

# کوانٹم میکینیات

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۳۱ جولائی ۲۰۲۱



# عنوان

vii میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	تفاسل موج	۱
۱	۱.۱ شر و ڈنگر مساوات	۱
۲	۱.۲ شریاتی مفہوم	۲
۵	۱.۳ احتمال	۵
۵	۱.۳.۱ غیر مسلسل تغیرات	۵
۹	۱.۳.۲ استمراری تغیرات	۹
۱۲	۱.۴ معمول زنی	۱۲
۱۵	۱.۵ معیار حرکت	۱۵
۱۸	۱.۶ اصول عدم یقینیت	۱۸
۲۱	۲ غیر متابع وقت شر و ڈنگر مساوات	۲۱
۲۱	۲.۱ ساکن حالات	۲۱
۲۷	۲.۲ لامستثنائی چپکور کنواں	۲۷
۳۶	۲.۳ ہارمونی سر نقش	۳۶
۳۸	۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب	۳۸
۴۷	۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب	۴۷
۵۵	۲.۴ آزاد ذرہ	۵۵
۶۴	۲.۵ ڈیلٹا تفاسل محفہ	۶۴
۶۴	۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات	۶۴
۶۶	۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاسل کنواں	۶۶
۷۵	۲.۶ مستثنائی چپکور کنواں	۷۵
۸۵	۳ قواعد و ضوابط	۸۵
۸۵	۳.۱ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاسل	۸۵
۸۵	۳.۱.۱ غیر مسلسل طیف	۸۵
۸۷	۳.۱.۲ استمراری طیف	۸۷

۳.۲	متعم شریاتی مفہوم	۹۱
۳.۳	اصول عدم یقینیت	۹۴
۳.۳.۱	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۹۵
۳.۳.۲	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۹۸
۳.۳.۳	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۹۹
۳.۴	ڈیراک علامتیت	۱۰۳
۴	تین البادی کو انٹرمیکانیات	۱۱۷
۴.۱	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۱۱۷
۴.۱.۱	علیحدگی متغیرات	۱۱۹
۴.۱.۲	زاویائی مساوات	۱۲۰
۴.۱.۳	ردای مساوات	۱۲۵
۴.۲	ہائیڈروجن جوہر	۱۲۹
۴.۲.۱	ردای تقف عمل موج	۱۳۰
۴.۲.۲	ہائیڈروجن کا طیف	۱۴۰
۴.۳	زاویائی معیار حرکت	۱۴۲
۴.۳.۱	امتیازی اقتدار	۱۴۳
۵	متناثر ذرات	۱۴۷
۶	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۱۴۹
۶.۱	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۱۴۹
۶.۱.۱	عمومی ضابطہ بندی	۱۴۹
۶.۱.۲	اول رتبہ نظریہ	۱۵۰
۶.۱.۳	دوم رتبہ توانائیاں	۱۵۴
۶.۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۱۵۵
۶.۲.۱	دوپڑتا انخطاط	۱۵۵
۶.۲.۲	بلند رتبہ انخطاط	۱۵۹
۶.۳	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۱۶۳
۶.۳.۱	اضافیتی تصحیح	۱۶۴
۷	تغیری اصول	۱۶۱
۸	وکب تخمین	۱۶۳
۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۱۶۵
۱۰	حرارت ناگزیر تخمین	۱۶۷
۱۱	بکھراؤ	۱۶۹

۱۲ پس نوشت

۱۷۱

جوابات

۱۷۳

۱ خطی الجبرا

۱۷۵

۱.۱ سمتیاریت . . . . . ۱۷۵

۲.۱ اندرونی ضرب . . . . . ۱۷۵

۳.۱ قتالب . . . . . ۱۷۵

۴.۱ تبدیلی اساس . . . . . ۱۷۵

۵.۱ امتیازی قناعات اور امتیازی امتدار . . . . . ۱۷۵

۶.۱ ہر مشی تبادله . . . . . ۱۷۵

فہرہنگ

۱۷۷



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء





## باب ۶

# غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

## ۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

### ۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بعدی لامتناہی چکور کنواں) کے لئے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا مکمل سلسلہ

$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی افتدار  $E_n^0$  حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنواں کی تہہ میں ایک چھوٹا موٹا ڈال کر؛ شکل 6-1) ہم نے امتیازی تقاضات اور امتیازی افتدار حسابنا چاہیں گے:

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ نظریہ اضطراب کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم ب قدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$

باب ۶. غیر تانج وقت نظریہ اضطراب

جہاں  $H'$  اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں  $\lambda$  کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی اور  $H$  اصل ہیملٹنی ہوگا اس کے بعد ہم  $\psi_n$  اور  $E_n$  کو  $\lambda$  کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں  $n$  ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو  $E_n^1$  ظاہر کرتا ہے جبکہ  $n$  ویں امتیازی تفاعل میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو  $\psi_n^1$  ظاہر کرتا ہے اسی طرح  $E_n^2$  اور  $\psi_n^2$  دوم رتبہ تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H') [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots) [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا  $\lambda$  کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

مستمر رتبہ  $\lambda^0$  کی صورت میں اس سے  $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$  حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول ( $\lambda^1$ ) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

رتبہ دوم ( $\lambda^2$ ) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

وغیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے  $\lambda$  استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں)

۶.۱.۲ اول رتبہ نظریہ

مساوات ۶.۷ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی  $(\psi_n^0)^*$  سے ضرب دے کر مکمل لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم  $H^0$  ہر مثنیٰ ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید  $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$  کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی

مثال ۶.۱: لامتناہی چکور کنواں کی غیر مضطرب تصاعلات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

منرض کریں ہم کنواں کی تہہ کو مستقل مقدار  $V_0$  اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل 2.6 توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں  $H' = V_0$  ہوگا لہذا  $n$  ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں  $E_n \cong E_n^0 + V_0$  ہونگے جی ہاں تمام کی تمام  $V_0$  مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح منفر ہوں گی اس کے برعکس کنواں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل 3.6 ہوگا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح  $\frac{V_0}{2}$  اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مساوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے تصاعلات موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی منرض سے ہم مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں

$$(۶.۱۰) \quad (H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

یہاں کوئی یو پیسڈ لامتناہی چکور کنواں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تقاضا عمل ہے لہذا یہ  $\psi_n^1$  میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تقاضات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہذا کسی بھی تقاضا عمل کی طرح  $\psi_n^1$  کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے

$$(۶.۱۱) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0$$

اگر  $psi_n^1 /$  مساوات 10.6 کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل  $\alpha$  کے لیے  $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہذا ہم جزو  $\psi_n^0$  کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں کیا گیا عددی سر  $c_m^{(n)}$  تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جاننے ہوئے کہ غیر مضطرب شعروں کے مساوات مساوات 1.6 کو  $\psi_m^0$  مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا  $\psi_l^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر  $l = n$  ہو تب بائیں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر  $l \neq n$  ہو تو درج ذیل ہوگا

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$(۶.۱۲) \quad c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

لہذا اورج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۱۳) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو نسب نامہ کوئی ی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے  $m = n$  نہیں ہوتا) ہاں اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک دوسرے جتنی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نامہ میں صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں انخطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبہ نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبہ تصحیح  $E_n^1$  مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ

تفاعل موج کی اول رتبہ تصحیح  $\psi_n^1$  مساوات 13.6 دیتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرورت ناکچا ہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی  $E_n^0 + E_n^1$  اصل قیمت  $E_n$  کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چکور کنواں کے وسط میں  $\delta$  تفاعلی موڈاڈالتے ہیں

$$H' = \alpha \delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں  $\alpha$  ایک مستقل ہے

۱. احبازتی توانائیوں کی اول رتبہ تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت  $n$  کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہوں گی
- ب. زمینی حال کی تصحیح  $\psi_1^1$  کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاؤ میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش  $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$  کی احبازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں  $\omega = \sqrt{k/m}$  کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس پک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے  $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$

۱. (الف) نہیں توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کرے آپ نے کل یہ کو دوم رتبہ تک  $\epsilon$  کی طقتیں تسلسل میں پھیلائیں
- ب. اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبہ اضطراب کا حساب لگائیں یہاں  $H'$  کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نا ضرورت اور نہ احبازت ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چکور کنواں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں  $V_0$  ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور  $a$  کنواں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

۱. پہلی قدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے جعبان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں
- ب. اول رتبہ نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے جعبان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبہ نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

## ۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم  $\psi_n^0$  اور دور تبی مساوات مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم  $H^0$  کی ہر مشی پین کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا ساتھ ہی  $1 = \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$  ہوگا لہذا ہمارے پاس  $E_n^2$  کا درجہ ذیل کلیہ رہ جاتا ہے

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle \quad (۶.۱۴)$$

تاہم مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} m \neq n \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۵)$$

ہوگا جو دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاسل موج کی دوم رتبی تصحیح  $\psi_n^2$  توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔ سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح ( $E_n^2$ ) سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق  $n$  کیلئے  $2m(\alpha / \pi \hbar n)^2 -$  حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح  $E_n^2$  سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی محفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان ( $E$ ) چالو کرتے ہیں جس کی بنا محفی توانائی میں  $H' = qEx$  متدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۱. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات  $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$  استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شرودنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

## ۶.۲ انخطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انخطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ مضطرب حالات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کی توانائیاں ایک دوسرے جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ  $c_a^{(b)}$  مساوات 12.6 اور  $E_a^2$  مساوات 15.6 بے فت بوڑھتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو  $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$  اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انخطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

### ۶.۲.۱ دو پڑتا انخطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  معمول شدہ ہیں۔

$$(۶.۱۶) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$(۶.۱۷) \quad \psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی  $H^0$  کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر  $E^0$  بھی وہی ہو گا

$$(۶.۱۸) \quad H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$

عام طور پر اضطراب ( $H'$ ) انخطاط کو ”توڑے“ (یا ”منوخ“ کرے) گا جیسے جیسے ہم  $\lambda$  کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی  $E^0$  دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گا شکل 4.6 مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند یعنی صفر کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے ایک خطی جوڑ میں ہو گا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات 9.6 کا حاب نہیں کر سکتے ہیں



باب ۶. غیر متابع وقت نظریہ اضطراب

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات 17.6 میں لکھتے ہیں جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  متبادل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروع کر

$$H\psi = E\psi \quad (۱.۱۹)$$

کو  $H = H^0 + \lambda H'$  اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots \quad (۱.۲۰)$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات 19.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح  $\lambda$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H^0 \psi^0 + \lambda (H' \psi^0 + H^0 \psi^1) + \dots = E^0 \psi^0 + \lambda (E^1 \psi^0 + E^0 \psi^1) + \dots$$

اب  $H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$  مساوات 18.6 کی بنا اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ  $\lambda^1$  رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$H^0 \psi^1 + H' \psi^0 = E^0 \psi^1 + E^1 \psi^0 \quad (۱.۲۱)$$

اس کا  $\psi_a^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

چونکہ  $H^0$  ہر مشی ہے لہذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \quad (۱.۲۲)$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا

$$W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b) \quad (۱.۲۳)$$

اسی طرح  $\psi_b^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \quad (۱.۲۴)$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام  $W$  معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے لحاظ سے  $H'$  کے ارکان متبادل ہیں مساوات 24.6 کو  $W_{ab}$  سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے  $\beta W_{ab}$  کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\alpha [W_{ab} W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \quad (۱.۲۵)$$

غیر صفر  $\alpha$  کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں  $E^1$  کی مساوات دیگی

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \quad (۱.۲۶)$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ ثابت ہوئے  $W_{ba} = W_{ab}^*$  ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[ W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right] \quad (۱.۲۷)$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو جذور دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر  $\alpha$  کی صورت میں کیا ہوگا ایسی صورت میں  $\beta = 1$  ہوگا لہذا مساوات 22.6 کے تحت  $W_{ab} = 0$  اور مساوات 24.6 کے تحت  $E^1 = W_{bb}$  ہوگا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 0$  کی صورت میں ہوگا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  پہلے سے موزوں خطی جوڑتھ کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جان پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۱.۲: فرض کریں  $A$  ایک ایسا ہر مشی عامل ہے جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ متبادل ہے اگر  $H^0$  کے انحطاطی امتیازی تقاضات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  عامل  $A$  کے بھی امتیازی تقاضات ہوں جن کے منفرد امتیازی امتداد ہوں

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب  $W_{ab} = 0$  ہوگا لہذا  $\psi_b^0$  اور  $\psi_a^0$  نظریہ اضطراب میں متبادل استعمال موزوں حالات ہوں گے

ثبوت: ہم مندرجہ کرچے ہیں کہ  $[A, H'] = 0$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] | \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | AH' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A | \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A\psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' | \nu\psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب  $\mu \neq \nu$  ہے لہذا  $W_{ab} = 0$  ہوگا

سبق اگر آپ کا منہ انحطاطی حالات سے ہوا ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کرنے کی کوشش کریں جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ متبادل ہو  $H^0$  اور  $A$  کے یک وقت امتیازی تقاضات کو اپنے غیر مضطرب حالات

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عمل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہوگا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

جہاں  $\alpha_{\pm}$  اور  $\beta_{\pm}$  کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

$$a. \langle \psi_+^0 | \psi_-^0 \rangle = 0 \text{ عمودی ہے}$$

$$b. \langle \psi_+^0 | H' | \psi_-^0 \rangle = 0$$

$$c. \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E^1 \text{ کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے اپنے آپ پر بندیک بعدی خطہ جس کی لمبائی  $L$  ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

a. دکھائیں کہ ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m} \left( \frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال  $n = 0$  کے علاوہ تمام حالات دہرا انخطاطی ہے

b. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں  $L \gg a$  ہو یہ  $x = 0$  پر مخفیہ میں معمولی چھکاوٹ پیدا کرتا گویا تار کو یہاں سروڑا گیا ہوں مساوات 27.6 استعمال کرتے ہوئے  $E_n$  کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ  $H'$  خطہ  $-a < x < a$  کے باہر تقریباً صفر ہے اور  $L \gg a$  ہے لہذا مکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت مکمل کی حدود کو  $\pm L/2$  کی بجائے  $\pm \infty$  رکھیں

c. اس مسئلہ کے لئے  $\psi_n$  اور  $\psi_{-n}$  کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہوگی

د. ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ  $H^0$  اور  $A$  کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جبزونج میں استعمال کیے

## ۶.۲.۲ بلندرتبی انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جاسکتا ہے مساوات 22.6 اور 24.6 کو ہم دوبارہ تالیبی روپ میں لکھتے ہیں

$$(1.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ  $W$   $E^1$  متالب کے امتیازی افتدار ہیں مساوات 26.6 اس متالب کی امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ  $W$  کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم  $n$  پڑتا انخطاط کی صورت میں  $n \times n$  متالب

$$(1.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تقاضات موج کی تلاش سے مراد انخطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو متالب  $W$  کو وتری بناتا ہو یہاں بھی ایک ایسا عامل  $A$  تلاش کر کے جو  $H'$  کا متبادل ہو  $A$  اور  $H'$  کے بیک وقت امتیازی تقاضات استعمال کر کے ہم متالب  $W$  حاصل کریں گے جو از خود وتری ہو گا لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دو پڑتا انخطاط کو عمومیت دیتے ہوئے  $n$  پڑتا انخطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مثال ۶.۲: تین آبادی لامتناہی کعبی کنواں سوال 2.4 پر غور کریں

$$(1.30) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(1.31) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

جہاں  $n_x$ ،  $n_y$  اور  $n_z$  مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$(1.32) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

دھیان رہے کہ زمینی حال  $\psi_{111}$  غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$(۱.۳۳) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تیسرا انحطاطی ہیں

$$(۱.۳۴) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک دوسری جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جو ڈب کے ایک چوہتائی حصہ میں مخفیہ کو  $V_0$  مقدار بڑھاتا ہے شکل 5.6 زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتی ہے

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\ (۱.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی پہلے قدم میں ہم متالاب  $W$  تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلیل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\ &\quad \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \end{aligned}$$

تاہم  $z$  تکمل صفر ہوگا جیسا  $W_{ac}$  کے لیے بھی ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض درج ذیل ہوگا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہوگا جہاں  $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$  ہے

$$(۱.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

ماتر  $\mathbf{W}$  بلکہ  $4\mathbf{W}/V_0$  جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ۱.۵ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کے امتیازی امتداد درج ذیل ہوں گے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$

یوں  $\lambda$  کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۱.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 + \kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 - \kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں  $E_1^0$  مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی  $E_1^0$  تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انخطاط ختم کرتا ہے شکل 6.6 دیکھیں دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انخطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تصحیح مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی  $V_0/4$  ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

باب ۶. غیر تابَع وقت نظریہ اضطراب

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہونگے

(۶.۴۰)

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$

جہاں عددی سر (α, β, γ) متالِب W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں  $w = 1$  کے لیے  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$  جبکہ  $w = 1 \pm \kappa$  کے لیے  $\alpha = 0, \beta = \pm \gamma = 1/\sqrt{2}$  حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں پی کی ہیں۔ ہوں موزوں حالات درج ذیل ہونگے

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (۶.۴۱)$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنواں مساوات 30.6 میں نقطہ  $(a/4, a/2, 3a/4)$  پر ڈیلٹا تقابلی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنواں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انخطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابَع حالات پائے جاتے ہوں فرض کریں متالِبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں  $V_0$  ایک مستقل ہے اور  $\epsilon$  کوئی چھوٹا عدد ( $\epsilon \ll 1$ ) ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی ( $\epsilon = 0$ ) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. متالِب H کہ بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو  $\epsilon$  کی صورت میں دوم رتب تک طاقتمتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو  $H^0$  کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا حبز و-ا کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی افتدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: مسین دعویٰ چکا ہوں کہ  $n$  پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح و تالب  $W$  کے امتیازی افتدار ہوں گے مسین نے دعویٰ کیا کہ یہ  $n = 2$  صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چپل کر درج ذیل سے آغاز کریں

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(ساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ ساوات 22.6 کے مثال کا مفہوم و تالب  $W$  کی امتیازی قدر مساوات لیا جاسکتا ہے۔

### ۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶.۲۲)$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولب مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم  $m$  کی بجائے تخفیف شدہ کیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر-مدار ربط، کی بنیاد ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت  $\alpha^2$  گن کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۲۳)$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی  $\alpha$  گن چھوٹا لیب انتتال ہے جو بھر کی میدان کی کوانٹہ زنی سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے سچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیرت تعبہ وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی  $mc^2$  کی صورت میں لکھیں



باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

ب۔  $\hbar$ ،  $e$ ،  $\epsilon_0$  اور  $c$  کی تجرباتی کی قیمتے استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعت میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حوالے بود بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کو انٹیم میکانیات پلانکس مستقل کے بنیادی مستقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ جذب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نو بیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

### ۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$(۶.۴۴) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

جس میں باضابطہ متبادل  $\nabla^2 \rightarrow (\hbar/i) \nabla^2$  پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا

$$(۶.۴۵) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کھلیاں ہے اضافیتی کھلیاں درج ذیل ہے

$$(۶.۴۶) \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

جہاں پہلا جزو کھل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فحالیٰ عنصر بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے ہمیں سستی رفتار کی بجائیں اضافیتی معیار حرکت

$$(۶.۴۷) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

کی صورت میں  $T$  کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 [1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

ہوگا جس کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

غیراضافیتی حد  $p \ll mc$  کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد  $(p/mc)$  کی طاقستی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$T = mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 \dots - 1 \right]$$

$$(۶.۴۹) \quad = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبہ اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

غیر مضطرب حال میں  $H'$  کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں  $E_n$  کی تصحیح ہوگی مساوات 9.6

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle \psi | p^4 | \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شرودنگر مساوات کہتی ہے

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے  $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$  ہوگا

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں  $E_n$  زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال  $\psi_{nlm}$  مساوات 89.4 میں  $1/r$  اور  $1/r^2$  کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں  $a$  رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا مساوات ۱۷۲.۴ استعمال کرتے ہوئے  $a$  کو خارج کر کے باقی کو  $E_n$  مساوات ۷۰.۴ کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۵۷) \quad E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[ \frac{4n}{l+1/2} - 3 \right]$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار  $E_n$  سے تقریب  $2 \times 10^{-5}$   $E_n/mc^2$  گنا کم ہے



جوابات



# فهرست

54relation,	allowed
energy	26energies,
22allowed,	51 argument,
31conservation,	Bessel
13ensemble,	99function,spherical
expectation	107energy,binding
6value,	Bohr
formula	106radius,
16Broglie,De	106formula,Bohr
Fourier	25conditions,boundary
52transform,inverse	98term,centrifugal
52transform,	83states,coherent
Frobenius	4collapses,
45method,	commutation
function	36relation,canonical
59delta,Dirac	90relations,canonical
generalized	36commutator,
59distribution,	28complete,
59function,	77continuous,
generating	90continuum,
50function,	coordinates
generator	91spherical,
86space,intranslation	3interpretation,Copenhagen
86time,intranslation	75degenerate,
Gram-Schmidt	delta
79process,orthogonalization	28Kronecker,
21Hamiltonian,	Dirac
harmonic	80orthonormality,
25oscillator,	77discrete,
	dispersion

- 3realist,
- 12potential,
- 97effective,
- probability
- 8density,
- quantum
- 105number,principle
- numberquantum
- 96azimuthal,
- 96magnetic,
- 99numbers,quantum
- 97equation,radial
- recursion
- 46formula,
- reflection
- 64coefficient,
- 73time,revival
- Rodrigues
- 49formula,
- 94formula,Rodrigues
- Rydberg
- 113constant,
- 113formula,
- Schrodinger
- 20time-independent,
- 1align,Schrodinger
- series
- 113Balmer,
- 28Fourier,
- 113Lyman,
- 113Paschen,
- 35power,
- 34Taylor,
- spherical
- 96harmonics,
- 11square-integrable,
- 7deviation,standard
- state
- 58bound,
- 113Helium,
- Hermitian
- 40conjugate,
- 3variables,hidden
- 2indeterminacy,
- ladder
- 38operators,
- Laguerre
- 108polynomial,associated
- 108polynomial,
- 90Laplacian,
- law
- 34Hooke,
- Legendre
- 94associated,
- linear
- 22combination,
- 113Lithium,
- 6mean,
- 6median,
- 14momentum,
- Neumann
- 99function,spherical
- 27node,
- 10normalization,
- 14operator,
- 38lowering,
- 38raising,
- 27orthogonal,
- 28orthonormal,
- Planck's
- 113formula,
- polynomial
- 48Hermite,
- position
- 3agnostic,
- 3orthodox,



- اتاقی  
حالات، 83  
اجزائی  
توانائیاں، 26  
استمراری، 77  
استمراریہ، 90  
اصول  
عدم یقینیت، 16  
انتشاری  
رشتہ، 54  
انخطاطی، 75  
انعکاس  
شرح، 64  
اوسط، 6
- بقا  
توانائی، 31  
بندشی توانائی، 107  
بوہر  
رداس، 106  
کلیہ، 106  
بیل  
کروی تقاعس، 99
- پلانک  
کلیہ، 113  
پیداکار  
فضا میں انتقال کا، 86  
وقت میں انتقال، 86  
پیداکار  
تقاعس، 50
- تبادلہ  
باضابطہ رشتہ، 36  
باضابطہ رشتہ، 90  
تبادلہ کار، 36  
تجدیدی عرصہ، 73  
ترسیل  
شرح، 64
- تسل  
المہ، 113  
پاشن، 113
- 27excited,  
107,27ground,  
58scattering,  
statistical  
2interpretation,  
66function,step  
theorem  
28Dirichlet's,  
15Ehrenfest,  
52Plancherel,  
112transition,  
transmission  
64coefficient,  
65,58tunneling,  
58points,turning  
16principle,uncertainty  
variables  
19of,separation  
7variance,  
velocity  
54group,  
54phase,  
wave  
64incident,  
52packet,  
64reflected,  
64transmitted,  
1function,wave  
16wavelength,

- ساکن  
حالات، 21  
سرحدی شرائط، 25  
سرنگ زنی، 58، 65  
سگرا، 13  
سوچ  
انکاری، 3  
تقلید پسند، 3  
حقیقت پسند، 3  
سیڑھی  
عاملین، 38  
سیڑھی تفاعل، 66  
شروڈنگر  
غیر تابع وقت، 20  
شروڈنگر تصویر کشی، 86  
شروڈنگر مساوات، 1  
شماریاتی مفہوم، 2  
طول موج، 16، 113  
عامل  
تقلیل، 38  
رفت، 38  
عبور، 112  
عدم تعین، 2  
عدم یقینیت اصول، 16  
عندروہ، 27  
علیحدگی متغیرات، 19  
عمودی، 27  
معیاری، 28  
غیر مسلسل، 77  
منرو وینوس  
ترکیب، 45  
فوریر  
الٹ بدل، 52  
بدل، 52  
قابل تکامل مربع، 11  
قانون
- ٹیلر، 34  
طامتی، 35  
فوریر، 28  
لیمان، 113  
تغییریت، 7  
تفاعل  
ڈیلٹا، 59  
تفاعل موج، 1  
توالی  
کلیہ، 46  
توانائی  
اجزائی، 22  
توقعاتی  
قیمت، 6  
جفت  
تفاعل، 24  
حال  
بھراؤ، 58  
زمینی، 27، 107  
مقید، 58  
ہیجان، 27  
خطی جوڑ، 22  
خفیہ متغیرات، 3  
دلیل، 51  
ڈیراک  
معیاری عمودیت، 80  
ڈیلٹا  
کرونیگر، 28  
رداسی مساوات، 97  
رڈبرگ، 113  
کلیہ، 113  
رفتار  
دوری سستی، 54  
گروہی سستی، 54  
روڈریگیس  
کلیہ، 94

سرگز گریز حبزو، 98  
مسئلہ

اہر نفٹ، 15  
پلائشرال، 52  
ڈرٹلے، 28  
معمول زنی، 10  
معیار حرکت، 14  
معیار عمودی، 28  
معیاری انحراف، 7  
مکمل، 28  
موج

آمدی، 64  
ترسیلی، 64  
منعکس، 64  
موجی اکھ، 52

نیومن  
کروی تقاعسل، 99

واپسی نقاط، 58  
وسطانیہ، 6

ہارمونی  
سر تعش، 25  
ہر مشی

جوڑی دار، 40  
ہیزنبرگ تصویر کشی، 86  
ہیلیم، 113  
ہیملٹنی، 21

ہا، 34

کثافت

احتمال، 8  
کشیر رکتی

ہرمانٹ، 48  
کروی

ہارمونیات، 96  
کلیہ

ڈی پروگ، 16  
روڈریگیس، 49

کوانٹم

صدر عدد، 105  
کوانٹائی اعداد، 99

کوانٹائی عدد  
استی، 96

مقتطیسی، 96  
کوپن ہیگن مفہوم، 3

گرام شمہ

ترکیب عمودیت، 79  
گر کر، 4

لاپلاسی، 90  
لاگ

شریک کشیر رکتی، 108  
کشیر رکتی، 108

لتصیم، 113  
لیوڈنڈر

شریک، 94

متعمم

تقاعسل، 59  
تقسیم، 59

محدد

کروی، 91  
مخفیہ، 12

موثر، 97  
سر تعش

ہارمونی، 25