کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۹ اپریل ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ v

۱ تفاعل موج ۱
۱.۱ شروڈنگر مساوات ۱
۱.۲ شماریاتی مفہوم ۲
۱.۳ احتمال ۴
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات ۴
۱.۳.۲ استمراری متغیرات ۸
۱.۴ معمول زنی ۱۰
۱.۵ معیار حرکت ۱۳
۱.۶ اصول عدم یقینیت ۱۶

۲ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ۱۹
۲.۱ ساکن حالات ۱۹
۲.۲ لامتناہی چکور کنواں ۲۵
۲.۳ ہارمونی مرتعش ۳۴
۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب ۳۵
۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب ۴۴
۲.۴ آزاد ذرہ ۵۰
۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ ۵۸
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات ۵۸
۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں ۵۹
۲.۶ متناہی چکور کنواں ۶۷

۳ قواعد و ضوابط ۷۷
۳.۱ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل ۷۷
۳.۱.۱ غیر مسلسل طیف ۷۷
۳.۱.۲ استمراری طیف ۷۹

۴ تین ابعادی کوانٹم میکانیات ۸۹
۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر ۸۹
۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات ۹۱
۴.۱.۲ زاویائی مساوات ۹۲
۴.۱.۳ رداسی مساوات ۹۷
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر ۱۰۱
۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج ۱۰۲
۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف ۱۱۲
۴.۳ زاویائی معیار حرکت ۱۱۴
۴.۳.۱ امتیازی اقدار ۱۱۵

۵ متماثل ذرات ۱۱۷

۶ غیر تابع وقت نظریہ اضطراب ۱۱۹

۷ تغیری اصول ۱۲۱

۸ وکب تخمین ۱۲۳

۹ تابع وقت نظریہ اضطراب ۱۲۵

۱۰ حرارت ناگزر تخمین ۱۲۷

۱۱ بکھراو ۱۲۹

۱۲ پس نوشت ۱۳۱

جوابات ۱۳۳

باب ۳

قواعد و ضوابط

۳.۱ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہرمشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبعی طور پر قابل مشاہدہ کے تعیین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف **غیر مسلسل**[1] ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف **استمراری**[2] ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً متناہی چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ در حقیقت یہ متناہی ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۱.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہرمشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

---

[1] discrete
[2] continuous

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو(یعنی $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی قدر q ہو) اور [۳]

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$$

ہو($\hat{Q}$ ہرمشی ہے)۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$q\langle f\,|f\,\rangle = q^*\langle f\,|f\,\rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہٰذا اس کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات 6.3) لہٰذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہو گا)۔ تاہم $\langle f|f\rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہٰذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہو گا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعیین حال میں ایک ذرہ کی قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: انفرادی امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$q'\langle f|g\rangle = q^*\langle f|g\rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے۔) اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہٰذا $q \neq q'$ کی صورت میں $\langle f|g\rangle = 0$ ہو گا۔

□

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی مرتعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعیین حالات کی بھی ہو گی۔

[۳] یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

بدقسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انحطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیسا) امتیازی قدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قدر والا امتیازی حال ہو گا (سوال 7a.3) اور ہم **گرام شمد ترکیب عمودیت**[۴] (سوال A4) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولی طور پر ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہو گا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹم میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

متناہی بعدی سمتی فضا میں ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے)۔ بدقسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹم میکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہٰذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہرمشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔[۵]

سوال ۳.۱:

ا. فرض کریں کہ عامل $\hat{Q}$ کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ از خود $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل ہو گا اور اس کا امتیازی قدر q ہو گا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^{x}$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک دوسرے جیسا ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۲:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہرمشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

۳.۱.۲ استمراری طیف

ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہٰذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔

---

[۴] Gram-Schmidt orthogonalization process

[۵] چند مخصوص صورتوں میں کملیت کو ثابت کیا جا سکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں قابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پراسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہو گا۔

مثال ۱.۳: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی قدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x)=pf_p(x) \tag{۳.۱}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f_p(x)=Ae^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ قابل تکامل مربع نہیں ہے؛ معیار حرکت عامل کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی اقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل "معیاری عمودیت" حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_{p'}^*(x)f_p(x)\,\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(p-p')x/\hbar}\,\mathrm{d}x=|A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p') \tag{۳.۲}$$

اگر ہم $A=1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$f_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar} \tag{۳.۳}$$

لہٰذا

$$\langle f_{p'}|f_p\rangle=\delta(p-p') \tag{۳.۴}$$

ہو گا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۴.۳ کو **ڈیراک معیاری عمودیت**[۶] کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب تکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (قابل تکامل مربع) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)f_p(x)\,\mathrm{d}p=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}c(p)e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \tag{۳.۵}$$

---

[۶] Dirac orthonormality

پھیلاو عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہوگا) کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle f_{p'}|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p)\langle f_{p'}|f\rangle \,\mathrm{d}p = \int_{\infty}^{\infty} c(p)\delta(p-p')\,\mathrm{d}p = c(p') \tag{۳.۶}$$

چونکہ یہ پھیلاو (مساوات ۳.۵) درحقیقت ایک فوریئر تبادل ہے لہٰذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳) سائن نما ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{۳.۷}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعیین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۱ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ $\hat{p}$ کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) قریبی "مضافات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا ایک بعدی بکھراو پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔[7]

مثال ۳.۲: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی قدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$xg_y(x) = yg_y(x) \tag{۳.۸}$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $x = y$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x-y)$$

[7] غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ یہ نا صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے قابو بڑھتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں "مضافات" کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (متناہی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا $\hat{p}$ کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہرمشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک f ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل $\hat{p}$ کا امتیازی قدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہرمشی عامل $\hat{p}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں $\hat{p}$ ہرمشی ہو۔

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہو گا؛ امتیازی تفاعلات قابل تکامل مربع نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^{*} g_y(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y')\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = |A|^2\delta(y-y') \tag{۳.۹}$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تا کہ

$$g_y(x) = \delta(x-y) \tag{۳.۱۰}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\langle g_{y'}|g_y\rangle = \delta(y-y') \tag{۳.۱۱}$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{۳.۱۲}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$c(y) = f(y) \tag{۳.۱۳}$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریئر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہٰذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب تکمل ہو گا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۳:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی مرتعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (متناہی چکور کنواں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۴: کیا لامتناہی چکور کنواں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

سوال ۳.۵: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau/\pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x,0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x,t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کا تفاعل موج $\Psi(x,0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۶: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں قالبی ارکان $\langle n|x|n'\rangle$ اور $\langle n|p|n'\rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں قالبی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامتناہی) قالب $\mathbf{X}$ اور $\mathbf{P}$ تشکیل دیں۔ دکھائیں کہ اس اساس میں $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$ وتری ہو گا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟
جزوی جواب:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) \tag{۳.۱۴}$$

سوال ۳.۷: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک دوسرے جتنے احتمال کے ساتھ، $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p\rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۸: 3-35
ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات $|n\rangle = \psi_n(x)$ مساوات 67.2 میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$ پر بیٹھتا ہے جیسا آپ سوال 12.3 میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x\sigma_p = (2n+1)\hbar/2$ ہو گا۔ تاہم چند خطی جوڑ جنہیں منطقی حالات کہتے ہیں بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتے ہیں جیسا ہم دیکھتے ہیں یہ عامل سے تکیل کے امتیازی تفاعل ہوتے ہیں۔

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{۳.۱۵}$$

جہاں امتیازی α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔
جز الف
حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ دریافت کریں۔ مثال 5.2 کی ترکیب استعمال کیں۔ اور یاد رکھیں کہ a_- منفی کا پرمشی جوڑی دار a_+ ہے ساتھ ہی یہ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہے۔
جز (ب)
σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma x\sigma p = \hbar/2$ ہو گا۔
جز (ج)
کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح منطقی حال کو توانائی امتیازی حالات کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \tag{۳.۱۶}$$

رکھائیں کہ پھیلاو کے عددی سر درج ذیل ہونگے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \tag{۳.۱۷}$$

جز(د)
$|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب $\exp(-|\alpha|^2/2)$
جز(ح)
اس کے ساتھ وقت کی تابعیت

$$|n\rangle \to e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle \tag{۳.۱۸}$$

منسلک کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی $a-$ کا امتیازی حال ہوگا لیکن وقت کے ساتھ امتیازی قیمت ارتقا پزیر ہوگا

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha \tag{۳.۱۹}$$

یوں منطقی حال ہمیشہ منطقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو تم سے کم برقرار رکھا ہے۔
جز(و) کیا زمینی حال $|n=0\rangle$ از خود منطقی حال ہے اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہوگا

سوال ۳.۹: 36.3
مقصود عدم یقینیت کا اصول:
عمومی عدم یقینیت کا اصول مساوات 62.3 درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}\langle C^2\rangle \tag{۳.۲۰}$$

جہاں

$$\hat{C} \equiv i[\hat{A}, \hat{B}] \tag{۳.۲۱}$$

ہے
جز الف
دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم کرتے ہوئے درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}(\langle C\rangle^2 + \langle D\rangle^2) \tag{۳.۲۲}$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{AB} + \hat{BA} + 2\langle A\rangle\langle B\rangle$ ہو گا
اشارہ: مساوات 60.3 میں $\mathrm{Re}(z)$ اجزاء لیں
ب)
مساوات 99.3 کو A=B کے لیئے جانچیں چونکہ اس صورت میں C=0 ہے لہذا معیاری عدم یقینیت غیر اہم ہو گا
بد قسمتی سے مقصود عدم یقینیت کا اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا

سوال ۳.۱۰: 37.3:
ایک نظام جو 3 صدی ہے کہ ہیملٹنین کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \tag{۳.۲۳}$$

جہاں c اور ba, حقیقی اعداد ہیں۔
ا) اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳.۲۴}$$

تب $\delta(t)$ کیا ہو گا؟
ب) اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۳.۲۵}$$

تب δt کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۱: 38.3:
ایک نظام جو 3 صدی ہے کہ ہیملٹونین کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے:

$$\mathrm{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{۳.۲۶}$$

دیگر دو قابل مشاہدہ B اور A کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۳.۲۷}$$

جہاں ω, λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔
AH، اور B کی امتیازی اقدار اور معمول پر لائے گئے امتیازی تفاعل تلاش کریں۔
ب) یہ نظام کسی عمومی حال

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{۳.۲۸}$$

سے ابتداء کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔
لمحہ t=0 پر B اور A, کی H توقعاتی قیمت تلاش کریں۔
ج) $\delta(s)$ کیا ہو گا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے؟ اور ہر ایک کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ اسی سوال کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۲: 39.3: ا) ایک تفاعل $f(x)$ جس کو Taylor تسلسل کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں:

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x) \tag{۳.۲۹}$$

جہاں x_0 کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے۔ اسی وجہ کے بنا $\hat{p}/\hbar$ کو فضا میں انتقال کا پیدا کار کہتے ہیں۔ یہاں دیہان رہے کہ ایک عامل کی قوت نمائی کی قوتی تسلسلی پھیلاؤ کی تعریف درج ذیل ہے
$e^{\hat{Q}} = 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$
ب) اگر $\Psi(x, t)$ وقت تابع schrodinger مساوات کو مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} \Psi(x, t) \tag{۳.۳۰}$$

جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو گا۔ اسی وجہ کی بنا $-\hat{H}/\hbar$ وقت میں انتقال کا پیدا کار کہتے ہے۔
ج) دکھائیں کے لمحہ $t + t_0$ پر ہر کی متغیر Q کی توقعاتی قیمت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0 e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle \tag{۳.۳۱}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 3-71 حاصل کریں۔
اشارہ: $t_0 = \mathrm{d}t$ لیتے ہوئے dt میں پہلے رتبے تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۱۳: 3-40:
ا) ایک آزاد ذرہ کے لیے وقت تابع schrodinger مساوات کو معیار حرکت فضاء میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:
$(\exp(-ip^2t/2m\hbar)\Phi(p,0$
ب) متحرک گاسی موجی اکٹ سوال 2-43 کے لئے $\Phi(p,0)$ تلاش کریں اور $\Phi(p,t)$ تیار کریں۔ ساتھ ہی $\left|\Phi(p,t)\right|^2$ تیار کریں۔ اب دیکھیں گے کہ یہ وقت کا تابع نہیں ہوگا۔
ج) Φ پر مبنی موضوع تکملات حل کرتے ہوے $\langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ تلاش کر کے سوال 2-43 کی حاصل کردہ جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔
د) دکھائیں کے $\langle H\rangle = \langle p\rangle^2/2m + \langle H\rangle_0$ ہوگا جہاں زیر نوشت میں 0 ساکن گاسی کو ظاہر کرتا ہے اور اپنے نتیجے پہ تبصرہ کریں۔

جوابات