کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

ضمیمہ ا

ضمیمہ

خطی الجبرا

کالج کی سطح پر پڑھائے جانے والے سادہ سمتیات کے حساب کو خطی الجبرا تصوراتی جامع پہناتا اور عمومیت دیتا ہے۔ عمومیت دو رخوں میں دی جاتی ہے: (1) ہم غیر سمتیات کو مخلوط اعداد ہونے کی اجازت دیتے ہیں، اور (2) ہم اپنے آپ کو تین ابعاد میں رہنے کا پابند نہیں رکھتے۔

ا.ا سمتیات

سمتیات $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، . . . کے سلسلہ اور **غیر سمتیات** (a ، b ، c ، . . .)[1] کے سلسلہ پر **سمتی فضا**[2] مشتمل ہو گا جو سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کے زیر عمل **بند**[3] ہو گا۔[4]

- **سمتی جمع**

کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ بھی سمتیہ ہو گا۔

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \tag{۱}$$

[1] ہمارے مقصد کے لئے غیر سمتیات سادہ مخلوط اعداد ہوں گے۔ ریاضی دان آپ کو زیادہ پر اسرار میدانوں پر سمتی فضاؤں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، تاہم ان کا کوانٹائی میکانیات میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ یاد رہے کہ α ، β ، γ ، . . . (عموماً) اعداد نہیں ہوں گے؛ یہ نام ہوں گے، مثلاً "جمشید"، یا "F43A-9GL"، یا، زیر غور سمتیہ کو جو بھی آپ پکارنا چاہیں۔

[2] vector space

[3] closed

[4] یعنی یہ اعمال پوری طرح معین ہیں، اور کبھی بھی آپ کو سمتی فضا سے باہر منتقل نہیں کریں گے۔

سمتی مجموعہ **استبدالی**[۵]:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle \tag{۲}$$

اور **تلازمی**[۶]:

$$|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle \tag{۳}$$

ہے۔ ایک **معدوم**[۷] (یا **صفر**[۸]) سمتیہ $|0\rangle$ پایا جاتا ہے[۹] جو ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لئے درج ذیل خاصیت رکھتا ہے

$$|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle \tag{۴}$$

اور ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کا شریک **مخالف سمتیہ**[۱۰] ($|-\alpha\rangle$)[۱۱] پایا جاتا ہے جو درج ذیل دیتا ہے۔

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۵}$$

- **غیر سمتی ضرب**

کسی بھی غیر سمتیہ اور سمتیہ کا حاصل ضرب:

$$a|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \tag{۶}$$

ایک سمتیہ ہو گا۔ غیر سمتی ضرب سمتی مجموعہ کے لحاظ سے **جزئیتی تقسیمی**[۱۲]

$$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle \tag{۷}$$

اور غیر سمتی جمع کے لحاظ سے بھی جزئیتی تقسیمی ہے۔

$$(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle \tag{۸}$$

یہ غیر سمتیات کے سادہ ضرب کے لحاظ سے **تلازمی** بھی ہے۔

$$a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle \tag{۹}$$

---

[۵] commutative
[۶] associative
[۷] null
[۸] zero
[۹] جہاں غلط فہمی کا امکان نہ ہو، وہاں روایتی طور پر معدوم سمتیہ کو سادہ صفر لکھا جاتا ہے: $|0\rangle \rightarrow 0$
[۱۰] inverse vector
[۱۱] یہ ایک انوکھی علامت ہے چونکہ α عدد نہیں۔ میں ایک سمتیہ جس کا نام "جمشید" ہے کے مخالف سمتیہ کو "جمشید-" کا نام دے رہا ہوں۔ کچھ ہی دیر میں ہم بہتر اصطلاح دیکھ پائیں گے۔
[۱۲] distributive

غیر سمتیات 0 اور 1 کے ساتھ ضرب آپ کی توقع کے مطابق نتائج دیں گے۔

$$1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle; \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۱۰}$$

ظاہر ہے $|-\alpha\rangle = (-1)|\alpha\rangle$ ہو گا جس کو ہم $-|\alpha\rangle$ لکھتے ہیں۔

یہاں جتنا نظر آ رہا ہے، حقیقتاً اتنا ہے نہیں؛ پس میں نے سمتیات کی جوڑ توڑ کے عام فہم قواعد کو تصوراتی روپ میں پیش کیا ہے۔ نتیجتاً دیگر نظام جو یہی باضابطہ خواص رکھتے ہوں پر ہم سادہ سمتیات کے رویّہ کے بارے میں معلوم علم اور وجدان بروئے کار لا سکیں گے۔

سمتیات $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، $\cdots$ کا **خطی مجموعہ**[13] درج ذیل روپ کا فقرہ ہو گا۔

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + \cdots \tag{۱۱}$$

ایک سمتیہ $|\lambda\rangle$ جس کو سلسلہ $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، $\cdots$ کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن نہ ہو **خطی غیر تابع**[14] کہلاتا ہے۔ (مثلاً، تین ابعاد میں اکائی سمتیہ $\hat{k}$ سمتیات $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا خطی غیر تابع ہے، جبکہ xy مستوی میں ہر سمتیہ $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا خطی تابع ہو گا۔) اسی کی توسّط سے، سمتیات کا وہ ذخیرہ جس میں ہر ایک سمتیہ باقی تمام سمتیات کا خطی غیر تابع ہو "خطی غیر تابع" کہلاتا ہے۔ جب ہر سمتیہ کو سمتیات کے ایک ذخیرہ کے ارکان کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو، ہم کہتے ہیں کہ سمتیات کا یہ ذخیرہ فضا کا **احاطہ**[15] کرتے[16] ہیں۔ فضا کا احاطہ کرنے والے خطی غیر تابع سمتیات کا سلسلہ **اساس**[17] کہلاتا ہے۔ اساس میں سمتیات کی تعداد فضا کا **بُعد**[18] کہلاتا ہے۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ بُعد (n) متناہی ہے۔

دیے گئے اساس

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle \tag{۱۲}$$

کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle \tag{۱۳}$$

کو اس اساس کے **ارکان** کی (مرتب) n اجزائی سلسلہ

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{۱۴}$$

---

[13] linear combination

[14] linearly independent

[15] span

[16] فضا کا احاطہ کرنے والے سمتیات کا سلسلہ **مکمل** (complete) بھی کہلاتا ہے، اگرچہ میں اس اصطلاح کو لامتناہی بُعد کی صورت کے لئے رکھتا ہوں جہاں ارتکاز پر سوالات اٹھائے جا سکتے ہیں۔

[17] basis

[18] dimension

سے یکتا طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ عموماً سمتیات کی بجائے ان اجزاء کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سمتیات جمع کرنے کے لئے ان کے مطابقتی اجزاء آپس میں جمع کئے جاتے ہیں:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \tag{۱۵}$$

غیر سمتیہ سے ضرب کے لئے ہر جزو کو اس غیر سمتیہ سے ضرب کریں:

$$c|\alpha\rangle \leftrightarrow (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) \tag{۱۶}$$

معدوم سمتیہ کو صفروں کی ایک کھڑی ظاہر کرتی ہے:

$$|0\rangle \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0) \tag{۱۷}$$

اور مخالف سمتیہ کے ارکان کی علامتیں الٹ کی جاتی ہیں۔

$$|-\alpha\rangle \leftrightarrow (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \tag{۱۸}$$

ارکان کے ساتھ کام کرنے کی واحد قباحت یہ ہے کہ آپ کو کسی ایک مخصوص اساس کے ساتھ کام کرنا ہو گا، اور یہی حسابی عمل کسی دوسری اساس میں بالکل مختلف نظر آئے گا۔

سوال ا.ا: مخلوط اجزاء والے تین ابعادی سادہ سمتیات $(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})$ پر غور کریں۔

ا کیا وہ ذیلی سلسلہ جس میں تمام سمتیات کے لئے $a_z = 0$ ہو سمتی فضا قائم کرتے ہیں؟ اگر کرتا ہو تب اس کا بُعد کیا ہو گا؛ اگر نہیں کرتا تو کیوں نہیں کرتا؟

ب اس ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے جن کا z جزو 1 کے برابر ہو؟ اشارہ: کیا ایسے دو سمتیات کا مجموعہ اسی ذیلی سلسلہ میں پایا جائے گا؟ معدوم سمتیہ کے بارے میں سوچیں؟

ج ان سمتیات کے ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جن کے تمام ارکان برابر ہوں؟

سوال ا.۲: ان تمام کثیر رکنیوں، (جن کے عددی سر مخلوط ہوں اور) جن کا x میں درجہ N سے کم ہو کے ذخیرہ پر غور کریں۔

ا کیا یہ سلسلہ سمتی فضا قائم کرتا ہے (جہاں کثیر رکنیاں بطور "سمتیات" ہوں)؟ اگر فضا قائم کرتا ہو تو مناسب اساس تجویز کریں اور اس فضا کا بُعد بتائیں۔ اگر فضا قائم نہ کرتا ہو تو تعریفی خصوصیات میں سے کونسی اس میں نہیں پائی جاتی (جاتیں)؟

ب اگر ہم چاہیں کہ تمام کثیر رکنیاں جفت تفاعلات ہوں تب کیا ہو گا؟

ج اگر ہم چاہیں کہ پہلا عددی سر (جو x^{N-1} کو ضرب کرتا ہے) 1 ہو تب کیا ہو گا؟

د اگر ہم چاہیں کہ $x = 1$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت 0 ہو تب کیا ہو گا؟

ھ اگر ہم چاہیں کہ $x = 0$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت 1 ہو تب کیا ہو گا؟

سوال ۱.۳: ثابت کریں کہ کسی بھی ایک اساس کے لحاظ سے سمتیہ کے ارکان یکتا ہوں گے۔

۱.۲ اندرونی ضرب

تین ابعاد میں دو اقسام کے سمتی ضرب پائے جاتے ہیں: نقطی ضرب اور صلیبی ضرب۔ موخر الذکر کی قدرتی توسیع کسی طرح بھی n ابعادی سمتی فضاوں میں نہیں کی جا سکتی، جبکہ اول الذکر کی کی جا سکتی ہے؛ اور اس سیاق و سباق میں اسے عموماً **اندرونی ضرب**[19] پکارا جاتا ہے۔ دو سمتیات ($|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$) کا اندرونی ضرب ایک مخلوط عدد ہو گا جسے $\langle\alpha|\beta\rangle$ لکھا جاتا ہے اور جس کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \tag{۱۹}$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad \text{اور} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \leftrightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۲۰}$$

$$\langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle \tag{۲۱}$$

مخلوط اعداد تک عمومیت کے علاوہ یہ مسلمات نقطی ضرب کے جانے پہچانے رویوں کو ریاضی کی زبان میں پیش کرتے ہیں۔ ایسی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب بھی شامل ہو **اندرونی ضرب فضا**[20] کہلاتی ہے۔

چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ اندرونی ضرب غیر منفی عدد ہے (مساوات ۲۰) لہٰذا اس کا جذر حقیقی ہو گا؛ جو سمتیہ کا **معیار**[21] کہلاتا ہے:

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} \qquad \text{معیار} \tag{۲۲}$$

اور جو "لمبائی" کے تصور کو وسعت دیتا ہے۔ **اکائی سمتیہ**[22] (جس کا معیار 1 ہو گا) **معمول شدہ**[23] کہلاتا ہے۔ دو سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر ہو **قائمہ**[24] کہلاتے ہیں (جو "سیدھا کھڑا" ہونے کے تصور کو عمومیت دیتا ہے)۔ باہمی قائمہ معمول شدہ سمتیات:

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} \tag{۲۳}$$

کے ذخیرہ کو **معیاری عمودی سلسلہ**[25] کہتے ہیں۔ معیاری عمودی اساس ہر صورت منتخب کیا جا سکتا ہے (سوال ۱.۴ دیکھیں) اور ایسا کرنا عموماً بہتر بھی ثابت ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو انکے اجزاء کے روپ میں نہایت خوبصورتی سے لکھا جا سکتا ہے:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_n^* b_n \tag{۲۴}$$

---

[19] inner product
[20] inner product space
[21] norm
[22] unit vector
[23] normalized
[24] orthogonal
[25] orthonormal set

لہٰذا معیار کا مربع

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 \quad (۲۵)$$

ہو گا جبکہ اجزاء از خود درج ذیل ہوں گے۔

$$a_i = \langle e_i|\alpha\rangle \quad (۲۶)$$

(یہ نتائج تین ابعادی معیاری عمودی اساس $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ کے مشہور کلیات $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، $|\boldsymbol{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ اور $a_x = \hat{i}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_y = \hat{j}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_z = \hat{k}\cdot\boldsymbol{a}$ کو عمومیت دیتے ہیں۔) یہاں سے آگے ہم صرف معیاری عمودی اساس استعمال کریں گے، ماسوائے جب صریحاً ایسا نہ کرنے کا کہا گیا ہو۔

دو سمتیات کے بیچ زاویہ ایسی ہندسی مقدار ہے جس کو ہم عمومیت دینا چاہیں گے۔ سادہ سمتی تجزیہ میں $\cos\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ہے۔ اب اندرونی ضرب عموماً مخلوط عدد ہو گا، لہٰذا (اختیاری اندرونی ضرب فضا میں) مماثل کلیہ (حقیقی) زاویہ θ نہیں دیگا۔ تاہم، اس مقدار کی مطلق قیمت ایسا عدد ہو گا جو 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔

$$\left|\langle\alpha|\beta\rangle\right|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \quad (۲۷)$$

(اس اہم نتیجہ کو **شوارز عدم مساوات**[۲۶] کہتے ہیں؛ جس کا ثبوت سوال ا.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں، آپ چاہیں تو، $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے بیچ زاویہ کی تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle}} \quad (۲۸)$$

سوال ا.۴: فرض کریں آپ اساس $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle)$ سے آغاز کرتے ہیں جو معیاری عمودی نہیں ہے۔ اس سے معیاری عمودی اساس $(|e_1'\rangle, |e_2'\rangle, \ldots, |e_n'\rangle)$ گرہم شمڈ حکمت عملی سے حاصل کی جا سکتی ہے جو ایک منظم ترکیب ہے۔ یہ کچھ یوں ہے

(الف) پہلی اساس سمتیہ کی معمولزنی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے کریں

$$|e_1'\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

(ب) پہلی سمتیہ پر دوسرے سمتیہ کے ظل کو دوسری سمتیہ سے منفی کریں

$$|e_2\rangle - \langle e_1'|e_2\rangle|e_1'\rangle$$

[۲۶] Schwarz inequality

یہ سمتیہ $|e_1'\rangle$ کا عمودی ہوگا۔

سوال ۱.۵: شوارز عدم مساوات ثابت کریں۔ اشارہ: $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle/\langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$ اور $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ استعمال کریں۔

سوال ۱.۶: سمتیات $|\alpha\rangle = (1+i)\hat{\imath} + (1)\hat{\jmath} + (i)\hat{k}$ اور $|\beta\rangle = (4-i)\hat{\imath} + (0)\hat{\jmath} + (2-2i)\hat{k}$ کے بیچ مساوات $A.28$ کی معنوں میں زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۷: تکونی عدم مساوات $\|(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ ثابت کریں۔

۱.۳ قوالب

فرض کریں آپ تین فضا میں ہر سمتیہ کو 17 سے ضرب دیں یا ہر سمتیہ کو z محور کے گرد $39°$ گھمائیں یا xy مستوی میں ہر سمتیہ کا عکس لیں یہ تمام خطی تبادلہ کی مثالیں ہیں خطی مبدل $\hat{T}$ ایک سمتی فضا میں ہر ایک سمتیہ کا کسی دوسرے سمتیہ $(|\alpha\rangle \to |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle)$ میں تبادلہ

$$\hat{T}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a(\hat{T}|\alpha\rangle) + b(\hat{T}|\beta\rangle) \tag{۲۹}$$

کرتا ہے جہاں کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ اور غیر سمتیات a, b کے لئے یہ عمل خطی ہوگا۔

یہ جانتے ہوئے کہ اساس سمتیات کے سلسلہ کو کوئی خطی مبدل کیا کرتا ہے آپ با آسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ وہ کسی بھی سمتیہ کے ساتھ کیا کرے گا۔ مثال کے طور پر

$$\begin{aligned}
\hat{T}|e_1\rangle &= T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle \\
\hat{T}|e_2\rangle &= T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle \\
&\cdots \\
\hat{T}|e_n\rangle &= T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle
\end{aligned}$$

یا مختصراً

$$\hat{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} T_{ij}|e_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{۳۰}$$

اگر $|\alpha\rangle$ ایک اختیاری سمتیہ

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_2|e_2\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j|e_j\rangle \tag{۳۱}$$

ہو۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\hat{T}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\hat{T}|e_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_j T_{ij}|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j\right)|e_i\rangle \tag{۳۲}$$

ظاہر ہے کہ $\hat{T}$ ایک سمتیہ کو جس کے ارکان $a_1, a_2, \dots, a_n$ ہوں کو ایک نئے سمتیہ میں لے جاتا ہے جن کے ارکان درج ذیل ہونگے

$$a_i' = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j \tag{۳۳}$$

یوں جس طرح کسی اساس کے لحاظ سے n ارکان a_i سمتیہ یا $|\alpha\rangle$ کو یکتا ظاہر کرتے ہیں اسی طرح T_{ij} کے n^2 ارکان خطی مبدل $\hat{T}$ کو اسی اساس کے لحاظ سے یکتا طور پر بیان کرتے ہیں۔

$$\hat{T} \leftrightarrow (T_{11}, T_{12}, \dots, T_{nn}) \tag{۳۴}$$

اگر اساس معیاری عمودی ہو مساوات $A.30$ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$T_{ij} = \langle e_i|\hat{T}|e_j\rangle \tag{۳۵}$$

ان مخلوط اعداد کو قالب کے روپ میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

یوں خطی مبدل کا مطالعہ محض قوالب کے نظریہ کا مطالعہ ہو گا دو خطی مبدل کا مجموعہ $(\hat{S} + \hat{T})$ کی تعریف ہماری توقع کے عین مطابق درج ذیل ہے

$$(\hat{S}+\hat{T})|\alpha\rangle = \hat{S}|\alpha\rangle + \hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۷}$$

جو قوالب جمع کرنے کے مترادف ہے جہاں آپ انکے مطابقتی ارکان جمع کرتے ہیں

$$U = S + T \leftrightarrow U_{ij} = S_{ij} + T_{ij} \tag{۳۸}$$

دو خطی مبدل کا حاصل ضرب $(\hat{S}\hat{T})$ پہلے $\hat{T}$ اور اسکے بعد $\hat{S}$ عمل کرنے کے مترادف ہے

$$|\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle; \quad |\alpha''\rangle = \hat{S}|\alpha'\rangle = \hat{S}(\hat{T}|\alpha\rangle) = \hat{S}\hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۹}$$

مجموعی مبدل $\hat{U} = \hat{S}\hat{T}$ کو کونسا قالب U ظاہر کرے گا؟ اسے حاصل کرنا مشکل نہیں ہے

$$a_i'' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} T_{jk} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} T_{jk} \right) a_k = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} a_k$$

بظاہر درج ذیل ہو گا

$$U = ST \leftrightarrow U_{ik} = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} T_{jk} \tag{۴۰}$$

یہ قوالب ضرب کرنے کا رائج طریقہ ہے آپ S کے i ویں صف کو اور T کے k ویں قطار کو لیکر انکے مطابقتی اندراجات کا آپس میں ضرب لیکر تمام کو جمع کرتے ہیں اسی طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل قوالب کو آپس میں ضرب کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ پہلے میں قطاروں کی تعداد دوسرے میں صفوں کی تعداد کے برابر ہو۔ بلخصوص $|\alpha\rangle$ کے ارکان کا n اجزائی سلسلہ کو $n \times 1$ قطاری قالب یا قطاری سمتیہ

$$a \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{۴۱}$$

لکھ کر مبادلہ کے قائدہ کو قالبی حاصل ضرب

$$a' = Ta \tag{۴۲}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

آئیں اب قالبی اصطلاحات سیکھیں: ایک قالب کا تبدیل محل جس کو ہم اعراب کے ساتھ لکھتے ہیں $\tilde{T}$ ٹلڈا انہی ارکان پر مشتمل ہوتا تاہم اس میں صف اور قطار آپس میں تبدیل ہوتے ہیں۔ بلخصوص قطاری قالب کا تبدیل محل صف قالب ہو گا

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{۴۳}$$

چوکور قالب کے مرکزی وتر بالائی بائیں سے زیریں دائیں میں عکس اس کا تبدیل محل ہو گا

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \dots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۴۴}$$

ایسا چوکور قالب جو اپنے تبدیل محل کے برابر ہو تشاکلی ہو گا اگر تبدیل محل کی علامت الٹ ہو تب یہ خلاف تشاکلی ہو گا

$$\tilde{T} = T \text{تشاکلی}; \quad \tilde{T} = -T \text{خلاف تشاکلی} \tag{۴۵}$$

ہر رکن کا مخلوط جوڑی دار لینے سے قالب کا مخلوط جوڑی دار جس کو ہم ہمیشہ کی طرح ستارہ سے ظاہر کرتے ہیں حاصل ہو گا

$$T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & \dots & T_{1n}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \dots & T_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}^* & T_{n2}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad a^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۶}$$

تمام ارکان حقیقی ہونے کی صورت میں قالب حقیقی ہو گا اور تمام خیالی ہونے کی صورت میں خیالی ہو گا

$$T^* = T \text{حقیقی}; \quad T^* = -T \text{خیالی} \tag{۴۷}$$

ایک قالب کا تبدیل محل جوڑی دار اس کا ہرمیشی جوڑی دار یا شریق قالب جسے خنجر سے ظاہر کیا جاتا ہے ہو گا

$$T^\dagger \equiv \tilde{T}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & \dots & T_{n1}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* & \dots & T_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n}^* & T_{2n}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad a^\dagger \equiv \tilde{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۸}$$

اگر ایک چکور قالب اپنے ہرمیشی جوڑی دار کے برابر ہو ہرمیشی یا خود شریق قالب ہو گا اگر ہرمیشی جوڑی دار منفی علامت متعارف کرتا ہو قالب منحرف ہرمیشی یا خلاف ہرمیشی ہو گا

$$T^\dagger = T \text{ہرمیشی}; \quad T^\dagger = -T \text{منحرف ہرمیشی} \tag{۴۹}$$

اس علامتیت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو کسی معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے نہایت خوبصورتی کے ساتھ قالبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\langle \alpha | \beta \rangle = a^\dagger b \tag{۵۰}$$

دیہان رہے کہ اس رکوع میں متعارف تینوں اعمال کا دو مرتبہ اطلاق کرنے سے واپس اصل قالب حاصل ہوتا ہے۔ عام طور پر قالبی ضرب غیر مقلبی $ST \neq TS$ ہو گا ضرب لکھنے کے دونوں طریقوں کے بیچ فرق کو مقلب کہتے ہیں

$$[S, T] \equiv ST - TS \tag{۵۱}$$

حاصل ضرب کا تبدیل محل الٹ ترتیب میں تبدیل محلوں کا حاصل ضرب ہو گا

$$(\widetilde{ST}) = \tilde{T}\tilde{S} \tag{۵۲}$$

اور یہی کچھ ہرمیشی جوڑی دار کے لئے بھی درست ہو گا

$$(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger \tag{۵۳}$$

اکائی قالب خطی تبادلہ کو ظاہر کرتا ہے جو ہر سمتیہ کو اپنے میں ہی لے جاتا ہے مرکزی وتر پر ایک اور باقی تمام ارکان صفر پر مشتمل ہوتا ہے

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{۵۴}$$

دوسرے لفظوں میں درج ذیل ہو گا

$$I_{ij} = \delta_{ij} \tag{۵۵}$$

چوکور قالب کا معکوس جسے T^{-1} لکھا جاتا ہے کی تعریف ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گی

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I \tag{۵۶}$$

ایک قالب کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب سکا مقطع غیر صفر ہو در حقیقت

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\tilde{C} \tag{۵۷}$$

ہو گا۔ جہاں ہم ضربیوں کا قالب C ہے رکن T_{ij} کا ہم ضربی $(-1)^{i+j}$ ضرب اس ذیلی قالب کے مقطع کا حاصل ضرب ہو گا جو T کے i ویں صف اور j ویں قطار کو مٹانے سے حاصل ہو گا۔ ایسا قالب جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نادر کہلاتا ہے۔ حاصل ضرب کا معکوس اگر موجود ہو انکی معکوسوں کا الٹ نظم میں حاصل ضرب ہو گا

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \tag{۵۸}$$

ایسا قالب جس کا معکوس اس کے ہرمیشی جوڑی دار کے برابر ہو اکہرا کہلاتا ہے

$$U^\dagger = U^{-1} \text{اکہرا} \tag{۵۹}$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اساس معیاری عمودی ہے اکہرا قالب کے قطار معیاری عمودی سلسلہ قائم کرتے ہیں اور اس کے صف بھی ایسا ہی کرتے ہیں مساوات $A.50$

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = a'^\dagger b' = (Ua)^\dagger(Ub) = a^\dagger U^\dagger U b = a^\dagger b = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{۶۰}$$

کی بدولت ایسے خطی تبادلہ جنہیں اکہرا قوالب ظاہر کرتے ہیں اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔ سوال ا.۸: درج ذیل قوالب لیتے ہوئے

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

درج ذیل کا حساب لگائیں: (الف) $A + B$ ، (ب) AB ، (ج) $[A, B]$ ، (د) $\tilde{A}$ ، (ہ) A^* ، (و) $A^\dagger$ ، (گ) $\det(B)$ ، (ح) B^{-1} ۔ دیکھائیں کہ $BB^{-1} = I$ ہے۔ کیا A کا معکوس موجود ہے؟

سوال ا.۹: قابلی قوالب

$$a = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix}$$

اور سوال $A.8$ میں مستعمل چکور قالب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں:

(الف) Aa

(ب) $a^\dagger b$

(ج) $\tilde{a}Bb$

(د) $ab^\dagger$

سوال ا.۱۰: درج ذیل میں صریحاً قوالب تیار کرتے ہوئے دیکھائیں کہ کسی بھی قالب T کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

(الف) تشاکلی قالب S اور خلاف تشاکلی قالب A کا مجموعہ۔

(ب) حقیقی قالب R اور خیالی قالب M کا مجموعہ۔

(ج) ہرمیشی قالب H اور منحرف ہرمیشی قالب K کا مجموعہ۔

سوال ا.۱۱: مساوات $A.52$ ، $A.53$ اور $A.58$ ثابت کریں۔ دیکھائیں کہ دو اکہرا قوالب کا حاصل ضرب اکہرا ہو گا۔ کن شرائط کے تحت دو ہرمیشی قوالب کا حاصل ضرب ہرمیشی ہو گا؟ کیا دو اکہرا قوالب کا مجموعہ اکہرا ہو گا؟ کیا دو ہرمیشی قوالب کا مجموعہ ہرمیشی ہو گا؟

سوال ا.۱۲: دیکھائیں کہ اکہرا قالب کے صف اور قطار عمودی معیاری سلسلہ قائم کرتے ہیں۔

سوال ا.۱۳: یہ یاد رکھتے ہوئے کہ $\det(\tilde{T}) = \det(T)$ دیکھائیں کہ ہرمیشی قالب کا مقطع حقیقی ہو گا اکہرا قالب کے مقطع کا معیار 1 ہو گا جس کی بنا اس کا نام اکہرا قالب ہے اور معیاری عمودی قالب کا مقطع یا $+1$ یا -1 ہو گا۔

۱.۴ تبدیلی اساس

کسی بھی سمتیہ یا خطی تبادلہ کو ظاہر کرنے والے قالب کے ارکان اساس کا انتخاب پر منحصر ہو گا۔ اساس تبدیل کرنے سے یہ عدد اد کس طرح تبدیل ہوتے ہیں اس پر غور کرتے ہیں۔ پرانے اساسی سمتیات $|e_i\rangle$ کسی بھی سمتیہ کی طرح ان نئی سمتیات $|f_i\rangle$ کا خطی مجموعہ ہوں گے

$$
\begin{aligned}
|e_1\rangle &= S_{11}|f_1\rangle + S_{21}|f_2\rangle + \cdots + S_{n1}|f_n\rangle \\
|e_2\rangle &= S_{12}|f_1\rangle + S_{22}|f_2\rangle + \cdots + S_{n2}|f_n\rangle \\
&\cdots \\
|e_n\rangle &= S_{1n}|f_1\rangle + S_{2n}|f_2\rangle + \cdots + S_{nn}|f_n\rangle
\end{aligned}
$$

جہاں S_{ij} مخلوط اعداد کا سلسلہ ہو گا یا مختصراً

$$|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}|f_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{۶۱}$$

یہ خود ایک خطی تبادلہ ہے مساوات $A.30$ سے موازنہ کریں اور ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا تبادلہ کس طرح ہو گا

$$a_i^f = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j^e \tag{۶۲}$$

جہاں زیر نوشت اساس کو ظاہر۔ قالبی روپ میں درج ذیل ہو گا

$$a^f = S a^e \tag{۶۳}$$

خطی تبادلہ $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب اساس کی تبدیلی سے کس طرح تبدیل ہو گا؟ پرانے اساس میں

$$a'^e = T^e a^e$$

اور مساوات $A.63$ تھے دونوں اطراف کو S^{-1} سے ضرب دیتے ہوئے جس میں $a^e = S^{-1} a^f$ کا منطقی نتیجہ شامل ہے لہٰذا

$$a'^f = S a'^e = S(T^e a^e) = S T^e S^{-1} a^f$$

ظاہری طور پر

$$T^f = S T^e S^{-1} \tag{۶۴}$$

ہو گا۔ عمومی طور پر دو قوالب T_1 اور T_2 اس صورت میں مشابہ ہوں گے جب کسی غیر نادر قالب S کی صورت میں $T_2 = S T_1 S^{-1}$ ہو۔ یوں ہم دریافت کر چکے کہ مختلف اساس کے لحاظ سے ایک ہی خطی تبادلہ کو ظاہر

کرنے والے قالب مماثل ہونگے۔ اتفاقی طور پر اگر پہلی اساس معیاری عمودی ہو تب دوسری اساس صرف اس صورت میں معیاری عمودی ہو گا جب قالب S اکہرا ہو سوال $A.16$ دیکھیں۔ چونکہ ہم صرف معیاری عمودی اساس میں کام کرتے ہیں لہٰذا ہماری دلچسپی بنیادی طور پر اکہرا مماثلت تبادلہ میں ہے۔

اگرچہ نئی اساسوں میں کوئی بھی خطی تبادلہ کے ارکان بہت مختلف نظر آتے ہیں قالب سے وابستہ دو اعداد یعنی مقطع اور آثار قالب تبدیل نہیں ہوتے چونکہ حاصل ضرب کا مقطع مقطع کا حاصل ضرب ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\det(T^f) = \det(ST^eS^{-1}) = \det(S)\det(T^e)\det(S^{-1}) = \det T^e \tag{۶۵}$$

اور آثار قالب جو وتری ارکان کا مجموعہ ہے

$$Tr(T) \equiv \sum_{i=1}^{m} T_{ii} \tag{۶۶}$$

درج ذیل خاصیت سوال $A.17$ دیکھیں

$$Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1) \tag{۶۷}$$

جہاں T_1 اور T_2 کوئی بھی دو قوالب ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$Tr(T^f) = Tr(ST^eS^{-1}) = Tr(T_eS^{-1}S) = Tr(T^e) \tag{۶۸}$$

سوال ا.۱۴: تین ابعاد میں سمتیات کے لئے معیاری اساس $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے۔

(الف) مبدہ کی طرف دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی z محور کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(ب) نقطہ $(1, 1, 1)$ سے گزرتے ہوئے محور کے گرد محور سے مبدہ کی طرف دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی $120°$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(ج) مستوی xy میں عکس کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(د) تصدیق کریں کہ یہ تمام قوالب معیاری عمودی ہیں اور ان کے مقطع کا حساب کریں۔

سوال ا.۱۵: عمومی اساس $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے محور x کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب T_x اور محور y کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والے قالب T_y تیار کریں۔ فرض کریں اب ہم اساس تبدیل کرکے $\hat{\imath}' = \hat{\jmath}$ ، $\hat{\jmath}' = -\hat{\imath}$ ، $\hat{k}' = \hat{k}$ لیتے ہیں اساس کی اس تبدیلی کو پیدا کرنے والے قالب S تیار کریں اور تصدیق کریں کہ ST_xS^{-1} اور ST_yS^{-1} آپ کے توقعات کے عین مطابق ہے۔

سوال ا.۱۶: دیکھائیں کہ مماثلت قالبی ضرب برقرار رکھتا ہے یعنی اگر $A^eB^e = C^e$ ہو تب $A^fB^f = C^f$ ہو گا۔ عمومی طور پر مماثلت تشاکلی حقیقت یا ہرمیشی پن برقرار نہیں رکھتا لیکن دیکھائیں اگر S اکہرا ہو اور H^e ہرمیشی ہو تب H^f ہرمیشی ہو گا۔ دیکھائیں کہ S صرف اس صورت معیاری عمودی اساس کو دوسری معیاری عمودی اساس میں منتقل کرے گا اگر یہ اکہرا ہو۔

سوال ۱.۱۷: دیکھائیں کہ $Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1)$ یوں $Tr(T_1T_2T_3) = Tr(T_2T_3T_1)$ ہو گا کیا عام طور پر $Tr(T_1T_2T_3) = Tr(T_2T_1T_3)$ ہو گا؟ اسکو ٹھیک یا غلط ثابت کریں۔ اشارہ: بہترین غلط ثبوت اسکی اُلٹ مثال پیش کرنا ہے جتنا سادہ ہو اتنا ہی بہتر ہے۔

۱.۵ امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار

تھرہ فضا میں کسی مخصوص محور کے گرد زاویہ θ گھمانے کو ظاہر کرنے والے خطی تبادلہ پر غور کریں۔ زیادہ تر سمتیات پیچیدہ انداز سے تبدیل ہوں گے یہ اس محور کے گرد مخروط پر حرکت کریں گے لیکن وہ سمتیات جو اسی محور پر پائے جاتے ہوں کا رویہ سادہ ہو گا وہ بلکل تبدیل نہیں ہوں گے ($\hat{T} \mid \alpha\rangle = \mid \alpha\rangle$)۔ اگر θ کی قیمت $180°$ ہو تب استوائی مستوی میں پائے جانے والے سمتیات کی علامت تبدیل ہو گی ($\hat{T} \mid \alpha\rangle = - \mid \alpha\rangle$)۔ مخلوط سمتی فضا میں ہر خطی تبادلہ کے اس طرح کے مخصوص سمتیات پائے جاتے ہیں جو اپنے آپ کے غیر سمتی مضرب میں تبدیل ہوتے۔

$$\hat{T} \mid \alpha\rangle = \lambda \mid \alpha\rangle \tag{۶۹}$$

انہیں اس تبادلہ کے امتیازی سمتیات کہتے ہیں اور مخلوط عدد λ کو انکا امتیازی قدر کہتے ہیں۔ معدوم سمتیہ محمل معنوں میں مساوات $A.69$ کو کسی بھی $\hat{T}$ اور λ کے لئے مطمعن کرتا ہے اسے امتیازی سمتیات میں نہیں گنا جاتا تکنیکی طور پر ایک امتیازی سمتیہ سے مراد وہ غیر صفر سمتیہ ہے جو مساوات $A.69$ کو مطمعن کرتا ہو۔ دیہان رہے کہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی غیر صفر مضرب بھی امتیازی سمتیہ ہو گا جس کی امتیازی قدر وہی ہو گی۔

کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے امتیازی سمتیہ مساوات قالبی روپ

$$Ta = \lambda a \tag{۷۰}$$

جہاں a غیر صفر ہے یا

$$(T - \lambda I)a = 0 \tag{۷۱}$$

اختیار کرتا ہے۔ یہاں 0 ایسا صفر قالب ہے جس کے تمام ارکان صفر ہیں۔ اب اگر قالب $(T - \lambda I)$ کا معکوس ہوتا تاہم مساوات $A.71$ کو دونوں اطراف کو $(T - \lambda I)^{-1}$ سے ضرب دے کر $a = 0$ اخذ کرتے۔ لیکن ہم a کو غیر صفر فرض کر چکے ہیں لہذا $(T - \lambda I)$ لازماً نادر ہو گا جس سے مراد یہ ہے کہ اس کا مقطع صفر ہو گا

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & (T_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{۷۲}$$

مقطع کھولنے سے λ کی الجبرائی مساوات

$$C_n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = 0 \tag{۷۳}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں عددی سر C_i ارکان T کے تابع ہیں سوال $A.20$ دیکھیں۔ اس کو قالب کی امتیازی مساوات کہتے ہیں اور اس کے حل امتیازی اقدار کا تعین کرتے ہیں۔ دیہان رہے کہ یہ n رطبی ماساوات ہے لہٰذا الجبرا کے بنیادی مسئلہ کے تحت اس کے n مخلوط ہزر ہوں گے البتہ ان میں سے چند مرکب جذر ہو سکتے ہیں لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $n \times n$ قالب کا کم سے کم ایک اور زیادہ سے زیادہ n منفرد امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ قالب کے تمام امتیازی اقدار کے زخیرہ کو اس کا طیف کہتے ہیں اگر دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کا ایک ہی امتیازی قدر ہو ہم کہتے ہیں کہ طیف انحطاطی ہے۔

امتیازی سمتیات تیار کرنے کا عام طور پر سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ مساوات $A.70$ میں ہر ایک λ ڈال کر a کے ارکان کے لئے ہاتھ سے حل کریں۔ میں اس عمل کو ایک مثال کی صورت میں سمجھاتا ہوں۔

مثال ا.ا: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۷۴}$$

حل: اس کی امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -2 \\ -2i & (i-\lambda) & 2i \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1+i)\lambda^2 - i\lambda = 0 \tag{۷۵}$$

ہے۔ جس کے جذر $1, 0$ اور i ہے۔ پہلی امتیازی سمتیہ کے اقدار (a_1, a_2, a_3) لیتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل تین مساوات ملتے ہیں

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= 0 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے پہلی مساوات a_1 کی صورت میں a_3 کا تعین کرتی ہے $a_1 = a_3$ دوسری a_2 کا تعین کرتی ہے $a_2 = 0$ اور تیسری فالتو مساوات ہے۔ہم $a_1 = 1$ چن سکتے ہیں چونکہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی مضرب امتیازی سمتیہ ہی ہو گا

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0 \tag{۷۶}$$ کے لئے

دوسری امتیازی سمتیہ کے لئے ارکان کے لئے وہی علامتیں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل مساوات حاصل ہوں گے

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= a_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= a_2 \\ a_1 - a_3 &= a_3 \end{aligned}$$

جس کے حل $a_3 = (1/2)a_1, a_2 = [(1-i)/2]a_1$ ہیں اس مرتبہ میں $a_1 = 2$ منتخب کرتا ہوں لہٰذا

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 \tag{۷۷}$$ کے لئے

ہو گا۔ آخر میں تیسرا امتیازی سمتیہ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ia_2 \\ ia_3 \end{pmatrix}$$

درج ذیل مساوات دیگا

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= ia_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= ia_2 \\ a_1 - a_3 &= ia_3 \end{aligned}$$

جس کے حل $a_1 = a_3 = 0$ ہیں جہاں a_2 غیر متعین ہیں۔ہم $a_2 = 1$ منتخب کرتے ہیں یوں درج ذیل ہو گا

$$\lambda_3 = i \text{ کے لئے}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۷۸}$$

□

اگر امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں جیسا گزشتہ مثال میں کرتے تھے ہم انہیں اساس کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \hat{T} \mid f_1\rangle &= \lambda_1 \mid f_1\rangle, \\ \hat{T} \mid f_2\rangle &= \lambda_2 \mid f_2\rangle, \\ &\cdots \\ \hat{T} \mid f_n\rangle &= \lambda_n \mid f_n\rangle \end{aligned}$$

اس اساس میں $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب انتہائی سادہ روپ اختیار کرتا ہے جس میں امتیازی اقدار مرکزی وتر پر پائے جاتے ہیں جبکہ باقی تمام ارکان صفر ہوں گے

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{۷۹}$$

اور معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۸۰}$$

ایسا قالب جس کو اساس کی تبدیلی سے وتری روپ مساوات $A.79$ کی صورت میں لایا جا سکے وتری کہلاتا ہے ظاہر ہے کہ ای قالب صرف اس صورت میں وتری ہو گا جب اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں۔ مشابہت قالب جو وتری بناتا ہے کو پرانی اساس میں معمول شدہ امتیازی سمتیات بطور S^{-1} کے قطار لیتے ہوئے تیار کیا جا سکتا ہے

$$(S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i \tag{۸۱}$$

مثال ۱.۲: مثال $A.1$ میں

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (1-i) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا مساوات $A.57$ استعمال کرتے ہوئے

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ (i-1) & 1 & (1-i) \end{pmatrix}$$

اور آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$Sa^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Sa^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Sa^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اور

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

ہو گا۔ □

قالب کو وتری روپ میں لانے کا صاف نظر آنے والا فائدہ ہے اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے۔ بد قسمتی سے ہر قالب کو وتری نہیں بنایا جا سکتا امتیازی سمتیات کو فضا کا احاطہ کرنا ہو گا۔ اگر امتیازی مساوات کے n منفرد جذر ہوں تب قالب لازماً وتری بنایا جا سکتا ہے لیکن مرقب جذر کی صورت میں بھی ممکن ہے کہ یہ وتری بنانے کے قابل ہو۔ وتری بنانے کے غیر قابل قالب کے لئے سوال $A.19$ دیکھیں۔ کیا بہتر ہو تا اگر تمام امتیازی سمتیات معلوم کرنے سے قبل ہم جان سکتے کہ آیا ایک قالب وتری بنانے کے قابل ہے یا نہیں ایک کافی لیکن لازمی نہیں شرط درج ذیل ہے ایک قالب جو اپنے ہرمیشی جوڑی دار کے ساتھ مقلوب ہو عمودی قالب کہلاتا ہے

$$\text{سادہ} \quad [N^{\dagger}, N] = 0, \tag{۸۲}$$

ہر عمودی قالب وتری بنانے کے قابل ہے اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں۔ بلخصوص ہر ہرمیشی قالب اور اکہرا قالب وتری بنانے کے قابل ہے۔

فرض کریں ہمارے پاس دو وتری بنانے کے قابل قالب ہیں قونٹائی معملات میں عموماً ایک سوال کھڑا ہوتا ہے کیا انہیں بیک وقت وتری بنایا جا سکتا ہے یعنی ایک ہی مشابہت قالب S کے ذریع؟ دوسرے

لفظوں میں کیا ایسی اساس موجود ہے جس میں دونوں وتری بنائے جا سکتے ہیں؟ اس کا جواب ہے کہ صرف اور صرف اس صورت یہ ممکن ہو گا جب دونوں قالب مقلوبی ہوں سوال $A.22$ دیکھیں۔ سوال ا.۱۸: xy مستوی میں گھومنے کو ظاہر کرنے والا 2×2 قالب

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{۸۳}$$

دیکھائیں کہ ماسوائے مخصوص زاویوں کے بتائیں وہ کونسے زاویے ہیں؟ اس قالب کا کوئی حقیقی امتیازی قدر نہیں پایا جاتا۔ یہ اس ہندسی حقیقت کا اخذ ہے کہ مستوی میں کوئی بھی سمتیہ گھمانے کے ذریعہ اپنے آپ میں نہیں پہنچ پایا جا سکتا اس کا موازنہ تین ابعاد میں گھمانے سے کریں۔ البتہ اس قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ہوں گے۔ انہیں تلاش کریں۔ قالب T کو وتری بنانے والا قالب S تیار کریں۔ مماثلت تبادلہ STS^{-1} صریحاً کریں اور دیکھائیں کہ یہ T کو وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ا.۱۹: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کیا یہ قالب وتری بنانے کے قابل ہے؟

سوال ا.۲۰: دیکھائیں کہ امتیازی مساوات مساوات $A.73$ کا پہلا، دوسرا اور آخری عددی سر درج ذیل ہیں

$$C_n = (-1)^n, C_{n-1} = (-1)^{n-1}Tr(T), \text{اور} \; C_0 = \det(T) \tag{۸۴}$$

ایک 3×3 قالب جس کے ارکان T_{ij} ہوں کا C_1 کیا ہو گا؟

سوال ا.۲۱: صاف ظاہر ہے کہ وتری قالب کا آثار قالب اس کے امتیازی اقدار کا مجموعہ اور اس کا مقطع ان کا حاصل ضرب ہو گا صرف مساوات $A.79$ کو دیکھنے کی دیر ہے یوں مساوات $A.65$ اور $A.68$ کے تحت کسی بھی وتری بنانے کے قابل قالب کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا۔ درج ذیل حقیقت کسی بھی قالب کے لئے ثابت کریں

$$\det(T) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n, \quad Tr(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{۸۵}$$

امتیازی مساوات کے n حل یہاں λ ہیں مرقب جذر کی صورت میں حلوں سے کم خطی غیر تابع امتیازی سمتیات ہو سکتے ہیں لیکن ہم λ کو اتنی مرتبہ ہی گنتے ہیں جتنی مرتبہ یہ پایا جاتا ہو۔ اشارہ: امتیازی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھیں

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda) = 0$$

اور سوال $A.20$ کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال ۱.۲۲:

(الف) دکھائیں اگر دو قالب کسی ایک اساس میں مقلوبی ہوں تب وہ ہر اساس میں مقلوبی ہوں گے یعنی درج ذیل ہو گا

$$[T_1^e, T_2^e] = 0 \Rightarrow [T_1^f, T_2^f] = 0 \tag{۸۶}$$

اشارہ: مساوات $A.64$ استعمال کریں۔

(ب) دکھائیں کہ اگر دو قالب بیک وقت وتری بنانے کے قابل ہوں تو وہ مقلوبی ہوں گے۔

سوال ۱.۲۳: درج ذیل قالب لیں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

(الف) کیا یہ عمودی قالب ہے؟

(ب) کیا یہ وتری بنانے کے قالب ہے؟

۱.۶ ہرمیشی تبادلہ

میں نے مساوات $A.48$ میں قالب کے تبدیل محل وجوڑی دار $T^{\dagger} = \widetilde{T}^{*}$ کو اس کی ہرمیشی جوڑی دار یا شریک قالب کی تعریف قرار دیا۔ یہاں میں خطی تبادلہ کے ہرمیشی جوڑی دار کا زیادہ بنیادی تعریف پیش کرتا ہوں۔ یہ وہ تبادلہ $\hat{T}^{\dagger}$ ہے جس کا اطلاق اندرونی ضرب کے پہلے رکن پر وہی نتیجہ دیتا ہے جو دوسرے سمتیہ پر خود $\hat{T}$ کا اطلاق دیگا

$$\langle \hat{T}^{\dagger}\alpha \mid \beta \rangle = \langle \alpha \mid \hat{T}\beta \rangle \tag{۸۷}$$

جہاں $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ کوئی بھی سمتیات ہو سکتے ہیں۔ حاشیہ اس کا متقابل اگر دو وتری بنانے کے قالب مقلوبی ہوں تب وہ بیک وقت وتری بنانے کے قابل ہوں گے ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ حاشیہ آپ پوچھ سکتے ہیں ایسا تبادلہ لازماً موجود ہو گا یہ ایک اچھا سوال ہے اس کا جواب ہے جی ہاں۔ میں آپ کو خبردار کرتا چلوں کہ اگرچہ ہر کوئی اسے استعمال کرتا ہے یہ فرسودہ علامتیت ہے سمتیات α اور β ہیں جبکہ $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ سمتیات نہیں بلکہ نام ہیں۔ بالخصوص ان کے کوئی ریاضیاتی خواص نہیں پائے جاتے اور $\hat{T}\beta$ کا فقرہ بے معانی ہے خطی تبادلہ کسی سمتیہ پر نا کہ نام پر عمل کرتے ہیں۔ لیکن اس علامت کا مطلب صاف ظاہر ہے سمتیہ $\hat{T}\beta$ کا نام $\langle\hat{T}|\beta\rangle$ ہے اور سمتیہ $\langle\hat{T}^{\dagger}|\alpha\rangle$ اور سمتیہ $\langle\beta|$ کا اندرونی ضرب $\langle\hat{T}^{\dagger}\alpha|\beta\rangle$ ہے۔ بالخصوص

$$\langle \alpha \mid c\beta \rangle = c\langle \alpha \mid \beta \rangle \tag{۸۸}$$

جہاں کسی بھی غیر سمتی c کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\langle c\alpha \mid \beta\rangle = c^* \langle \alpha \mid \beta\rangle \tag{۸۹}$$

اگر آپ ہمیشہ کی طرح معیاری عمودی اساس میں کام کر رہے ہوں خطی تبادلہ کے ہر میشی جوڑی دار کو مطابقتی قالب کا ہر میشی جوڑی دار ضاہر کریگا چونکہ مساوات $A.50$ اور $A.53$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\beta\rangle = a^{\dagger}Tb = (T^{\dagger}a)^{\dagger}b = \langle \hat{T}^{\dagger}\alpha \mid \beta\rangle \tag{۹۰}$$

یوں یہ علامتیت صوات ہے اور ہم چاہیں تو تبادلہ کی زبان اور چاہیں تو قالب کی زبان میں بات کر سکتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں ہر میشی تبادلہ $(\hat{T}^{\dagger} = \hat{T})$ بنیادی کردار ادا کرتے ہیں۔ ہر میشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تین نہایت اہم خواص رکھتے ہیں۔

(الف) ہر میشی تبادلہ کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں:

ثبوت: فرض کریں $\hat{T}$ کی ایک امتیازی قدر λ ہے $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ جہاں $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\alpha\rangle = \langle \alpha \mid \lambda\alpha\rangle = \lambda\langle \alpha \mid \alpha\rangle$$

ساتھ ہی $\hat{T}$ ہر میشی ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\alpha\rangle = \langle \hat{T}\alpha \mid \alpha\rangle = \langle \lambda\alpha \mid \alpha\rangle = \lambda^*\langle \alpha \mid \alpha\rangle$$

لیکن $\langle\alpha|\alpha\rangle \neq 0$ ہے مساوات $A.20$ لہٰذا $\lambda = \lambda^*$ اور یوں λ حقیقی ہو گا۔

(ب) ہر میشی تبادلہ کے منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی سمتیات قائمہ ہونگے۔

ثبوت: فرض کریں $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ اور $\hat{T}|\beta\rangle = \mu|\beta\rangle$ ہے جہاں $\lambda \neq \mu$ ہے۔ تب

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\beta\rangle = \langle \alpha \mid \mu\beta\rangle = \mu\langle \alpha \mid \beta\rangle$$

اور اگر $\hat{T}$ ہر میشی ہو درج ذیل ہو گا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\beta\rangle = \langle \hat{T}\alpha \mid \beta\rangle = \langle \lambda\alpha \mid \beta\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\beta\rangle$$

لیکن $\lambda = \lambda^*$ ہے جزو (الف) سے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ $\mu \neq \lambda$ ہے لہٰذا $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ ہو گا۔

(ج) ہر میشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں جیسا ہم دیکھ چکے ہیں یہ اس فکرے کے مترادف ہے کہ کسی بھی ہر میشی قالب کو وتری بنایا جا سکتا ہے مساوات $A.82$ دیکھیں۔ یہ حقیقت جو خاصی تکنیکی ہے وہ ریاضیاتی سہارا ہے جس پر زیادہ تر کوانٹائی میکانیات کھڑی ہے۔ چونکہ اس ثبوت کو لامتناہی ابعادی سمتی فضائوں تک وسعت نہیں دی جا سکتی لہٰذا یہ ایک باریک لڑی ہے جس پر کوانٹائی میکانیات منحصر ہے۔

سوال ا.۲۴: ہرمیشی خطی تبادلہ کو تمام سمتیات $\langle\alpha|$ اور $|\beta\rangle$ کے لئے لازماً $\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle$ مطمعن کرنا ہو گا۔ دیکھائیں کہ اتنی حیرانی کی بات ہے کہ کافی ہے کہ تمام سمتیات $|\gamma\rangle$ کے لئے $\langle\gamma|\hat{T}\gamma\rangle = \langle\hat{T}\gamma|\gamma\rangle$ ہو۔ اشارہ: پہلے $|\gamma\rangle = |\alpha + |\beta\rangle$ اور اس کے بعد $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + i|\beta\rangle$ لیں۔

سوال ا.۲۵: درج ذیل لیں

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

(الف) تصدیق کریں کہ T ہرمیشی ہے۔

(ب) اس کی امتیازی اقدار تلاش کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ حقیقی ہیں)۔

(ج) امتیازی سمتیات تلاش کر کے انکی معمولزنی کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ معیاری عمودی ہیں)۔

(د) اکہرا وتری بنانے والا قالب S تیار کریں اور صریحاً تصدیق کریں کہ یہ T کو وتری بناتا ہے۔

(ھ) تصدیق کریں کہ T اور اسکے وتری روپ کے لئے مقطع T اور آثار T ایک جیسے ہیں۔

سوال ا.۲۶: درج ذیل ہرمیشی قالب لیں

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

(الف) اس قالب کا مقطع $Tr(T)$ اور آثار $\det(T)$ تلاش کریں۔

(ب) قالب T کی امتیازی اقدار تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ انکا مجموعہ اور حاصل ضرب مساوات $A.85$ کے معنوں میں جزو (الف) کے عین مطابق ہے۔ قالب T کو وتری روپ میں لکھیں۔

(ج) قالب T کے امتیازی سمتیات تلاش کریں۔ انحطاطی حلقہ میں دو خطی غیر طابع امتیازی سمتیات تیار کریں ہرمیشی قالب کے لئے یہ قدم ہر صورت ممکن ہو گا لیکن کسی بھی اختیاری قالب کے لئے لازمی نہیں کہ ایسا ممکن ہو سوال $A.19$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ انہیں قائمہ بنائیں اور تصدیق کریں کہ تیسرے کے لحاظ سے دونوں قائمہ ہیں۔ تینوں امتیازی سمتیات کی معمولزنی کریں۔

(د) قالب T کو وتری بنانے والا اکہرا قالب S تیار کریں اور صریحاً دیکھائیں کہ مماثلت تبادلہ S کو استعمال کرتے ہوئے T کو موضوع وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ا.۲۷: اکہرا تبادلہ وہ ہے جس کے لئے $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = 1$ ہو۔

(الف) دیکھائیں کہ کسی بھی سمتیات $\langle\alpha|$ ، $|\beta\rangle$ کے لئے $\langle\hat{U}\alpha|\hat{U}\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$ کے معنوں میں اکہرا تبادلہ اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ اکہرا تبادلہ کا امتیازی اقدار کا معیار 1 ہے۔

(ج) دیکھائیں کہ منفرد امتیازی اقدار سے متعلق اکہرا قالب کی امتیازی سمتیات قائمہ ہوں گے۔

سوال ا.۲۸: قوالب کے تفاعلات ٹیلر تصلسل توسیعات دیتے ہیں مثلاً

$$e^M \equiv I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \tag{۹۱}$$

(الف) درج ذیل کے لئے $\exp(M)$ تلاش کریں

$$(i) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (ii) M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) اگر M وتری بنانے کے قابل ہو تب درج ذیل دیکھائیں

$$\det\left(e^M\right) = e^{Tr(M)} \tag{۹۲}$$

تبصرہ: اگر M وتری بنانے کے قابل نہ ہو تب بھی یہ درست ہو گا تاہم ایسی عمومی صورت کے لئے اسکو ثابت کرنا مشکل ہے۔

(ج) دیکھائیں اگر قوالب M اور N مقلوبی ہوں تب درج ذیل ہو گا

$$e^{M+N} = e^M e^N \tag{۹۳}$$

ثابت کریں کہ غیر مقلوبی قالب کے لئے مساوات $A.93$ درست نہیں سادہ ترین متضاد مثال دیکر ایسا کریں۔

(د) اگر H ہرمیشی ہوں تب دیکھائیں کہ e^{iH} اکہرا ہو گا۔