ ہے (مساوات ۲.۲۷)۔ یہاں ڈنزل وکرامرسس ویرلوان تخمین ہمیں بالکل ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے (اصل تفعل موج کا محیط مستقل ہے، لہذا A'' کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا)۔ □

سوال ۸.۱: ونزل وکرامرسس وبرلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی احبازتی توانائیاں (E_n) تلاش کریں جس کی نصف تہ میں V_0 بلند سیز بھی پائی جاتی ہو (شکل ۶.۳)۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو V_0 اور $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$ (بغیر سیز بھی لامتناہی چوکور کنویں کی n ویں احبازتی توانائی) کی صورت میں لکھیں۔ فرض کریں $E_1^0 > V_0$ ہے، تاہم یہ فرض نہ کریں کہ $E_n \gg V_0$ ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال ۶.۱ میں رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹے V_0 (جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہوگا) یا بہت بڑے n (جہاں ونزل وکرامرسس وبرلوان تخمین کارآمد ہوگی) کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل وکرامرسس وبرلوان کلیہ (مساوات ۸.۱۰) کو \hbar طاقتی توسیع سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ آزاد ذرے کے تفاعل موج $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$ سے حوصلہ افزا ہو کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں $f(x)$ کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ (دھیان رہے کہ ہم یہاں عمومیّت نہیں کھوتے؛ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔)

۱. اس کو (مساوات ۸.۱ روپ کی) مساوات شرودنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

ب. تفاعل $f(x)$ کو \hbar کے طاقتی تسلسل کی صورت:

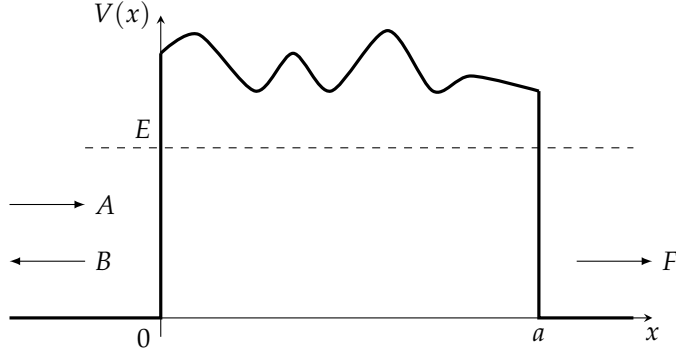
$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر \hbar کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ}$$

ج. انہیں $f_0(x)$ اور $f_1(x)$ کے لئے حل کر کے دکھائیں کہ \hbar کی اول رتبہ تک آپ مساوات ۸.۱۰ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عدد کے لوگار تھم کی تعریف $\ln(-z) = \ln(z) + in\pi$ ہے، جہاں n طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں، تب دونوں اطراف کو قوت نسبی میں منتقل کر کے دیکھیں۔



شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کی مستطیلی رکاوٹ سے بکھراؤ۔

۸.۲ سرنگ زنی

اب تک $E > V$ فرض کیا گیا، لہذا $p(x)$ حقیقی تھا۔ ہم غیر کلاسیکی خط ($E < V$) کا مطالعہ کرتے ہیں: نتیجہ باآسانی لکھ سکتے ہیں:

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

یہ پہلے کی طرح ہے (مساوات ۸.۱۰)، تاہم اب $p(x)$ تخیلی ہے۔^۳

ایک مثال کے طور پر، مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہو (شکل ۸.۳) سے بکھراؤ کے مسئلے پر غور کریں۔ رکاوٹ کی بائیں جانب ($x < 0$)

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

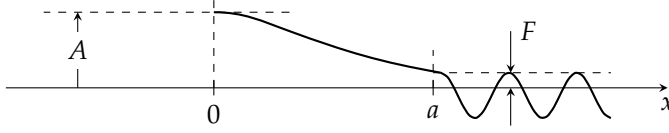
ہوگا، جہاں A آمدی جیٹہ اور B منعکس جیٹہ ہے، اور $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے (حصہ ۲.۵ دیکھیں)۔ رکاوٹ کے دائیں جانب ($x > a$)

$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

ہوگا؛ F ترسیلی جیٹہ ہے، اور ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

^۳ اس صورت میں تصاعلی موج حقیقی ہوگا، اور مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ کے ممابث ضروری نہیں کہ مساوات ۸.۵ سے حاصل ہوں، اگرچہ یہ اب بھی کافی ہیں۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں، سوال ۸.۲ میں پیش متبادل حصول کے طریقے پر غور کریں۔



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بھراؤ کے تعامل موج کی کیفی ساخت۔

سرنگ زنی خطہ $(0 \leq x \leq a)$ میں ونڈل وکرامرس ویرلوان تخمین درج ذیل دیگی۔

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

اگر رکاوٹ بہت بلند، یا بہت چوڑا یا دونوں ہو (یعنی جب سرنگ زنی کا احتمال بہت کم ہو)، تب قوت نمائی بڑھتے جہز کا عددی سر (C) لازماً چھوٹا ہوگا (درحقیقت، لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا)، اور تعامل موج کا نقش شکل ۸.۴ کی طرز سے ہوگا۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوت نمائی میں کل کی، آمدی اور ترسیلی امواج کے حیثوں کے تناسب کو تعین کرتا ہے

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

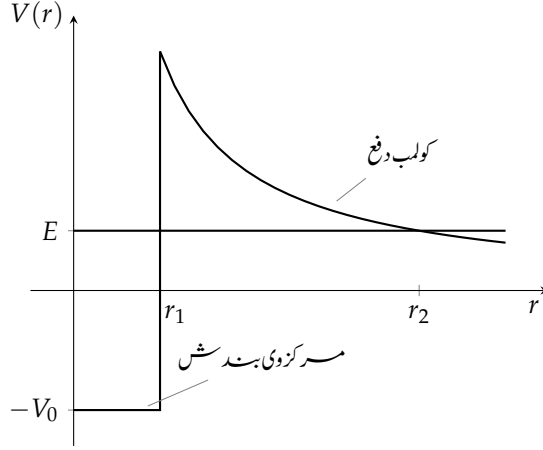
$$(۸.۲۲) \quad T \cong e^{-2\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx$$

مثال ۸.۲: الفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ ۱۹۲۸ء میں جارج گامو نے مساوات ۸.۲۲ استعمال کرتے ہوئے الفا تحلیل (چند مخصوص تابکار مرکزہ سے، دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل، الفا ذرہ کے انحراف) کی وجہ پیش کی۔ چونکہ الفا ذرہ مثبت بار $(2e)$ کا حامل ہے، لہذا ایسے ہی یہ مرکزوی بندشی قوت کی پہنچ سے باہر نکلتا ہے، باقی مرکزہ (کے بار (Ze)) کی برقی قوت دافع اس کو دور جانے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن، اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا (جو یورینیم کی صورت میں) خارج الفا ذرے کی توانائی سے دو گن سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر (پروٹان کے رداس r_1 وسعت کے چوکور کنواں (جو مرکزوی قوت کشش کو ظاہر کرتا ہے) کو کولمب قوت دافع کی دم سے جوڑ کر ظاہر کیا (شکل ۸.۵)، اور کوانٹائی سرنگ زنی کو الفا ذرہ کی مندر کی وجہ مقرر دیا (مرکزوی طبیعیات پر کوانٹائی میکانیات کے اطلاق کا یہ پہلا واقعہ ہے)۔

اگر خارج الفا ذرے کی توانائی E ہو، بیرونی واپسین نقطے (r_2) کا تعین درج ذیل کرے گا۔

$$(۸.۲۳) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E$$

اس تخمینی دلیل کو زیادہ پختہ بنایا جاسکتا ہے (سوال ۸.۱۰ دیکھیں)۔



شکل ۸.۵: تابکار مسرکزہ میں الفا ذرے کی مخفی توانائی کا گمونومند۔

ظاہر ہے قوت γ (مساوات ۸.۲۲) درج ذیل ہوگا۔^۵

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr$$

اس نکل میں $r \equiv r_2 \sin^2 u$ پُر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$$(۸.۲۳) \quad \gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right]$$

عام طور پر $r_1 \ll r_2$ ہوگا، لہذا ہم چھوٹے زاویوں کا تخمینہ $(\sin \epsilon \cong \epsilon)$ استعمال کر کے اس نتیجے کا دہرہ روپ حاصل کرتے ہیں:

$$(۸.۲۵) \quad \gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}$$

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

^۵ یہاں رکارڈ کی بائیں جانب مخفیہ صفر نہیں ہے (مزید، حقیقتاً یہ تین بعدی مسئلہ ہے)، تاہم مساوات ۸.۲۲ میں پیش بنیادی تصور سے ہمیں دلچسپی ہے۔

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

(عمومی سرگزہ کی جسامت تقریباً 10^{-15} m یعنی 1 fm ہوتی ہے۔)

اگر ہم سرگزہ کے اندر الفا ذرے کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار v ہے، تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً $2r_1/v$ ہوگا، لہذا تصادم کا تعدد $v/2r_1$ ہوگا۔ ہر تصادم پر منسار ہونے کا احتمال $e^{-2\gamma}$ ہے، لہذا اکائی وقت میں اخراج کا احتمال $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$ ہوگا، اور یوں مائی سرگزہ کا عرصہ حیات^۶ تقریباً درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم v نہیں جانتے، لیکن اس سے زیادہ منرق نہیں پڑتا، چونکہ ایک تابکار سرگزہ سے اور دوسرے تابکار سرگزہ کے بیچ قوت نسائی جزو ضروری پچھیں رتی تک تبدیل ہوتا ہے؛ اس کے سامنے v کی تبدیلی متبادل نظر انداز ہے۔ بالخصوص، عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائش قیوتوں کو $1/\sqrt{E}$ کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط (شکل 6.8) حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک مستحالی چوکر کا وٹ، جس کی اونچائی $V_0 > E$ اور چوڑائی $2a$ ہے، سے ایسے ذرے، جس کی توانائی E ہے، کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ اصل نتیجے (سوال ۲.۳۳) کے ساتھ کریں، جس تک ونڈل وکرامرسس ویرلوان طریق $1 \ll T$ میں اس کی تخفیف ہوگی۔

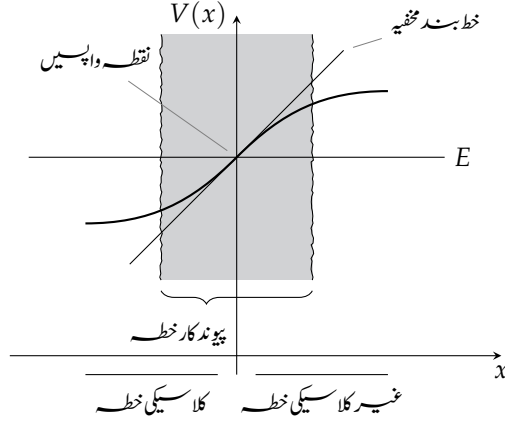
سوال ۸.۴: مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے ^{238}U اور ^{212}Po کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ اشارہ: تمام سرگزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً ایک جیسی ہوتی ہے، لہذا $(r_1)^3$ (پروٹان اور نیوٹران کی تعداد کے مجموعہ) A کا راست مستناسب ہوگا۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے۔

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}$$

خارج شدہ الفا ذرے کی توانائی، کلیہ آئنشٹائن ($E = mc^2$) سے اخذ کی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2$$

جہاں m_p مائی سرگزہ کی کیت، m_d بیٹی سرگزہ کی کیت، اور m_α الفا ذرے (یعنی He^4 سرگزہ) کی کیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی سرگزہ کیا ہوگا، یاد رہے کہ الفا ذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لے کر منسار ہوتا ہے، لہذا Z سے دو اور A سے چار منفی کریں۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی عنصر کا تعین کریں۔ سمتی رفتار v کی اندازہ قیمت $E = (1/2)m_\alpha v^2$ سے حاصل کریں، یہ سرگزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتی



شکل ۸.۶: دائیں ہاتھ نقطہ واپس کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

ہے، لہذا v کی قیمت اصل سے زیادہ دیگی، تاہم اب تک ہم صرف ابتدائی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیسائی عناصر کی تجربے حاصل کردہ عرصہ حیات بالترتیب 6×10^9 سال اور $0.5 \mu s$ ہے۔

۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و منکر میں میں فرض کرتا ہوں کہ مخفی کنویں (یار کاوٹ) کی ”ڈیواریں“ انتہائی تھیں، جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ درحقیقت، ہمارے مرکزی نتائج (مساوات ۸.۱۶ اور ۸.۲۲) اس صورت میں بھی کافی حد تک درست ثابت ہوتے ہیں جب کناروں کی ڈھلان زیادہ نہ ہو (یقیناً نظریہ گامو میں ایسی صورت پر ہی ان کا اطلاق کیا گیا)۔ بہر حال، نقطہ واپس ($E = V$)، جہاں ”کلاسیکی“ اور ”غیر کلاسیکی“ خطے جڑتے ہیں اور ونڈل و کرامرس و برلوان تقسیم نفاذ استعمال ہوگی، پر ہم تفسیر عمل موج کا مشربی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصے میں میں مقید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) پر غور کروں گا؛ آپ مسئلہ بھراؤ (سوال ۸.۱۰) حل کریں گے۔^۷

اپنی آسانی کی خاطر، ہم محدود یوں منتخب کرتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپس $x = 0$ پر واقع ہو (شکل ۸.۶)۔ ونڈل و

^۷ انتہا: درج ذیل دلائل زیادہ تکنیکی ہیں جنہیں پہلی مرتبہ پڑھ کر سمجھنا ضروری نہیں۔

کرامرس و برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[Be^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} De^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \end{cases}$$

(یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام $x > 0$ کے لئے E سے $V(x)$ بڑا ہوگا، ہم اس خطہ میں مثبت قوت نکال کر خارج کر سکتے ہیں، چونکہ $x \rightarrow \infty$ پر یہ بے فتابو بڑھتا ہے۔) ہمارا کام ان دو حل کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے۔ لیکن یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا درپیش ہے: ونرل وکرامرس و برلوان تخمین میں نقطہ واپس (جہاں $p(x) \rightarrow 0$) ہوگا ψ پر ψ کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تقاضا عمل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا؛ جیسا ہمارا گمان بھتا، ونرل وکرامرس و برلوان تخمین نقطہ واپس کی پڑوس میں نا قابل استعمال ہے۔ لیکن اجبازتی توانائیوں کا تعین نقاط واپس پر سرحدی شرائط کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا ”پیوندکار“ تقاضا عمل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپس کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونرل وکرامرس و برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوندکار تقاضا عمل موج (ψ_p) صرف مبداء کے پڑوس میں چاہیے، لہذا ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر:

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمین دے کر، اس خطہ بند V کے لئے مساوات شرودنگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p$$

حل کرتے ہیں، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان α کو غیر تابع متغیر میں ضم کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p.$$

یہ مساوات ^۸ایزی کے جس کے حلوں کو **تفاعلات ایزی**^۹ کہتے ہیں۔^{۱۰} چونکہ مساوات ایسری دور تبی تفسر کی مساوات ہے، لہذا دو خطی غیر تابع ایسری تفاعلات $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ پائے جاتے ہیں۔

جدول ۸.۱: ایسری تفاعلات کے چند خواص۔

$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$	تفسری مساوات:
$Ai(z) \text{ اور } Bi(z) \text{ ایسری تفاعلات کے خطی مجموعہ}$	حل:
$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$	کملی روپ:
$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{s^3}{3} + s} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$	

ان کا تعلق رتبہ 1/3 کے بیبل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ کا خطی جوڑ

$$\psi_p(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x). \quad (۸.۳۷)$$

ہوگا۔ جہاں a اور b مناسب مستقامت ہیں۔

اب ψ_p مبداء کی پڑوس میں تخمینہ تفاعل موج ہے ہم نے مبداء کے دونوں اطراف متربی مشترکہ خطہ میں ψ_p کو ونزل و کراس برلوان تخمینہ حلوں کے ساتھ ہم پلہ بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ دونوں اطراف کے مشترکہ خطے نقطہ واپسی کے اتنی متربی ہیں کہ خطی مخفیہ ψ_p کافی حد تک درست ہوگا لہذا ψ_p اصل تفاعل موج کا بہترین تخمینہ ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی فاصلہ پر ہیں کہ ونزل و کراس برلوان تخمینہ پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کارآمد ہوگا لہذا مساوات 8.34 کی عملیت میں درج ذیل ہوگا

$$p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}. \quad (۸.۳۸)$$

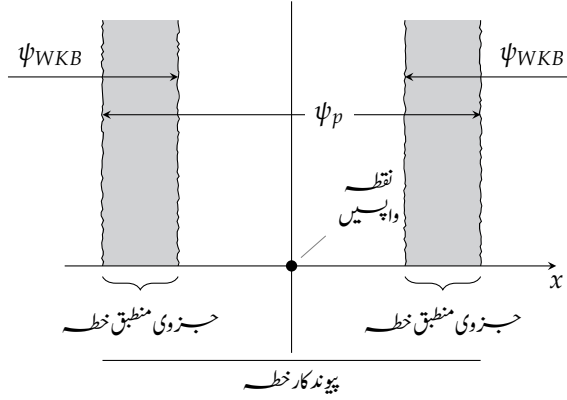
بالخصوص مشترکہ خطہ دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar\alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar(\alpha x)^{3/2},$$

Airy's equation^۸

Airy functions^۹

^{۱۰} کلاسیکی طور پر، خطی مخفیہ سے مراد مستقل قوت، لہذا مستقل اسراع ہے؛ یہ سادہ ترین حسرت ہے، جہاں سے بنیادی میکانیات کا آغاز ہوتا ہے۔ ستم تفسیری کی بات ہے کہ یہی سادہ مخفیہ، کوانٹائی میکانیات میں مادرائی تفاعلات کو جسم دیتا ہے، اور اس نظریہ میں کلیدی کردار ادا نہیں کرتا۔



شکل ۸.۷: پیوند کار خط اور دو منطق خط۔

لہذا ونٹرل وکرامرس ویرلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۹) \quad \psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}.$$

بڑی z کی صورت میں ایسری تفاعلات کی متقاربی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خط دو میں پیوند کار تفاعل موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}.$$

دونوں حلوں کے موازنے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \quad \text{اور} \quad b = 0.$$

ہم یہی کچھ مشترکہ خط ایک کے لئے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 میں $p(x)$ دیگتا ہم اس بار x منفی ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3}\hbar(-\alpha x)^{3/2}$$

اور ونٹرل وکرامرس ویرلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}}} \left[B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right].$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی z کے لئے ایسری تفاعل کی مقارب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں $b = 0$ لیا گیا ہو درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ (8.43) \quad &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

مشترکہ خط ایک میں ونزل و کرامرس و برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

جس میں a کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(8.45) \quad B = -ie^{i\pi/4}D, \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4}D.$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل و کرامرس و برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولی مقل D کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبادے اختیاری نقطہ x_2 منتقل کرتے ہوئے ونزل و کرامرس و برلوان تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

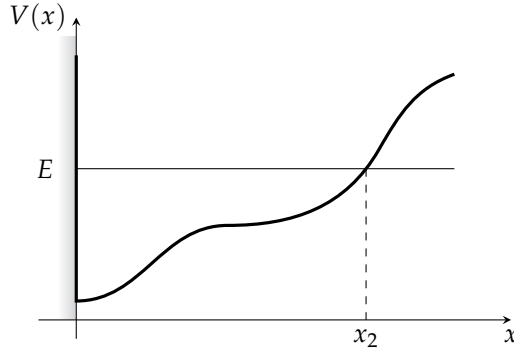
$$(8.46) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2; \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2. \end{cases}$$

مشال ۸.۳: ایک انتہائی دیوار والا مخفیہ کنواں۔ فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی $x = 0$ پر انتہائی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں $\psi(0) = 0$ ہوگا لہذا مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یاد درج ذیل ہوگا۔

$$(8.47) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \hbar$$



شکل ۸.۸: ایک انتہائی دیوار والا محفہ کنواں۔

مثلاً نصف ہارمونی مرتعش

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}.$$

ہوگا۔ جہاں درج ذیل نقطہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

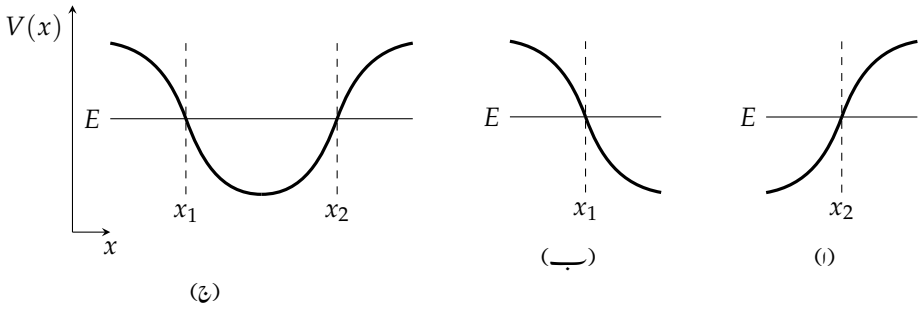
لہذا

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹائی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar\omega.$$

اس مخصوص صورت میں ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین درحقیقت ٹھیک ٹھیک اجبازتی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □



شکل ۸.۹: بالائی جانب ڈھلوان اور نیچے جانب ڈھلوان نقطہ واپس۔

مثال ۸.۳: بغیر انتضالی دیواروں کا مخفیہ کنوائل۔ اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-۱) ہوتی ہے مساوات 8.46 و نازل کرامرس برلوان تفاسلات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی (شکل ۸.۹-۲) پر انہی وجوہات کو بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل ہوگا سوال 8.9

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_1} p(x') dx' \right], & x < x_1; \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x > x_1. \end{cases}$$

بالخصوص مخفیہ کنویں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ $(x_1 < x < x_2)$ میں تفاسل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}, \quad \text{جہاں}$$

لکھا جاسکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50 ظاہر ہے کہ $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(۸.۵۱) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \hbar, \quad \text{جہاں } n = 1, 2, 3, \dots$$

یہ کوانٹائزیشن شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنویں کی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے دھیان رہے دو انتضالی دیواروں کے لئے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتضالی دیوار کے لئے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اس عدد $(0, 1/4)$ یا $(1/2)$ کا مندرجہ ہے جو n سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ و نازل و کرامرس و برلوان تھمیں بڑی n کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لہذا یہ

منرق صرف دکھاوے کی حد تک ہے بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر کیے بغیر ایک سادہ شکل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینہ اجبازی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔ تفاع عمل موج خود کہیں نہیں نظر آتا ہے۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل پلک کے ساتھ ٹپکیاں لیتے ہوئے کمیت m کی گیند کے کلاسیکی مسئلہ کا مثال کو انشائی میکانیکی مسئلہ پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی x تفاع عمل لکھیں؟ مخفی x کی صورت میں مخفی لامستثنائی ہوگا چونکہ گیند وہاں کبھی نہیں جاسکتا۔

(ب) اس مخفی کے لئے مساوات شروڈنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ایسری تفاع عمل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی z کے لئے $Bi(z)$ بے متابو بڑھتا ہے لہذا اس کو رد کرنا ہوگا۔ تفاع عمل $\psi(x)$ کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجبازی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ اور $m = 0.100 \text{ kg}$ لے کر حاصل کریں۔

(د) اس ٹکلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی eV میں کتنی ہوگی؟ اوسطاً الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ وریل سے $\langle x \rangle$ تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونزل و کرامرس و برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی ٹپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجبزیہ کریں۔

(الف) اجبازی توانائیاں E_n کو m, g اور \hbar کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5 (ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پڑ کر کے ونزل و کرامرس و برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بالکل ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کو انشائی عدد n کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

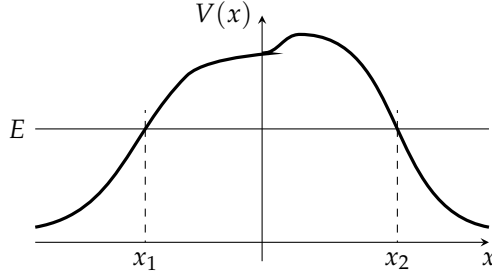
سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجبازی توانائیوں کو ونزل و کرامرس و برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جس کی زاویائی تعدد ω ہو کی n ویں ساکن حال میں کمیت m کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی x_2 تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی (d) تک پہنچنا ہوگا کہ خطی مخفی مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی x_2 ہو خلل 1% تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2 + d) - V_{lin}(x_2 + d)}{V(x_2)} = 0.01,$$



شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

تب d کیسے ہوگا؟

(ج) جب تک $z \geq 5$ ہو $Ai(z)$ کا مقارب روپ 1% تک درست ہوگا۔ جزو (ب) میں حاصل کردہ d کے لئے n کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تاکہ $\alpha d \geq 5$ ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی n کے لئے ایسا مشترکہ خطہ موجود ہوگا جس میں خطی مخفیہ 1% تک کارآمد ہوگا اور بڑی z روپ کا تاثری تفاعل بھی 1% تک درست ہوگا۔

سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ والپی کے لئے پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات 8.50 صفر کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۰) سے بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی وٹزل کراس برلوان تفاعل موج لکھ کر آغاز کریں۔

$$(۸.۵۲) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[A e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} + B e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} \right], & (x < x_1); \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[C e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2); \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[F e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2). \end{cases}$$

مستقل C کو صفر تصور نہ کریں۔ سرنگ زنی احتمال $T = |F|^2 / |A|^2$ کا حساب کر کے دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہوگا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ

$$V(x) = \alpha |x|^v,$$

جہاں v ایک مثبت عدد ہے کی اجازتی توانائیوں کو وٹزل وکراس برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو

$v = 2$ جائیں۔ جواب:

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[(n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: ونڈل وکرامرس ویرلوان تخمین استعمال کر کے سوال 2.51 کی مخفیہ کے لئے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجہ کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $-\left[(9/8) - (1/\sqrt{2})\right] \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کروئی تشاکلی مخفیہ کے لئے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر ونڈل وکرامرس ویرلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو $l = 0$ کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar,$$

جہاں r_0 نقطہ واپسی ہے یعنی ہم $r = 0$ کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگار تھمی مخفیہ

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

کی اجازتی توانائیوں کی اندازہ قیمت تلاش کریں جہاں V_0 اور a مستقلات ہیں۔ صرف $l = 0$ کی صورت پر غور کریں دیکھیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کیت پر نہیں ہوگا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left(\frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right).$$

سوال ۸.۱۴: ونڈل وکرامرس ویرلوان تخمین کی درج ذیل روپ

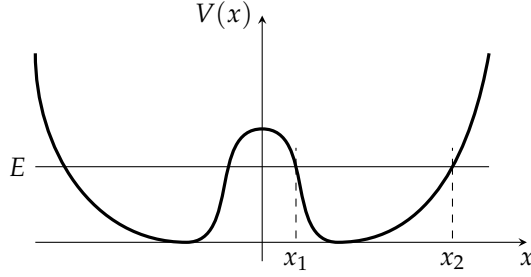
$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$

استعمال کر کے ہائیڈروجن کی مقید حال توانائیوں کی اندازہ قیمت تلاش کریں۔ موثر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز جبزو شامسل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2.$$

آپ دیکھیں گے کہ $l \gg n$ اور $n \gg 1/2$ کی صورت میں آپ کو پوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}.$$



شکل ۸.۱۱: تشابہ کلی دوہرا کنواں؛ سوال 15.8۔

سوال ۸.۱۵: تشابہ کلی دوہرا کنوئیں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم $E < V(0)$ والی مقید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔
 (الف) خط (i) $x > x_2$ (ii) $x_1 < x < x_2$ اور (iii) $0 < x < x_1$ کے لئے ونڈل کر امیرس برلوان
 تفعلات موج لکھیں۔ نقطہ x_1 اور x_2 پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں x_2 کے لئے ایسا کیا گیا ہے آپ کو x_1 کے لئے کرنا ہوگا درج ذیل دکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

(ب) چونکہ $V(x)$ تشابہ کلی ہے لہذا ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تفعلات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول
 الذکر صورت میں $\psi'(0) = 0$ ہوگا جبکہ موخر الذکر صورت میں $\psi(0) = 0$ ہوگا۔ دکھائیں کہ اس سے درج
 ذیل کو انتہائی شرط حاصل ہوتی ہے

$$(۸.۵۹) \quad \tan \theta = \pm 2e^{\phi}.$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۶۰) \quad \phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'.$$

مساوات 8.59 تمہیں احبازتی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ x_1 اور x_2 میں E کی قیمت داخل ہوتی ہے لہذا θ
 اور ϕ دونوں E کے تفعلات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلندیا/ اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں ϕ بڑا ہوگا لہذا e^{ϕ} انتہائی بڑا ہوگا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.59 کے تحت θ کی قیمتیں π کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ جہاں $|\epsilon| \ll 1$ ہے لکھ کر دکھائیں کہ کوانٹائزیشن شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۶۱) \quad \theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}.$$

(د) مندرجہ کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکانی ہے

$$(۸.۶۲) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & x < 0, \text{ اگر} \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & x > 0, \text{ اگر} \end{cases}$$

اس مخفیہ کوترسیم کر کے θ مساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دکھائیں

$$(۸.۶۳) \quad E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \mp \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\phi}.$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نا قابل گزر ہو $\infty \rightarrow \phi$ تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$ دوہری انحطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنویں میں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ متناہی رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنویں کے بیچ رابطہ ممکن ہوگا لہذا انحطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات (ψ_n^+) کی توانائی معمولی کم اور طاق تناسلات (ψ_n^-) کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

(د) مندرجہ کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا ہمیشہ دوائیں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنویں سے دوسرے اور دوسرے سے واپس پہلا کنویں درج ذیل دوری عرصے کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$(۸.۶۴) \quad \tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}.$$

(ه) متغیر ϕ کی قیمت جب $E \gg V(0)$ ہو تب $\phi \sim m \omega a^2 / \hbar$ ہوگا۔

سوال ۸.۱۶: شمارکے اثر میں سرنگ زنی۔ بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جوہر سے سرنگ زنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار یہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی شمارک اثر کے تجربے

میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ ترین یہ بُعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری مستثنای چو کور کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنویں کی تہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہوگی یہاں فرض کریں $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$ ہے۔ اشارہ: یہ $2a$ چوڑائی کی لامستثنای چو کور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب $H' = -\alpha x$ متعارف کریں بیرونی برقی میدان $E = -E_{ext}$ میں α eE_{ext} ہوگا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے ($\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2$)۔ کل مخفیہ کثافت کہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت x رخ سرنگ زنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگ زنی جبزوضربی γ مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو مضرار ہونے کے لئے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب: $\gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}$, $\tau = (8ma^2 / \pi\hbar)e^{2\gamma}$ ۔

(د) معقول اعداد $V_0 = 20 \text{ eV}$ بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت $a = 10^{-10} \text{ m}$ عمومی جوہر کار داس $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$ تجربہ گاہ میں مضبوط میدان e اور m الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ τ کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کو انشائی سرنگ زنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود بخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کیت m رداس R اور قد h کا نکلی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی معتام $(h/2)$ سے بلندی کو x سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی mgx ہوگی اور بوتل اس صورت گرے گی جب x کی قیمت فاصل قیمت $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$ تک پہنچے۔ سرنگ زنی احتمال مساوات 8.22 کو $E = 0$ کے لئے حاصل کریں۔ حراری توانائی $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$ لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
حالات، 133
اجزائی
قیمتیں، 33
ارتعاش
نیوٹرینو، 127
استمراری، 105
استمراری مساوات، 194
استمراریہ، 138
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول تغیریت، 299
اصول عدم یقینیت، 116
اضافیتی تصحیح، 272
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
الیکٹران
کلاسیکی رداس، 175
الیکٹران نیوٹرینو، 127
امتیازی تقابلی عمل، 103
امتیازی فتر، 103
امتیازی فتر مساوات، 103
انتشاری
رشتہ، 67
انخطاطی، 90، 104
انخطاطی دباؤ، 228
اندرونی ضرب، 98
انوکاس
شرح، 78
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
برقی حرکیات
کوانٹائی، 278
بقا
توانائی، 39
بقا احتمال، 194
بلا واسطہ مکمل، 313
بندشی توانائی، 156
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
variables
separation of, 25
variance, 9
variational principle, 299
vectors, 97
velocity
group, 66
phase, 66
virial theorem, 132
three-dimensional, 194
wag the tail, 56
wave
incident, 77
packet, 62
reflected, 77
transmitted, 77
wave function, 2
wave vector, 224
wavelength, 18
white dwarf, 252
Wien displacement law, 250
WKB, 321
Yukawa potential, 316
Zeeman effect, 283
zero-crossing, 34

- بوسن، 208
 بوہر
 رداس، 156
 کلیہ، 155
 بوہر مقناطیس، 284
 بیریان، 191
 میل
 کروی تقا عمل، 148
 بے لچک پھسکی، 173
 پازیشٹرانیم، 207، 291
 پاشن ویک اثر، 285
 پالی اصول مناعت، 208
 پالی متالب چکر، 177
 پایان، 191
 پیال، 234
 پس پردہ، 219
 پلانک
 کلیہ، 162
 پسیداکار
 فضا میں انتقال کا، 136
 وقت میں انتقال، 136
 پسیداکار
 تقا عمل، 60
 گھومتا، 200
 تجدیدی عرصہ، 89
 تجربہ
 شرٹن و گرلاخ، 184
 ترتیبی پیمائشیں، 131
 ترسیل
 شرح، 78
 تسل
 بالمر، 162
 پاشن، 162
 ٹیلر، 42
 طاقتی، 43
 فوریئر، 35
 لیمان، 162
 تشاکلیت
 ضرورت، 209
 تشکیل، 237
 تعداد مکین، 237
 تعیین حال، 103
 تغیریت، 9
 تقا عمل
 ڈیٹا، 72
 تقا عمل موج، 2
 تقا علیہ، 128
 تکمل
 ڈھانپائی، 312
 توانی
 کلیہ، 55
 توانائی
 احبابتی، 29
 توقعاتی
 قیوت، 7
 شنائی عددی سر، 239
 حبرو ڈارون، 280
 جسم مقیاس، 229
 جفت، 34
 تقا عمل، 31
 جفت قطب معیار اثر
 مقناطیسی، 181
 جوہری مدار چوں
 خطی جوڑ ترکیب، 311
 جی حبرو ضربی، 278
 چکر، 173، 174
 مخالف میدان، 175
 ہم میدان، 175
 چکر چکر رابطہ، 290
 چکر کار، 175
 چکر و مدار باہم عمل، 279
 چکر و مدار رابطہ، 272
 چندر شیکھر حد، 253
 چوزاویہ تشکل، 298
 حال
 بھراؤ، 70

- 66، دوری سستی
 66، گروہی سستی
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،
 194، رواحتال،
 روڈریگیس
 142، کلیہ
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،
 زاویائی معیار حرکت
 170، بقب
 174، خناتی
 174، غیر خناتی
 283، زیسان اثر،
 ساکن
 27، حالایت،
 243، سٹرلنگ تخمین،
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،
 32، سرحدی شراط،
 72، 79، سرنک زنی،
 252، سفید بونا،
 15، سگرا،
 220، سلور،
 128، سمتاویہ،
 97، سمتیات،
 224، سمتیہ موج،
 سوچ
 4، انکاری،
 3، تقلید پسند،
 3، حقیقت پسند،
 23، سوڈیم،
 188، سہ تا،
 250، سیاہ جسمی طیف،
 سیزھی
 46، عاملین،
 80، سیزھی تفسا عمل،
 296، شمارک اثر،
 27، غیر تابع وقت،
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،
 156، 34، زمینی،
 70، مقید،
 34، ہچچان،
 236، حراری توازن،
 حرکت
 202، سائیکلوثران،
 97، خطی الجبرا،
 97، خطی تبدلہ،
 28، خطی جوڑ،
 3، خفیہ متغیرات،
 235، 219، خول،
 254، درجبات آزادی،
 236، درجہ حرارت،
 234، درز،
 290، درز توانائی،
 61، دلیل،
 96، 56، دم ہلانا،
 219، دوری جدول،
 ڈیراک
 128، علامتیت،
 229، کنگھی،
 108، معیاری عمودیت،
 ڈیلٹا
 35، کرونیگر،
 297، ڈیوٹریم،
 297، ڈیوٹیران،
 ذرہ
 21، غیر مستحکم،
 رو
 21، احتمال،
 146، ردای مساوات،
 162، رڈبرگ،
 162، کلیہ،
 رشتہ
 295، پترنک،
 295، کرامرس،
 رفتار

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اسمتی، 145
 مقنطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرافتی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گریویشن، 163
 گیماتفا عمل، 249
- لاپلائی، 138
 لارمر تعدد، 184
 لاگت
 شریک کشیررکتی، 158
 کشیررکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لپٹان، 175
 لتضم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسنڈو سطحیں، 202
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284
 لوریننز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیب انتقال، 272
- ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم
 تقابل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کردی، 139
 مخالف بیتا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تقابلات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز جزو، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وٹنمن وٹمن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناسٹائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فضا تقابل عمل موج، 113، 195
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100، 35
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپلافتا عدد، 221
کاتیرا فتا عدد، 221
کادوسرا فتا عدد، 221
ہارمونی
مر نقش، 32
ہارمونی مر نقش
تین البعادی، 193
ہائیڈروجن
میونی، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فضا، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی تسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلبت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتطبی معیار اثر
بے ضابطہ، 278
مکمل، 100، 35
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزدہیلیم، 217
نظریہ اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیومن
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ، 70