کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۳ اگست ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر

تین ابعاد تک توسیع با آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi; \tag{۴.۱}$$

معیاری طریقہ کار کا اطلاق x کے ساتھ ساتھ y اور z پر کر کے:

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۴.۲}$$

ہیملٹنی عامل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$p \to \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{۴.۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{۴.۴}$$

[۱] جہاں کلاسیکی مشہود اور عامل میں فرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عامل پر "ٹوپی" کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہٰذا یہاں سے عاملین پر "ٹوپی" کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۴.۵}$$

کارتیسی محدد میں **لاپلاسی**[۲] ہے۔

مخفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $\left|\Psi(\boldsymbol{r}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}$ ہو گا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہو گی

$$\int \left|\Psi\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = 1 \tag{۴.۶}$$

جہاں تکمل کو پوری فضا پر لینا ہو گا۔ اگر مخفی توانائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۷}$$

جہاں فضائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۴.۸}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۹}$$

جہاں مستقلات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\boldsymbol{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ **استمراریہ**[۳] حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے تکمل ہو گا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{p}$ کے تمام **باضابطہ مقلبیتی رشتے**[۴]: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{۴.۱۰}$$

جہاں اشاریہ x ، y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔

---

[۲] Laplacian
[۳] continuum
[۴] canonical commutation relations

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہرنفسٹ کی تصدیق کریں:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle \boldsymbol{p}\rangle \tag{۴.۱۱}$$

(ان میں سے ہر ایک در حقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ایک مساوات ایک جزو کے لیے ہو گا۔)
اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۲}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x\sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبدا سے فاصلہ کا تفاعل ہو گا۔ایسی صورت میں **کروی محدد**[۵] (r,θ,ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہو گا (شکل 4۔1)۔کروی محدد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big) \tag{۴.۱۳}$$

یوں کروی محدد میں تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\Big] + V\psi = E\psi \tag{۴.۱۴}$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi) \tag{۴.۱۵}$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big] + VRY = ERY$$

[۵] spherical coordinates

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کہ $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\right\}$$
$$+\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right\}=0$$

پہلی خمدار قوسین میں جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہو گی۔[6]

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=l(l+1) \tag{۴.۱۶}$$

$$\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right\}=-l(l+1) \tag{۴.۱۷}$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی مربعی کنواں (یا ڈبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x\text{،}y \text{ اور } z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں}\\ \infty & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

حل کریں۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1، E_2، E_3، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انحطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انحطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انحطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y\sin^2\theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=-l(l+1)Y\sin^2\theta \tag{۴.۱۸}$$

---

[6] ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازماً عدد صحیح ہونا ہو گا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانتے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{۴.۱۹}$$

استعمال کرکے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کرکے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Big\{\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta\Big\}+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

پہلا جزو صرف θ کا تفاعل ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تفاعل ہے، لہٰذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہو گا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل[7] کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{۴.۲۰}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2 \tag{۴.۲۱}$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2\Phi \implies \Phi(\phi)=e^{im\phi} \tag{۴.۲۲}$$

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جا سکتا ہے جسے ہم Θ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مخفی توانائی لازماً حقیقی ہو گی لہٰذا برقی حرکیات میں اسّمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہے ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہٰذا درج ذیل شرط[8] مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi) \tag{۴.۲۳}$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)}=e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im}=1$ ہو گا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہو گا۔

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{۴.۲۴}$$

---

[7] یہاں بھی ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہو گا۔ انتباہ: اب حرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل در پیش نہیں ہو گی۔

[8] یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کثافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

جدول ۴.۱: ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں۔

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1\\
P_1 &= x\\
P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5 &= \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
$$

مساوات θ

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)+[l(l+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0 \tag{۴.۲۵}$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta)=AP_l^m(\cos\theta) \tag{۴.۲۶}$$

جہاں P_l^m **شریک لیژانڈر تفاعل**[9] ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x)\equiv(1-x^2)^{|m|/2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{|m|}P_l(x) \tag{۴.۲۷}$$

اور l ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے[10] جس کی تعریف **کلیہ روڈریگیس**[11]

$$P_l(x)\equiv\frac{1}{2^l l!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l(x^2-1)^l \tag{۴.۲۸}$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
&P_0(x)=1,\quad P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)=x,\\
&P_2(x)=\frac{1}{4\cdot2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2(x^2-1)^2=\frac{1}{2}(3x^2-1)
\end{aligned}
$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

---

[9] associated Legendre function

[10] دھیان رہے کہ $P_l^{-m}=P_l^m$ ہو گا۔

[11] Rodrigues formula

جدول ۴.۲: چند شریک لیژانڈر تفاعلات $P_l^m(\cos\theta)$

$P_0^0 = 1$	$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
$P_1^1 = \sin\theta$	$P_3^3 = 15\sin\theta(1-\cos^2\theta)$
$P_1^0 = \cos\theta$	$P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta$
$P_2^2 = 3\sin^2\theta$	$P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$
$P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta$	$P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

درجہ l کثیر رکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہو گی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیر رکنی نہیں ہو گا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3x\sqrt{1-x^2},$$
$$P_2^2(x) = (1-x^2)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_l^m(\cos\theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ہوتا ہے لہٰذا $P_l^m(\cos\theta)$ ہر صورت $\cos\theta$ کا کثیر رکنی ہو گا جسے طاق m کی صورت میں $\sin\theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos\theta$ کے چند شریک لیژانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہو گا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲۷ کے تحت $P_l^m = 0$ ہو گا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots -1, 0, 1, \dots l-1, l \tag{۴.۲۹}$$

ذرا رکیے! مساوات ۴.۲۵ دو رتبی تفرقی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہوں گے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور (یا) $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے قابو بڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدد میں حجمی رکن درج ذیل ہو گا

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۴.۳۰}$$

لہٰذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int|\psi|^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int|R|^2 r^2\,\mathrm{d}r\int|Y|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1$$

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta,\phi)$

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta e^{\pm2i\phi}$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$	$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_1^{\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm1} = \mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin\theta(5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^{\pm2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta \cos\theta e^{\pm2i\phi}$
$Y_2^{\pm1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm3} = \mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3\theta e^{\pm3i\phi}$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 \,\mathrm{d}r = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = 1 \tag{۴.۳۱}$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات[۱۲] کو **کروی ہارمونیات**[۱۳] کہتے ہیں:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta \tag{۴.۳۲}$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہو گا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروی ہارمونیات عمودی ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta,\phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)] \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۳۳}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا l کو **اسمتی کوانٹائی عدد**[۱۴] جب کہ m کو **مقناطیسی کوانٹائی عدد**[۱۵] کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۷، ۴.۲۸ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_0^0 اور Y_2^1 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

---

[۱۲] معمول زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علامتیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہو گی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہو گا۔

[۱۳] spherical harmonics

[۱۴] azimuthal quantum number

[۱۵] magnetic quantum number

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) ناقابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کرکے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ تشکیل دیں۔ (آپ P_3^2 کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تشکیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کرکے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, \mathrm{d}x = \Big(\frac{2}{2l+1}\Big)\delta_{ll'} \tag{۴.۳۴}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: تکمل بالحصص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل وصورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r) - E]R = l(l+1)R \tag{۴.۳۵}$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r) \equiv rR(r) \tag{۴.۳۶}$$

$R = u/r$، $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r = [r(\mathrm{d}u/\mathrm{d}r) - u]/r^2$، $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[r^2(\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)] = r\,\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2$ لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \Big[V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u = Eu \tag{۴.۳۷}$$

اس کو **رداسی مساوات**[16] کہتے ہیں[17] جو شکل وصورت کے لحاظ سے یک بعدی شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں **موثر مخفیہ**[18] درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{۴.۳۸}$$

---

[16] radial equation

[17] یہاں m کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

[18] effective potential

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو **مرکز گریز جزو**[19] کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدا سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2 \, dr = 1 \tag{۴.۳۹}$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \infty & r > a \end{cases} \tag{۴.۴۰}$$

اس کے تفاعلات موج اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جبکہ کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\right] u \tag{۴.۴۱}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۴.۴۲}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مسلط کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \to 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے قابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب[20] کرنا ہو گا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہٰذا $ka = n\pi$ ہو گا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۴.۴۳}$$

---

[19] centrifugal term

[20] درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ متناہی ہو: مساوات ۴.۳۱ میں r^2 کی بنا مبدا پر $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے قابل ہے۔

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہو گا۔ زاویائی جزو (جو $Y_0^0(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ کی بنا غیر اہم ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \tag{۴.۴۴}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین **کوانٹائی اعداد**[۲۱] n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nml}(r,\theta,\phi)$؛ جبکہ توانائی، E_{nl}، صرف n اور l پر منحصر ہو گی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \tag{۴.۴۵}$$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا **کروی بیسل تفاعل**[۲۲] ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا **کروی نیومن تفاعل**[۲۳] ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x} \tag{۴.۴۶}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\\
j_1(x) &= (-x)\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x};\\
j_2(x) &= (-x)^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\sin x}{x} = x^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\\
&= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

---

[۲۱] quantum numbers
[۲۲] spherical Bessel function
[۲۳] spherical Neumann function

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$؛ چھوٹی x کے لئے متقاربی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$
$n_l \to -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \to \frac{2^l l!}{(2l+1)!}x^l$

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات متناہی ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے قابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$R(r) = Aj_l(kr) \tag{۴.۴۷}$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہو گا

$$j_l(ka) = 0 \tag{۴.۴۸}$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہو گا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل 2.4 دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔ تاہم (ہماری بدقسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہو گا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{1}{a}\beta_{nl} \tag{۴.۴۹}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہو گا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{nl}^2. \tag{۴.۵۰}$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = A_{nl}j_l(\beta_{nl}r/a)Y_l^m(\theta,\phi). \tag{۴.۵۱}$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا توانائی کی ہر سطح $(2l+1)$ گنا انحطاطی ہو گی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $x \gg 1$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر بے قابو بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروی کنواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں اجازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \implies x = \tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو متناہی کروی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کے $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل 3.4 دیکھیں)۔ قانون کولمب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۴.۵۲}$$

لہٰذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u = Eu \tag{۴.۵۳}$$

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے اجازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہٰذا میں اس کو، ہارمونی مرتعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔)

کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراری حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراو کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہے، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کرکے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۴.۵۴}$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2}\Big]u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa} \tag{۴.۵۵}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \Big[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\Big]u \tag{۴.۵۶}$$

اس کے بعد ہم حالات کی متقاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \to \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہٰذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{۴.۵۷}$$

تاہم ($\rho \to \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \tag{۴.۵۸}$$

اس کے بر عکس $\rho \to 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛[۲۴] لہٰذا تخمیناً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2}u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \to 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \tag{۴.۵۹}$$

اگلے قدم پر متقاربی رویہ کو چھیلنے کی خاطر نیا تفاعل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۶۰}$$

اس امید سے متعارف کرتے ہے کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \rho^l e^{-\rho}\Big[(l+1-\rho)v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\Big]$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \rho^l e^{-\rho}\Big\{\Big[-2l-2+\rho+\frac{l(l+1)}{\rho}\Big]v + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2}\Big\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں ردای مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \tag{۴.۶۱}$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$، کو ρ کا طاقتی تسلسل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j \tag{۴.۶۲}$$

---

[۲۴] یہ دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علامتیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

ہمیں عددی سر (c_0 ، c_1 ، c_2 ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}=\sum_{j=0}^{\infty}jc_j\rho^{j-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^{j}$$

[میں نے دوسرے مجموعہ میں "فرضی اشاریہ" j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کے نیا مجموعہ $j=-1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جزو ضربی $(j+1)$ اس جزو کو ختم کرتا ہے لہٰذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\rho^2}=\sum_{j=0}^{\infty}j(j+1)c_{j+1}\rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty}j(j+1)c_{j+1}\rho^{j}+2(l+1)+\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^{j}\\-2\sum_{j=0}^{\infty}jc_j\rho^{j}+[\rho_0-2(l+1)]\sum_{j=0}^{\infty}c_j\rho^{j}=0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1}+2(l+1)(j+1)c_{j+1}-2jc_j+[\rho_0-2(l+1)]c_j=0$$

یا

$$c_{j+1}=\left\{\frac{2(j+l+1)-\rho_0}{(j+1)(j+2l+2)}\right\}c_j \tag{۴.۶۳}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ توالی عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کا روپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہے؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔[۲۵]

[۲۵] آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متقاربی رویہ کو کیوں (جزو ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ در حقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جزو ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہو گا)؛ ρ^{l+1} باہر نکالنے سے تسلسل کا پہلا جزو ρ^0 حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس جزو ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ توالی حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

آئے j کی بڑی قیمت (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ توالی درج ذیل کہتا ہے۔[۲۶]

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)}c_j = \frac{2}{j+1}c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!}c_0 \tag{۴.۶۴}$$

لہٰذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!}\rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \tag{۴.۶۵}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے قابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نما وہی غیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (در حقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہو گا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، $j_{\text{بلندتر}}$، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلندتر}}+1)} = 0 \tag{۴.۶۶}$$

(یوں کلیہ توالی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$2(j_{\text{بلندتر}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کوانٹم عدد[۲۷]

$$n \equiv j_{\text{بلندتر}} + l + 1 \tag{۴.۶۷}$$

---

[۲۶] آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $2l + 2$ اور نسب نما میں $2(l+1) - \rho_0$ رد کرنے کی طرح $j + 1$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جا سکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہو گا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

[۲۷] principal quantum number

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\rho_0 = 2n \tag{۴.۶۸}$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon^2\hbar^2\rho^2} \tag{۴.۶۹}$$

لہٰذا اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴.۷۰}$$

یہ مشہور زمانہ **کلیہ بوہر**[۲۸] ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913ء میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شروڈنگر 1924ء میں منظر عام ہوئی۔)

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \tag{۴.۷۱}$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} \tag{۴.۷۲}$$

رداس بوہر[۲۹] کہلاتا[۳۰] ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \tag{۴.۷۳}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تفاعلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۴.۷۴}$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۷۵}$$

---

[۲۸] Bohr formula

[۲۹] Bohr radius

[۳۰] رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہٰذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

ہو گا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n-l-1=$ بلند تر j کا کثیر رکنی ہو گا، جس کے عددی سر درج ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تفاعل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1}=\frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)}c_j \tag{۴.۷۶}$$

زمینی حال[31] (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n=1$ ہو گا؛ طبعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_1=-\Big[\frac{m}{2\hbar^2}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\Big)^2\Big]=-13.6\,\text{eV} \tag{۴.۷۷}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی **بندشی توانائی**[32] (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) $13.6\,\text{eV}$ ہے۔ مساوات ۴.۶۷ کے تحت $l=0$ لہٰذا $m=0$ ہو گا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi)=R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi) \tag{۴.۷۸}$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j=0$ کے لئے $c_1=0$ حاصل ہوتا ہے)، لہٰذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$R_{10}(r)=\frac{c_0}{a}e^{-r/a} \tag{۴.۷۹}$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2\,r^2\,\mathrm{d}r=\frac{|c_0|^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-2r/a}r^2\,\mathrm{d}r=|c_0|^2\,\frac{a}{4}=1$$

یعنی $c_0=2/\sqrt{a}$ حاصل ہو گا۔ مزید $Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہٰذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a} \tag{۴.۸۰}$$

اسی طرح $n=2$ کے لئے توانائی

$$E_2=\frac{-13.6\,\text{eV}}{4}=-3.4\,\text{eV} \tag{۴.۸۱}$$

ہو گی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l=0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m=0$ ہو گا) یا $l=1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے یا m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہو گی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہو گی۔ کلیہ توالی

[31] ground state
[32] binding energy

(مساوات ۴.۷۶) $l = 0$ کے لئے $j = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہٰذا $v(\rho) = c_0(1-\rho)$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a} \tag{۴.۸۲}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاو عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہ توالی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \tag{۴.۸۳}$$

(ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہو گا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۴.۸۴}$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہو گی (مساوات ۴.۲۹)، لہٰذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہو گی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2 \tag{۴.۸۵}$$

کثیر رکنی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہو گی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \tag{۴.۸۶}$$

جہاں

$$L_{q-p}^{p}(x) \equiv (-1)^p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^p L_q(x) \tag{۴.۸۷}$$

ایک **شریک لاگیغ کثیر رکنی**[۳۳] ہے جبکہ

$$L_q(x) \equiv e^x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^q\left(e^{-x}x^q\right) \tag{۴.۸۸}$$

q ویں **لاگیغ کثیر رکنی**[۳۴] ہے۔[۳۵] (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

---

[۳۳] associated Laguerre polynomial

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_{q-p}^{p}(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جدول ۴.۷: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاعلات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$

چند ابتدائی شریک لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل 4.4 میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درج ذیل ہیں۔

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\, e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L^{2l+1}_{n-l-1}(2r/na)] Y^m_l(\theta,\phi) \tag{۴.۸۹}$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولمب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$\int \psi^*_{nlm}\psi_{n'l'm'} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۹۰}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور $(n \neq n')$ کی صورت میں H کی منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگیغ کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

---

[۳۴] Laguerre polynomial

[۳۵] دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا تکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہوگا، اور ازمینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2$، $l = 1$، $m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x، y اور z کے لحاظ سے تشاکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin\theta \cos\phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + \mathrm{d}r$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2$، $l = 1$، $m = 1$ اور $n = 2$، $l = 1$، $m = -1$ کے درج ذیل خطی جوڑ سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں **عبور**[36] کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقناطیسی فوٹان کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔[37] عملاً ایسی چھیڑخانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہٰذا عبور (جنہیں "کوانٹم چھلانگ" کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \tag{۴.۹۱}$$

کے برابر ہوگا۔

[36] transition

[37] فطرتاً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب **کلیہ پلانک**[۳۸][۳۹] کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہو گی:

$$E_{\gamma} = h\nu \tag{۴.۹۲}$$

جبکہ **طول موج** $\lambda = c/\nu$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R\Big(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\Big) \tag{۴.۹۳}$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}\Big)^2 = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \tag{۴.۹۴}$$

رڈبرگ مستقل[۴۰] کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا **کلیہ رڈبرگ**[۴۱] ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقلات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال $(n_f = 1)$ میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کار **لیمان تسلسل**[۴۲] کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال $(n_f = 2)$ میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**[۴۳] کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، **پاشن تسلسل**[۴۴] دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل 7.4 دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔) سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ **ہیلیم**[۴۵] میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ **لتھیم**[۴۶] میں $Z = 3$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$، بندشی توانائی $E_1(Z)$، رداس بوہر $a(Z)$، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقناطیسی طیف کے کس خطہ میں

---

[۳۸] Planck's formula

[۳۹] فوٹان در حقیقت برقناطیسی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات قابل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

[۴۰] Rydberg constant

[۴۱] Rydberg formula

[۴۲] Lyman series

[۴۳] Balmer series

[۴۴] Paschen series

[۴۵] Helium

[۴۶] Lithium

$Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \rightarrow Ze^2$ ہو گا لہٰذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہو گا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہو گا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں۔)

ب. اس نظام کا "رداس بوہر" a_g کیا ہو گا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہو گا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہو گا؟ جواب جاول میں دیں۔ خارج فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر **گریویٹان**) کا طول موج کیا ہو گا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{۴.۹۵}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{۴.۹۶}$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$، $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$، $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجازتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی اقدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ در حقیقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]\end{aligned} \tag{۴.۹۷}$$

باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات 10.4 سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں یوں درمیانی دو اجزا ہدف ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \tag{۴.۹۸}$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل $(x \to y, y \to z, z \to x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{۴.۹۹}$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلبیت رشتے ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہو گا

دھیان رہے کہ L_x L_y اور L_z غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں متعمم اصول عدم یقینیت مساوات 62.3 کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

یا

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right| \tag{۴.۱۰۰}$$

ہو گا یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہو گا اس کے بر عکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{۴.۱۰۱}$$

L_x کے ساتھ مقلوب ہے

$$\begin{aligned}[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\ &= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\ &= 0\end{aligned}$$

مقلبوں کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات 64.3 استعمال کیا۔ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے ساتھ مقلوب ہو گا اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہو گا

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \tag{۴.۱۰۲}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا

$$[L^2, \boldsymbol{L}] = 0 \tag{۴.۱۰۳}$$

اس طرح $\boldsymbol{L}$ کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہو گا اور ہم L^2 کا مثلاً L_z کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = u f \tag{۴.۱۰۴}$$

ہم نے حصہ 1.3.2 میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی یہی ترکیب یہاں پر بھی استعمال کرتے ہیں

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ **کوارک**[۴۷] اور تمام **لپٹان**[۴۸] کیلئے $s = \frac{1}{2}$ ہو گا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف "دو" عدد امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ ہے جسے ہم **میدان چکر**[۴۹] (یا غیر رسمی طور پر $\uparrow$) اور دوسرا $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جس کو **مخالف میدان چکر**[۵۰] ($\downarrow$) کہتے ہیں۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو احزائی قالب قطار (یا **چکر کار**[۵۱]) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \tag{۴.۱۰۵}$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۰۶}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۰۷}$$

---

[۴۷] quarks
[۴۸] leptons
[۴۹] spin up
[۵۰] spin down
[۵۱] spinor

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

ساتھ ہی عاملین چکر 2×2 قالب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \tag{۴.۱۰۸}$$

ہم $\mathbf{S}^2$ کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا قالب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \tag{۴.۱۰۹}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۰۸ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہو گا۔ مساوات ۴.۱۰۸ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۱۰}$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{۴.۱۱۱}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۱۲}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}_+\chi_- = \hbar\chi_+, \quad \mathbf{S}_-\chi_+ = \hbar\chi_-, \mathbf{S}_+\chi_+ = \mathbf{S}_-\chi_- = 0,$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۱۳}$$

اب چونکہ $S_\pm = S_x \pm i S_y$ ہے لہٰذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۱۴}$$

چونکہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں زیادہ صاف روپ $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۱۵}$$

یہ **پالی قالب چکر**[۵۲] ہیں۔ دھیان رکھیں کہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ اور $\mathbf{S}^2$ تمام ہرمشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس $\mathbf{S}_+$ اور $\mathbf{S}_-$ غیر ہرمشی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔

$\mathbf{S}_z$ کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۱۶}$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۰۵) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیمائش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $+\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{۴.۱۱۷}$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہو گا)۔[۵۳]

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شماریاتی مفہوم کے تحت ہمیں $\mathbf{S}_x$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

---

[۵۲] Pauli spin matrices

[۵۳] لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر S_z کی پیمائش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہو گا۔ (صفحہ ۱۰۵ پر حاشیہ ۱۲ دیکھیں۔)

یہ ہر گز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

لہٰذا $\beta = \pm\alpha$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{S}_x$ کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \Big(+\frac{\hbar}{2}\, \text{امتیازی قدر}\Big); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \Big(-\frac{\hbar}{2}\, \text{امتیازی قدر}\Big) \tag{۴.۱۱۸}$$

بطور ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات سے فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مساوات ۴.۱۰۵) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\chi = \Big(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_+^{(x)} + \Big(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_-^{(x)} \tag{۴.۱۱۹}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a+b|^2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a-b|^2$ ہو گا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\ 2\end{pmatrix} \tag{۴.۱۲۰}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہٰذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہو گا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6 = (1/2)\left|(3+i)/\sqrt{6}\right|^2$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $1/6 = (1/2)\left|(-1+i)/\sqrt{6}\right|^2$ ہو گا۔ اتفاقاً S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big) + \frac{1}{6}\Big(-\frac{\hbar}{2}\Big) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلاواسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^{\dagger} \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

$\square$

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متلق ایک فرضی پیمائشی تجربا سے گزرتا ہوں۔ چونکہ یہ ان تصوراتی خیالات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرا کیا گیا۔ فرض کریں ایک زرا حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے کہ اس زرے کی زاویائی چکری میارِ حرکت کا z جز کیا ہے۔ تب ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہوگا۔ چونکہ z کی پیمائش لازمن یہی قیمت دے گی۔ اس کے بجائے اگر پوچھنے والا سوال کرے کہ اس زرے کی چکریا زاویائی میارِ حرکت کا x جز کیا ہوگا۔ تب ہم یہ کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ گر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہرِ تبیعات یا حصہ ۱۔۲ کے نقطہِ نزر سے حقیقت پسند ہو تو وہ اس جواب کو ناکافی سمجھے گا۔ کیا آپ یہ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس زرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے۔ نہیں میں نے یہ تو نہیں کہا!۔ مجھے زرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے اور یہ ψ_+ ہے۔ یہ ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جز نہیں بتا سکتے اس لیئے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جز نہیں پایا جاتا ہے۔ یقینن ایسا ہی ہوگا۔ اگر S_x اور S_z کی قیمتیں تائین ہوں تب اصولِ ادم یقینیت متمئن نہیں ہوگا۔ یہ سنتے ہی سوال کرنے والا زرے کی چکر کا x جز از خود پیمائش کرتا ہے۔ اب فرض کریں کہ وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ وہ خوشی سے چلا اٹھتا ہے۔ اس زرے کی S_x قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔ جی آپ درست فرماتے ہیں اب اس کی یہی قیمت ہے۔ جس سے یہ بلکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربہ سے پہلے بھی اس کی یہی قیمت تھی۔ اب ظاہر ہے آپ بال کی کھال اتار رہے ہو اور آپ کی ادم یقینیت اصول کا کیا بنا۔ میں اب S_x اور S_z دونوں کو جانتا ہوں۔ جی نہیں آپ نہیں جانتے ہیں۔ آپ نے پیمائش کے دوران زرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ ψ_+ اور اگرچہ آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں۔ آپ S_z کی قیمت اب نہیں جانتے ہیں۔ لیکن میں نے S_x کی پیمائش کے دوران ہم نے پوری کوسس کی کہ میں زرے کا سکون برباد نہ کروں۔ اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے تو خود تصدیق کریں۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں کہ کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ وہ $\hbar/2$ حاصل کرے جو میرے لیئے سرمندگی کا عصر ہوگا۔ اگر ہم اس پورے عمل کو بار بار دورائیں تو یہ سب اوقات اسے $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔ یہ کام آدمی کے لیئے

ایک عام آدمی، ایک فلسفی یا ایک کلاسیکی مایرِ تبیات کا یہ کینا کہ کس زرے کا ٹھیک ٹھیک مکام یا میعارِ حرکت یا چکری زاویائی میارِ حرکت کا x جز یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نزر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم مکینیانیات کا گہرا مطلع نہ کیا ہو تقریبن ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو $1/2$ چکر نظام پر دوبارا غور کی جیئے گا۔ یہ ونٹم مکینیانیات کی پیچیدہ تفرقات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کی جئے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی میارِ حرکت کے بنیادی تبادلی رشتوں کو مطمین کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مثال 148.4 درج ذیل زروی فائدہ کو مطمین کرتی ہے۔

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \tag{۴.۱۲۱}$$

جہاں اشاریا x,y اور z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ ϵ_{jkl} Levi-Civita علامت ہے۔ جو $jkl = 1,2,3$ یا $2,3,1$ یا $3,1,2$ کی سورت میں $+1$ جبکہ $jkl = 1,3,2$ یا $2,1,3$ یا $3,2,1$ کی سورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹروں درج ذیل جبکری حال میں ہے۔ $\psi = A\begin{bmatrix}3i\\4\end{bmatrix}$ (الف) ماسولزنی مستقل A تاین کریں۔

(ب) S_x, S_y, S_z کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ دیھان رہے کہ یہاں σ سے مراد میارِ انحراف ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جیئے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدمی کی نیت کے عین متابک ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ 1 کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول سدا spinor χ مساوات 139.4 کے لیے $S_x, S_y, S_z, S_x^2, S_y^2$ اور. S_z^2 تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$ ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor S_y کے امتیازی عدداد تلاش لریں۔ (ب) عمومی حال χ مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک زرے کے S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جئے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیھان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکیے ہیں۔ (ج) S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ r کے ہم رہ چکری زاویائی میارِ حرکت کے احزاء کا کالپ S_r تیار کریں۔ کروی محدد استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \tag{۴.۱۲۲}$$

S_r کی امتیازی عدداد اور معمور سداامتیازی spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\sin(\theta/2)\end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\\ -\cos(\theta/2)\end{bmatrix}; \tag{۴.۱۲۳}$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری جزضرب $e^{i\phi}$ سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہازا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک زرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ S_x, S_y اور S_z تیار کریں۔ اشعارہ S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر S_z, S_+ اور S_- کا عمل تاین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے استعمال کی گئی ترقیب استعمال کریں

۴.۳.۲ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹتے ہوئے بار بار زرا پر مقناطیسی جفد کتب مشتمل ہوگا۔ اس کا مقناطیسی جفد کتبی معیارِ اثر μ، زرے کی چکری زاویائی معیارِ حرکت S کو راست متناسب ہوگا۔

$$\mu = \gamma S \tag{۴.۱۲۴}$$

جہاں تناسبی مستقل γ مسقن مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفد کتب پر قوتِ مروڑ $\mu \times B$ عمل کرتا ہے۔ جو کمپس کی سوئی کی طرح اس کو میدان کے متوازج لانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس قوتِ مروٹ کے ساتھ وابستا توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\mu.B \tag{۴.۱۲۵}$$

لہازا مقناطیسی میدان B میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے زرے کا ہیملٹونیں درج زیل ہوگا۔

$$H = -\gamma B.S \tag{۴.۱۲۶}$$

سوال ۴.۱۸: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد $1/2$ چکر ذرات یکتا تنظیم ?? میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_a^{(1)}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{a}$ ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_b^{(2)}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{b}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں $\hat{a}$ اور $\hat{b}$ کے بیچ زاویہ θ ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta \tag{۴.۱۲۷}$$

سوال ۴.۱۹:

ا. کلیبش گورڈن عددی سروں کو $s_2 = anything s_1 = 1/2$ کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $|sm\rangle$ کا امتیازی حال ویکٹر S^2 ہو گا

$$|sm\rangle = A|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle|S_2(m-\frac{1}{2})\rangle + B|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle|S_2(m+\frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ $S_x^{(2)}$ مثلاً ویکٹر $|s_2 m_2\rangle$ پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2+1}}; B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2+1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتی ہیں۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجہ دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۲۰: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر کے ذرے کے لیے قالب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۲۱: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چکر کے قالبوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکری قالب تلاش کریں۔
جواب:

$$\boldsymbol{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \imath b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \imath b_s & 0 & -\imath b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \imath bs-1 & 0 & -\imath bs-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\imath b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \imath b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہوگا۔

سوال ۴.۲۲: کروی ہارمونیات کے لیے، ؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{\imath m\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر

میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجانڈر تفاعل کے تفرق کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1} - mxP_l^m \tag{۴.۱۲۸}$$

سوال ۴.۲۳: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi-)$$

ا. مداری زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) جز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیئر (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار z کے (S_z) جز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت کو $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ لیں۔

ھ. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہو گا؟

ح. آپ چکر کے z جز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۲۴:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلایا جا سکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہو گا

$$f(\phi+\varphi) \equiv e^{\frac{\imath L_z \varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا $L_z/\hbar$ کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\boldsymbol{L}.\hat{n}/\hbar$ ہو گا جو $\hat{n}$ کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی $e^{(i\boldsymbol{L}.\hat{n}\varphi/\hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}/\hbar$ ہو گا بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{\imath(\sigma.\hat{n})\varphi/2}\chi \tag{۴.۱۲۹}$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور $x - axis$ کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) قالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور $y - axis$ کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا قالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہو گا؟

د. محور $z - axis$ کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ہ. درج ذیل دکھائیں

$$e^{\imath(\sigma.\hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + \imath(\hat{n}.\sigma)\sin(\varphi/2) \tag{۴.۱۳۰}$$

سوال ۴.۲۵: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی تبادلی رشتے (مساوات 99.4) امتیازی اقدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہو گا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جس کا بعد لمبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = \imath\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ تبادلی رشتوں کو $q's$ اور $p's$ مطمئین کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2 - q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کمیت $m = \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega = 1$ ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی H کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی مرتعش کے ہیملٹنی کی امتیازی اقدار $(n + 1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ہو گا (حصہ ?? کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ تبادلی رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازماً عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۲۶: عمومی حال مساوات 139.4 می 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $|\langle S_z\rangle|(\hbar/2) \geq \sigma_{S_x}\sigma_{S_y}$ میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہو گی b خالف حقیقی یا خالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۲۷: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا ؟؟؟؟ q ہو اور جو مقناطیسی میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۳۱}$$

اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{۴.۱۳۲}$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \tag{۴.۱۳۳}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مخفی قوہ $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ اور φ غیر سمتی مخفی قوہ $(\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ ہیں لہٰذا شروڈنگر مساوات میں باضابطہ متبادل $(\boldsymbol{p} \rightarrow ((\hbar/\imath)\nabla))$ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{\imath}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi]\psi \tag{۴.۱۳۴}$$

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\rangle \tag{۴.۱۳۵}$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle \boldsymbol{r}\rangle/dt$ کو $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle v\rangle}{dt} = q\langle\boldsymbol{E}\rangle + \frac{q}{2m}\langle(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{p})\rangle - \frac{q^2}{m}\langle(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\rangle \tag{۴.۱۳۶}$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle\boldsymbol{v}\rangle}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \langle\boldsymbol{v}\rangle \times \boldsymbol{B}), \tag{۴.۱۳۷}$$

اس طرح $\langle\boldsymbol{v}\rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ ؟؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال۴.۲۸: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B_0}}{2}(x_{\hat{j}} - y_{\hat{i}})$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیت m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{۴.۱۳۸}$$

جہاں $\omega_1 = q\boldsymbol{B_0}/m$ اور $\omega_2 \equiv \sqrt{2q\boldsymbol{K}\mathrm{m}}$ ہوگا۔ تبصرہ: $\boldsymbol{K} = 0$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مماثل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ اجازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال۴.۲۹: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوہ $\boldsymbol{A}$ اور φ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جا سکتے ہیں، طبعی مقداریں میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوہ

$$\varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۴.۱۳۹}$$

(جہاں مقام اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان φ اور $\boldsymbol{A}$ دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گیج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایا یہ نظریہ گیج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$\Psi' \equiv e^{\imath q\Lambda/\hbar}\Psi \tag{۴.۱۴۰}$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گیج تبادلہ مخفی قوہ φ' اور $\boldsymbol{A}$ لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ ایک ہی طبعی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

جوابات

فرهنگ