

کوانٹم میکانیٹ

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستثنائی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۲
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	پوسن اور فز میان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ مختل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دوپڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زبان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیان میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۰۹	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرز و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگونی	۸.۲
۳۳۰	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۳	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۳	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۴	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۴۹	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۲	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۲	برقن طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۵۳	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۵۴	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۶	۹.۳	خود با خود احسراج
۳۵۶	۹.۳.۱	آمنطائن A اور B عددی سر
۳۵۸	۹.۳.۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات
۳۶۱	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۷۱	۱۰	حرارت ناگزیر تخمین
۳۷۱	۱۰.۱	مسئلہ حرارت ناگزیر
۳۷۱	۱۰.۱.۱	حرارت ناگزیر عمل
۳۷۴	۱۰.۱.۲	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت
۳۷۹	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۷۹	۱۰.۲.۱	گرگئی عمل
۳۸۱	۱۰.۲.۲	ہندی ہیت
۳۸۶	۱۰.۲.۳	اہارو نوو پو ہم اثر
۳۹۵	۱۱	بکھراؤ
۳۹۵	۱۱.۱	تعارف
۳۹۵	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ
۳۹۹	۱۱.۱.۲	کوانٹم نظریہ بکھراؤ
۴۰۰	۱۱.۲	حبزوی موج تجزیہ
۴۰۰	۱۱.۲.۱	اصول و ضوابط
۴۰۳	۱۱.۲.۲	الایا عمل
۴۰۶	۱۱.۳	میتقلات حیط
۴۰۹	۱۱.۴	بارن تخمین
۴۰۹	۱۱.۴.۱	مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ
۴۱۳	۱۱.۴.۲	بارن تخمین اول
۴۱۸	۱۱.۴.۳	شکل بارن
۴۲۱	۱۲	پس نوشت
۴۲۲	۱۲.۱	آمنطائن پوڈ لکیوروزن تضاد
۴۲۳	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۲۸	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۴۲۹	۱۲.۴	شرودنگر کی ہلی
۴۳۰	۱۲.۵	کوانٹم زینو تضاد
۴۳۳		جوابات
۴۳۵	۱	خطی الجبرا
۴۳۵	۱.۱	سمتیات
۴۳۵	۲.۱	اندرونی ضرب
۴۳۶	۳.۱	قتالب

۴۳۶	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۶	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۶	هر مشی تبادلے	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۵

متماثل ذرات

۵.۱ دو ذروی نظام

ایک ذرے کے لیے (فی الحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) $\psi(r, t)$ فضائی محدود، r ، اور وقت t کا تعین ہوگا۔ دو ذروی نظام کا حال پہلے ذرے کے محدود، (r_1) ، دوسرے ذرے کے محدود، (r_2) ، اور وقت کا تاجع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

یہ وقت کے لحاظ سے (ہمیشہ کی طرح) مساوات شرودنگر

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا، جہاں H مکمل نظام کا ہیملٹنی ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(r_1, r_2, t)$$

(ذره 1 اور ذره 2 کے محدود کے لحاظ سے تعریفات کو، ∇ کے زیر نوشت میں، بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔) ذره 1 کا حجم $d^3 r_1$ اور ذره 2 کا حجم $d^3 r_2$ میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا:

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

جہاں شماریاتی مفہوم معمول کے مطابق کارآمد ہوگا۔ ظاہر ہے کہ ψ کو درج ذیل کے تحت معمول پر لانا ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفیہ کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ:

$$(۵.۶) \quad \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$

حاصل ہوگا جہاں فنکشنی تفاعل موج (ψ) غیر تابع وقت مساوات شرودنگر:

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے جس میں E نظام کی کل توانائی ہے۔

سوال ۱.۵: عام طور پر باہم عمل مخفیہ کا انحصار صرف دو ذرات کے بیچ سمتیہ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات \mathbf{r}_1 اور \mathbf{r}_2 کی جگہ نئے متغیرات \mathbf{r} اور (مرکز کیت) $\mathbf{R} \equiv \frac{(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2}$ کے استعمال سے مساوات شرودنگر دو حصوں میں علیحدہ ہوگی۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \\ \nabla_1 &= \frac{\mu}{m_2} \nabla_R + \nabla_r, & \nabla_2 &= \frac{\mu}{m_1} \nabla_R - \nabla_r \end{aligned}$$

جہاں

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تخفیف شدہ کمیت ہے۔

ب. دکھائیں کہ (غیر تابع وقت) مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi$$

ج. متغیرات کو $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_R(\mathbf{R})\psi_r(\mathbf{r})$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_R ایک ذروی مساوات شرودنگر، جس میں کیت m کی بجائے کل کیت $(m_1 + m_2)$ ، مخفیہ صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R ہو، کو مطمئن کرتا ہے، جبکہ ψ_r ایک ذروی مساوات شرودنگر، جس میں کیت m کی بجائے تخفیف شدہ کیت، مخفیہ $V(\mathbf{r})$ اور توانائی E_r ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ کل توانائی ان کا مجموعہ: $E = E_R + E_r$ ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کیت ایک آزاد ذرہ کی مانند حرکت کرتا ہے اور (ذرہ 1 کے لحاظ سے ذرہ 2 کی) نسبتی حرکت۔ ایسی ہوگی جیسا مخفیہ V میں تخفیف شدہ کیت کا ایک ذرہ کرتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں بالکل یہی تحلیل ہوگی، جو دو جسمی مسئلہ کو معادل یک جسمی مسئلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں ہائیڈروجن کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم الیکٹران کی کمیت کی جگہ تخفیف شدہ کمیت استعمال کرتے ہیں (سوال ۵.۱)۔

ا. ہائیڈروجن کی بندشی توانائی (مساوات ۳.۷۷) جاننے کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے پیدا ہونے والا فرق (دو یا معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔

ب. ہائیڈروجن اور ڈیوٹیریم کے لیے سرخ بالمر لکیریوں ($n = 2 \rightarrow n = 3$) کے طول موج کے بیچ فاصلہ (مشرق) تلاش کریں۔

ج. پازٹرونیم^۲ کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران رکھنے سے پازٹرونیم پیدا ہوگا۔ ضد الیکٹران کی کمیت الیکٹران کی کمیت کے برابر جبکہ اس کا بار الیکٹران کے بار کے مخالف ہے۔

د. فرض کریں آپ **میون** ہائیڈروجن^۳ (جس میں الیکٹران کی جگہ ایک میون ہوگا) کی وجودیت کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ میون کا بار الیکٹران کے بار کے برابر ہے، تاہم اس کی کمیت الیکٹران سے 206.77 گنا زیادہ ہے۔ آپ ”ایمان α “ لکیر ($n = 1 \rightarrow n = 2$) کے لیے کس طول موج پر نظر رکھیں گے؟

سوال ۵.۳: کلورین کے دو ذراتی ہم جب Cl^{35} اور Cl^{37} پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCl کارلزشی طیف متغیرب متغیرب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا جن میں فاصلہ $\Delta\nu = 7.51 \times 10^{-4} \nu$ ہوگا جہاں ν حار جی نورب کا تعدد ہے۔ (اشارہ: اس کو ایک ہارمونی سرقتش تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ ہوگا، جہاں μ تخفیف شدہ کمیت۔ مساوات ۵.۸) ہے، جبکہ دونوں ہم جہاں k ایک جیسا تصور کریں۔

۵.۱.۱. بوسن اور فرمیان

فرض کریں ذرہ 1 (یک ذروی) حال $\psi_a(r)$ اور ذرہ 2 حال $\psi_b(r)$ میں پائے جاتے ہیں۔ (یاد رہے، میں یہاں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں۔) ایسی صورت میں $\psi(r_1, r_2)$ سادہ حاصل ضرب ہوگا۔^۴

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \quad (۵.۹)$$

ہم یہاں فرض کر رہے ہیں ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچانا جاسکتا ہے؛ ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ 1 حال ψ_a اور ذرہ 2 حال ψ_b میں ہے، بے معنی ہوگا؛ ہم صرف اتنا کہہ پاتے کہ ایک ذرہ حال ψ_a اور دوسرا ذرہ حال ψ_b میں پایا جاتا ہے، تاہم ہم نہیں جانتے کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ ایک بے

positronium^۲
muonic hydrogen^۳

در حقیقت، ضروری نہیں کہ ہر دو ذروی تقابل عمل موج دو ایک ذروی تقابلات موج کا حاصل ضرب ہو۔ ایسے حال جنہیں ہم **عالم** (entangled states) کہتے ہیں کو اس طرح دو حصوں میں علیحدہ نہیں کیا جاسکتا ہے۔ تاہم اگر ذرہ 1 حال a اور ذرہ 2 حال b میں ہوں، تب دو ذروی حال حاصل ضرب ہوگا۔ میں جانتا ہوں، آپ سوچ رہے ہیں: ”ذرہ 1 کیسے کسی حال میں اور ذرہ 2 کسی دوسرے حال میں نہیں ہوں گے؟“ اس کی کلاسیکی مثال ایک تاحکری تشاکل ہے (مساوات ۳.۱۷۸)؛ میں آپ کو آکیلے ذرہ 1 کا حال نہیں بتا سکتا ہوں، چونکہ یہ ذرہ 2 کے حال کے ساتھ ہمبستہ ہے۔ اگر 2 کی پیمائش کی جائے اور نتیجہ ہم میدان چکر ہو تب 1 ہم میدان چکر اور 2 مخالف میدان چکر ہوگا۔

دو متماثلہ اعتراض ہوگا: اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دے کر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات میں صورت حال بنیادی طور پر مختلف ہے: آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں۔ حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل متماثل ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء میں اتنی یکسانیت کبھی نہیں ہوتی۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے متاثر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ ”یہ“ الیکٹران اور ”وہ“ الیکٹران کہنا کوانٹم میکانیات میں بے معنی ہیں؛ ہم صرف ”ایک“ الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔

ایسے ذرات کی موجودگی کو، جو اصولاً غیر ممیز ہوتے ہیں، کوانٹم میکانیات خوش اسلوبی سے سمجھتی ہے: ہم ایسا غیر مشروط تفاعل موج تیار کرتے ہیں جو یہ بات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے۔ ایسا درج ذیل دو طریقوں سے کرنا ممکن ہے۔

$$(۵.۱۰) \quad \psi_{\pm}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے متماثل ذرات کا حاصل ہوگا: ^۵بوسن جن کے لئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور ^۶فرمیاں جن کے لئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوسن کی مثالیں نوریہ اور میوزون ہیں جبکہ فرمیاں کی مثالیں پروٹان اور الیکٹران ہیں۔ ایسا ہے کہ

$$(۵.۱۱) \quad \left. \begin{array}{l} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات۔ بوسن جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیاں ہوں گے۔} \end{array} \right\}$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق (جیسا کہ ہم دیکھیں گے، فرمیاں اور بوسن کے شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوتے ہیں) کو اضافی کوانٹم میکانیات میں ثابت کیا جاسکتا ہے؛ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔^۷

اس سے بالخصوص ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ دو متماثل فرمیاں (مثلاً دو الیکٹران) ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_{-}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_a(r_2) - \psi_a(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا پر کوئی تفاعل موج^۸ نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ ^۹پالے اصول مناعت کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہو، بلکہ یہ دو ذروی تفاعلات موج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے، جس کا اطلاق تمام متماثل فرمیاں پر ہوگا۔

bosons^۵
fermions^۶

^۷اضافہ کے اثرات۔ یہاں پائے جہانا عجیب سی بات ہے۔

^۸یاد رہے کہ میں چکر کو نظریہ انداز کر رہا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے الجھن ہو (کیوں کہ بغیر چکر فرمیاں خود ایک تضاد ہے)، مندرجہ کریں تمام الیکٹران کے چکر ایک جیسے ہیں۔ میں جہلہ چکر کو بھی شامل کروں گا۔

Pauli exclusion principle^۹

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے مندرجہ ذیل کی بات کی کہ ایک ذرہ حال ψ_a اور دوسرا حال ψ_b میں پایا جاتا ہے، تاہم اس مسئلہ کو زیادہ عمومی (اور زیادہ نفیس) طریقے سے وضع کیا جاسکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ P ، متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے۔

$$Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1) \quad (5.12)$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہوگا لہذا (تصدیق کریں کہ) P کی امتیازی امتداد ± 1 ہوں گی۔ اب اگر یہ دونوں ذرات متماثل ہوں، تب لازماً ہیملٹنی ان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتے گا: $m_1 = m_2$ اور $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ ۔ اس طرح P اور H ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہوں گے:

$$[P, H] = 0 \quad (5.13)$$

لہذا ہم دونوں کے بیک وقت امتیازی حالات کے تفاسل کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ، مساوات شرودنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشکیلی (امتیازی قدر $+1$) یا غیر تشکیلی (امتیازی قدر -1) ہوں۔

$$\psi(r_1, r_2) = \pm \psi(r_2, r_1) \quad (5.14)$$

مزید، ایک نظام جو اس طرح کے حال سے آغاز کرے، اسی حال میں برقرار رہتا ہے۔ متماثل ذرات کا نیافت عمدہ (جس کو میں ضرورتاً **تشاکلیت** کہتا ہوں) کے تحت تفاسل عمل موج کو مساوات ۵.۱۴ پر صرف پورا اترنے کی اجازت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو مطمئن کرتا ہو؛ یوں سن کے لئے مثبت علامات اور ضربیہ علامت ہوگی۔^{۱۲} یہ ایک عمومی فترہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت مساوات ۵.۱۰ ہے۔

مثال ۵.۱: مندرجہ کریں ایک لامتناہی چوکور کنویں (حصہ ۲.۲) میں کمیت m کے باہم غیر متعامل دو ذرات (جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہوں) پائے جاتے ہیں؛ آپکو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً ایسا کیسے کیا جاسکتا ہے ایک ذروی حالات درج ذیل ہوں گے (جہاں اپنی سہولت کے لئے ہم $K \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ لیتے ہیں)۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

exchange operator^{۱۳}
symmetrization requirement^{۱۴}

^{۱۲} بعض اوقات اشارہ دیا جاتا ہے کہ P اور H کے باہمی مطابقتی ہونا ضرورت تشاکلیت (مساوات ۵.۱۴) کی پشت پر ہے۔ یہ بالکل غلط ہے؛ ہم دو متماثل میسر ذرات (مثلاً ایک الیکٹران اور ایک ضد الیکٹران) کا ایسا نظام تصور کر سکتے ہیں جس کا ہیملٹنی تشکیلی ہو، جس کے باوجود تفاسل عمل موج کا تشکیلی (یا غیر تشکیلی) ہونے کی ضرورت نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس متماثل ذرات کو لازماً تشکیلی یا غیر تشکیلی حالات کا مکمل ہونا ہوگا، اور یہ بالکل نیا بنیادی فترہ ہے؛ جو مساوات شرودنگر اور شراریاتی مفہوم چٹنی اہمیت کا حاصل ہے۔ اب، ایسا ضروری نہیں تھا کہ متماثل ذرات پائے جاتے؛ ایسا ہو سکتا تھا کہ ہر دو ذروں کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہوتا۔ کو انٹیمیکانیت متماثل ذرات کے امکان کی اجازت دیتی ہے، اور فترت نے اس موقع کو ہاتھ سے جانے نہیں دیا۔ (مجھے کوئی شکوہ نہیں ہے چونکہ اس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں!)

باب ۵: متماثل ذرات

متماثل ممیز ذرات کی صورت میں، جب ذرہ 1 حال n_1 میں اور ذرہ 2 حال n_2 میں ہو، مرکب تفاعل موج سادہ حاصل ضرب:

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2)K.$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر زمینی حال:

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K$$

ہوگا، اور پہلا ہیجان حال دو چند انخطاطی:

$$\psi_{12} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$

$$\psi_{21} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K$$

ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔ دونوں ذرات متماثل بوسن ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا، تاہم پہلا ہیجان حال:

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

(جس کی توانائی اب بھی $5K$ ہوگی) غیر انخطاطی ہوگا۔ اور اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں، تب $2K$ توانائی کا کوئی بھی حال نہیں ہوگا؛ زمینی حال جس کی توانائی $5K$ ہوگی درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

□

سوال ۵.۴:

ا. اگر ψ_a اور ψ_b عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں، تب مساوات ۵.۱۰ میں مستقل A کیا ہوگا؟

ب. اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو (اور یہ معمول شدہ ہوں)، تب A کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف بوسن کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

ا. لامتناہی چوکور کنویں میں باہم غیر متعامل دو متماثل ذرات کا ہیملٹنی لکھیں۔ تصدیق کریں کہ مثال ۵.۱ میں دیے گئے فرمیان کے زمینی حال H کا مناسب امتیازی متدر والا امتیازی تفاعل ہوگا۔

ب. مثال ۵.۱ میں دیے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو تفاعل موج اور توانائیاں، تینوں صورتوں (متماثل ممیز، متماثل بوسن، متماثل فرمیان) میں ہر ایک کے لئے حاصل کریں۔

۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشاکلیت کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہے، اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہیں۔ اگر دونوں ذرات متبادل ممیز ہوں، اور ذرہ 1 حال ψ_a میں ہو تب ان کا مجموعی تفعل موج

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \quad (۵.۱۵)$$

ہوگا: اگر یہ متبادل بوسن ہوں تب ان کا مرکب تفعل موج (معمول زنی کے لئے سوال ۵.۴ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \quad (۵.۱۶)$$

اور اگر یہ متبادل فرمیون ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \quad (۵.۱۷)$$

آئیں ان ذرات کے بیچ فاصلہ علیحدگی کے سرچ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle \quad (۵.۱۸)$$

صورتے اول: قابل ممیز ذرات۔ مساوات ۵.۱۵ میں دیے گئے تفعل موج کے لئے

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

(یک ذروی حال ψ_a میں x^2 کی توقعاتی قیمت)،

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

ہوں گی۔ یوں اس صورت درج ذیل ہوگا۔

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \quad (۵.۱۹)$$

(انتفاقی جواب ذرہ 1 حال ψ_b میں اور ذرہ 2 حال ψ_a میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا ہے۔)

صورتے دوم: متماثل ذرات۔ مساوات ۵.۱۶ اور مساوات ۵.۱۷ کے قسعات موج کے لئے

$$\begin{aligned}\langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)\end{aligned}$$

اور بالکل اسی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

(ظاہر ہے $\langle x_2^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle$ ہوگا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے۔) تاہم

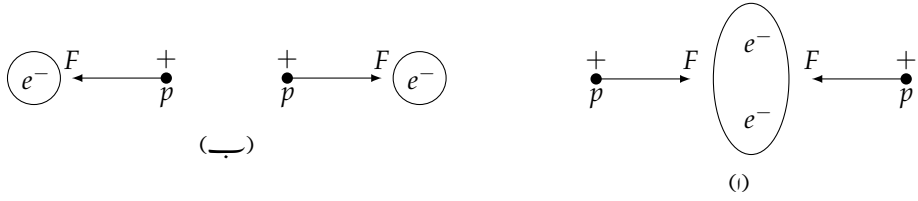
$$\begin{aligned}\langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2\end{aligned}$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۵.۲۰) \quad \langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۲۱) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$



شکل ۵.۱: شریک گرہنی بندھ کی نقشہ کشی: (I) تشاکلی تفکیک قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکلی تفکیک قوت دفع پیدا کرتی ہے۔

ساوات ۵.۱۹ اور مساوات ۵.۲۱ کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ منرق صرف آخری حبزومیں پایا جاتا ہے۔

$$(۵.۲۲) \quad \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm}}_{\text{متشکل}} = \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_d}_{\text{متابل میز}} \underbrace{\mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2}_{\text{منرق}}$$

متابل ممیز ذرات کے لحاظ سے متشکل بوسن (بالائی علامتیں) ایک دوسرے کے نسبتاً متریب جبکہ متشکل منرمیان (زیریں علامتیں) ایک دوسرے سے نسبتاً دور ہوں گے (جہاں ذرات ایک جیسے دو حالات میں ہوں)۔ دھیان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعلات موج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں، $\langle x \rangle_{ab}$ صفر ہوگا (غیر صفر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ صفر ہو تب مساوات ۵.۲۰ میں عمل کی قیمت صفر ہوگی)۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_a سے ظاہر کیا گیا ہو، جبکہ صوابی (میرے آبائی ضلع) میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_b سے ظاہر کیا گیا ہو، تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی منرق نہیں پڑے گا۔ یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعلات موج غیر منطبق ہوں، ان کو آپ متابل ممیز تصور کرنے کا ڈھونگ رہا سکتے ہیں۔ (یقیناً اسی کی بنا پر ماہر طبیعیات اور کیمیا دان آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً کائنات میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ، ان کے تفاعلات موج کی عدم تشاکلیت کے ذریعہ، جڑا ہے اور اگر یہ واقعی اہمیت کا حامل ہوتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے!)

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتی ہے جب انکے تفاعلات موج حبزوی منطبق ہوں۔ ایسی صورت میں نظام کارویہ کچھ یوں ہوگا جیسے متشکل بوسن کے ”چ“ قوت کشش ”پائی جاتی ہو، جو انہیں متریب کھینچتی ہے، اور متشکل منرمیان کے ”چ“ قوت دفع ”پائی جاتی ہو، جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتی ہے (یاد رہے کہ ہم فی الحال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں)۔ ہم اس کو قوت مبادلہ^۳ کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک قوت نہیں ہے؛ کوئی بھی چیز ان ذرات کو دھکیل نہیں رہی ہے، یہ صرف ضرورت تشاکلیت کا ہندسی نتیجہ ہے۔ ساتھ ہی یہ کوانٹم میکانی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکانیات میں کوئی مشاغل نہیں پایا جاتا۔ بہر حال اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثلاً، ہائیڈروجن سالمہ (H_2) پر غور کریں۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، جوہری زمینی حال (ساوات ۴.۸۰) جس کا مرکز مرکزہ 1 پر واقع ہے، میں ایک الیکٹران اور جوہری زمینی حال جس کا مرکز مرکزہ 2 پر واقع

^۳exchange force

ہے، میں ایک الیکٹران پر مبنی حال مشتعل ہوگا۔ اگر الیکٹران بوسن ہوتے تب ضرورت تشاکلیت (یا "قوت مبادلہ"، اگر آپ اسے پسند کرتے ہیں) کو شش کرتی ہے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کرے (شکل ۵.۱-۱)، نتیجتاً منفی بار کا انبار دونوں پروٹان کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا ہے، جو شریکے گریخت بندھ^{۱۴} کا سبب بنتا ہے۔^{۱۵} بد قسمتی سے الیکٹران در حقیقت مندرمیان ہیں نہ کہ بوسن جس کی بنا پر منفی بار اطراف پر انبار ہوگا (شکل ۵.۱-ب) جو سالہ کو ٹکڑے ٹکڑے کر دے گا!

ذرات کی گاہ! ہم اب تک چکر کو نظر انداز کرتے رہے ہیں۔ الیکٹران کا مقامی تعامل موج اور چکر دار (جو الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرتا ہے) مل کر اس کا (درج ذیل) مکمل حال دیں گے۔^{۱۶}

$$\psi(r)\chi(s) \quad (5.23)$$

دو الیکٹران حال مرتب کرتے ہوئے ہمیں مبادلہ کے لحاظ سے صرف فضائی جزو کو عدم تشاکلی نہیں بلکہ مکمل حال کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چکری حالات (مساوات ۴.۱۷ اور مساوات ۴.۱۷۸) پر نظر ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک تاملاپ خلاف تشاکلی ہے (ابنذا اس کو تشاکل فضائی تعامل کے ساتھ جوڑنا ہوگا) جبکہ تینوں سے تاحالات تشاکلی ہیں (ابنذا انہیں خلاف تشاکل فضائی تعامل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا)۔ ظاہر ہے کہ یوں یک تاحال بندھ پیدا کرے گا جبکہ سے تاحال خلاف بندھ ہوگا۔ یقیناً یکساں دان ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گریخت بندھ کے لئے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران یک تاحال کے مکین ہوں اور ان کا کل چکر صفر ہو۔^{۱۷}

سوال ۵.۲: لامتناہی چوکر کنویں میں دو غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کیت m ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال ψ_n (مساوات ۴.۲۸) اور دوسرا حال ψ_l ($l \neq n$) میں ہے۔ $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب اس صورت لگائیں جب (الف) ذرات غیر متقابل ممیز ہوں، (ب) ذرات متقابل بوسن ہوں اور (ج) ذرات متقابل مندرمیان ہوں۔

سوال ۵.۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال ψ_a ، دوسرا حال ψ_b ، اور تیسرا حال ψ_c میں پایا جاتا ہے۔ حالات ψ_a ، ψ_b ، اور ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے (مساوات ۵.۱۶، ۵.۱۷ اور ۵.۱۸ کی طرز پر) تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) متقابل ممیز ذرات، (ب) متقابل بوسن اور (ج) متقابل مندرمیان کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہونا ہوگا، جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکلی تعاملات موج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ ^{۱۸}مقطع سلیر تیار کریں جس کی پہلی صف $\psi_a(x_1)$ ، $\psi_b(x_1)$

covalent bond^{۱۹}

^{۱۵}امسراگزہ کے بیچ شراکتی الیکٹران جمع ہو کر جوہروں کو شریب کھینچ کر شریک گریخت بندھ پیدا کرتے ہیں۔ اس کے لئے دو عدد الیکٹران لازمی نہیں۔ ہم حصہ ۷ میں صرف ایک الیکٹران پر مبنی شریک گریخت بندھ دیکھیں گے۔

^{۱۶}چکر اور مقام کے بیچ عدم ارتباط کی صورت میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ چکر اور فضائی محدود میں حال کو علیحدہ کرنا ممکن ہے۔ اس سے مساویہ ہے کہ ہم میدان چکر حاصل کرنے کا احتمال، ذرے کے مقام پر منحصر نہیں ہوگا۔ ارتباط کی موجودگی میں عمومی حال، سوال ۵.۵ کی طرز پر، خطی ملاپ $\psi_+(r)\chi_+ + \psi_-(r)\chi_-$ کا روپ اختیار کرے گا۔

^{۱۷}اے اعلیٰ میں ہم عموماً کہتے ہیں کہ الیکٹران ایک دوسرے کے مختلف صنف بندھ ہیں (ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان)۔ یہ ضرورت سے زیادہ سادہ صورت ہوگی چونکہ یہی کچھ $m = 0$ سے تاحال کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ درست فقرہ یہ ہوگا: "دو ایک تاشکلیل میں ہیں۔"

Slater determinant^{۱۸}

، $\psi_c(x_1)$ ، وغیرہ ہوگی، اس کی دوسری صنف $\psi_a(x_2)$ ، $\psi_b(x_2)$ ، $\psi_c(x_2)$ ، وغیرہ ہوگی اور اسی طرح اس کے باقی صنف ہوں گے (یہ طریقہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہے)۔

۵.۲ جوہر

ایک معادل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو، ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کو (کمیت m اور بار e کے) Z الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔ اس نظام کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا۔^{۱۹}

$$(۵.۲۴) \quad H = \sum_{j=1}^Z \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_j^2 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Ze^2}{r_j} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}$$

قوسین میں بند جزو، مرکزہ کے برقی میدان میں j ویں الیکٹران کی حرکت کی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے؛ دوسرا مجموعہ (جو مساوی $k = j$ ، تمام j اور k پر لیا گیا ہے) الیکٹرانوں کی باہمی قوت دفع سے وابستہ مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے (جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دوبار گنا گیا ہے)۔ ہمیں تقاضا عمل موج $\psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$ کیلئے درج ذیل مساوات ضرور ڈنگر:

$$(۵.۲۵) \quad H\psi = E\psi$$

حل کرنی ہوگی۔ البتہ الیکٹران متناثر فرم میان ہیں، لہذا، تمام حل متبادل قبول نہیں ہوں گے: صرف وہ حل متبادل قبول ہوں گے جن میں مکمل حال (مقام اور چکر):

$$(۵.۲۶) \quad \psi(r_1, r_2, \dots, r_Z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_Z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکلی ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے ہیں۔

بد قسمتی سے مساوات ضرور ڈنگر کو مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیمیلٹنی کے لئے، مساوی سادہ ترین صورت $Z = 1$ (ہائیڈروجن)، ٹھیک حل نہیں کیا جاسکتا ہے (کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے)۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے ابواب میں غور کیا جائے گا؛ ابھی میں الیکٹران کی قوت دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کئی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ ۵.۲.۱ میں ہم ہیلیم کے زمینی حال اور ہیجان حالات پر غور کریں گے جبکہ حصہ ۵.۲.۲ میں ہم زیادہ بڑے جوہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

^{۱۹} مرکزہ کو ساکن تصور کیا گیا ہے۔ مرکزہ کی حرکت کو تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) کے ذریعہ شامل کرنا صرف دو جسی نظام کے لئے ممکن ہے؛ خوش قسمتی سے مرکزہ کی کمیت الیکٹران کی کمیت سے اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ درکار درستگی، ہائیڈروجن کے لئے بھی، متبادل نظر انداز ہوتی ہے (سوال ۵.۲-۵.۱ دیکھیں)، اور زیادہ بھاری جوہروں کے لئے یہ مزید کم ہوگی۔ مرکزہ کی مستحالی جسامت، اضافیتی درستگیاں اور الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی باہم عمل کے زیادہ دلچسپ اثرات پائے جاتے ہیں۔ ان پر آنے والے ابواب میں غور کیا جائے گا، تاہم یہ تمام ”خالص کولب“ جوہر، جسے مساوات ۵.۲۴ بیان کرتی ہے، میں انتہائی چھوٹی درستگیاں ہیں۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیمیلٹنی کے لیے آپ مساوات شرودنگر (مساوات ۵.۲۵) کا حل $(\psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_Z))$ حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ اسے ایک ایسا مکمل تشاکلی تفاعل اور ایک مکمل خلاف تشاکلی تفاعل کس طرح بنائیں گے جو مساوات شرودنگر کو اسی توانائی کیے مطمئن کرتا ہو۔

۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے سادہ جوہر ہیلیم ($Z = 2$) ہے۔ اس کا ہیمیلٹنی

(۵.۲۷)

$$H = \left\{ -\frac{h^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} \right\} + \left\{ -\frac{h^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} \right\} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|}$$

(ہر $2e$ مرکزہ کے) دو ہائیڈروجنی ہیمیلٹنی، ایک الیکٹران 1 اور ایک الیکٹران 2، کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دفع پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر متاثر علیحدگی ہوگی اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس (مساوات ۴.۷۲) اور چارگت بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) [دوبارہ سمجھنے کے لیے] کی صورت میں سوال ۴.۱۶ پر دوبارہ نظر ڈالیں] کے ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب:

(۵.۲۸)

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_{nlm}(r_1) \psi_{n'l'm'}(r_2)$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی جہاں $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$ ہوگا۔

(۵.۲۹)

$$E = 4(E_n + E_{n'})$$

بالخصوص زمینی حال

(۵.۳۰)

$$\psi_0(r_1, r_2) = \psi_{100}(r_1) \psi_{100}(r_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

ہوگا (مساوات ۴.۸۰ دیکھیں) اور اس کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

(۵.۳۱)

$$E_0 = 8(-13.6 \text{ eV}) = -109 \text{ eV}$$

چونکہ ψ_0 تشاکلی تفاعل ہے لہذا چپکری حال کو خلاف تشاکلی ہونا ہوگا اور یوں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاشکیل میں ہوگا، جس میں چپکری حال کے ”مخالف صفت بند“ ہوں گے۔ یقیناً حقیقت میں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاشکی ہے، تاہم اس کی تجرباتی حاصل توانائی -78.975 eV ہے جو مساوات ۵.۳۱ سے کافی مختلف ہے۔ یہ زیادہ حیرت کی بات نہیں ہے: ہم نے الیکٹران کی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی

مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار (مساوات ۵.۲۷ دیکھیں) ہے جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی کم ہو کر 109 eV کی بجائے 79 eV ہو جائے گی (سوال ۵.۱۱ دیکھیں)۔

ہیلیم کے ہیجان حالات:

$$\psi_{nlm}\psi_{100} \quad (۵.۳۲)$$

ہائیڈروجنی زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ہیجان حال میں دوسرے الیکٹران، پر مشتمل ہوگا۔ [دونوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں ڈالنے سے ایک الیکٹران فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے، جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر استمراریہ ($E > 0$) میں دھکیلتا ہے، اور یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہیلیم باردار یہ (He^+) حاصل ہوگا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں؛ سوال ۵.۹ دیکھیں] ہم ہمیشہ کی طرح تشاکلی اور خلاف تشاکلی ملاپ تیار کر سکتے ہیں (مساوات ۵.۱۰)؛ اول الذکر خلاف تشاکلی چکر تشکیل (یک تا) کے ساتھ جائے گا، جنہیں نزد ہیلیم^{۲۰} کہتے ہیں، جبکہ موخر الذکر کو تشاکلی چکر تشکیل (سہ تا) درکار ہوگی اور انہیں ہیلیم پر سٹے^{۲۱} کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً نزد ہیلیم ہوگا؛ جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ ۵.۱.۲ میں دریافت کیا، تشاکلی فصائی حال الیکٹرانوں کو متعرب لاتا ہے، جس کی بنا پر ہم توقع کرتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی باہم متعامل توانائی زیادہ ہوگی، اور یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ ہیلیم پرست کے لحاظ سے نزد ہیلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے (شکل ۵.۲ دیکھیں)۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہیلیم جوہر کے دونوں الیکٹران کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں؛ خارجی الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی؟

ب. ہیلیم باردار یہ He^+ کے طیف پر (مستداری) تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہیلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں (کیفی) تجزیہ کریں۔ (ا) اگر الیکٹران متقابل بوسن ہوتے، (ب) اگر الیکٹران متقابل ممیز ذرات ہوتے (لیکن ان کی کمیت اور بار ایک جیسے ہوں)۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے لہذا چکر کی تھیلاٹ یک تا اور سہ تا ہوں گے۔

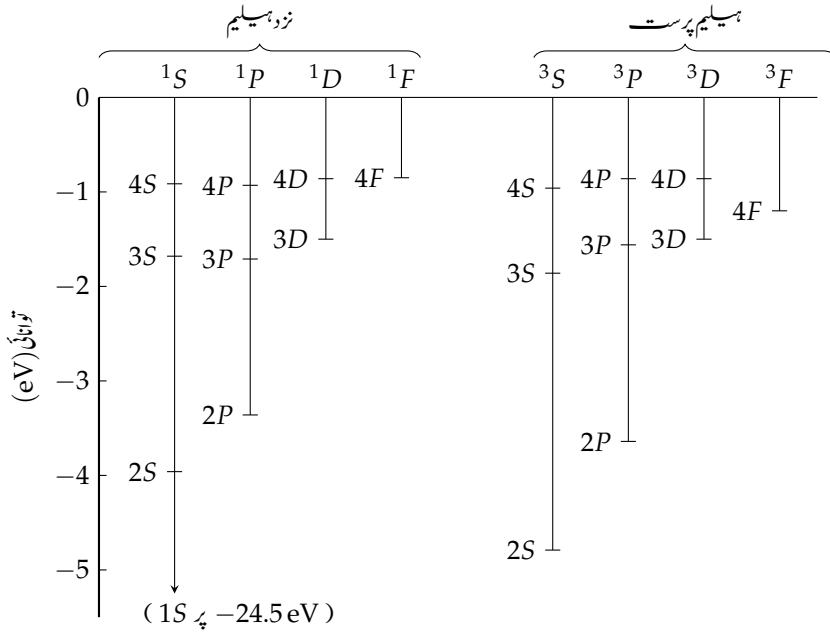
سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات ۵.۳۰ میں دیے گئے حال ψ_0 کیلئے $\langle (1/|r_1 - r_2|) \rangle$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کرودی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھیں تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}.$$

ہو۔ پہلے r_2 کا مکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے مکمل آسان ہے، بس مثبت جذر لینا یاد رکھیں۔ آپ کو r_2 مکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا؛ پہلا 0 سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$

parahelium^{۲۰}
orthohelium^{۲۱}



شکل ۵.۲: ہیلیم کی توانائیوں کے سطح (علاقیت کی وضاحت حصہ ۵.۲.۲ کی گئی ہے)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی توانائیاں مطابقتی ہیلیم پرست سے زیادہ ہیں۔ انتہائی پیچیدہ باردارہ ہیلیم کے زمینی حال $(\text{He}^+ : 4 \times (-13.6)\text{eV} = -54.4\text{eV})$ کے لحاظ سے ہیں؛ کسی بھی حال کی کل توانائی جاننے کی خاطر 54.4eV منفی کریں۔

ب۔ جزو-۱ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہیلیم کے زمینی حال میں الیکٹران کی باہمی متعادل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں اور اس کو E_0 (مساوات ۵.۳۱) کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمینہ حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تقاضا عمل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں، لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔)

۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹران کی تفصیل تقریباً اسی طرح جوڑ کر حاصل کیے جاتے ہیں۔ پہلی تخمینہ میں (انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے) ہار Z_e کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذروی ہائیڈروجنی حالات (n, l, m) ، جنہیں مدارچے^{۲۲} کہتے ہیں، کے انفرادی الیکٹران ممکن ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوسن (یا تابل ممیز ذرات) ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ میں گر جاتے اور کیمیا اتحاد لچپ نہ ہوتا۔ حقیقت میں الیکٹران متماثل فرمیان ہیں، جن پر پالی اصول منعیت لاگو ہوتا ہے، لہذا کسی ایک مدارچہ کے صرف دو الیکٹران ممکن ہو سکتے ہیں (ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان؛ بلکہ یہ کہنا زیادہ بہتر ہوگا، کہ یک تافکلیل حال میں)۔ کسی بھی n کی قیمت کے لئے n^2 ہائیڈروجنی تقاضا حالات موج پائے جاتے ہیں (جن میں سے ہر ایک کی توانائی E_n ہوگی)، یوں $n = 1$ خول^{۲۳} میں دو الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی، $n = 2$ خول میں آٹھ، $n = 3$ میں اٹھارہ، اور n ویں خول میں $2n^2$ الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی۔ کیفی طور پر بات کرتے ہوئے دوری جدول^{۲۴} کے افقی صف، ہر ایک انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے (اگرچہ یہ پوری کہانی نہیں ہے؛ اگر ایسا ہوتا، انکی لمبائیاں 2، 8، 18، 32، 50، وغیرہ ہوتیں تاکہ 2، 8، 18، 8، 18، وغیرہ؛ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹران کا باہم دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے)۔

ہیلیم میں، $n = 1$ خول بھرا ہوگا، لہذا اگلے جوہر لتھیم ($Z = 3$) کو $n = 2$ خول میں ایک الیکٹران رکھنا ہوگا۔ اب $n = 2$ کے لئے $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے؛ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ (چونکہ جوہر توانائی n پر منحصر ہوتی ہے تاکہ l پر) لہذا الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک جیسی ہوگی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا پر الیکٹران کی توانائی دفع l کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیار حرکت الیکٹران کو بیرونی رخ دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا زیادہ مرکزہ سے دور ہوگا اتنا مرکزہ، اندرونی الیکٹرانوں کے زیادہ پھلے^{۲۵} پر وہ^{۲۵} ہو کر اوچھل ہوگا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا بار Z_e ”نظر“ آتا ہے جب کہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے e سے کچھ زیادہ بار نظر آتا ہے۔) یوں کسی بھی ایک خول میں کم سے کم توانائی کا حال (یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران) $l = 0$ ہوگا، اور بڑھتے l کے ساتھ توانائی بڑھے گی۔ اس طرح لتھیم میں تیسرا الیکٹران مدارچہ $(2, 0, 0)$ کا مکین ہوگا۔ اگلا جوہر (بیریلیم جس کا $Z = 4$ ہے) بھی اسی حال میں ہوگا (پس اس کا چکر ”الٹ رخ“ ہوگا) لیکن بوران ($Z = 5$)

orbitals^{۲۲}
shell^{۲۲}
periodic table^{۲۲}
screened^{۲۵}

کو $l = 1$ استعمال کرنا ہوگا۔

اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون ($Z = 10$) کو پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ خول مکمل بھرا ہوگا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ خول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ اس صف کے آغاز میں دو جوہر (سوڈیم اور گنیشیم) کا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد (سلور^{۲۶} سے آرگن تک) چھ ایسے جوہر ہیں جن کا $l = 1$ ہوگا۔ آرگن کے بعد ہم ”توقع“ کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہوگا؛ البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران کا مرکزہ کو پس پردہ کرنے کا اثر اشد اور پکڑتا ہے کہ اگلا خول بھی اس کے نظر ہو جاتا ہے (یعنی یہ خول بھی اوجھل ہو جاتا ہے) لہذا اپوناشیم ($Z = 19$) اور کلشیم ($Z = 20$)، $n = 3$ ، $l = 2$ کی بجائے $n = 4$ ، $l = 0$ منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دوبارہ نیچے اتر کر $n = 3$ اور $l = 2$ (اسکینڈیم تا جیست)، اور اس کے بعد $n = 4$ ، $l = 1$ (گیلیم تا کرپٹان) اٹھاتے ہیں، اور یہاں پہنچ کر ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف ($n = 5$) میں چھلانگ لگا کر بعد میں $n = 4$ خول کے $l = 2$ اور $l = 3$ بھرتے ہیں۔

یہاں جوہری حالات کے تسمیہ جس کو تمام کیمیادان اور ماہر طبیعیات استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہوگا۔ اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے طیف پیمائی کاروں کو معلوم ہوگی کہ $l = 0$ کو کیوں s کہتے ہیں، $l = 1$ کو p ، $l = 2$ کو d ، اور $l = 3$ کو f کہتے ہیں؛ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راہ پر آ گئے اور انہوں نے لاطینی حروف تہجی کے تحت (g, h, i, j اور k, l ، وغیرہ) نام دیے۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو nl کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں n (عدد) حال کو اور l (حرف) مدارچی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے؛ کو انم عدد m کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نسائیں حال کے ممین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تفصیل

$$(5s)^2 (2s)^2 (2p)^2 \quad (۵.۳۳)$$

کہتی ہے کہ مدار $(1, 0, 0)$ میں دو الیکٹران، مدار $(2, 0, 0)$ میں دو الیکٹران جبکہ مدار $(2, 1, 1)$ ، $(2, 1, 0)$ اور $(2, 1, -1)$ کے کسی ملاپ میں دو الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حل ہے۔

اس مثال میں دو الیکٹران ایسے ہیں جن کا مدارچی زاویائی معیار حرکت کو انشائی عدد ایک (1) ہے، لہذا کل مدارچی زاویائی معیار حرکت کو انشائی عدد L (چھوٹے l کی بجائے بڑا L جو انحصار دی ذرہ کی نہیں بلکہ کل کو ظاہر کرتا ہے) 2، 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ساتھ ہی، $(1s)$ کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یک تاحال بندھن میں ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا؛ یہی کچھ $(2s)$ کے دو الیکٹران کے لئے بھی ہوگا، لیکن $(2p)$ کے دو الیکٹران یا تو ایک تا نظام اور یا سہ تا نظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کو انشائی عدد S (کل کو ظاہر کرنے کے لئے یہاں بھی بڑا حرف استعمال ہوگا) 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ میزبان کل (مدارچی جمع چکر) J کی قیمت 3، 2، 1 یا 0 ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو قواعد ہنڈ^{۲۸} (سوال ۵.۱۳ دیکھیں) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل علامتی

aluminium^{۲۹}

۲۹ خول $n = 1$ کا نام K ، $n = 2$ کا نام L ، $n = 3$ کا نام M ، وغیرہ رکھے گئے۔ خولوں کے نام M سے شروع ہو کر لاطینی حروف تہجی کے ترتیب سے ہیں۔
Hund's Rules^{۲۸}

روپ میں لکھا جاسکتا ہے

(۵.۳۴)

$$L_J^{2S+1}$$

(جہاں S اور J اعداد جبکہ L (جو کل کوٹا ہر کرتا ہے) بڑا حرف ہوگا۔ کاربن کا زمینی حال 3P_0 ہے؛ اس کا کل چکر 1 ہے (جس کی بنا پر 3 لکھا گیا ہے)، کل مداریتی زاویائی معیار حرکت 1 ہے (لہذا P لکھا گیا ہے) اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے (لہذا 0 لکھا گیا ہے)۔ جدول ۱.۵ میں دوری جدول کے ابتدائی چار صف کے لئے انفرادی تھیلیات اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات ۵.۳۴ کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔^{۲۹}

سوال ۵.۱۲:

ا. دوری جدول کے ابتدائی دو صف (یون تک) کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں الیکٹران تھیلیات پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۱.۵ کے ساتھ کریں۔

ب. ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائسیٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳:

ا. ہض کا پہلا قاعدہ^{۳۰} کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسی ہونے کی صورت میں وہ حال جس کا کل چکر S زیادہ سے زیادہ ہو، کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ ہیلیم کے بچبان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔

ب. ہض کا دوسرا قاعدہ^{۳۱} کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو وہ حال جس کا زیادہ سے زیادہ کل مداریتی زاویائی معیار حرکت L ہو، کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ کاربن کے لئے $L = 2$ کیوں نہیں ہے؟ اشارہ یاد رہے کہ ”سیڑھی کا بالائی سر“ ($M_L = L$) تشاکلی ہے۔

ج. ہض کا تیسرا قاعدہ^{۳۲} کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول (n, l) نصف سے زیادہ بھرا نا ہو، تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L - S|$ ہوگا؛ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L + S$ کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۱۲۔ ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کریں۔

د. قواعد بن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ خلاف تشاکل مقام حال (اور خلاف تشاکل مقام حال کے ساتھ تشاکلی چکری حال) استعمال ہوگا، سوال ۵.۱۲۔ ب میں کاربن اور نائسیٹروجن میں درپیش مشکلات سے چھکارا حاصل کریں۔ اشارہ: کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر ”سیڑھی کے بالائی سر“ کو دیکھیں۔

سوال ۵.۱۴: (دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر 66) ڈسپر وزیم کا زمینی حال 5I_8 ہے۔ اس کے کل چکر، کل مدارچے، اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کے کوانٹائی اعداد کیا ہوں گے؟ ڈسپر وزیم کے الیکٹران تشکیل کا حنا کہ تجویز کریں۔

^{۲۹} کرپٹان، عنصر 36 کے بعد، صورت حال زیادہ پیچیدہ ہو جاتی ہے (حالات کے ترتیب میں مہین ساخت زیادہ بڑا کردار ادا کرنے لگتا ہے) لہذا یہ صف پر جگہ کی نہیں تھی جس کی وجہ سے جدول کو یہاں اختتام پذیر کیا گیا۔

^{۳۰} Hund's first rule

^{۳۱} Hund's second rule

^{۳۲} Hund's third rule

جدول ۱.۵: دوری جدول کے اولین چار قطاروں کے الیکٹران تشکیلات

تفصیل	عنصر	Z
$^2S_{1/2}$ (1s)	H	1
1S_0 (1s) ²	He	2
$^2S_{1/2}$ (He)(2s)	Li	3
1S_0 (He)(2s) ²	Be	4
$^2P_{1/2}$ (He)(2s) ² (2p)	B	5
3P_0 (He)(2s) ² (2p) ²	C	6
$^4S_{3/2}$ (He)(2s) ² (2p) ³	N	7
3P_2 (He)(2s) ² (2p) ⁴	O	8
$^2P_{3/2}$ (He)(2s) ² (2p) ⁵	F	9
1S_0 (He)(2s) ² (2p) ⁶	Ne	10
$^2S_{1/2}$ (Ne)(3s)	Na	11
1S_0 (Ne)(3s) ²	Mg	12
$^2P_{1/2}$ (Ne)(3s) ² (3p)	Al	13
3P_0 (Ne)(3s) ² (3p) ²	Si	14
$^4S_{3/2}$ (Ne)(3s) ² (3p) ³	P	15
3P_2 (Ne)(3s) ² (3p) ⁴	S	16
$^2P_{3/2}$ (Ne)(3s) ² (3p) ⁵	Cl	17
1S_0 (Ne)(3s) ² (3p) ⁶	Ar	18
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)	K	19
1S_0 (Ar)(4s) ²	Ca	20
$^2D_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d)	Sc	21
3F_2 (Ar)(4s) ² (3d) ²	Ti	22
$^4F_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ³	V	23
7S_3 (Ar)(4s)(3d) ⁵	Cr	24
$^6S_{5/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ⁵	Mn	25
5D_4 (Ar)(4s) ² (3d) ⁶	Fe	26
$^4F_{9/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ⁷	Co	27
3F_4 (Ar)(4s) ² (3d) ⁸	Ni	28
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)(3d) ¹⁰	Cu	29
1S_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰	Zn	30
$^2P_{1/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p)	Ga	31
3P_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ²	Ge	32
$^4S_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ³	As	33
3P_2 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁴	Se	34
$^2P_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁵	Br	35
1S_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁶	Kr	36

۵.۳. ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گزشتہ ۳۳ الیکٹران میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص ”موروثی“ مرکزہ کے کولمب میدان سے آزاد، تمام قتلیمی حبال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم دو انتہائی سادہ نمونوں پر غور کریں گے: پہلا نمونہ سمرقند کا الیکٹران گیس نظر ہے جس میں (سرحد کے علاوہ) باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور ان الیکٹران کو (لامستہائی) چوکور کنویں کے تین ابعادی مثال کی طرح ڈبلے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے؛ اور دو سمرقند نمونہ نظریہ بلون ہے جو الیکٹران کے باہمی دفع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کی قوت کشش کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے۔ یہ نمونہ ٹھوس اجسام کی کوانٹائی نظریہ کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں، لیکن اس کے باوجود یہ ”جمود“ کے حصول میں پالی حصول مناعت کے گہرے کردار پر اور موصل، غیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتے ہیں۔

۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس

فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اضلاع l_x ، l_y اور l_z ہیں اور اس جسم کے اندر الیکٹران پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہوتی، ماسوائے نا قابل گزر دیواروں کے۔

$$(۵.۳۵) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ساوات شرودنگر،

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi$$

کارتیسی محدود میں علیحدہ ہوتی ہے: $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ جہاں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z$$

اور $E = E_x + E_y + E_z$ ہوں گے۔ اب

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, \quad k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, \quad k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

لکھ کر درج ذیل عمومی حل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} X(x) &= A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x), & Y(y) &= A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y), \\ Z(z) &= A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z) \end{aligned}$$

سرحدی شرائط کے تحت $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$ لہذا $B_x = B_y = B_z = 0$ اور یوں $X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$

$$(۵.۳۶) \quad k_x l_x = n_x \pi, \quad k_y l_y = n_y \pi, \quad k_z l_z = n_z \pi$$

ہوں گے جہاں ہر n ایک مثبت عدد صحیح ہوگا۔

$$(۵.۳۷) \quad n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

(معمول شدہ) تناسبات موج:

$$(۵.۳۸) \quad \psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right)$$

ہوں گے اور احباب زنی توانائیاں:

$$(۵.۳۹) \quad E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

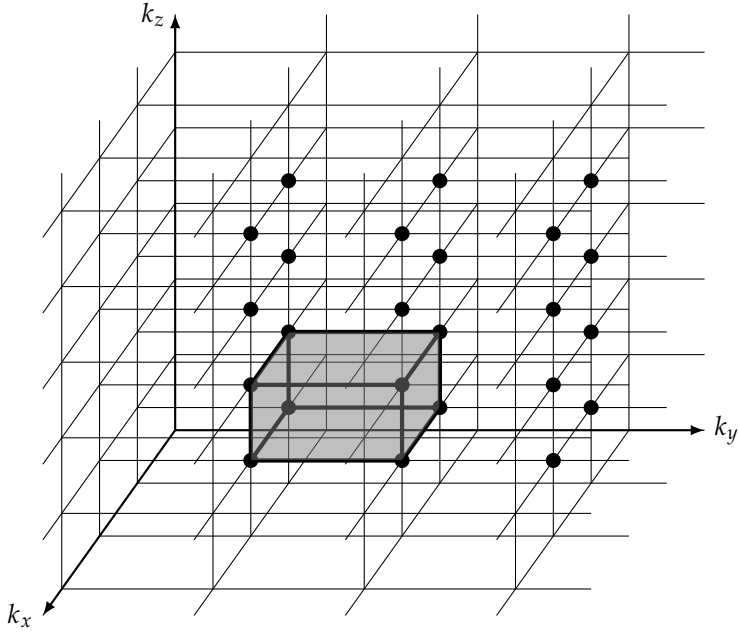
ہوں گی، جہاں سمتیہ موج $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مقدار k ہے۔

ایک تین ابعادی فضا جس کے محور k_x ، k_y ، k_z ہوں کا تصور کریں جس میں

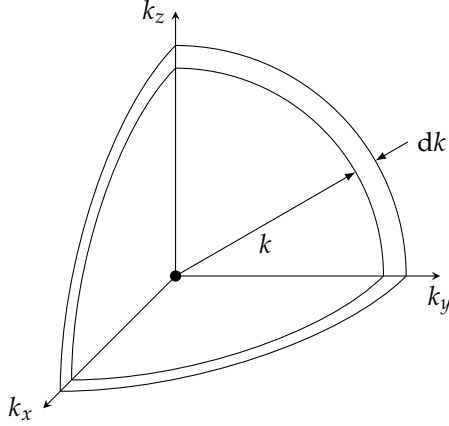
$$k_x = \frac{\pi}{l_x}, \frac{2\pi}{l_x}, \frac{3\pi}{l_x}, \dots$$

$$k_y = \frac{\pi}{l_y}, \frac{2\pi}{l_y}, \frac{3\pi}{l_y}, \dots$$

$$k_z = \frac{\pi}{l_z}, \frac{2\pi}{l_z}, \frac{3\pi}{l_z}, \dots$$



شکل ۵.۳: آزاد الیکٹران گیس۔ حال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک ”ڈبا“ کو سیاہ دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبے کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔



شکل ۵.۴: کروی پوست کا k فضا میں ایک نمونہ۔

پرسیدھی سطحیں پائے جاتی ہوں؛ اس فضا میں ہر انفرادی نقطہ تقاطع، منفرد ایک ذرا سا کن حال دیگا (شکل ۵.۳)۔ اس حال کا ہر خانہ، اور یوں ہر حال، k فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم $V \equiv l_x l_y l_z$ ہے۔

$$(۵.۴۰) \quad \frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں N جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے q آزاد الیکٹران دیتا ہو۔ (عملاً، کسی بھی کلاں بین جامت کے چیز کے لئے N کی قیمت بہت بڑی ہوگی، جس کی گنتی ایوگا درو عدد میں کی جائے گی؛ جبکہ q ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہوگا۔) اگر الیکٹران بوسن (یا متماثل ممیز ذرات) ہوتے تب وہ زمینی حال ψ_{111} میں سکونیت^{۳۵} اختیار کرتے۔ تاہم حقیقت میں الیکٹران متماثل مندرمیان ہیں جن پر پالی اصول منعیت کا اطلاق ہوتا ہے، لہذا کسی بھی حل کے صرف دو الیکٹران مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں یہ الیکٹران k فضا میں رداس k_F کے کرہ کا ایک نمونہ^{۳۶} بھرتے ہیں؛ اس رداس کو اس حقیقت سے تعین کیا جاسکتا ہے کہ الیکٹران کے ہر ایک جوڑے کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہوگا (مادات ۵.۴۰)۔

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

^{۳۵} میں یہاں فرض کر رہا ہوں کہ ایسا کوئی حراری یا دیگر اضطراب نہیں پایا جاتا جو ٹھوس جسم کو مجموعی زمینی حال سے اٹھاتا ہو۔ میں ”ٹھنڈے“ ٹھوس جسم کی بات کر رہا ہوں، اگرچہ جیسا آپ سوال ۵.۱۶-۵.۱۷ میں دیکھیں گے، ٹھوس اجسام، رہائشی درجہ حرارت سے بہت زیادہ درجہ حرارت پر بھی موجودہ نقطہ نظر سے ”ٹھنڈے“ ہوتے ہیں۔

^{۳۶} کیونکہ، N بہت بڑا عدد ہے لہذا ہمیں حال کے اصل دیتی سطح اور کرہ کی اس ہموار سطح میں مندرق کرنے کی ضرورت نہیں جو اس کو تختیت ظاہر کرتا ہے۔

یوں

$$(۵.۴۱) \quad k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}}$$

ہوگا جہاں

$$(۵.۴۲) \quad \rho \equiv \frac{Nq}{V}$$

کثافت آزاد الیکٹرانز^{۴۷} (اکائی حجم میں آزاد الیکٹران کی تعداد) ہے۔

k فضا میں آباد حالات (الیکٹران ان کے ممکن ہیں) اور غیر آباد حالات (الیکٹران ان کے ممکن نہیں ہیں) کی سرحد کو فرمی سطح^{۴۸} کہتے ہیں (جس کی بنا پر زیر نوشت میں F لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقتمندی توانائی کو فرمی توانائی^{۴۹} E_F کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴۳) \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے: ایک پوست جس کی موٹائی dk شکل ۵.۴ ہوگا جسم

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk$$

ہوگا، لہذا اس پوست میں الیکٹران حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{2[(1/2)\pi k^2 dk]}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (مساوات ۵.۳۹) ہے لہذا پوست کی توانائی

$$(۵.۴۴) \quad dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

اور کل توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$(۵.۴۵) \quad E_{\text{کل}} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-2/3}$$

free electron density^{۴۷}
Fermi surface^{۴۸}
Fermi energy^{۴۹}

کو انجم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا کہ گیس میں اندرونی حرارتی توانائی (U) کا ہوتا ہے۔ بالخصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبلے کے حجم میں dV کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کی رونما ہوگی

$$dE_{\text{کل}} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-5/3} dV = -\frac{2}{3} E_{\text{کل}} \frac{dV}{V}$$

جو سیرن پر کو انجم دباؤ P کا کیا ہوا کام ($dW = P dV$) ہو گا۔ ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{کل}}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} \rho^{5/3} \quad (۵.۴۶)$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس جسم اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا: ایک اندرونی کوانٹائی میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتا ہے جس کا الیکٹران کے باہمی دفع (جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں) یا حرارتی حرکت (جس کو ہم خارج کر چکے ہیں) کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے، بلکہ جو متمثل مندرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات **انحطاطی دباؤ**^{۴۰} کہتے ہیں اگرچہ ”منعستی دباؤ“ بہتر اصطلاح ہوگی۔^{۴۱}

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹران کی اوسط توانائی $\frac{E_{\text{کل}}}{Nq}$ کو مندری توانائی کی نسبت کی صورت میں لکھیں۔ جواب: $\frac{3}{5} E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبے کی کثافت 8.96 g cm^{-3} ہے جبکہ اس کا جوہری وزن 63.5 g mol^{-1} ہے۔

ا. مساوات ۵.۴۳ استعمال کر کے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی مندری توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹران دوسلٹ کی صورت میں لکھیں۔

ب. الیکٹران کی مطابقتی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ اشارہ: $\left(\frac{1}{2}\right)mv^2 = E_F$ لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹران کو غنیر اضافیتی تصور کرنا خطرے سے باہر ہوگا؟

ج. تانبہ کے لئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حرارتی توانائی ($k_B T$) جہاں k_B بولٹزمن مستقل اور T کیلون حرارت ہے، مندری توانائی کے برابر ہوگی؟ تبصرہ: اس کو **فرم** درجہ حرارت^{۴۲} کہتے ہیں۔ جب تک اصل درجہ حرارت مندری درجہ حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو ”ٹھنڈا“ تصور کیا جاسکتا ہے اور اس میں الیکٹران نچلے ترین متابل پہنچے حال میں ہوں گے۔ کیونکہ تانبہ 1356 K پر پگھلتا ہے لہذا ٹھوس تانبہ پر صورت ٹھنڈا ہوگا۔

د. الیکٹران گیس نمونہ میں تانبہ کے لئے انحطاطی دباؤ (مساوات ۵.۴۶) کا حساب لگائیں۔

degeneracy pressure^{۴۰}

^{۴۱} ہم نے مساوات ۵.۴۱، مساوات ۵.۴۳، مساوات ۵.۴۵، اور مساوات ۵.۴۶ لامتناہی مستطیل جسم کے لئے اخذ کیے، تاہم یہ کسی بھی شکل کے ہر اس جسم کے لئے درست ہیں جس میں ذرات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔

Fermi temperature^{۴۲}

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نسبتی اضافہ کے تناسب کو جیم مقیاس^{۳۳} کہتے ہیں۔

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

دیکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $B = \frac{5}{3}P$ ہوگا اور سوال ۵.۱۶-دکا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبے کے لئے جیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربے سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ ہے؛ مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں، کیونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ حیرانی کی بات ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم وناصلوں پر ساکن مثبت بار کے مراکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کاروبنایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جسے ایک بُعدی ڈیاکے^{۳۴} کہتے ہیں اور جو برابر وناصلوں پر ڈیلتا فنکشن سوزنات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۵)۔^{۳۵} لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت آسان بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ a کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہو۔

(۵.۴۷)

$$V(x+a) = V(x)$$

مسئلہ بلوخ^{۳۶} کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر،

(۵.۴۸)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کے حل سے مراد وہ فنکشن ایسا جاسکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

(۵.۴۹)

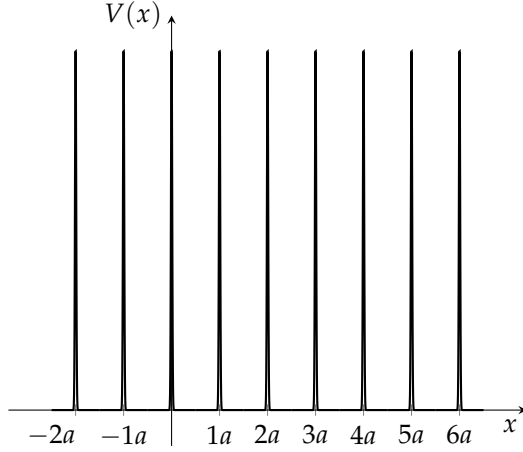
$$\psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x)$$

bulk modulus^{۳۳}

Dirac comb^{۳۴}

^{۳۵} ڈیلتا فنکشنات مساوات کو نیچے رخ رکھنا زیادہ ٹھیک ہوتا، جو مراکزہ کے قوت کشش کو ظاہر کرتے؛ تاہم، ایسا کرنے سے مثبت توانائی حل کے ساتھ ساتھ منفی توانائی حل بھی حاصل ہوتے ہیں جس کی بنا پر حساب کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے (سوال ۵.۲۰ دیکھیں)۔ ہم یہاں مخفیہ کی دوریت کے اثرات میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ بظاہر کم معقول شکل منتخب کر کے مسئلہ کا حل آسان ہوتا ہے؛ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ مراکزہ $\pm a/2$ ، $\pm 3a/2$ ، وغیرہ پر پائے جاتے ہیں۔

Bloch's theorem^{۳۶}



شکل ۵.۵: ذرات ایک کنگھی (مساوات ۵.۵۷)۔

جہاں K ایک مستقل ہے (یہاں ”مستقل“ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو x کا تابع نہیں ہے؛ اگرچہ یہ E کا تابع ہو سکتا ہے)۔

ثبوت: مان لیں کہ D ایک ”ہٹاؤ“ عامل ہے:

$$(۵.۵۰) \quad Df(x) = f(x+a)$$

دوری مخفیہ مساوات ۵.۴۷ کی صورت میں D ہیملٹنی کا مقلوبی ہوگا:

$$(۵.۵۱) \quad [D, H] = 0$$

لہذا ہم H کے ایسے امتیازی تفاعلات چن سکتے ہیں جو یک وقت D کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں:

$$D\psi = \lambda\psi$$

$$(۵.۵۲) \quad \psi(x+a) = \lambda\psi(x)$$

یہاں λ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا (اگر ایسا ہو تب چونکہ مساوات ۵.۵۲ تمام x کے لئے مطمئن ہوگا لہذا ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو بال مقبول امتیازی تفاعل نہیں ہے)؛ کسی بھی غیر صفر مخلوط عدد کی طرح، اس کو قوت نسائی روپ میں لکھا جاسکتا ہے:

$$(۵.۵۳) \quad \lambda = e^{iKa}$$

جہاں K ایک مستقل ہوگا۔

□

اس مقام پر مساوات ۵.۵۳ امتیازی تدر λ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے، لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ K ”حقیقی“ ہے اور یوں اگر چہ $\psi(x)$ خود غیر دوری ہے $|\psi(x)|^2$:

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (۵.۵۴)$$

دوری ہوگا، جیسا کہ ہم توقع کرتے آئے ہیں۔^۴

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لئے چلتا نہیں جانے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاں بین متلم میں کئی ایوگا درو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے، اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور، الیکٹران پر سطحی اثرات بل نظر انداز ہوگا۔ ہم مسئلہ بلوخ کو کارآمد رکھنے کی خاطر x کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کا سر، بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد، اس کے دم پر پایا جاتا ہو؛ باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط عائد کرتے ہیں۔

$$\psi(x + Na) = \psi(x) \quad (۵.۵۵)$$

یوں (مساوات ۵.۴۹ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$e^{iNka} \psi(x) = \psi(x)$$

لہذا $e^{iNka} = 1$ یا $Nka = 2\pi n$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (۵.۵۶)$$

(درج بالا مساوات میں حقیقتاً $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ہوگا؛ تفصیل کے لئے مساوات ۵.۶۶ کے نیچے پیراگراف پڑھیں۔) موجودہ صورت میں K لازماً حقیقی ہوگا۔ مسئلہ بلوخ کی امادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ (مثلاً $0 \leq x < a$) کے وقفہ پر مسئلہ شر وڈنگر حل کرنا ہوگا؛ مساوات ۵.۴۹ کی بار بار اطلاق سے باقی تمام جگہوں کے لئے حل حاصل ہوگا۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ درحقیقت (درج ذیل) نوکیلی ڈیٹا انتقال سوزنات (ڈیراک کنگھی) پر مشتمل ہو۔

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \quad (۵.۵۷)$$

(شکل ۵.۵ میں آپ تصور کریں گے کہ محور x کو یوں دائروی شکل میں لپیٹا گیا ہے کہ N ویں سوزن درحقیقت نقطہ $x = -a$ پر پائی جاتی ہے۔) اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے، لیکن یاد رہے، ہمیں دوریت کے اثرات

^۴ یقیناً، آپ دلیل کو اس وقت کے مساوات ۵.۵۴ سے آواز کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ ثابت کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنا ممکن نہیں ہے، کیونکہ مساوات ۵.۴۹ کے یقینی جزو ضربی کو x کا انتقال عمل ہونے کی اجازت صرف مساوات ۵.۵۴ دیتا ہے۔

میں صرف دلچسپی ہے؛ کلاسیکی کرانگلے ویلنٹ نمونہ^{۲۸} میں دہراتا ہوا مستطیل مخفیہ استعمال کیا گیا، جو اب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے۔ خط $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہوگا لہذا

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi,$$

ہوگا جہاں ہمیشہ کہ طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۵۸) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$(۵.۵۹) \quad \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (0 < x < a).$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبداء کے بائیں جانب پہلے خنات میں تفعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۶۰) \quad \psi(x) = e^{-iKa} [A \sin k(x+a) + B \cos k(x+a)], \quad (-a < x < 0).$$

نقطہ $x = 0$ پر ψ لازماً استمراری ہوگا لہذا

$$(۵.۶۱) \quad B = e^{-iKa} [A \sin(ka) + B \cos(ka)]$$

ہوگا؛ اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفعل کی زور کے براہ راست متناسب عدم استمرار پایا جائے گا (مداوات ۲.۱۲، جس میں α کی علامت الٹ ہوگی، چونکہ یہاں کنووں کی بجائے سوزنات پائے جاتے ہیں):

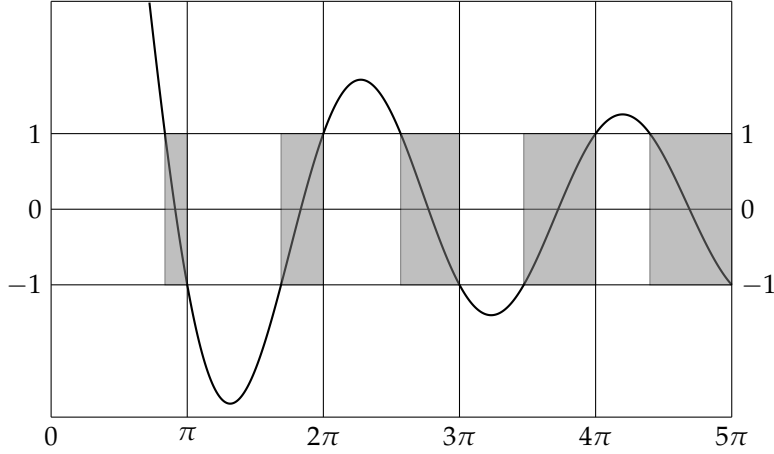
$$(۵.۶۲) \quad kA - e^{-iKa} k[A \cos(ka) - B \sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} B$$

مداوات ۵.۶۱ کو $A \sin(ka)$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$(۵.۶۳) \quad A \sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)] B$$

اس کو مداوات ۵.۶۲ میں پڑ کر کے اور k_B کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa} \cos(ka)] + e^{-iKa} \sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$



شکل ۵.۶: تفاعل $f(z)$ (مساوات ۵.۶۱ کو $\beta = 10$ کے لئے ترسیم کر کے اجبازتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درز (جہاں $|f(z)| > 1$ ہوگا) پائے جاتے ہیں۔

حاصل ہوگا جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۵.۶۳) \quad \cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

یہ وہ بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرائنگ و پٹی مخفیہ کے لئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہوگا، لیکن جو خدوخال ہم دیکھنے حارے ہیں، وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

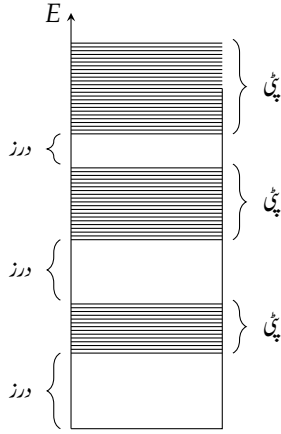
مساوات ۵.۶۳ متغیر k کی ممکنہ قیمتیں، لہذا اجبازتی توانائیاں تعین کرتی ہے۔ علاقیت کو سادہ بنانے کی عنصر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۵.۶۵) \quad z \equiv ka, \quad \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

جس سے مساوات ۵.۶۳ کا دایاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۵.۶۶) \quad f(z) \equiv \cos(z) + \beta \frac{\sin(z)}{z}$$

مستقل β ، ڈیٹ تفاعل کے ”زور“ کا، بے بعدی ناپ ہے۔ شکل ۵.۶ میں میں نے $\beta = 10$ کے لئے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ $f(z)$ سے $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے، اور چونکہ $|\cos(Ka)|$ کی قیمت کسی صورت بھی 1 سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے، لہذا ایسے خطوں میں مساوات



شکل ۵.۷: دوری مخفیہ کی احبازتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

۵.۶۴ کا حل نہیں پایا جائے گا۔ یہ درز^۹ ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہیں؛ اس کے بیچ احبازتی توانائیوں کی پٹیاں^{۱۰} پائی جاتی ہیں۔ مساوات ۵.۵۶ کے تحت، $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہوگا، جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہے، لہذا n کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی احبازتی ہوگی۔ آپ تصور میں شکل ۵.۶ پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے فاصلوں پر $+1$ (یعنی $n = 0$) سے لے کر نیچے -1 (یعنی $n = \frac{N}{2}$) تک اور واپس تقریباً $+1$ (یعنی $n = N - 1$) تک (جہاں بلوغت جزو ضربی e^{iKa} دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لہذا n کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حل حاصل نہیں ہوگا) لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ہر لکیر کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع، ایک احبازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں N حالات پائے جاتے ہیں، جو ایک دوسرے کے اتنے تقریباً متفرق ہیں کہ عموماً مقصد کے لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ ایک استمراریہ پیدا کرتے ہیں (شکل ۵.۷)۔ (یوں مساوات ۵.۵۶ میں $n = 0, \pm 1, \dots, N - 1$ کی بجائے $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ہوگا۔)

اب تک ہم نے اپنے مخفیہ میں صرف ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں Nq الیکٹران ہوں گے، جہاں ہر ایک جوہر q تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصول مناعت کے بنا پر صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے مکین ہو سکتے ہیں، یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے، اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل بھریں گے، اگر $q = 3$ ہو تب یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (تین ابعاد میں، اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں، پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے، لیکن احبازتی پٹیاں جن کے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں، تب بھی ہوگا؛ دوری مخفیہ کی نشانی ہی پٹی دار ساخت ہے۔)

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو، ممنوع خطے سے گزر کر اگلی پٹی تک چھلانگ کے لئے ایک الیکٹران کو

نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہوگی؛ ایسا مادہ برقی طور پر غیر موصل^{۵۱} ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری نہ ہو تب ایک الیکٹران کو ہیبان^{۵۲} کرنے کے لئے بہت کم توانائی درکار ہوگی؛ اس طرح کا مادہ عموماً موصل^{۵۳} ہوگا۔ ایک غیر موصل میں، زیادہ یا کم q والے، چند جوہر کی ملاوٹ^{۵۴} سے، اگلی بالا پٹی میں چند اضافی الیکٹران آجاتے ہیں یا سابقہ بھری پٹی میں چند خول^{۵۵} پیدا ہو جاتے ہیں؛ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے؛ ایسے اشیاء نیم موصل^{۵۶} کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً اچھا موصل ہونا ہوگا چونکہ انکے اجزائی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنے زیادہ فرق صرف پٹی دار نظریہ کی مدد سے سمجھا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

ا. مساوات ۵.۵۹ اور مساوات ۵.۶۳ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تفاعل مخفیہ میں ایک ذرے کا تفاعل موج درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa} \sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

(معمول زنی مستقل C تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔)

ب. البتہ پٹی کے بالائی سرپر جہاں z مستقل π کا عدد صحیح مضرب ہوگا (شکل ۵.۶) سے (الف) $\psi(x) = 0$ حاصل ہوگا۔ ایسی صورت میں درست تفاعل موج تلاش کریں۔ دیکھیں کہ ہر ایک ڈیلٹا تفاعل پر ψ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی اجزائی پٹی کی تہ پر، $\beta = 10$ کی صورت میں توانائی کی قیمت، تین با معنی ہندسوں تک، تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے $\frac{\alpha}{a} = 1 \text{ eV}$ تصور کریں۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیلٹا تفاعل سوزنات کے بجائے ڈیلٹا تفاعل کنودوں پر غور کر رہے ہیں (یعنی مساوات ۵.۵۷ میں α کی علامت الٹ ہے)۔ ایسی صورت میں شکل ۵.۶ اور شکل ۵.۷ طرز کے اشکال بن کر تجزیہ کریں۔ مثبت توانائی حلوں کے لئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے (بس مساوات ۵.۶۶ میں موزوں تبدیلیاں لائیں)، لیکن منفی توانائی حلوں کے لئے آپ کو کام کرنا ہوگا؛ اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیں (جواب منفی z تک وسیع ہوگا)۔ پہلی اجزائی پٹی میں کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دکھائیں کہ مساوات ۵.۶۴ سے متعین زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہیں۔ کونسی توانائیاں ایسی نہیں ہیں؟ اشارہ: $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ لیتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی کیا ممکن قیمتیں ہوں گی؟

insulator^{۵۱}

۵۲ غیر مکمل بھری پٹی میں الیکٹران کی موجودہ توانائی سے معمولی زیادہ توانائی والا حال دستیاب ہوگا جس میں الیکٹران ہیبان ہو کر داخل ہو سکتا

ہے۔

conductor^{۵۳}

dope^{۵۴}

hole^{۵۵}

semiconductors^{۵۶}

۵.۴ کوانٹائی شمارياتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنی کم سے کم اجزائی توانائی تکمیل کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھانے سے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کی بنا پر بیجانی حالات بھرنے شروع ہونگے، جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر درجہ حرارت T پر، حراری توازن میں ایک بڑی تعداد N ذرات پائے جاتے ہوں، تب اس کا کیا احتمال ہوگا کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو، کی توانائی بالخصوص E_j ہوگی؟ دھیان رہے کہ اس احتمال ”کوانٹائی عدم تعینیت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے؛ بالکل یہی سوال کلاسیکی شمارياتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لئے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی زیادہ ہوگی کہ کسی بھی صورت میں ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھنا ممکن نہیں ہوگا، چاہے متشائل میکانیات تعینی ہو یا نہ ہو۔

شمارياتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن^{۵۷} میں ایک جیسی کل توانائی، E ، والا ہر منفرد حال ایک جتنا متشائل ہوگا۔ بلا واسطہ حراری حرکت کی بنا پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرے ذرہ، اور ایک روپ (حرکی، گردشی، لرزشی، وغیرہ) سے دوسری روپ میں مسلسل منتقل ہوگی لیکن (بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں) بقا توانائی کی بنا پر کل مقررہ ہوگا۔ یہاں (بہت گہرا اور قابل سوچ) مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی مقررہ تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتی۔ درجہ حرارت^{۵۸}، T ، حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی ایک پیشانہ ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹائی میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے (تاہم حالات غیر مسلسل ہوتے ہیں جس کی بنا پر یہ کلاسیکی نظریہ کی گنتی سے زیادہ آسان ہوگا)، اور گنتی کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا ذرات متماثل ممیز، متشائل بوسن یا متشائل فرمیان ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لہذا میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کرتا ہوں تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس ایک بعدی لامستثنائی چوکور کنویں (حصہ ۲.۲) میں، کمیت m والے، صرف تین باہم غیر متشائل ذرات پائے جاتے ہیں۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)

$$(۵.۶۷) \quad E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

جہاں n_A ، n_B اور n_C مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ ہم $E = 363 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)$ یعنی

$$(۵.۶۸) \quad n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363$$

لیتے ہوئے تبصرہ جاری رکھتے ہیں۔ جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں، تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیسرے ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہو: تینوں اعداد 11 ہو سکتے ہیں، دو اعداد 13 اور ایک 5 (جو تین مرتبہ اجتماعات میں پایا جائے گا)، ایک عدد 19 اور دو 1 (یہاں بھی تین مرتبہ اجتماعات

ہوں گے) یا ایک عدد 17، ایک 7 اور ایک 5 (چھ مرتب اجتماعات) ہو سکتے ہیں۔ یوں (n_A, n_B, n_C) درج ذیل میں سے ایک ہوگا۔

$$(11, 11, 11), \\ (13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13), \\ (1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1), \\ (5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5)$$

اگر یہ ذرات متماثل میسر ہوں، تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کوانٹائی حال کو ظاہر کرے گا، اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضے کے تحت، حراری توازن^{۵۹} میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کونسا ذرہ کس (یک ذروی) حال میں پایا جاتا ہے، بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں؛ جس کو حال ψ_n کی تعداد مکینز^{۶۰} N_n کہتے ہیں۔ ہم اس 3 ذروی حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو تشکیل^{۶۱} کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال ψ_{11} میں ہوں تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \quad (۵.۶۹)$$

(یعنی $N_{11} = 3$ ہے اور باقی تمام صفر ہیں)۔ اگر دو حال ψ_{13} میں اور ایک ψ_5 میں ہو، تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, \dots) \quad (۵.۷۰)$$

(یعنی $N_5 = 1$ ، $N_{13} = 2$ ، اور باقی تمام صفر ہوں گے)۔ اگر دو ψ_1 میں اور ایک ψ_{19} میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \quad (۵.۷۱)$$

(یعنی $N_1 = 2$ ، $N_{19} = 1$ اور باقی تمام صفر ہوں گے)۔ اور اگر ایک ذرہ ψ_5 میں، ایک ψ_7 میں اور ایک ψ_{17} میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \quad (۵.۷۲)$$

(یعنی $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ اور باقی تمام صفر ہوں گے)۔ ان تمام میں، آخری تشکیل زیادہ محتمل ہوگی، چونکہ اس کو چھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے، جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

^{۵۹} غیر متماثل ذرات کس طرح حراری توازن برقرار رکھتے ہیں؟ میں اس کے بارے میں سوچنا نہیں چاہوں گا؛ حقیقتاً، توانائی کی مستمری تقسیم ذرات کے باہم عمل سے ہی ممکن ہوگی۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ذرات کا باہم عمل اتنا کمزور ہے کہ اگر چہ یہ (لے عرصہ کی صورت میں) حراری توازن پیدا کرتا ہے، تاہم یہ اتنا کمزور ہے کہ نظام کے ساکن حالات اور احباباتی توانائیوں پر متاثر نہیں ڈالتا ہے۔

^{۶۰} occupation number
^{۶۱} configuration

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص (اجزائی) توانائی E_n حاصل کرنے کا احتمال (P_n) کیا ہوگا؟ توانائی E_1 صرف اس صورت حاصل ہوگی جب وہ تیسری تشکیل (مادات ۵.۷) میں ہو؛ اس تشکیل میں نظام ہونے کا اتفاق 13 میں سے 3 ہے، اور اس تشکیل میں E_1 کے حصول کا احتمال $\frac{2}{3}$ ہے لہذا $P_1 = \frac{2}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{13}$ ہوگا۔ آپ E_5 کو تشکیل 2 (مادات ۵.۷) سے 13 میں سے 3 امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ یا تشکیل 4 (مادات ۵.۷) سے 13 میں سے 6 امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں، لہذا $P_5 = \frac{3}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{13}$ ہوگا۔ آپ E_7 کو صرف تشکیل 4 سے حاصل کر سکتے ہیں اور $P_7 = \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{13}$ ہوگا۔ اسی طرح E_{11} صرف پہلی تشکیل (مادات ۵.۷) سے 13 میں سے 1 امکان اور احتمال ایک (1) کے ساتھ حاصل ہوگا، لہذا $P_{11} = \frac{1}{13}$ ہوگا۔ اسی طرح $P_{13} = \frac{3}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{13}$ ، $P_{17} = \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{13}$ اور $P_{19} = \frac{3}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{13}$ ہوں گے۔ انکی تصدیق درج ذیل سے ہوگی۔

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1$$

یہ متماثل ممیز ذرات کے لئے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات متماثل منرمیان ہوتے، ضرورت خلاف تشاکلیت (اپنی آسانی کے لئے چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے، یا اگر آپ چاہیں تو، یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر کی حال میں ہیں) کی بنا پر پہلی تین تشکیلات (جو دو ذرات کو، یا اس سے بھی بری صورت میں تین ذرات کو، ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں) ناممکن ہوں گی، اور چوتھی تشکیل میں صرف ایک حال ہوگا (سوال ۵.۲۲-الف دیکھیں)۔ متماثل منرمیان کے لئے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک (1) ہے۔ اس کے برعکس، اگر ذرات متماثل بوسن ہوتے تو ضرورت تشاکلیت ہر تشکیل میں ایک حال کی اجازت دیتا (سوال ۵.۲۲-ب دیکھیں)، لہذا $P_1 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ، $P_5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ، $P_7 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ، $P_{11} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$ ، $P_{13} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ، $P_{17} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ اور $P_{19} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک (1) ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دکھانا تھا کہ حالات کی شمار کس طرح ذرات کی قسم پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک لحاظ سے حقیقی صورت، جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہوگا، سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھی۔ چونکہ N کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تشکیل (جو متماثل ممیز ذرات کے لئے اس مثال میں $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ہے) پایا جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شماریاتی مقاصد کے لئے باقی تمام امکانات کو رد کیا جاسکتا ہے۔^{۲۲} توازن کی صورت میں انفرادی ذروی توانائیوں کی تقسیم، انکی زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل میں تقسیم ہے۔ (اگر $N = 3$ کے لئے یہ درست ہوتا، جو کہ یہ نہیں ہے، ہم متماثل ممیز ذرات کے لئے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ اخذ کرتے۔) میں حصہ ۵.۴.۳ میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گسٹنکی کی ترکیب کو عموماً دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

۱. حال ψ_5 میں ایک، حال ψ_7 میں ایک، اور حال ψ_{17} میں ایک متماثل تین منرمیان کا مکمل خلاف تشاکلی تقاسم عمل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

^{۲۲} بڑے اعداد کی شماریات کا یہ ایک حیرت کن اور غیر متوقع حقیقت ہے۔

ب۔ تین متماثل بوسن کے لئے مکمل تشاکلی تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (۱) تینوں حال ψ_{11} میں ہوں، (ب) اگر دو ψ_1 اور ایک ψ_{19} میں ہو، (ج) اگر ایک حال ψ_5 ایک حال ψ_7 اور ایک حال ψ_{17} میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں ایک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات، حراری توازن میں پائے جاتے ہوں، جن کی کل توانائی $E = \frac{9}{2} \hbar \omega$ ہے۔

ا۔ اگر یہ (ایک جیسی کیمیت کے) متماثل ممیز ذرات ہوں تب انکی تعداد مکین کی کتنی شکلیات ہوں گی اور ہر ایک کے لئے کتنے منفرد (تین ذروی) حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تفکیک کیسا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوب منتخب کر کے اسکی توانائی کی پیشانہ کریں تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر ایک کا احتمال کیسا ہوگا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیسا ہوگی؟

ب۔ یہی کچھ متماثل منرمیان کے لئے کریں (چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ ۵.۴.۱ میں کیا)۔

ج۔ یہی کچھ (چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) متماثل بوسن کے لئے کریں۔

۵.۴.۲ عمومی صورت

اب ایک ایسے اختیاری مخفیہ پر غور کرتے ہیں جس کی ایک ذروی توانائیاں E_1, E_2, E_3, \dots اور انحطاط d_1, d_2, \dots, d_3 ہوں (یعنی توانائی E_n کے d_n منفرد یک ذروی حالات ہیں)۔ فرض کریں ہم (ایک جیسی کیمیت کے) N ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں؛ ہم تفکیک (N_1, N_2, N_3, \dots) میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں N_1 ذرات کی توانائی E_1 ، N_2 ذرات کی توانائی E_2 ، وغیرہ ہوگی۔ سوال: ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تفکیک کے مطابق کتنے منفرد حالات ہوں گے)؟ اس کے جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا ذرات متماثل ممیز، متماثل منرمیان، یا متماثل بوسن ہیں، لہذا ہم ان تین صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔

ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات متماثل ممیز ہیں۔ دستیاب کل N ذرات میں سے کتنے طریقوں سے N_1 منتخب کر کے پہلے ”نوکرے“ میں رکھے جاسکتے ہیں؟ جواب: N مثالی عدد ^{۳۳}:

$$(۵.۴۳) \quad \binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

N_1 کو N میں سے منتخب کرتا ہے۔ پہلا ذرہ N مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے، جس کے بعد $(N - 1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N - 1$ مختلف طریقے ہوں گے، وغیرہ۔

$$N(N - 1)(N - 2) \dots (N - N_1 + 1) = \frac{N!}{(N - N_1)!}$$

لیکن یہ N_1 ذرات کے $N_1!$ مختلف مرتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلے انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا؛ لہذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات ۵.۳ حاصل ہوتا ہے۔ اب پہلے ٹوکرے کے اندر ان N_1 ذرات کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے؟ چونکہ پہلے ٹوکرے میں d_1 حالات ہیں لہذا ہر ایک ذرے کو d_1 مختلف طریقوں سے چننا جاسکتا ہے؛ یوں کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہوں گے۔ اس طرح ایک ٹوکرہ، جس میں d_1 منفرد حق انتخاب ہوں، میں کل آبادی N میں سے N_1 ذرات منتخب کر کے رکھنے کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!}$$

دوسرے ٹوکرے میں صرف $(N - N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا:

$$\frac{(N - N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ۔ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} Q(N_1, N_2, N_3, \dots) &= \frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!} \frac{(N - N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!} \frac{(N - N_1 - N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N - N_1 - N_2 - N_3)!} \dots \\ (5.43) \quad &= N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} d_3^{N_3} \dots}{N_1! N_2! N_3! \dots} = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!} \end{aligned}$$

(یہاں رک کر حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے اس نتیجے کی تصدیق کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)

متماثل مندرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے۔ چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی منفرق نہیں پڑتا کہ کون سے ذرات کن حالات میں ہیں؛ ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص یک ذروی حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک N ذروی حال ہوگا۔ مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے۔ لہذا n ویں ٹوکرہ میں N_n بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے^{۱۴} ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(5.45) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!}$$

^{۱۴} ظاہر ہے کہ $N_n > d_n$ کی صورت میں یہ مندر ہوگا، جو منفی عدد صحیح کے عدد ضرب کو لامتناہی تصور کرنے سے ہوگا۔

(اس کی تصدیق حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)۔

متناثر بوسن کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا۔ یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذروی حالات کے ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک N ذروی حال ہوگا، تاہم اس مرتبہ ایک ذروی حال کو بھرنے کے لئے ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی۔ یہاں n ویں ٹوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا: ہم متناثر N_n ذرات کو d_n مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں؟ غیر مرتبہ اجتماعات کے اس سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے: ہم ذرہ کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں؛ یوں مثال کے طور پر، $d_n = 5$ اور $N_n = 7$ کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات، دوسرے حال میں ایک ذرہ، تیسرے میں تین، چوتھے میں ایک، اور پانچویں میں کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا۔ دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد N_n اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہے (جو ان نقطوں کو d_n گروہ میں خانہ بند کرتے ہیں)۔ اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا تھا۔ تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک جیسے ہیں؛ اور ان کو $(N_n)!$ مختلف) مرتبہ اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح تمام صلیب معادل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف) مرتبہ اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ یوں N ویں ٹوکرے میں d_n ایک ذروی حالات کو N_n ذرات مختص کرنے کے درج ذیل مندر طریقہ ہونگے

$$(5.49) \quad \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n}$$

جس کی بنا پر ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$(5.49) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!}$$

(اس کی تصدیق حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)۔

سوال ۵.۲۴: حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے مساوات ۵.۴۳، مساوات ۵.۴۵ اور مساوات ۵.۴۷ کی تصدیق کریں۔

سوال ۵.۲۵: مساوات ۵.۴۶ کو الگراچی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں۔ غیر مرتبہ اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا: آپ d ٹوکرے میں N متناثر گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں (یہاں زیر نوشتہ میں n کو نظر انداز کریں)؟ آپ تمام کے تمام N کو تیسرے ٹوکرے میں رکھ سکتے تھے، یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسرے ٹوکرے میں، یا دو کو پہلے اور تین کو تیسرے ٹوکرے میں اور باقی کو ساتویں ٹوکرے میں، وغیرہ، رکھ سکتے تھے۔ اس کو صریحاً $N = 1$ ، $N = 2$ ، $N = 3$ ، اور $N = 4$ کے لئے حاصل کریں؛ یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے۔

۵.۴.۳ سب سے زیادہ ممکنہ تشکیل

حراری توازن میں ہر وہ حال جس کی کل توانائی E اور ذروی عدد N ہو ایک جتنا ممکن ہوگا۔ یوں سب سے زیادہ ممکنہ تشکیل N_1, N_2, N_3, \dots وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو؛ یہ وہ مخصوص تشکیل ہوگی جو جس کے لئے

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N \quad (5.48)$$

اور

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E \quad (5.49)$$

پر پورا اترے ہوئے $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کی قیمت سے زیادہ ہو۔

زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ، وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرائج مضرب^{۱۵} کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے۔ ہم ایک نیا تفاعل

$$G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots \quad (5.40)$$

متعارف کر کے اس کے تمام تفسیرات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0 \quad (5.41)$$

موجودہ صورت میں Q کی بجائے Q کے لوگار تھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے؛ جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے۔ چونکہ لوگار تھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے، لہذا Q کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائی جائیں گی۔ لہذا تفاعل Q کے لئے ہم مساوات ۵.۸۰ میں Q کی بجائے $\ln(Q)$ لکھتے ہیں:

$$G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right] \quad (5.42)$$

جہاں α اور β گرائج مضرب (λ_1 اور λ_2) ہیں (اور چوکور قوسین مساوات ۵.۴۸ اور مساوات ۵.۴۹ میں دیے گئے شرط ہیں)۔ α اور β کے لحاظ سے تفسیرات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض (مساوات ۵.۴۸ اور مساوات ۵.۴۹ میں دی گئے) پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں؛ یوں N_n کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے۔

اگر ذرات متماثل ممیز ہوں، تب مساوات ۵.۷۴ ہمیں Q دے گی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(5.83) \quad G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] \\ + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

ہم متعلقہ تعداد مکین (N_n) کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگے تخمینہ^{۲۶}:

$$(5.84) \quad \ln(z!) \approx z \ln(z) - z \quad z \ll 1$$

بروئے کار لاتے ہوئے^{۲۷} درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(5.85) \quad G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n] \\ + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(5.86) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لیے حل کرتے ہوئے ہم متماثل ممیز ذرات کی سب سے زیادہ محتمل تعداد مکین کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$(5.87) \quad N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

اگر ذرات متماثل منبر میان ہوں تب Q کی قیمت مساوات ۵.۷۵ دیگی لہذا درج ذیل ہوگا

$$(5.88) \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} \\ + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

^{۲۶} Stirling's approximation

سٹرلنگ قسمل کے مزید اجزاء مفاسل کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمینہ کو مسزید بہتر بنایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری ضرورت اولین دو اجزاء لینے سے پوری ہو جاتی ہے۔ اگر حصہ ۵.۴.۱ کی طرح، متعلقہ تعداد مکین بہت زیادہ نہ ہوں، تب شماریاتی میکانیات کارآمد نہیں ہو گی۔ یہاں ہمارا مقصد یہی ہے کہ تعداد واقعی زیادہ ہو کہ شماریاتی پیش گوئی متماثل اعتماد ہو۔ یقیناً ایسے ایک ذروی حالات ضرور ہوں گے جن کی توانائی انتہائی زیادہ ہوگی اور جو بھسرے نہیں ہوں گے؛ ہماری خوش قسمتی ہے کہ سٹرلنگ تخمینہ $z = 0$ کے لئے بھی کارآمد ہے۔ میں نے لفظ ”متعلقہ“ استعمال کرتے ہوئے ان غیر مطلوب حالات کو مفاسل نہیں کیا ہے جو حاشیہ پر رہتے ہوں اور جن کے لئے N_n نہ تو بہت زیادہ ہو اور نہ ہی صفر ہو۔

یہاں ہم N_n کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $d_n \gg N_n$ بھی ^{۱۸}فرض کرتے ہیں لہذا سٹرلنگ تخمینہ دونوں اجزاء کے لیے قابل استعمال ہوگی۔ ایسی صورت میں

$$(۵.۸۹) \quad G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) \right. \\ \left. + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n \right] + \alpha N + \beta E$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۹۰) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n - N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے N_n کے لیے حل کر کے ہم متماثل مندرمیان کی تعداد مکینوں کی سب سے زیادہ متماثل تعداد مکین N_n کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$(۵.۹۱) \quad N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} + 1}$$

آخر میں اگر ذرات متماثل بوسن ہوں تب Q کی قیمت مساوات ۵.۷۷ دی گئی اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۹۲) \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} \\ + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $1 \gg N_n$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمینہ استعمال کرتے ہوئے

$$(۵.۹۳) \quad G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{ (N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) \\ + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha N_n - \beta E_n N_n \} + \alpha N + \beta E$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۹۴) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

^{۱۸} ایک بُعد میں توانائیاں غیر انعطافی ہوں گی (سوال ۲.۴۵ دیکھیں)، لیکن تین ابعاد میں n بڑھنے سے d_n عموماً بہت تیزی سے بڑھتا ہے (مثلاً ہائیڈروجن کے لئے $d_n = n^2$ ہے)۔ یوں زیادہ تر بھروسے حالات کے لئے $d_n \gg 1$ فرض کرنا غیر معقول نہیں ہوگا۔ اس کے برعکس، مطلق صفر درجہ حرارت کے قریب، d_n کی قیمت کسی صورت بھی N_n سے بہت زیادہ نہیں ہوگی، مندرجہ بالا تمام حالات بھروسے ہوں گے لہذا $d_n = N_n$ ہوگا۔ یہاں بھی ہمیں یہ حقیقت مدد کرنی ہے کہ سٹرلنگ کلیہ $z = 0$ کے لئے کارآمد ہے۔

اس کو مضرب کے برابر رکھ کر N_n کے لئے حل کرتے ہوئے ہم متماثل بوسن کی تعداد مکینوں کی سب سے زیادہ محتمل قیمتیں تلاش کرتے ہیں۔

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1} \quad (۵.۹۵)$$

(مضربان کے لئے متعلقہ تخمین کے ساتھ ثبات کی خاطر شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے؛ میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا۔)

سوال ۵.۲۶: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر سب سے بڑے رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں، لگراؤ مضرب کی ترکیب سے تلاش کریں۔ یہ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہوگا؟
سوال ۵.۲۷:

ا. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فی صد سہو کتنی ہوگی؟

ب. سہو کو ایک فی صد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح z کی کم سے کم قیمت کیا ہوگی؟

۵.۴.۴ α اور β کی طبعی اہمیت

لگراؤ مضرب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے بالترتیب منسلک مقدار معلوم α اور β پائے گئے۔ ریاضیاتی طور پر تعداد ممکن (ساوات ۵.۸۷، ساوات ۵.۹۱، اور ساوات ۵.۹۵) کو واپس ملط شرائط (ساوات ۵.۷۸ اور ساوات ۵.۷۹) میں پر کرتے ہوئے انہیں تعین کیا جاتا ہے۔ البتہ کسی مخفیہ کے لیے مجموعہ کے حصول کے لئے ہمیں اجبازتی توانائیاں (E_n) اور ان کی انحطاط (d_n) کا معلوم ہونا ضروری ہے۔ میں سہ ابعادی لامستناہی چوکور کنویں میں ایک جتنی کیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعامل ذرات کی کالہ گیل^{۶۹} کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں۔ اس سے ہم پر α اور α کی طبعی مفہوم عیاں ہوگی۔
ہم نے حصہ ۵.۳.۱ میں اجبازتی توانائیاں (ساوات ۵.۳۹):

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (۵.۹۶)$$

اخذکیں جہاں درج ذیل ہوتا۔

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z} \right)$$

پہلے کی طرح، یہاں بھی ہم مجموعہ کو عمل میں بدلتے ہیں، جہاں \mathbf{k} ایک استمراری متغیر ہے، اور جہاں k فصفا کے π^3/V حجم میں ایک حال (یا، چکر s کی صورت میں، $2s + 1$ حالات) پائے جاتے ہیں۔ مٹن اول

^{۶۹} ideal gas

میں کروی خولوں (پوستوں) کو ”ٹوکریاں“ تصور کرتے ہوئے (شکل ۵.۴، دیکھیں) ”اخطاط“ (یعنی ہر ٹوکریے میں حالات کی تعداد) درج ذیل ہوگی۔

$$d_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{8(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad (۵.۹۷)$$

قابل ممیز ذرات (مساوات ۵.۸۷) کیلئے پہلی عائد پابندی (مساوات ۵.۸۸) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^2 dk = V e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta \hbar^2} \right)^{3/2}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\beta \hbar^2}{m} \right)^{3/2} \quad (۵.۹۸)$$

دوسری عائد شرط (مساوات ۵.۸۹) درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^4 dk = \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta \hbar^2} \right)^{3/2}$$

جس میں مساوات ۵.۹۸ سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$E = \frac{3N}{2\beta} \quad (۵.۹۹)$$

(اگر آپ مساوات ۵.۹۷ میں چپکری جزو ضربی، $2s + 1$ ، شامل کرتے تو وہ یہاں پہنچ کر حذف ہو جاتا ہے، لہذا مساوات ۵.۹۹ تمام چپکری کے لیے درست ہوگی۔)

یہ نتیجہ (مساوات ۵.۹۹) ہمیں درجہ حرارت T پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (۵.۱۰۰)$$

کی یاد دلاتی ہے، جہاں k_B بولٹزمن مستقل ہے۔ یہ ہمیں β اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے۔

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (۵.۱۰۱)$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین ابعادی لامتناہی چوکور کنویں میں موجود ممیز ذرات کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ، مختلف اشیاء کے لئے، جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں، β کی قیمت ایک جیسی ہے۔ یہ دلیل کئی کتابوں میں پیش کی گئی ہے، جس کو میں یہاں پیش نہیں کروں گا؛ بلکہ میں مساوات ۵.۱۰۱ کو T کی تعریف مان لیتا ہوں۔

روایتی طور پر α (جو مساوات ۵.۹۸ کی خصوصی صورت سے ظاہر ہے کہ T کا تعلق ہے) کی جگہ کیمیاوی پتہ^{۴۰}:

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \quad (۵.۱۰۲)$$

استعمال کر کے مساوات ۵.۸۷، مساوات ۵.۹۱، اور مساوات ۵.۹۵ کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی ϵ کے کسی ایک مخصوص (یک ذروی) حال میں ذرات کی سب سے زیادہ محتمل عدد دے (کسی ایک توانائی کے حاصل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حاصل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے حوالہ سے صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہوگا)۔

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسویل بولٹزمن} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} & \text{فسرئی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} & \text{بوس و آئنسٹائن} \end{cases} \quad (۵.۱۰۳)$$

قابل مفسر ذرات پر میکسویل، بولٹزمن تقسیم^{۴۱}، متعلق فسر میان پر فرم^{۴۲} وڈیراک تقسیم^{۴۳} اور متعلق بوس و آئنسٹائن تقسیم^{۴۴} کا اطلاق ہوگا۔

فسرئی وڈیراک تقسیم $T \rightarrow 0$ کے لئے خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتی ہے:

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

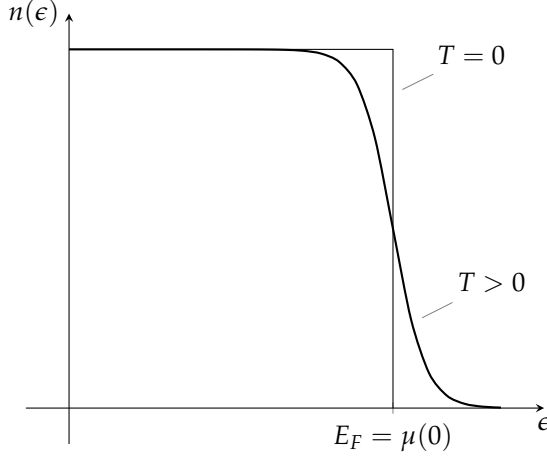
$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (۵.۱۰۴)$$

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہوں گے (شکل ۵.۸)۔ ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی پتہ عین فسرئی توانائی ہوگی۔

$$\mu(0) = E_F \quad (۵.۱۰۵)$$

درج حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فسرئی وڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے، جو شکل ۵.۸ میں دائری منحنی سے ظاہر ہے۔

^{۴۰} chemical potential
^{۴۱} Maxwell-Boltzmann distribution
^{۴۲} Fermi-Dirac distribution
^{۴۳} Bose-Einstein distribution



شکل ۵.۸: فیرمی وڈیراک تقسیم برائے $T = 0$ اور صفر سے کچھ زیادہ T کے لئے۔

ہم متشکل ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت T پر کل توانائی (مساوات ۵.۹۹) درج ذیل ہوگی

$$(۵.۱۰۶) \quad E = \frac{3}{2} N k_B T$$

جبکہ (مساوات ۵.۹۸ کے تحت) کیمیائی پوٹنشل درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۰۷) \quad \mu(T) = k_B T \left[\ln \left(\frac{N}{V} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right) \right]$$

میں مساوات ۵.۸۷ کی بجائے مساوات ۵.۹۱ اور مساوات ۵.۹۵ استعمال کرتے ہوئے متشکل فیرمی فکشن اور متشکل بوسن کی کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا۔ پہلی عائد پابندی (مساوات ۵.۷۸) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۵.۱۰۸) \quad N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{[(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu] / k_B T} \pm 1} dk$$

جہاں مثبت علامت فیرمی فکشن کو اور منفی علامت بوسن کو ظاہر کرتی ہے دوسری عائد پابندی (مساوات ۵.۷۹) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۵.۱۰۹) \quad E = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{k^4}{e^{[(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu] / k_B T} \pm 1} dk$$

ان میں سے پہلی $\mu(T)$ اور دوسری $E(T)$ تعین کرتی ہے (موخر الذکر سے، مثلاً، ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E / \partial T$ حاصل کرتے ہیں)۔ بد قسمتی سے ان نکلات کو بنیادی تفاسلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے غور کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں (سوال ۵.۲۸ اور سوال ۵.۲۹ دیکھیں)۔

سوال ۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر متنازل مندرمیان کے لیے ان نکلات (مساوات ۵.۱۰۸ اور مساوات ۵.۱۰۹) کی قیمتیں حاصل کریں۔ اپنے نتائج کا موازنہ مساوات ۵.۴۳ اور مساوات ۵.۴۵ کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ مساوات ۵.۱۰۸ اور مساوات ۵.۱۰۹ میں الیکٹرانوں کے لیے 2 اضافی حبز و ضربی پایا جاتا ہے جو چپکری اخطاط کو ظاہر کرتا ہے۔)

سوال ۵.۲۹:

۱. بوسن کے لیے دکھائیں کہ کیمیائی پختہ ہر صورت میں کم سے کم اجبازتی توانائی سے کم ہوگا۔ اشارہ: $n(\epsilon)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔

ب. بالخصوص تمام T کے لیے، کامل بوس گیس کے لیے $\mu(T) < 0$ ہوگا۔ ایسی صورت میں N اور V کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کہ T کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا۔ اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات ۵.۱۰۸ پر غور کریں۔

ج. حرارت T کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحر ان (جسے بوس انجماد^۴ کہتے ہیں) پیدا ہوتا ہے جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے۔ مکمل کی قیمت، $\mu = 0$ کے لیے، حاصل کرتے ہوئے اس فنصل حرارت کا کلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا۔ اس فنصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہذا غیر مسلسل مجموعے (مساوات ۵.۷۸) کی جگہ استمراری مکمل (مساوات ۵.۱۰۸) کا استعمال بے معنی ہو جائے گا۔ اشارہ:

$$(۵.۱۱۰) \quad \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s)$$

جہاں Γ کو یولر کا گاما تعلق^۵ اور ζ کو ریماں زیتا تعلق^۶ کہتے ہیں۔ ان کی موزوں اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں۔

د. ہیلیم ^4He کی حرارت فنصل تلاش کریں۔ اس درجہ حرارت پر اس کی کثافت 0.15 g cm^{-3} ہوگی۔ تبصرہ: ہیلیم کی تجرباتی فنصل کی قیمت 2.17 K ہے۔

۵.۴.۵ سیاہ جسی طیف

نور (برقناطیسی میدان کے کوانٹا) چپکر 1 کے متنازل بوسن ہیں، تاہم یہ بے کیت ذرات لہذا اختلقی طور پر اضافیتی ہیں۔ ہم درج ذیل چار دعوے، جو غیر اضافیتی کوانٹائی میکانیات کا حصہ نہیں ہیں، قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں:

^۴Bose condensation

^۵gamma function

^۶Riemann zeta function

۱. نوریہ کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = h\nu = \hbar\omega$ دیتا ہے۔
۲. عدد موج k اور تعدد کا تعلق $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ ہے جہاں c روشنی کی رفتار ہے۔
۳. صرف دو چپکری حالات ہو سکتے ہیں (کو انشائی عدد m کی قیمت $+1$ یا -1 ہو سکتی ہے، تاہم یہ 0 نہیں ہو سکتی۔

۴. نوریوں کی تعداد بقائی مقدار نہیں ہے؛ درجہ حرارت بڑھانے سے (فی اکائی حجم) نوریوں کی تعداد بڑھتی ہے۔

حبزو 4 کی موجودگی میں، پہلی عائد پابندی (ساوات ۵.۷۸) کا اطلاق نہیں ہوگا۔ ہم ساوات ۵.۸۲ اور اس کے بعد آنے والی مساواتوں میں $0 \rightarrow \alpha$ لے کر اس شرط کو ختم کر سکتے ہیں۔ یوں نوریہ کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد مکین (ساوات ۵.۹۵) درج ذیل ہوگا۔

$$(5.111) \quad N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ایک ڈبہ جس کا حجم V ہو، میں آزاد نوریوں کے لیے d_k کی قیمت، ساوات ۵.۹۷ کو چکر (حبزو 3) کی بنا پر 2 سے ضرب دے کر حاصل ہوگی، جس کو k (حبزو 2) کی بجائے ω کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(5.112) \quad d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^3 d\omega$$

یوں تعددی سعت $d\omega$ میں کثافت توانائی $N_\omega \hbar\omega / V$ کی قیمت $\rho(\omega) d\omega$ ہوگی جہاں $\rho\omega$ درج ذیل ہے۔

$$(5.113) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

یہ سیاہ جسمی طیف^{۷۸} کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو برقیاتی میدان کی، حرارت T پر توازن کی صورت میں، فی اکائی حجم فی اکائی تعدد، توانائی دیتا ہے۔ اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل ۵.۹ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۰:

۱. ساوات ۵.۱۱۳ استعمال کرتے ہوئے طول موج کی سعت $d\lambda$ میں کثافت توانائی تعین کریں۔ اشارہ:

$\rho(\omega) d\omega = \bar{\rho}(\lambda) d\lambda$ کے لیے حل کریں۔

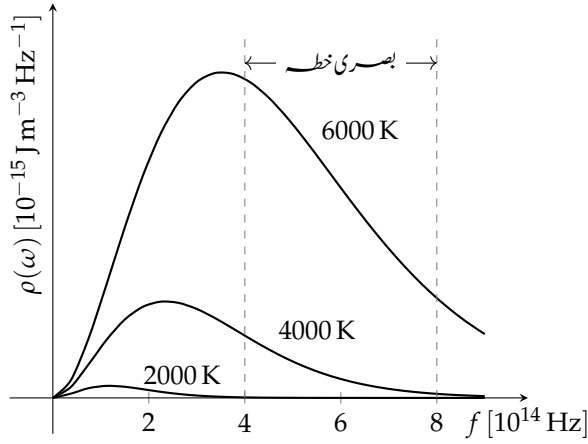
ب. اس طول موج کے لئے، جس پر سیاہ جسمی کثافت توانائی زیادہ سے زیادہ ہو، **وائن قانون ہٹاؤ**^{۷۹}

$$(5.114) \quad \lambda_{\text{بندتر}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} \text{ mK}}{T}$$

^{۷۸} درحقیقت۔ ہمیں اس کلیہ سے کچھ لینا دینا نہیں چوتے یہ (غیر اضافیتی) مساوات شرودنگر سے حاصل ہوا؛ خوش قسمتی سے اضافیتی صورت میں بھی انحطاط ٹھیک یہی ہے۔

^{۷۹} blackbody spectrum

^{۷۹} Wien displacement law



شکل ۵.۹: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات ۵.۱۱۳۔

اخذ کریں۔ اشارہ: آپ کو کیلو لیٹر یا کمپیوٹر کی استعمال سے مساوات $(5 - x) = 5e^{-x}$ حل کر تین بامعنی ہندسوں تک اعدادی جواب حاصل کرنا ہوگا۔

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسمی اخراج میں کل کثافت توانائی کا سیٹیفیڈ ویولٹریٹھ کلیہ: λ_0

$$(۵.۱۱۵) \quad \frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}) T^4$$

اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۵.۱۱۰ استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ یاد رہے کہ $\zeta(4) = \pi^4/90$ ہوگا۔

اضافی سوالات برائے باب ۵

سوال ۵.۳۲: فرض کریں ایک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں کیت m کے دو غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلے ہیجان حال میں پایا جاتا ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں۔ (الف) ذرات متماثل ممیز ہیں، (ب) یہ متماثل بوسن ہیں، (ج) یہ متماثل فرمیان ہیں۔ چکر کو نظر انداز کریں (اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر کی حال میں تصور کریں)۔

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات اور تین منفرد یک ذروی حالات $(\psi_a(x), \psi_b(x))$ اور $(\psi_c(x))$ دستیاب ہیں۔ درج ذیل صورتوں میں کتنے (مختلف) تین ذروی حالات تیار کیے جاسکتے ہیں؟ (الف)

ذرات متناثر (ب) یہ متناثر بوسن ہیں، (ج) یہ متناثر فرمیان ہیں۔ (ضروری نہیں کہ ذرات مختلف حالات میں ہوں؛ قابل تمیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے۔)

سوال ۵.۳۴: دو البادی لامتناہی چوکور کنویں میں غیر متعامل الیکٹرانوں کی فرمی توانائی کا حساب کریں۔ فی اکائی رقبہ آزاد الیکٹرانوں کی تعداد σ لیں۔

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے (جنہیں سفید بونا^۸ کہتے ہیں) کو تجاذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباؤ (مساوات ۵.۳۶) روکتا ہے۔ مستقل کشاف فرس کر تے ہوئے، ایسے جسم کا رداس R درج ذیل طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔

ا. کل الیکٹران توانائی (مساوات ۵.۳۵) کو رداس، مرکزیہ (پروٹان جمع نیوٹران) کی تعداد N ، فی مرکزیہ الیکٹران کی تعداد q ، اور الیکٹران کی کیت m کی صورت میں لکھیں۔

ب. یکساں کشاف کے کرہ کی تجاذبی توانائی تلاش کریں۔ اپنے جواب کو (عالمگیر تجاذبی مستقل) G ، R ، N ، اور ایک مرکزیہ کی کیت M کی صورت میں لکھیں۔ یاد رہے کہ تجاذبی توانائی منفی ہے۔

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر حبزو-الف اور حبزو-ب کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو۔ جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2 N^{1/3}}$$

(کل کیت بڑھنے سے رداس گھٹتا ہے!) مساوائے N کے، تمام متقلات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں (حقیقت میں، جوہری عدد بڑھنے سے q کی قیمت معمولی کم ہوتی ہے، لیکن ہمارے مقصد کے لئے یہ کافی ٹھیک ہے۔) جواب: $R = 7.6 \times 10^{25} N^{-1/3}$

د. سورج کے برابر کیت کے سفید بونا کا رداس، گلو میٹروں میں، دریافت کریں۔

ه. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ، حبزو-د میں سفید بونا کی فرمی توانائی (الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے) کا موازنہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے (سوال ۵.۳۶ دیکھیں)۔

سوال ۵.۳۶: ہم کلاسیکی حرکی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$ پر کرتے ہوئے آزاد الیکٹران گیس نظریہ (حصہ ۵.۳.۱) کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔ معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $\hbar k = p$ ہوگا۔ بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہوگا۔

ا. مساوات ۵.۳۴ میں $\hbar^2 k^2/2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فترہ، $\hbar ck$ ، پر کر کے E حاصل کریں۔

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کی صورت میں سوال ۵.۳۵ کے حبزو-الف اور حبزو-ب کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ، R سے قطع نظر، کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائی جاتی؛ اگر کل توانائی مثبت ہو تب انحطاطی

قوتیں تجاذبی قوتوں سے تجاذب کرتی ہیں، جس کی بنا پر ستارہ پھولے گا، اس کے برعکس اگر کل توانائی منفی ہو تب تجاذبی قوتیں جیتی ہیں، جس کی بنا پر ستارہ منہدم ہوگا۔ مرکز دہ کی وہ فاصل تعداد، N_c ، معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تجاذبی انہدام واقع ہوگا۔ اس کو چندر شیکھر حد^{۸۲} کہتے ہیں۔ جواب: 2.4×10^{57} ۔ مطابقتی ستارہ کی کیمت کیا ہوگی (اپنے جواب کو سورج کی کیمت کے مضرب کے صورت میں لکھیں)۔ اس سے بھاری ستارے سفید بونا نہیں بنتے، بلکہ مزید منہدم ہو کر (اگر حالات درست ہوں) نیوٹرائز ستارے^{۸۳} بنتے ہیں۔

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر، مخالفے بیٹا تحلیل^{۸۴}، $e^- + p^+ \rightarrow n + \bar{\nu}$ ، تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے (جس کی بنا پر نیوٹرینو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں)۔ آخر کار نیوٹران انحطاطی دباؤ انہدام کو روکتا ہے، جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران انحطاطی قوتیں کرتی ہیں (سوال ۵.۳۵ دیکھیں)۔ سورج کے برابر کیمت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں۔ ساتھ ہی (نیوٹران) منہدمی توانائی کا حساب کر کے، اس کا ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا نیوٹران ستارہ کو غییر اضافیتی تصور کیا جاسکتا ہے؟

سوال ۵.۳:

۱. تین ابعادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ (سوال ۴.۳۸) میں متبادل مییز ذرات کا کیمپادی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں۔ اشارہ: یہاں مساوات ۵.۷۸ اور مساوات ۵.۷۹ میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جاسکتی ہیں؛ ہمیں لامستثنائی چوکور کنویں کی مثال میں مکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا ہٹ؛ یہاں ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہندسہ تسلسل^{۸۵}

$$(۵.۱۱۲) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

حاصل ہوگا۔ اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ جواب:

$$(۵.۱۱۷) \quad E = \frac{3}{2} N \hbar \omega \left(\frac{1 + e^{-\hbar \omega / k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}} \right)$$

ب. تحدیدی حد $k_B T \ll \hbar \omega$ پر تبصرہ کریں۔

ج. مسئلہ مساوی خانہ بندی^{۸۶} کی روشنی میں کلاسیکی حد $\hbar\omega \gg k_B T$ پر تبصرہ کریں۔ تین ابعادی ہارمونی
مردقش میں ایک ذرے کے درجات آزادی^{۸۷} کتنے ہوں گے؟

جوابات