

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زبان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	۹.۳	خود با خود احسراج
۳۶۰	۹.۳.۱	آمنشائن عددی سر A اور B
۳۶۲	۹.۳.۲	بجبان حال کا عرصہ حیات
۳۶۵	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۷۵	۱۰	سرناگزرتھمین
۳۷۵	۱۰.۱	مسئلہ سرناگزرتھمین
۳۷۵	۱۰.۱.۱	سرناگزرتھمین عمل
۳۷۸	۱۰.۱.۲	مسئلہ سرناگزرتھمین کا ثبوت
۳۸۳	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۸۳	۱۰.۲.۱	گرگی عمل
۳۸۵	۱۰.۲.۲	ہندسی ہیت
۳۹۱	۱۰.۲.۳	اہارونو پوہم اثر
۴۰۱	۱۱	بکھراؤ
۴۰۱	۱۱.۱	تعارف
۴۰۱	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ
۴۰۵	۱۱.۱.۲	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ
۴۰۷	۱۱.۲	جبروی موج تجزیہ
۴۰۷	۱۱.۲.۱	اصول و ضوابط
۴۱۱	۱۱.۲.۲	الایا عمل
۴۱۳	۱۱.۳	میتقلات حیط
۴۱۶	۱۱.۴	بارن تھمین
۴۱۶	۱۱.۴.۱	مساوات شرودنگر کی عملی روپ
۴۲۱	۱۱.۴.۲	بارن تھمین اول
۴۲۵	۱۱.۴.۳	تسلل بارن
۴۲۹	۱۲	پس نوشت
۴۳۰	۱۲.۱	آمنشائن پوڈلکیوروزن تصاد
۴۳۱	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۳۶	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۴۳۷	۱۲.۴	شرودنگر کی ہلی
۴۳۸	۱۲.۵	کوانٹائی زینو تصاد
۴۴۱		جوابات
۴۴۳	۱	خطی الجبرا
۴۴۳	۱.۱	سمتیات
۴۴۳	۲.۱	اندرونی ضرب
۴۴۴	۳.۱	فتالب

۴۴۴	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۴	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۴۴	هر مشی تبادلے	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۱

بکھراؤ

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

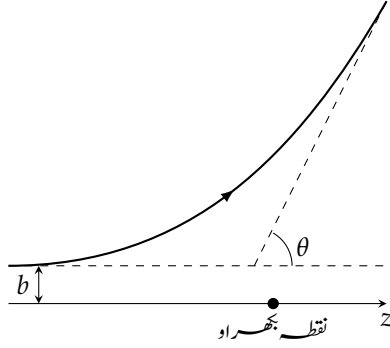
فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرے کی آمد ہوتی ہے (مثلاً، پروٹان ایک بھاری مرکزہ پر دافعہ جاتا ہے)۔ یہ توانائی E اور ٹکراؤ مقدار معلوم b کے ساتھ آکر، زاویہ بکھراؤ θ پر ابھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ (میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استیثا کلی ہے، یوں خط حرکت^۳ مستوی میں پایا جائے گا، اور ساتھ ہی فرض کرتا ہوں کہ نشانہ بھاری ہے، لہذا تصادم کی بنا پر اس کی اچھال نظر انداز کی جاسکتی ہے۔) کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم جانتے ہوئے، زاویہ بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً، عام طور پر، ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو، زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سخت کرہ بکھراؤ۔ فرض کریں رداس R کا ایک سخت بھاری گیند ہدف، جبکہ ہوائی بندوق کا چھرا (جس کو ہم نقطہ تصور کرتے ہیں) آمدی ذرہ ہے، جو چکی لائپ کھاکر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم $b = R \sin \alpha$ اور زاویہ بکھراؤ $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

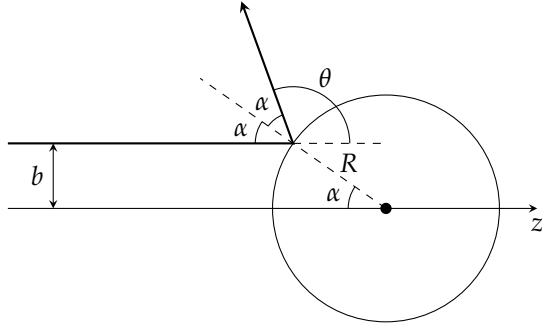
$$(11.1) \quad b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

ظاہر اور ج ذیل ہوگا۔

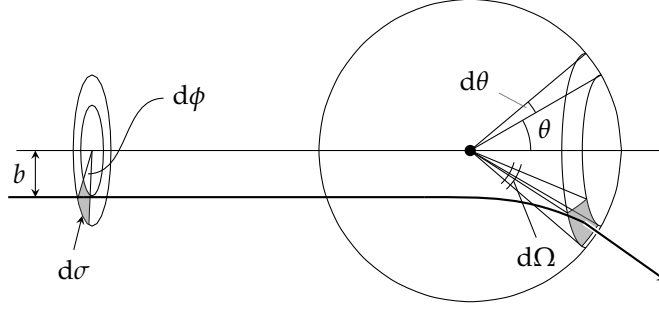
impact parameter^۱
scattering angle^۲
trajectory^۳



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراؤ، جس میں نکرہ مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراؤ θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے پسندیدہ بکھراؤ۔



شکل ۱۱.۳: $d\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$

□

عمومی طور پر، لامستثنائی چھوٹے قطعے، جس کا رقبہ عمودی تراش $d\sigma$ ہو، میں آمدی ذرات، مطابقتی لامستثنائی چھوٹے ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ جتنا $d\sigma$ بڑا ہو، اتنا $d\Omega$ بڑا ہوگا؛ ان کے تناسبی جزو ضربی $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$ کو تفریقی (بکھراؤ) عمودی تراش^۴ کہتے ہیں۔ ^۵یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

عکراؤ متدار معلوم اور استمقی زاویہ ϕ کی صورت میں $d\sigma = b db d\phi$ اور $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ہیں، لہذا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

ہوگا۔ (عمومی طور پر θ متدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تعلق ہوگا، لہذا یہ تفریق حقیقتاً منفی ہوگا؛ اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔)

مثال ۱۱.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال بارے رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ (مثال ۱۱.۱) کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

^۴differential (scattering) cross-section

^۵یہ ناقص زبان ہے: D تفریقی نہیں ہے، اور نہ ہی یہ عمودی تراش ہے۔

لہذا

$$(11.۶) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left(\frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□ ہوگا۔ اس مثال میں تفسیری عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے، جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا مکمل:

$$(11.۷) \quad \sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega$$

کل عمودی تراش^۱ ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہے جس کو ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر، سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں

$$(11.۸) \quad \sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2$$

ہوگا، جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے: یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے؛ اس رقبہ کے اندر آمدی چھسے ہدف کو مار پائیں گے، جبکہ اس سے باہر چھسے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات ”نرم“ اہداف (جیسا مرکزہ کا کولم میدان) کے لئے بھی کارآمد ہے، جن میں صرف نشانے پر ”لگنا یا نہ لگنا“ کے علاوہ بھی بات کی جائے گی۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت (یا تاہم \mathcal{L}) کی ایک شعاع ہو۔

$$(11.۹) \quad \mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد}$$

فی اکائی وقت، رقبہ $d\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات (اور یوں ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرنے والے ذرات) کی تعداد $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$ ہوگی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۱۰) \quad D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتی ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جاسکتا ہے، لہذا اس کو عموماً تفسیری عمودی تراش کی تعریف لی جاتی ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرے ذرات کا کشف تک پہنچتے ہوں، ہم اکائی وقت میں کشف کیے گئے ذرات کی گنتی کو dN سے تقسیم کر کے، آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول زنی کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: رد فورڈ بکھراؤ^۲ بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ بھاری ساکن ذرے سے، جس کا بار q_2 ہو، بکھرتا ہے۔

^۱ total cross-section
^۲ luminosity
^۳ Rutherford scattering

ا. ٹکراؤ متدار معلوم اور زاویہ بکھراؤ کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2)$$

ب. تفسیری بکھراؤ عمودی تراش تعین کریں۔ جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.11)$$

ج. دکھائیں کہ رد فورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $1/r$ مخفیہ کی "لامتناہی سعت" ہے؛ آپ کو لب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹائی نظریے میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ z رخ حرکت کرتی ہوئی آمدی مستوی موج، $\psi(z) = Ae^{ikz}$ ، کا مخفیہ بکھرے سامنا ہوتا ہے، جس کے نتیجے میں ایک رخصتی کردی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۲)۔^۹ یعنی، ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لئے} \quad (11.12)$$

(احتمال کے بقا کی خاطر $|\psi|^2$ کے اس حصے کو لازماً $1/r^2$ سے تبدیل ہونا ہوگا، لہذا کردی موج میں حبز و ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے)۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح رشتہ:

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (11.13)$$

ہوگا۔ یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف اتمی تشاکلی ہے؛ زیادہ عمومی صورت میں، رخصتی کردی موج کا جیٹ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہو سکتا ہے۔

ہمیں جیٹ "بکھراؤ" $f(\theta)$ کا تعین کرنا ہوگا؛ یہ رخ θ میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے، لہذا اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً، رفتار v پر چلتے ہوئے آمدی ذرے کا لامتناہی چھوٹے رقبہ $d\sigma$ میں سے وقت dt

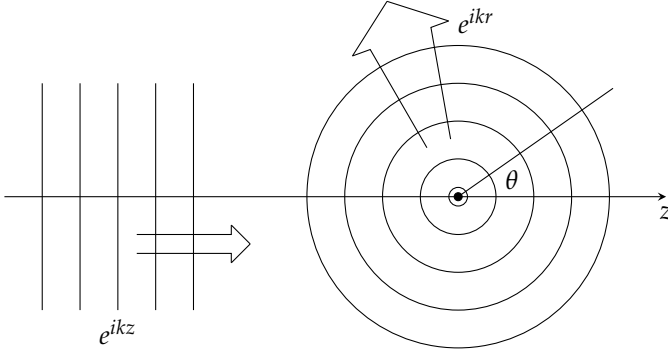
فی الحال، یہاں کوئی خاص کوانٹائی میکینکات نہیں ہے؛ ہم درحقیقت، کلاسیکی ذرات کی بجائے امواج کے بکھراؤ کی بات کر رہے ہیں، اور آپ شکل ۱۱.۳ کو پانی کے امواج کا پتھر کے ساتھ ٹکراؤ تصور کر سکتے ہیں، یا (چونکہ، ہم تین بُدی بکھراؤ میں دلچسپی رکھتے ہیں، لہذا ابستریہ ہوگا کہ انہیں) ایک گیسندے صوتی امواج کا بکھراؤ تصور کریں۔ ایسی صورت میں ہم قس عمل موج کو حقیقی روپ:

$$A[\cos(kz) + f(\theta) \cos(kr + \delta)/r]$$

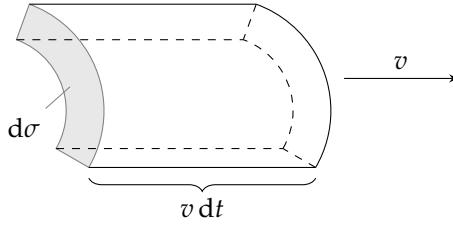
میں لکھتے ہیں اور θ رخ بکھرتے صوتی موج کے جیٹ کو $f(\theta)$ ظاہر کرتا ہے۔

wave number^{۱۰}

scattering amplitude^{۱۱}



شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراؤ؛ آمدی مستوی موج رخصتی کرومی موج پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۱.۵: وقت dt کے دوران رقبہ $d\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم $dV = (d\sigma)(v dt)$ ہے۔

میں گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں)

$$dP = |\psi_{آمدی}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

ہوگا۔ لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں اس ذرے کے بکھراؤ کا احتمال:

$$dP = |\psi_{بکھرا}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا، لہذا $d\sigma = |f|^2 d\Omega$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (11.14)$$

ظاہر ہے کہ، تفسیری عمودی تراش (جس میں تجربیت پسند دلچسپی رکھتا ہے) جیٹہ بکھراؤ (جو مساوات شرودنگر کے حل سے حاصل ہوگا) کے مطابق مربع کے برابر ہوگا۔ آنے والے حصوں میں ہم جیٹہ بکھراؤ کے باب کے دو تراکیب: جزوی موج تجزیہ اور بارلے تخیل پر غور کریں گے۔

سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لئے مساوات ۱۱.۱۲ کے مثال تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب ۴ میں دیکھا کہ کروئی تشکیلی مخفیہ $V(r)$ کے لئے مساوات شرودنگر قابل علیحدگی حلوں:

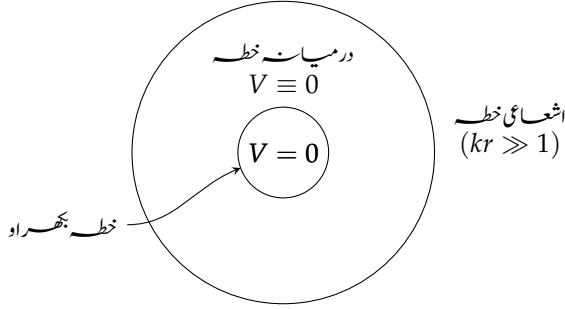
$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (11.15)$$

کا حاصل ہوگا، جہاں Y_ℓ^m کروئی ہارمونی (مساوات ۴.۳۲) ہے اور $rR(r)$ مساوات $u(r)$ ردای مساوات (مساوات ۴.۳۷):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (11.16)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ بہت بڑے r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے، اور مرکز گریز حتمی بل نظر انداز ہوگا، لہذا

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$



شکل ۱۱.۶: معتمانی مخفیہ سے بکھراؤ، خط بکھراؤ، درمیانہ خط، اور اشعاعی خط۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا عمومی حل

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

ہے؛ پہلا جزو رخصتی کروئی موج کو اور دوسرا جزو آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ ظاہر ہے کہ بکھرے موج کے لئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑے r کی صورت میں

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

ہوگا، جسے ہم گزشتہ حصہ میں (طبیعی بنیادوں پر) اخذ کر چکے (مسوات ۱۱.۱۲)۔

یہ بہت بڑے r کے لئے تھا (یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $kr \gg 1$ کے لئے تھا؛ بصریات میں اسے خط اشعاع^{۱۲} کہیں گے)۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح، ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ "معتمانی" ہے، جس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ کسی مستثنائی بکھراؤ خط کے باہر مخفیہ تفسیر صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانہ خط میں (جہاں V کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز جزو کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا)،^{۱۳} ارداسی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(11.14) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل (مسوات ۴.۴۵) کروئی۔ بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ:

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_\ell(kr) + B r n_\ell(kr)$$

^{۱۲} radiation zone

^{۱۳} یہاں سے آگے تبصرہ کولمب مخفیہ کے لئے درست نہیں، چونکہ $r \rightarrow \infty$ کرنے سے $1/r^2$ کے لحاظ سے $1/r$ صفر تک زیادہ آہستہ پہنچتا ہے، اور مرکز گریز جزو اس خط میں غالب نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے کولمب مخفیہ معتمانی نہیں ہے، اور جزوی موج تجزیہ متاثر اطلاق نہیں ہوگا۔

ہوگا۔ لیکن نہ ہی j_ℓ (جو سائن تفاعل کی طرح ہے) اور نہ ہی n_ℓ (جو مستقیم کوسائن کی طرح ہے) رخصتی (یا آمدی) موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} کے مثال خطی جوڑ درکار ہوں گے؛ انہیں کروئی **بینکل تفاعلات**^{۱۴}:

$$(11.19) \quad h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

کہتے ہیں۔ جدول ۱۱.۱ میں چند ابتدائی کروئی بینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑے r کی صورت میں،

$$\text{جدول ۱۱.۱: کروئی بینکل تفاعلات } h_\ell^{(1)}(x) \text{ اور } h_\ell^{(2)}(x)$$

$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$
$\left. \begin{aligned} h_\ell^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{\ell+1} e^{ix} \\ h_\ell^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{\ell+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1$	

$h_\ell^{(1)}(kr)$ (جسے ”بینکل تفاعل کی پہلی قسم“ کہتے ہیں) e^{ikr}/r کی طرح سے تبدیل ہوتا ہے، جبکہ $h_\ell^{(2)}(kr)$ (بینکل تفاعل کی دوسری قسم) e^{-ikr}/r سے تبدیل ہوگا۔ یوں، رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروئی بینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہوگی۔

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطہ بکھراوے کے باہر (جہاں $V(r) = 0$ ہوگا) ٹھیک ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_\ell^{(1)}(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جزو آمدی مستوی موج ہے، جبکہ مجموعہ (جس کے عددی سر $C_{\ell, m}$ ہیں) موج بکھراوے کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشاکلی ہے، لہذا تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا۔^{۱۵} ایوں صرف وہ اجزاء

^{۱۴}spherical Hankel functions

چونکہ آمدی موج z رخ کا تعین کرتی ہے جو کروئی تشاکل حصار اب کرتی ہے، لہذا تابعیت θ کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتی۔ تاہم انتہی تشاکل بر مزار رہتا ہے؛ آمدی مستوی موج میں تابعیت ϕ نہیں پائی جاتی، اور بکھراوے کے عمل میں ایسی کوئی حسیبت نہیں جو رخصتی موج میں تابعیت ϕ پیدا کرے۔

باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو (یاد رہے، $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$)۔ اب مساوات ۱۴.۲ اور مساوات ۴.۳۲ سے درج ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta)$$

جہاں ℓ ویں لیٹھ انڈر کنشیرر کنی کو P_ℓ ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر، $C_{\ell,0} \equiv i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)} a_\ell$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف نوکی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_\ell h_\ell^{(1)}(kr) P_\ell(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص عاقبت کیوں بہتر ہے؛ a_ℓ کو ℓ واں جزوی موج جیلہ^{۱۶} کہتے ہیں۔ اب بہت بڑے r کے لئے میٹکل تفاعل e^{ikr}/kr ($-i$) ^{$\ell+1$} صورت اختیار کرتا ہے (جدول ۱۱.۱)، لہذا

$$(11.24) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

ہوگا، جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے۔

$$(11.25) \quad f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

یہ مساوات ۱۱.۱۲ میں میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی زیادہ پختہ تصدیق کرتا ہے، اور ہمیں جزوی موج جیلوں (a_ℓ) کی صورت میں جیلہ بکھراؤ، $f(\theta)$ ، حاصل کرنے کے قابل بناتا ہے۔ تشریفاتی عمودی تراش:

$$(11.26) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) a_\ell^* a_{\ell'} P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

ہوگا، اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.27) \quad \sigma = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |a_\ell|^2$$

(زاویائی کھل کو حاصل کرنے کے لئے میں نے لیٹھ انڈر کنشیرر کنیوں کی عمودیت مساوات ۱۴.۳۳ استعمال کی۔)

^{۱۶} partial wave amplitude

۱۱.۲.۲ لائچ عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے جزوی موج حیٹوں a_ℓ کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خط جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے پھر او موج کے لئے کروئی محدود جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدود استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لئے مساوات شرودنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{\ell, m} [A_{\ell, m} j_\ell(kr) + B_{\ell, m} n_\ell(kr)] Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

یوں بالخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبداء پر e^{ikz} مستثنیٰ ہے لہذا z من تفاعلات کی اجازت نہیں ہوگی $r = 0$ پر $n_\ell(kr)$ بے متا یوڑ ہتے ہیں اور چونکہ $z = r \cos \theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لہذا صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروئی امواج کی صورت میں صریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خط میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(kr) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(kr)] P_\ell(\cos \theta)$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹائی سخت کرہ پھر او۔ درج ذیل منرض کریں

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \text{ کے لئے} \\ 0, & r > a \text{ کے لئے} \end{cases}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

یوں تمام θ کے لئے

$$(11.32) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(ka) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(ka)] P_\ell(\cos \theta) = 0$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$(11.33) \quad a_\ell = i \frac{j_\ell(ka)}{kh_\ell^{(1)}(ka)}$$

بالخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left| \frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)} \right|^2$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جاسکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدیدی صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لئے $n_\ell(z)$ کی مقدار $j_\ell(z)$ سے بہت زیادہ ہوگی لہذا

$$(11.35) \quad \frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} = \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z) + in_\ell(z)} \approx -i \frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)}$$

$$\approx -i \frac{2^\ell l! z^\ell / (2\ell+1)!}{-(2\ell)! z^{-\ell-1} / 2^\ell \ell!} = \frac{i}{2\ell+1} \left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^2 z^{2\ell+1}$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^4 (ka)^{4\ell+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لہذا بلند طاقتیں متاثر نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $\ell = 0$ جبکہ بکھراؤ میں غالب ہوگا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لئے تقریبی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہوگا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی تحت کرہ بکھراؤ کے لئے درج ذیل ہوگا

$$(11.36) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت ہندسی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہوگا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اوپر سے گزرتے ہیں نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیڈانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ ℓ کی مختلف قیمتوں والے عمودی سرلازماً صفر ہوں گے۔

آمدی جمع منعکس کل تف عمل موج صفر ہوگا

$$(11.۳۹) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لہذا $B = -A$ ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لئے تف عمل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.۴۰) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لئے k لہذا توانائی $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ کی صورت میں منتقل جیٹ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراؤ ($-a < x < 0$) میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مسلط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط جیٹ B کی بجائے منتقل جیٹ کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف جیٹ تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط منتشر درجہ وجود حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی متضاد کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا کیلے میں $m \neq 0$ والا کوئی جزو نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ k کی تشابہ کی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لہذا ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی ℓ سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے جیٹ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی تاہم اس کا جیٹ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بالکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہوگا لہذا ℓ ویں جزوی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$(11.۴۱) \quad \psi_0^{(\ell)} = Ai^{\ell}(2\ell + 1)j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۲) \quad j_{\ell}(x) = \frac{1}{2} [h^{(1)}(x) + h_{\ell}^{(2)}(x)] \approx \frac{1}{2x} [(-i)^{\ell+1}e^{ix} + i^{\ell+1}e^{-ix}] \quad (x \gg 1)$$

لہذا بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۳) \quad \psi_0^{(\ell)} \approx A \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^{\ell}e^{-ikr}] P_{\ell}(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

چونکہ کورسین میں دوسرا جزو آمدی k کی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متضاد کرے گا یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جزو رختی موج ہے جو منتقل جیٹ δ_{ℓ} لیتا ہے

$$(11.۴۴) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} [e^{i(kr + 2\delta_1)} - (-1)^{\ell}e^{-ikr}] P_{\ell}(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

آپ e^{ikz} میں $h_\ell^{(2)}$ جزوی بنا پر اس کو کروی سرنگز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_\ell$ منتقل حیط پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_\ell^{(1)}$ حصے کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کرو یہ موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفہیم حیطوں a_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا ہے اس کو منتقل حیط δ_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متقارب رویہ

$$(11.۴۵) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] + \frac{(2\ell+1)}{r} a_\ell e^{ikr} \right\} P_\ell(\cos \theta)$$

کا δ_ℓ کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.۴۶) \quad a_\ell = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell)$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$(11.۴۷) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$(11.۴۸) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell)$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے انتشارات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے۔ منتقلی حیط زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_ℓ جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_ℓ استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل محفہ پر بانیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[\frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad \text{جہاں } k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیظ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لئے متقلات حیظ δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

$$\delta = -ka$$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لئے جزوی موج حیظ انتشار δ_ℓ کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیپٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $\ell = 0$ جزوی موج انتشار حیظ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔
ایک کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \rightarrow \infty$ پر ردائی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1} \left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکلی روپ

غیر تاج وقت مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$

اس کاروپ سرسری طور پر مساوات ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جزو Q خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کرپائیں جو ڈیپٹا تفاعل عملی منبع کے لئے مساوات ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \quad (11.52)$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک مکمل لکھ سکتے ہیں

$$(11.53) \quad \psi(r) = \int G(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r-r_0)] Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہولمز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعل منبج کو رد عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لئے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فورسز تبدیل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$(11.54) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

ہوگا تاہم

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

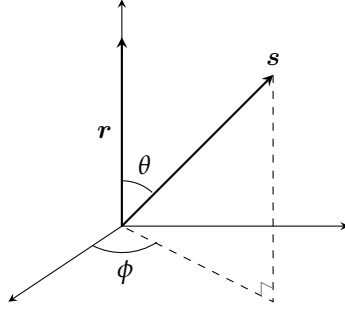
$$(11.56) \quad \delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

لہذا مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is \cdot r} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدود برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا مکمل۔

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پڑ کے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.58) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب s مکمل کے نقطہ نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کر دی محدود (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s \cdot r = sr \cos \theta$ ہوگا متغیر ϕ کا مکمل 2π ہوگا جبکہ θ مکمل درج ذیل ہوگا

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

یوں درج ذیل ہوگا

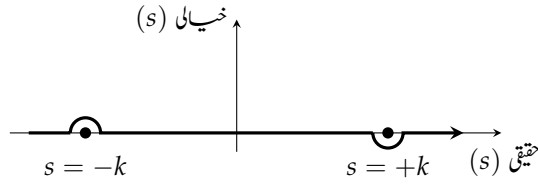
$$(11.60) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds$$

باقی مکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیات استعمال کر کے نصب نم کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$(11.61) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right\} \\ = \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

اگر z_0 خط ارتقہ کے اندر پایا جاتا ہو تب کوئی کلیہ مکمل

$$(11.62) \quad \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$



شکل ۱۱.۹: ارتقاعی مکمل (مسوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔



شکل ۱۱.۱۰: مسوات ۱۱.۶۳ اور مسوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے دیگر صورت مکمل صفر ہوگا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ مکمل ایجاہار ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاسل کرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھوں گا کہ یہ تمام قابل قبول ہوں گے۔

مسوات 11.61 میں ہر ایک مکمل کے لئے ہمیں خط استواء کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ مکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جزو ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس مکمل کے لئے ہم بالانصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰)۔ اب خط ارتقاع صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.63) \quad I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

مکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جزو بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جزو ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لہذا ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقاع $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لہذا اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$(11.64) \quad I_2 = - \oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.۶۵) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[\left(i\pi e^{ikr} \right) - \left(-i\pi e^{ikr} \right) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلا واسطہ تفریق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کریں سوال 11.8، دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایک کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(11.۶۶) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس اہم کی وجہ قطبین کے متغیر سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.۶۷) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(11.۶۸) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

مساوات 11.67 مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ ہے جو زیادہ معروضہ تفریقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمیل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ تکمیل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکمیلی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراؤ مسائل کے لئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $-\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لئے مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ E منفی ہے لہذا $k = i\kappa$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE/\hbar}$ ہوگا۔

۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ معتمی مخفیہ ہے یعنی کسی مستمائی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراو میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراو سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی مکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لئے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لہذا

$$(11.۶۹) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۰) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.۷۱) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.۷۲) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۳) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نام میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نام میں ہمیں دوسرا جزو بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نام میں دوسرے جزو کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتی جزو کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔ بکھراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

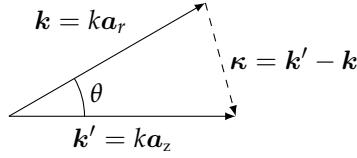
$$(11.۷۴) \quad \psi_0(r) = A e^{ikz}$$

یوں بڑی r کے لئے درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۵) \quad \psi(r) \cong A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیط بکھراو پڑھ سکتے ہیں

$$(11.۷۶) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراؤ رخ ہے۔

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروئے کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ و تابل ذکر تبدیل نہیں کرتا ہوا ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(11.47) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik' \cdot r_0}$$

جہاں تکمیل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$(11.48) \quad k' \equiv k\hat{z}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا ہے بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k'-k) \cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کارخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ موخر الذکر کارخ کا شیف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خطہ بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراؤ کے لئے قوت نمائی حبز و ضربی بنیادی طور پر مستقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.50) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا امید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.51) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.52) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفریقی عمودی تراش

$$(11.83) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.84) \quad \sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

ایک کروئی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.85) \quad \kappa \equiv k' - k$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.86) \quad (k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.87) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیر نوشتہ کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$(11.88) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروئی تشاکل}$$

f کی زاویائی تابعت κ میں سمونی گئی ہے شکل ۱۱.۱۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.89) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا کھسراو۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کاروپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$(11.90) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$(11.91) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)}$$

□

آپ کو سوال 11.11 میں یہ مکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۶: ردور فورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ جیٹہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.93) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}$$

اس کا مربع ہمیں تفصیلی عمودی تراش دیگا

$$(11.94) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

جو ٹھیک کلیہ ردور فورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کالسی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹائی نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردور فورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے نرم کرہ بکھراؤ کا جیٹہ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں مکمل کی قیمت تلاش کر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

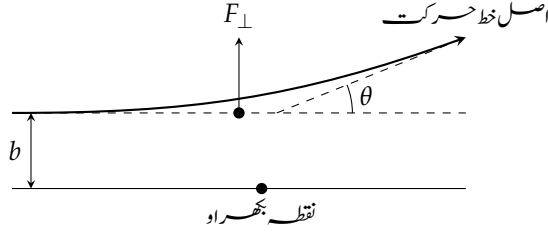
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تناسب لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں مندرجہ ذیل کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں مندرجہ ذیل ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لکیر پر ہی چلے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_{\perp} dt \quad (11.95)$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \quad (11.96)$$

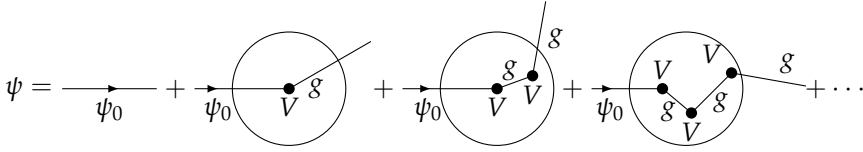
اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبہ اول کہہ جائے گا اسی طرح صفر رتبہ اول تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ درحقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مہر کوڑ ہو سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی عملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r-r_0)V(r_0)\psi(r_0) d^3 r_0 \quad (11.97)$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (11.98)$$



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظری مفہوم۔

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے جزو ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$(11.99) \quad \psi = \psi_0 + \int g V \psi$$

منہض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے مکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$(11.100) \quad \psi = \psi_0 + \int g V \psi_0 + \iint g V g V \psi$$

اس عمل کہ بار بار دہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$(11.101) \quad \psi = \psi_0 + \int g V \psi_0 + \iint g V g V \psi_0 + \iiint g V g V g V \psi_0 + \dots$$

ہر مکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جزو کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلندی ترقی تصحیح کس طرح پیدا کی جاتی ہیں گی۔

بارن تسلسل کا حنا کہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ منہض رتی ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتی اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ حسل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹائی میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جزو ضربی را V اور اشاعت کار g کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردور فورڈ بکھراؤ کے لئے θ کو ٹکراؤ متدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دکھائیں کہ مناسب حدود کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی فسترد سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لئے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

سوال ۱۱.۱۶: ایک بُدی مساوات شرودنگر کے لئے تنفس عمل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مثال مکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$(11.102) \quad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدأ پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر ایک بُدی بکھراؤ کے لئے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.103) \quad R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیٹا تنفس عمل مساوات 2.114 اور ایک مستثنیٰ چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لئے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو ایک بُدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ جیٹ بکھراؤ کے خیالی جزو اور کل عمودی تراش کے پچر شتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$(11.104) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$(11.105) \quad V(r) = Ae^{-\mu r^2}$$

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
 حالات، 133
 احبابی
 قیمتیں، 33
 ارتعاش
 نیوٹرینو، 127
 استمراری، 105
 استمراری مساوات، 194
 استمراری، 138
 اصول
 عدم یقینیت، 19
 اصول تغیریت، 299
 اصول عدم یقینیت، 116
 اضافیتی تصحیح، 272
 اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
 الیکٹران
 کلاسیکی رداس، 175
 الیکٹران نیوٹرینو، 127
 امتیازی تغیر عمل، 103
 امتیازی فتر، 103
 امتیازی فتر مساوات، 103
 انتشاری
 رشته، 67
 انحطاطی، 90، 104
 انحطاطی دباؤ، 228
 اندرونی ضرب، 98
 انعکاس
 شرح، 78
 اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
 برقی حرکیات
 کوانٹائی، 278
 بقا
 توانائی، 39
 بقا احتمال، 194
 بلاواسطہ مکمل، 313
 بسندشی توانائی، 156
 بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
 بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
 variables
 separation of, 25
 variance, 9
 variational principle, 299
 vectors, 97
 velocity
 group, 66
 phase, 66
 virial theorem, 132
 three-dimensional, 194
 wag the tail, 56
 wave
 incident, 77
 packet, 62
 reflected, 77
 transmitted, 77
 wave function, 2
 wave vector, 224
 wavelength, 18
 white dwarf, 252
 Wien displacement law, 250
 WKB, 321
 Yukawa potential, 316
 Zeeman effect, 283
 zero-crossing, 34

- بوسن، 208
 بوہر
 رداس، 156
 کلیہ، 155
 بوہر مقناطیس، 284
 بیریان، 191
 میل
 کروی تقا عمل، 148
 بے لچک پھسکی، 173
 پازیشٹرانیم، 207، 291
 پاشن ویک اثر، 285
 پالی اصول مناعت، 208
 پالی متالب چکر، 177
 پایان، 191
 پیال، 234
 پس پردہ، 219
 پلانک
 کلیہ، 162
 پسیداکار
 فضا میں انتقال کا، 136
 وقت میں انتقال، 136
 پسیداکار
 تقا عمل، 60
 گھومتا، 200
 تجدیدی عرصہ، 89
 تجربہ
 شرٹن و گرلاخ، 184
 ترتیبی پیمائشیں، 131
 ترسیل
 شرح، 78
 تسل
 بالمر، 162
 پاشن، 162
 ٹیلر، 42
 طاقتی، 43
 فوریئر، 35
 لیمان، 162
 تشاکلیت
 ضرورت، 209
 تشکیل، 237
 تعداد مکین، 237
 تعیین حال، 103
 تغیریت، 9
 تقا عمل
 ڈیٹا، 72
 تقا عمل موج، 2
 تقا علیہ، 128
 تکمل
 ڈھانچائی، 312
 توانی
 کلیہ، 55
 توانائی
 احبابتی، 29
 توقعاتی
 قیوت، 7
 شنائی عددی سر، 239
 حبرو ڈارون، 280
 جسم مقیاس، 229
 جفت، 34
 تقا عمل، 31
 جفت قطب معیار اثر
 مقناطیسی، 181
 جوہری مدار چوں
 خطی جوڑ ترکیب، 311
 جی حبرو ضربی، 278
 چکر، 173، 174
 مخالف میدان، 175
 ہم میدان، 175
 چکر چکر رابطہ، 290
 چکر کار، 175
 چکر و مدار باہم عمل، 279
 چکر و مدار رابطہ، 272
 چندر شیکھر حد، 253
 چوزاویہ تشکل، 298
 حال
 بھراؤ، 70

- 66، دوری سستی
 66، گروہی سستی
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،
 194، رواحتمال،
 روڈریگیس
 142، کلیہ
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،
 زاویائی معیار حرکت
 170، بقب
 174، خنلقی
 174، غیر خنلقی
 283، زیسان اثر،
 ساکن
 27، حالایت
 243، تخمین
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،
 32، سرحدی شراط،
 72، 79، سرنک زنی،
 252، سفید بونا،
 15، سگرا،
 220، سلور،
 128، سمتاویہ،
 97، سمتیات،
 224، سمتیہ موج،
 سوچ
 4، انکاری،
 3، تقلید پسند،
 3، حقیقت پسند،
 23، سوڈیم،
 188، سہ تا،
 250، سیاہ جسمی طیف،
 سیزھی
 46، عاملین،
 80، سیزھی تفسا عمل،
 296، شمارک اثر،
 27، شروڈنگر
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،
 زمینی، 34، 156
 70، مقید،
 34، ہچکان،
 236، حراری توازن،
 حرکت
 202، سائیکلوثران،
 خطی الجبر، 97
 خطی تبدلہ، 97
 خطی جوڑ، 28
 خفیہ متغیرات، 3
 235، 219، خول،
 درجہ حرارت آزاد، 254
 درجہ حرارت، 236
 234، درز،
 290، درز توانائی،
 61، دلیل،
 96، 56، دم ہلانا،
 219، دوری جدول،
 ڈیراک
 128، علامتیت،
 229، کنگھی،
 108، معیاری عمودیت،
 ڈیلٹا
 35، کرونیٹر،
 297، ڈیوٹریم،
 297، ڈیوٹیران،
 ذرہ
 21، غیر مستحکم،
 رو
 21، احتمال،
 146، ردای مساوات،
 162، رڈبرگ،
 162، کلیہ،
 رشتہ
 295، پترنگ،
 295، کرامرس،
 رفتار

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اتمتی، 145
 مقنطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
 گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرافتی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گروپویشن، 163
 گیماتفا عمل، 249
 لاپلائی، 138
 لارمر تعدد، 184
 لاگنج
 شریک کشیررکتی، 158
 کشیررکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لپٹان، 175
 لتضم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسنڈو سطحیں، 202
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284
 لوریننز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیب انتقال، 272
 ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
 متعمم
 تقابل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کردی، 139
 محتلف بیٹا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تقاطعات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز جزو، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وننمن و بلن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناسٹائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فضا تقاطع عمل موج، 113، 195
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100، 35
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈیل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپیلا فٹا عدہ، 221
کاشیہ فٹا عدہ، 221
کادوسرا فٹا عدہ، 221
ہار مونی
سر نقش، 32
ہار مونی سر نقش
تین البعدی، 193
ہائیڈروجن
میونی، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فضا، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی تسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلدیت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتضی معیار اثر
بے ضابطہ، 278
مکمل، 35، 100
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزد ہیلیم، 217
نظر اب اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیو من
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ ط، 70