کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۱ اگست ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۰

حرارت ناگزر تخمین

۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزر

۱۰.۱.۱ حرارت ناگزر عمل

فرض کریں ایک کامل لٹکن انتصابی سمت میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے اگر آپ اس لٹکن کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ افراتفری کے ساتھ دائروی صورت میں حرکت کرنے لگے گا لیکن اگر آپ بغیر جھٹکے کے لٹکن کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کریں شکل 1.10 تب لٹکن اسی سطح یا اس کے متوازی سطح میں شائستگی اور روانی سے اسی حیطہ کے ساتھ جھولتا رہے گا بیرونی حالات کی بہت آہستہ آہستہ تبدیلی ہی حرارت نہ گزر عمل کی پہچان ہے دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف امتیازی وقتوں کی بات کی جا رہی ہے نظام کی حرکت جو یہاں لٹکن کی ارتعاش کا دوری عرصہ ہو گا کو ظاہر کرنے والا اندرونی وقت T_i اور نظام میں نمایاں تبدیلی مثلاً لرزتے ہوئے چبوترا پر نصب لٹکن کی صورت میں چبوترے کی لرزش کا دوری عرصہ کو ظاہر کرنے والا بیرونی وقت T_e حرارت ناگزر عمل میں $T_e \gg T_i$ ہو گا حرارت نہ گزر عمل کے تجزیہ کا بنیادی حکمت عملی یہ ہو گا کہ پہلے بیرونی عوامل مقدار معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں بہت آہستہ آہستہ وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے مثال کے طور پر مقررہ لمبائی L کی لٹکن کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہو گا اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو تب دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہو گا حصہ 3.7 میں ہائیڈروجن سالمہ پر تبصرہ کے دوران ایک زیادہ باریک بیں مثال پیش کی گئی ہم نے آغاز میں مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے ان کے بیچ فاصلہ R کی صورت میں الیکٹرون کی حرکت کے لئے حل کیا نظام کی زمینی حال توانائی کو R کے تفاعل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کی ان حنا سے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا سوال 10.7 طبیعت سالمہ میں اس ترکیب کو جس میں ساکن مرکزہ سے آغاز کرتے ہوئے الیکٹرانی تفاعلات موج کا حساب کر کے ان سے نسبتاً سست رفتار مرکزہ کی مقامات اور

حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارن واوپن ہائیمر تخمین کہتے ہیں حرارت نہ گزر تخمین کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جا سکتا ہے فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ H^i سے بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ H^f تک پہنچتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ اگر ذرا ابتدائی طور پر H^i کے n ویں امتیازی حال میں پایا جاتا ہوں تب یہ زیر مساوات شروڈنگر H^f کی n ویں امتیازی حال میں منتقل ہو گا میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ H^i سے H^f تک تحویل کے دوران طیف غیر مسلسل اور غیر انحطاطی ہے یوں حالات کی ترتیب کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جا سکتا ہے لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا مثال کے طور پر ہم لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرا کو زمینی حال میں تیار کرتے ہیں شکل 2.10(الف)

$$\psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{۱۰.۱}$$

اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ آہستہ مقام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت ماسوائے جز وضربی ہیّت کے یہ ذرہ توسیع شدہ کنواں کے زمینی حال میں منتقل ہو گا شکل 2.10(ب)

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \tag{۱۰.۲}$$

دھیان رہے کہ نظریہ اضطراب کی طرح ہم ہیملٹنی میں ایک چھوٹی تبدیلی کی بات نہیں کر رہے ہیں یہاں تبدیلی بہت بڑی ہے فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی بہت آہستہ آہستہ رونما ہو یہاں توانائی کی بقا نہیں ہو گی جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے نظام سے توانائی حاصل کرے گا جیسا کہ گاڑی کی انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بو کا کو توانائی فراہم کرتا ہے اس کے برعکس کنواں کی اچانک وسط کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے شکل 2.10(ج) جو نئے ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا ایک پیچیدہ خطی جوڑ ہو گا سوال 38.2 یہاں توانائی کی بقا ہو گی کم از کم اس کی توقعاتی قیمت کی ضرور ہو گی جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے خلا میں گیس کی آزادانہ پھیلاو سے کوئی کام نہیں ہوتا سوال ۱.۱۰: ایک لامتناہی چکور کنواں جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے کنواں کو وسیع بناتا ہے کو بالکل ٹھیک حل کرنا ممکن ہے اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہو گا

$$\Phi n(x,t) \cong \sqrt{\frac{2}{\omega}}\sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right)e^{i(mvx^2-2E_n^i at)/\hbar\omega} \tag{۱۰.۳}$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنواں کی لمحاتی چوڑائی اور چوڑائی a کے اصل کنواں کی n ویں اجازتی توانائی $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ہے عمومی حل ان Φ کا ایک خطی جوڑ:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\Phi_n(x,t) \tag{۱۰.۴}$$

ہو گا جہاں عددی سر c_n وقت t کے تابع نہیں ہوں گے

ا. دیکھیں آیا تابع وقت شروڈنگر مساوات بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات 3.10 مطمئن کرتی ہے

ب. فرض کریں اصل کنواں کی زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز $(t=0)$ کرتا ہے

$$\Psi(x,0)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کے پھیلاؤ کے عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$c_n=\frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\pi}e^{-iaz^2}\sin(nz)\sin(z)\,\mathrm{d}z \tag{۱۰.۵}$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنواں کی پھیلنے کی رفتار کی ایک بے بعدی پیمائش ہے بدقسمتی سے اس تکمل کی قیمت کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے

ج. فرض کریں ہم کنواں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنا چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں یوں بیرونی وقت $2a$ $w(T_e) =$ ہو گا ابتدائی زمینی حال کے تابع وقت قوت نمائی جزو ضربی کا دورانیہ اندرونی وقت ہو گا وقت T_e اور T_i تعین کر کے دیکھائے کے حرکت نہ گزر صورت حال سے مراد $1 \ll \alpha$ ہو گا جس کے تحت تکمل کے دائرہ کار پر $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$ ہو گا اس کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کے عددی سر c_n تعین کریں حال $\Psi(x,t)$ تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرارت نہ گزر کے مطابق ہے

د. دکھائیں گے $\Psi(x,t)$ میں جزو ہیئت کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\theta(t)=-\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۶}$$

جہاں لمحہ t پر لمحاتی امتیازی قدر $E_n(t)\equiv n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$ ہو گا اس نتیجہ پر تبصرہ کریں

۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت

مسئلہ حرارت نہ گزر بظاہر معقول نظر آتا ہے اور اسے با آسانی بیان کیا جا سکتا ہے تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں ایک ذرہ جو n وی امتیازی حال ψ_n میں آغاز کریں

$$H\psi_n=E_n\psi_n \tag{۱۰.۷}$$

وہ ڈوری جزو ضربی اپنانے کے علاوہ اسی n وی امتیازی حال میں رہتا ہے

$$\Psi_n(t)=\psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۱۰.۸}$$

اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو تب امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے

$$H(t)\psi_n(t)=E_n(t)\psi_n(t) \tag{۱۰.۹}$$

لیکن اب بھی کسی ایک مخصوص لمحہ پر یہ معیار عمودی سلسلہ

$$\langle\psi_n(t)|\psi_m(t)\rangle\delta_{nm} \tag{۱۰.۱۰}$$

تین گے جو مکمل ہے لہٰذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) \tag{۱۰.۱۱}$$

کے عمومی حل کو ان کا خطی مجموعہ

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)} \tag{۱۰.۱۲}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\theta_n(t) \approx -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۱۳}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے E_n کی صورت میں معیاری دوری جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے میں اس کو ہمیشہ کی طرح عددی سر $c_n(t)$ میں عزم کر سکتا تھا لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا لہٰذا طبیعت وقت کے اس حصہ کو سر یہن لکھنا موزوں ہوگا مساوات 12.10 کو مساوات 11.10 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$i\hbar\sum_n[\dot{c}_n\psi_n + c_n\dot{\psi}_n + ic_n\psi_n\theta_n]e^{i\dot{\theta}_n} = \sum_n c_n(H\psi_n)e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۴}$$

جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نکتہ سے ظاہر کیا گیا ہے مساوات 9.10 اور 13.10 کی بنا آخری دو اجزاء کٹ جاتے ہیں لہٰذا درج ذیل باقی رہتا ہے

$$\sum_n \dot{c}_n\psi_n e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۵}$$

اس کا ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر لحاتی امتیازی تفاعلات کی معیار ہمودیت مساوات 10.10 بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n\delta mne^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\langle\psi_m|\psi_m\rangle e^{i\theta_n}$$

یا درج ذیل ہوگا

$$\dot{c}_m(t) = -\sum_n c_n\langle\dot{\psi}_m|\psi_n\rangle e^{\theta_n-\theta_m} \tag{۱۰.۱۶}$$

اب مساوات 9.10 کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H}\psi_n + H\dot{\psi}_n = \dot{E}_n\psi_n + E_n\dot{\psi}_n$$

اور یہاں بھی ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر درج ذیل ہو گا

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle + \langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = \dot{E}_n\delta_{mn} + E_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۷}$$

ہم H کے ہرمشی ہونے سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = E_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle$ لکھتے ہیں یوں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle = (E_n - E_m)\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۸}$$

یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انحطاطی ہے مساوات 18.10 کو مساوات 16.10 میں پر کر کے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle - \sum_{n\neq m} c_n \frac{\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar)\int_0^1 [E_n(t') - E_m(t')]\,\mathrm{d}t'} \tag{۱۰.۱۹}$$

یہ بالکل ٹھیک نتیجہ ہے اب حرارت ناگزر تخمین کی باری آتی ہے فرض کریں $\dot{H}$ نہایت چھوٹا ہے تب دوسرا جزو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle \tag{۱۰.۲۰}$$

ہو گا جس کا حل

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\gamma_m(t)} \tag{۱۰.۲۱}$$

ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$\gamma_m(t) \equiv i\int_0^t \langle\psi_m(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_m(t')\rangle\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۲۲}$$

بالخصوص اگر ذرا n وی امتیازی حال یعنی $m \neq n$ کیلئے $c_n(0) = 1$ اور $c_m(0) = 0$ ہوسے آغاز کرے تب مساوات 12.10

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)}\psi_n(t) \tag{۱۰.۲۳}$$

ہو گا لہذا کئی ہیّتی جزو ضربیاں حاصل کرنے کے علاوہ یہ ذرا اعتکائی ہیملٹنی کی n وی امتیازی حال میں ہی رہے گا

مثال ۱.۱۰: فرض کریں ایک مقناطیسی میدان میں نکتہ پر کمیت m اور بار $-e$ کا ایک الیکٹرون ساکن پایا جاتا ہے اس مقناطیسی میدان کی مقدار B_0 ایک مستقل ہے جبکہ اس کا رخ z محور کے گرد ایک مستقل زاویائی

سمتی رفتار ω سے ایک مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے محور z کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ α ہے شکل 3.10

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0[\sin(\alpha)\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\alpha)\sin(\omega t)\hat{\jmath} + \cos\alpha\hat{k}] \tag{۱۰.۲۴}$$

اس کا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{e}{m}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{e\hbar\beta_0}{2m}[\sin\alpha\cos(\omega t)\sigma_x + \sin\alpha\sin(\omega t)\sigma_y + \cos\alpha\sigma_z] \\ &= \frac{\hbar\omega_1}{2}\begin{pmatrix}\cos\alpha & e^{-i\omega t}\sin\alpha \\ e^{i\omega t}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{۱۰.۲۵}$$

جہاں ω_0 درج ذیل ہیں

$$\omega_1 \equiv \frac{e\beta_0}{m} \tag{۱۰.۲۶}$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکر کار χ_+ اور χ_- درج ذیل ہیں۔

$$\chi_+(t) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t}\sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۷}$$

$$\chi_-(t) = \begin{pmatrix}e^{-i\omega t}\sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۸}$$

جو $\boldsymbol{B}(t)$ کے لمحاتی رخ کے ساتھ ہمچکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں سوال 30.4 دیکھیں ان کے مطابقتی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$E\pm = \pm\frac{\hbar\omega_1}{2} \tag{۱۰.۲۹}$$

فرض کریں $\boldsymbol{B}(0)$ کے ہمراہ الیکٹران حمہ میدان صورت سے آغاز کرتا ہے

$$\chi(0) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۰}$$

تابع وقت شروڈنگر مساوات کا بلکل ٹھیک حل درج ذیل ہوگا سوال 2.10

$$\chi(t) = \begin{pmatrix}[\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1-\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1+\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{+i\omega t/2}\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۱}$$

جہاں λ درج ذیل

$$\lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1\cos\alpha} \tag{۱۰.۳۲}$$

جسے χ_+ اور χ_- کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\chi(t) = \Big[\cos\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big) - i\frac{(\omega_1 - \omega\cos\alpha)}{\lambda}\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) + i\Big[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۳۳}$$

ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کے موجودہ رخ کے لحاظ سے خلاف میدان کو تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہو گا

$$\big|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\big|^2 = \Big[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]^2 \tag{۱۰.۳۴}$$

مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ $T_e \gg T_i$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت T_e ہے جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہو گا اور تفاعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت T_i ہو گا جو موجودہ صورت میں $\hbar/(E_+ - E_- = 1/\omega_1)$ ہو گا یوں حرارت نہ گزر تخمین سے مراد $\omega_1 \gg \omega$ ہو گا غیر مضطرب تفاعلات موج کے دور کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے حرارت نہ گزر صورت $\lambda \cong \omega_1$ میں درج ذیل ہو گا

$$\big|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\big|^2 \cong \Big[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\Big]^2 \to 0 \tag{۱۰.۳۵}$$

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ پر $\boldsymbol{B}$ کے رخ ہو اس کے برعکس $\omega_1 \gg \omega$ کی صورت میں $\omega \cong \lambda$ ہو گا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے پیچ ٹپکیاں کھائے گا شکل 4.10 □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کیجئے گا کہ مساوات 25.10 کی ہیملٹنی کیلئے مساوات 31.10 تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتی ہے ساتھ ہی مساوات 33.10 کی تصدیق کریں اور دکھائیں کے عددی سروں کے مربعوں کا مجموعہ ایک ہو گا جو معمول زنی کی شرط ہے

۱۰.۲ ہیئت بیری

۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل

آئے حصہ 1.1.10 میں مستعمل کامل ہے رگڑھ لٹکن جس کے چبوترا کو ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاتا ہوں پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے حرارت نہ گزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا میں نے دکھایا کیا تھا کہ جب تک چبوترا کی حرکت اتنی لٹکن کے دوری عرصہ کے لحاظ سے اتنی آہستہ ہو کے لٹکن کی نمایاں حرکت کے دوران لٹکن بہت ساری ارتعاش کرتا ہوں یہ اسی مستوی میں یا اس کے متوازی مستوی میں اسی حیطہ اور اسی تعدد کے ساتھ جھومتا رہے گا لیکن اگر میں اس کامل لٹکن کو شمالی قطب پر لے جا کر مثلا

صوابی شہر کے رخ جھولا دوں شکل 5.10 فی الحال تصور کریں کے دنیا گھوم نہیں رہی ہے میں اس کو بہت آہستہ آہستہ یعنی حرارت نہ گزر طریقہ سے صوابی سے گزرتے خط طول بلند پر چلتے ہوئے عرضی خط استوا تک پہنچتا ہوں یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے گا میں اس کو عرضی خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں لٹکن ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے آخر میں میں اس نئی خط طول بلند پر چلتے ہوئے چبوترا کو شمالی قطب منتقل کرتا ہوں آپ دیکھ سکتے ہیں کے لٹکن اسی مستوی میں اب نہیں جھولے گا جہاں سے اس نے آغاز کیا یقیناً نئی مستوی اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ Θ پایا جاتا ہے جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے دو خط طول بلند کے بیچ زاویہ Θ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جس راہ پر میں چبوترا اٹھا کر چلتا رہا وہ راہ زمین کے مرکز پر ٹھوس زاویہ Ω بناتی ہے یہ راہ شمالی نصف کرہ کا $\Theta/2\pi$ حصہ گھیرتی ہے لہٰذا اس کا رقبہ $A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$ ہو گا جہاں R زمین کا رداس ہے یوں درج ذیل ہو گا

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \tag{۱۰.۳۶}$$

جو اس نتیجہ کو نہایت عمدگی کے ساتھ پیش کرتا ہے اور جو راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں ہے شکل 6.10 کرہ کی سطح پر ایک بند راہ پر چلتے ہوئے حرارت نہ گزر منتقلی کی ایک مثال فوکالٹ لٹکن ہے جہاں چبوترا کو اٹھا کر چلنے کی بجائے زمین کے گھومنے کو یہ کام سونپا جاتا ہے خط عرض بلد θ_0 درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے شکل 7.10

$$\Omega = \int \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta_0} = 2\pi(1-\cos\theta_0) \tag{۱۰.۳۷}$$

زمین کے لحاظ سے جو اس دوران 2π زاویہ گھوم چکا ہو گا فوکالٹ لٹکن کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi\cos\theta_0$ ہو گی اس نتیجہ کو عموماً گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس کوتوکی اثر سے حاصل کیا جاتا ہے لیکن یہاں یہ خالصتاً جومیٹری مفہوم پیش کرتا ہے ایسا نظام جو بند راہ پر چل کے واپس ابتدائی نکتہ پہنچ کر اپنی ابتدائی حال میں نہیں لوٹتا غیر ہماقوائد نظام کہلاتا ہے یہاں ضروری نہیں کے راہ پر چلنے سے مراد حرکت دینا ہو اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھی غیر ہماقوائد نظام ہر جگہ پائے جاتے ہیں ایک لحاظ سے ہر چکردار انجن غیر ہماقوائد اعلیٰ ہے ہر ایک پھیرا کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہو گی یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہو گا وغیرہ وغیرہ اگلے حصہ میں میں غیر ہماقواعد اعمالوں کی کوانٹم میکانیات پر غور کروں گا ہم نے دیکھنا ہو گا کے ہیملٹنی کے مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرارت نہ گزر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہو گا

۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ 2.1.10 میں دکھایا کے ایک ذرا جو $H(0)$ کے n وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہو حرارت نہ گزر حالات میں تابع وقت ہیئتی جزو ضربی کے علاوہ $H(t)$ کی n وی امتیازی حال میں ہو گا بالخصوص اس کا تفاعل موج مساوات 23.10 درج ذیل ہو گا

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t)+\gamma_n(t)]}\psi_n(t) \tag{۱۰.۳۸}$$

جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,dt' \tag{۱۰.۳۹}$$

حرکی ہیئت ہے جو تابع وقت تفاعل E_n کی صورت کے لیے جزو ضربی $e^{(-iE_nt/\hbar)}$ کو عمومیت دیتا ہے اور درج ذیل ہندسی ہیئت کہلاتا ہے

$$\gamma_n(t) \equiv \int_0^t \langle \psi_n(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t')\rangle \,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۴۰}$$

چونکہ اب ہیملٹنی میں کوئی ایسا مقدار معلوم $R(t)$ پایا جاتا ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا $\psi_n(t)$ وقت t کا تابع ہو گا سوال 1.10 میں پھیلتے ہوئے چکور کنواں کی چوڑائی $R(t)$ ہو گی یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial \boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۱}$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle \psi_n|\frac{\partial \psi_n}{\partial R}\rangle \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = i\int_{R_i}^{R_f}\langle \psi_n|\frac{\partial \psi_n}{\partial R}\,\mathrm{d}R \tag{۱۰.۴۲}$$

جہاں R_i اور R_f مقدار معلوم R_t کے بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی بالخصوص اگر کچھ دیر T بعد ہیملٹنی واپس اپنی ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہذا $\gamma_n(T) = 0$ ہو گا جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں ہے

میں نے مساوات 41.10 میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو فرض کریں N عدد مقدار معلوم $R_1(t)$، $R_2(t)$، ...، $R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں تب درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1}\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2}\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N}\frac{\mathrm{d}R_N}{\mathrm{d}t} = (\nabla_R\psi_n)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۳}$$

جہاں $\boldsymbol{R} \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ ہے اور ∇_R ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے اس مرتبہ درج ذیل ہو گا

$$\gamma_n(t) = i\int_{\boldsymbol{R}_i}^{\boldsymbol{R}_f}\langle \psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۴}$$

اور اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنی اصل روپ اختیار کرتا ہوں تب کل ہندسی ہیئتی تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\gamma_n(T) = i\oint\langle \psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۵}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں ایک بند راہ پر لکیری تکمل ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا مساوات 45.10 کو پہلی مرتبہ 1984 میں میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ ہیئت بیری کہلاتا ہے دھیان رہے ہیں کہ جب تک تبدیلی اتنی آہستہ ہو کہ قیاس حرارت ناگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہو گی جس پر چلا جائے نا کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر اس کے برعکس مجموعی حرکی ہیئت

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(t')\,\mathrm{d}t'$$

گزرے ہوئے وقت کا تابع ہو گا

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کا ہیئت کچھ بھی ہو سکتا ہے اور طبی مقداروں میں جہاں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے ہیئتی جز و ضرب کٹ جاتا ہے اسی لیے عموما لوگوں کا خیال تھا کہ ہندسی ہیئت کی کوئی طبی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے آخر $\psi_n(t)$ کا ہیئت بھی اختیاری ہے یہ جناب بیری کی دور اندیشی ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو کسی بند دائرے پر لے جاتے ہوئے واپس اپنی اصل روپ میں لانے سے ابتدائی اور اختتامی ہیئت کے بیچ فاصلہ غیر اختیاری ہو گا جسے حقیقتاً ناپا جا سکتا ہے مثال کے طور پر زراعت جو تمام حال Ψ میں ہوں کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے صرف ایک حصے کو حرارت نہ گزر تبدیل ہوتے مخفیہ سے گزارا جاتا ہے دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے مجموعی تفاعل موج درج ذیل روپ کا حاصل ہو گا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \tag{۱۰.۴۶}$$

جہاں سیدھی پہنچتی شعاع کا تفاعل موج Ψ_0 ہے اور متغیر H کی بنا شعاع کا اضافی ہیئت Γ ہے جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ حصہ ہندسی ہو گا اس صورت میں درج ذیل ہو گا

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4}|\Psi_0|^2\left(1+e^{i\Gamma}\right)\left(1+e^{-i\Gamma}\right) \tag{۱۰.۴۷}$$

$$= \frac{1}{2}|\Psi_0|^2\left(1+\cos\Gamma\right) = |\Psi_0|^2\cos^2(\Gamma/2) \tag{۱۰.۴۸}$$

یوں تعمیلی مداخلت اور تباہ کن مداخلت نکات جہاں Γ کی قیمت π کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہو گی کو دیکھ کر ہم Γ کی پیمائش کر سکتے ہیں بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی ہر کی ہیئت کی موجودگی میں ہندسی ہیت نظر نہیں آئے گی لیکن انہیں علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے تین آبادی مقدار معلوم فضا $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)$ کی صورت میں کلیاں بیری مساوات 45.10 سمتی مخفیہ $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں مقناطیسی بہاؤ کہ کلیہ کا یاد دلاتی ہے سطح S جس کی سرحد منحنی C ہو سے درج ذیل بہاؤ گزرتا ہے شکل 8.10

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۴۹}$$

مقناطیسی میدان کو سمتی مخفیہ کئی روپ میں $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ لکھ کر مسئلہ سٹوکس کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\Phi = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۱۰.۵۰}$$

یوں مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے مقناطیسی میدان کے بہاؤ

$$\text{“}\boldsymbol{B}\text{”} = i\nabla_R \times \langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle \tag{۱۰.۵۱}$$

کو ہیئت بیری تصور کیا جا سکتا ہے دوسرے لفظوں میں تین آبادی صورت میں ہیئت بیری کو ایک سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma_n(T) = i\int\left[\nabla_R\times\langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۵۲}$$

مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جا سکتا ہے تاہم ہماری استعمال کے نقطہ نظر سے مساوات 51.10 محض $\gamma_n(T)$ کو لکھنے کا دوسرا انداز ہے

سوال ۱۰.۳:

ا. لامتناہی چکور کنواں کی چوڑائی w_1 سے بڑھ کر w_2 ہونے کی صورت میں مساوات 42.10 استعمال کرتے ہوئے ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں

ب. اگر وسعت مستقل شرح $(\mathrm{d}w/\,\mathrm{d}t = v)$ سے بڑھے تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہو گی

ج. اب اگر چوڑائی کم ہو واپس w_1 ہو جاتی ہے تب اس ایک تیرے کا ہیئت بیری کیا ہو گا

سوال ۱۰.۴: ڈیلٹا تفاعل کنواں مساوات 114.2 واحد ایک مقید حال مساوات 129.2 کا حامل ہے α آہستہ آہستہ α_1 سے بڑھ کر α_2 ہوتا ہے ہندسی تبدیلی ہیئت کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح $\mathrm{d}\alpha/\,\mathrm{d}t = c$ سے رونما ہو تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہو گا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہنسی ہیئت صفر ہو گا سوال 3.10 اور 4.10 اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن قانونی طور پر بالکل جائز جزو ضربی ہیئت منسلک کریں $\psi_n'(t) \equiv e^{i\Phi_n}\psi_n(t)$ جہاں $\Phi_n(\boldsymbol{R})$ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقیناً آپ غیر صفر ہندسی ہیت حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات 23.10 میں پر کرنے سے کیا ہو گا اور بند راہ پر صفر حاصل ہو گا سبق غیر صفر ہیئت بیری کی خاطر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہو گی اور دو ایسا ہیملٹنی درکار ہو گا جو غیر صفر مخلوط امتیازی تفاعلات دیتا ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیئت بیری کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مبدا پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال 1.10 میں کیا گیا اور جس میں محور z کے ساتھ ایک اٹل زاویا α بناتے ہوئے $\boldsymbol{B}(t)$ ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک حل دیتی ہے حرارت نہ گزر صورت $\omega \ll \omega_1$ میں

$$\lambda = \omega_1\sqrt{1 - 2\frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha + \left(\frac{w}{w_1}\right)^2} \cong \omega_1\Big(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha\Big) = \omega_1 - \omega\cos\alpha \tag{۱۰.۵۳}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2}e^{i(\omega\cos\alpha)t/2}e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) \\ i\Big[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\Big(\frac{\omega_1 t}{2}\Big)\Big]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۵۴}$$

دوسرے جزو کو $\omega/\omega_1 \;\to\; 0$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل

ہوگا ہر کی ہیّت درج ذیل ہے

$$\theta + (t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E + (t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{\omega_1 t}{2} \tag{۱۰.۵۵}$$

جہاں مساوات 29.10 سے $E_+ = \hbar\omega_1/2$ ہوگا لہذا ہندسی ہیّت درج ذیل ہوگی

$$\gamma + (t) = (\cos\alpha - 1)\frac{\omega t}{2} \tag{۱۰.۵۶}$$

ایک مکمل پھیرا کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہوگا لہذا ہیّت بیری درج ذیل ہوگی

$$\gamma + (T) = \pi(\cos\alpha - 1) \tag{۱۰.۵۷}$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس $r = B_0$ کی کرہ کی سطح پر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے شکل 9.10 میدان $\boldsymbol{B}(t)$ کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا سوال 30.4 دیکھیں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۵۸}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ کے دونوں کروی محدد θ اور π وقت کے تفاعلات ہیں کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$\nabla\chi_+ = \frac{\partial\chi_+}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_+}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi_+}{\partial\phi}\hat{\phi} \tag{۱۰.۵۹}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix}-(1/2)\sin(\theta/2)\\ (1/2)e^{i\phi}\cos(\theta/2)\end{pmatrix}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix}0\\ ie^{i\phi}\sin(\theta/2)\end{pmatrix}\hat{\phi} \tag{۱۰.۶۰}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{2r}\Big[-\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta} + \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta} + 2i\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta}\hat{\phi}\Big] \tag{۱۰.۶۱}$$

$$= i\frac{\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}p\hat{h}i \tag{۱۰.۶۲}$$

مساوات 51.10 کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی

$$\nabla\times\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\sin\theta\Big(\frac{i\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}\Big)\Big]\hat{r} = \frac{i}{2r^2}\hat{r} \tag{۱۰.۶۳}$$

یوں مساوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۶۴}$$

تکمل رقبہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو $\boldsymbol{B}$ کی چھوٹی ایک پیرا میں گرتا ہو لہذا $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = r^2\,\mathrm{d}\Omega\hat{r}$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{2}\Omega \tag{۱۰.۶۵}$$

جہاں مبدہ پر ٹھوس زاویا Ω ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلار گڑلٹکن کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرارت نہ گزر طریقے سے لے جانے سے کل ہندسی تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویا کی منفی منفی باد اہو گا مساوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مساوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے $\square$

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مساوات 62.10 کا مماثل حاصل کریں جواب $-\Omega$ ایک ذرہ جس کا چکر s ہو کے لیے نتیجہ $-s\Omega$

۱۰.۲.۳ اہارونو و بوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ φ اور $\boldsymbol{A}$ بلاواسطہ ناقابل پیمائش ہیں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{۱۰.۶۶}$$

میکسول مساوات اور قاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیا کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطق نقطہ نظر سے ایک نظریہ تشکیل دینے کے لیے کار آمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیات کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۱۰.۶۷}$$

جہاں Λ مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں ہو گا کوانٹم میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو φ اور $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں ناکہ $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\Big)^2 + q\varphi \tag{۱۰.۶۸}$$

بہر حال زیر ماپ تبادلہ سے نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبہ عرصہ کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سمتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرا کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہو گا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو وبوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیئت بیری کے ساتھ پیش کروں گا فرض کریں ایک ذرا کو رداس b کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $a < b$ کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو I ہے شکل 10.10 بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہو گا جبکہ بیرونی میدان صفر ہو گا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہو گا یقیناً موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi}, \quad (r > a) \tag{۱۰.۶۹}$$

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہاؤ ہو گا ساتھ ہی لچھا از خود غیر باردار ہے لہٰذا غیر سمتی مخفیہ φ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$H = \frac{1}{2m}[-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2i\hbar q\boldsymbol{A}\cdot\nabla] \tag{۱۰.۷۰}$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ اسمت $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$ پر منحصر ہے لہٰذا $\nabla \to (p\hat{h}i/b)(\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\phi)$ ہو گا اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$\frac{1}{2m}\Big[-\frac{\hbar^2}{b^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} + \Big(\frac{q\Phi}{2\pi b}\Big)^2 + i\frac{hq\Phi}{\pi b^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\Big]\psi(\phi) = E\psi(\phi) \tag{۱۰.۷۱}$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\phi^2} - 2i\beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi} + \epsilon\psi = 0 \tag{۱۰.۷۲}$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \qquad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2 \tag{۱۰.۷۳}$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi} \tag{۱۰.۷۴}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} \tag{۱۰.۷۵}$$

نقطہ $\phi = 2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا λ عدد صحیح

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} = n \tag{۱۰.۷۶}$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{۱۰.۷۷}$$

لچھا دائرے پر ذرا کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت n جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرا کو ظاہر کرتا ہے q مثبت لیتے ہوئے منفی n کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرا کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ اجازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہو گا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرا پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک ذرا ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ ہے لہٰذا $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہو گا تاہم $\boldsymbol{A}$ از خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ $\boldsymbol{A}$ ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیا کے لئے عمومیت دی جا سکتی ہے مخفی توانائی V جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی شروڈنگر مساوات

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 + V\right]\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{۱۰.۷۸}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جا سکتی ہے

$$\Psi = e^{ig}\Psi' \tag{۱۰.۷۹}$$

جہاں $g(\boldsymbol{r})$ درج ذیل ہے

$$g(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\prime}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{۱۰.۸۰}$$

اور $\prime$ کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت بامعنی ہو گی جب پورا خطہ میں $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل $\prime$ سے $\boldsymbol{r}$ تک راہ پر منحصر ہو گا اور یوں $\boldsymbol{r}$ کا تفاعل نہیں ہو گا Ψ' کی صورت میں Ψ کا ڈھلوان درج ذیل ہو گا

$$\nabla\Psi = e^{ig}(i\nabla g)\Psi' + e^{\nabla\Psi'}$$

لیکن $\nabla g = (q/\hbar)\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)\Psi = \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' \tag{۱۰.۸۱}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2\Psi = -\hbar^2 e^{ig}\nabla^2\Psi' \tag{۱۰.۸۲}$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی e^{ig} کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \tag{۱۰.۸۳}$$

بظاہر Ψ' بغیر $\boldsymbol{A}$ شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا معمولی بات ہو گئی ہمیں صرف ہیتی جزو ضربی e^{ig} ساتھ منسلک کرنا ہو گا عہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے شکل 11.10 ان شعاعوں کو لمبے لچھا سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = 0$ ہو تاہم $\boldsymbol{A}$ جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہو گا اور دونوں اطراف V کی قیمت ایک دوسرے جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہیتی فرق پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar}\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\int\Big(\frac{1}{r}\hat{\phi}\Big)\cdot(r\hat{\phi}\,\mathrm{d}\phi) = \pm\frac{q\Phi}{2\hbar} \tag{۱۰.۸۴}$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہو گی جو لمبے لچھے میں $\boldsymbol{A}$ کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہیتی فرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہو گا جس سے ان کی راہ گھیرتے ہیں

$$\text{ہیّتی فرق} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۸۵}$$

اس ہیتی ینتقل سے قابل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کر چکے ہیں اہارنو و بوہم اثر کو ہندسی ہیت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے فرض کریں مخفیہ $V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$ ایک بار دار ذرا کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لچھے سے باہر نقطہ $\boldsymbol{R}$ پر ہے شکل 12.10 ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پھیرا دینگے لہٰذا $\boldsymbol{R}$ وقت کا تفاعل ہو گا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$\Big\{\frac{1}{2m}\Big[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\Big]^2 + V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big\}\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۸۶}$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا جانتے ہیں ہم

$$\psi_n = e^{ig}\psi_n' \tag{۱۰.۸۷}$$

لیتے ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$g \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{r}') \tag{۱۰.۸۸}$$

اور ψ' اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب $\boldsymbol{A} \to 0$ ہو

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big]\psi' = E_n\psi_n' \tag{۱۰.۸۹}$$

آپ نے دیکھا کہ ψ_n' ہٹاؤ $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$ کا تفاعل ہے نہ کہ ψ_n کی طرح علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{R}$ کا تفاعل
آیئے اب اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حرارت نہ گزر ہونے کے بھی
ضرورت نہیں ہے ہیئت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$ کی قیمت درکار ہو گی درج ذیل کی بنا

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R[e^{ig}\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})] = -\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})e^{ig}\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) + e^{ig}\nabla_R\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle \\
&= \int e^{-ig}[\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^* e^{ig}\Big[-i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) + \nabla_R\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big]\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \\
&= -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) - \int [\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^*\nabla\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}
\end{aligned} \tag{۱۰.۹۰}$$

بغیر زیر نوشت ∇ $\boldsymbol{r}$ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$ کے تفاعل پر عمل کے
دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری تکمل ہیملٹنی $-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V$ کے امتیازی حال میں معیار
حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب $i/\hbar$ ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \tag{۱۰.۹۱}$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{q}{\hbar}\int (\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۹۲}$$

جو اہارونو و بوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو و بوہم اثر ہئیتی ہیئت کی ایک خصوصی صورت
ہے اہارونو و بوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان
صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جا سکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے $\boldsymbol{A}$ از خود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا
آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا بہاؤ پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گیج غیر متغیر رہتا ہے

جوابات

فرہنگ

allowed
26energies,
51argument,

Bessel
99function,spherical
107energy,binding
Bohr
106radius,
106formula,Bohr
25conditions,boundary

98term,centrifugal
83states,coherent
4collapses,
commutation
36relation,canonical
90relations,canonical
36commutator,
28complete,
77continuous,
90continuum,
coordinates
91spherical,
3interpretation,Copenhagen

75degenerate,
delta
28Kronecker,
Dirac
80orthonormality,
77discrete,
dispersion
54relation,

energy
22allowed,
31conservation,
13ensemble,
expectation
6value,

formula
16Broglie,De
Fourier
52transform,inverse
52transform,
Frobenius
45method,
function
59delta,Dirac

generalized
59distribution,
59function,
generating
50function,
generator
86space,intranslation
86time,intranslation
Gram-Schmidt
79process,orthogonalization

21Hamiltonian,
harmonic
25oscillator,