

کوانٹم میکینیات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۸/ نومبر ۲۰۲۱

عنوان

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنای چپکور کنواں
۴۰	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۲	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۱	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۸	۲.۵	ڈیلٹا تفاسل محفہ
۶۸	۲.۵.۱	مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۰	۲.۵.۲	ڈیلٹا تفاسل کنواں
۷۹	۲.۶	مستثنای چپکور کنواں
۹۵	۳	قواعد و ضوابط
۹۵	۳.۱	ہلیرٹ فصنا
۹۸	۳.۲	وتابل مشاہدہ
۹۸	۳.۲.۱	ہر مشی عاملین

۳.۲.۲	متبادل معلوم حالات	۱۰۰
۳.۳	ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل	۱۰۲
۳.۳.۱	غیر مسلسل طیف	۱۰۲
۳.۳.۲	استمراری طیف	۱۰۴
۳.۴	متعمم شمار پاتی مفہوم	۱۰۷
۳.۵	اصول عدم یقینیت	۱۱۱
۳.۵.۱	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۱۱۱
۳.۵.۲	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۱۱۵
۳.۵.۳	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۱۱۵
۳.۶	ڈیراک علاقیت	۱۲۰
۴	تین البادی کو انٹرمیکانیات	۱۳۵
۴.۱	کروی محدود میں مساوات شرودنگر	۱۳۵
۴.۱.۱	علیحدگی متغیرات	۱۳۷
۴.۱.۲	زاویائی مساوات	۱۳۹
۴.۱.۳	ردای مساوات	۱۴۴
۴.۲	ہائیڈروجن جوہر	۱۴۸
۴.۲.۱	ردای تفاعل موج	۱۴۹
۴.۲.۲	ہائیڈروجن کا طیف	۱۵۹
۴.۳	زاویائی معیار حرکت	۱۶۱
۴.۳.۱	امتیازی امتداد	۱۶۲
۴.۳.۲	امتیازی تفاعلات	۱۶۸
۴.۴	چکر	۱۷۱
۴.۴.۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۱۷۸
۴.۴.۲	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۱۸۳
۵	متبادل ذرات	۱۹۷
۵.۱	دو ذراتی نظام	۱۹۷
۵.۱.۱	بوزان اور فرمیون	۱۹۹
۵.۱.۲	قوت مبادلہ	۲۰۲
۵.۲	جوہر	۲۰۵
۵.۲.۱	ہیلیم	۲۰۶
۵.۲.۲	دوری جدول	۲۰۸
۵.۳	ٹھوس اجسام	۲۱۰
۵.۳.۱	آزاد الیکٹرون گیس	۲۱۱
۵.۳.۲	سخت پٹی	۲۱۴
۵.۴	کو انٹرمیکانیات	۲۱۹
۵.۴.۱	ایک مثال	۲۲۰
۵.۴.۲	عمومی صورت	۲۲۲

۲۳۵	زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم	۵.۴.۳
۲۳۸	α اور β کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۳۱	سیاحسی طیف	۵.۴.۵
۲۳۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۳۵	غیر اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۳۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۳۶	اول رتبہ نظریہ	۶.۱.۲
۲۴۰	دوم رتبہ توانائیاں	۶.۱.۳
۲۴۱	اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۴۱	دوپڑنا اخطا	۶.۲.۱
۲۴۵	بلند رتبہ اخطا	۶.۲.۲
۲۴۹	ہائیزروجن کا ہمین ساخت	۶.۳
۲۵۰	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۵۳	حکرومدار ربط	۶.۳.۲
۲۵۷	زیمان اثر	۶.۴
۲۵۷	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۵۹	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۶۰	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۶۱	نہایت مہین ہواہ	۶.۴.۴
۲۷۱	تغیری اصول	۷
۲۷۱	نظریہ	۷.۱
۲۸۹	وزن و کراسرز و برلوان تخمین	۸
۲۹۰	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۲۹۳	سرنگزنی	۸.۲
۲۹۷	کلیہ جوڑ	۸.۳
۳۰۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۰۸	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۰۸	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۱۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۱۳	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۱۵	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۱۵	برقن طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۱۵	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود پاخود احسراج	۹.۲.۲
۳۱۷	غیر اتکلی اضطراب	۹.۲.۳
۳۱۹	خود پاخود احسراج	۹.۳
۳۱۹	آمنشائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱

۳۲۰	بھجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۲۳	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۳۳	حرارت ناگزیر تھمین	۱۰
۳۳۳	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۳۳	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۳۵	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۳۹	ہیت بیری	۱۰.۲
۳۳۹	گرگئی عمل	۱۰.۲.۱
۳۴۰	ہندسی ہیت	۱۰.۲.۲
۳۴۵	اہار و نوو یوم اثر	۱۰.۲.۳
۳۵۳	بھراو	۱۱
۳۵۳	تعارف	۱۱.۱
۳۵۳	کلاسیکی نظریہ بھراو	۱۱.۱.۱
۳۵۵	کوانٹم نظریہ بھراو	۱۱.۱.۲
۳۵۶	حبزوی موج تجزیہ	۱۱.۲
۳۵۶	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۳۵۹	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۳۶۱	یستقلات حیط	۱۱.۳
۳۶۳	بارن تھمین	۱۱.۴
۳۶۴	مسوات شروڈنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۳۶۸	بارن تھمین اوّل	۱۱.۴.۲
۳۷۲	شسل بارن	۱۱.۴.۳
۳۷۵	پس نوشت	۱۲
۳۷۶	آمنطائن پوڈلکیو روزن تصاد	۱۲.۱
۳۷۷	مسئلہ بل	۱۲.۲
۳۸۱	مسئلہ کلیمہ	۱۲.۳
۳۸۲	شروڈنگر کی بل	۱۲.۴
۳۸۳	کوانٹم زینو تصاد	۱۲.۵
۳۸۷	جوابات	
۳۸۹	خطی الجبرا	۱
۳۸۹	سمتیا ت	۱.۱
۳۸۹	اندرونی ضرب	۲.۱
۳۸۹	فتالب	۳.۱
۳۸۹	تبدیلی اساس	۴.۱

۳۸۹ امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار	۵.۱
۳۸۹ ہر مشی تبادله	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد خان پوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۵

متماثل ذرات

۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذرہ کے لیے فعال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے $\psi(r, t)$ فضائی مہدت r اور وقت t کا تفاعل ہوگا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے مختلط (r_1) دوسرے ذرے کے مختلط (r_2) اور وقت کا تابع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے shrodinger مساوات

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا۔ جہاں H مکمل نظام کا Hamiltonian ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} v_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} v_2^2 + v(r_1, r_2, t)$$

ذرہ ایک یا ذرہ دو کے محدودوں کے لحاظ سے تفصیلات لینے کو Δ زیر نوشت میں ایک یا دو سے ظاہر کیا گیا ہے۔
ذرہ ایک کا حجم $d^3 r_1$ اور ذرہ دو کا حجم $d^3 r_2$ پائے جانے کا اہتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

ظاہر ہے کہ ψ کو درج ذیل کے لحاظ سے معمول پر لانا ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفی توانائی کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۵.۶) \quad \psi(r_1, r_2, t) = \psi(r_1, r_2) e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

جہاں فضا کی تعامل معالج ψ غیر تابع وقت shrodingier مساوات

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi$$

جس میں E پورے نظام کی قتل توانائی ہے۔

سوال ۵.۱: عام طور پر باہمی مخفی توانائی انحصار صرف 2 ذرات کے بیچ سمتیہ $r_1 - r_2$ پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات r_1 اور r_2 کی جگہ 'متغیرات اور مرکزیت' $R = \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)}{m_1 + m_2}$ مساوات shrodingier ہوتی ہے۔

$$(الف) \quad \nabla_1 = \left(\frac{\mu}{m_2}\right) \nabla_R + \nabla_r, \nabla_2 = \nabla_r, r_1 = R + \left(\frac{\mu}{m_1}\right) r, r_2 = R - \left(\frac{\mu}{m_2}\right) r \quad \text{جہاں} \quad \left(\frac{\mu}{m_1}\right) \nabla_R - \nabla_r$$

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تشخیص شدہ کیت ہے۔

(ب)۔ دکھائیں کہ غیر تابع وقت shrodingier مساوات درج ذیل رعب اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(r) \psi = E \psi$$

(ج)۔ متغیرات کو $\psi(R, r) = \psi_r(r) \psi_R(R)$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_r ایک ذرہ کی shrodingier مساوات جہاں کیت $(m_1 + m_2)$ مخفی توانائی صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R کو مطمئن کرتا ہے۔ جبکہ ψ_R ایک ذرے کی shrodingier مساوات جہاں تخفیف شدہ کیت ہو۔ مخفی توانائی $V(r)$ ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ قتل توانائی اور ان کا مجموعہ $E = E_R + E_r$ ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکزی کیت ایک آزاد ذرہ کی طرح حرکت کرتا ہے جبکہ ذرہ ایک کے لحاظ سے ذرہ دو کی نصیبتی حرکت ایسے ہی ہوگی جیسا مخفی توانائی V میں تخفیف شدہ کیت کا ایک ذرہ کرتی ہے mechanics classical میں بھی بالکل یہی تحلیل ہوگی جو 2 اجسام ملے کو محاصل ایک جسم سلسلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں Hydrogen کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم electron کی کیت کی جگہ تخفیف شدہ کیت استعمال کریں گے

(الف)۔ hydrogen کی بندش کی توانائی (مساوات 4.77) حبانہ کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے دو بمعنی ہندسوں تک فیصد حائل کتنہ ہوگا۔

(ب)۔ hydrogen اور Dueterium کے لیے $(n = 2) > (n = 3)$ سرخ بالمر کلیروں کے بیچ تفاعل معاج میں مشرق تلاش کریں۔

(ج)۔ Positronium کی بشری توانائی تلاش کریں۔ proton کی جگہ positron رکھنے سے positronium پیدا ہوگا۔ positron کی کیمت electron کی کیمت کے برابر ہوگا جبکہ اس کی علامت Electron کی علامت کے مخالف ہے۔

(د)۔ فرض کریں آپ hydrogenmuonic جس میں electron کی جگہ ایک muon کی موجودگی کی تصدیق کرنا چاہتے ہوں۔ muon کا electron bar کے برابر ہے۔ جبکہ یہ electron سے 206.77 گنا زیادہ کیمت رکھتا ہے۔ آپ α Lyman $n = 1$ تا $n = 2$ کے لیے کس طور معاج پر نظر رکھیں گے۔

سوال ۵.۳: کلورین کے قدرتی دو ہم جاب Cl^{35} and Cl^{37} پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCL کی لرزشی طیف متریب متریب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا۔ جن میں مشرق $4v = 7.51 \times 10^{-4}$ جہاں Δv جس v حرجی photon کی تعدد ہے۔ اشارہ: اس کو ایک Harmonium مرتعیث تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ ہوگا۔ جہاں μ تخفیف شدہ کیمت (مساوات 5.8) ہے۔ جبکہ k دونوں ہجاکے لیے ایک جیسا ہے۔

۵.۱.۱. بوزان اور فرمیون

فرض کریں ذرہ ایک ذرہ حال $\psi_a(r)$ اور ذرہ دو حال $\psi_b(r)$ میں پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ یہاں میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں ایسی صورت میں $\psi(r_1, r_2)$ سادہ حاصل ضرب ہوگا

$$(۵.۹) \quad \psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2)$$

ایسا کہتے ہوئے ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ ہم ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچان سکتے ہیں ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ ایک حال ψ_a میں اور ذرہ دو حال ψ_b میں ہے پیمانی ہوتا اور ہم بغیر جانے کے کونسا ذرہ ایک اور کونسا ذرہ دو ہے یہ کہتے کہ ایک ذرہ ψ_a میں اور دوسرا ذرہ ψ_b میں پایا جاتا ہے۔ کلاسیکی میکینیک میں یہ ایک یوقفانہ اعتراض ہوتا۔ اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دیکر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکینیک میں صورت حال بنیادی طور پر مختلف ہے۔ آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل یکساں ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے متاثر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ یہ الیکٹران اور وہ الیٹران کوانٹم میکینیک میں بے معنی ہیں ہم صرف ایک الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔ اصولی طور پر غیر میسر ذرات کی موجودگی کو کوانٹم میکینیک خوش اسلوبی سے سموتی ہے۔ ہم ایک ایسا غیر مشرود تفاعل وچ تیار کرتے ہیں جب اس کی بات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے ایسا دو طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔

$$(۵.۱۰) \quad \psi \pm (r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے یکساں ذرات کا حاصل ہوگا بوزان جن کے لیے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور فرمیون جن کے لیے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزان کی مثال فوٹان اور میزون ہے جبکہ فرمیون کی مثال

پروٹان اور الیکٹران ہے ایسے ہے کہ

$$(۵.۱۱) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزان جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیون ہوں گے} \end{array} \right.$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق جیسا ہم دیکھیں گے فرمیونز اور بوزانز کی شماریاتی خواہ اس ایک دوسرے سے بہت مختلف ہتے ہیں کو اضافی کو انٹرمیکانیات میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔

اس سے بالخصوص اب یہ اجنزر کر سکتے ہیں کہ دو یکساں فرمیونز مثلاً سولیکٹران ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_-(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) - \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا کوئی موج تفاعل نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ پولی کا احسن راہی اصول کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے بلکہ یہ دو ذراتی تفاعل امواج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے جس کا اطلاق تمام یکساں فرمیونز پر ہوگا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے یہ فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال ψ_a میں اور دوسرا حال ψ_b میں پایا جاتا ہے لیکن اس مسئلہ کو زیادہ عمومی اور زیادہ نفیس طریقے سے وضوح کیا جاسکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ P متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے

$$(۵.۱۲) \quad Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1)$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہوگا لحاظ تصدیق کیجئے گا کہ P کے امتیازی امتداد ± 1 ہوں گے۔ اب اگر دو ذرات یکساں ہوں تب لاطخی ہے کہ ہیملٹونیان کے ساتھ ایک جیسارویہ برتھے گا $m_1 = m_2$ اور $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ اس طرح P اور H ہم اینگ مشود ہوں گے

$$(۵.۱۳) \quad [P, H] = 0$$

لحاظ ہم دونوں کے یک وقت امتیازی حالات کے تفاعلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ

$$(۵.۱۴) \quad \psi(r_1, r_2) = \pm \psi(r_2, r_1)$$

مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشاکلی امتیازی فندر $+1$ یا غیر تشاکلی امتیازی فندر -1 ہوں۔ مزید ایک نظام جو اس حال سے آغاز کرے اس بحال میں برقرار رہتا ہے یکساں ذرات کا ایک نیاتندہ جس کو میں ضرورت تشاکل کہتا ہوں کے تحت تفاعل موج کو مساوات 5.14 پر صرف پورا اترنے کی ضرورت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو متعین کرتا ہو۔ یہاں بوزون کے لیے مثبت علامت اور فرمیونز کے لیے منفی علامت استعمال ہوگا۔ یہ ایک عمومی منکرہ ہے جس کی مساوات 5.10 ایک مخصوص صورت ہے۔

مثال ۵.۱: مندرجہ ذیل ایک لامتناہی چکور کنواں میں کیت M کے باہم غیر متعلق دو ذرات جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں پائے جاتے ہیں۔ آپکو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً کیسے کیا جاسکتا ہے۔ ایک ذرہ حالات درج ذیل ہوں گے۔ جہاں $K = \frac{(\pi)^2(\hbar)^2}{2m(a)^2}$ ہے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n(\pi)}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

یہ ذرات متبادل میز ہونے کی صورت میں جہاں ذرہ 1 حال n_1 میں اور ذرہ 2 حال n_2 میں ہو مرکب تقاعلی موج سادہ حاصل ضرب ہوگا۔

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = ((n_1)^2 + (n_2)^2) K.$$

مثال کے طور پر زمینی حال

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K;$$

پہلا حبان حال دو چاند اخطائی

$$\psi_{12} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$

$$\psi_{21} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K;$$

ہوگا وغیرہ وغیرہ۔ دونوں ذرات یکساں یوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم پہلا حبان حال جسکی توانائی اب بھی 5K ہوگی غیر اخطائی ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

اور اگر ذرات یکساں مشرعیون ہوں تب کوئی حال بھی 2K توانائی کا نہیں ہوگا۔ جبکہ زمینی حال جسکی توانائی 5K ہوگی۔ درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

□

سوال ۵.۴:

(جنرڈالف) اگر Ψ_a اور Ψ_b عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات 10.5 میں متقل 'A' کی ہوگا؟

باب ۵: متشکل ذرات

(جزو الف) اگر $\Psi_a = \Psi_b$ ہوں اور یہ معمول شدہ ہوں تب 'A' کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف یوزون کیلئے ممکن ہے۔)
سوال ۵.۵:

(جزو الف) لامتناہی چکور کنواں میں باہم غیر متعامل دو یکاں ذرات کا ہملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال 1.5 میں دیا گیا فرمیون کا زمینی حال 'H' کا مناسب امتیازی متدروالا امتیازی تفاعل ہوگا۔

(جزو ب) مثال 1.5 میں دیئے گئے تھان حالات سے اگلے دو حالات تفاعل موج اور توانائیاں تینوں صورتوں میں متبادل ممیز یکاں موزوں، یکاں فرمیون حاصل کریں۔

۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یکہ بُجدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشکل کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہو اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہوں اگر یہ ذرات متبادل ممیز ہوں اور ذرہ ایک حال ψ_a میں ہو تب انکا مجموعی تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۵) \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

اگر یہ یکاں یوزون ہوں تب انکا مرکب تفاعل موج سوال 5.4 معمولی کے لیے دیکھیں درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۶) \quad \psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

اور اگر یہ یکاں فرمیون ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۷) \quad \psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

آئیں ان ذرات کے بیچ علیحدگی کے مناسلی کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں

$$(۵.۱۸) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

پہلے صورتے: قابل ممیز ذرات۔ مساوات 5.15 میں دی گئی تفاعل موج کے لیے ایک ذرہ حال ψ_a میں x^2 کی توقعاتی قیمت

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

یوں اس صورت درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۹) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

یہی جواب ذرہ ایک حال ψ_b میں اور ذرہ دو حال ψ_a میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔
دوم صورت سے: یکساں ذرات۔ مساوات 5.16 اور 5.17 کے تفسیر عمل امواج کے لیے

$$\begin{aligned} \langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b) \end{aligned}$$

بلکل اسی طرح

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

ظاہر ہے $\langle x_2^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle$ ہوگا کیونکہ آپ ان میں تفریق نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2 \end{aligned}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۵.۲۰) \quad \langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا

$$(۵.۲۱) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

مساوات 5.19 اور 5.21 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ منفرق صرف آخری ہر میں پایا جاتا ہے

$$(۵.۲۲) \quad \langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_a \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

متماثل ممیز ذرات کے لحاظ سے انہی دو حالات کے یکساں بوزان ملائی علامت نسبتاً ایک دوسرے کے زیادہ متضرب جبکہ یکساں منرمیون زیریں علامت نسبتاً ایک دوسرے سے زیادہ دور ہولگے۔ دیہان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانچے نہیں $\langle x \rangle_{ab}$ منمر ہوگا غیر منمر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ منمر ہوتا ہے مساوات 5.20 میں عمل کی قیمت منمر ہوگی۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_a ظاہر کرتا ہو جبکہ صوابی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_b ظاہر کرتا ہو تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی منفرق نہیں پڑے گا یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانچتے ہوں کو آپ متماثل ممیز ہونے کا ڈھونگ رہا سکتے ہیں۔ درحقیقت اسی کی بناماہر طبیعیات اور کیمیات آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً حبانت میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ تفاعل امواج کے ذریعہ عدم تشاکلی کی بنا حبڑا ہے اور اگر اس سے کوئی فخرق پڑتا ہے تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے متاثر ہوتے۔

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتے ہے جب انکی موجی تفاعلات ایک دوسرے کو ڈھانچتے ہیں۔ ایسی صورت میں نظام کاروبہ کچھ یوں ہوگا جیسا یکساں بوزون کے سچ قوت کشش پائی جاتی ہو جو انہیں متضرب کھینچتے ہے جبکہ یکساں منرمیونز کے سچ قوت دفع پائے جاتی ہے جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم فعل حال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں۔ ہم اس کو قوت مبادلہ کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک وقت نہیں ہے کوئی بھی چیز ان ذرات کو دکھیل نہیں رہی ہے یہ صرف ضرورت تشاکل کی جو میٹرائی نتیجہ ہے ساتھ ہی یہ کو انٹرمیکانی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکنیات میں کوئی متماثل نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دور ست نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثال کے طر پر ہائڈروجن سالہ H_2 پر غور کریں اندازاً بات کرتے ہوئے مرکزہ ایک پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال مساوات 4.80 میں ایک الیکٹران اور مرکزہ دو پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال دو میں ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہوگا اگر الیکٹران بوزون ہوتے تب ضرورت تشاکل یا اگر آپ قوت مبرہ پسند کرتے ہیں کوشش کرتے کہ دونوں پروٹان کے سچ الیکٹرانوں کو جمع کریں شکل 5.1 الف نتیجتاً منفی بار کا امبار دونوں پروٹانوں کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا جو شریک گر منستی بند کا سبب ہوتا۔ بد قسمتی سے الیکتران درحقیقت منرمیون ہیں نہ کہ بوزون جس کی بنا منفی بار اطراف کی جانب منتقل ہوتا ہے شکل 5.1 ب جو سالہ کو توڑنے کی کوشش کرتا ہے۔

ذرا کیے گا اب تک ہم نے چکر کو نظر انداز کیا ہے الیکٹران کے مکمل حال کو نہ صرف الیکٹران کا مکام

تفاعل موج بلکہ الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرنے والا چکر کار تعین کرتے ہیں

$$(۵.۲۳) \quad \psi(r)\chi(s)$$

دو الیکٹران حال کو تفکیک دیتے ہوئے ہمیں صرف فضائی جزو کو مبادلہ کے لحاظ سے عدم تشاکلی بنانا ہوگا بلکہ پورے کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چکر کی حال مساوات 4.177 اور 4.178 پر نظر میں ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یکتا ملاپ خلاف تشاکلی ہے لحاظ اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہوگا جبکہ تین بہت حالات تشاکلی ہیں لحاظ انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔ ظاہر ہے کہ یوں یکتا حال بندھن پیدا کرے گا جنکہ بہت حال خلاف بندھن ہوگا۔ یقیناً ماہر کیمیا ت ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گرمیتی بند کے لیے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران یکتا حال کے ممکن ہوں جہاں انکا کل چکر صفر ہوگا۔

سوال ۵.۶: لامتناہی چکور کنواں میں دو باہم غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال Ψ_n مساوات 28.2 اور دوسرا حال Ψ_l $n \neq l$ میں ہے۔ $(x_1 - x_2)^2$ کا حساب اس صورت لگائیں کہ (الف) یہ غیر متابل ممیز ہوں۔ (ب) یہ یکاں بوزون ہوں اور (ج) یہ یکاں فرمیون ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال Ψ_a دوسرا حال Ψ_b اور تیسرا حال Ψ_c میں پائے جاتے ہیں۔ حالات Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے مساوات 15.5، 16.5 اور 17.5 کی طرز پر تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) متابل ممیز ذرات کو (ب) یکاں بوزون کو اور (ج) یکاں فرمیون کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہوتا ہوگا۔ جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکل تفاعل امواج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ سیئر نقطہ تیار کریں جس کی پہلی صنف $\Psi_a(x_1), \Psi_c(x_1), \Psi_b(x_1)$ وغیرہ پر مشتمل ہو۔ اس کی دوسری صنف $\Psi_a(x_2), \Psi_b(x_2), \Psi_c(x_2)$ وغیرہ پر مشتمل ہوگی اور اسی طرح اس کے بقایا صنف ہوں گے۔ یہ نقطہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلے کارآمد ہوگا۔

۵.۲ جوہر

ایک ماڈل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کی کمیت M اور بار e کے الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔

$$(۵.۲۴) \quad H = \sum_{j=1}^Z -\frac{\hbar^2 \Delta_j^2}{2m} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{Ze^2}{r_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}.$$

ہر یہ قوسین میں بند جزو مرکزہ کے برقی میدان میں Z الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرا جزو جو ماسوائے $k = 1, 2, \dots, Z$ تمام Z اور k مجموعہ پر ہے۔ الیکٹرانز میں باہمی قوت دافع کی بنا مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیے ہوئے ہر جوڑی کو دوبار گنا جاتا ہے۔ ہمیں تفاعل موج $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$ کیلے درج ذیل شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی:

$$(۵.۲۵) \quad H\Psi = E\Psi$$

چونکہ الیکٹران یکساں فزیمون ہیں لہذا تمام حل متماثل مقبول نہیں ہوں گے۔ صرف وہ حل متماثل مقبول ہوں گے جن کا مکمل حال، مقفام اور چپکر

$$(۵.۲۶) \quad \Psi(r_1, r_2, \dots, r_z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تماثل ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ بد قسمتی سے مساوائے سادہ ترین صورت $1 = z$ ہائیڈروجن کیلئے مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کی شرودنگر مساوات ٹھیک حل نہیں کی جاسکتی ہے۔ کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینہ ترائیکب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک ترائیکب پر اگلے بابوں میں غور کیا جائے گا۔ ابھی میں الیکٹران کی قوت و دافع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ 1.2.5 میں ہم ہلیم کی زمینی حال اور جہان حالات پر غور کریں گے۔ جبکہ حصہ 2.2.5 میں ہم ہلا جواہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کے لیے آپ شرودنگر مساوات 25.5 کا حل $\Psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_z)$ حاصل کر پائیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تماثل تقف عمل ایک مکمل خلاف تماثل تقف عمل کس طرح بنائیں گے جو شرودنگر مساوات کو کسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

۵.۲.۱ ہلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے زیادہ جوہر ہلیم $Z = 2$ ہے۔ اس کا ہملٹنی

$$(۵.۲۷) \quad H = -\frac{\hbar^2 \Delta_1^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} - \frac{\hbar^2 \Delta_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|},$$

بار Ze کے مرکزہ کے دو ہائیڈروجن ہلیمٹنی الیکٹران 1 اور دوسرا الیکٹران 2 کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی و دافع پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر متماثل علیحدگی ہوگا۔ اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس مساوات 72.4 اور چار گن بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے وجہ سے سمجھنے کی صورت میں سوال 16.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہائیڈروجن تقف عملات موج کے حاصل ضرب

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_{nlm}(r_1) \Psi_{n'l'm'}(r_2), \quad [5.28]$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی جہاں $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$ ہوگا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}), \quad [5.29]$$

بالخصوص زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۲۸) \quad \Psi_0(r_1, r_2) = \Psi_{100}(r_1) \Psi_{100}(r_2) = \frac{8e^{-2(r_1 + r_2)/a}}{\pi a^3},$$

مساوات 80.4 دیکھیں اور اس طرح کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$E_0 = 8(-13.6\text{eV}) = -109\text{eV}. \quad [5.31]$$

چونکہ ψ_0 تشاتل تشاتل ہے لہذا چکر حال کو خلاف تشاتل ہونا ہوگا اور یوں ہلیم کے زمینی حال کا تنظیم یکتا ہوگا۔ جس میں چکر ایک دوسرے کے مخالف صفت بند ہوں گے۔ حقیقت میں ہلیم کا زمینی حال یقیناً یکتا ہے۔ لیکن اس کی توانائی تجرباتی طور پر -78.975eV حاصل ہوتی ہے۔ جو مساوات 31.5 سے کافی مختلف ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کہ ہم نے الیکٹران کی توانائی وضع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار ہے۔ مساوات 27.5 دیکھیں۔ جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی -109 کی بجائے -79eV ہوگی۔ سوال 11.5 دیکھیں۔ ہلیم جہان حالات

$$\Psi_{nlm}\Psi_{100}. \quad [5.32]$$

ہائیڈروجن زمینی حال میں ایک الیکٹران اور دوسرا جہان حال پر مشتمل ہوگا۔ دونوں الیکٹران کو جہان حالات میں لے جاتے ہی ایک فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر پھینکتا ہے۔ ($E > 0$)۔ یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہلیم باردار یہ (He^+) حاصل ہوگا۔ یہ باذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں۔ سوال 9.5 دیکھیں۔ ہم ہمیشہ کی طرح تشاتل اور خلاف تشاتل حالات تیار کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.5؛ اول الفکر خلاف تشاتل چکر تنظیم یکتا کے ساتھ جائے گا۔ جنہیں پیرا ہلیم کہتے ہیں۔ جبکہ مؤخر ذکر کو تشاتل چکر تنظیم سہت درکار ہوگی اور انہیں اور تھو ہلیم کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً پیرا ہلیم ہوگا جبکہ جہان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ 2.1.5 میں دریافت کیا۔ تشاتل فضائی حال الیکٹرانز کو متعرب لاتا ہے۔ جس کی بنا ہم توقع کرتے ہیں کہ پیرا ہلیم کی باہم متعرب توانائی زیادہ ہوگی۔ یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ اور تھو ہلیم کے لحاظ سے پیرا ہلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے۔ شکل 2.5 دیکھیں۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہلیم ایٹم کے دونوں الیکٹرانز کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں۔ خارج الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی۔

ب. ہلیم باردار یہ He^+ کی تیغ پر مقداری تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں کئی تجزیہ کریں۔ (الف) اگر الیکٹران یکساں بوزون ہوتے۔ (ب) اگر الیکٹران متماثل ممیز ہوتے۔ جبکہ ان کی کیست اور بار نہ ہوتا۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے اور ان کی تنظیم چکر یکتا اور سہت ہے۔

سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات 30.5 میں دی گئی حال Ψ_0 کیلئے $\left(\frac{1}{|r_1 - r_2|}\right)$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کری محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھتے ہوئے تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}. \quad (۵.۲۹)$$

ہو۔ پہلے d^3r_2 کا مکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے مکمل آسان ہے۔ بس اتنا یاد رکھیں کہ آپ کو مثبت جزو دلینا ہوگا۔ آپ کو r_2 مکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا۔ پہلا صفر سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $-\frac{5}{4a}$

ب۔ جزو الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہلیم کی زمینی حال میں الیکٹران کا باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔ اور اس کو E_0 مساوات 31.5 کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمینہ حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔

۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹران تنظیم اسی طرح جوڑ کر حاصل کی جاتی ہے۔ پہلی تخمینہ کی حد میں انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے ہار Z_e کے مرکزہ کے کولمب محفہ میں یک ذرہ ہائڈروجن حالات (n, l, m) جنہیں مدار چے کہتے ہیں کہ انفرادی الیکٹران ممکن ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان یا فٹ بل ممیز ذرات ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ گر جاتے اور کیا اتنی دلچسپ نہ ہوتی۔ حقیقت میں الیکٹران یکساں فضا میں ان کے جن پر پولی اصول منات لاگو ہوتا ہے لحاظ کسی ایک مدار چے میں صرف دو الیکٹران رہ سکتے ہیں ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان بلکہ یہ کہنا زیادہ درست کہ یکتا تنظیم میں الیکٹران رہ سکتے ہیں۔ کسی بھی n کی قیمت کے لیے n^2 ہائڈروجنی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی توانائی E_n ہوگی یوں $n = 1$ خول میں دو الیکٹرانوں کی جگہ $n = 2$ خول میں آٹھ $n = 3$ میں اٹھارہ اور n میں $2n^2$ خول میں الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی۔ کئی طور پر بات کرتے ہوئے دوری جدول کے آٹلی صف انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے اگر شے پوری کہانی نہیں ہے چونکہ ایسا ہونے کی صورت میں انکی لمبائیاں 2, 8, 18, 32, 50, وغیرہ ہوتی نا کہ 2, 8, 8, 18, 18, وغیرہ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹرانوں کی باہمی توانائی دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے۔

ہیلیم کا $n = 1$ خول مکمل طور پر بھرا ہوگا لحاظ آگاہ ہر لیتیم $Z = 3$ کو ایک الیکٹران $n = 2$ خول میں رکھنا ہوگا۔ اب $n = 2$ کی صورت میں $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے۔ تیس الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ چونکہ جوہر توانائی n پر منحصر ہوتی ہے نا کہ l پر لحاظ الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک دوسرے جیسی ہوگی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا الیکٹران کی توانائی دفن l کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیارے حرکت الیکٹران کو بے رونی روح دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا مرکزہ سے دور ہوتا ہے اتنا ہی یہ مرکزہ بہتر چھپاتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا Z_e نظر آتا ہے جب کہ بے رونی الیکٹران کو مشکل سے e سے زیادہ موثر نظر آتا ہے۔ یوں کسی بھی ایک ہول میں کم سے کم توانائی کا حال یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران $l = 0$ ہوگا۔ اور بڑھتے l کے ساتھ توانائی بڑھے گی اس طرح تہیم میں تیس الیکٹران مدار چے $(2, 0, 0)$ کا مقید ہوگا۔ آگاہ جوہر ہیلیم جس کا $Z = 4$ ہے اسی حال میں ہوگا لیکن اس کا چکر مخالف رخ ہوگا لیکن بوران $Z = 5$ کو $l = 1$ استعمال کرنا ہوگا۔ اسی طرح چلتے ہوئے ہم نہیں

$Z = 10$ تک پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ ہول مکمل بھرا ہوگا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ ہول کو بھرا شروع کرتے ہیں۔ آغاز میں دو جوہر سوڈیم اور میگنیشیم ہیں جنکا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد الیمینیم سے آرگان تک چھ ایسے جوہر ہیں جن کے لیے $L = 1$ ہوگا۔ آرگان کے بعد ہم توقع کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہوگا البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران سرکڑ کو اتنی خوش اسلوبی کے ساتھ پردہ کرتے ہیں کہ یہ اگلے ہول کو بھی ڈنگتا ہے لہذا پوٹیشیم ($Z = 19$) اور کیلشیم ($Z = 20$)، ($l = 2$)، ($n = 3$) کی بجائے ($L = 0$)، ($n = 4$) منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم نیچے اتر کر سیکنڈیم سے زنک تک کے جوہر اٹھاتے ہیں جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہوگا۔ اس کے بعد گلیمیم سے کرپٹان تک $l = 1$ اور $n = 4$ ہوگا جس کے آخر میں ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف $n = 5$ کو چھلانگ لگاتے ہیں اور بعد میں واپس اتر کر $n = 4$ ہول کے۔ وہ مدار جے جن کے لیے $l = 2$ اور $l = 3$ ہوں پر کرتے ہیں۔ یہاں جوہری حالات کی قدیم نام جنہیں تمام ماہر یکیات اور تبیات کے زیادہ تر ماہرین استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہوگا اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے تیز پیمانی کاروں کو معلوم ہوگا کہ $l = 0$ کو s کہتے ہیں $l = 1$ کو p کہتے ہیں، $l = 2$ کو d کہتے ہیں اور $l = 3$ کو f کہتے ہیں۔ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راس پر آگے اور انہوں نے عسوف تہجی کے تحت (g, h, i, k, l) وغیرہ نام دینا شروع کیا۔ انہوں نے ہماری ناک میں دم کرنے کی خاطر زکوٰۃ نظر انداز کیا۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو (n, l) کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں عدد n حال کو اور حرف l مدار جی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ کو انٹیم عدد m کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نما میں حال کے مقین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تنظیم

$$(5s)^2(2s)^2(2p)^2 \quad (5.30)$$

کہتی ہے کہ مدار جب ($1, 0, 0$) میں 2 الیکٹران، مدار جب ($2, 0, 0$) میں 2 جبکہ مدار جے ($2, 1, 1$)، ($2, 1, 0$) اور ($2, 1, -1$) کے کسی ملاپ میں 2 الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حل ہے۔ اس مثال میں 2 الیکٹران ایسے پائے جاتے ہیں جن کے مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد ایک ہے لہذا مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد ایک ہے لہذا کل مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم نمبر l کسی ایک ذرہ کی جبکہ L کل قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک، دو یا صفر ہو سکتا ہے۔ جبکہ ($1s$) کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یکساں حال میں بندھے ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا۔ یہی کچھ ($2s$) کے دو الیکٹرانوں کے لئے بھی ہوگا لیکن ($2p$) کے دو الیکٹران یا تو یکساں اور یا بہت انتظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کو انٹیم عدد s کل کو ظاہر کرنے کے لئے بڑا حرف استعمال ہوگا۔ جس کی قیمت ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے میزان کل مدار جی جمع چکر J کی قیمت تین، دو، ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو ہن قواعد (سوال 1.5 دیکھیں) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$L_J^{2S+1} \quad (5.31)$$

جہاں J اور S اعداد جبکہ L ایک حرف ہوگا اور چونکہ ہم کل کی بات کر رہے ہیں لہذا یہ بڑا حرف ہوگا کاربن کا زمینی حال 3D ہے جس کا کل چکر ایک ہے جس کی بنا 3 لکھا گیا ہے کل مدار جی زاویائی معیار حرکت ایک ہے لہذا 1 لکھا گیا ہے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے لہذا صفر لکھا گیا ہے۔ جدول 1.5 میں دوری جدول کے ابتدائی چار صفحات کے لئے انفرادی تنظیم اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات 34.5 کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔

سوال ۵.۱۲: حبنز الف: دوری جدول کے ابتدائی دو صفوں کے لئے نیوون تک مساوات 33.5 کی روپ میں تنظیم الیکٹران پیش کر کے ان کی تصدیق جدول 1.5 کے ساتھ کریں۔
حبنز ب: ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات 34.5 کی روپ میں ان کا مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳: حبنز الف: ہن کا پہلا متاعدہ کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسا ہونے کے لیے صورت میں وہ حال جس کا کل چپکری زیادہ سے زیادہ ہوگی کم سے کم توانائی ہوگی۔ ہیلیم کے حبن حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔
حبنز ب: ہن کا دوسرا متاعدہ کہتا ہے کہ کسی ایک چپکری صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو۔ وہ حال جس کی مدار جی زاویائی معیار حرکت $2L$ زیادہ سے زیادہ ہوگی توانائی کم سے کم ہوگی۔ کاربن کے لئے $2L=2$ کیوں نہیں ہوگا؟ اشارہ سیزھی کا بالائی سر ($M_L = L$) تشاکلی ہے۔

حبنز ج: ہن کا تیسرا متاعدہ کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول (n, l) نصف سے زیادہ بھرا نا ہو تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L - S|$ ہوگا۔ اگر نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L + S$ کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال 12.5 ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کرے۔
حبنز د: قواعد ہن کے ساتھ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چپکری حال کے ساتھ خلاف تشاکلی موازنہ حال کے ساتھ خلاف تشاکلی چپکری حال استعمال ہوگا۔ سوال 12.5 ب میں کاربن اور نائٹروجن میں درپیش مشکلات سے چھٹکارا حاصل کریں۔ اشارہ کسی بھی حال کی تشاکلی حبانے کی خاطر سیزھی کے بالائی سر سے آغاز کریں۔

سوال ۵.۱۴: دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر چار ساٹھ ڈسپروسیئم کا زمینی حال I_8 ہے۔ اس کے کل چپکر کل مدار چے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کو انٹم کل حالات کیا ہوں گے۔ ڈسپروسیئم کے الیکٹران کی تنظیم کا حث کہ کیا ہو سکتا ہے۔

۵.۳ ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈیلے مقبذہ گرمیتی الیکٹرانوں میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص موروثی مرکز کے کولوم میدان سے آزاد، تمام متشکل حال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرنا شروع کرتے ہیں اس حصہ میں ہم تو بہت سادے نمونوں پر غور کرے گے۔ پہلا نمونہ الیکٹرون گیس نظریہ ہے جو سمرنیل نے پیش کیا اس نمونے میں سرحد کے اثرات کے علاوہ باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور الیکٹرانوں کو لامتناہی چپکوری کواں کے تین آبادی مشال کی طرح ڈیلے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے۔ دوسرا نمونہ بلخ نظریہ کہایا جاتا ہے الیکٹرون کی بھی دفناع کو نظر انداز کرتے ہوئے بافتاعدگی سے ایک جیتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے، یہ نمونہ ٹھوس اجسام کی کو انٹم نظریہ کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں۔ اس کے باوجود یہ پولی حصولات کا جوت میں گہرا کردار اور موصل، غنیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتی ہے۔

۵.۳.۱ آزاد الیکٹرون گیس

، فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اصلا l_x, l_y, l_z اور l_z ہے اور فرض کرے کے اس کے اندر الیکٹرون پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہو سکی ماسوائے نا قابل گزر دیواروں کے۔

$$(۵.۳۲) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

شرودنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi$$

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z$$

اور

$$E = E_x + E_y + E_z$$

درج ذیل لیتے ہوئے،

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۵.۳۳) \quad X(x) = A_x \sin(K_x x) + B_x \cos(K_x x) \quad Y(y) = A_y \sin(K_y y) + B_y \cos(K_y y) \quad Z(z) = A_z \sin(K_z z) -$$

سرحدی شرائط کے تحت

$$X(0) = Y(0) = Z(0), B_x = B_y = B_z = 0, X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$k_x l_x = n_x \pi, k_y l_y = n_y \pi, k_z l_z = n_z \pi$$

جہاں n ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

$$n_x = 1, 2, 3, \dots \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

معمول شدہ تفرقات موج درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right)$$

اور احزاب ذاتی توانائیاں درج ذیل ہو گی۔

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

جہاں سمتیاں موج، $k \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مطلق قیمت K ہو گی۔ اگر آپ ایک تین آبادی فضا کا تصویر کرے جس کے محور $k_x = (\pi/l_x)(2\pi/l_x)(3\pi/l_x) \dots$ اور $k_y = (\pi/l_y)(2\pi/l_y)(3\pi/l_y) \dots$ اور $k_z = (\pi/l_z)(2\pi/l_z)(3\pi/l_z) \dots$ ہوں گے۔ ہر انفرادی نقطہ بتا دے گا کہ ایک منفرد ایک ذرا سا کن حال دیگا۔

اس حال میں ہر ایک خانہ لہذا ہر ایک حال کی فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم ہے۔

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں N جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصے کے q آزاد الیکٹرون دیتا ہو۔ عملاً کسی بھی کلاں بینی جامت کے چیز کے لیے N کی قیمت بہت بڑی ہو گی جو ایوگاڈرو عدد میں گنی جائے گی جبکہ q ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہو گا۔ اگر الیکٹرون بوزان یا متابل ممیز ذرات ہوتے تب وہ زمینی حال ψ_{111} میں سکونیت اختیار کرتے حقیقتاً الیکٹروں یکساں فضا میں جن پر پالی اصول مناسط کا اطلاق ہوتا ہے لحاظ کسی بھی حل کی ممکن صرف دو الیکٹرون ہو سکتے ہیں۔ یہ k فضا میں ایک کرہ کا ایک ٹکڑا k_F تک بھرے گی جس کو اس حقیقت سے تعین کیا جاسکتا ہے کہ الیکٹران کی ہر ایک جوڑی کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہو گا مساوات 5.40:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

یوں

$$(5.33) \quad k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}}$$

جہاں

$$(5.35) \quad \rho \equiv \frac{Nq}{V}$$

آزاد الیکٹران کثافت ہے (آزاد حجم میں الیکٹرانوں کی تعداد)۔

k فضا میں ممکن اور غیر ممکن حالات کی سرحد کو فرمی سطح کہتے ہیں (اسی کی بنا زیر نوشت میں F لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقی توانائی کو فرمی توانائی E_F کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$(5.36) \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$

الیکٹرون گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے۔ ایک خول جس کی موٹائی dk شکل 5.4 ہو کا حجم

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2)dk$$

لاحظہ اس خول میں الیکٹرون حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی

$$\frac{2[(\frac{1}{2})\pi k^2 dk]}{\pi^3} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ مساوات 5.39 لحاظ خول کی توانائی

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk \quad (5.37)$$

اور کل توانائی درج ذیل ہوگی

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m} V^{\frac{2}{3}} \quad (5.38)$$

کوانٹم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا کہ گیس میں اندرونی حرارتی توانائی U کا ہوتا ہے۔ بل خصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں dV کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کمی رونما ہوگی

$$dE_{tot} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m} V^{\frac{5}{3}} dV = -\frac{2}{3} E_{tot} \frac{dV}{V}$$

جو بیرون پر کوانٹم دباؤ P کا یہ ہوا کم $dW = PdV$ نظر آتا ہے

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{tot}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} \quad (5.39)$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس شہ اندر کی طرف منہدن کیوں نہیں ہو جاتا۔ ایک اندرونی کوانٹم میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتی ہے جس کا الیکٹرون کے باہمی دفع جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں یا حرارتی حرکت جس کو ہم خارج کر چکے ہیں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے۔ بلکہ جو یکساں فرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات انحطاطی دباؤ کہتے ہیں اگرچہ منطقی دباؤ بہتر اصطلاح ہوگی۔

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹرون کی اوسط توانائی $\frac{E_{tot}}{Nq}$ کو فرمی توانائی کے قصور کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\frac{3}{5} E_F$

سوال ۵.۱۶: تناسب کی کثافت 8.96 g cm^{-3} ہے جبکہ اس کا جبری وزن 63.5 g mol^{-1} ہے۔

(الف) مساوات 5.43 استعمال کرتے ہوئے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی فیری توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹرون ولٹ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) الیکٹران کی مطلبی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ اشارہ: $(\frac{1}{2})mv^2 = E_F$ لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹرون کو غیر اضافی تصور کرنا خطرے سے باہر ہوگا؟

(ج) تانبے کے لیے کس درجہ حرارت پر امتیازی حرارتی توانائی $k_B T$ جہاں k_B بولٹزمن مستقل اور T کیلون حرارت ہے فیری توانائی کے برابر ہوگا؟ تبصرہ: اس کو فیری حرارت کہتے ہیں۔ جب تک حقیقی حرارت فیری حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو ٹھنڈہ تصور کیا جاسکتا ہے اور اس میں الیکٹرون خپلے ترین متبادل پہنچ حال میں ہوں گے۔ چونکہ تانبے 1356 K پر گستا ہے لحاظ سے ٹھوس تانبہ ہر صورت ٹھنڈہ ہوگا۔

(د) الیکٹران گیس نمونہ میں تانبے کے لیے اخطائی دباؤ مساوات 5.46 کا حساب لگائیں۔

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نصبتی اضافے کے تناسب کو جسم مقیاس کہتے ہیں۔

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

دیکھیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $P = \frac{5}{3} P$ ہوگا اور سوال (د) 5.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبہ کے لیے جیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربے سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ ہے مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں چونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ ایک حیران کن نتیجہ ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا متریب ہے۔

۵.۳.۲ سخت پٹی

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم وناصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کا رویہ نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل و صورت مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جس سے یک بُعدی ڈیراک کنگھی کہتے ہیں اور جو ایک جتنے برابر وناصلوں پر نوکیلی ڈیٹا تعلقوں پر مشتمل ہوتا ہے شکل 5.5۔ لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت سادہ بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل وناصلہ a کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

(۵.۴۰)

$$V(x+a) = V(x)$$

مسئلہ بلوچ کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر،

(۵.۴۱)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کے حل سے مراد وہ تفاعل ایسا جاسکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

$$\psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x) \quad (5.۴۲)$$

جہاں K ایک مستقل ہے۔ یہاں مستقل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو x کا تابع نہیں ہے اگرچہ یہ E کا تابع ہو سکتا ہے۔

ثبوت: مان لیں D کے ایک ہٹاؤ عامل ہے:

$$Df(x) = f(x+a) \quad (5.۴۳)$$

دوری مخفیہ مساوات 5.47 کی صورت میں D ہیلٹنی کا مقلوبی ہوگا:

$$[D, H] = 0 \quad (5.۴۴)$$

لاحظہ ہم H کے ایسے امتیازی تفاعلات چھنڈ سکتے ہیں جو بیک وقت D کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں: $D\psi = \lambda\psi$ یا

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \quad (5.۴۵)$$

یہاں λ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اگر یہ صفر ہو تب چونکہ مساوات 5.52 تمام x کے لیے مطمئن ہوگا لحاظ ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ کسی بھی غیر مخلوط عدد کی طرح اس کو قوت نہائی روپ میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\lambda = e^{iKa} \quad (5.۴۶)$$

جہاں K ایک مستقل ہوگا۔

اس مقام پر مساوات 5.53 امتیازی و تدر λ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ K حقیقی ہے اور یوں اگرچہ $\psi(x)$ از خود غیر دوری ہے $|\psi(x)|^2$ جو درج ذیل ہے۔

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (5.۴۷)$$

دوری ہوگا جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی حقیقی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لیے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوغ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاہین سطح کے قلم میں کئی ایوگاڈرو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ تھوس جسم کی سطح سے بہت دور الیکٹران پر سطحی اثر قابل نظر انداز ہوگا۔ ہم مسئلہ بلوغ پر پورا اترنے کی خاطر x کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کی دم بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد اس کے سر پر پایا جاتا ہو باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط مسلط کرتے ہیں

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \quad (5.۴۸)$$

یوں مساوات 5.49 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$e^{iNKa}\psi(x) = \psi(x)$$

لاحظہ 1 یا $NKa = 2\pi n$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.49)$$

یہاں K لازماً حقیقی ہوگا مسئلہ بلوخ کی عبادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ مثلاً $(0 \leq x < a)$ کے وقفہ پر مسئلہ شروع کرنا ہوگا مساوات 5.49 کی بار بار اطلاق سے ہر جگہ کے حالات حاصل ہوں گے۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ درحقیقت نوکیلی ڈیلٹا تعاملات ڈیراک کنگھی پر مشتمل ہو:

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \quad (5.50)$$

شکل 5.5 میں آپ تصور کریں گے کہ محور x کو یوں دائروی شکل میں گھومایا گیا ہے کہ N وین نوکیلی تعامل درحقیقت نقطہ $-a = x$ پر پایا جاتا ہے۔ اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے لیکن یاد رہے ہمیں دوریرت سے دلچسپی ہے۔ کلاسیکی طور پر دہراتا ہوا منطقی مخفیہ استعمال کیا گیا جواب بھی بہت سے مستغنین کا پسندیدہ مخفیہ ہے خط $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہوگا لحاظ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi,$$

ہوگا۔

جہاں ہمیشہ کہ طرح درج ذیل ہوگا

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (5.51)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), (0 < x < a). \quad (5.52)$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مباد کے بالکل بائیں ہاتھ پہلے خانہ میں تعامل موج درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = e^{-iKa} [A \sin k(x+a) + B \cos k(x+a)], (-a < x < 0). \quad (5.53)$$

نقطہ $x = 0$ پر ψ لازماً استمراری ہوگا لحاظ

$$(۵.۵۴) \quad B = e^{-iKa} [A \sin(ka) + B \cos(ka)];$$

اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفاعل کی زور کے برابر است۔ متناسب عدم استمرار پائے جائے گی مساوات 2.125 جس میں α کی علامت الٹ ہوگی چونکہ یہاں کنواں کی بجائے نوکیلی تفاعل پایا جاتا ہے

$$(۵.۵۵) \quad kA - e^{-iKa} k[A \cos(ka) - B \sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} B$$

مساوات 5.61 کو $A \sin(ka)$ کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۵.۵۶) \quad A \sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)] B$$

اس کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہوئے اور k_B کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa} \cos(ka)] + e^{-iKa} \sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

حاصل ہوگا۔

جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے

$$(۵.۵۷) \quad \cos(ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

یہ ایک بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرڈنگ پنی مخفیہ ہاشیہ 18 دیکھیں کے لیے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہوگا لیکن جو خود حوالہ ہم دیکھنے حبار ہے ہیں وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

مساوات 5.64 کی مسکنات قیمتیں لحاظ اجبازتی توانائیاں تعین کرتی ہیں۔ علامت کو سادہ بنانے کی نقطہ نظر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۵.۵۸) \quad z \equiv ka, \text{ and } \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

جس سے مساوات 5.64 کا دائیاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(۵.۵۹) \quad f(z) \equiv \cos(z) + \beta \frac{\sin(z)}{z}$$

مستقل β بعدی ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی زور کی ناپ ہے شکل 5.6 میں میں نے $\beta = 10$ کے لیے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ $f(z)$ ساتھ $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے اور چونکہ $|\cos(Ka)|$ کی قیمت کسی صورت ایک سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے لحاظ ایسی خطوں میں مساوات 5.64 کا حل نہیں

پایا جائے گا۔ یہ درز ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہے اسکے بیچ احبازتی توانائیوں کی پٹیاں پائی جاتی ہیں مساوات 5.56 کے تحت $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہے لحاظ n کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی احبازتی ہوگی۔ آپ تصور میں شکل 5.6 پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے منسلکوں پر $(n = 0) + 1$ سے لے کر نیچے $(n = \frac{N}{2}) - 1$ تک اور واپس تقریباً $(n = N - 1) + 1$ تک جہاں بلو خبزو ضربی e^{iKa} دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لحاظ n کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حاصل حاصل نہیں ہوگا لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ان لکیریوں میں ہر ایک کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع ایک احبازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں N حالات پائے جاتے ہیں جو ایک دوسرے کے اتنے فطریہ ہیں کہ کسی بھی نقطہ نظر سے انہیں ایک مسلسل خط تصور کیا جاسکتا ہے شکل 5.7۔

ہم نے ابھی تک اپنے مخفیہ میں ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں N_q الیکٹران ہوں گے جہاں ہر ایک جو ہر q تعداد کے آزاد الیکٹران مہر کرے گا۔ پالی اصول مناسبت کے بن صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے ممکن ہو سکتے ہیں۔ یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل کریں گے اگر $q = 3$ ہو یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے وغیرہ وغیرہ۔ تین ابعاد میں اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے لیکن احبازتی پٹیاں جسے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں تب بھی ہوگا۔ دوری مخفیہ کی نشانی بھی پٹی ہے۔

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو ممنوع خط سے گزرتے ہوئے اگلی پٹی تک چھلانگ کے لیے ایک الیکٹران کو نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہوگی ایسا مادہ برقی طور پر غنیر مویش ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری ہوئی نہیں ہے تب ایک الیکٹران کو بہت معمولی توانائی درکار ہوگی کہ وہ بیجان ہو سکے اس طرح کا مادہ عموماً مویش ہوگا۔ ایک غنیر مویش میں بڑے یا کم q کے چند جوہر کی ملاوٹ سے اگلی بلند پٹی میں چند اضافی الیکٹران رکھ دیئے جاتے ہیں پہلے سے مکمل پٹی میں خول پیدا کیئے جاتے ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے اور ایسے اشیاء نیم مویش کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً بہت اچھا مویش ہونا چاہیئے تھا چونکہ اسکے احبازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ منرق صرف نظریہ پٹی کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

(الف) مساوات 5.59 اور مساوات 5.63 استعمال کرتے ہوئے دیکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تقاطع عمل مخفیہ میں ایک ذرے کی تقاطع موج درج ذیل روپ میں لکھی جاسکتی ہے

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa} \sin k(a - x)], (0 \leq x \leq a).$$

معمولاً C تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(ب) البتہ پٹی کے بالائی سر پر جہاں $z = \pi a$ کا عدد صحیح مضرب ہوگا شکل 5.6 (الف) سے $\psi(x) = 0$ حاصل ہوگا ایسی صورت میں درست تقاطع عمل موج تلاش کریں دیکھیں گے کہ ہر ایک ڈیلٹا تقاطع عمل پر ψ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی احبازتی پٹی کے نچلے نقطہ پر $10 = \beta$ کی صورت میں توانائی کی قیمت تین با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ $1 \text{ eV} = \frac{\alpha}{a}$ ہوگا۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیٹا تفاعل سولن کے بجائے ڈیٹا تفاعل کنواں پر غور کر رہے ہیں یعنی مساوات 5.57 میں α کی علامت تبدیل کریں۔ ایسی صورت میں شکل 5.6 اور 5.7 کی طرح کے شکل بنائیں۔ مثبت توانائی حلوں کے لیے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے بس مساوات 5.66 میں موضوع تبدیلیاں لائیں لیکن منفی توانائی حلوں کے لیے آپ کو کام کرنا ہوگا اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیے گا جو z - تک وسیع ہوگا۔ پہلی احبازتی پٹی میں اب کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دیکھائیں کہ مساوات 5.64 میں حاصل زیادہ تر توانائیاں دوہری اخطا طئی ہے۔ کن صورتوں میں ایسا نہیں ہے؟ اشارہ: $(N = 1, 2, 3, 4, \dots)$ لیتے ہوئے دیکھیے گا کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی کیا ممکنہ قیمتیں ہوں گی؟

۵.۴ کو انٹیم شماریاتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم احبازتی توانائی تنظیم کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کے بنا ہیجانی حالات ابھرنے شروع ہونگے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر T درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد N کے ذرات پائے جاتے ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی E_j ہوگی دیہان رہے کہ اس احتمال کا کو انٹیم عدم تعین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بلکہ یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لیے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہوگی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہوگا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظریہ کر سکیں چاہے یہ متابل تعین ہو یا نہ ہوں۔

شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک حسی کل توانائی E ہو ایک جتنا معتدل ہوگا۔ بلا واسطہ حراری حرکتوں کی بنا مستقل طور پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرے ذرہ ایک روپ حرکی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہوگی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقا توانائی کی بنا کل مقررہ ہوگا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی لگاتار نئی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے قابل ہے درجہ حرارت T حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کو انٹیم میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لحاظ یہ کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہوگا کہ یہ ذرات متابل ممیز، یکساں بوزان یا یکساں فرمیون ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لحاظ میں ایک انتہائی سادہ امثال سے شروع کروں گا تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چکوروں کو حصہ 2.2 میں کیت m کے صرف تین باہم غیر متماثل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہوگی ماسوات 2.27 دیکھیں

$$(5.۶۰) \quad E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

جہاں n_A, n_B اور n_C مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ $E = 363 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)$ یعنی درج ذیل

$$(5.۶۱) \quad n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363.$$

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیسرے ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہوگا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیسرہ اور ایک پانچ جو تین مرتبہ اجتماعات میں ہوگا ایک عدد آٹیس اور دو ایک یہاں تین مرتبہ اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک ساٹھ اور ایک پانچ چھ مرتبہ اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں n_A, n_B, n_C درج ذیل میں سے ایک ہوگا:

$$(11, 11, 11)$$

$$(13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13)$$

$$(1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1)$$

$$(5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5).$$

اگر یہ ذرات متماثل میسر ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کو انم حال کو ظاہر کرے گا اور شمار پاتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حراری توازن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کون سا ذرہ کس ایک ذرہ حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال ψ_n کی تعداد مکین N_n ۔ ہم اس دن ذرہ حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو تنظیم کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال ψ_{11} میں ہوں تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۲) \quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

یعنی $N_{11} = 3$ باقی تمام صفر اگر دو حال ψ_{13} میں اور ایک ψ_5 میں ہو تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۳) \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

یعنی $N_5 = 1, N_{13} = 2$ باقی تمام صفر اگر دو حال ψ_1 میں ایک ψ_{19} میں ہو تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۴) \quad (2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

یعنی $N_1 = 2, N_{19} = 1$ باقی تمام صفر اور اگر ایک ذرہ ψ_5 میں ایک ψ_7 میں اور ایک ψ_{17} میں تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \quad (5.65)$$

یعنی باقی تمام صفر، $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ان تمام میں آخری تنظیم زیادہ سے زیادہ محتمل ہوگی چونکہ اسکوچھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجزائی توانائی E_n حاصل کرنے کا احتمال P_n کب ہوگا؟ توانائی E_1 صرف اس صورت حاصل ہوگا جب ذرہ تیسری تنظیم مساوات 5.71 میں ہو اس تنظیم میں نظام ہونے کا اتفاق تیسرے میں سے تین ہے اور اس تنظیم میں E_1 کے حصول کا احتمال $\frac{2}{13}$ لحاظ $P_1 = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$ آپ E_5 کو تنظیم دو مساوات 5.70 تیسرے میں سے تین کا امکان جس کا احتمال $\frac{1}{3}$ یا تنظیم چار مساوات 5.72 تیسرے میں سے چھ امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ لحاظ $P_5 = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{13}$ آپ E_7 کو صرف چارے حاصل کر سکتے ہیں لحاظ $P_7 = \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ اسی طرح E_{11} صرف پہلی تنظیم سے مساوات 5.69 سے تیسرے میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہوگا لحاظ $P_{11} = \left(\frac{1}{13}\right)$ اسی طرح $P_{19} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{13}$ اور $P_{17} = \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ ، $P_{13} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$ درج ذیل سے ہوگی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1.$$

یہ متبادل میسر ذرات کے لیے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات یکساں فرم میان ہوتے اپنی آسانی کے لیے چکر کھنڈر اند کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پہلی تین تنظیم جو دو یا اس سے بھی برائیں ذرات کھ ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں خراب حال امکان ہوں گے لحاظ چوتھی تنظیم میں صرف ایک حال ہوگا سوال 5.22 الف دیکھیں۔ یکساں فرم میوز کے لیے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات یکساں بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت ہر تنظیم میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22 ب دیکھیں۔ لحاظ $P_7 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ، $P_5 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ، $P_1 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ اور $P_{17} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ، $P_{13} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ، $P_{11} = \left(\frac{1}{4}\right) \times (1) = \frac{1}{4}$ اور $P_{19} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دیکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح مختصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورتحال سے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہوگا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھا۔ چونکہ N کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو متبادل میسر ذرات کے لیے اس مثال میں $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شمار یا نقطہ نظر سے باقی

تمام امکانات کو رد کیا جاسکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم درحقیقت انکی زیادہ سے زیادہ مجتمعت تنظیم میں تقسیم ہے۔ اگر $N = 3$ کے لیے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم متماثل میز ذرات کے لیے $N = 3$ کی صورت میں اخذ کرتے $\frac{1}{3}$ $P_5 = P_7 = P_{17}$ میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عمومیت دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال ψ_5 میں ایک حال ψ_7 میں ایک اور حال ψ_{17} میں ایک یکاں تین فرمیون کا مکمل حنائف تشکل تف عمل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

(ب) تین یکاں بوزان کے لیے مکمل تشکل تف عمل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (۱) تینوں حال ψ_{11} میں ہوں، (ب) اگر دو ψ_1 اور ایک ψ_{19} میں ہو، (ج) اگر ایک حال ψ_5 ایک حال ψ_7 اور ایک حال ψ_{17} میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں یک بُعدی حارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متماثل ذرات ہیں جو حرارتی توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی $E = (\frac{9}{2})\hbar\omega$ ہے۔

(الف) اگر یہ تمام ایک جیسی کیفیت کے متماثل مہر ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تنظیمات ہوں گے اور ہر ایک کے لیے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ مجتمعت تنظیم کیا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پیمائش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہوگا؟ سب سے زیادہ مجتمعت توانائی کیا ہوگی؟

(ب) یہی کچھ یکاں فرمیونز کے لیے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج) یہی کچھ یکاں بوزان کے لیے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیں اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرات توانائیاں E_1, E_2, E_3, \dots اخطاط d_1, d_2, d_3, \dots ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد d_n جن کی توانائیاں E_n ہیں فرض کریں ہم کیفیت m کے N ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تنظیم N_1, N_2, N_3, \dots میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں N_1 ذرات کی توانائی E_1 N_2 ذرات کی توانائی E_2 وغیرہ وغیرہ ہے سوال ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تنظیم کی مطابقت کتنے منفرد حالات ہونگے اس کا جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ اس بات پر منحصر ہوگا کہ آیا ذرات متماثل میز یکاں فرمیاں یا یکاں بوزان ہے لہذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات متماثل میز ہیں دستیاب N ذرات میں سے کتنے طریقوں سے N_1 کو منتخب کر کے پہلا نوکرا میں رکھا جاسکتا ہے جواب: شنائی عددی سر N_1 کو N میں سے منتخب کرتا

ہے

$$(۵.۶۶) \quad \binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

پہلا ذرہ N مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے جس کے بعد $(N - 1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N - 1$ مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N - 1)(N - 2) \dots (N - N_1 + 1) = \frac{N!}{(N - N_1)!}$$

لیکن یہ N_1 ذرات کے $N_1!$ مختلف مراتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں ہے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی نوکرہ میں ان N_1 ذرات کو کتنی مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے چونکہ پہلے نوکرہ میں d_1 حالات ہیں لہذا ہر ایک ذرہ کو d_1 مختلف طریقوں سے چنا جاسکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہوں گے اس طرح ایک نوکرہ جس میں d_1 منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی N میں سے N_1 ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہوں گے

$$\frac{N! d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!}$$

دوسرے نوکرے میں صرف $(N - N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۵.۶۷) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$$

$$(۵.۶۸) \quad = \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!} \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!} \frac{(N - N_1 - N_2)! d_3^{N_3}}{N_3!(N - N_1 - N_2 - N_3)!} \dots$$

$$(۵.۶۹) \quad = N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} d_3^{N_3} \dots}{N_1! N_2! N_3! \dots} = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

یہاں رک کر اس نتیجہ کی تصدیق کیجئے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں یہاں ضروریات کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص ایک ذرہ حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک N ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہذا N ویں نوکرہ میں

N_n بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۵.۷۰) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر یکساں بوزان کے لیے یہ حاب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذرہ حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک N ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذرہ حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں N وی نوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم یکساں N_n ذرات کو d_n مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر مرتب اجتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر $d_n = 5$ اور $N_n = 7$ کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذرہ تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد N_n اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہیں جو ان نقطوں کو d_n گروہوں میں خانہ بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک دوسرے جیسے ہیں اور ان کو $N_n!$ مختلف مرتب اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف مرتب اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں N وی نوکرے میں d_n ایک ذرہ حالات کو N_n ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقہ ہونگے

$$(۵.۷۱) \quad \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n}$$

جس کی بنا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۵.۷۲) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 75.574.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجیے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو انکراچی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتب اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ d نوکریوں میں N یکساں گیسندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے

زیر نوشتہ میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام N کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باتیسویں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صرفاً $N = 1$ ، $N = 2$ ، $N = 3$ ، اور $N = 4$ کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم

ہراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک دوسرے جتنا ہوگا یوں زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم N_1, N_2, N_3, \dots وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تنظیم ہوگی جو

$$(۵.۴۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$$

اور

$$(۵.۴۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E$$

پر پورا اترے اور جس کی $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ، $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرانج مضرب کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$(۵.۴۵) \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

متعارف کر کے اس کے تمام تصرفات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$(۵.۴۶) \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0$$

موجودہ صورت میں Q کے بجائے Q کی لوگار تھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگار تھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہذا Q کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جائے گی لہذا ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$(۵.۴۷) \quad G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

جہاں α اور β لگرانج معضرب ہیں α اور β کے لحاظ سے تصرفات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں N_n کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے

اگر ذرات متماثل ممیز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دیگا لہذا درج ذیل ہوگا

(۵.۷۸)

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

ہم مطابقتی تعداد مکین N_n کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین

(۵.۷۹)

$$\ln(z!) \approx z \ln(z) - z \quad z \ll 1$$

بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

(۵.۸۰)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n)] - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں درج ذیل ہوگا

(۵.۸۱)

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لیے حل کرتے ہوئے ہم متماثل ممیز ذرات کی زیادہ سے زیادہ متحمل تعداد مکین حاصل کرتے ہیں

(۵.۸۲)

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

اگر ذرات یکساں فرم میان ہوں تب Q کی قیمت مساوات 75.5 دیگی لہذا درج ذیل ہوگا

(۵.۸۳)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں ہم N_n کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $d_n \gg N_n$ بھی فرض کرتے ہیں لہذا سٹرلنگ تخمین دونوں اجزاء کے لیے متماثل استعمال ہوگی ایسی صورت میں

(۵.۸۴)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n \right] + \alpha N + \beta E$$

اور درج ذیل ہوگا

(۵.۸۵)

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے N_n کے لیے حل کر کے ہم یکساں فرمیان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمتیں N_n حاصل کرتے ہیں

$$(۵.۸۶) \quad N_n = \frac{d_n^{-(\alpha+\beta E_n)}}{e}$$

آخر میں اگر ذرات یکساں بوسن ہوں تب Q کی قیمت مساوات 77.5 دیگی اور درج ذیل ہوگا

(۵.۸۷)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $N_n \gg 1$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین استعمال کرتے ہوئے

(۵.۸۸)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{ (N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha \}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۵.۸۹) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لئے حل کرتے ہوئے ہم یکساں بوزان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$(۵.۹۰) \quad N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha+\beta E_n)} - 1}$$

فرمیون کی صورت میں استعمال کرتا تخمین کو استعمال کرتے ہوئے شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا سوال ۵.۲۶: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر زیادہ سے زیادہ رقبہ کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں لیکن مضرب کی ترکیب سے تلاش کریں اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہوگا

سوال ۵.۲:

ا. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فیصد حنل کتنا ہوگا

ب. حنل کو ایک فیصد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح z کی کم سے کم قیمت کیا ہوگی

۵.۴.۴ α اور β کے طبی اہمیت

لگراج مضرب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے منسلک بالترتیب مقدار معلوم α اور β پائے گئی ریاضیاتی طور پر تعداد ممکن مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو واپس ملط شرائط مساوات 78.5 اور 79.5 میں پر کرتے ہوئے تعین کیا جاتا ہے البتہ کسی مغلیہ کے لیے مجموعہ کے حصول میں ہمیں اجبازتی توانیاں (E_n) اور ان کی انحطاط (d_n) کا معلوم ہونا ضروری ہے میں سہ آبادی لامتناہی چکور کواں میں ایک جتنی کیمت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعادل ذرات کی کامل گیس کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں اس سے ہم پر α اور α کی طبی مفہوم ایاں ہوں گی جس 1.3.5 میں ہم نے اجبازتی توانیاں اخذ کی مساوات 39.5

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (5.91)$$

جہاں درج ذیل ہوتا

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z} \right)$$

پہلے کی طرح یہاں بھی ہم مجموعہ کو مکمل میں بدلتے ہیں جہاں \mathbf{k} ایک استمراری متغیر ہے اور جہاں \mathbf{k} فضا کے π^3/V حجم میں ایک حال یا چکر s کی صورت میں $2s + 1$ حالات پائے جاتے ہیں ثمن اول میں کروئی خولوں کو اپنے ٹوکریاں تصور کرتے ہوئے شکل 4.5 انحطاط یعنی ہر ٹوکری میں حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی

$$d_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad (5.92)$$

متابل میسر ذرات مساوات 87.5 کیلئے پہلی ملط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^2 dk = V e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta \hbar^2} \right)^{3/2}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\beta \hbar^2}{m} \right)^{3/2} \quad (5.93)$$

دوسری ملط شرط مساوات 79.5 درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^4 dk = \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta \hbar^2} \right)^{3/2}$$

جس میں مساوات 98.5 سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E = \frac{3N}{2\beta} \quad (5.94)$$

اگر آپ مساوات 97.5 میں جزو چکر $1 + 2s$ شامل کریں تو وہ اسی نقطہ پر ہدف ہو جاتا ہے لہذا مساوات 99.5 تمام چکر کے لیے درست ہوگا مساوات 99.5 ہمیں درجہ حرارت T پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ کا یاد دلاتی ہے

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (۵.۹۵)$$

جہاں k_B بولٹزمن مستقل ہے یہ ہمیں β اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (۵.۹۶)$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین آبادی لامتناہی چکور کنواں میں موجود میمزراعت کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ مختلف اشیاء کے لئے جو ایک دوسرے کے ساتھ ہراری توازن میں ہوں β کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہوگی یہ دلیل کی کتابوں میں دیا گیا ہے جس کو میں یہاں پیش نہیں کرتا میں مساوات 101.5 کو T کی تعریف مان لیتا ہوں روایتی طور پر α جو مساوات 98.5 کی مخصوص صورت سے ظاہر ہے کہ T کا تعلق عمل ہے کی جگہ کی یاد دلاتی ہے

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \quad (۵.۹۷)$$

استعمال کر کے مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی ϵ کے کسی ایک مخصوص ذرہ حال میں ذرات کی بلند تر محتسب عدد دے کسی ایک توانائی کے حامل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حامل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے خاطر صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہوگا

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon - \mu)/k_B T} & \text{میکسول بولٹزمن تقسیم} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1} & \text{فرمی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} - 1} & \text{بوس و آئنشٹائن} \end{cases} \quad (۵.۹۸)$$

متابل میمز ذرات پر میکسول بولٹزمن تقسیم، یکساں منرمیان پر فرمی وڈیراک تقسیم اور یکساں بوزان پر بوس و آئنشٹائن تقسیم کا اطلاق ہوگا فرمی وڈیراک تقسیم T_0 پر خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتا ہے

$$e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (۵.۹۹)$$

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات برے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہونگے ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیائی مخفیہ عین مندرجہ توانائی ہوگی

$$\mu(0) = E_F \quad (۵.۱۰۰)$$

درجہ حرارت پڑھنے سے برے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو مندرجہ ذیل اک تقسیم استمراری بناتا ہے شکل 8.5 ہم متابل ممیز ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت T پر کل توانائی مساوات 99.5 درجہ ذیل ہوگی

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \quad (۵.۱۰۱)$$

جبکہ مساوات 98.5 کے تحت کیمیائی مخفیہ درجہ ذیل ہوگا

$$\mu(T) = k_B T \left[\ln \left(\frac{N}{V} \right) + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right) \right] \quad (۵.۱۰۲)$$

میں مساوات 87.5 کی بجائے مساوات 91.5 اور 95.5 استقبال کرتے ہوئے یکساں مندرمیان اور یکساں بوزان کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا پہلی مطابقتی مساوات 78.5 درجہ ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu / k_B T} \pm 1} dk \quad (۵.۱۰۳)$$

جہاں مثبت علامت مندرمیان کو اور منفی علامت بوزان کو ظاہر کرتی ہے دوسری مطابقتی مساوات 79.5 درجہ ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{k^4}{e^{(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu / k_B T} \pm 1} dk \quad (۵.۱۰۴)$$

ان میں سے پہلا $\mu(T)$ اور دوسرا $E(T)$ تعین کرتا ہے مثلاً موخر الذکر سے ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E / \partial T$ حاصل کرتے ہیں بد قسمتی سے ان اک عملیات کو بنیادی تقاضات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے چھوڑتا ہوں تاکہ آپ ان پر مزید غور کر سکیں سوال 28.5 اور 29.5 دیکھیں سوال ۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر یکساں مندرمیان کے لیے مساوات 108.5 اور 109.5 کے عملیات کی قیمتیں حاصل کریں اپنے نتائج کا موازنہ مساوات 43.5 اور 45.5 کے ساتھ کریں دھیان رہے کہ مساوات 108.5 اور 109.5 میں الیکٹرانوں کے لیے اضافی حبز و ضربی دو (2) پایا جاتا ہے جو چکر انحطاط کو ظاہر کرتی ہے

سوال ۵.۲۹:

۱. بوزان کے لیے دکھائیں کہ کیمیائی مخفیہ ہر صورت میں کم سے کم احبازتی توانائی سے کم ہوگا اشارہ: $n(\epsilon)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے

ب. بالخصوص تمام T کے لیے کامل بوس گیس کے لیے $0 < \mu(T)$ ہوگا ایسی صورت میں N اور V کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کہ T کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات 108.5 پر نظر ڈالیں

ج. حرارت T کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحر ان پیدا ہوتا ہے جسے بوز انجماعت کہتے ہیں جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے عمل کی قیمت $0 = \mu$ کے لیے حاصل کرتے ہوئے اس فنکشن حرارت کسی کالکلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا اس فنکشن حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہذا غیر مسلسل مجموعہ مساوات 78.5 کی جگہ استمراری مکمل مساوات 108.5 کا استعمال بے معنی ہو جائے گا اشارہ:

$$(5.105) \quad \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s)$$

جہاں Γ کو یولر کا γ فنکشن اور ζ کو ریمن زیٹ فنکشن کہتے ہیں ان کی موضوع اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں د. ہیلیم کے لیے حرارت فنکشن تلاش کریں اس درج حرارت پر اس کی کثافت 0.15 g cm^{-3} ہوگی تبصرہ ہیلیم کی تجرباتی حاصل حرارت فنکشن کی قیمت 2.17K ہے

۵.۴.۵ سیاہی طیف

فونان برقناطیسی میدان کے کوانٹا ایک چپکر کے یکساں بوزان ہوتے ہیں تاہم ان کی خاصیت یہ ہے کہ یہ بے قیمت ذرات ہیں جس کی بنا یہ قدرتی طور پر اضافیتی ہیں ہم درج ذیل چار دعوے جو غیر اضافی کوانٹم میکانیٹ کا حصہ نہیں ہے کو قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں (1) فونان کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = h\nu = \hbar\omega$ دیتی ہے (2) عدد موج کے اور تعدد کا تعلق $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ہے جہاں c روشنی کی رفتار ہے (3) چپکر کے صرف دو حالات ہو سکتے ہیں کوانٹم عدد m کی قیمت $+1$ یا منفی 1 ہو سکتی ہے تاہم یہ صفر نہیں ہو سکتی ہے (4) فونانوں کی تعداد بکائی متدار نہیں ہے درج حرارت بڑھانے سے فی حجم فونانوں کی تعداد بڑھتی ہے جبز 4 کی موجودگی میں پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 کا اطلاق یہاں نہیں ہوگا ہم مساوات 82.5 اور اس کی سادگی بانی آنے والی مساواتوں میں $0 \rightarrow \alpha$ پر کر کے جبز 4 کا اطلاق کر سکتے ہیں یوں فونان کے لیے سب سے زیادہ متحمل تعداد متعین مساوات 95.5 درج ذیل ہوگا

$$(5.106) \quad N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ایک ڈب جس کا حجم V ہو میں آزاد فونانوں کے لیے d_k کی قیمت مساوات 97.5 کو چپکر جبز 3 کی بنا دو سے ضرب دے کے حاصل ہوگا جس کو k جبز 2 کی بجائے ω کی صورت میں لکھتے ہیں

$$(5.107) \quad d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^3 d\omega$$

یوں تعددی ساتھ $d\omega$ میں تصافیت توانائی $N\omega\hbar\omega/V$ کی قیمت $\rho(\omega) d\omega$ ہوگی جس $\rho\omega$ درج ذیل ہیں

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)} \quad (5.108)$$

یہ سیاہ جسم طیف کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو مقناطیسی میدان کی حرارت T پر توازن صورت میں فی اکائی حجم فی اکائی تعدد توانائی دیتی ہے اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل 9.5 میں ترسیم کیا گیا ہے سوال ۵.۳۰:

ا. مساوات 113.5 استعمال کرتے ہوئے طول موج ساتھ $d\lambda$ میں تصافیت توانائی تعین کریں اشارہ:
 $\rho(\omega)d\omega = \bar{\rho}(\pi)d\lambda$ کے لیے حل کریں

ب. وائن قانون مساؤ اخذ کریں جو وہ طول موج دیتا ہے جس پر سیاہ جسم کی کثافت توانائی کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی

$$\lambda_{\text{بند ز}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} mK}{T} \quad (5.109)$$

اشارہ: آپ کو کیلکولیٹر یا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ماورائے مساوات $5e^{-x} = (5 - x)$ حل کر کے اعدادی جواب تین با معنی آسٹونک حاصل کرنا ہوگا

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسم احسراج میں کل کثافت توانائی کا سٹیفن بلز من کلیہ اخذ کریں

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} Jm^{-3}K^{-3}) T^4 \quad (5.110)$$

اشارہ مساوات 110.5 کو استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں یا درجہ کہ $z(4) = \pi^4/90$ ہوگا

سوال ۵.۳۲: فرض کریں یک بودی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ مساوات 43.2 میں دو غیر متعلقہ ذرات پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت m ہے فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلی حبان حال میں پایا جاتا ہے درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں (الف) زراعت متابل ممیز ہے (ب) یکساں پوزان ہے (ج) یکساں منرمایان ہے چکر کو نظر انداز کریں اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر حال میں تصور کریں

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہوں اور تین منفرد یک زہ حالات $\psi_a(x)$ ، $\psi_b(x)$ ، اور $\psi_c(x)$ دستیاب ہوں ایک دونوں سے مختلف کتنے تین زہ حالات درج ذیل صورت میں تیار کیے جاسکتے ہیں (الف) اگر رات متابل ممیز ہو (ب) اگر یہ یکساں پوزان ہو (ج) اگر یہ یکساں منرمایان ہوں ضروری نہیں کہ زراعت مختلف حالات میں ہوں متابل ممیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے

سوال ۵.۳۴: دو آبادی لامتناہی چکور کواں میں غیر متعلقہ الیکٹرانوں کی منرمی توانائی کا حساب کریں فی اکائی رقب الیکٹرانوں کی تعداد σ لے

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے جنہیں صفوہ بونا کہتے ہیں کو تحب ذہی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباؤ روکتی ہے مساوات 46.5 مستقل کثافت فرض کرتے ہوئے ایسے جسم کا رداس R درج ذیل طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے

ا. کل الیکٹران توانائی مساوات 45.5 کو رداس مرکزہ پروٹان جمع نیوٹران N فی مرکزہ الیکٹران کی تعداد q اور الیکٹران کی کیت m کی صورت میں لکھیں

ب. ایک یاں کس کر اکی تحب ذبی توانائی تلاش کریں اپنے جواب کو علمگیر تحب ذبی مستقل G ، R ، N ، اور مرکزہ کی کیت M کی صورت میں لکھیں آپ دیکھیں گے کہ تحب ذبی توانائی منفی ہوگی

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر حبزو (الف) اور حبزو (ب) کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2 N^{1/3}}$$

دھیان رہے کہ کیت بڑھنے سے رداس گھٹ رہا ہے مساوائے N کے تمام مستطالات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں حقیقت میں جوہری عدد بڑھتے ہوئے q کی قیمت معمولی سی کم ہوتی ہے لیکن ہمارے لئے یہی کافی ہے جواب: $R = 7.6 \times 10^2 5N^{-1/3}$

د. ہماری سورج کے برابر کیت کے سفید بونا کارڈاس کلو میٹروں میں حاصل کریں

ه. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ حبزو (د) میں سفید بونا کی منبری توانائی کو الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے موازنہ کریں آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے سوال 36.5 دیکھیے گا

سوال ۵.۳۶: ہم کا سیکی حمر کی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0^2$ پر کرتے ہوئے حصہ 1.3.5 کی آزاد الیکٹران گیس نظریہ کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں معیار حمرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $p = \hbar k$ ہوگا بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہوگا

ا. مساوات 44.5 میں $\hbar^2 k^2 / 2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فترہ $\hbar ck$ پر کر کے E_{tot} کل حاصل کریں

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کے لئے سوال 35.5 کے حبزو (الف) اور (ب) کو دوبارہ حل کریں آپ دیکھیں گے کہ R کی قیمت سے قطع نظر کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائے جائے گی اگر کل توانائی مثبت ہو تب انحطاطی قوتیں تحب ذبی قوتوں سے تحبوز کرے گی جس کی بنا ستارہ پھولے گا اس کے برعکس اگر کل منفی ہو تب تحبوزی قوتیں جیتی ہیں جس کی بنا ستارہ منہدم ہوگا مرکزہ کی وہ فاصل تعداد ہندسی معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تحب ذبی انہدام واقعہ ہوا اس کو چندر شیکھر حد کہتے ہیں جواب: $2.4 \times 10^5 7$ مطابقتی ستارہ کی کیت کیا ہوگی اپنے جواب کو سورج کی کیت کے مظرب کے صورت میں لکھیں اس سے بھاری ستاریں سفید بونا نہیں بناتے بلکہ مسزید منہدم ہو کر اگر حالات درست ہوں نیوٹران ستارہ کو جسم نم دیتے ہیں

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر مخالف β تحلیل $e^- + p^+ \rightarrow n + \bar{\nu}$ تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے جس کی بنا نیوٹریو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں آخر کار نیوٹران انحطاطی دباؤ انہدام کو روکتا ہے جہاں سفید بونا میں الیکٹران انحطاطی قوتوں نے کیا سوال 35.5 دیکھیں ہماری سورج کے برابر کیت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں ساتھ ہی نیوٹران منبری توانائی کا حساب کر کے ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جاسکتا ہے

سوال ۵.۳:

۱. تین آبادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ سوال 38.4 متاثر مہیز زراعت کا کیماوی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں یہاں مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جاسکتی ہیں یا درجہ کلامتناہی چکور کنواں کی مثال میں مکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا ہت ہندسی تسلسل

$$(5.111) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

حاصل ہوگا اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں جواب

$$(5.112) \quad E = \frac{3}{2} N \hbar \omega \left(\frac{1 + e^{-\hbar \omega / k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}} \right)$$

ب. تہدیدی حد $k_B T \ll \hbar \omega$ پر تبصرہ کریں

ج. مسئلہ مساوی حنائہ بندی کی روشنی میں کلاسیکی حد $\hbar \omega \gg k_B T$ پر تبصرہ کریں تین آبادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے دریاہ آزادی کتے ہوں گے

جوابات

فهرست

54relation,	allowed
energy	26energies,
22allowed,	51 argument,
31conservation,	Bessel
13ensemble,	99function,spherical
expectation	107energy,binding
6value,	Bohr
formula	106radius,
16Broglie,De	106formula,Bohr
Fourier	25conditions,boundary
52transform,inverse	98term,centrifugal
52transform,	83states,coherent
Frobenius	4collapses,
45method,	commutation
function	36relation,canonical
59delta,Dirac	90relations,canonical
generalized	36commutator,
59distribution,	28complete,
59function,	77continuous,
generating	90continuum,
50function,	coordinates
generator	91spherical,
86space,intranslation	3interpretation,Copenhagen
86time,intranslation	75degenerate,
Gram-Schmidt	delta
79process,orthogonalization	28Kronecker,
21Hamiltonian,	Dirac
harmonic	80orthonormality,
25oscillator,	77discrete,
	dispersion

- 3realist,
- 12potential,
- 97effective,
- probability
- 8density,
- quantum
- 105number,principle
- numberquantum
- 96azimuthal,
- 96magnetic,
- 99numbers,quantum
- 97equation,radial
- recursion
- 46formula,
- reflection
- 64coefficient,
- 73time,revival
- Rodrigues
- 49formula,
- 94formula,Rodrigues
- Rydberg
- 113constant,
- 113formula,
- Schrodinger
- 20time-independent,
- 1align,Schrodinger
- series
- 113Balmer,
- 28Fourier,
- 113Lyman,
- 113Paschen,
- 35power,
- 34Taylor,
- spherical
- 96harmonics,
- 11square-integrable,
- 7deviation,standard
- state
- 58bound,
- 113Helium,
- Hermitian
- 40conjugate,
- 3variables,hidden
- 2indeterminacy,
- ladder
- 38operators,
- Laguerre
- 108polynomial,associated
- 108polynomial,
- 90Laplacian,
- law
- 34Hooke,
- Legendre
- 94associated,
- linear
- 22combination,
- 113Lithium,
- 6mean,
- 6median,
- 14momentum,
- Neumann
- 99function,spherical
- 27node,
- 10normalization,
- 14operator,
- 38lowering,
- 38raising,
- 27orthogonal,
- 28orthonormal,
- Planck's
- 113formula,
- polynomial
- 48Hermite,
- position
- 3agnostic,
- 3orthodox,

- اتاقی
حالات، 83
اجزائی
توانائیاں، 26
استمراری، 77
استمراریہ، 90
اصول
عدم یقینیت، 16
انتشاری
رشتہ، 54
انخطاطی، 75
انعکاس
شرح، 64
اوسط، 6
- بقا
توانائی، 31
بندشی توانائی، 107
بوہر
رداس، 106
کلیہ، 106
بیل
کروی تقاعس، 99
- پلانک
کلیہ، 113
پیداکار
فضا میں انتقال کا، 86
وقت میں انتقال، 86
پیداکار
تقاعس، 50
- تبادلہ
باضابطہ رشتہ، 36
باضابطہ رشتہ، 90
تبادلہ کار، 36
تجدیدی عرصہ، 73
ترسیل
شرح، 64
- تسل
المر، 113
پاشن، 113
- 27excited,
107,27ground,
58scattering,
statistical
2interpretation,
66function,step
theorem
28Dirichlet's,
15Ehrenfest,
52Plancherel,
112transition,
transmission
64coefficient,
65,58tunneling,
58points,turning
16principle,uncertainty
variables
19of,separation
7variance,
velocity
54group,
54phase,
wave
64incident,
52packet,
64reflected,
64transmitted,
1function,wave
16wavelength,

- ساکن
حالات، 21
سرحدی شرائط، 25
سرنگ زنی، 58، 65
سگرا، 13
سوچ
انکاری، 3
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سیڑھی
عاملین، 38
سیڑھی تفاعل، 66
شروڈنگر
غیر تابع وقت، 20
شروڈنگر تصویر کشی، 86
شروڈنگر مساوات، 1
شماریاتی مفہوم، 2
طول موج، 16، 113
عامل
تقلیل، 38
رفت، 38
عبور، 112
عدم تعین، 2
عدم یقینیت اصول، 16
عندروہ، 27
علیحدگی متغیرات، 19
عمودی، 27
معیاری، 28
غیر مسلسل، 77
منرو وینوس
ترکیب، 45
فوریسر
الٹ بدل، 52
بدل، 52
قابل تکامل مربع، 11
قانون
- ٹیلر، 34
طامتی، 35
فوریسر، 28
لیمان، 113
تغییریت، 7
تفاعل
ڈیلٹا، 59
تفاعل موج، 1
توالی
کلیہ، 46
توانائی
اجزائی، 22
توقعاتی
قیمت، 6
جفت
تفاعل، 24
حال
بکھراؤ، 58
زمینی، 27، 107
مقید، 58
ہیجان، 27
خطی جوڑ، 22
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 51
ڈیراک
معیاری عمودیت، 80
ڈیلٹا
کرونیگر، 28
رداسی مساوات، 97
رڈبرگ، 113
کلیہ، 113
رفتار
دوری سستی، 54
گروہی سستی، 54
روڈریگیس
کلیہ، 94

- ۳۴، ہا
- کثافت
- ۸، احتال
- کثیر رکنی
- ۴۸، ہرمانٹ
- کروی
- ۹۶، ہارمونیات
- کلیہ
- ۱۶، ڈی پروگ
- ۴۹، روڈریگیس
- کوانٹم
- ۱۰۵، صدر عدد
- ۹۹، کوانٹائی اعداد
- کوانٹائی عدد
- ۹۶، استی
- ۹۶، مقناطیسی
- ۳، کوپن ہیگن مفہوم
- گرام شمہ
- ۷۹، ترکیب عمودیت
- ۴، گر کر
- ۹۰، لاپلاسی
- لاگ
- ۱۰۸، شریک کثیر رکنی
- ۱۰۸، کثیر رکنی
- ۱۱۳، تقسیم
- لیوڈنڈر
- ۹۴، شریک
- متعمم
- ۵۹، تقا عمل
- ۵۹، تقسیم
- محمد
- ۹۱، کروی
- ۱۲، مخفیہ
- ۹۷، موثر
- مربعش
- ۲۵، ہارمونی
- ۹۸، مرکز گریز جبزو، مسئلہ
- ۱۵، اہر نفٹ
- ۵۲، پلانشرال
- ۲۸، ڈرٹلے
- ۱۰، معمول زنی
- ۱۴، معیار حرکت
- ۲۸، معیار عمودی
- ۷، معیاری انحراف
- ۲۸، مکمل
- موج
- ۶۴، آمدی
- ۶۴، ترسیلی
- ۶۴، منعکس
- ۵۲، موجی اکٹھ
- نیومن
- ۹۹، کروی تقا عمل
- ۵۸، واپسی نقاط
- ۶، وسطانیہ
- ہارمونی
- ۲۵، مربعش
- ۴۰، جوڑی دار
- ۸۶، ہیزنبرگ تصویر کشی
- ۱۱۳، ہیلیم
- ۲۱، ہیملٹنی