

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمولی زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متنازع وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستثنائی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	.....	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	.....	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	.....	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	.....	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	.....	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	.....	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	.....	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	.....	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	.....	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	.....	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	.....	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	.....	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	.....	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	.....	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	.....	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	.....	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	.....	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	.....	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	.....	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	.....	تغیری اصول	۷
۲۹۹	.....	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	.....	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	.....	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۲۱	.....	وٹزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	.....	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	.....	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	.....	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	.....	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	.....	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	.....	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	.....	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	.....	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	.....	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	.....	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن عددی سر A اور B . . . . .	۹.۳.۱
۳۶۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۷۵	حرارت ناگزیر تخمین . . . . .	۱۰
۳۷۵	مسئلہ حرارت ناگزیر . . . . .	۱۰.۱
۳۷۵	حرارت ناگزیر عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۸۳	ہیت بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۸۳	گرگی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندی ہیت . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۹۰	اہارو نوو یو ہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۳۹۹	بکھراؤ . . . . .	۱۱
۳۹۹	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۳۹۹	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۴۰۳	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۴۰۴	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۴۰۴	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۴۰۷	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۱۰	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۱۳	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۱۳	مساوات شرودنگر کی عملی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۱۷	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۲۱	تسل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۲۵	پس نوشت . . . . .	۱۲
۴۲۶	آمنشائن پوڈ لکیو روزن تضاد . . . . .	۱۲.۱
۴۲۷	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۳۲	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۳۳	شرودنگر کی ملی . . . . .	۱۲.۴
۴۳۴	کوانٹائی زینو تضاد . . . . .	۱۲.۵
۴۳۷	جوابات . . . . .	
۴۳۹	خطی الجبرا . . . . .	۱
۴۳۹	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۳۹	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۴۰	قتالب . . . . .	۳.۱

- ۴.۱ تبدیلی اساس ..... ۴۴۰
- ۵.۱ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار ..... ۴۴۰
- ۶.۱ ہر مشی تباولے ..... ۴۴۰

۴۴۱

فترہنگ





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۹

# تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹائی سکونیات<sup>۱</sup> کہا جاسکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت:  $V(r, t) = V(r)$  ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شرودنگر:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جاسکتا ہے، جہاں  $\psi(r)$  غیر تابع مساوات شرودنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نسائی جزو ضربی  $(e^{iEt/\hbar})$  ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبیعی مقدار  $|\Psi|^2$  کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی پھلانگ**<sup>۲</sup> کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (کوانٹائی حرکت)<sup>۳</sup> متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

quantum statics<sup>۱</sup>  
quantum jumps<sup>۲</sup>  
quantum dynamics<sup>۳</sup>

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی احراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

## ۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی،  $H^0$ ، کے امتیازی حالات:

$$(9.1) \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.3) \quad \Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  مقام و فضاء کی تفاعلات، یا چپکار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے فرض ہے، لہذا جب میں  $\Psi(t)$  لکھتا ہوں، میرا مراد وقت  $t$  پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر حبز واپنی خصوصی قوت نمائی حبز و ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$(9.4) \quad \Psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ ”حال  $\psi_a$  میں ذرہ پائے جانے کا احتمال“  $|c_a|^2$  ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت  $E_a$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_a|^2$  ہے۔ یقیناً، تفاعل  $\Psi$  کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

## ۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب،  $H'(t)$ ، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  ایک مکمل سلسلہ نام کرتے ہیں، لہذا تفاعل موج  $\Psi(t)$  کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب  $c_a$  اور  $c_b$  وقت  $t$  کے تفاعلات ہوں گے۔

$$(9.6) \quad \Psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

(میں قوت نسائی حبز و ضربوں کو  $c_a(t)$  یا  $c_b(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔) ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات  $c_a$  اور  $c_b$  کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال  $\psi_a$  ( $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت  $t_1$  پر  $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$  ہو، تب ہم کہیں گے کہ نظام  $\psi_a$  سے  $\psi_b$  میں تحویل ہوا ہے۔

ہم  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  معلوم کرنے کی غرض سے مطالب کرتے ہیں کہ  $\Psi(t)$  تابع وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرے۔

$$(9.7) \quad H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad H = H^0 + H'(t)$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ = i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right. \\ \left. + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_bt/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(9.8) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right]$$

تفعل  $\psi_a$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم  $\dot{c}_a$  کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$(9.9) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle$$

دھیان رہے کہ  $H'$  ہر مثنیٰ ہے، لہذا  $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$  ہوگا۔ دونوں اطراف کو  $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$  سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(9.10) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b - E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح  $\psi_b$  کے ساتھ اندرونی ضرب سے  $\dot{c}_b$  الگ کیا جاسکتا ہے:

$$c_a \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle e^{-iE_a t / \hbar} + c_b \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle e^{-iE_b t / \hbar} = i \hbar \dot{c}_b e^{-iE_b t / \hbar}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.11) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{i(E_b - E_a)t / \hbar} \right]$$

مساوات ۹.۱۰ اور مساوات ۹.۱۱ سے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کا تعین کرتے ہیں؛ یہ دونوں مسئلہ کو دو سطحی نظام کی (تابع وقت) مساوات شرودنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر  $H'$  کے وتری متعلقہ ارکان صفر ہوں گے:

$$(9.12) \quad H'_{aa} = H'_{bb} = 0$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ رہے:

$$(9.13) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(9.14) \quad \omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

(میں  $E_b \geq E_a$  فرض کرتا ہوں، لہذا  $\omega_0 \geq 0$  ہوگا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو (تابع وقت) برقی میدان  $\mathbf{E} = E(t)\mathbf{k}$  میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال ( $n = 1$ ) اور (چارگٹ انحطاطی) پہلے ہیجان حالات ( $n = 2$ ) کے بیچ اضطراب  $H' = eEz$  کے چاروں متعلقہ ارکان  $H'_{ij}$  تلاش کریں۔ دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے  $H'_{ii} = 0$  ہوگا۔ تبصرہ: محور  $z$  کے لحاظ سے طاق پڑھو اور دے کار لاتے ہوئے، صرف ایک مکمل حل کرنے کی ضرورت ہوگی؛ اس روپ کا اضطراب زمینی حال سے  $n = 2$  حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے، لہذا یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا؛ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ بلند ہیجان حالات تک تحویل نظریہ انداز کی جاسکتی ہے۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں  $c_a(0) = 1$  اور  $c_b(0) = 0$  لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔ تبصرہ: بظاہر یہ نظام ”خالص  $\psi_a$ “ اور ”کسی  $\psi_b$ “ کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں تحویل نہیں ہوگی؟ جی نہیں، لیکن اس کی وجہ کچھ لطیف ہے: یہاں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہی توانائی کی پیمائش کبھی بھی  $E_a$  یا  $E_b$  نہیں دیگی۔ نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر، تابع وقت نظریہ اضطراب میں ہم عموماً اضطراب چالو کر کے کچھ دورانیہ کے بعد بند

کرتے ہیں۔ آغاز اور اختتام میں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے، اور صرف اس سیاق و سباق میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نظام ایک سے دوسرے میں تحویل ہوا۔ یوں، موجودہ مسئلے میں، فرض کریں کہ وقت  $t = 0$  پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت  $t$  پر بند کیا جاتا ہے؛ اس سے حساب پر کوئی مشرق نہیں پڑے گا، تاہم یہ نتائج کی معقول تشریح ممکن بناتی ہے۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کاروپ (وقت کا  $\delta$  تفاعل ہے۔

$$H' = U\delta(t)$$

فرض کریں  $U_{aa} = U_{bb} = 0$  اور  $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$  ہے۔ اگر  $c_a(-\infty) = 1$  اور  $c_b(-\infty) = 0$  ہوں،  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  تلاش کریں، اور تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔ تحویل ہونے کا حتمی احتمال  $t \rightarrow \infty$  کے لیے  $P_{a \rightarrow b}$  کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کے تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha|/\hbar)$$

## ۹.۱.۲ تاجع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل ٹھیک رہا ہے؛ ہم نے اضطراب کی جامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا۔ لیکن، ”چھوٹے“  $H'$  کی صورت میں ہم مساوات ۹.۱۳ کو (درج ذیل) یک بعد دیگرہ تخمینے سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال:

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں (صفر رتبہ میں) رہے گا۔ صفر رتبہ:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

(میں تخمینے کے رتبہ کو زیر بالا میں قوسین میں لکھتا ہوں۔ یوں  $c_a^{(0)}(t)$  میں ”0“ رتبہ صفر کو ظاہر کرتا ہے۔)

ہم مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں رتبہ صفر قیمتیں پڑ کر کے اول رتبہ تخمینے حاصل کرتے ہیں۔ اول رتبہ:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1$$

$$\frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

دوم رتبہ:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \rightarrow$$

$$c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[ \int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں  $c_b$  تبدیل نہیں ہوا  $c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t)$ ۔ (دھیان رہے کہ  $c_a^{(2)}(t)$  میں صفر رتبہ جزو بھی شامل ہے؛ دوم رتبہ تصحیح صرف عملی حصہ ہوگا۔)

اصولاً، ہم اسی طرح چلتے ہوئے  $n$  رتبہ تخمین کو مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے  $(n + 1)$  رتبہ تخمین کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ صفر رتبہ میں  $H'$  کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا، اول رتبہ تصحیح میں  $H'$  کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے، دوم رتبہ تصحیح میں  $H'$  کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں، وغیرہ۔<sup>۵</sup> اول رتبہ تخمین میں سہو ہوگا۔ ہاں  $H'$  میں اول رتبہ تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$  سے صاف ظاہر ہے (ٹھیک عددی سروں کو یقیناً مساوات ۹.۵ پر پورا اترنا چاہیے)۔ یہی کچھ زیادہ بلند رتبہ تخمین کے لیے بھی ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ  $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$  نہیں لیتے۔

۱. صورت  $c_a(0) = 1$  اور  $c_b(0) = 0$  کے لئے اول رتبہ نظریہ اضطراب سے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں۔ دکھائیں کہ  $H'$  میں اول رتبہ تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$  ہوگا۔

ب. اس مسئلے کو بہتر انداز میں نمٹا جاسکتا ہے۔ درج ذیل لیکر

$$(9.19) \quad d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دکھائیں کہ

$$(9.20) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

ہوگا، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(9.21) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

<sup>۵</sup> دھیان رہے کہ ہر جگہ رتبہ میں  $c_a$ ، اور ہر طبقہ رتبہ میں  $c_b$  تبدیل ہوتا ہے؛ اگر نظام ان دو حالات کے خطی جوڑے آفسز کرے، یا اضطراب میں وتری ارکان پائے جاتے ہیں، تب ایسا نہیں ہوگا۔



یوں ( $H'$  کے ساتھ چسپاں اضافی جزو ضرب  $e^{i\phi}$  کے علاوہ)  $d_a$  اور  $d_b$  کی مساواتیں، ساخت کے لحاظ سے مساوات ۹.۱۳ کی متماثل ہیں۔

ج. اول رتبی نظریہ اضطراب سے، جزو-ب کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے،  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں، اور اپنے جواب کا جزو-الف کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں مندرجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت  $c_b(0) = b$ ،  $c_a(0) = a$  کے لیے نظریہ اضطراب میں مساوات ۹.۱۳ کو دوم رتبہ تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب (سوال ۹.۲) کے لیے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو دوم رتبہ تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

### ۹.۱.۳ سائن نما اضطراب

معرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائن نما ہو:

$$(9.22) \quad H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t)$$

تب

$$(9.23) \quad H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t)$$

ہوگا، جہاں  $V_{ab}$  درج ذیل ہے۔

$$(9.24) \quad V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

(عملاً، تقریباً ہر صورت میں وتری متالابی ارکان صفر ہوتے ہیں، لہذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں معرض کرتا ہوں کہ وتری متالابی ارکان صفر ہیں۔) اول رتبہ تک (یہاں سے آگے، ہم صرف اول رتبہ تک کام کریں گے، لہذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی) درج ذیل ہوگا (مساوات ۹.۱۷)۔

$$(9.25) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{i V_{ba}}{2\hbar} \int_0^t \left[ e^{i(\omega_0 + \omega)t'} + e^{i(\omega_0 - \omega)t'} \right] dt' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right] \end{aligned}$$

یہی جواب ہے، لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ جبری تعدد  $(\omega)$  کو تحلیلی تعدد  $(\omega_0)$  کے بہت قریب رہنے کا پابند بنانے سے، چونکہ قوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا، جس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں؛ بالخصوص ہم درج ذیل معرض کرتے ہیں۔

$$(9.26) \quad \omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

یہ بہت بڑی پابندی نہیں ہے، چونکہ کسی دوسرے تعدد پر تحویل کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہے۔<sup>۶</sup> پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$c_b(t) \cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}}{\omega_0 - \omega} \left[ e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t/2} \right]$$

$$(9.24) \quad = -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}$$

ایک ذرہ جو حال  $\psi_a$  سے آغاز کر کے لمحہ  $t$  پر حال  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہو، کے تحویل کا احتمال، جس کو **تحویل احتمال**<sup>۷</sup> کہتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

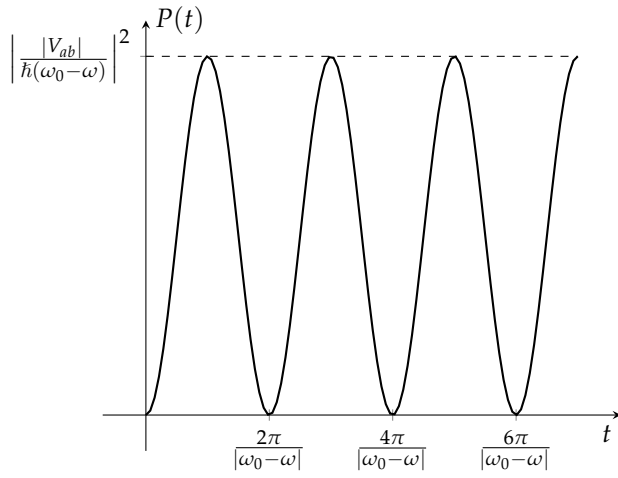
اس نتیجے کا دلچسپ پہلو یہ ہے کہ، وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال سائن نار تعاضل کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ  $|V_{ab}|^2 / \hbar^2 (\omega_0 - \omega)^2$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر، جولا زمًا 1 سے بہت کم ہے (درج ذیل ہم اضطراب کو چھوٹا فرض نہیں کر پائیں گے) یہ واپس گر کر صفر ہوتا ہے! لمحات  $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$  پر، جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$  ہے، ذرہ لازماً ٹھپے حال میں ہوگا۔ اگر آپ تحویل کا احتمال بڑھا نا چاہتے ہیں، اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے چالو نہ رکھیں؛ بہتر ہوگا کہ آپ وقت  $\pi / |\omega_0 - \omega|$  پر اضطراب کو بند کر کے نظام کو بالائی حال میں ”پانے“ کی امید کریں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ تحویل، نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں، بلکہ ٹھیک حال میں بھی ایسا ہی ہوگا، اگرچہ تحویل تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، تحویل کا احتمال اس صورت سب سے زیادہ ہوگا جب جب جبری تعدد قدرتی تعدد  $\omega_0$  کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں  $\omega$  کے لحاظ سے  $P_{a \rightarrow b}$  ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی بلندی  $(|V_{ab}| t / 2\hbar)^2$  جبکہ چوڑائی  $4\pi / t$  ہے؛ ظاہر ہے کہ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اس کی بلندی بڑھتی اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ (ظاہر، زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کی بتدریج بڑھتی ہے۔ تاہم 1 تک پہنچنے سے بہت پہلے چھوٹے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے، لہذا ہم نسبتاً کم  $t$  کے لیے اس نتیجے پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ ٹھیک نتیجہ 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔)

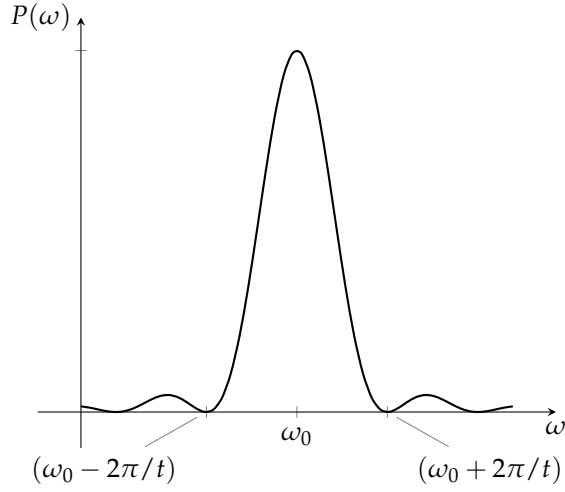
سوال ۹.۷: مساوات ۹.۲۵ میں پہلا جزو  $\cos(\omega t)$  کے  $e^{i\omega t} / 2$  حصے، اور دوسرا  $e^{-i\omega t} / 2$  سے آتا ہے۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر  $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$  لکھنے کا معادل ہے، یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں۔

$$(9.29) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$

<sup>۶</sup> آنے والے حصوں میں ہم اس نظریے کا اطلاق روشنی پر کریں گے، جس کا  $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ہے، لہذا دونوں اجزاء میں نسب نما انتہائی بڑا ہوگا، ماسوائے  $\omega_0$  کے قریب (دوسرے جزو میں)۔  
<sup>۷</sup> transition probability



شکل ۹.۱: سائنس مضطرب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات ۹.۲۸)۔



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالقابل متحرک تعدد (مساوات ۹.۲۸)۔

(ہیملٹنی متالاب کو ہر مشی بنانے کی خاطر مومنہ ذکر کی ضرورت پیش آتی ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں کہ ہم  $c_a(t)$  کے لیے مساوات ۹.۲۵ کی طرح کلیہ میں غلاب جزو منتخب کرتے ہیں۔) اس کو گھومتی موج تخیل<sup>۸</sup> کہتے ہیں۔ جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کے آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ کو، نظریہ اضطراب استعمال کیے بغیر اور میدان کے زور کے بارے میں کچھ فرض کیے بغیر، بالکل ٹھیک ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

۱. عمومی ابتدائی معلومات  $c_b(0) = 0$ ،  $c_a(0) = 1$  کے لیے گھومتی موج تخمین (مساوات ۹.۲۹) لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ اپنے جوابات  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو رابی پلٹنے<sup>۹</sup> عدد:

$$\omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}| / \hbar)^2} \quad (۹.۳۰)$$

کی صورت میں لکھیں۔

ب. تحویلی احتمال  $P_{a \rightarrow b}(t)$  کا تخمین کریں، اور دکھائیں کہ یہ کبھی بھی 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔

ج. تصدیق کریں کہ ”کم“ اضطراب کی صورت میں  $P_{a \rightarrow b}(t)$  نظریہ اضطراب کا نتیجہ (مساوات ۹.۲۸) دے گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں ”کم“ سے مراد  $V$  پر عائد کیا پابندی ہے۔

د. نظام پہلی مرتبہ اپنے ابتدائی حال میں کس وقت واپس آئے گا؟

## ۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

### ۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

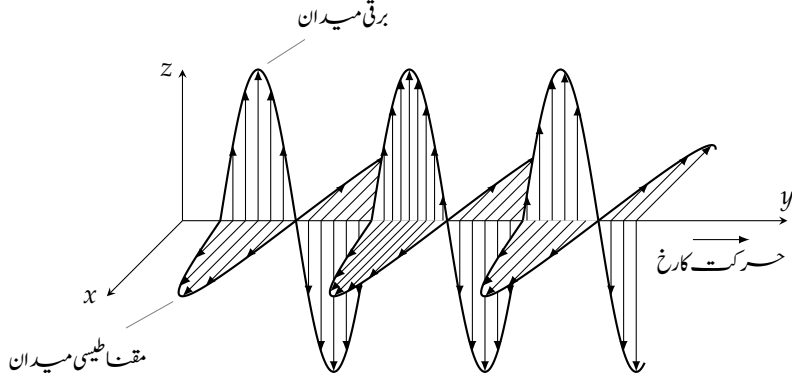
ایک برقناطیسی موج (جس کو میں روشنی کہوں گا، اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خنرد امواج، ایکس رے، وغیرہ ہو سکتی ہے؛ جن میں صرف تعدد کا فرق ہے) عرضی (اور باہم متعام) ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر، گزرتی ہوئی بصری موج کی برقی حبزو کو، بنیادی طور پر رد عمل کرتا ہے۔ اگر طول موج (جوہر کی جامت کے لحاظ سے) لمبا ہو، ہم میدان کے فاصلاتی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔<sup>۱۰</sup> تب جوہر سائنس ارتعاشی برقی میدان:

$$E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{k} \quad (۹.۳۱)$$

<sup>۸</sup> rotating wave approximation

<sup>۹</sup> Rabi flopping frequency

<sup>۱۰</sup> بصری روشنی کے لئے  $500 \text{ nm} \sim \lambda$  جبکہ جوہر کا قطر  $0.1 \text{ nm}$  کے لگ بھگ ہے، لہذا یہ تخمین معقول ہے؛ تاہم ایکس رے کے لئے ایسا نہیں ہوگا۔ سوال ۹.۲۱ میدان کے فاصلاتی تغیر پر غور کرتا ہے۔



شکل ۹.۳: برقی و مغناطیسی موج۔

کے زیر اثر ہوگا (فی الحال میں روشنی کو ایک رنگی اور  $z$  رخ تقطیب شدہ فرض کرتا ہوں)۔ اضطرابی ہیملٹنی "درج ذیل ہوگی، جہاں  $q$  الیکٹران کا بار ہے۔"<sup>۳</sup>

$$(۹.۳۲) \quad H' = -qE_0 z \cos(\omega t)$$

بظاہر درج ذیل ہوگا۔<sup>۳</sup>

$$(۹.۳۳) \quad H'_{ba} = -\wp E_0 \cos(\omega t), \quad \wp \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle$$

عمومی طور پر،  $\psi$  متغیر  $z$  کا جفت یا طاق تفاعل ہوگا؛ دونوں صورتوں میں  $z|\psi|^2$  طاق ہوگا، جس کا نکل صفر ہوگا (چند مثالوں کے لئے سوال ۹.۱ دیکھیں)۔ اسی کی بنا پر ہم فرض کرتے ہیں کہ  $H'$  کے وتری متالابی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں

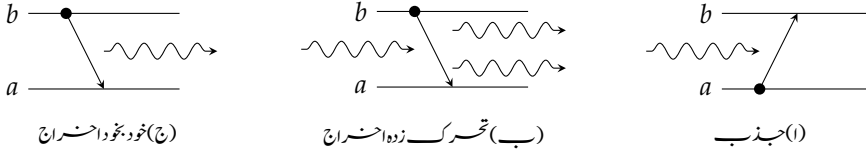
$$(۹.۳۴) \quad V_{ba} = -\wp E_0$$

لیتے ہوئے، روشنی اور مادے کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہوگا جس پر ہم نے حصہ ۹.۱ میں غور کیا۔

<sup>۱</sup> اس کن میدان  $E$  میں بار  $q$  کی توانی  $-q \int E \cdot dr$  ہوگی۔ آپ تابع وقت (یعنی غیر ساکن) میدان کے لئے برقی سکونیات کے کلب کے استعمال پر ناراض ہو سکتے ہیں۔ میں بغیر کہے، فرض کرتا ہوں کہ (جوہر کے اندر) الیکٹران کو حرکت کرنے کے لئے درکار وقت سے ارتعاش کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

<sup>۲</sup> ہمیشہ کی طرح ہم فرض کرتے ہیں کہ مرکزہ بھاری اور ساکن ہے؛ ہمیں یہاں الیکٹران کے تفاعل موج سے عرض ہے۔

<sup>۳</sup> حرف  $\wp$  کے استعمال سے آپ کو برقی جفت قطب کا معیار اثر یاد دلایا جاتا ہے (جس کے لئے برقی حرکیات میں حرف  $p$  مستعمل ہے؛ یہاں اسے میٹر  $\wp$  کہا گیا ہے تاکہ معیار حرکت کے ساتھ عطا نہی پیدا نہ ہو)۔ درحقیقت، جفت قطب معیار حرکت عامل،  $qr$ ، کے  $z$  جزو کا،  $\wp$  غیر وتری متالابی رکن ہے۔ برقی جفت قطب معیار حرکات کے ساتھ وابستگی کی بنا پر، ایسا اخراج جو مواد ۹.۳۳ کے تحت ہو برقی جفت قطب اخراج کہلاتا ہے۔ یہ کم از کم بصوری خطہ میں غالب قسم ہے۔ عمومیت اور اصطلاحات کے لئے سوال ۹.۲۱ دیکھیں۔



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

### ۹.۲.۲ انجذاب، تحریک شدہ اضطراب اور خود بخود اضطراب

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیریں حال  $\phi_a$  میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالاحال  $\psi_b$  میں تحویل کا احتمال مساوات ۹.۲۸ دیتی ہے جو (مساوات ۹.۳۴ کو مد نظر رکھتے ہوئے) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left( \frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر  $E_b - E_a = \hbar\omega_0$  توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس نے ”ایک نوریہ جذب کیا“ (شکل ۹.۴-۱)۔ (جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، لفظ ”نوریہ“ درحقیقت کوائنائی برقی حرکیات<sup>۱۴</sup> [برقناطیسی میدان کی کوائنائی نظریہ] سے تعلق رکھتا ہے، جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرے مطلب نہ لیں۔) یقیناً، میں بالاحال  $(c_a(0) = 0)$  اور  $(c_b(0) = 1)$  سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ چاہیں تو ایسا کر سکتے ہیں؛ نتیجہ بالکل وہی ہوگا؛ البتہ اس مرتبہ  $P_{b \rightarrow a} = |c_a(t)|^2$  حاصل ہوگا، جو نیچے زیریں سطح میں تحویل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left( \frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.36)$$

(چونکہ ہم  $a$  اور  $b$  کو آپس میں بدل  $(a \leftrightarrow b)$  رہے ہیں جو  $\omega_0$  کی جگہ  $-\omega_0$  ڈالتا ہے، لہذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ مساوات ۹.۲۵ پر پہنچ کر اب ہم پہلا جزو چنتے ہیں جس کے نسب نامہ  $-\omega_0 + \omega$  ہوگا، باقی باب پہلے کی طرح ہے۔) لیکن اگر آپ رک کر سوچیں تو یہ ایک حیرت انگیز نتیجہ ہے: بالاحال میں پائے جانے والے ذرے پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں تحویل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالاحال تحویل کا ہے۔ اس عمل کو تحریک زدہ اخراج<sup>۱۵</sup> کہتے ہیں، جس کی پیشگوئی آئنسٹائن نے کی تھی۔

تحرک زدہ انحرانج کی صورت میں برقن طیسی میدان جوہر سے  $\hbar\omega$  توانائی کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں ایک نور یہ داخل ہوا اور دو نور یہ (ایک اصل جس نے تحویل پیدا کی اور دوسرا جو تحویل کی بدولت پیدا ہوا) باہر نکلے (شکل ۹.۲-ب)۔ اس طرح **افزائش**<sup>۱۶</sup> کا امکان پیدا ہوتا ہے، چونکہ ایک بوتل میں بہت سارے جوہر، جو بالا حال میں ہوں، کو ایک آمدی نور یہ متحرک ۷۰ کر کے **مسلطہ تعامل**<sup>۱۸</sup> پیدا کریگا؛ یوں پہلا نور یہ 2 نور یہ پیدا کرے گا، یہ نور یہ 4 پیدا کریں گے، وغیرہ۔ لیور<sup>۱۹</sup> کا اصول یہی ہے۔ دھیان رہے کہ (سیزر عمل کے لیے) ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت بالا حال میں پہنچائی جائے (جسے **آبادی الٹائی**<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں)؛ چونکہ انخذاب (جو ایک نور یہ کم کرتا ہے) اور تحرک زدہ انحرانج (جو ایک پیدا کرتا ہے) بالمقابل ہوں گے، لہذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کر کے امنزائش پیدا نہیں کی جاسکتی۔

(انخذاب اور تحرک شدہ انحرانج کے علاوہ) روشنی اور مادے کے باہم عمل کا تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے؛ اس کو **خود با خود اخراج**<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقن طیسی میدان، جو انحرانج پیدا کر سکتا ہے، کی عدم موجودگی میں ہیجان جوہر زیریں حال میں تحویل ہو کر ایک نور یہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۲-ج)۔ ہیجان حال سے جوہر کا زمینی حال میں تنزل عموماً آبی ذریعہ سے ہوتا ہے۔ پہلی نظر میں واضح نہیں کہ خود با خود انحرانج کیوں کر ہو گا۔ ساکن حال (اگرچہ ہیجان) جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال میں تحویل ہو، اسے وہیں عسر بھرا رہنا چاہیے۔ درحقیقت، جوہر وہیں رہتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ البتہ، کوانٹائی برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر نہیں ہوتے؛ جیسا (مثال کے طور پر) ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی ( $\hbar\omega/2$ ) کا حاصل ہے۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں، کمرے کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں، تب بھی کچھ برقن طیسی شعاع پائی جائے گی، اور یہی ”صفر نقطی“ انحرانج خود با خود انحرانج کا سبب بنتا ہے۔ اگر حبڑے دیکھا جائے تو تمام انحرانج تحرک شدہ انحرانج ہو گا۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہو گا کہ آیا آپ میدان مبراہم کر رہے ہیں یا قدرتی میدان پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی انحرانجی عمل کے بالکل الٹ ہے، جہاں تمام انحرانج خود با خود ہوتا ہے اور تحرک شدہ انحرانج کا تصور نہیں پایا جاتا۔

کوانٹائی برقی حرکیات اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے،<sup>۲۲</sup> تاہم آئنشٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں (انخذاب، تحرک شدہ انحرانج اور خود با خود انحرانج) کا تعلق پیش کرتی ہے۔ آئنشٹائن نے خود با خود انحرانج کی وجہ (زمینی حال برقن طیسی میدان کا اضطراب) پیش نہیں کی، تاہم انکے نتائج ہمیں خود با خود انحرانج کا حساب کرنے کا مجاز بتاتی ہے، جس سے ہیجان جوہری حال کا قدرتی عرصہ حیات تلاش کیا جاسکتا ہے۔<sup>۲۳</sup> البتہ ایسا کرنے سے پہلے، ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتاتی برقن طیسی امواج کی آمد (جیسا

amplification<sup>۱۶</sup>trigger<sup>۱۷</sup>chain reaction<sup>۱۸</sup>laser<sup>۱۹</sup>population inversion<sup>۲۰</sup>spontaneous emission<sup>۲۱</sup>

<sup>۲۲</sup> آئنشٹائن کا متالہ مساوات شرودنگر کی آمد سے قبل 1917 میں شائع ہوا۔ اس دلیل میں پلانک سیاہ جسمی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳) میں منظر عام پر آیا، کے ذریعہ کوانٹائی حرکیات داخل ہوتی ہے۔

<sup>۲۳</sup> متبادل اشتقاق کے لئے سوال ۹.۸ دیکھیں۔

حقیقت میں ہوگا) سے جو ہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں؛ حراری شعاع میں جو ہر رکھنے سے ایسی صورتحال پیدا ہوگی۔

### ۹.۲.۳ غیر اتالی اضطراب

برقن طوسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے، جہاں  $E_0$  ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا محیط ہے۔<sup>۲۲</sup>

$$(۹.۳۷) \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال (مساوات ۹.۳۶) میدان کی کثافت توانائی کا راستہ متناسب ہے۔

$$(۹.۳۸) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد  $\omega$  پر یکے رنگ<sup>۲۵</sup> موج کے لیے درست ہوگا۔ عملی استعمال کے کئی نظاموں پر وسیع تعددی سرعت کی برقن طوسی امواج کی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں  $\rho(\omega) d\omega \rightarrow u$  ہوگا، جہاں  $\rho(\omega) d\omega$  تعددی سرعت  $d\omega$  میں کثافت توانائی ہے، اور حتمی تحویلی احتمال درج ذیل تکمل کا روپ اختیار کرے گا۔<sup>۲۶</sup>

$$(۹.۳۹) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

لہذا تو سین میں حبزوں کی  $\omega_0$  پر نوکدار چوٹی پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲)، جبکہ عام طور پر  $\rho(\omega)$  کافی چوڑا ہوگا، لہذا ہم  $\rho(\omega)$  کی جگہ  $\rho(\omega_0)$  لکھ کر اسے تکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(۹.۴۰) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|\wp|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

<sup>۲۲</sup> برقن طوسی میدان میں فی اکائی حجم توانائی درج ذیل ہے۔

$$u = (\epsilon_2/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2$$

برقن طوسی موج کے لئے برقی اور مقناطیسی حصے برابر ہوں گے، لہذا

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

ہوگا، اور چونکہ  $\cos^2$  (یا  $\sin^2$ ) کا اوسط  $1/2$  ہے لہذا ایک مکمل پھیروے پر اوسط  $(\epsilon_0/2)E_0^2$  ہوگا۔  
monochromatic<sup>۲۵</sup>

<sup>۲۶</sup> مساوات ۹.۳۹ مندرجہ کرتی ہے کہ مختلف تعدد پر تحویل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں، لہذا اکل تحویلی احتمال ان انفرادی احتمالات کا مجموعہ ہوگا۔ اگر مختلف حصے الٹاتے ہوں، تب ہمیں حیطوں  $(c_b(t))$  سنہ کہ احتمالات  $(|c_b(t)|^2)$  کا مجموعہ لینا ہوگا، اور اس میں حیطوں کے سرہموں کے علاوہ حاصل ضرب بھی پائے جاتے ہیں گے۔ ہم عملی استعمال میں ہر مرتبہ مندرجہ کرتے ہیں کہ اضطراب غیر اتالی ہے۔



متغیرات کو تبدیل کر کے  $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$  لکھ کر (اور چونکہ بنیادی طور پر مشکل باہر صفر ہی ہے) مکمل کی حدود کو  $x = \pm\infty$  تک وسعت دے کر، اور قطعی مکمل کو جدول سے دیکھ کر:

$$(۹.۴۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۹.۴۲) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |\wp|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

اس مرتبہ تحویلی احتمال  $t$  کا راستہ متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس، غیر اتافی وسیع تعدد کی شعاع پلسٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتی۔ بالخصوص، **تحویلی شرح**  $R \equiv dP/dt$  اب ایک مستقل ہوگا۔

$$(۹.۴۳) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \rho(\omega_0) \quad (\text{مستقل تحویلی شرح})$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج  $y$  رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور  $z$  رخ تنظیم شدہ ہے۔ لیکن ہم اس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو، اور اس میں ہر ممکن تنظیم پائی جاتی ہو؛ میدان کی توانائی  $(\rho(\omega))$  ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں  $|\wp|^2$  کے بجائے  $|\wp \cdot a_n|^2$  کی اوسط قیمت درکار ہوگی، جہاں (مادات ۹.۳۳ کو عمومیّت دیتے ہوئے) درج ذیل ہوگا،

$$(۹.۴۴) \quad \wp \equiv q \langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اور اوسط تمام تنظیم اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔

اوسط درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے: کروی محدودیوں منتخب کریں کہ شعاع کی حرکت کا رخ  $z$  محور پر ہو (تاکہ تنظیم  $xy$  سطح میں ہو) اور (اغل) سمتیہ  $p$  سطح  $yz$  میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔<sup>۲۸</sup>

$$(۹.۴۵) \quad a_n = \cos \phi i + \sin \phi j, \quad \wp = \wp \sin \theta j + \wp \cos \theta k$$

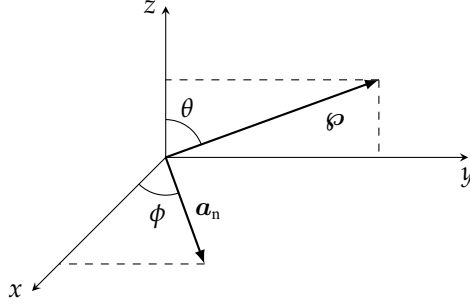
<sup>۲۸</sup> میں  $\wp$  کو حقیقی کی طرح تصور کرتا ہوں، اگرچہ یہ عموماً مخلوط ہوگا۔ درج ذیل کی بنا پر transition rate<sup>۲۷</sup>

$$|\wp \cdot a_n|^2 = |(\wp \cos \theta) \cdot a_n + i(\wp \sin \theta) \cdot a_n|^2 = |(\wp \cos \theta) \cdot a_n|^2 + |(\wp \sin \theta) \cdot a_n|^2$$

ہم حقیقی اور خیالی حصوں کا حساب علیحدہ علیحدہ کر کے نتائج جمع کر سکتے ہیں۔ مادات ۹.۴۷ میں مطلق قیمت علامت دو کام کر رہی ہے، یہ سمتیہ کی مقدار اور مخلوط حیثیت:

$$|\wp|^2 = |\wp_x|^2 + |\wp_y|^2 + |\wp_z|^2$$

ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۹.۵: محدد برائے  $|\phi \cdot a_n|^2$  کی اوسط زنی۔

تب

$$\phi \cdot a_n = \phi \sin \theta \sin \phi$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\phi \cdot a_n|_{\text{اوسط}}^2 &= \frac{1}{4\pi} \int |\phi|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi \\ (9.46) \quad &= \frac{|\phi|^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{3} |\phi|^2 \end{aligned}$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر قطبی، غیر اتالی شعاع کے زیر اثر حال  $b$  سے حال  $a$  میں تحریک شدہ احراج کی تحویلی شرح درج ذیل ہوگی،

$$(9.47) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\phi|^2 \rho(\omega_0)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت قطب معیار اثر کا تالی رکن  $\phi$  ہوگا (ساوات ۹.۴۴) اور  $(E_b - E_a) / \hbar$  پرنی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی  $\rho(\omega_0)$  ہوگی۔<sup>۲۹</sup>

### ۹.۳ خود باخود احراج

#### ۹.۳.۱ آئنشٹائن عددی $A$ اور $B$

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال  $\psi_a$  میں  $N_a$  اور بالا حال  $\psi_b$  میں  $N_b$  جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود احراجی شرح کو  $A$  لیتے ہوئے،<sup>۳۰</sup> اکائی وقت میں بالا حال سے  $N_b A$  ذرات خود باخود عمل کے ذریعہ

<sup>۲۹</sup> تابع وقت نظریہ اضطراب کے فرم کے سنہ قانون کی ایک مخصوص صورت ہے، جو کہتا ہے کہ تحویلی شرح، اضطرابی محفہ کے متالی ارکان کے مربع اور تحویلی تعدد پر اضطراب کے زور کاراست۔ متناسب ہوگا۔

<sup>۳۰</sup> میں عام طور پر تحویلی شرح کے لئے علامت  $R$  استعمال کرتا ہوں، لیکن اس سیاق و سباق میں، باقی لوگوں کی طرح، میں بھی آئنشٹائن کی علامت استعمال کروں گا۔

ٹکلیں گے۔<sup>۳۱</sup> جیسا ہم (مساوات ۹.۴۷) دیکھ چکے ہیں تحریک شدہ احسراج کی تحویلی شرح برقیاتی میدان کی کثافت توانائی،  $B_{ab}\rho(\omega_0)$ ، کے راست متناسب ہوگی؛ یوں بالاحال سے تحریک شدہ احسراج کی بنا پر اکائی وقت میں  $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$  ذرات ٹکلیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح  $\rho(\omega_0)$  کی راست متناسب ہے، جسے ہم  $B_{ab}\rho(\omega_0)$  کہتے ہیں؛ لہذا اکائی وقت میں  $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$  ذرات بالاحال میں شامل ہوں گے۔ ان تمام کو یکجا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۹.۴۸) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$$

فرض کریں یہ جوہر محیط میدان کے ساتھ حراری توازن میں ہیں، لہذا ہر سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی۔ یوں  $dN_b/dt = 0$  لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۴۹) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ، درج حرارت  $T$  پر حراری توازن میں، توانائی  $E$  کے حاصل ذرات، کی تعداد بولٹزمنز جو ضربی<sup>۳۲</sup>  $e^{(-E/k_B T)}$  کے راست متناسب ہوگی؛ یوں

$$(۹.۵۰) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۵۱) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳) ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(۹.۵۲) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ان دونوں ریاضی فستروں کا موازنہ کرنے سے

$$(۹.۵۳) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۹.۵۴) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

<sup>۳۱</sup> ذرات کی تعداد  $N_a$  اور  $N_b$  بہت بڑی تصور کریں، لہذا ہم انہیں وقت کے استمراری تقاضات تصور کر کے شماریاتی اتار چمڑاؤ نظر انداز کرتے ہیں۔

<sup>۳۲</sup> Boltzmann factor

مساوات ۹.۵۳ اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے تھے: تحرک شدہ اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو اخذ اب کی ہے۔ 1907ء میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرک شدہ اخراج کا تصور پیدا کرے۔ تاہم ہم یہاں مساوات ۹.۵۴ میں دلچسپی رکھتے ہیں، جو ہمیں تحرک شدہ اخراجی شرح  $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ ، جسے ہم پہلے سے جانتے ہیں، کی صورت میں خود بخود اخراجی شرح  $(A)$  دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات ۹.۴ سے

$$(9.55) \quad B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\phi|^2$$

لیتے ہیں، لہذا خود بخود اخراجی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$(9.56) \quad A = \frac{\omega_0^3 |\phi|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

سوال ۹.۸: نیچے کی طرف تحویل میں خود بخود اخراج اور حراری تحرک شدہ اخراج (وہ تحرک شدہ اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا پر ہو) میں متبادل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت  $(T = 300 \text{ K})$  پر  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت کم تعدادوں پر حراری تحرک شدہ اخراج غالب ہوگا، جبکہ  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت زیادہ تعدادوں پر خود بخود اخراج غالب ہوگا۔ بصری روشنی کے لیے کونسا غالب ہوگا؟

سوال ۹.۹: برقیاتی میدان کی زمینی حال کثافت توانائی  $\rho_0(\omega)$  جانتے ہوئے خود بخود اخراجی شرح در حقیقت تحرک شدہ اخراجی شرح (مساوات ۹.۴۷) ہوگی، لہذا آئنسٹائن عددی سر  $A$  اور  $B$  جانتے بغیر آپ خود بخود اخراجی شرح (مساوات ۹.۵۶) اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہوگی، تاہم اگر آپ یہ قبول کریں کہ زمینی حال میں ایک نوری فی انداز پایا جاتا ہے، تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہوگا:

۱. مساوات ۵.۱۱۱ کی جگہ  $N_\omega = d_k$  پر کر کے  $\rho_0(\omega)$  اخذ کریں (زیادہ تعداد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا اور نہ کل "حالاتی توانائی" لامتناہی ہوگی؛ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں)۔

ب. اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات ۹.۴۷ استعمال کر کے خود بخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات ۹.۵۶ کے ساتھ موازنہ کریں۔

## ۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات ۹.۵۶ ہمارا بنیادی نتیجہ ہے: یہ تحرک شدہ اخراج کی تحویلی شرح دیتا ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ خود بخود اخراج کے نتیجے میں، وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی؛ بالخصوص، دورانہ  $dt$  میں جوہروں کی تعداد میں  $A dt$  کمی ہوگی:

$$(9.57) \quad dN_b = -AN_b dt$$

(جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مسزید جوہر ہیبان انگیز نہیں کیے حبار ہے ہیں)۔<sup>۳۳</sup> اس کو  $N_b(t)$  کے لیے حل کرتے ہیں:

$$(۹.۵۸) \quad N_b(t) = N_b(0)e^{-At}$$

بظاہر، ہیبان حال میں تعداد، قوت نمائی طور پر وقتی مستقل:

$$(۹.۵۹) \quad \tau = \frac{1}{A} \quad (\text{عمر حیات})$$

کے ساتھ کم ہوگی، جسے اس حال کا عرصہ حیات<sup>۳۴</sup> کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں  $N_b(t)$  کی قیمت ابتدائی قیمت کی  $1/e \approx 0.368$  گنتا ہوگی۔

میں اب تک فرض کرتا آ رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں، تاہم علامتیت سادہ رکھنے کی خاطر ایسا کیا گیا؛ تحریک شدہ انحراج کا کلیہ (مساوات ۹.۵۶)، دیگر متاثرہ رسائی حالات سے قطع نظر،  $\psi_a \rightarrow \psi_b$  کی تحویلی شرح دیتا ہے (سوال ۹.۱۵ دیکھیں)۔ عمومی طور پر ایک ہیبان جوہر کے کئی مختلف انداز تزلزل<sup>۳۵</sup> ہوں گے (یعنی:  $\psi_b$  کا تنزل بہت سارے زیریں توانائی حالات  $\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots$  وغیرہ میں ہو سکتا ہے)۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرحیں جمع ہو کر درج ذیل خالص عرصہ حیات دیں گی۔

$$(۹.۶۰) \quad \tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار  $q$  محور  $x$  پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال  $|n\rangle$  (مساوات ۲.۶۷) سے آغاز کر کے خود با خود انحراج کے ذریعے حال  $|n'\rangle$  کو پہنچتا ہے۔ مساوات ۹.۴۴ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\wp = q \langle n|x|n'\rangle i$$

آپ نے سوال ۳.۳۳ میں  $x$  کے متاثری ارکان:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

تلاش کئے، جہاں سرعش کا قدرتی تعدد  $\omega$  ہے۔ (مجھے تحریک شدہ انحراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی)۔ ہم انحراج کی بات کر رہے ہیں لہذا  $n'$  لازماً  $n$  سے نیچے ہوگا؛ یوں ہمارے اس مقصد کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۱) \quad \wp = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} i$$

<sup>۳۳</sup> یہ حراری توازن نہیں ہے جس پر گزشتہ حصے میں بات کی گئی۔ یہاں ہم فرض کر رہے ہیں کہ جوہروں کو ہیبان حال میں اٹھایا گیا ہے اور یہ اب واپس توازن سطحوں کو لوٹ رہے ہیں۔  
lifetime<sup>۳۴</sup>  
decay modes<sup>۳۵</sup>

بظاہر ”سیڑھی“ پر صرف ایک پایہ نیچے تحویل ممکن ہے  $(n - n' = 1)$ ؛ اور اخراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$(۹.۶۲) \quad \omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n + 1/2)\hbar\omega - (n' + 1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n - n')\omega = \omega$$

کوئی حیرانی کی بات نہیں، نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر شعاع ریز ہے۔ تحویلی شرح (مساوات ۹.۵۶) درج ذیل

$$(۹.۶۳) \quad A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

اور  $n$  ویں ساکن حال کا عمر صحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۴) \quad \tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2}$$

چونکہ، ہر ایک اخراجی نوریہ  $\hbar\omega$  توانائی ساتھ لے جاتا ہے، لہذا اشعاعی طاقت  $A\hbar\omega$  ہوگی

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا،  $n$  ویں حال میں مرتعش کی توانائی  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگی۔

$$(۹.۶۵) \quad P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left( E - \frac{1}{2}\hbar\omega \right)$$

(ابتدائی) توانائی  $E$  کے کوانٹائی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت اتنی ہوگی۔

موازنہ کی حنا طر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت کا تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار  $q$  کی اشعاعی طاقت کلیہ لارمر<sup>۳۶</sup>

$$(۹.۶۶) \quad P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

دیتا ہے۔ ہارمونی مرتعش  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  کا حیظ  $x_0$ ، اور اسراع  $a = -x_0\omega^2 \cos(\omega t)$  ہوگا۔ ایک مکمل پھیرے پر اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی  $x_0^2 = 2E/m\omega^2$  ہے، لہذا  $E = (1/2)m\omega^2 x_0^2$  ہوگا، جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E \quad (9.16)$$

توانائی  $E$  کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی اشعاعی طاقت دے گا۔ کلاسیکی حد ( $\hbar \rightarrow 0$ ) میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں؛<sup>۳۷</sup> البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ (مساوات ۹.۶۵) تحفظ دیتا ہے: اگر  $E = (1/2)\hbar\omega$  ہو تب مرتعش شعاع ریز نہیں ہوگا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات  $(t_{1/2})^*$  سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بڑی تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحلیل کرتے ہوں۔ نصف حیات  $t_{1/2}$  اور (حال کے) ”عمر حیات“  $\tau$  کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں  $n = 2$  حالات کے لیے عمر حیات (سیکنڈوں میں) تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو  $\langle \psi_{100}|x|\psi_{200} \rangle$ ،  $\langle \psi_{100}|y|\psi_{211} \rangle$ ، وغیرہ طرز کے متالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ،  $y = r \sin \theta \sin \phi$  اور  $z = r \cos \theta$  ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر کمالات صفر کے برابر ہیں، لہذا احاب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔ جواب: سوائے  $\psi_{200}$  جو لامتناہی ہے، باقی تمام کے لیے  $1.60 \times 10^{-9}$  سیکنڈ ہوگا۔

### ۹.۳.۳ قواعد انتخاب

خود با خود احسراجی شرح درج ذیل روپ کے متالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$\langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال ۹.۱۱ حل کیا ہو (اگر حل نہیں کیا، اسی وقت پہلے اس کو حل کریں!) تو آپ نے دیکھا ہوگا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں، اور کیا بہتر ہوگا اگر ہم پہلے سے جان سکیں کہ کون سے کمالات صفر دیں گے، تاکہ ہم اپنا وقت غیر ضروری کمالات حل کرنے میں ضائع نہ کریں۔ فرض کریں ہم ہائیڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں، جس کی ہیملٹنی کروی متشاکلی ہے۔ ایسی صورت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹائی اعداد  $n$ ،  $\ell$ ، اور  $m$  سے ظاہر کر سکتے ہیں اور متالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n' \ell' m' | \mathbf{r} | n \ell m \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت مقابلیت رشتے اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہر مشی پن مل کر اس مقدار پر طاقستور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

<sup>۳۷</sup> درحقیقت،  $P$  کو زمینی حال سے زائد توانائی کی صورت میں لکھیں تو دونوں کلیات متشاکل ہوں گے۔  
half-life<sup>۳۸</sup>

انتخابی قواعد برائے  $m$  اور  $m'$  :

ہم پہلے  $x$ ،  $y$ ، اور  $z$  کے ساتھ  $L_z$  کے مقابلہ پر غور کرتے ہیں جنہیں باب ۴ میں حاصل کیا گیا (مساوات ۴.۱۲۲ دیکھیں)۔

$$(۹.۶۸) \quad [L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0$$

ان میں تیسرے درجہ ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n' \ell' m' | [L_z, z] | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | L_z z - z L_z | n \ell m \rangle \\ &= \langle n' \ell' m' | [(m' \hbar) z - z (m \hbar)] | n \ell m \rangle = (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | z | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(۹.۶۹) \quad \langle n' \ell' m' | z | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad m' = m$$

لہذا، مساوائے  $m' = m$  کی صورت میں،  $z$  کے متعلقہ ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔

ساتھ ہی،  $x$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابلہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L_z, x] | n \ell m \rangle &= \langle n' \ell' m' | (L_z x - x L_z) | n \ell m \rangle \\ &= (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i\hbar \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(۹.۷۰) \quad (m' - m) \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle$$

یوں، آپ  $y$  کے متعلقہ ارکان کو  $x$  کے مطابق متعلقہ ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں، اور آپ کو کبھی بھی  $y$  کے متعلقہ ارکان کے حساب کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

اور آخر میں،  $y$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابلہ درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L_z, y] | n \ell m \rangle &= \langle n' \ell' m' | (L_z y - y L_z) | n \ell m \rangle \\ &= (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = -i\hbar \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(۹.۷۱) \quad (m' - m) \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = -i \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle$$

بالخصوص، مساوات ۹.۷۰ اور مساوات ۹.۷۱ کو ملا کر:

$$(m' - m)^2 \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i(m' - m) \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle$$



اہلذا،

$$(۹.۷۲) \quad \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad (m' - m)^2 = 1$$

ہوگا۔ مساوات ۹.۶۹ اور مساوات ۹.۷۲ سے ہمیں  $m$  کے انتخاب قواعد:<sup>۳۹</sup>

$$(۹.۷۳) \quad \Delta m = 1, 0, -1 \quad \text{تحویل صرف اس صورت ہوگی جب یہ ہو:}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں ہوتا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے۔ آپ کو یاد ہوگا، نوریہ چکر 1 کا حاصل ہے، لہذا اس کی  $m$  قیمت 1، 0، یا -1 ہو سکتی ہے: "زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے کر جاتا ہے، جو ہر اتن کچھ کھوئے گا۔"

انتخابی قواعد برائے  $\ell$  اور  $\ell'$ :

آپ سے سوال ۹.۱۲ میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کا کہا گیا۔

$$(۹.۷۴) \quad [L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2(rL^2 + L^2r)$$

ہمیشہ کی طرح، ہم اس مقلب کو  $\langle n' \ell' m' | n \ell m \rangle$  کے پیچ لپیٹ کر انتخابی قواعد اخذ کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L^2, [L^2, r]] | n \ell m \rangle &= 2\hbar^2 \langle n' \ell' m' | (rL^2 + L^2r) | n \ell m \rangle \\ &= 2\hbar^4 [\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1)] \langle n' \ell' m' | r | n \ell m \rangle \\ &= \langle n' \ell' m' | (L^2[L^2, r] - [L^2, r]L^2) | n \ell m \rangle \\ &= \hbar^2 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \langle n' \ell' m' | [L^2, r] | n \ell m \rangle \\ &= \hbar^2 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \langle n' \ell' m' | (L^2r - rL^2) | n \ell m \rangle \\ (۹.۷۵) \quad &= \hbar^4 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)]^2 \langle n' \ell' m' | r | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(۹.۷۶) \quad 2[\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1)] = [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)]^2 \quad \text{یا} \quad \langle n' \ell' m' | r | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا پھر}$$

ہوگا، لیکن

$$[\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] = (\ell' + \ell + 1)(\ell' - \ell)$$

selection rules<sup>۴۰</sup>

"جب قطبی محور حرکت کے رخ کے ساتھ ساتھ ہو، درمیانی قیمت نہیں پائی جاتی، اور اگر آپ غیر متابع نوری حالات کی تعداد میں دلچسپی رکھتے ہوں، تو جواب 2 سے 3 ہے۔ البتہ، اگر یہاں ضروری نہیں کہ نوریہ  $z$  محور کے رخ حرکت کرتا ہو، لہذا تینوں قیمتیں ممکن ہیں۔"

اور

$$2[\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1)] = (\ell' + \ell + 1)^2 + (\ell' - \ell)^2 - 1$$

لکھے جاسکتے ہیں، لہذا مساوات ۹.۷۶ میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$[(\ell' + \ell + 1)^2 - 1][(\ell' - \ell)^2 - 1] = 0 \quad (9.77)$$

ان میں پہلا (بیاں) جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے (ماسوائے اس صورت جب  $\ell' = \ell = 0$  ہو؛ اس کمزوری سے سوال ۹.۱۳ میں چھکارا حاصل کیا گیا ہے)، لہذا یہ شرط  $\ell' = \ell \pm 1$  کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں  $\ell$  کے انتخابی قواعد:

$$\Delta\ell = \pm 1 \quad \text{تحویل صرف اس صورت ہوگا جب یہ ہو:} \quad (9.78)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے، لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر 1 کا حاصل ہے، لہذا زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد  $\ell' = \ell + 1$ ، یا  $\ell' = \ell - 1$  کی اجازت دیں گے (برقی جفت قطبی اشعاع کے لیے درمیانی صورت نہیں پائی جاتی، اگرچہ زاویائی معیار حرکت کی بقا اس کی اجازت دیتی ہے)۔

یوں ظاہر ہے کہ خود بخود احسراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی انتخابی قواعد کے تحت ممنوع ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے ابتدائی چار بوہر سطحوں کے لیے اجزائی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ  $2S$  حال ( $\psi_{200}$ ) اسی جگہ ”پھنسا“ ہے؛ چونکہ  $\ell = 1$  کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا، لہذا یہ تسنزل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازکے مستحکم<sup>۴۱</sup> احوال کہتے ہیں، اور یقیناً اس کا عرصہ حیات، مثلاً،  $2P$  حالات ( $\psi_{210}$ ،  $\psi_{211}$  اور  $\psi_{21-1}$ ) سے، کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصادم کی بنا پر، یا (جنہیں گسراہ کن نام دیا گیا ہے) ممنوعہ تحویلات<sup>۴۲</sup> کی بنا پر (سوال ۹.۲۱)، یا متعدد نوری احسراج کی بنا پر، تسنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات ۹.۷۴ میں دی گئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

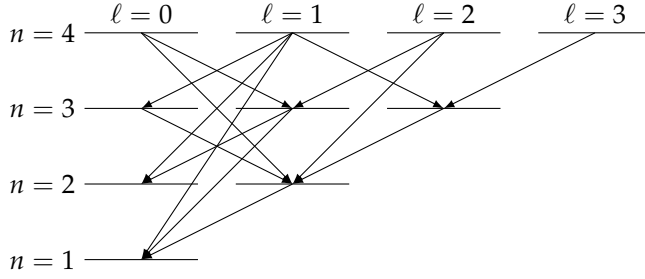
اس کے ساتھ  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$  استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$

$z$  سے  $\mathbf{r}$  تک عمومیت دینا ایک آسان کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ  $\ell' = \ell = 0$  کی صورت میں  $\langle n'\ell'm' | \mathbf{r} | n\ell m \rangle = 0$  ہوگا۔ یوں مساوات ۹.۷۸ میں درپیش ”کمزوری“ ختم ہوتی ہے۔

<sup>۴۱</sup> metastable  
<sup>۴۲</sup> forbidden transitions



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کا اجازتی تنزل۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے  $n = 3, \ell = 0, m = 0$  حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک (برقی جفت قطبی) تحویلی تسلسل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

۱. اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |n\ell m\rangle \rightarrow |n'\ell'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

ب. اگر آپ کے پاس، اس حال میں جو ہروں سے بھرا ہوا ایک بوتل ہو، تب ہر راہ سے کتنا حصہ گزرے گا؟

ج. اس حال کا عرصہ حیات کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال  $|300\rangle$  میں نہیں ہوگا، لہذا ہر تسلسل کا صرف پہلا قدم، عرصہ حیات کے حصول میں کام آئے گا۔ متعدد تحویلی راستوں کی صورت میں تمام تحویلی شرحوں کا مجموعہ لینا ہوگا۔

### مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات ۹.۱ اور مساوات ۹.۲

$$(9.49) \quad H_0 \psi_n = E_n \psi_n, \quad \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیّت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ  $t = 0$  پر ہم اضطراب  $H'(t)$  چالو کرتے ہیں؛ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$(9.80) \quad H = H_0 + H'(t)$$

۱. مساوات ۹.۶ کو درج ذیل تقییمی روپ دیں

$$(9.81) \quad \Psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t / \hbar}$$

اور دکھائیں کہ

$$(۹.۸۲) \quad \dot{c}_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar}$$

ہوگا، جہاں  $H'_{mn}$  درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۳) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

ب. اگر نظام حال  $\psi_N$  سے آغاز کرے، تو دکھائیں کہ (اول رتبی نظریہ اضطراب میں)

$$(۹.۸۴) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۸۵) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t'/\hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

ج. فرض کریں، (لمحہ  $t = 0$  پر چالو اور بعد میں لمحہ  $t$  پر منقطع کرنے کے علاوہ)  $H'$  مستقل ہے۔ حال  $N$  سے حال  $M$  جہاں  $M \neq N$  ہے، میں تحویل کے احتمال کو  $t$  کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$(۹.۸۶) \quad 4 \left| H'_{MN} \right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t/2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

د. فرض کریں  $H'$  وقت کا سائن تفاعل:  $H' = V \cos(\omega t)$  ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی  $E_M = E_N \pm \hbar\omega$  کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۷) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

ه. فرض کریں کہ متعدد سطحی نظام پر غیر اتالی برقی طیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ ۹.۲.۳ کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ تھرمک شدہ اخراج کی تحویلی شرح وہی دو سطحی نظام کا کلیہ (مساوات ۹.۴۷) دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر  $c_m(t)$  کو رتبہ اول تک سوال ۹.۱۵ کے جزو-ج اور جزو-د کے لیے تلاش کریں۔ معمولی شرط:

$$(۹.۸۸) \quad \sum_m |c_m(t)|^2 = 1$$

کی تصدیق کر کے، تضاد اگر موجود ہو، پر تبصرہ کریں۔ مندرجہ ذیل آپ ابتدائی حال  $\psi_N$  میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں؛ کیا  $|c_N(t)|^2$  یا  $1 - \sum_{m \neq N} |c_m(t)|^2$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ  $N$  ویں حال میں وقت  $t = 0$  پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہوگی  $V_0(t)$  جہاں  $V_0(0) = V_0(T) = 0$  ہوگا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے  $c_m(t)$  کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دکھائیں کہ تفاعل موج کی حیطہ زاویائی دور تبدیل ہوگا لیکن تحویل نہیں ہوگی۔ تفاعل  $V_0(t)$  کی صورت میں تبدیلی حیطہ، تبدیلی زاویائی دور  $\psi(T)$  تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب  $x$  میں مستقل نہ کے  $t$  میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کیت  $m$  کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ  $t = 0$  پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں  $V_0 < E_1$  ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت  $T$  کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ٹاپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ  $E_2$  ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرک شدہ احسراج، تحرک کی انجذاب اور خود با خود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ خود با خود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گم ساکن مقناطیسی میدان  $B_0 \mathbf{k}$  میں  $1/2$  سپر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت  $\gamma$  ہولار سر تعدد  $\omega_0 = \gamma B_0$  مثال 4.3 سے استنباطی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان  $B_{rf} [\cos(\omega t) \mathbf{i} - \sin(\omega t) \mathbf{j}]$  چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$(9.89) \quad B = B_{rf} \cos(\omega t) \mathbf{i} - B_{rf} \sin(\omega t) \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k}$$

(الف) اس نظام کے لیے  $2 \times 2$  ہیملٹنی متالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت  $t$  پر  $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$  چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$(۹.۹۰) \quad \dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b)$$

جہاں  $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$  کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایاجاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں  $a_0$  اور  $b_0$  کی صورت میں  $a(t)$  اور  $b(t)$  کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۹.۹۱) \quad \omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی  $a_0 = 1, b_0 = 0$  سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تھویل کی احتمال کو بطور وقت کا تعلق عمل تلاش کریں۔

$$P(t) = \{\Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\} \sin^2(\omega' t/2)$$

(و) منحنی گمک

$$(۹.۹۲) \quad P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو غیر متغیر  $\omega_0$  اور  $\Omega$  کی صورت میں متحرک تعدد  $\omega$  کی تفاعل کے طور پر ترمیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ  $\omega = \omega_0$  پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پوری چوڑائی  $\Delta\omega$  تلاش کریں۔

(ه) چونکہ  $\omega_0 = \gamma B_0$  ہے لہذا ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں نوریہ کا  $g$  جنز و ضربی ایک ٹلا کے ساکن میدان اور ایک مائیکرو ٹلا حیطہ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے نپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں مندرجہ کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضا کی تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$(۹.۹۳) \quad E(r, t) = E_0 \cos(k \cdot r - \omega t)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء ہو تب متعلقہ حجم پر  $k.r \ll 1$  (بہذا  $k.r \sim r/\lambda \ll 1$ ) ہوگا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اول درستگی۔

$$(۹.۹۴) \quad E(r, t) = E_0[\cos(\omega t) + (k.r) \sin(\omega t)]$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ احبازاتی برقی جفت کتبہ توہیات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی چکی ہے۔ دوسرا جزو وہ توہیات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتبہ اور برقی چو کتبہ توہیل کہتے ہیں  $k.r$  کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مسزید زیادہ ممنوعہ توہیات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ توہیات کی خود باخود احسراجی شرح حاصل کریں اس کی تعظیم اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہوگا۔ جواب:

$$(۹.۹۵) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (a_n.r) (k.r) | b \rangle|^2$$

(ب) دکھائیں کہ ایک بُعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ توہیات سطح  $n$  سے سطح  $n - 2$  میں ہوگی اور توہیلی شرح جس کی اوسط قیمت  $a_n$  اور  $k$  پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۹۶) \quad R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5}$$

تبصرہ: یہاں  $\omega$  سے مراد نورسہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ احبازاتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کی نسبت تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ توہیل بھی  $1S \rightarrow 2S$  کی احبازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتبہ کے لیے بھی درست ہوگا غالب تنزل دو نورسہ احسراج کی بنا پر ہوگا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دواں حصہ ہوگا۔

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ  $n, \ell$  سے  $n', \ell'$  میں توہیل کے لیے ہائیڈروجن کا خود باخود احسراجی شرح مساوات ۹.۵۶ درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۹۷) \quad \frac{e^2 \omega^3 I^2}{3 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{\ell+1}{2\ell+1}, & \ell' = \ell + 1 \text{ جب} \\ \frac{\ell}{2\ell-1}, & \ell' = \ell - 1 \text{ جب} \end{cases}$$

جہاں  $I$  درج ذیل ہے۔

$$(۹.۹۸) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{n\ell}(r) R_{n'\ell'}(r) dr$$

جوہر  $m$  کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد  $m, m-1$  یا  $m, m+1$  کے تحت  $m'$  حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب  $m$  پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے  $\ell' = \ell + 1$

صورت کے لیے  $|n\ell m\rangle$  اور  $|n'\ell'm'\rangle$  کے بیچ  $x, y$  اور  $z$  کے تمام غیر صفر توانی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', \ell + 1, m + 1 | r | n\ell m \rangle|^2 + |\langle n', \ell + 1, m | r | n\ell m \rangle|^2 + |\langle n', \ell + 1, m - 1 | r | n\ell m \rangle|^2$$

یہی کچھ  $\ell' = \ell - 1$  کے لیے بھی کریں۔



جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتفاقی  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقاضا، 103  
امتیازی فطر، 103  
امتیازی فطر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطاطی، 90، 104  
انخطاطی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34

- بو سن، 208  
بوہر  
رداس، 156  
کلیہ، 155  
بوہر مقناطیس، 284  
بیریان، 191  
میل  
کروی تقا عمل، 148  
بے لچک پھسکی، 173  
پازیشٹرانیم، 207، 291  
پاشن ویک اثر، 285  
پالی اصول مناعت، 208  
پالی متالب چکر، 177  
پایان، 191  
پنیاں، 234  
پس پردہ، 219  
پلانک  
کلیہ، 162  
پیدا کار  
فت میں انتقال کا، 136  
وقت میں انتقال، 136  
پیدا کار  
تقا عمل، 60  
گھومت، 200  
تجدیدی عرصہ، 89  
تجربہ  
شرن و گرلاخ، 184  
ترتیبی پیا نشین، 131  
ترسیل  
شرح، 78  
تسل  
بالمر، 162  
پاشن، 162  
ٹیلر، 42  
طامتی، 43  
فوریئر، 35  
لیمان، 162  
تشاکلیت  
ضرورت، 209  
تفکیل، 237  
تعداد مکین، 237  
تغیین حال، 103  
تغیریت، 9  
تقا عمل  
ڈیٹا، 72  
تقا عمل موج، 2  
تقا علیہ، 128  
تکمل  
ڈھنپائی، 312  
توالی  
کلیہ، 55  
توانائی  
اجبازتی، 29  
توقعاتی  
قیمت، 7  
شنائی عددی سر، 239  
حبرو ڈارون، 280  
جسیم مقیاس، 229  
جفت، 34  
تقا عمل، 31  
جفت قطب معیار اثر  
مقناطیسی، 181  
جوہری مدار چوں  
خطی جوڑ ترکیب، 311  
جی حبرو ضربی، 278  
چکر، 173، 174  
مخالف میدان، 175  
ہم میدان، 175  
چکر چکر رابطہ، 290  
چکر کار، 175  
چکر و مدار باہم عمل، 279  
چکر و مدار رابطہ، 272  
چندر شیکھر حد، 253  
چوزاویہ تشکل، 298  
حال  
بچھراو، 70



- دوری سستی، 66  
 گروہی سستی، 66  
 رمسز اور وٹاؤسڈ اثر، 86  
 رواحتال، 194  
 روڈریگیس  
 کلیہ، 142  
 ریمان زیٹا تفسا عمل، 249  
 زاویائی معیار حرکت  
 بقا، 170  
 خنقی، 174  
 غیر خنقی، 174  
 زیسان اثر، 283  
 ساکن  
 حالیت، 27  
 سٹرنگ تھمین، 243  
 شیفتن و بولسٹمن کلیہ، 251  
 سرحدی شراظ، 32  
 سرنک زنی، 72، 79  
 سفید بونا، 252  
 سگرا، 15  
 سلور، 220  
 سمتاویہ، 128  
 سمتیات، 97  
 سمتیہ موج، 224  
 سوچ  
 انکاری، 4  
 تقلید پسند، 3  
 حقیقت پسند، 3  
 سوڈیم، 23  
 سہ تا، 188  
 سیاہ جسی طیف، 250  
 سیزھی  
 عاملین، 46  
 سیزھی تفسا عمل، 80  
 شمارک اثر، 296  
 شرودنگر  
 غیر تابع وقت، 27  
 شرودنگر نقطہ نظر، 136  
 زمینی، 34، 156  
 مقید، 70  
 ہچان، 34  
 حراری توازن، 236  
 حرکت  
 سائیکلوثران، 202  
 خطی الجبرا، 97  
 خطی تبدلہ، 97  
 خطی جوڑ، 28  
 خفیہ متغیرات، 3  
 خول، 219، 235  
 درجہات آزادی، 254  
 درجہ حرارت، 236  
 درز، 234  
 درز توانائی، 290  
 دلیل، 61  
 دم ہلانا، 56، 96  
 دوری جدول، 219  
 ڈیراک  
 علاقیت، 128  
 کنگھی، 229  
 معیاری عمودیت، 108  
 ڈیلٹا  
 کرونیٹر، 35  
 ڈیوٹریم، 297  
 ڈیوٹیران، 297  
 ذرہ  
 غیر مستحکم، 21  
 رو  
 احوال، 21  
 ردای مساوات، 146  
 رڈبرگ، 162  
 کلیہ، 162  
 رشتہ  
 پترنگ، 295  
 کرامرس، 295  
 رفتار

- فـنـر و نـو س  
ترکیب، 54  
فـنـر  
بیرونی، 23  
دویری، 128  
فورینس  
الط بدل، 63  
بدل، 63
- فـنـر و نـو س  
غیر ہم آہنگ، 116  
فـنـر  
بجھراو، 93، 94  
ترسیل، 95  
فـنـر اہل ارکان، 125  
فـنـر  
کب، 42  
فـنـر نـی مـنـی، 298  
قواعد بن، 220  
قوالب، 98  
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245  
کایان، 191  
کشافت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکشی  
ہرمانڈ، 58  
کرائنگ و پینی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کبھی تشاکل، 298  
کلیہ  
ڈی بروگلی، 19  
روڈریگیس، 60  
پولر، 30  
کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
کیٹ  
تخفیف شدہ، 206  
کوارک، 191
- شریک عامل، 103  
شریک گرفتگی بندہ، 214  
شریانی مفہوم، 2  
شوارز  
عدم مساوات، 437  
شوارز عدم مساوات، 99  
صفر متام انقطاع، 34
- طاق، 34  
طامس استقبالی حرکت، 279  
طول موج، 18، 162  
طیف، 104  
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17  
تخلیل، 129  
تقلیل، 166، 46  
رفع، 166، 46  
مبادلہ، 209  
عبور، 161  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عقدہ، 34  
علائقیت  
تفعلی و سمتاویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی مستقل، 26  
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105  
غیر موصل، 235
- فـنـر  
توانائی، 227  
درجہ حرارت، 228  
سطح، 227  
فـنـر میان، 208  
فـنـر و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانٹائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرفتتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گروپویشن، 163  
 گیماتفا عمل، 249
- لاپلائی، 138  
 لارمر تعدد، 184  
 لاگتف  
 شریک کشیررکتی، 158  
 کشیررکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لپٹان، 175  
 لتضم، 162  
 لگراج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284  
 لوریننز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈانڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272
- ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم  
 تقابل، 72  
 تقسیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کردی، 139  
 محتالف بیٹا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تقاطعات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروڈنگر، 2  
 مسکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وننمن ولمان، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناستائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فضا تقاطع عمل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250  
وسطانیہ، 7  
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپیلا فٹا عدد، 221  
کاتیسرا فٹا عدد، 221  
کادوسرا فٹا عدد، 221  
ہار مونی  
مر نقش، 32  
ہار مونی مر نقش  
تین البعدی، 193  
ہائیڈروجن  
میونی، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی قسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کاوا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلدیت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
مکمل، 35، 100  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصول، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزدہیلیم، 217  
نظریہ اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصول، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیومن  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ ط، 70