کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۷ نومبر ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

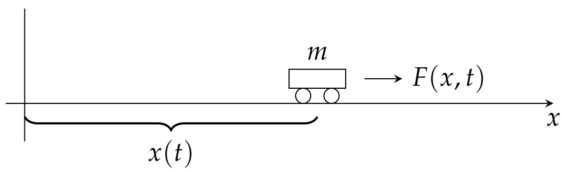
28 اکتوبر 2011

باب ۱

تفاعل موج

۱.۱ شروڈنگر مساوات

فرض کریں محور x پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $F(x,t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت t پر تعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کی اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں تعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے تعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو خفی توانائی[1] پر تفرق لکھا جا سکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$، لہٰذا نیوٹن کا قانون $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) اس مساوات کے ساتھ ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک "ذرہ" ایک بعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

[1] مقناطیسی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہو گا لیکن یہاں ہم ان کی بات نہیں کر رہے ہیں۔ دیگر، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی $(v \ll c)$ تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کی **تفاعل موج**[۲] جس کی علامت $\Psi(x,t)$ ہے کو **شروڈنگر مساوات**[۳] حل کرکے حاصل کرتے ہیں

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2} + V\Psi \tag{۱.۱}$$

جہاں i منفی ایک (-1) کا جذر اور $\hbar$ پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم 2π ہو گا:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,572 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \tag{۱.۲}$$

شروڈنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات، جو عموماً $\Psi(x,0)$ ہو گا، استعمال کرتے ہوئے شروڈنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x,t)$ تعین کرتی ہے، جیسا کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے قاعدہ نیوٹن $x(t)$ تعین کرتا ہے۔

۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں، ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے t پر یہ x کا تفاعل ہو گا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کے **شماریاتی مفہوم**[۴] پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحہ t پر نقطہ x پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x,t)|^2$ دیگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ[۵] درج ذیل ہے۔

$$\int_a^b \left|\Psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = \begin{cases} \text{لمحہ } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ} \\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} \\ \text{احتمال} \end{cases} \tag{۱.۳}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہو گا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ A پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ B پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا اس نظریہ سے ذرہ کے بارے میں تمام قابل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جانتے ہوئے بھی ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے قاصر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکنہ نتائج کے صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں **عدم تعین**[۶] کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور

---

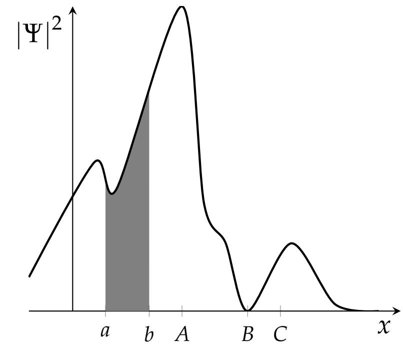
[۲] wave function

[۳] Schrodinger align

[۴] statistical interpretation

[۵] تفاعل موج از خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$ (جہاں Ψ^* تفاعل موج Ψ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔

[۶] indeterminacy



شکل ۲.۱: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ a اور b کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ A کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ B کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتی ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹم میکانی نظریہ میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام C پر پایا[7] جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹم عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقہ سوچ کے بارے میں علم ہو گا۔

1) **حقیقت پسند**[8] سوچ: ذرہ مقام C پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن شٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹم میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گا کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ C پر ہی تھا اور کوانٹم میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے قاصر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعین پن قدرتی میں نہیں پایا جاتا بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے تحت کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں تھا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں Ψ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا ہے اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (**خفیہ متغیرات**[9] کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

2) **تقلید پسند**[10] سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتی ہے کہ وہ ایک مقام پر "کھڑا ہو جائے" (وہ مقام C کو کیوں منتخب کرتا ہے، اس بارے میں ہمیں سوال کرنے کی اجازت نہیں ہے)۔ مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل پیدا کرتا ہے، یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرہ کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے

---

[7] ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی خلل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ C کے قریب پایا گیا۔

[8] realist

[9] hidden variables

[10] orthodox

ہیں۔ "یہ تصور جو **کوپن ہیگن مفہوم**[۱۱] پکارا جاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہر طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ سوچ درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھی عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصہ کی بحث و مباحثوں کے بعد بھی پر اسراری کا شکار ہے۔

3) **انکاری**[۱۲] سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حال نہیں بتا پاتا لہٰذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبقہ سوچ کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جناب جان بل نے ثابت کیا کہ تجربہ سے قبل ذرہ کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربہ پر قابل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جا سکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی علمی سوچ اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جناب جان بل کی دلیل سمجھ آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں[۱۳]۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتی ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کی مسلط کردہ شماریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرہ پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربہ میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے جیسا شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر **منہدم**[۱۴] کر کے اس کو نوکیلی صورت اختیار کرنے پر مجبور کرتی ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروڈنگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گی لہٰذا دوسری پیمائش جلدی کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دو بہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروڈنگر مساوات کے تحت ارتقا پاتا ہے، اور دوسری جس میں پیمائش Ψ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر گرنے پر مجبور کرتی ہے۔

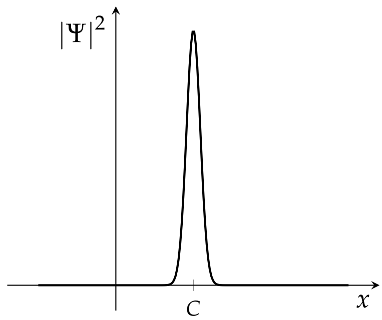
---

[۱۱] Copenhagen interpretation

[۱۲] agnostic

[۱۳] یہ فقرہ کچھ زیادہ سخت ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں بعد میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر مقامی خفیہ متغیرات کے نظریات اور دیگر تشکیلات مثلاً **متعدد دنیا** تشریح جو ان تینوں سوچ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتے ہیں۔ بہر حال، اب کے لئے بہتر ہے کہ ہم کوانٹم نظریہ کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کی مسائل کے بارے میں فکر کریں۔

[۱۴] collapses



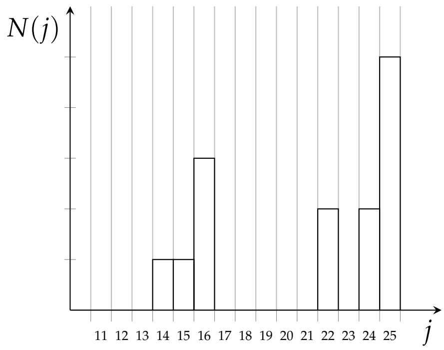
شکل ۱.۳: تفاعل موج کا انہدام: اس لمحہ کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

۱.۳ احتمال

۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیات کی شماریاتی تشریح کی جاتی ہے لہٰذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہو گا جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ فرض کریں ایک کمرہ میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک شخص،
- 15 سال عمر کا ایک شخص،
- 16 سال عمر کے تین اشخاص،
- 22 سال عمر کے دو اشخاص،
- 24 سال عمر کے دو اشخاص،
- اور 25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔



شکل ۱.۴: مستطیلی ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ ترسیم کی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
N(14) &= 1\\
N(15) &= 1\\
N(16) &= 3\\
N(22) &= 2\\
N(24) &= 2\\
N(25) &= 5
\end{aligned}
$$

جبکہ $N(17)$، مثال کے طور پر، صفر ہو گا۔ کمرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j) \tag{۱.۴}$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ $N = 14$ ہو گا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال 1 اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا **احتمال** ہو گا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہو گا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہٰذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہو گا۔ اگر j عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تب $P(14) = 1/14$، $P(15) = 1/14$، $P(16) = 3/14$، وغیرہ ہو گا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$P(j) = \frac{N(j)}{N} \tag{۱.۵}$$

دھیان رہے کی چودہ یا پندرہ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہو گا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہو گا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1 \tag{۱.۶}$$

سوال 2 کونسی عمر سب سے **زیادہ محتمل**[۱۵] ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا j وہی j ہو گا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 **وسطانیہ**[۱۶] عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہٰذا جواب 23 ہو گا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ j کی وہ قیمت ہو گی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک دوسرے جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی **اوسط**[۱۷] عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14)+(15)+3(16)+2(22)+2(24)+5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر j کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہو گی۔

$$\langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j) \tag{۱.۷}$$

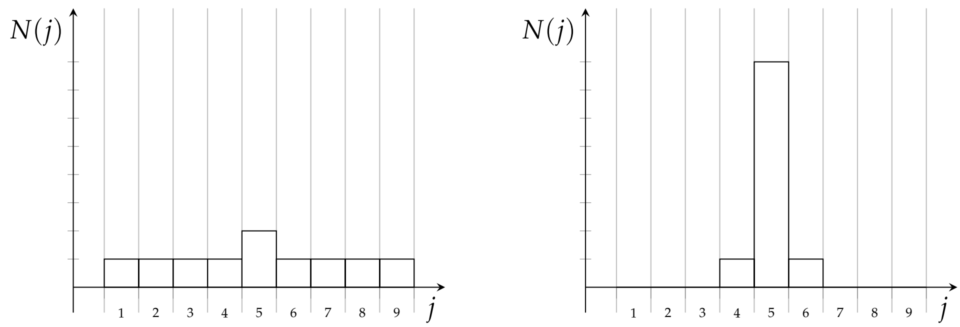
دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو **توقعاتی قیمت**[۱۸] کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہو گا؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $15^2 = 225$، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $16^2 = 256$ حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j) \tag{۱.۸}$$

---

[۱۵] most probable
[۱۶] median
[۱۷] mean
[۱۸] expectation value



شکل ۱.۵: دونوں مستطیلی ترسیمات میں ایک دوسرے جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر j کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle f(j)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P(j) \tag{۱.۹}$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط $\langle j^2\rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j\rangle^2$ کے برابر نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہو تب $\langle x^2\rangle = 5$ جبکہ $\langle x\rangle^2 = 4$ ہو گا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورتوں میں واضح فرق پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند تر قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے قریب نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہو گی جبکہ دیہاتی علاقہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاو، عددی صورت میں درکار ہو گا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا فرق

$$\Delta j = j - \langle j\rangle \tag{۱.۱۰}$$

لے کر تمام Δj کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned}\langle \Delta j\rangle &= \sum \left(j - \langle j\rangle\right) P(j) = \sum jP(j) - \langle j\rangle \sum P(j)\\ &= \langle j\rangle - \langle j\rangle = 0\end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j\rangle$ مستقل ہے لہٰذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ Δj کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن Δj کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا

مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے نجات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \tag{۱.۱۱}$$

اس قیمت کو تقسیم کی **تغیریت**[۱۹] کہتے ہیں جبکہ تغیریت کا جذر σ کو **معیاری انحراف**[۲۰] کہتے ہیں۔ روایتی طور پر σ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد پھیلاو کی پیمائش مانا جاتا ہے۔

ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\
&= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\
&= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\
&= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2
\end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \tag{۱.۱۲}$$

عملی استعمال میں σ اس کلیے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے فرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپکو یاد ہو گا میں نے ذکر کیا $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں σ^2 غیر منفی ہو گا لہٰذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \tag{۱.۱۳}$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاو نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلگ ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے افراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہٰذا j عدد صحیح تھا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال جمع دو دنوں

---

[۱۹] variance

[۲۰] standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگنا ہو گا۔(ماسوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچے پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس قاعدہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا، زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} x \text{ بلا منصوب منتخب کئے گئے رکن کا } \\ \text{اور } (x + \mathrm{d}x) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \tag{۱.۱۴}$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ **کثافت احتمال**[21] کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ a تا b کے بیچ x پایا جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا تکمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x \tag{۱.۱۵}$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x, \tag{۱.۱۶}$$

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,\mathrm{d}x, \tag{۱.۱۷}$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x, \tag{۱.۱۸}$$

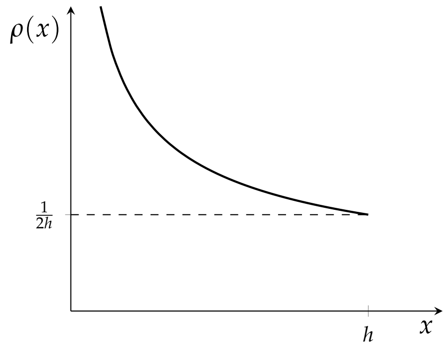
$$\sigma^2 \equiv \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \tag{۱.۱۹}$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی h ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچے جاتے ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہو گی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا وقتی اوسط کیا ہو گا؟

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہو گا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ t پر فاصلہ x درج ذیل ہو گا۔

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

[21] probability density



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt$ ہو گی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہو گا۔ وقفہ $\mathrm{d}t$ میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{\mathrm{d}t}{T}$ ہو گا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سعت $\mathrm{d}x$ میں فاصلہ دے درج ذیل ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \qquad (0 \le x \le h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہو گا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\,\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x\rangle = \int_0^h x\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\,\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال از خود لامتناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی ρ کا تکمل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہو گا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳.۱ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

ا. اوسط کا مربع $\langle i\rangle^2$ اور مربع کا اوسط $\langle j^2\rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر j کے لیے Δj دریافت کریں اور مساوات ۱۱.۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو ا اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۲.۱ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۱:

ا. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلا واسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ x پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں A ، a اور λ مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ تکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

ا. مساوات ۱۶.۱ استعمال کرتے ہوئے A کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x\rangle$ ، مربعی اوسط $\langle x^2\rangle$ اور معیاری انحراف σ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

۴.۱ معمول زنی

ہم تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم (مساوات ۳.۱) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ t پر ایک ذرے کا نقطہ x پر پائے جانے کی کثافت احتمال $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ ہو گی۔ یوں (مساوات ۱۶.۱) کے تحت $|\Psi|^2$ کا تکمل 1 کے برابر ہو گا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 = 1 \tag{۲۰.۱}$$

اس حقیقت کے بغیر شماریاتی مفہوم بے معنی ہو گی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تفاعل موج کو مساوات شروڈنگر تعین کرتی ہے اور Ψ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہو گا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x,t)$ حل ہو تب $A\Psi(x,t)$ بھی حل ہو گا، جہاں A کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی **معمول زنی**[۲۲] کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمول پر لایا گیا ہے۔ مساوات شروڈنگر کے بعض حلوں کا تکمل لامتناہی ہو گا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمول پر لانے کے قابل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شروڈنگر مساوات کے **قابل مربع تکامل**[۲۳] حل ہونگے۔[۲۴]

یہاں رک کر ذرا غور کریں! فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر میں ایک تفاعل موج کو معمول پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ Ψ ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمول پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں A وقت t کا تابع تفاعل ہو گا نا کہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ شروڈنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شروڈنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شروڈنگر اور شماریاتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹم نظریہ بے معنی ہو گا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہٰذا ہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

(۱.۲۱)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، تکمل صرف t کا تفاعل ہے لہٰذا میں نے پہلے فقرہ میں کل تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ متکمل t اور x دونوں کا تفاعل ہے لہٰذا میں نے یہاں جزوی تفرق $\partial/\partial t$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

(۱.۲۲)
$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|=\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi)=\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi$$

اب مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

(۱.۲۳)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{i}{\hbar}V\Psi$$

ہو گا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

(۱.۲۴)
$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}V\Psi^*$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

(۱.۲۵)
$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\right]$$

[۲۲] normalization

[۲۳] square-integrable

[۲۴] ظاہر ہے کہ $|x| \to \infty$ کی صورت میں $\Psi(x,t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہو گا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا ہیّت غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مساوات ۱.۲۱ میں تکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جا سکتی ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^{2}\mathrm{d}x = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^{*}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial x}\Psi\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \tag{۱.۲۶}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \to \pm\infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x,t)$ صفر[۲۵] کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^{2}\mathrm{d}x = 0 \tag{۱.۲۷}$$

لہٰذا تکمل (وقت کا غیر تابع) مستقل ہو گا؛ لمحہ $t=0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔

سوال ۱.۴: لمحہ $t=0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں A، a اور b مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,0)=\begin{cases} A\frac{x}{a} & 0\leq x\leq a\\ A\frac{(b-x)}{(b-a)} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ا. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں (یعنی a اور b کی صورت میں A تلاش کریں)۔

ب. متغیر x کے لحاظ سے $\Psi(x,0)$ ترسیم کریں۔

ج. لمحہ $t=0$ پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہو گا؟

د. نقطہ a کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $b=a$ اور $b=2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ھ. متغیر x کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں A، λ اور ω مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,t)=Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا مخفیہ[۲۶] V ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

ا. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں۔

ب. متغیرات x اور x^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

[۲۵] طبیعیات کی میدان میں لامتناہی پر تفاعل موج ہر صورت صفر کو پہنچتی ہے۔
[۲۶] potential

ج. متغیر x کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر x کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x\rangle + \sigma)$ اور $(\langle x\rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے x کی "پھیل" کو σ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہو گی۔ اس وسعت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہو گا؟

۱.۵ معیار حرکت

حال Ψ میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\Psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{۱.۲۸}$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x|\Psi|^2\,\mathrm{d}x$ حاصل ہو گی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعین ہے) تفاعل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں $\langle x\rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہو گی جو یکساں حال Ψ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال Ψ میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی سگرا[۲۷] کو ایک ہی حال Ψ میں لا کر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x\rangle$ ہو گا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال Ψ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے قریب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا مستطیلی ترسیم تقریباً $|\Psi|^2$ دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x\rangle$ ہو گی۔ (چونکہ ہم متناہی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہٰذا یہ توقع نہیں کیا جا سکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ قریب حاصل ہوں گے۔)) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سگرا پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہو گی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ Ψ وقت اور مقام کا تابع ہے لہٰذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ $\langle x\rangle$ تبدیل ہو گا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \int x\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2\,\mathrm{d}x = \frac{i\hbar}{2m}\int x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\Big)\,\mathrm{d}x \tag{۱.۲۹}$$

تکمل بالحصص کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{2m}\int\Big(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\Big)\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۰}$$

[۲۷] ensemble

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا رد کیا کہ $(\pm)$ لامتناہی پر Ψ کی قیمت 0 ہو گی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ تکمل بالحصص لاگو کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{m}\int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۱}$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ x کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے نا کہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جا سکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعیین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعیین ہو گی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم Ψ جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہو گا۔

$$\langle v\rangle = \frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} \tag{۱.۳۲}$$

مساوات ۱.۳۱ ہمیں Ψ سے بلاواسطہ $\langle v\rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے **معیار حرکت**[۲۸] $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -i\hbar\int\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \tag{۱.۳۳}$$

میں $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$\langle x\rangle = \int \Psi^*(x)\Psi\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۴}$$

$$\langle p\rangle = \int \Psi^*\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Psi\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۵}$$

کوانٹم میکانیات میں مقام کو **عامل**[۲۹] x اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ظاہر کرتے ہیں۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بیچ لکھ کر تکمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر مقداروں کا کیا ہو گا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

---

[۲۸] momentum
[۲۹] operator

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

لکھا جا سکتا ہے (جہاں یک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار مثلاً $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر p کی جگہ $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ پر کر کے حاصل عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بیچ لپیٹ کر درج ذیل تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p)\rangle = \int \Psi^* Q\Big(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Psi \,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۶}$$

مثال کے طور پر حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int \Psi^* \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۷}$$

حال Ψ میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہو گی۔ مساوات ۱.۳۴ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب بوہر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز ہے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر تکمل بالحصص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو x کے اوپر سے گزار کر، یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو گا؟

سوال ۱.۷: $\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔ جواب:

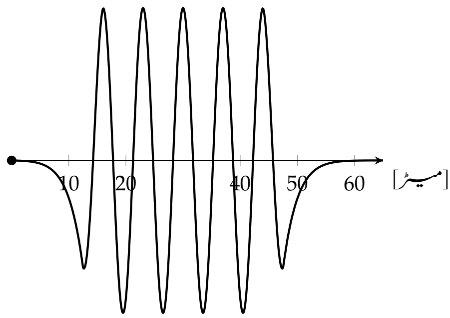
$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \Big\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\Big\rangle \tag{۱.۳۸}$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ **مسئلہ اہرنفسٹ**[۳۰] کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

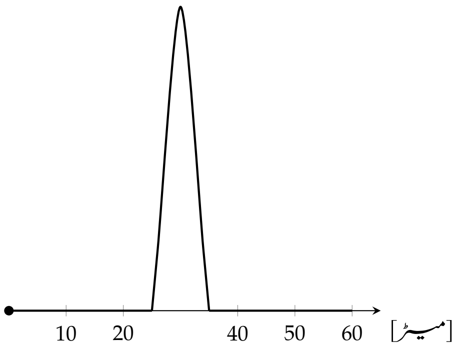
سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو x اور t کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہو گا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب $e^{-iV_t/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہو گا؟

---

[۳۰] Ehrenfest's theorem



شکل ۱.۷: اس موج کا طول موج اچھا خاصا معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصا معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔

۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے قاصر ہونگے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر **طول موج**[۳۱] پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھٹکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہو گی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہٰذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہو گا۔ اب آپ طول موج بتانے سے قاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام بتانا ممکن ہو گا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہو گا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہو گا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج خاصی حد تک قابل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہو گا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم قابل تعین ہو گا۔ فوریئر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے Ψ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق **کلیہ ڈی بروگلی**[۳۲]

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \tag{۱.۳۹}$$

پیش کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاو معیار حرکت میں پھیلاو کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہو گا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

---

[۳۱] wavelength
[۳۲] De Broglie formula

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1.40)$$

جہاں σ_x اور σ_p بالترتیب x اور p کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور **اصول عدم یقینیت**[33] ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آگیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں "پھیلاو" سے مراد یہ ہے کہ یکساں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو (Ψ کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں قریب قریب نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اسی طرح آپ چاہیں تو (Ψ کو ایک لمبی سائن نما موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے قریب قریب ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نا ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۴۰ در حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں σ_x اور σ_p کی جسامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ Ψ کو ایک لمبی بلدار لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی تواتر نہ پایا جاتا ہو، σ_x اور σ_p کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. مستقل A تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے Ψ شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. x ، x^2 ، p اور p^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. σ_x اور σ_p کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل π کے ہندسی پھیلاو کے اولین 25 ہندسوں $(3,1,4,1,5,9,\cdots)$ پر غور کریں۔

ا. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہر ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہو گا؟

---

[33] uncertainty principle

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہو گا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہو گا؟ اوسط قیمت کیا ہو گی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہو گا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیما کی خراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکے کے بعد یہ اطراف سے ٹکرا کر 0 اور π زاویوں کے بیچ آ کر رک جاتی ہے۔

ا. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہو گا؟ اشارہ: زاویہ θ اور $(\theta + \mathrm{d}\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ متغیر θ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں ρ صفر ہو گا)۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہو گا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle\theta\rangle$ ، $\langle\theta^2\rangle$ اور σ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle\sin\theta\rangle$ ، $\langle\cos\theta\rangle$ اور $\langle\cos^2\theta\rangle$ تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیما کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے x محدد (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

ا. $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟ x کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا $+2r$ ترسیم کریں جہاں r سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ: x اور $(x + \mathrm{d}x)$ کے بیچ ψ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x)\,\mathrm{d}x$ ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں θ کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ $\mathrm{d}\theta$ کا مطابقتی $\mathrm{d}x$ کیا ہو گا؟

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ اور σ تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ L رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر L لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہو گا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹھہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ t پر $(a < x < b)$ کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}P_{ab}}{\mathrm{d}t} = J(a,t) - J(b,t)$$

جہاں

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Big)$$

ہے۔ $J(x,t)$ کی اکائی کیا ہو گی؟ تبصرہ: چونکہ J آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ x پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے

لہٰذا J کو **رو احتمال**[۳۴] کہتے ہیں۔اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب خطے کے ایک سر میں احتمال کے آمد خطے کے دوسرے سرے سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہو گا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال ρ کیا ہو گا؟ (یہ زیادہ مزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک **غیر مستحکم ذرہ**[۳۵] کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا "عرصہ حیات" τ ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (ممکنہ طور پر) قوت نمائی گھٹے گا۔ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = e^{-t/\tau}$$

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۴ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی V ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں V کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں V_0 حقیقی مخفی توانائی اور Γ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

ا. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}p$$

ب. $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات Γ کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شروڈنگر کے کسی بھی دو عدد (معمول پر لانے کے قابل) حل Ψ_1 ، Ψ_2 کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*\Psi_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ا. معمول زنی مستقل A تلاش کریں۔

[۳۴] probability current
[۳۵] unstable particle

ب. لمحہ $t = 0$ پر x کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر p کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو $P = m\,\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د. x^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ھ. p^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و. $x(\sigma_x)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز. $p(\sigma_p)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹم میکانیات اس وقت کارآمد ہو گی جب ذرے کا ڈی بروگلی طول موج $(\hbar/p)$ نظام کی جسامت (d) سے زیادہ ہو۔ درجہ T (کیلون) پر حراری توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکی توانائی درج ذیل ہو گی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_bT$$

جہاں k_b بولٹزمن مستقل ہے لہٰذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_BT}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹم میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہو گا۔

ا. **ٹھوس اجسام:** فاصلہ جال ٹھوس اجسام میں تقریباً $d = 0.3\,\mathrm{nm}$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران کوانٹم میکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مراکزہ کوانٹم میکانی ہوں گے۔ (**سوڈیم**[۳۶] کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹم میکانی ہوں گے جبکہ جوہری مراکزہ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹم میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مائع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہو گا) ماسوائے $4\,\mathrm{K}$ سے کم درجہ حرارت پر موجود **ہیلیم**[۳۷] کے لئے۔

ب. **گیس:** میکانی دباو P پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کوانٹم میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون $(PV = Nk_BT)$ استعمال کرکے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب: $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5}P^{2/5}$؛ ظاہر ہے ہم m کو چھوٹے سے چھوٹا اور P کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ

[۳۶] sodium
[۳۷] helium

گیس کو کوانٹم میکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباو پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا **بیرونی فضا**[۳۸] میں (جہاں درجہ حرارت 3 K اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً 1 cm ہے) ہائیڈروجن کوانٹم میکانی ہو گا؟

[۳۸] outer space

باب ۲

غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف مقداروں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفی توانائی $V(x,t)$ کی لئے شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V\Psi \tag{۲.۱}$$

حل کرتے ہوئے $\Psi(x,t)$ حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ V وقت t کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں مساوات شروڈنگر کو **علیحدگی متغیرات**[1] کے طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے، جو ماہر طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\varphi(t) \tag{۲.۲}$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں ψ صرف x اور φ صرف t کا تفاعل ہے۔ ظاہری طور پر حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست قدم نظر نہیں آتا ہے لیکن حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً ہوتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے حاصل حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ قابل علیحدگی حلوں کیلئے درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2\,\Psi}{\mathrm{d}x^2}\varphi$$

---

[1] separation of variables

جو سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ان کی مدد سے مساوات شروڈنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\varphi+V\psi\varphi$$

دونوں اطراف کو $\psi\varphi$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+V \tag{۲.۳}$$

اب بائیں ہاتھ تفاعل صرف t کا تابع ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف x کا تابع ہے۔یاد رہے اگر V از خود x اور t دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہو گا۔صرف t تبدیل ہونے سے دایاں ہاتھ کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں لہٰذا t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہو گا۔اسی طرح صرف x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہٰذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہو گا۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔(یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔)اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل کہتے ہیں جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں مساوات ۲.۳ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=E$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{iE}{\hbar}\varphi \tag{۲.۴}$$

اور

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+V=E$$

یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+V\psi=E\psi \tag{۲.۵}$$

علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دو سادہ تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کیا۔ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے۔دونوں اطراف کو $\mathrm{d}t$ سے ضرب دیتے ہوئے تکمل لیں۔یوں عمومی حل $Ce^{-iEt/\hbar}$ حاصل ہو گا۔چونکہ ہم حاصل ضرب $\psi\varphi$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا ہم مستقل C کو ψ میں ضم کر سکتے ہیں۔یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\varphi(t)=e^{-iEt/\hbar} \tag{۲.۶}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو **غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات**[۲] کہتے ہیں۔پوری طرح مخفی توانائی V جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

[۲] time-independent Schrodinger align

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ خفی توانائی کیلئے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات کی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تابع وقت شروڈنگر مساوات کے زیادہ تر حل $\psi(x)\varphi(t)$ کی صورت میں نہیں لکھے جا سکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہو گا۔

1) یہ **ساکن حالات** ہیں۔ اگرچہ تفاعل موج ازخود

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{۲.۷}$$

وقت t کا تابع ہے، کثافت احتمال

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^* e^{+iEt/\hbar}\psi e^{-iEt/\hbar} = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{۲.۸}$$

وقت کا تابع نہیں ہے؛ تابعیت وقت کٹ جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب میں ہو گا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int \psi^* Q\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi\,\mathrm{d}x \tag{۲.۹}$$

ہر توقعاتی قیمت وقت میں مستقل ہو گی؛ یہاں تک کہ ہم $\varphi(t)$ کو رد کر کے Ψ کی جگہ ψ استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات ψ کو ہی تفاعل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسئلے کھڑے ہو سکتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تفاعل موج ہر صورت تابع وقت ہو گا۔ بالخصوص $\langle x\rangle$ مستقل ہو گا لہٰذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت) $\langle p\rangle = 0$ ہو گا۔ ساکن حال میں کبھی بھی کچھ نہیں ہوتا ہے۔

2) یہ غیر مبہم کل توانائی کے حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حرکی جمع خفی) کو **ہیملٹنی**[۳] کہتے ہیں جس کو H سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{۲.۱۰}$$

اس کا مطابقتی ہیملٹنی عامل، قواعد و ضوابط کے تحت $p \to (\hbar/i)(\partial/\partial x)$ پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{۲.۱۱}$$

یوں غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کریگی

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{۲.۱۲}$$

---

[۳] Hamiltonian

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi \, \mathrm{d}x = E \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x = E \int |\Psi|^2 \, \mathrm{d}x = E \tag{۲.۱۳}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ψ کی معمول زنی ψ کی معمول زنی کے مترادف ہے۔ مزید درج ذیل

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E(\hat{H}\psi) = E^2 \psi$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi \, \mathrm{d}x = E^2 \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x = E^2$$

یوں H کی تغیریت درج ذیل ہو گی۔

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0 \tag{۲.۱۴}$$

یاد رہے کہ $\sigma = 0$ کی صورت میں تمام ارکان کی قیمت ایک دوسری جیسی ہو گی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہو گا)۔ نتیجتاً قابل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً ایک ہی قیمت E دے گی۔ (اسی کی بنا علیحدگی مستقل کو E سے ظاہر کیا گیا۔)

3) عمومی حل قابل علیحدگی حلوں کا **خطی جوڑ**[۴] ہو گا۔ جیسا ہم جلد دیکھیں گے، غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \cdots)$ دے گا جہاں ہر ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل $(E_1, E_2, E_3, \cdots)$ منسلک ہو گا لہٰذا ہر **اجازتی توانائی**[۵] کا ایک منفرد تفاعل موج پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x,t) = \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar}, \quad \Psi_2(x,t) = \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}, \cdots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑ از خود ایک حل ہو گا۔ ایک بار قابل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۲.۱۵}$$

حقیقتاً تابع وقت شروڈنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل $(c_1, c_2, \cdots)$ تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط مطمئن کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کر پائیں گے۔

[۴] linear combination
[۵] allowed energy

باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک بار غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں ہم بہت کچھ کہا جا چکا ہے۔ میں ان کو مختصراً اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ زیر غور عمومی مسئلہ کا غیر تابع وقت خفی توانائی $V(x)$ اور ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام t کیلئے $\Psi(x,t)$ تلاش کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلی قدم میں آپ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ $(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\cdots)$ حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی $(E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots)$ ہو گی۔ ٹھیک ٹھیک $\Psi(x,0)$ پر بیٹھنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$\Psi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x) \tag{۲.۱۶}$$

یہاں کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت مستقل $c_1,\ c_2,\ c_3,\cdots$ دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج $\Psi(x,t)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت $e^{-iE_nt/\hbar}$ چسپاں کریں گے۔

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Psi_n(x,t) \tag{۲.۱۷}$$

چونکہ قابل علیحدگی حل

$$\Psi_n(x,t)=\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۲.۱۸}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تابع وقت ہوں گی لہٰذا یہ از خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۷) یہ خاصیت نہیں رکھتا ہے؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیاں ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا $|\Psi|^2$ کا حساب کرتے ہوئے قوت نمائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتی ہیں۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ ابتدائی طور پر دو ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو:

$$\Psi(x,0)=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کے مستقل c_n اور حالات $\psi_n(x)$ حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت t کیلئے تفاعل موج $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا؟ کثافت احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔

حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x,t)=c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

جہاں E_1 اور E_2 بالترتیب تفاعل ψ_1 اور ψ_2 کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|\Psi(x,t)\right|^2 &= \left(c_1\psi_1 e^{iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2 e^{iE_2t/\hbar}\right)\left(c_1\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}\right) \\
&= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + 2c_1c_2\psi_1\psi_2\cos[(E_2-E_1)t/\hbar]
\end{aligned}$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ یولر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ استعمال کیا۔) ظاہری طور پر کثافت احتمال زاویائی تعدد $\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right)$ سے سائن نما ارتعاش کرتا ہے لہٰذا یہ ہر گز ساکن حال نہیں ہو گا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعلات کے خطی جوڑ نے حرکت پیدا کیا۔ □

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

ا. قابل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل E لازماً حقیقی ہو گا۔ اشارہ: مساوات ۲.۷ میں E کو $E_0 + i\Gamma$ لکھ کر (جہاں E اور Γ حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام t کے لئے مساوات ۱.۲۰ اس صورت کارآمد ہو گا جب Γ صفر ہو۔

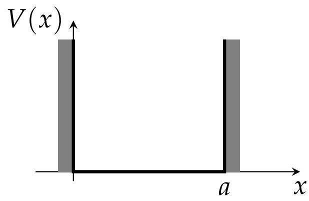
ب. غیر تابع وقت تفاعل موج $\psi(x)$ ہر موقع پر حقیقی لیا جا سکتا ہے (جبکہ تفاعل موج $\Psi(x,t)$ لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تابع شروڈنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہو گا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (اتنی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہو گا کہ آپ صرف حقیقی ψ ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ $(\psi + \psi^*)$ اور $i(\psi - \psi^*)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر $V(x)$ **جفت تفاعل** ہو یعنی $V(-x) = V(x)$ تب $\psi(x)$ کو ہمیشہ جفت یا طاق لیا جا سکتے ہو۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب $\psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ $\psi(x) \pm \psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایا جا سکتا ہو، E کی قیمت لازماً $V(x)$ کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہو گی۔ اس کا کلاسیکی مماثل کیا ہو گا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi$$

دکھائیں کہ $E < V_{\text{کمتر}}$ کی صورت میں ψ اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک دوسری جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہو گا۔



شکل ۱.۲: لامتناہی چکور کنواں مخفیہ (مساوات ۲.۱۹)

۲.۲ لامتناہی چکور کنواں

درج ذیل فرض کریں (شکل ۱.۲)۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۲.۱۹}$$

اس مخفی توانائی میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی $x = 0$ $x = a$ پر، جہاں ایک لامتناہی قوت اس کو فرار ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ ایک کنواں میں ایک لامتناہی لچکدار گیند ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا رہتا ہو۔ (اگرچہ یہ ایک فرضی مخفی توانائی ہے، آپ اس کو اہمیت دیں۔ اگرچہ یہ بہت سادہ نظر آتا ہے البتہ اس کی سادگی کی بنا ہی یہ بہت ساری معلومات فراہم کرنے کے قابل ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

کنواں سے باہر $\psi(x) = 0$ ہوگا (لہٰذا یہاں ذرہ پایا جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنواں کے اندر، جہاں $V = 0$ ہے، غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{۲.۲۰}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi, \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mF}}{\hbar} \tag{۲.۲۱}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے فرض کرتا ہوں کہ $E \geq 0$ ہوگا۔ ہم سوال ۲.۲ سے جانتے ہیں کہ $E < 0$ سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کلاسیکی **سادہ ہارمونی مرتعش**[۱] کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{۲.۲۲}$$

[۱] simple harmonic oscillator

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقلات کو مسئلہ کے **سرحدی شرائط**[7] تعین کرتے ہیں۔ $\psi(x)$ کے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً ψ اور $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہو گا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور $V = \infty$ کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کہی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہو گا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \tag{۲.۲۳}$$

تا کہ کنواں کے باہر اور کنواں کے اندر حل ایک دوسرے کے ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں A اور B کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

ہے لہٰذا $B = 0$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = A \sin kx \tag{۲.۲۴}$$

یوں $\psi(a) = A \sin ka$ کی بنا یا $A = 0$ ہو گا (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل $\psi(x) = 0$ ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا $\sin ka = 0$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$ka = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots \tag{۲.۲۵}$$

اب $k = 0$ (بھی $\psi(x) = 0$ دیتا ہے جس) میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ کی بنا k کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہٰذا ہم منفی کی علامت کو A میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{۲.۲۶}$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ $x = a$ پر سرحدی شرط مستقل A تعین نہیں کرتا ہے بلکہ اس کی بجائے مستقل k تعین کرتے ہوئے E کی اجازتی قیمتیں تعین کرتا ہے:

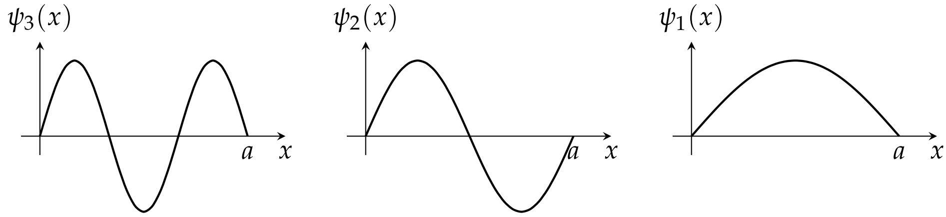
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{۲.۲۷}$$

کلاسیکی صورت کے برعکس لامتناہی چکور کنواں میں کوانٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص **اجازتی**[8] قیمتوں میں سے ہونا ہو گا۔ مستقل A کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ψ کو معمول پر لانا ہو گا:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \Longrightarrow \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

---

[7] boundary conditions
[8] allowed



شکل ۲.۲: لامتناہی چکور کنواں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

یہ A کی صرف مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر $A = \sqrt{2/a}$ منتخب کرنا بہتر ہو گا (کیونکہ A کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنواں کے اندر شروڈنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \tag{۲.۲۸}$$

میرے قول کو پورا کرتے ہوئے، (ہر مثبت عدد صحیح n کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامتناہی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے جو لمبائی a کے دھاگے پر ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل ψ_1 جو **زمینی حال**[۹] کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں n^2 کے براہ راست بڑھتی ہیں **ہیجانی حالات**[۱۰] کہلاتے ہیں۔ تفاعلات $\psi_n(x)$ چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری جفت اور طاق ہیں۔ ψ_1 جفت ہے، ψ_2 طاق ہے، ψ_3 جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔

۲. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے **عقدوں**[۱۱] (عبور صفر) کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہو گا۔ (چونکہ آخری نقاط کے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہٰذا) ψ_1 میں کوئی عقدہ نہیں پایا جاتا ہے، ψ_2 میں ایک پایا جاتا ہے، ψ_3 میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

۳. یہ تمام درج ذیل نقطہ نظر سے باہمی **عمودی**[۱۲] ہیں جہاں $m \neq n$ ہے۔

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{۲.۲۹}$$

---

[۹] ground state
[۱۰] excited states
[۱۱] nodes
[۱۲] orthogonal

ثبوت:

$$\begin{aligned}
\int \psi_m(x)^* \psi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right\}\Bigg|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)}\right\} = 0
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $m = n$ کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہو گا؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں ناقابل قبول ہو گا۔) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل ہمیں بتاتا ہے کہ تکمل کی قیمت 1 ہے۔ در حقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فقرے میں سمویا جا سکتا ہے:[13]

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{۲.۳۰}$$

جہاں δ_{mn} **کرونیکر ڈیلٹا**[14] کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{۲.۳۱}$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام) ψ **معیاری عمودی**[15] ہیں۔

۴. یہ **مکمل**[16] ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تفاعل $f(x)$ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{۲.۳۲}$$

میں تفاعلات $\sin\frac{n\pi x}{a}$ کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اعلیٰ علم الاحصاء کے ساتھ واقفیت کی صورت میں آپ مساوات ۲.۳۲ کو $f(x)$ کا **فوریئر تسلسل**[17] پہچان پائیں گے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جا سکتا ہے، بعض اوقات **مسئلہ ڈرشلے**[18] کہلاتا ہے۔[19]

---

[13] یہاں تمام ψ حقیقی ہیں لہٰذا ψ_m پر $*$ ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقبل کی استعمال کے نقطہ نظر سے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔

[14] Kronecker delta

[15] orthonormal

[16] complete

[17] Fourier series

[18] Dirichlet's theorem

[19] تفاعل $f(x)$ میں متناہی تعداد کی عدم استمرار (چھلانگ) پائے جا سکتی ہیں۔

کسی بھی دیے گئے تفاعل $f(x)$ کے لئے عددی سروں c_n کو $\{\psi_n\}$ کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو $\psi_m(x)$ سے ضرب دے کر تکمل لیں:

$$\int \psi_m(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m \tag{۲.۳۳}$$

(آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرونیکر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دیتا ہے ماسوائے اس جزو کو جس کے لئے $n = m$ ہو۔) یوں تفاعل $f(x)$ کے پھیلاو کے n ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہو گا۔[۲۰]

$$c_n = \int \psi_n(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۳۴}$$

درج بالا چار خواص انتہائی طاقتور ہیں جو صرف لامتناہی چکور کنواں کے لیے مخصوص نہیں ہیں۔ پہلا خواص ہر اس صورت میں کارآمد ہو گا جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسرا، مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عالمگیر خواص ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ ان تمام مخفیہ کے لئے جن کو آپ کا (ممکنہ) سامنا ہو سکتا ہے کے لئے مکملیت کارآمد ہو گی، لیکن اس کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ جس کی بنا عموماً ماہر طبیعیات یہ ثبوت دیکھے بغیر، اس کو مان لیتے ہیں۔

لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t} \tag{۲.۳۵}$$

میں نے دعویٰ کیا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو گا۔

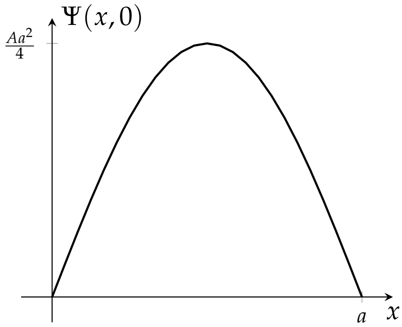
$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t} \tag{۲.۳۶}$$

(اگر آپ کو اس حل پر شک ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج $\psi(x,0)$ پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر c_n درکار ہوں گے:

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

تفاعلات ψ کی مکملیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشلے کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر $\psi(x,0)$ کو ہر صورت یوں بیان کر سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا c_n کو فوریئر تسلسل سے حاصل

[۲۰] آپ یہاں نقلی متغیر کو m یا n یا کوئی تیسرا حرف لے سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کریں)، اور ہاں یاد رہے کہ یہ حرف "کسی مثبت عدد صحیح" کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

کیا جا سکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\Psi(x,0)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۳۷}$$

آپ نے دیکھا: دی گئی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاو کے عددی سروں c_n کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں پر کر $\Psi(x,t)$ حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج جانتے ہوئے دلچسپی کی کسی بھی حرکی مقدار کا حساب، باب ۱ میں مستعمل تراکیب استعمال کرتے ہوئے، کیا جا سکتا ہے۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہو گا؛ صرف ψ کی قیمتیں اور اجازتی توانائیاں یہاں سے مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جہاں A ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x), \qquad (0 \le x \le a)$$

کنواں سے باہر $\psi = 0$ ہے۔ $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_0^a x^2(a-x)^2\,\mathrm{d}x = |A|^2\,\frac{a^5}{30}$$

A تعین کرتے ہیں:

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مساوات ۲.۳۷ کے تحت n واں عددی سر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[a\int_0^a x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left\{a\left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]\Big|_0^a\right. \\
&\quad \left. - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2-2}{(n\pi/a)^3}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]\Big|_0^a\right\} \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[-\frac{a^3}{n\pi}\cos(n\pi) + a^3\frac{(n\pi)^2-2}{(n\pi)^3}\cos(n\pi) + a^3\frac{2}{(n\pi)^3}\cos(0)\right] \\
&= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}[\cos(0)-\cos(n\pi)] \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا (مساوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5\cdots} \frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

غیر محتاط بات چیت میں ہم کہتے ہیں کہ Ψ میں ψ_n کی مقدار کو c_n ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ n ویں ساکن حال میں ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے جو درست نہیں چونکہ ذرہ حال Ψ میں نا کہ حال ψ_n میں پایا جاتا ہے؛ مزید تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرہ کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی مشہود کی پیمائش کرتے ہو جس کا جواب ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیمائش سے E_n قیمت حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ (کوئی بھی پیمائش، "اجازتی" قیمتوں میں سے کوئی ایک دے گی، اسی لئے انہیں اجازتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہو گا

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = 1 \tag{۲.۳۸}$$

جس کا ثبوت Ψ کی عمودزنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام c_n غیر تابع وقت ہیں لہٰذا میں $t = 0$ پر ثبوت پیش کرتا ہوں۔ آپ باآسانی اس ثبوت کو عمومیت دے کر کسی بھی t کے لئے ثبوت پیش کر سکتے ہیں)۔

$$\begin{aligned}
1 &= \int \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = \int \Big(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m(x)\Big)^* \Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)\Big) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^*\psi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2
\end{aligned}$$

(یہاں بھی m پر مجموعہ لینے میں کرونیکر ڈیلٹا جزو $m = n$ کو چنتا ہے۔)

مزید، توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً درج ذیل ہوگی

$$\langle H\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n \tag{۲.۳۹}$$

جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جا سکتی ہے: غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کہتی ہے

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۲.۴۰}$$

لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
\langle H\rangle &= \int \Psi^* H\Psi\,\mathrm{d}x = \int \Big(\sum c_m\psi_m\Big)^* H\Big(\sum c_n\psi_n\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum\sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^*\psi_n\,\mathrm{d}x = \sum |c_n|^2 E_n
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابع وقت ہوگا اور یوں H کی توقعاتی قیمت بھی غیر تابع وقت ہوگی۔ کوانٹم میکانیات میں **بقا توانائی**[21] کی یہ ایک مثال ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تفاعل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال ψ_1 (شکل ۲.۲) کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ $|c_1|^2$ غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 = 0.998555\cdots$$

باقی تمام عددی سر مل کر فرق دیتے ہیں:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

---

[21] conservation of energy

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت ہماری توقعات کے عین مطابق درج ذیل ہے۔

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \right)^2 \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{480\hbar^2}{\pi^4 ma^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2}$$

یہ $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ کے بہت قریب، ہیجان حل حالتوں کی شمول کی بنا معمولی زیادہ ہے۔ □

سوال ۲.۳: دکھائیں کہ لامتناہی چوکور کنواں کے لئے $E = 0$ یا $E < 0$ کی صورت میں غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کا کوئی بھی قابل قبول حل نہیں پایا جاتا ہے۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک خصوصی صورت ہے، لیکن اس بار شروڈنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط پر پورا نہیں اتر سکتے ہیں۔)

سوال ۲.۴: لامتناہی چوکور کنواں کے n ویں ساکن حال کیلئے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ ، σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال عدم یقینیت کی حد کے قریب ترین ہو گا؟

سوال ۲.۵: لامتناہی چوکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج اولین دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔ (یعنی A تلاش کریں۔ آپ ψ_1 اور ψ_2 کی معیاری عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ $t = 0$ پر Ψ کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا۔ اگر آپ کو شک ہے، جزو-ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ موخر الذکر کو وقت کے سائن نما تفاعل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا۔ نتائج کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر $\omega \equiv \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$ لیں۔

ج. $\langle x \rangle$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔ اس ارتعاش کی زاویائی تعدد کتنی ہو گی؟ ارتعاش کا حیطہ کیا ہو گا؟ (اگر آپ کا حیطہ $\frac{a}{2}$ سے زیادہ ہو تب آپ کو جیل بھیجنے کی ضرورت ہو گی۔)

د. $\langle p \rangle$ تلاش کریں (اور اس پہ زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ہ. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش سے کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں؟ اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہو گا؟ H کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ E_1 اور E_2 کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگرچہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی بامعنی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (چونکہ یہ کسی بھی قابل پیمائش مقدار میں کٹ جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر ہم سوال ۲.۵ میں ψ_1 اور ψ_2 کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کرتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

جہاں ϕ کوئی مستقل ہے۔ $\Psi(x,t)$ ، $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ اور $\langle x\rangle$ تلاش کرکے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص $\phi = \pi/2$ اور $\phi = \pi$ کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le a/2 \\ A(a-x), & a/2 \le x \le a \end{cases}$$

ا. $\Psi(x,0)$ کا خاکہ کھینچیں اور مستقل A کی قیمت تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ E_1 ہونے کا احتمال کتنا ہو گا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک لامتناہی چکور کنواں، جس کی چوڑائی a ہے، میں کمیت m کا ایک ذرہ کنواں کے بائیں حصے سے ابتدا ہوتا ہے اور یہ $t=0$ پر بائیں نصف حصے کے کسی بھی نقطے پر ہو سکتا ہے۔

ا. اس کی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ تلاش کریں۔(فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے اور اسے معمول پر لانا نا بھولیے گا۔)

ب. پیمائش توانائی کا نتیجہ $\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۲.۹: لمحہ $t=0$ پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے H کی توقعاتی قیمت تکمل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\langle H\rangle = \int \Psi(x,0)^* \hat{H}\,\Psi(x,0)\,\mathrm{d}x$$

مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔ دھیان رہے کیونکہ H غیر تابع وقت ہے لہٰذا $t=0$ لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

۲.۳ ہارمونی مرتعش

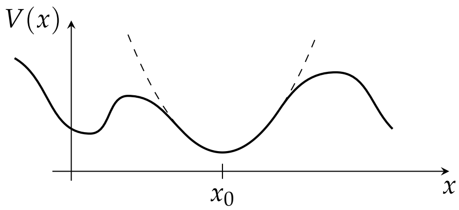
کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک لچک دار اسپرنگ جس کا مقیاس لچک k ہو اور کمیت m پر مشتمل ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت **قانون ہک**[۲۲]

$$F = -kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

کے تحت ہو گی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

[۲۲] Hooke's law



شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے مقامی کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکافی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

ہو گا جہاں

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۲.۴۱}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{۲.۴۲}$$

ہو گی جس کی ترسیم قطع مکافی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی مسرتعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور قانون ہک اس سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہو گا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، مقامی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں تخمیناً قطع مکافی ہو گا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی $V(x)$ کے کم سے کم نقطہ x_0 کے لحاظ سے $V(x)$ کو **ٹیلر تسلسل**[۲۳] کے لحاظ سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

اس سے $V(x_0)$ منفی کرکے (ہم $V(x)$ سے کوئی بھی مستقل بغیر خطر و فکر منفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہو گا) اور یہ جانتے ہوئے کہ $V'(x_0) = 0$ ہو گا (چونکہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلند رتبی ارکان رد کرتے ہوئے (جو $(x - x_0)$ کی قیمت کم ہونے کی صورت میں قابل نظر انداز ہوں گے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

جو نقطہ x_0 پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس لچک $k = V''(x_0)$ ہو۔ یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا سادہ ہارمونی مسرتعش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا حیطہ کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہو گا۔

---

[۲۳] Taylor series

کوانٹم میکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{۲.۴۳}$$

کے لیے شروڈنگر مساوات حل کرنی ہو گی (جہاں روایتی طور پر مقیاس لچک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہو گا کہ ہم غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \tag{۲.۴۴}$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو "طاقت کے بل بوتے پر" **طاقتی تسلسل**[۲۴] کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولمب مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **عاملین سیڑھی** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور جلد حل دیتا) ہے۔ اگر آپ طاقتی تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپکو یہ ترکیب سیکھنی ہو گی۔

۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتدا کرتے ہیں

$$\frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]\psi = E\psi \tag{۲.۴۵}$$

جہاں $p \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{d}{\mathrm{d}x}$ معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2] \tag{۲.۴۶}$$

کو اجزائے ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عدد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ p اور x عاملین ہیں اور عاملین عموماً **مقلوب** نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ xp سے مراد px نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل مقداروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$a\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x) \tag{۲.۴۷}$$

---

[۲۴] power series

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب a_-a_+ کیا ہو گا؟

$$\begin{aligned} a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو $(xp - px)$ پایا جاتا ہے جس کو ہم x اور p کا **مقلب**[25] کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیمائش ہے۔ عمومی طور پر عامل A اور عامل B کا مقلب (جسے چکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہو گا۔

$$[A, B] \equiv AB - BA \tag{۲.۴۸}$$

اس علامتیت کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$a_-a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar}[x, p] \tag{۲.۴۹}$$

ہمیں x اور عددی p کا مقلب دریافت کرنا ہو گا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہو گا کہ عاملین پرکھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل $f(x)$ عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آخر میں اس پرکھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$[x, p]f(x) = \left[x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{\mathrm{d}x}(f) - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{\mathrm{d}x}(xf)\right] = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\right) = -i\hbar f(x) \tag{۲.۵۰}$$

پرکھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$[x, p] = i\hbar \tag{۲.۵۱}$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے **باضابطہ مقلبیت رشتہ**[26] کہلاتا ہے۔

اسے کے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$a_-a_+ = \frac{1}{\hbar\omega}H + \frac{1}{2} \tag{۲.۵۲}$$

یا

$$H = \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right) \tag{۲.۵۳}$$

---

[25] commutator
[26] canonical commutation relation

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیملٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا اور دائیں ہاتھ اضافی $-\frac{1}{2}$ ہو گا۔ یاد رہے گا یہاں a_+ اور a_- کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ a_+ کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a_+a_- = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \tag{۲.۵۴}$$

بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$[a_-, a_+] = 1 \tag{۲.۵۵}$$

یوں ہیملٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$H = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right) \tag{۲.۵۶}$$

ہارمونی مرتعش کی شروڈنگر مساوات کو $a_\pm$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hbar\omega\left(a_\pm a_\mp \pm \frac{1}{2}\right) = E\psi \tag{۲.۵۷}$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی E کی شروڈنگر مساوات کو ψ مطمئن کرتا ہو $(H\psi = E\psi)$ تب توانائی $(E + \hbar\omega)$ کی شروڈنگر مساوات کو $a_+\psi$ مطمئن کرے گا: $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$

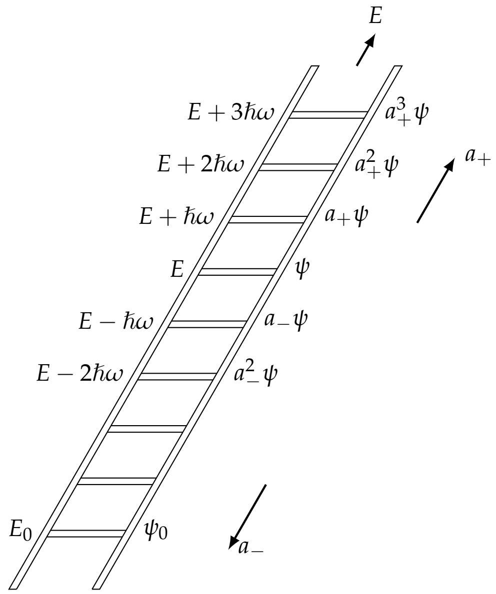
ثبوت:

$$\begin{aligned}
H(a_+\psi) &= \hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2})(a_+\psi) = \hbar\omega(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+)\psi \\
&= \hbar\omega a_+(a_-a_+ + \tfrac{1}{2})\psi = a_+\left[\hbar\omega(a_+a_- + 1 + \tfrac{1}{2})\psi\right] \\
&= a_+(H + \hbar\omega)\psi = a_+(E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)
\end{aligned}$$

(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے a_-a_+ کی جگہ $a_+a_- + 1$ استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ a_+ اور a_- کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے، $a\pm$ اور کسی بھی مستقل، مثلاً $\hbar$ ، ω اور E، کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہو گا۔)

اسی طرح حل $a_-\psi$ کی توانائی $(E - \hbar\omega)$ ہو گی۔

$$\begin{aligned}
H(a_-\psi) &= \hbar\omega(a_-a_+ - \tfrac{1}{2})(a_-\psi) = \hbar\omega a_-\,(a_+a_- - \tfrac{1}{2})\psi \\
&= a_-\left[\hbar\omega(a_-a_+ - 1 - \tfrac{1}{2})\psi\right] = a_-(H - \hbar\omega)\psi = a_-(E - \hbar\omega)\psi \\
&= (E - \hbar\omega)(a_-\psi)
\end{aligned}$$



شکل ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے حالات کی "سیڑھی"۔

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جانتے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $a_\pm$ کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہٰذا انہیں ہم **عاملین سیڑھی**[۲۷] پکارتے ہیں: a_+ **عامل رفعت**[۲۸] اور a_- **عامل تقلیل**[۲۹] ہے۔ حالات کی "سیڑھی" کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

ذرا رکیے! عامل تقلیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہو گا جس کی توانائی صفر سے کم ہو گی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے۔) نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطے پر لازماً ناکامی کا شکار ہو گی۔ ایسا کیوں کر ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $a_-\psi$ شروڈنگر مساوات کا ایک نیا حل ہو گا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جا سکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے قابل بھی ہو گا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مربع تکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہو گا: سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ (جس کو ہم ψ_0 کہتے ہیں) پر درج ذیل ہو گا۔

$$a_-\psi_0 = 0 \tag{۲.۵۸}$$

---

[۲۷] ladder operators
[۲۸] raising operator
[۲۹] lowering operator

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\psi_0(x)$ تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x)\psi_0=0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}=-\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0$$

لکھی جا سکتی ہے جسے با آسانی حل کیا جا سکتا ہے:

$$\int\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\psi_0}=-\frac{m\omega}{\hbar}\int x\,\mathrm{d}x \implies \ln\psi_0=-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+C$$

(C مستقل ہے۔) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_0(x)=Ae^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ہم اس کو یہیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m\omega x^2/\hbar}\,\mathrm{d}x=|A|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}$$

لہٰذا $A^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{۲.۵۹}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شروڈنگر مساوات میں پر کر کے

$$\hbar\omega(a_+a_-+\tfrac{1}{2})\psi_0=E_0\psi_0$$

یہ جانتے ہوئے کہ $a_-\psi_0=0$ ہو گا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega \tag{۲.۶۰}$$

سیڑھی کے نچلا پایہ (جو کوانٹم مرتعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جا سکتے ہیں[30] جہاں ہر قدم پر توانائی میں $\hbar\omega$ کا اضافہ ہو گا۔

$$\psi_n(x)=A_n(a_+)^n\psi_0(x),\qquad E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \tag{۲.۶۱}$$

[30] ہارمونی مرتعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے ہٹ کر، حالات کی شمار $n=1$ کی بجائے $n=0$ سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۱۷ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔

یہاں A_n مستقل معمول زنی ہے۔ یوں ψ_0 پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی مرتعش کے تمام ساکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسا کیے بغیر ہم تمام اجازتی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

مثال ۲.۴: ہارمونی مرتعش کا پہلا ہیجان حال تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\Big(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\omega x\Big)\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\ &= A_1\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\end{aligned} \tag{۲.۶۲}$$

ہم اس کو قلم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int \left|\psi_1\right|^2 \mathrm{d}x = \left|A_1\right|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\Big(\frac{2m\omega}{\hbar}\Big)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\,\mathrm{d}x = \left|A_1\right|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $A_1 = 1$ ہو گا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے ψ_50 حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محتاط چلنا ہو گا لہٰذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ $a \pm \psi_n$ اور $\psi_{n\pm1}$ ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$a_+\psi_n = c_n\psi_{n+1}, \qquad a_-\psi_n = d_n\psi_{n-1} \tag{۲.۶۳}$$

تناسبی مستقل c_n اور d_n کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لیے درج ذیل ہو گا۔ (ظاہر ہے کہ تکملات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کو لازماً صفر پہنچنا ہو گا۔)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(a_\mp f)^* g\,\mathrm{d}x \tag{۲.۶۴}$$

(خطی الجبرا کی زبان میں $a\mp$ اور $a\pm$ ایک دوسرے کے **ہرمشی جوڑی دار**[۳۱] ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*\Big(\mp\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\omega x\Big)g\,\mathrm{d}x$$

---

[۳۱] Hermitian conjugate

تکمل بالحصص کے ذریعے $\int f^*\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$ سے $-\int\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^* g\,\mathrm{d}x$ حاصل ہوگا (جہاں $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\pm\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)f\right]^* g\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(a_\mp f)^* g\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a_\pm\psi_n)^*(a_\pm\psi_n)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(a_\mp a_\pm\psi_n)^*\psi_n\,\mathrm{d}x$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$a_+a_-\psi_n = n\psi_n,\qquad a_-a_+\psi_n = (n+1)\psi_n \tag{۲.۶۵}$$

ہوگا لہٰذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(a_+\psi_n)^*(a_+\psi_n)\,\mathrm{d}x &= |c_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{n+1}|^2\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x\\ \int_{-\infty}^{\infty}(a_-\psi_n)^*(a_-\psi_n)\,\mathrm{d}x &= |d_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{n-1}|^2\,\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

چونکہ ψ_n اور $\psi_{n\pm1}$ معمول شدہ ہیں، لہٰذا $|c_n|^2 = n+1$ اور $|d_n|^2 = n$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1},\qquad a_-\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1} \tag{۲.۶۶}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}&\psi_1 = a_+\psi_0,\quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_+\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+)^2\psi_0,\\ &\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}a_+\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3\cdot2}}(a_+)^3\psi_0,\quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}a_+\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4\cdot3\cdot2}}(a_+)^4\psi_0,\end{aligned}$$

دیگر تفاعلات بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n\psi_0 \tag{۲.۶۷}$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ ہوگا۔ (بالخصوص $A_1 = 1$ ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \,\mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{۲.۶۸}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دو بار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے a_+ اور بعد میں a_- اپنی جگہ سے ہلا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* (a_+ a_-) \psi_n \,\mathrm{d}x &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n \,\mathrm{d}x \\
&= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

جب تک $m = n$ نہ ہو $\int \psi_m^* \psi_n \,\mathrm{d}x$ لازماً صفر ہوگا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم $\psi(x,0)$ کو ساکن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عددی سر مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے n ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n \,\mathrm{d}x$$

اس قسم کے تکملات جن میں x یا p کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات x اور p کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a_+ - a_-) \tag{۲.۶۹}$$

اس مثال میں ہم x^2 میں دلچسپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \int \psi_n^* \Big[(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2\Big] \psi_n \,\mathrm{d}x$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے) $(a_+)^2\psi_n$ تفاعل ψ_{n+2} کو ظاہر کرتا ہے جو ψ_n کو عمودی ہے۔ یہی کچھ $(a_-)^2\psi_n$ کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے جو ψ_{n-2} کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کرکے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(n+n+1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

جیسا آپ نے دیکھا مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حرکی توانائی ہے)۔ جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی مرتعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔ □

سوال ۲.۱۰:

ا. $\psi_2(x)$ تیار کریں۔

ب. ψ_0 ، ψ_1 ، ψ_2 کا خاکہ کھینچیں۔

ج. ψ_0 ، ψ_1 ، ψ_2 کی عمودیت کی تصدیق تکمل لے کر صریحاً کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک تکمل حل کرنا ہو گا۔

سوال ۲.۱۱:

ا. حالات ψ_0 (مساوات ۲.۵۹) اور ψ_1 (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح تکملات لے کر $\langle x\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، اور $\langle p^2\rangle$ کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی مرتعش کے مسائل میں متغیر $\xi \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}x$ اور مستقل $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حرکی توانائی $\langle T\rangle$ اور اوسط مخفی توانائی $\langle V\rangle$ کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپکو نیا تکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی مرتعش کے n ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $\langle x\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، $\langle p^2\rangle$ اور $\langle T\rangle$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی مرتعش مخفی قوہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = A[3\psi_0(x)+4\psi_1(x)]$$

ا. A تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x,t)$ اور $|\Psi(x,t)|^2$ تیار کریں۔

ج. $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں $\psi_1(x)$ کی بجائے $\psi_2(x)$ دیتا تب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ اہرنفسٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی مسر تعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد ω پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس لچک 4 گنا ہو جاتا ہے لہٰذا $\omega' = 2\omega$ ہو گا جبکہ ابتدائی تفاعل موج تبدیل نہیں ہو گا (یقیناً ہیملٹنی تبدیل ہونے کے بنا Ψ اب مختلف انداز سے ارتقا پائے گا)۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی $\hbar\omega/2$ قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ $\hbar\omega$ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی مسر تعش کی شروڈنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi=E\psi \tag{۲.۷۰}$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلاواسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{۲.۷۱}$$

شروڈنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}=(\xi^2-K)\psi \tag{۲.۷۲}$$

جہاں K توانائی ہے جس کی اکائی $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ہے۔

$$K\equiv\frac{2E}{\hbar\omega} \tag{۲.۷۳}$$

ہم نے مساوات ۲.۷۲ کو حل کرنا ہو گا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں K اور (یوں E) کی "اجازتی" قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔

ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں ξ کی قیمت (یعنی x کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں ξ^2 کی قیمت K کی قیمت سے بہت زیادہ ہو گی لہٰذا مساوات ۲.۷۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}\approx\xi^2\psi \tag{۲.۷۴}$$

جس کا تخمینی حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$\psi(\xi)\approx Ae^{-\xi^2/2}+Be^{+\xi^2/2} \tag{۲.۷۵}$$

اس میں B کا جزو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے (چونکہ $|x| \to \infty$ کرنے سے اس کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے)۔ طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل متقارب صورت کا ہو گا۔

$$\psi(\xi) \to (\quad)e^{-\xi^2/2} \qquad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے}) \tag{۲.۷۶}$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت نما حصے کو "چھیلنا" چاہیے،

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/2} \tag{۲.۷۷}$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے، $h(\xi)$، اس کی صورت $\psi(\xi)$ سے سادہ ہو۔[۳۲] ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفرقات

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = \Big(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} - \xi h\Big)e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} = \Big(\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + (\xi^2-1)h\Big)e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہٰذا شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + (K-1)h = 0 \tag{۲.۷۸}$$

ہم **ترکیب فروبنیوس**[۳۳] استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل ξ کے طاقتی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi^j \tag{۲.۷۹}$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفرقات

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j\xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3\xi + 3\cdot 4a_4\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

---

[۳۲] اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمین سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفرقی مساوات کے طاقتی تسلسل حل میں متقاربی جزو کا چھیلنا عموماً پہلا قدم ہوتا ہے۔

[۳۳] Frobenius method

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_{j=0}^{\infty}[(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j]\xi^j = 0 \tag{۲.۸۰}$$

طاقتی تسلسل پھیلاو کے یکتائی کی بنا ξ کے ہر طاقت کا عددی سر صفر ہو گا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)}a_j \tag{۲.۸۱}$$

یہ **کلیہ توالی**[۳۴] شروڈنگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو a_0 سے ابتداء کرتے ہوئے تمام جفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2}a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12}a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24}a_0, \cdots$$

اور a_1 سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6}a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20}a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120}a_1, \cdots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi) \tag{۲.۸۲}$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + \cdots$$

متغیر ξ کا جفت تفاعل ہے جو از خود a_0 پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1\xi + a_3\xi^3 + a_5\xi^5 + \cdots$$

طاق تفاعل ہے جو a_1 پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات a_0 اور a_1 کی صورت میں ξ تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ j کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توالی (تخمیناً) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j}a_j$$

---

[۳۴] recursion formula

جس کا تخمینی حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

ہو گا جہاں C ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی ξ کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2}$$

اور اب اگر h کی قیمت e^{ξ^2} کے لحاظ سے بڑھے تب ψ (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں) $e^{\xi^2/2}$ (مساوات ۲.۷۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متقاربی روپ ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طاقتی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر j کی ایک ایسی بلند ترین قیمت، n، پائی جائے گی جو $a_{n+2} = 0$ دیتی ہو (یوں $h_{\text{جفت}}$ تسلسل یا $h_{\text{طاق}}$ تسلسل اختتام پذیر ہو گا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہو گا: جفت n کی صورت میں $a_1 = 0$ ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں $a_0 = 0$ ہو گا)۔ یوں قابل قبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$K = 2n + 1$$

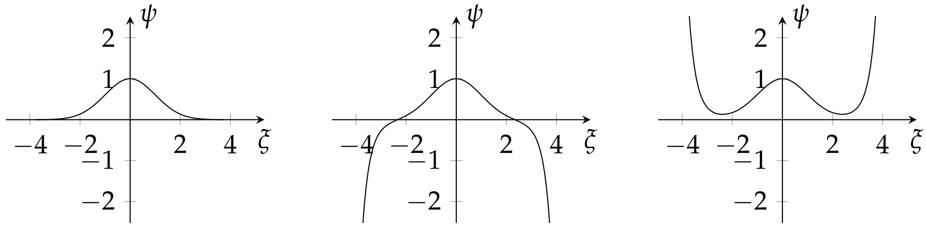
جہاں n کوئی غیر منفی عدد صحیح ہو گا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۷۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{۲.۸۳}$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹازنی شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹازنی، شروڈنگر مساوات کے طاقتی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً E کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۷۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر E کے لیے اس کے دو خطی غیر تابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی x پر، بے قابو قوت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنا پہ معمول پر لانے کے قابل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم E کی کسی ایک اجازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً $0.49\hbar\omega$) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-ا)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب E کی قیمت کسی ایک اجازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً $0.51\hbar\omega$) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-ب)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے قابل حل دے گی (شکل ۲.۶-ج)۔

کلیہ توالی K کی اجازتی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j \tag{۲.۸۴}$$



(ج) (ب) (ا)

شکل ۲.۶: مساوات شروڈنگر کی (ا) $E = 0.49\hbar\omega$، (ب) $E = 0.51\hbar\omega$ اور (ج) $E = \hbar\omega$ صورت میں حل۔

اگر $n = 0$ ہو تب تسلسل میں ایک جزو پایا جائے گا (ہمیں $a_1 = 0$ لینا ہو گا تا کہ $h_{\text{طاق}}$ خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 0$ سے $a_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہٰذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم $n = 1$ کے لیے $a_0 = 0$ لیں گے[۳۵]، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 1$ سے $a_3 = 0$ حاصل ہو گا، لہٰذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہو گا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم $n = 2$ کے لیے $j = 0$ لے کر $a_2 = -2a_0$ اور $j = 2$ لے کر $a_4 = 0$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا۔) عمومی طور پر $h_n(\xi)$ متغیر ξ کا n درجی کثیر رکنی ہو گا، جو جفت عدد صحیح n کی صورت میں

[۳۵] دھیان رہے کہ n کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں a_j کا ایک منفرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۱.۲: ابتدائی چند ہرمائٹ کثیر رکنیاں $H_n(\xi)$

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 1\\
H_1 &= 2\xi\\
H_2 &= 4\xi^2 - 2\\
H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi\\
H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12\\
H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi
\end{aligned}
$$

جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح n کی صورت میں طاق طاقتوں کا کثیر رکنی ہو گا۔ جزو ضربی a_0 اور a_1 کے علاوہ یہ عین **ہرمائٹ کثیر رکنی**[36] $H_n(\xi)$ ہیں[37]۔ جدول ۱.۲ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جزو ضربی یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ ξ کے بلند تر طاقت کا عددی سر 2^n ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی مرتعش کے معمول شدہ[38] ساکن حالات درج ذیل ہوں گے

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \tag{۲.۸۵}$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶۷ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

شکل ۲.۷-ا اور ب میں چند ابتدائی n کے لیے $\psi_n(x)$ اور $|\psi_n(x)|^2$ ترسیم کیے گئے ہیں۔ کوانٹم مرتعش حیران کن حد تک کلاسیکی مرتعش سے مختلف ہے۔ نہ صرف اس کی توانائیاں کوانٹاشدہ ہیں بلکہ اس کی موضعی تقسیم کے بھی عجیب خواص پائے جاتے ہیں۔ مثلاً کلاسیکی طور پر اجازتی سعت کے باہر (یعنی توانائی کے کلاسیکی حیطہ سے زیادہ x پر) ذرہ پایا جانے کا احتمال غیر صفر ہے (سوال ۲.۱۵ دیکھیں) اور تمام طاق حالات میں عین وسط پر ذرہ پائے جانے کا احتمال صفر ہے۔ کلاسیکی اور کوانٹائی صورتوں میں مشابہت صرف n کی بڑی قیمتوں پر پائی جاتی ہے۔ میں نے شکل ۲.۷-ج میں کلاسیکی موضعی تقسیم کو $n = 10$ کے کوانٹائی موضعی تقسیم پر ترسیم کیا ہے۔ انہیں ہموار کرنے سے یہ ایک دوسرے پر اچھی طرح بیٹھتے ہیں (البتہ کلاسیکی صورت میں ہم ایک ارتعاش میں وقت کے لحاظ سے مقام کی تقسیم کی بات کرتے ہیں جبکہ کوانٹائی صورت میں ہم یکساں تیار کردہ حالات کے ایک سگرا کی تقسیم کی بات کرتے ہیں)۔[39]

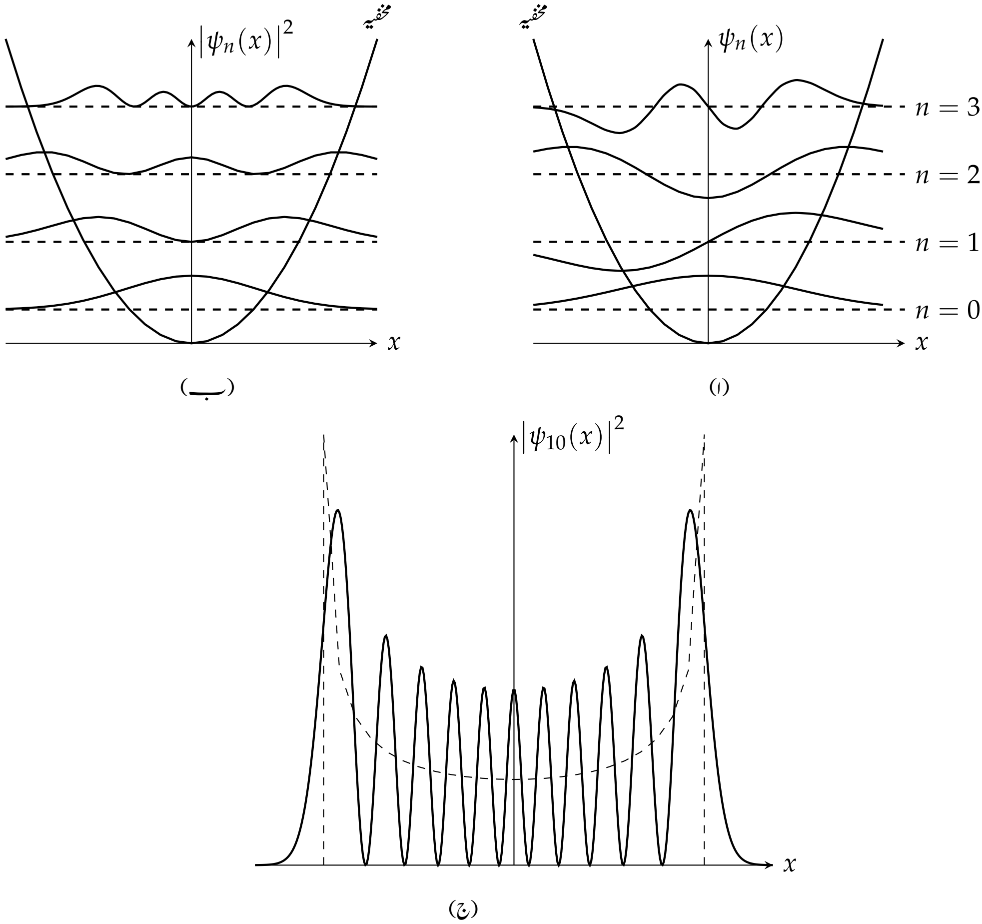
سوال ۲.۱۵: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں کلاسیکی اجازتی خطہ کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین بامعنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک مرتعش کی توانائی $E = (1/2)ka^2 = (1/2)m\omega^2a^2$ ہو گی جہاں a حیطہ ہے۔ یوں توانائی E کے مرتعش کا "کلاسیکی اجازتی خطہ" $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ تا

[36] Hermite polynomials

[37] ہرمائٹ کثیر رکنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

[38] میں یہاں معمول زنی مستقلات حاصل نہیں کروں گا۔

[39] کلاسیکی تقسیم کو ایک جیسی توانائی کے متعدد مرتعشات، جن کے نقاط آغاز بلا منصوبہ ہوں، کا سگرا تصور کرتے ہوئے یہ مماثل زیادہ بہتر ہو گا۔



شکل ۲.۷: ہارمونی مرتعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

$+\sqrt{2E/m\omega^2}$ ہوگا۔ تکمل کی قیمت "عمومی تقسیم" یا "تفاعل خلل" کی جدول سے دیکھیں۔

سوال ۲.۱۶: کلیہ توالی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کرکے $H_5(\xi)$ اور $H_6(\xi)$ تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر ξ کی بلند تر طاقت کا عددی سر روایت کے تحت 2^n لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہم ہرمائٹ کثیر رکنی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

ا. **کلیہ روڈریگیس**[40] درج ذیل کہتا ہے۔

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} e^{-\xi^2} \tag{۲.۸۶}$$

اس کو استعمال کرکے H_3 اور H_4 اخذ کریں۔

ب. درج ذیل کلیہ توالی گزشتہ دو ہرمائٹ کثیر رکنیوں کی صورت میں H_{n+1} دیتا ہے۔

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi) \tag{۲.۸۷}$$

اس کو جزو-ا کے نتائج کے ساتھ استعمال کرکے H_5 اور H_6 تلاش کریں۔

ج. اگر آپ n رتبی کثیر رکنی کا تفرق لیں تو آپکو $n-1$ رتبی کثیر رکنی حاصل ہوگی۔ ہرمائٹ کثیر رکنیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}\xi} = 2nH_{n-1}(\xi) \tag{۲.۸۸}$$

جس کی تصدیق ہرمائٹ کثیر رکنی H_5 اور H_6 کے لئے کریں۔

د. **پیداکار تفاعل**[41] $e^{-z^2+2z\xi}$ کا $z=0$ پر n واں تفرق $H_n(\xi)$ ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر پھیلاو میں یہ $z^n/n!$ کا عددی سر ہوگا۔

$$e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) \tag{۲.۸۹}$$

اس کو استعمال کرکے H_0 ، H_1 اور H_2 دوبارہ اخذ کریں۔

[40] Rodrigues formula
[41] generating function

۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے ہر جگہ $V(x) = 0$ ہو گا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہونی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہو گی، لیکن کوانٹم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ذیل

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{۲.۹۰}$$

یا ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۹۱}$$

یہاں تک یہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوہ صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نما (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہو گی۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{۲.۹۲}$$

لامتناہی چکور کنواں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو k (اور یوں E) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہٰذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حامل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تابعیت وقت $e^{-iEt/\hbar}$ جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) = Ae^{ik(x-\frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x+\frac{\hbar k}{2m}t)} \tag{۲.۹۳}$$

ایسا کوئی بھی تفاعل جو x اور t متغیرات کی مخصوص جوڑ $(x \pm vt)$ کا تابع ہو (جہاں v مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو v رفتار سے $\mp x$ رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تفاعل کے **دلیل**[۴۲] کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہو گا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x = \mp vt + \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہٰذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (اتنی ہی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں فرق صرف k کی علامت کا ہے لہٰذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Psi_k(x,t) = Ae^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)} \tag{۲.۹۴}$$

---

[۴۲] argument

جہاں k کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$k \equiv \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases} \tag{۲.۹۵}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے "ساکن حالات" حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج $\lambda = 2\pi/|k|$ ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگ لی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$p = \hbar k \tag{۲.۹۶}$$

ان امواج کی رفتار (یعنی t کا عددی سر تقسیم x کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}} \tag{۲.۹۷}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی E ہو (جو خالصتاً حرکی ہوگی چونکہ $V = 0$ ہے) کی کلاسیکی رفتار $E = (1/2)mv^2$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}} \tag{۲.۹۸}$$

ظاہری طور پر کوانٹم میکانی تفاعل موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^*\Psi_k \,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = |A|^2\,(\infty) \tag{۲.۹۹}$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں قابل علیحدگی حل طبعی طور پر قابل قبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جا سکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ قابل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی قابل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ n پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر k کے لحاظ سے تکمل ہوگا)۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)}\,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۰}$$

(ہم $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ کو اپنی آسانی کیلئے تکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر c_n کی جگہ یہاں $(1/\sqrt{2\pi})\phi(k)\,\mathrm{d}k$ کردار ادا کرتا ہے۔) اب اس تفاعل موج کو (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جا سکتا

ہے۔ تاہم اس میں k کی قیمتوں کی سعت پائی جائے گی، لہٰذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائیں گی۔ ہم اس کو **موجی اکٹھ**[۴۳] کہتے ہیں۔[۴۴]

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں $\Psi(x,0)$ فراہم کر کے $\Psi(x,t)$ تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۱}$$

پر پورا اترتا ہوا $\phi(k)$ کیسے تعین کیا جائے؟ یہ فوریئر تجزیہ کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب **مسئلہ پلانشرال**:[۴۵]

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \Leftrightarrow F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۰۲}$$

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰ دیکھیں)۔ $F(k)$ کو $f(x)$ کا **فوریئر بدل**[۴۶] کہا جاتا ہے جبکہ $f(x)$ کو $F(k)$ کا **الٹ فوریئر بدل**[۴۷] کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نما کی علامت کا فرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، اجازتی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: تکمل کا موجود[۴۸] ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقاصد کے لئے، تفاعل $\Psi(x,0)$ پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں $\phi(k)$ درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,0)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۰۳}$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ $-a\leq x\leq a$ میں رہنے کا پابند ہو کو وقت $t=0$ پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}A, & -a<x<a,\\ 0, & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔ $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔

---

[۴۳] wave packet

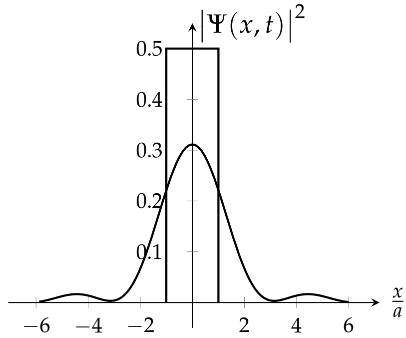
[۴۴] سائن نما امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنا مقام بندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

[۴۵] Plancherel's theorem

[۴۶] Fourier transform

[۴۷] inverse Fourier transform

[۴۸] تفاعل $f(x)$ پر عائد لازم اور کافی پابندی یہ ہے کہ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ متناہی ہو۔ (ایسی صورت میں $\int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2\,\mathrm{d}k$ بھی متناہی ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں تکملات کی قیمتیں ایک دوسری جتنی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)



شکل ۲.۸: تفاعل $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ کی لمحہ $t = 0$ پر مستطیل اور $t = ma^2/\hbar$ پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۴)۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x = 2a\,|A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے $\psi(k)$ تلاش کرتے ہیں۔

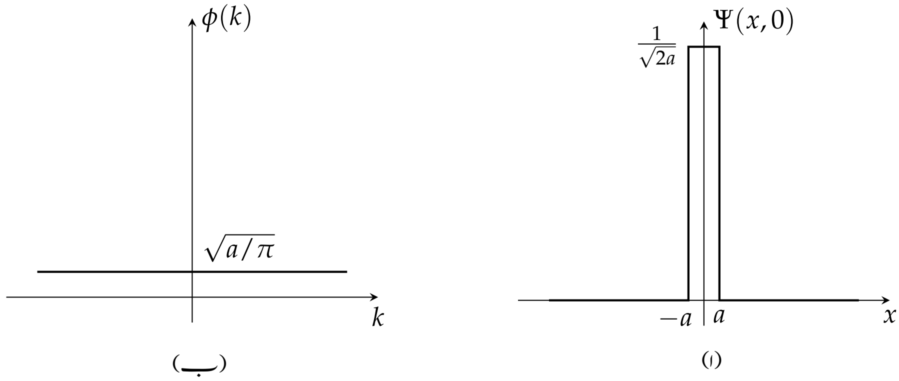
$$\begin{aligned}
\phi(k) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left.\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_{-a}^{a}\\
=& \frac{1}{k\sqrt{\pi a}}\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\frac{\sin(ka)}{k}
\end{aligned}$$

آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ka)}{k}e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)}\,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۴}$$

بدقسمتی سے اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقتاً پائی جاتی ہیں جن کے لئے $\Psi(x,t)$ کا تکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر a کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹-ا)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمیناً $\sin ka \approx ka$ لکھ کر درج



شکل ۲.۹: چھوٹے a کے لئے مثال ۲.۶۔(ا) $\Psi(x,0)$ کی ترسیم؛(ب) $\phi(k)$ کی ترسیم۔

ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

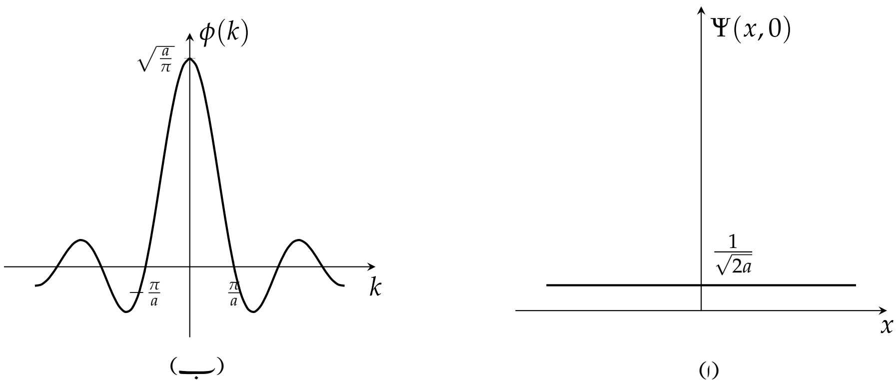
جو k کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاو کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہٰذا k، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا پھیلاو لازماً زیادہ ہو گا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی a) کی صورت میں مقام کا پھیلاو زیادہ ہو گا (شکل ۲.۱۰) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{\sin ka}{ka}$$

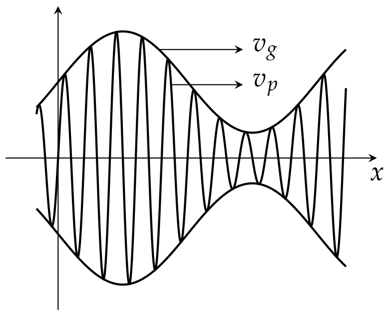
اب $\sin z/z$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر $z = \pm\pi$ (جو یہاں $k = \pm\pi/a$ کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی a کیلئے $k = 0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل $\Psi_k(x,t)$، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ Ψ_k طبعی طور پر قابل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تفاعل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سموئی سمتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصور کچھ یوں ہے: سائن نما تفاعلات کا خطی میل جس کے حیطہ کو ϕ ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہو گا؛ یہ "غلاف" میں ڈھانکے ہوئے "لہروں" پر مشتمل ہو گا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو **دوری سمتی رفتار**[۴۹] (v_p)

[۴۹] phase velocity



شکل ۲.۱۰: بڑی a کے لئے (ا) $\Psi(x,0)$ کی ترسیم، (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ "غلاف" گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ غلاف کی رفتار، جس کو **گروہی سمتی رفتار**[۵۰] (v_g) کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہو گی۔ غلاف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہو گی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھاگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہو گی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہو گا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا حیطہ بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا حیطہ گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہو گا کہ کوانٹم میکانیات میں آزاد ذرے کے تفاعل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

[۵۰]group velocity

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہو گی۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx-\omega t)}\, \mathrm{d}k$$

(یہاں $(\hbar k^2/2m) = \omega$ ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے **انتشاری رشتہ**[۵۱] (ω کا متغیر k کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہو گا۔) ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی k_0 پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا k بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنا پر موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ k_0 سے دور متکمل قابل نظر انداز ہے لہٰذا ہم تفاعل $\omega(k)$ کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega_0'(k-k_0)$$

جہاں نقطہ k_0 پر k کے لحاظ سے ω کا تفرق ω_0' ہے۔

(تکمل کے وسط کو k_0 پر منتقل کرنے کی غرض سے) ہم متغیر k کی جگہ متغیر $s = k - k_0$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0+s) e^{i[(k_0+s)x-(\omega_0+\omega_0's)t]}\, \mathrm{d}s$$

وقت $t=0$ پر

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0+s) e^{i(k_0+s)x}\, \mathrm{d}s$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0\omega_0' t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0+s) e^{i(k_0+s)(x-\omega_0' t)}\, \mathrm{d}s$$

ماسوائے x کو $(x-\omega_0' t)$ منتقل کرنے کے یہ $\Psi(x,0)$ میں پایا جانے والا تکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0\omega_0')t}\, \Psi(x-\omega_0' t, 0) \tag{۲.۱۰۵}$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں $|\Psi|^2$ کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہو گا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار ω_0' سے حرکت کرے گا:

$$v_{\text{گروہی}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{۲.۱۰۶}$$

---

[۵۱] dispersion relation

(جس کی قیمت کا حساب $k = k_0$ پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$v_{\text{دوری}} = \frac{\omega}{k} \tag{۲.۱۰۷}$$

یہاں $(\hbar k^2/2m) = \omega$ یعنی $(\hbar k/2m) = \omega/k$ ہے جبکہ $(\hbar k/m) = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ ہے جو دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار نا کہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$v_{\text{کلاسیکی}} = v_{\text{گروہی}} = 2v_{\text{دوری}} \tag{۲.۱۰۸}$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر x کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$ اور $[C\cos kx + D\sin kx]$ ہیں۔ مستقلات C اور D کو مستقلات A اور B کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقلات A اور B کو مستقلات C اور D کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کوانٹم میکانیات میں جب $V = 0$ ہو، قوت نمائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ $\sin$ اور $\cos$ ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامتناہی چکور کنواں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال رو J تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے بہاو کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ متناہی وقفہ کے فوریئر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامتناہی تک بڑھاتے گے۔

ا. مسئلہ ڈرشلے کہتا ہے کہ وقفہ $[-a, +a]$ پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو فوریئر تسلسل کے پھیلاو سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

a_n اور b_n کی صورت میں c_n کیا ہو گا؟

ب. فوریئر تسلسل کے عددی سروں کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a}\,\mathrm{d}x$$

ج. n اور c_n کی جگہ نئے متغیرات $k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)$ اور $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ac_n$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جزو-ا اور جزو-ب درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\Delta k; \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,$$

جہاں ایک n سے اگلی n تک k میں تبدیلی Δk ہے۔

د. حد $a \to \infty$ لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ: $F(k)$ کی صورت میں $f(x)$ اور $f(x)$ کی صورت میں $F(k)$ کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوئیں۔ اس کے باوجود حد $a \to \infty$ کی صورت میں ان دونوں کی ساخت ایک دوسرے کے ساتھ مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x,0) = Ae^{-a|x|}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\phi(k)$ تلاش کریں۔

ج. $\Psi(x,t)$ کو تکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں a بہت بڑا ہو، اور جہاں a بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: **گاوسی موجی اکٹھ** ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں (a حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔ اشارہ: "مربع مکمل کرتے ہوئے" درج ذیل روپ کے تکمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x$$

مان لیں $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$ ہے۔ یوں $(ax^2 + bx) = y^2 - (b^2/4a)$ ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج. $|\Psi(x,t)|^2$ تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar a t/m)^2}}$$

وقت $t = 0$ پر $|\Psi|^2$ کا خاکہ (بطور x کا تفاعل) بنائیں۔ کسی بڑے t پر دوبارہ خاکہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $|\Psi|^2$ کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں $\langle x \rangle$، $\langle p \rangle$، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$؛ اور احتمالات σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$، تاہم جواب کو اس سادہ روپ میں لانے کیلئے آپ کو کافی الجبرا کرنا ہوگا۔

ہ. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کار آمد ہے؟ کس لمحہ t پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ

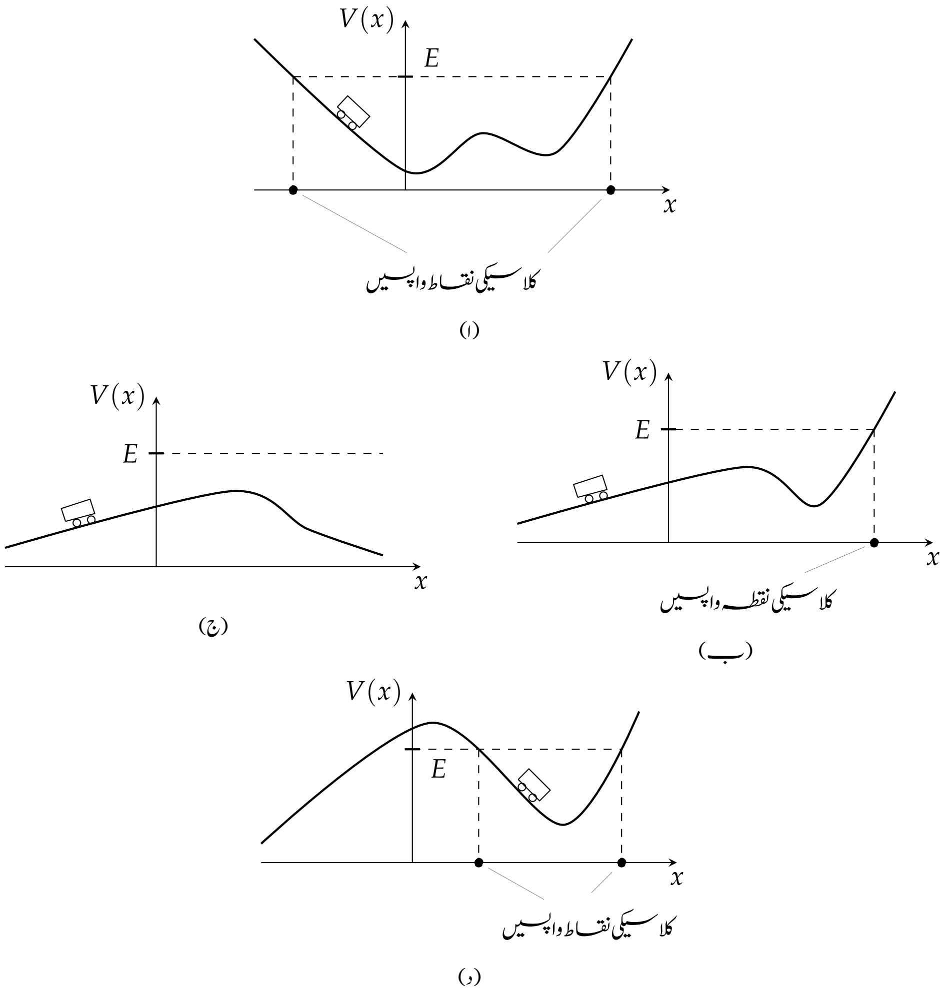
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات

ہم غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چکور کنواں اور ہارمونی مرتعش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اشاریہ n کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر k کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تابع وقت شروڈنگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ (n پر لیا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ (k پر) تکمل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تابع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر $V(x)$ ذرے کی کل توانائی E سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-ا) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنواں میں "پھنسا" رہے گا: یہ **واپسی نقاط**[۵۲] کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنواں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **مقید حال**[۵۳] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر E ایک (یا دونوں) جانب $V(x)$ سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں۔) ہم اسے **بکھراو حال**[۵۴] کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی مرتعش)؛ بعض صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پہاڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔

---

[۵۲] turning points
[۵۳] bound state
[۵۴] scattering state



شکل ۲.۱۲: (ا) مقید حال، (ب، ج) بکھراو حالات، (د) کلاسیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بکھراو حال۔

شروڈنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ فرق اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں **سرنگ زنی**[۵۵] (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی متناہی مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہٰذا مخفیہ کی قیمت صرف لامتناہی پر اہم ہو گی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$\begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \tag{۲.۱۰۹}$$

"روزمرہ زندگی" میں لامتناہی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں مسلمہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$\begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \tag{۲.۱۱۰}$$

چونکہ $x \to \pm\infty$ پر لامتناہی چکور کنواں اور ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہٰذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہٰذا یہ صرف بکھراو حال[۵۶] پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں

مبدا پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا تفاعل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل 13.2) **ڈیلٹا تفاعل**[۵۷] کہلاتا ہے۔

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{۲.۱۱۱}$$

نقطہ $x = 0$ پر یہ تفاعل متناہی نہیں ہے لہٰذا تکنیکی طور پر اس کو تفاعل کہنا غلط ہو گا (ریاضی دان اسے **متعمم تفاعل**[۵۸] یا **متعمم تقسیم**[۵۹] کہتے ہیں)۔[۶۰] تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت بار ایک ڈیلٹا تفاعل ہو گا۔) آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\delta(x-a)$ نقطہ a پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تفاعل ہو گا۔ چونکہ $\delta(x-a)$ اور ایک سادہ تفاعل $f(x)$ کا

---

[۵۵] tunneling

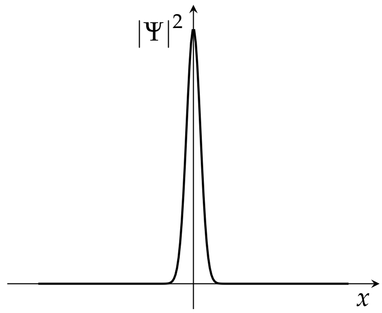
[۵۶] آپ کو یہاں پریشانی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے $E > V_{\text{کم}}$ درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھراو حال، جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہو گا۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں ہیں تب $E \leq 0$ کے لئے مساوات شروڈنگر کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

[۵۷] Dirac delta function

[۵۸] generalized function

[۵۹] generalized distribution

[۶۰] ڈیلٹا تفاعل کو ایسے مستطیل (یا مثلث) کی تحدیدی صورت تصور کیا جا سکتا ہے جس کی چوڑائی بتدریج کم اور قد بتدریج بڑھتا ہو۔



شکل ۲.۱۳: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل (مساوات ۲.۱۱۱)

حاصل ضرب نقطہ a کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہو گا لہٰذا $\delta(x-a)$ کو $f(x)$ سے ضرب دینا، اسے $f(a)$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \tag{۲.۱۱۲}$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a) \tag{۲.۱۱۳}$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت "اٹھاتا" ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ ہو، صرف اتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ a شامل ہو لہٰذا $a-\epsilon$ تا $a+\epsilon$ تکمل لینا کافی ہو گا جہاں $\epsilon > 0$ ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں α ایک مثبت مستقل ہے۔[۲۱]

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \tag{۲.۱۱۴}$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامتناہی چکور کنواں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانیاں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا تفاعل کنواں کے لیے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi \tag{۲.۱۱۵}$$

جو مقید حالات $(E < 0)$ اور بکھراو حالات $(E > 0)$ دونوں پیدا کرتی ہے۔

[۲۱] ڈیلٹا تفاعل کی اکائی ایک بٹا لمبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہٰذا α کا بعد توانائی ضرب لمبائی ہو گا۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ $x < 0$ میں $V(x) = 0$ ہوگا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = k^2\psi \tag{۲.۱۱۶}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں k درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے E منفی ہوگا لہٰذا k حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۱۷}$$

مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \tag{۲.۱۱۸}$$

ہوگا جہاں $x \to -\infty$ پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $A = 0$ منتخب کرنا ہوگا:

$$\psi(x) = Be^{kx}, \qquad (x < 0) \tag{۲.۱۱۹}$$

خطہ $x > 0$ میں بھی $V(x)$ صفر ہے اور عمومی حل $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا؛ اب $x \to +\infty$ پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہٰذا $G = 0$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل لیا جائے گا۔

$$\psi(x) = Fe^{-kx}, \qquad (x > 0) \tag{۲.۱۲۰}$$

ہمیں نقطہ $x = 0$ پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہو گا۔ میں ψ کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

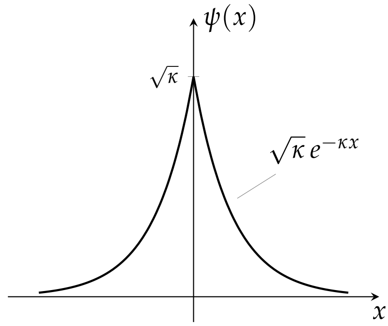
$$\begin{cases} 1. & \psi \quad \text{لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \quad \text{استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفیہ لامتناہی ہو} \end{cases} \tag{۲.۱۲۱}$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت $F = B$ ہوگا لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases} \tag{۲.۱۲۲}$$

تفاعل $\psi(x)$ کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا متناہی چکور کنواں کی طرح) جوڑ پر مخفیہ لامتناہی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ $x = 0$ پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلٹا تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر ψ کے تفرق میں عدم استمرار یہی ڈیلٹا تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = E\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۲۳}$$



شکل ۲.۱۴: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

پہلا تکمل درحقیقت دونوں آخری نقاط پر $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری تکمل اس پٹی کا رقبہ ہو گا، جس کا قد متناہی، اور $\epsilon \to 0$ کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہٰذا ایسے تکمل صفر ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) \equiv \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۲۴}$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہو گا لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ عموماً استمراری ہو گا۔ لیکن جب سرحد پر $V(x)$ لامتناہی ہو تب یہ دلیل قابل قبول نہیں ہو گی۔ بالخصوص $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \tag{۲.۱۲۵}$$

یہاں درج ذیل ہو گا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = -Bke^{-kx}, \quad (x>0) \quad \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{+} = -Bk \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = +Bke^{+kx}, \quad (x<0) \quad \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہٰذا $\Delta(\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x) = -2Bk$ ہو گا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = B$ ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$k = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \tag{۲.۱۲۶}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{۲.۱۲۷}$$

آخر میں ψ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} \,\mathrm{d}x = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذر کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \tag{۲.۱۲۸}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلٹا تفاعل، کی "زور" α کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \qquad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{۲.۱۲۹}$$

ہم $E > 0$ کی صورت میں بکھراو حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شروڈنگر مساوات $x < 0$ کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$$

جہاں

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۳۰}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{۲.۱۳۱}$$

جہاں کوئی بھی جزو بے قابو نہیں بڑھتا ہے لہٰذا انہیں رد نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح $x > 0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

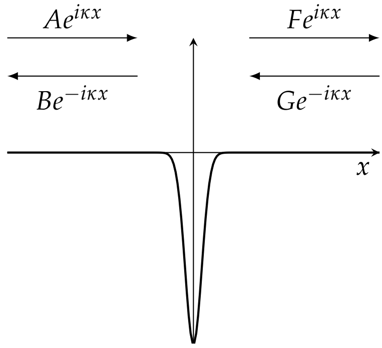
$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \tag{۲.۱۳۲}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$F + G = A + B \tag{۲.۱۳۳}$$

تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), \quad (x > 0), \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), \quad (x < 0), \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$



شکل ۲.۱۵: ڈیلٹا تفاعل کنواں سے بکھراو۔

لہٰذا $\Delta(\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x) = ik(F - G - A + B)$ ہو گا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = (A + B)$ ہو گا لہٰذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B) \tag{۲.۱۳۴}$$

یا مختصراً:

$$F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \qquad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \tag{۲.۱۳۵}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات A، B، C اور D بلکہ k شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہٰذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہو گا۔ بہتر ہو گا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی طبعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ e^{ikx} (کے ساتھ تابع وقت جزو ضربی $e^{-iEt/\hbar}$ منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا تفاعل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح e^{-ikx} بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل A بائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے، B بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا حیطہ ہے، F (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا حیطہ جبکہ H دائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراو کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا حیطہ صفر ہو گا:

$$G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراو} \tag{۲.۱۳۶}$$

آمدی موج[۶۲] کا حیطہ A، **منعکس موج**[۶۳] کا حیطہ B جبکہ **ترسیلی موج**[۶۴] کا حیطہ F ہو گا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو B اور F

[۶۲] incident wave
[۶۳] reflected wave
[۶۴] transmitted wave

کے لیے حل کرکے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$B = \frac{i\beta}{1-i\beta}A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta}A \tag{۲.۱۳۷}$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراو کا مطالعہ کرنا چاہیں تب $A = 0$ ہوگا؛ G آمدی حیطہ، F منعکس حیطہ، اور B ترسیلی حیطہ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال $|\psi|$ ہوتا ہے لہٰذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی[۲۵] احتمال درج ذیل ہوگا

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \tag{۲.۱۳۸}$$

جہاں R کو **شرح انعکاس**[۲۶] کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو R آپ کو بتائے گا کہ ٹکرانے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہوگا جسے **شرح ترسیل**[۲۷] کہتے ہیں۔

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \tag{۲.۱۳۹}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہوگا۔

$$R + T = 1 \tag{۲.۱۴۰}$$

دھیان رہے کہ R اور T متغیر β کے لہٰذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵) E کے تفاعل ہوں گے۔

$$R = \frac{1}{1+\frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \qquad T = \frac{1}{1+\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}} \tag{۲.۱۴۱}$$

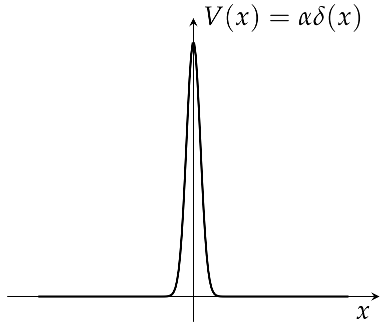
زیادہ توانائی ترسیل کا احتمال بڑھاتی ہے جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے۔

یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے لیکن ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظرانداز نہیں کر سکتے ہیں. چونکہ بکھراو موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہٰذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں، لیکن ہم اس مسئلے کا حل جانتے ہیں۔ ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہونگے جو معمول پر لائے جانے کے قابل ہوں، جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھ ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا سادہ اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد

[۲۵] یہ معمول پر لانے کے قابل تفاعل نہیں ہے لہٰذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہوگا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

[۲۶] reflection coefficient

[۲۷] transmission coefficient



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

سے حل کرنا بہتر ہو گا۔[۶۸] چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جا سکتا ہے لہٰذا R اور T کو (بالترتیب) E کے قریب ذرات کی تخمینی شرح انعکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم لب لباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بکھر کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مساوات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں) ψ ایک مخلوط، غیر تابع وقت، سائن نما تفاعل ہے جو (مستقل حیطہ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انعکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے تفاعل موج، جن کی تابعیت وقت نہ ہونے کے برابر ہو، کے خطی جوڑ لے کر ایک (حرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے (سوال ۲.۴۳)

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف α کی علامت تبدیل کرنی ہو گی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انعکاس اور شرح ترسیل جو α^2 پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ایک ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنواں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی قد کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بکھراو غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E > V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب $T = 1$ اور $R = 0$ ہو گا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا؛ اگر $E < V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب $T = 0$ اور $R = 1$ ہو گا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بکھراو زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E < V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب بھی ایک ذرے کا مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہو گا۔ اس مظہر کو **سرنگ زنی**[۶۹] کہتے ہیں

[۶۸] کنواں اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھ کے بکھراو کے اعدادی مطالعہ دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔
[۶۹] tunneling

جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کے پشت پر ہے۔ اس کے برعکس بلند تر $V > E$ کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہو گا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کود دیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹم میکانیات آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے گا)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\int_{-3}^{+1}(x^3-3x^2+2x-1)\delta(x+2)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_0^{\infty}[\cos(3x)+2]\delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x$

ج. $\int_{-1}^{+1}e^{(|x|+3)}\delta(x-2)\,\mathrm{d}x$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا تفاعلات زیر علامت تکمل رہتے ہیں اور دو فقرے $D_1(x)$ اور $D_2(x)$ جو ڈیلٹا تفاعل پر مبنی ہیں صرف درج صورت میں ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)D_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)D_2(x)\,\mathrm{d}x$$

جہاں $f(x)$ کوئی بھی سادہ تفاعل ہو سکتا ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x) \tag{۲.۱۴۲}$$

جہاں c ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی c کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. **سیڑھی تفاعل**[۷۰] $\theta(x)$ درج ذیل ہے۔

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{۲.۱۴۳}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم $\theta(0)$ کی تعریف $\frac{1}{2}$ کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x=\delta(x)$ ہو گا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ ψ کے تفرق کا $x=0$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے لہٰذا $\langle p^2\rangle$ کا حساب پیچیدہ ہو گا۔ سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2\rangle=(m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل $\delta(x)$ کا فوریئر تبادل کیا ہو گا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کرکے درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۴۴}$$

---

[۷۰] step function

تبصرہ: یہ کلیہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہو گا۔ اگرچہ $x = 0$ کے لئے یہ تکمل لامتناہی ہے اور $x \neq 0$ کی صورت میں چونکہ متکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہٰذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوندکاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم $-L$ تا $+L$ تکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو، $L \to \infty$ کرتے ہوئے متناہی تکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع تکملیت) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا تفاعل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۱ پر مربع تکملیت کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲۷: درج ذیل جڑواں ڈیلٹا تفاعل مخفیہ پر غور کریں جہاں α اور a مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

ا. اس مخفیہ کا خاکہ کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟ $\alpha = \hbar^2/ma$ اور $\alpha = \hbar^2/4ma$ کیلئے اجازتی توانائیاں تلاش کریں اور تفاعلات موج کا خاکہ کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: جڑواں ڈیلٹا تفاعل کے مخفیہ (سوال ۲.۲۷) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

۲.۶ متناہی چکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر متناہی چکور کنواں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{۲.۱۴۵}$$

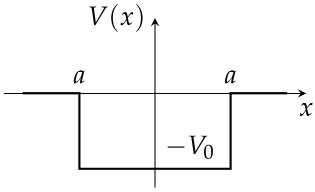
لیتے ہیں جہاں V_0 ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۲.۱۷)۔ ڈیلٹا تفاعل کنواں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں $E < 0$ ہو گا) کے ساتھ ساتھ بکھراو حالات (جہاں $E > 0$ ہو گا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خطہ $x < -a$ میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \kappa^2\psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۴۶}$$



شکل ۲.۱۷: متناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵)۔

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$ ہے لیکن $x \to -\infty$ کی صورت میں اس کا پہلا جزو بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا (ہمیشہ طرح؛ مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Be^{kx}, \qquad x < -a \tag{۲.۱۴۷}$$

خطہ $-a < x < a$ میں جہاں $V(x) = -V_0$ ہے مساوات شروڈنگر درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -V_0\psi \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -l^2\psi$$

جہاں l درج ذیل ہے۔

$$l \equiv \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \tag{۲.۱۴۸}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے E منفی ہے تاہم $E > V_{\text{کمتر}}$ کی بنا (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو $-V_0$ سے بڑا ہونا ہو گا؛ لہٰذا l بھی حقیقی اور مثبت ہو گا۔ اس کا عمومی حل[71]

$$\psi(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx), \qquad -a < x < a \tag{۲.۱۴۹}$$

جہاں C اور D اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خطہ $x > a$ جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے؛ عمومی حل $\psi(x) = Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x}$ ہو گا لیکن یہاں $x \to \infty$ کی صورت میں دوسرا جزو بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا قابل قبول حل درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Fe^{-\kappa x}, \qquad x > a \tag{۲.۱۵۰}$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے: ψ اور $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ نقاط $-a$ اور $+a$ پر استمراری ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دیا گیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق

[71] آپ چاہیں تو عمومی حل کو قوت نمائی روپ $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$ میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی وہی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشاکلی مخفیہ کی بنا ہم جانتے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور sin اور cos کا استعمال اس حقیقت کو بلاواسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔

ہوں گے (سوال ۱.۲-ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً $+a$) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ $\psi(-x) = \pm\psi(x)$ ہے لہٰذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہو گا۔ میں جفت حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے ہوں گے۔ $\cos$ جفت ہے (جبکہ $\sin$ طاق ہے) لہٰذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-\kappa x} & x > a \\ D\cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases} \tag{۲.۱۵۱}$$

نقطہ $x = a$ پر $\psi(x)$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$Fe^{-\kappa a} = D\cos(la) \tag{۲.۱۵۲}$$

جبکہ $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$-\kappa Fe^{-\kappa a} = -lD\sin(la) \tag{۲.۱۵۳}$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\kappa = l\tan(la) \tag{۲.۱۵۴}$$

چونکہ κ اور l دونوں E کے تفاعل ہیں لہٰذا اس کلیہ سے اجازتی توانائیاں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اجازتی توانائی E کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} \tag{۲.۱۵۵}$$

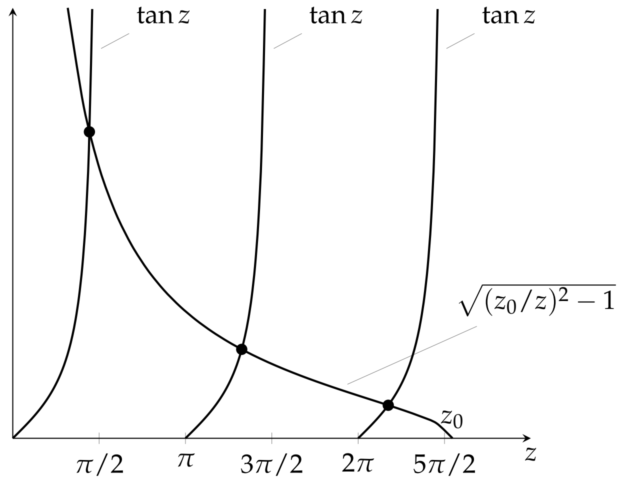
مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$ اور ہو گا لہٰذا $\kappa a = \sqrt{z_0^2 - z^2}$ ہو گا اور مساوات ۲.۱۵۴ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \tag{۲.۱۵۶}$$

یہ z (لہٰذا E) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر z_0 ہے (جو کنواں کی "جسامت" کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقہ سے کمپیوٹر کے ذریعہ حل کیا جا سکتا یا $\tan z$ اور $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے (شکل ۲.۱۸)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. موٹا ایک چوڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی z_0 کی صورت میں طاق n کے لئے نقاط تقاطع $z_n = n\pi/2$ سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \tag{۲.۱۵۷}$$



شکل ۲.۱۸: ترسیمی حل برائے مساوات ۲.۱۵۶ جہاں $z_0 = 8$ لیا گیا ہے (جفت حالات)۔

اب $E + V_0$ کنواں کی تہہ کے اوپر توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں $2a$ چوڑائی کے لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ n یہاں طاق ہے لہٰذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہو گی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفاعل موج سے حاصل ہو گی۔) یوں $V_0 \to \infty$ کرنے سے متناہی چکور کنواں سے لامتناہی چکور کنواں حاصل ہو گا؛ تاہم کسی بھی متناہی V_0 کی صورت میں مقید حالات کی تعداد متناہی ہو گی۔

ب. **کم گہرا، کم چوڑا کنواں** جیسے جیسے z_0 کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم سے کم ہوتی جاتی ہے حتٰی کہ آخر کار ($z_0 < \pi/2$) کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا) صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی "کمزور" کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔

اگر آپ ψ (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراو حالات $E > 0$ کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ ہوں بائیں ہاتھ جہاں $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۲.۱۵۸}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۵۹}$$

کنواں کے اندر جہاں $V(x) = -V_0$ ہے درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx) \qquad (-a < x < a) \tag{۲.۱۶۰}$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$l \equiv \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \tag{۲.۱۶۱}$$

دائیں جانب جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Fe^{ikx} \tag{۲.۱۶۲}$$

یہاں آمدی حیطہ A، انعکاسی حیطہ B اور ترسیلی حیطہ F ہے۔[۴۷]

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ $-a$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کے تحت درج ذیل ہو گا

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C\sin(la) + D\cos(la) \tag{۲.۱۶۳}$$

نقطہ $-a$ پر $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C\cos(la) + D\sin(la)] \tag{۲.۱۶۴}$$

نقطہ $+a$ پر $\psi(x)$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$C\sin(la) + D\cos(la)] = Fe^{ika} \tag{۲.۱۶۵}$$

اور $+a$ پر $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$l[C\cos(la) - D\sin(la)] = ikFe^{ika} \tag{۲.۱۶۶}$$

ہم ان میں سے دو استعمال کرتے ہوئے C اور D خارج کر کے باقی دو حل کر کے B اور F تلاش کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے گا)۔

$$B = i\frac{\sin(2la)}{2kl}(l^2-k^2)F \tag{۲.۱۶۷}$$

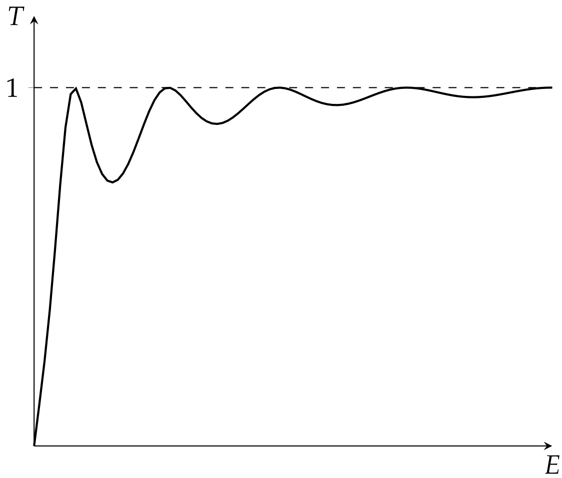
$$F = \frac{e^{-2ika}A}{\cos(2la) - i\frac{(k^2+l^2)}{2kl}\sin(2la)} \tag{۲.۱۶۸}$$

شرح ترسیل $(T = |F|^2 / |A|^2)$ کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\right) \tag{۲.۱۶۹}$$

---

[۴۷] مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفاعلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بکھراو میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہٰذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشاکلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حرکت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نمائی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔



شکل ۲.۱۹: ترسیلی مستقل بطور توانائی کا تفاعل (مساوات ۲.۱۶۹)۔

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں n عدد صحیح ہے

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E_n+V_0)} = n\pi \tag{۲.۱۷۰}$$

وہاں $T = 1$ (اور کنواں "شفاف") ہو گا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$E_n + V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \tag{۲.۱۷۱}$$

جو عین لامتناہی چکور کنواں کی اجازتی توانائیاں ہیں۔ شکل ۲.۱۹ میں توانائی کے لحاظ سے T ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۲.۲۹: متناہی چکور کنواں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ اجازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیمی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا $\psi(x)$ معمول پر لا کر مستقل D اور F تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈائی رک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جا سکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور قد لامتناہی تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) لامتناہی گہرا ہونے کے باوجود $z_0 \rightarrow 0$ کی بنا ایک "کمزور" مخفیہ ہے۔ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ کو متناہی چکور کنواں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے C اور D کو F کی صورت میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i\frac{k}{l}\cos(la)]e^{ika}F; \qquad D = [\cos(la) - i\frac{k}{l}\sin(la)]e^{ika}F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیلی رکاوٹ (جسے خطہ $-a < x < a$ میں $V(x) = +V_0 > 0$ لیتے سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعین کریں۔ تین صورتوں $E < V_0$، $E = V_0$ اور $E > v_0$ کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تفاعل موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب: $E < V_0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔[43]

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس $E < V_0$ صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس $E > V_0$ صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہو گی لہٰذا شرح ترسیل $|F|^2 / |A|^2$ نہیں ہو گی (جہاں A آمدی حیطہ اور F ترسیلی حیطہ ہے)۔ دکھائیں کہ $E > V_0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

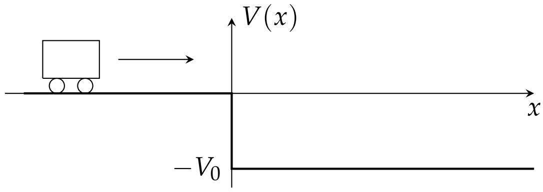
$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}\frac{|F|^2}{|A|^2} \tag{۲.۱۷۲}$$

اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رو (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ $E < V_0$ کی صورت میں T کیا ہو گا؟

د. صورت $E > V_0$ کے لیے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے $T + R = 1$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور حرکی توانائی $E > 0$ ہو مخفیہ کی ایک اچانک گہرائی (شکل ۲.۲۰) کی طرف بڑھتا ہے۔

[43] یہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔



شکل ۲.۲۰: عمودی چٹان سے بکھراو (سوال ۲.۳۵)۔

ا. صورت $E = V_0/3$ میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہو گا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳۴ کی طرح ہے، بس یہاں سیڑھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکرا کر واپس لوٹنے کا احتمال جزو-ا کے نتیجہ سے بہت کم ہو گا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل ۲.۲۰ میں جیسے ہی گاڑی نقطہ $x = 0$ پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی عدم استمرار کے ساتھ گر کر $-V_0$ ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئے ایک گاڑی کے لیے درست ہو گا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کمی محسوس کرتا ہے۔ باہر $V = 0$ جبکہ مرکزہ کے اندر $V = -12\,\text{MeV}$ ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ انشقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی $4\,\text{MeV}$ ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا انشقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟ اشارہ: آپ نے جزو-ا میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ $T = 1 - R$ استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبدا پر $+a < x < -a$ کے بیچ لامتناہی چکور کنواں کے اندر $V(x) = 0$ اور اس کے باہر $V(x) = \infty$ ہے۔ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری ψ (مساوات ۲.۲۸) میں $x \to (x+a)/2$ پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام ψ حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنواں کی چوڑائی $2a$ ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x,0) = A\sin^3(\pi x/a) \qquad (0 \le x \le a)$$

مستقل A اور $\Psi(x,t)$ تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے $\langle x \rangle$ کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: $\sin^n\theta$ اور $\cos^n\theta$ کو تخفیف کے بعد $\sin(m\theta)$ اور $\cos(m\theta)$ کے خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ہو گا۔

سوال ۲.۳۸: کمیت m کا ایک ذرہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔ اچانک کنویں کا دایاں دیوار a سے $2a$ منتقل ہوتا ہے جس سے کنواں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لمحاتی طور پر اس عمل سے تفاعل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

۱. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہو گا؟

۲. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہو گا؟

۳. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامتناہی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

۱. دکھائیں کہ لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرہ کا تفاعل موج کوانٹائی **تجدیدی عرصہ**[۴۷] $T = 4ma^2/\pi\hbar$ کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے $\Psi(x,T) = \Psi(x,0)$ ہوتا ہے۔

۲. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی E ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہو گا؟

۳. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصے ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل مخفی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2/ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

۱. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہو گی؟

۲. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنواں کے باہر ($x > a$) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنواں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنواں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ہارمونی مرتعش کی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے جہاں A کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x,0) = A\left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

۱. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

---

[۴۷] revival time

۲. مستقبل کے لمحہ T پر تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\Psi(x,T)=B\left(1+2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

جہاں B کوئی مستقل ہے۔ لمحہ T کی کم سے کم ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی مرتعش کی اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x)=\begin{cases}(1/2)m\omega^2x^2 & x>0\\ \infty & x<0\end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا اسپرنگ جس کو کھینچا تو جا سکتا ہے لیکن اسے دبایا نہیں جا سکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح سوچنا ہو گا جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہو گی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x,0)=Ae^{-ax^2}e^{ilx}$$

جہاں l ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبدا پر لامتناہی چکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کریں۔

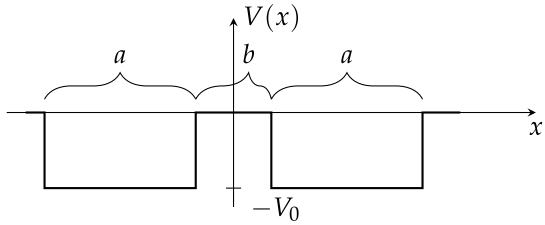
$$V(x)=\begin{cases}\alpha\delta(x) & -a<x<+a\\ \infty & |x|\geq a\end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ اجازتی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترسیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تفاعل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تفاعل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں $a\to 0$ اور $a\to\infty$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے منفرد[۴۵] حل جن کی توانائی E ایک دوسرے جیسی ہو کو **انحطاطی**[۴۶] کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ محض ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بعدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے

[۴۵] ایسے دو حل جن میں صرف جزو ضربی کا فرق پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتبہ معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جزو $e^{i\phi}$ کا فرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جا سکتا ہے۔ یہاں "منفرد" سے مراد "خطی طور پر غیر تابع" ہے۔

[۴۶] degenerate



شکل ۲.۲۱: دوہرا چکور کنواں (سوال ۲.۴۷)۔

جاتے ہیں۔[77] اشارہ: فرض کریں ψ_1 اور ψ_2 ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی، E، ایک دوسری جیسی ہو۔ حل ψ_1 کی شروڈنگر مساوات کو ψ_2 سے ضرب دیں اور اس سے ψ_2 کی شروڈنگر مساوات کو ψ_1 سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ $\psi_2 \,\mathrm{d}\psi_1/\mathrm{d}x - \psi_1 \,\mathrm{d}\psi_2/\mathrm{d}x$ ایک مستقل ہو گا۔ اب $\pm\infty$ پر معمول پر لائے جانے کے قابل ہر حل $0 \to \psi$ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل در حقیقت صفر ہو گا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ψ_2 دراصل ψ_1 کا مضرب ہے لہٰذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: فرض کریں کمیت m کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط L ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں $\psi(x+L) = \psi(x)$ ہو گا۔) اس کے ساکن حال تلاش کر کے انہیں معمول پر لائیں اور ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی E_n کے لئے دو آپس میں غیر تابع حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا اخلاف گھڑی حرکت کے لیے ہو گا، جنہیں آپ $\psi_n^+(x)$ اور $\psi_n^-(x)$ کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۴۵ کے مسئلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کار آمد کیوں نہیں ہے)؟

سوال ۲.۴۷: آپ کو صرف کیفی تجزیہ کی اجازت ہے حساب کر کے نتیجہ اخذ کرنے کی اجازت نہیں ہے۔ شکل ۲.۲۱ میں دکھائے گئے موین دوہرا چکور کنواں پر غور کریں جہاں گہرائی V_0 اور چوڑائی a مقررہ ہیں جو اتنے بڑے ضرور ہیں کہ کئی مقید حال ممکن ہوں۔

۱. زمینی تفاعل موج ψ_1 اور پہلا ہیجان حال ψ_2 کا خاکہ درج ذیل صورت میں کھینچیں۔

۲. $b = 0$ (ب) $b \approx a$ (ج) $b \gg a$

۳. b کی قیمت صفر سے لامتناہی تک بڑھتے ہوئے توانائیاں E_1 اور E_2 کس طرح تبدیل ہوتی ہیں اس کا کیفی جواب دیں۔

۴. دو جوہری سالمہ میں الیکٹران پر اثر انداز مخفی توانائی کا تاریخی یک دوری نمونہ دوہرا کنواں پیش کرتا ہے۔ مرکزوں

[77] جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاط عام پائی جاتی ہیں۔ فرض کریں کہ مخفیہ علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے بیچ خطہ میں $V = \infty$ ہو۔ مثلاً دو تنہا لامتناہی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنواں میں پایا جائے گا۔

کی قوت کشش کو دو کنویں ظاہر کرتی ہیں آزاد صورت میں یہ مرکزے کم سے کم توانائی کی صورت اختیار کریں گے۔(ب) میں حاصل نتائج کے تحت کیا الیکٹران ان مرکزوں کو ایک دوسرے کے قریب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور ہٹنے پہ مجبور کرے گا۔ اگرچہ دو مرکزوں کے بیچ قوت دفع بھی پایا جاتا ہے لیکن اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔

سوال ۲.۴۸: آپ نے مساوات ۲.۳۹ کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال ۲.۷-د میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں حاشیہ میں، میں نے آپ کو آگاہ کیا کہ اس کو $\langle H \rangle = \int \psi(x,0)^* H\psi(x,0)\,\mathrm{d}x$ کے پرانے طریقہ سے حاصل نہ کیجیے گا چونکہ $\psi(x,0)$ کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ تکمل بالحصص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھے مسائل کے حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ فراہم کرتا ہے۔

(الف) آپ سوال ۲.۷ میں $\psi(x,0)$ کا پہلا تفرق حاصل کر کے اسکو سیڑھی تفاعل $\theta(x-a/2)$ کی صورت میں لکھیں جسے مساوات ۲.۱۴۳ میں پیش کیا گیا آخری سروں کی فکر نہ کریں صرف اندرونی خطہ $0 < x < a$ کے لیے لکھیں۔

(ب) ابتدائی موجی تفاعل $\psi(x,0)$ کے دوسرے تفرق کو سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

(ج) تکمل $\int \psi(x,0)^* H\psi(x,0)\,\mathrm{d}x$ کو حل کر کے اس کے قیمت حاصل کریں اور تصدیق کریں کہ یہ جواب وہی ہے جو آپ نے پہلے حاصل کیا تھا۔

سوال ۲.۴۹: (الف) دکھائیں کہ ہارمونی مرتعش مخفی توانائی کے وقت کے غیر تابع شروڈنگر مساوات ۲.۴۳ پر درج ذیل پورا اترتا ہے

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

جہاں a ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔

(ب) $\left|\psi(x,t)\right|^2$ تلاش کریں اور موجی اکٹھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

(ج) $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کا حساب لگائیں اور دیکھیں کہ آیا یہ مسئلہ اہرنفسٹ (مساوات ۱.۳۸) پر یہ پورا اترتے ہیں۔

سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کنواں پر غور کریں

$$V(x,t) = -\alpha\delta(x - vt)$$

جہاں v ایک مستقل ہے کنواں کی سمتی رفتار کو ظاہر کرتا ہے۔

(الف) دیکھائیں کہ وقت کے غیر تابع شروڈنگر مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i[(E+(1/2)mv^2)t - mvx]/\hbar}$$

جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ساکن ڈیلٹا تفاعل کے مقید حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو شروڈنگر مساوات موں پُر کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔

(ب) اس حال میں ہیملٹونی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں اور نتیجے پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۵۱: درج ذیل مخفی توانائی پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m}\operatorname{sech}^2(ax)$$

جہاں a ایک مثبت مستقل ہے۔

(الف) اس مخفی توانائی کو ترسیم کریں۔

(ب) تصدیق کریں کہ اس مخفی توانائی کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A\operatorname{sech}(ax)$$

اور اسکی توانائی تلاش کریں۔ ψ_0 کو معمول پر لائیں اور اس کا خط کھینچیں۔

(ج) دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کسی بھی مثبت توانائی E کے لیے شروڈنگر مساوات کو حل کرتا ہے

$$\psi_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx}$$

جہاں معمول کی طرح یہاں بھی $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے۔ چونکہ $z \to -\infty$ کرنے سے $\tanh z \to -1$ ہوگا لحاظہ x کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لیے

$$\psi_k(x) \approx Ae^{ikx}, \qquad \text{بڑی منفی } x \text{ کے لیے}$$

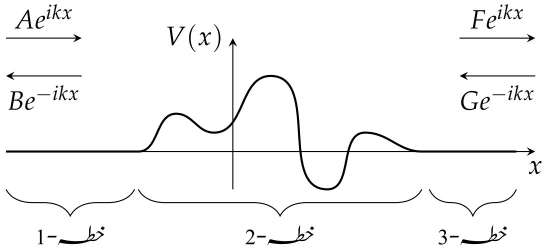
جہاں $\exp(-ikx)$ کی عدم موجودگی کی بنا پہ بائیں سے آمد ایک موج کو ظاہر کرتا ہے اور اس میں کوئی انعکاسی موج نہیں پایا جاتا۔ x کی بڑی مثبت قیمتوں کے لیے $\psi_k(x)$ کی متقاربی صورت کیا ہوگی؟ اس مخفی توانائی کے لیے R اور T کیا ہوں گے؟ یہ بلا انعکاس مخفی توانائی کی ایک بہت مشہور ایک مثال ہے کسی بھی توانائی کا ہر آمدی ذرہ اس سے سیدھا گزر جائے گا۔

سوال ۲.۵۲: **قالب بکھراو۔** مکامی مخفی توانائی کے لیے بکھراو کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے (شکل ۲.۲۲)۔ بائیں ہاتھ خطہ ایک میں $V(x) = 0$ ہے لحاظہ درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \text{جہاں } k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۷۳}$$

دائیں ہاتھ خطہ تین جہاں بھی $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \tag{۲.۱۷۴}$$



شکل ۲.۲۲: مقامی اختیاری مخفیہ (جو خطہ-2 کے علاوہ $V(x)=0$ ہے) سے بکھراو (سوال ۲.۵۲)۔

ان دونوں کے بیچ خطہ دو میں میں مخفی توانائی جانے بغیر آپ کو ψ کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا لیکن چونکہ شروڈنگر مساوات خطی ہے اور دورتبی تفرقی مساوات ہے لحاظہ اس کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(x)=Cf(x)+Dg(x)$$

جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو خطی غیر تابع مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد سرحدی شرائط ہوں گی جن میں سے دو خطہ ایک اور دو کو جوڑیں گے اور باقی دو خطہ دو اور تین کو جوڑیں گے۔ ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے C اور D کو خارج کر کے باقی دو کو حل کرتے ہوئے A اور G کی صورت میں B اور F تلاش کیئے جا سکتے ہیں

$$B=S_{11}A+S_{12}G, \qquad F=S_{21}A+S_{22}G$$

یہ چار عددی سر S_{ij} k پر منحصر ہوں گے لحاظہ E پر منحصر ہوں گے اور 2×2 کا قالب S بنائیں گے جس سے بکھراو قالب یا مختصراً S قالب کہتے ہیں۔ قالب S آپ کو آتے ہوئے حیطوں A اور G کی صورت میں جاتے ہوئے حیطوں B اور F کی قیمت دیتے ہیں

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} \tag{۲.۱۷۵}$$

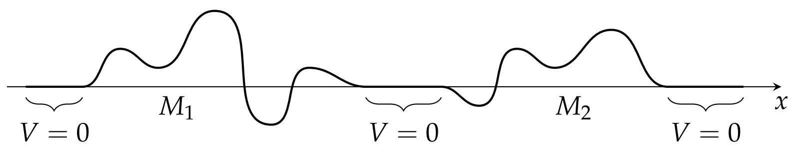
بائیں سے بکھراو کی صورت میں $G=0$ ہو گا لحاظہ انعکاسی اور ترسیلی شرح درج ذیل ہوں گی

$$R_l=\left.\frac{|B|^2}{|A|^2}\right|_{G=0}=|S_{11}|^2, \qquad T_l=\left.\frac{|F|^2}{|A|^2}\right|_{G=0}=|S_{21}|^2 \tag{۲.۱۷۶}$$

دائیں سے بکھراو کی صورت میں $A=0$ ہو گا لحاظہ درج ذیل ہوں گے

$$R_r=\left.\frac{|F|^2}{|G|^2}\right|_{A=0}=|S_{22}|^2, \qquad T_r=\left.\frac{|B|^2}{|G|^2}\right|_{A=0}=|S_{12}|^2 \tag{۲.۱۷۷}$$

(الف) ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) کے لیئے بکھراو کا S قالب تیار کریں۔



شکل ۲.۲۳: دو تنہا حصوں پر مبنی مخفیہ (سوال ۲.۵۳)۔

(ب) لامتناہی چوکور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵) کے لیئے S قالب تیار کریں۔ اشارہ: مسئلے کی تشاکلی بروءِ کار لاتے ہوئے آپ کو کوئی نیا کام کرنے کی ضرورت نہیں ہو گی۔

سوال ۲.۵۳: **قالب ترسیل۔** قالب S (سوال ۲.۵۲) آپ کو رخصتی حیطوں B اور F کو آنے والے حیطوں A اور G کی صورت میں پیش کرتا ہے (مساوات ۲.۱۷۵)۔ بعض اوقات ترسیلی قالب M کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفی توانائی کے دائیں جانب حیطوں F اور G کو بائیں جانب حیطوں A اور B کو صورت میں پیش کرتا ہے

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{۲.۱۷۸}$$

(الف) قالب S کے اجزا کی صورت میں قالب M کے چار اجزا تلاش کریں اسی طرح قالب M کے چار اجزا کی صورت میں قالب S کے اجزا تلاش کریں۔ مساوات ۲.۱۷۶ اور مساوات ۲.۱۷۷ میں دیئے گئے R_l, T_l, R_r اور T_r کو M قالب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

(ب) فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسی مخفی توانائی ہو جو دو تنہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو (شکل ۲.۲۳)۔ دکھائیں کہ اس پورے نظام کا M قالب ان دو مخفی توانائیوں کے انفرادی M قالب کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$M = M_2 M_1 \tag{۲.۱۷۹}$$

ظاہر ہے کہ آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفی توانائیں بھی استعمال کر سکتے تھے یہی M قالب کی انفرادیت کا سبب ہے۔

(ج) نقطہ a پر واحد ایک ڈیلٹا تفاعل مخفی توانائی سے بکھراو کا M قالب تلاش کریں

$$V(x) = -\alpha\delta(x-a)$$

(د) جزو (ب) کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دوہرا ڈیلٹا تفاعل

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

کے لیئے M قالب تلاش کریں۔ اس مخفی توانائی کی ترسیلی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۲.۵۴: دم ہلانے کی ترکیب سے ہارمونی مرتعش کی زمینی حال کی توانائیوں کو پانچ معانی خیز ہندسوں تک تلاش کریں یعنی K کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۲ کو اعدادی طریقہ سے یوں حل کریں کہ ξ کی بڑی قیمت کے لیئے حاصل تفاعل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ماتھیمٹیکا میں درج ذیل پُر کرنے سے ایسا ہو گا

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[u[x]\,/.\text{NDSolve}[u''[x]-(x^2-K)^*u[x]==0,u[0]==1,u'[0]==0,\\ u[x],x,10^{-8},10,\text{MaxSteps}->10\,000]],x,a,b,\text{PlotRange}->c,d]$$

یہاں a,b ترسیم کی کی افقی ساتھ جبکہ c,d اسکی انتصابی ساتھ ہے $a=0,b=10,c=-10,d=10$ لیتے ہوئے شروع کریں۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا درست جواب $K=1$ ہے لحاظہ آپ $K=0.9$ سے $K=1.1$ شروع کر سکتے ہیں۔ دیکھیں تفاعل موج کی دم کیا کرتی ہے۔ اب لیں ہم دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف چلے جائے گی۔ ان دونوں کی بیچ کہیں پر درست حل موجود ہے۔ K کو درست جواب کے دونوں اطراف قریب سے قریب کرتے ہوئے درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ (سوال ۲.۵۴) استعمال کرتے ہوئے ہارمونی مرتعش کے ہیجانی حال کی توانائی پانچ بامعانی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیئے آپ کو $u[0]==0$ اور $u'[0]==1$ لینا ہو گا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامتناہی چکور کنواں کی اوّلین چار توانائیوں کی قیمتیں پانچ بامعانی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۲.۵۴ میں کی تفرقی مساوات میں موضوں تبدیلیاں لائیں اس بار آپ کو $u(1)=0$ پر نظر رکھنی ہو گی۔

باب ۳

قواعد وضوابط

۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ان میں سے کئی محفیکو کی بنا تھے۔ مثلاً ہارمونی مرتعش میں توانائی کی سطح میں جفت فاصلے جبکہ باقی زیادہ عموماً نظر آتے ہیں، جنہیں ایک بار ثابت کرنا مفید ثابت ہوگا انکی مثالیں عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت ہے۔ اسکو ذہن میں رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیا جائے گا۔

کوانٹائی نظریہ کا دارومدار تفاعل موج اور عامل کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تفاعل موج ظاہر کرتی ہے۔ جبکہ قابلِ مشاہدہ خواص کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر تصوراتی، سمتیات کی تعریفی، حالات پر تفاعل موج پورا اترتے ہیں۔ جبکہ عاملین ان پر خطی تبادلہ کے طور پر عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی قدرتی زبان خطی الجبرائی ہے۔

لیکن مجھے خدشہ ہے کہ اس طرز کی خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ ایک بُعدی فضا میں سمتیہ $\langle\alpha|$ کو ایک مخصوص معیاری عمودی اساس

$$|\alpha\rangle \to a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۱}$$

کے لحاظ سے N عدد اجزاء a_n سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔ دو سمتیات کا اندرونی ضرب $\langle\beta|\alpha\rangle$ تین بُعدی

نقطہ ضرب کو وسط دیتے ہوئے درج ذیل مخلوط عدد ہو گا،

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_N^* b_N \tag{۳.۲}$$

خطی تبادلہ T جنہیں اِنہی مخصوص اساس کے لحاظ سے قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتا ہے۔

$$|\beta\rangle = T|\alpha\rangle \to b = Ta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۳}$$

کوانٹم میکانیات میں پائے جانے والے سمتیات زیادہ تر تفاعل ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں رہتے ہیں انہیں N اجزائی قالب کے علامت سے ظاہر کرنا کچھ زیادہ ٹھیک نہیں ہو گا اور متناہی ابعادی صورت میں ٹھیک رکھنے والے ریاضیاتی عمل لامتناہی ابعادی صورت میں پریشان کن صورت اختیار کر سکتے ہیں۔ اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ اگرچہ مساوات ۳.۲ متناہی مجموعہ ہر صورت موجود ہو گا لامتناہی مجموعہ یا تکمل عدم مرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو گا۔ لحاظہ اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل بے معنی ہو گی۔ یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علامتیت سے واقف ہوں گے بہتر ہو گا کہ یہاں آپ ہوشیار رہیں۔

متغیر x کے تمام تفاعل مل کر سمتی فضا پیدا کرتے ہیں، لیکن ہمارے لیے یہ بہر بڑا ہو گا۔ کسی بھی ممکناتی حال کو ظاہر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تفاعل موج Ψ معمول پر لانے کے قابل ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام قابل تکامل مربع تفاعل

$$f(x) \quad \text{جہاں} \quad \int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{ہو گا۔} \tag{۳.۴}$$

اس سے بہت چھوٹا سمتی فضا دے گا (سوال ۳.۱-ا دیکھیے گا)۔ ریاضی دان اسے $L_2(a,b)$ کہتے ہیں جبکہ ماہرِ طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا کہتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات میں

$$\text{تفاعل موج ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں} \tag{۳.۵}$$

ہم دو تفاعلوں کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔ جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہیں۔

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۶}$$

اگر f اور g دونوں قابل مربع تکمل ہوں یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ انکا اندرونی ضرب موجود ہو گا مساوات ۳.۶ کا تکمل ایک متناہی عدد پر مرکوز ہو گا۔ یہ شوارز عدم مساوات کی درج ذیل تکملی صورت کے پیش نظر ہو گا۔

$$\left|\int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx \int_a^b \left|g(x)\right|^2 \mathrm{d}x} \tag{۳.۷}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے سوال ۳.۱-ب۔ بلخصوص درج ذیل پر دیھان دیں

$$\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^* \tag{۳.۸}$$

مزید $f(x)$ کا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx \tag{۳.۹}$$

حقیقی اور غیر منفی ہو گا یہ صرف اس صورت صفر ہو گا جب $f(x) = 0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت معمول شدہ کہلاتا ہے جب اسکا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک کے برابر ہو دو تفاعل اس صورت عمودی ہوں گے جب انکا اندرونی ضرب صفر ہو اور تفاعلوں کا سلسلہ f_n اس صورت معیاری عمودی ہو گا جب تمام معمول شدہ اور باہمی طور پر عمودی ہوں:

$$\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{mn} \tag{۳.۱۰}$$

آخر میں تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت مکمل ہو گا جب ہلبرٹ فضا میں ہر تفاعل کو انکا خطی جوڑ لکھا جا سکے:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{۳.۱۱}$$

معیاری عمودی تفاعلوں $f_n(x)$ کے عددی سر فوریر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیئے جاتے ہیں:

$$c_n = \langle f_n|f\rangle \tag{۳.۱۲}$$

آپ اسکی تصدیق کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حالات مساوات ۲.۲۸ وقفہ $(0, a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ اور مساوات ۲.۸۵) وقفہ $(-\infty, \infty)$ مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱: (الف) دیکھائیں کہ تمام قابلِ تکمل مربع تفاعلوں کا سلسلہ سمری فضا دے گا آپ صفحہ ۴۱۷ پر ضمیمہ ۱.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں اشارہ: آپ نے دیکھنا ہوگا کے دو عدد قابلِ مربع تفاعلوں کا مجموعہ از خود قابلِ تکمل مربع ہوگا مساوات ۳.۷ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلوں کا سلسلہ سمری فضا ہوگا؟
(ب) دیکھائیں کہ مساوات ۳.۶ کا تکمل اندرونی ضرب ضرب کے تمام شرائط پر پورا اترتا ہے (صفحہ ۴۱۷ پر ضمیمہ ۱.۲)۔

سوال ۳.۲: (الف) تفاعل $f(x) = x^v$ متغیر v کے کس مقداری سعت وقفہ (0,1) پر ہلبرٹ فضا میں ہوگا؟ متغیر v کو حقیقی تصور کریں جو ضروری نہیں مثبت ہو۔
(ب) کیا $v = \frac{1}{2}$ کی صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تفاعل $xf(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ اور تفاعل $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

۳.۲ قابل مشاہدہ

۳.۲.۱ ہرمشی عاملین

قابل مشاہدہ $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, \mathrm{d}x = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle \tag{۳.۱۳}$$

کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے۔ اب پیمائش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہو گا، لہٰذا یہی کچھ بہت سارے نتائج کی اوسط کے لئے بھی درست ہو گا۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \tag{۳.۱۴}$$

اب اندرونی ضرب کا جوڑی دار مخلوط ترتیب الٹ کرتا ہے (مساوات ۳.۸) لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle^* \tag{۳.۱۵}$$

جو لازماً کسی بھی تفاعل موج Ψ کے لئے درست ہو گا۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین کی درج ذیل مخصوص خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \tag{۳.۱۶}$$

ایسے عاملین کو ہم **ہرمشی**[21] کہتے ہیں۔

---

[1] ہرمشی
[2] hermitian

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط مسلط کی جاتی ہے۔

$$\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے} \tag{۳.۱۷}$$

تاہم بظاہر مختلف نظر آنے کے، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط عین میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کا معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نقطہ یہ ہے کہ ہرمشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کوانٹم میکانیات میں ہرمشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

$$\text{قابل مشاہدہ کو ہرمشی عاملین ظاہر کرتے ہیں} \tag{۳.۱۸}$$

آئیں اس کی تصدیق کریں۔ مثلاً کیا معیاری حرکت کا عامل ہرمشی ہے؟

$$\langle f \mid \hat{p}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i}\frac{dg}{dx}dx = \frac{\hbar}{i}f^*g \mid_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\hbar}{i}\frac{df}{dx})^* g dx = \langle \hat{p}f \mid g\rangle \tag{۳.۱۹}$$

میں نے تکمل بالحصص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابلِ تکمل مربع ہیں لحاظہ $\pm\infty$ پر یہ صفر تک پہنچیں گے۔ لحاظہ تکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نی دیکھا ہوگا کہ تکمل بالحصص کے بنا منفی کی علامت کو i کا مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (جس میں i نہیں پایا جاتا) غیر ہرمشی ہے اور یہ کسی بھی قابلِ مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: دیکھائیں کہ ہلبرٹ فضاء میں تمام تفاعل h جن کے لیے $\langle h \mid \hat{Q}h\rangle = \langle \hat{Q}h \mid h\rangle$ ہو تب تمام f اور g کے لیے $\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$ ہوگا۔ مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہرمشی کی تعریفات معادل ہیں۔ اشارہ پہلے $h = f + g$ لیں اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۴:

(الف) دیکھائیں کہ دو ہرمشی عاملین کا مجموعہ از خود ہرمشی ہوگا۔

(ب) فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے اور α ایک مخلوط عدد ہے۔ α پر کیا شرائط مسلط کرنے سے $\alpha\hat{Q}$ بھی ہرمشی ہوگا؟

(ج) دو ہرمشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہرمشی ہوگا؟

(د) دیکھائیں کہ ہامل مقام ($\hat{x} = x$) اور ہیملٹونی عامل ($\hat{H} = -(\hbar^2/2m)d^2/dx^2 + V(x)$) ہرمشی ہے۔

سوال ۳.۵: عامل $\hat{Q}$ کا ہرمشی جوڑی دار یا شریک عامل $\hat{Q}^\dagger$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f \mid g\rangle \quad \text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے} \tag{۳.۲۰}$$

یوں ہرمشی عامل اپنے ہرمیشی جوڑی دار کے برابر ہوگا $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$۔

(الف) x, i اور $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ کے ہرمشی جوڑی دار تلاش کریں۔

(ب) ہارمونی مرتعش کے عامل رفت a_+ مساوات ۲.۴۷ کا ہرمشی جوڑی دار تیار کریں۔

(ج) دیکھائیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^{\dagger} = \hat{R}^{\dagger}\hat{Q}^{\dagger}$ ہو گا۔

۳.۲.۲ قابلِ معلوم حالات

کوانٹم میکانیات کی ناقابلِ معلومیت کی بنا عام طور پر بلکل یکساں تیار کردہ کہ صدرہ جو تمام ψ حال میں ہوں کی قابلِ مشاہدہ Q پیمائش سے ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہو گا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں پہ Q کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت جسے ہم q کہہ سکتے ہیں دیگا؟ اس کو آپ قابلِ مشاہدہ Q کی قابلِ معلوم حال کہہ سکتے ہو۔ ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ہیملٹونی کی ساکن حالات قابلِ معلوم ہے۔ ساکن حال ψ_n میں ایک ذرہ کی کُل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی اجازتی توانائی E_n دیگا۔

قابلِ معلوم حال میں Q کی معیاری انحراف صفر ہو گی جسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma^2 = \langle(\hat{Q} - \langle Q\rangle)^2\rangle = \langle\psi \mid (\hat{Q} - q)^2\psi\rangle = \langle(\hat{Q} - q)\psi \mid (\hat{Q} - q)\psi\rangle = 0 \tag{۳.۲۱}$$

اب اگر ہر پیمائش q دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی q ہو گی $\langle Q\rangle = q$۔ چونکہ $\hat{Q}$ ہرمشی ہے لحاظہ $\hat{Q} - q$ بھی ہرمشی عامل ہو گا۔ میں نے اندرونی ضرب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایک جز ضربی کو بائیں منتقل کیا لیکن ایسا واحد تفاعل جس کا خود کے ساتھ اندرونی ضرب صفر ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\hat{Q}\psi = q\psi \tag{۳.۲۲}$$

یہ عامل کیونکہ امتیازی قدر مساوات یا آئگنی قدر مساوات ہے۔ $\hat{Q}$ کا ایک امتیازی تفاعل ψ ہے جس کی مطابقتی آئگنی قدر $\hat{Q}$ ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

قابلِ معلوم حالات $\hat{Q}$ کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔ (۳.۲۳)

ایسے حال پر Q کی پیمائش لازماً امتیازی قدر q دیگی۔

دیہان رہے کہ آئگنی قدر ایک عدد ہے نا کہ کوئی عامل یا تفاعل۔ ایک آئگنی تفاعل کو ایک مستقل سے ضرب دینے سے دوبارہ ایک آئگنی تفاعل حاصل ہو گا جس کی آئگنی قیمت وہی ہو گی۔ امتیازی تفاعل کی تعریف کے رو سے صفر ایک گنی تفاعل نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب کسی بھی عامل $\hat{Q}$ اور تمام q کے لیے $\hat{Q}0 = q0 = 0$ ہوتا اور ہر عدد ایک آئگنی قدر ہوتا۔ ہاں آئگنی قدر کی قیمت صفر ہو سکتی ہے ایک عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس کا طیف حاصل ہو گا۔ بعض اوقات دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی تفاعل کی امتیازی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ طیف انحطاطی ہے۔

مثال کے طور پر قُل توانائی کے قابلِ معلوم حالات ہیملٹونی کے امتیازی تفاعل ہوں گے۔

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{۳.۲۴}$$

جو عین وقت کا غیر تابع شروڈنگر مساوات ہے۔ ایسی سیاق و سباق میں ہم امتیازی قدر کے لیے حرف E استعمال کرتے ہیں اور امتیازی تفاعل کے لیے ψ اس کے ساتھ جز $\exp(-iEt/\hbar)$ جوڑ کا ψ حاصل ہو گا جو اگر آپ چاہیں اب بھی H کا امتیازی تفاعل ہے۔

مثال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں دو ابعاد میں ϕ قطبی معدد کا ایک متغیر ہے

$$\hat{Q} \equiv i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} \tag{۳.۲۵}$$

یہ عامل سوال ۲.۴۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا کیا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعل اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم متناہی وقفہ $0 \le \phi \le 2\pi$ پر تفاعل $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں ϕ اور $\phi + 2\pi$ ایک ہی طبعی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \tag{۳.۲۶}$$

تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \int_0^{2\pi} f^*(i\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi})\,\mathrm{d}\phi = if{*}g\,|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i(\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}\phi})g\,\mathrm{d}\phi = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$$

لحاظہ $\hat{Q}$ ہرمشی ہے یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا سرحدی جز خارج ہو گا۔ امتیازی قدر مساوات

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}f(\phi) = qf(\phi) \tag{۳.۲۷}$$

کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f(\phi) = Ae^{-iq\phi} \tag{۳.۲۸}$$

q کی ممکنہ قیمتوں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل پر رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{۳.۲۹}$$

اس عامل کا طیف تمام عدد صحیح پر مشتمل ہو گا اور یہ غیر انحطاطی ہے۔ □

سوال ۳.۶: عامل $\hat{Q} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\phi^2$ پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور ϕ قطبی محدد میں اسمتی زاویہ ہے۔ کیا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔ عامل $\hat{Q}$ کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انحطاطی ہے؟

۳.۳ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہرمشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبعی طور پر قابل مشاہدہ کے تعیین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف **غیر مسلسل**[3] ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف **استمراری**[4] ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہو گی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہو گا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہو گا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہو گا (مثلاً متناہی چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ درحقیقت یہ متناہی ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہرمشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی قدر q ہو) اور[5]

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$$

ہو ($\hat{Q}$ ہرمشی ہے)۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$q\langle f\,|f\,\rangle = q^*\langle f\,|f\,\rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہٰذا اس کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات 6.3) لہٰذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہو گا)۔ تاہم $\langle f|f\rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x)=0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہٰذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہو گا۔

□

---

[3] discrete
[4] continuous
[5] یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

سے باعث اطمینان ہے: تعیین حال میں ایک ذرہ کی قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: انفرادی امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ ساتھ فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle$ ہوگا لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$q'\langle f|g\rangle = q^*\langle f|g\rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے۔) اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہٰذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f|g\rangle = 0$ ہوگا۔

□

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی مرتعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعیین حالات کی بھی ہوگی۔

بدقسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انحطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیسا) امتیازی قدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قدر والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۷.۳-۱) اور ہم گرام شمد ترکیب عمودیت[6] (سوال A4) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولی طور پر ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹم میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

متناہی بعدی سمتی فضا میں ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے)۔ بدقسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹم میکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہٰذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہرمشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔[7]

---

[6] Gram-Schmidt orthogonalization process

[7] چند مخصوص صورتوں میں کملیت کو ثابت کیا جا سکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں قابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

سوال ۳.۷:

ا. فرض کریں کہ عامل $\hat{Q}$ کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ از خود $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل ہو گا اور اس کا امتیازی قدر q ہو گا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^{x}$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک دوسرے جیسا ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ $(-1,1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہرمشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

۳.۳.۲ استمراری طیف

ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہٰذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہو گا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی قدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x) = pf_p(x) \tag{۳.۳۰}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f_p(x) = Ae^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ قابل تکمل مربع نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی اقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل "معیاری عمودیت" حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^{*}(x)f_p(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\,\mathrm{d}x = |A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p') \tag{۳.۳۱}$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \tag{۳.۳۲}$$

لہٰذا

$$\langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p - p') \tag{۳.۳۳}$$

ہو گا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو **ڈیراک معیاری عمودیت**[۸] کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات **مکمل** ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب تکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (قابل تکامل مربع) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \tag{۳.۳۴}$$

پھیلاو عددی سر (جو اب تفاعل $c(p)$ ہو گا) کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle\,\mathrm{d}p = \int_{\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p')\,\mathrm{d}p = c(p') \tag{۳.۳۵}$$

چونکہ یہ پھیلاو (مساوات ۳.۳۴) درحقیقت ایک فوریئر تبادل ہے لہٰذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن نما ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{۳.۳۶}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پر اسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعیین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہو گا۔

ہم مثال ۲.۳ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ $\hat{p}$ کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) قریبی "مضافات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول

[۸] Dirac orthonormality

پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا ایک بعدی بکھراو پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔[۹]

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی قدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$xg_y(x) = yg_y(x) \tag{۳.۳۷}$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $y = x$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ در حقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x-y)$$

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تفاعلات قابل تکامل مربع نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*_{y'} g_y(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y')\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = |A|^2\delta(y-y') \tag{۳.۳۸}$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$g_y(x) = \delta(x-y) \tag{۳.۳۹}$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\langle g_{y'}|g_y\rangle = \delta(y-y') \tag{۳.۴۰}$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)g_y(x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{۳.۴۱}$$

---

[۹] غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ یہ نا صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے قابو بڑھتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں "مضافات" کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (متناہی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا $\hat{p}$ کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہرمشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک f ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل $\hat{p}$ کا امتیازی قدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہرمشی عامل $\hat{p}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں $\hat{p}$ ہرمشی ہو۔

جہاں درج ذیل ہو گا

$$c(y) = f(y) \tag{۳.۴۲}$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریئر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہٰذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب تکمل ہو گا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی مرتعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (متناہی چکور کنواں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۱۰: کیا لامتناہی چکور کنواں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی قابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب **متعمم شماریاتی مفہوم**[۱۰] پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے قابل بناتی ہے۔ متعمم شماریاتی مفہوم اور شروڈنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقا کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کوانٹم میکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شماریاتی مفہوم: حال $\Psi(x,t)$ میں ایک ذرے کی ایک قابل مشاہدہ $Q(x,P)$ کی پیمائش ہر صورت ہرمشی عامل $\hat{Q}(x, -i\hbar\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی۔ اگر $\hat{Q}$ کا طیف غیر مسلسل ہو تب

[۱۰] generalized statistical interpretation

معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \quad \text{ہوگا جہاں} \quad c_n = \langle f_n|\Psi\rangle \quad \text{ہے۔} \tag{۳.۴۳}$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی اقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سعت $\mathrm{d}z$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$\left|c(z)\right|^2 \mathrm{d}z \quad \text{ہوگا جہاں} \quad c(z) = \langle f_z|\Psi\rangle \quad \text{ہوگا۔} \tag{۳.۴۴}$$

پیمائشی عمل کے بنا تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر **منہدم**[11] ہوتا ہے۔[12]

شماریاتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہو گا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہٰذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n f_n(x) \tag{۳.۴۵}$$

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو باآسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جا سکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہٰذا ان کے عددی سر کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔[13]

$$c_n = \langle f_n|\Psi\rangle = \int f_n(x)^* \Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۴۶}$$

کیفی طور پر "Ψ میں f_n کی مقدار" کو c_n ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش $\hat{Q}$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال Ψ میں "f_n کی مقدار" پر منحصر ہو گا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہٰذا پیمائش کی ٹھیک قیمت $|c_n|^2$ ہو گی۔ متعمم شماریاتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔[14]

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہو گا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \tag{۳.۴۷}$$

---

[11] collapse

[12] استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد و نواہ میں، پیمائشی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود وسعت پر، تفاعل موج منہدم ہو گا۔

[13] دھیان رہے کہ تابعیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں $c_n(t)$ لکھنا چاہیے۔

[14] یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ "اس ذرے کا حال f_n میں پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے۔" ایسا کہنا بالکل غلط ہو گا۔ صرف یہ کہنا درست ہو گا کہ ذرہ حال Ψ میں ہے۔ ہاں Q کی پیمائش سے قیمت q_n کے حصول کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفاعل موج f_n پر منہدم کرتی ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال Ψ میں ہے، اس کا Q کی پیمائش کے بعد حال f_n میں ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جو یقیناً تفاعل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
1 = \langle\Psi|\Psi\rangle &= \Big\langle\Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big)\Big|\Big(\sum_{n} c_n f_n\Big)\Big\rangle = \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^* c_n \langle f_{n'}|f_n\rangle \\
&= \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2
\end{aligned} \tag{۳.۴۸}
$$

اسی طرح تمام ممکنہ امتیازی اقدار کو انفرادی طور ہر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے Q کی توقعاتی قیمت حاصل ہو گی۔

$$
\langle Q\rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \tag{۳.۴۹}
$$

یقیناً درج ذیل ہو گا

$$
\langle Q\rangle = \langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \Big\langle\Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big)\Big|\Big(\hat{Q}\sum_{n} c_n f_n\Big)\Big\rangle \tag{۳.۵۰}
$$

جسے $\hat{Q} f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\langle Q\rangle = \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'}|f_n\rangle = \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n'n} \sum_n q_n |c_n|^2. \tag{۳.۵۱}
$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آ رہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چوہا مارنے والی بات ہو گی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال Ψ میں ایک ذرے کے لیے x کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی قدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد y متغیر x کا امتیازی قدر ہو گا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل $g_y(x) = \delta(x-y)$ ہو گا۔ ظاہراً درج ذیل ہو گا

$$
c(y) = \langle g_y|\Psi\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x = \Psi(y,t) \tag{۳.۵۲}
$$

لہٰذا وسعت $\mathrm{d}y$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y,t)|^2$ ہو گا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہو گا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(ipx/\hbar)}$ ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$
c(p) = \langle f_p|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۵۳}
$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو **معیار حرکت فضا تفاعل موج**[15] پکارا اور $\Phi(p,t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ در حقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x,t)$ کا فوریئر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فوریئر بدل ہے ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\,\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{۳.۵۴}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar}\,\Phi(p,t)\,\mathrm{d}p, \tag{۳.۵۵}$$

متعمم شماریاتی مفہوم کے تحت سعت $\mathrm{d}p$ میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\Phi(p,t)\right|^2 \mathrm{d}p \tag{۳.۵۶}$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ڈیلٹا تفاعل کنواں $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar} \tag{۳.۵۷}$$

یوں معیار حرکی فضا تفاعل موج درج ذیل ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2+p_0^2)^2}\,\mathrm{d}p &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{pp_0}{p^2+p_0^2} + \tan^{-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)\right]\Bigg|_{p_0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908
\end{aligned}$$

(اور یہاں بھی میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ □

سوال ۳.۱۱: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فضا تفاعل موج $\Phi(p,t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے p کی پیمائش کا کلاسیکی سعت کے باہر نتیجہ کا احتمال

---

[15] momentum space wave function

(دو بامعنی ہندسوں تک) کیا ہو گا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے "عمومی تقسیم" یا "تفاعل خلل" کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle x \rangle = \int \Phi^* \Big(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p} \Big) \Phi \,\mathrm{d}p. \tag{۳.۵۸}$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p})e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل مقام $i\hbar\partial/\partial p$ ہو گا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\langle Q(x,p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi \,\mathrm{d}x, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}, p\right) \Phi \,\mathrm{d}p, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases} \tag{۳.۵۹}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہو گا)۔

۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہٰذا توجہ رکھیں۔

۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی قابل مشاہدہ A کے لیے درج ذیل ہو گا (مساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے قابل مشاہدہ B کے لیے

$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle$ ہو گا جہاں $g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi$ ہے۔

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \tag{۳.۶۰}$$

اب کسی بھی مخلوط عدد z کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$|z|^2 = [(z)_{\text{حقیقی}}]^2 + [(z)_{\text{خیالی}}]^2 \geq [(z)_{\text{خیالی}}]^2 = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2 \tag{۳.۶۱}$$

یوں $z = \langle f|g\rangle$ لیتے ہوئے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}[\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle]\right)^2 \tag{۳.۶۲}$$

ہو گا لیکن $\langle f|g\rangle$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \langle(\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi|(\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi\rangle = \langle\Psi|(\hat{A} - \langle A\rangle)(\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B\rangle - \hat{B}\langle A\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle)\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle - \langle B\rangle\langle\Psi|\hat{A}\Psi\rangle - \langle A\rangle\langle\Psi|\hat{B}\Psi\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle \\
&= \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle \\
&= \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\langle g|f\rangle = \langle\hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

لہٰذا

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle\hat{B}\hat{A}\rangle = \langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle,$$

ہو گا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقلب ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2 \tag{۳.۶۳}$$

یہ **اصول عدم یقینیت**[16] کی **عمومی** صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہرمشی عاملین کے مقلب میں بھی i کا جزر پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود i کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔[17]

---

[16] uncertainty principle

[17] یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دو ہرمشی عاملین کا مقلب از خود خلاف ہرمشی ($\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$) ہو گا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہو گی (سوال ۳.۲۶)۔

مثال کے طور پر، فرض کریں مقام $(\hat{A} = x)$ پہلا اور معیار حرکت $(\hat{B} = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ دوسرا قابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقلب

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہٰذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} i\hbar\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{h}{2} \tag{۳.۶۴}$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو قابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر مقلوب ہوں کے لیے ایک عدد "اصول عدم یقینیت" پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں **غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ**[۱۸] کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہو گا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (مقلوب) قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔[۱۹]

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا z جزو باہمی ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی اقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہٰذا مقام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کوانٹم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماریاتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا مقام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا مقام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریئر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسیع سعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہٰذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہو گی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائن نما موج پر منہدم ہو گا، جس کا طول موج

---

[۱۸] incompatible observables

[۱۹] یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر مقلب قالبوں کو بیکوقت وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے (یعنی، انہیں ایک دوسرے جیسی مشابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہرمشی قالبوں کو بیکوقت وتری بنایا جا سکتا ہے۔ حصہ ۵.۱ دیکھیں۔

(ا ب) پوری طرح معین لیکن مقام پہلی پیمائش سے مختلف ہو گا۔[20] مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر مستمل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہو گی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں قابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہو گا)۔ تاہم ایسا عموماً تب ممکن ہو گا جب دونوں قابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۳:

ا. درج ذیل مماثل مقلب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{۳.۶۵}$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے پر درج ذیل ہو گا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{۳.۶۶}$$

سوال ۳.۱۴: مقام $(A = x)$ میں عدم یقینیت اور توانائی $(B = p^2/2m + V)$ میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر $\hat{P}$ اور $\hat{Q}$ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $[\hat{P}, \hat{Q}]f = 0$ ہو گا۔

[20] جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) x کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود p کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریدا جائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے فوٹان اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے قابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا مقام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی مرتعش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x\sigma_p = \hbar/2)$ کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہو گا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۶۰ اور مساوات ۳.۶۱۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ Ψ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = cf(x)$، جہاں c کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۱ میں z کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 =$ حقیقی(z) ہو، یعنی جب

$$\text{حقیقی}\langle f|g\rangle = \text{حقیقی}(c\langle f|f\rangle) = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f\rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہٰذا مستقل c لازماً خالص خیالی ہو گا؛ جسے ہم ia لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہو گا۔

$$g(x) = iaf(x), \quad \text{حقیقی } z \tag{۳.۶۷}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle p\rangle\Big)\Psi = ia(x - \langle x\rangle)\Psi \tag{۳.۶۸}$$

جو متغیر x کے تفاعل Ψ کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = Ae^{-a(x-\langle x\rangle)^2/2\hbar}e^{i\langle p\rangle x/\hbar} \tag{۳.۶۹}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ در حقیقت گاوسی ہو گا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھے۔[۲۱]

سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۸ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ مستقلات ہیں۔

۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۰}$$

[۲۱] دھیان رہے کہ صرف Ψ کو x کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ "مستقلات" A، a، $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ Ψ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اتنا دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحہ پر تفاعل موج x کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحہ پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہو گا۔

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے Δx (متغیر x کی "عدم یقینیت") لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۷۰ کی طرح کا **توانائی و وقت اصول عدم یقینیت**[۲۲] درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۱}$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں x اور t (بلکہ ct) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں p اور E (بلکہ E/c) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہٰذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۱ اور مساوات ۳.۷۰ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شروڈنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ t اور x کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفرقی مساوات t میں یک رتبی جبکہ x میں دو رتبی ہے)، اور مساوات ۳.۷۰ سے قطعاً مساوات ۳.۷۱ مراد نہیں لی جا سکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے قابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاعلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو Δt ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام "کافی زیادہ" تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی قابل مشاہدہ $Q(x,p,t)$ کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \Big\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|\hat{Q}\Psi\Big\rangle + \Big\langle\Psi\Big|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\Big\rangle + \Big\langle\Psi\Big|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big\rangle$$

اب مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|\hat{Q}\hat{H}\Psi\rangle + \Big\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Big\rangle$$

[۲۲] energy-time uncertainty principle

اب $\hat{H}$ ہرمشی ہے لہٰذا $\langle \hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle \Psi|\hat{H}\hat{Q}\Psi\rangle$ اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle \tag{۳.۷۲}$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کار آمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۷ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہو گا،[۲۳] یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقلب تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر $\hat{H}$ اور $\hat{Q}$ آپس میں قابل تبدل ہوں، تب $\langle Q\rangle$ مستقل ہو گا، اور اس نقطہ نظر سے Q بقائی مقدار ہو گا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۳) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ Q صریحاً t کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2\sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle\right)^2 = \left(\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

ہو گا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma_H\sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$\Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d\,\mathrm{d}\langle Q\rangle/\,\mathrm{d}t} \tag{۳.۷۳}$$

تب درج ذیل ہو گا۔

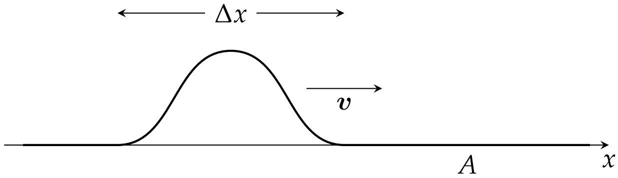
$$\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۴}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں Δt کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|\Delta t,$$

ہے لہٰذا Δt اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں Q کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص Δt اس قابل مشاہدہ Q پر منحصر ہو گی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی ΔE کی صورت میں تمام قابل

[۲۳] وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا عموماً $\partial\hat{Q}/\partial t = 0$ ہو گا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال لینے کی خاطر ایک ایسے ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقیاس لچک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجہ حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لچکدار ہو جاتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2x^2$



شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔

مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہو گی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہو گی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکتا طور پر معین ہو گی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مساوات ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x,t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر a، b، ψ_1 اور ψ_2 حقیقی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|\Psi(x,t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar/(E_2-E_1)$ ہو گا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Delta E\Delta t = 2\pi\hbar$$

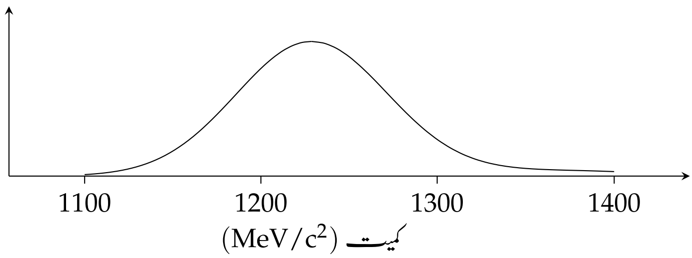
جو یقیناً $\hbar/2 \geq$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$ ہو گا لیکن $E = p^2/2m$ ہے، لہٰذا $\Delta E = p\Delta p/m$ ہو گا۔ یوں

$$\Delta E\Delta t = \frac{p\Delta p}{m}\frac{m\Delta x}{p} = \Delta x\Delta p$$

ہو گا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہو گا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔

□



شکل ۳.۲: کمیت Δ کی پیمائشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

مثال ۳.۷: ذرہ Δ تقریباً 10^{-23} سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کمیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جرس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232\,\mathrm{MeV/c^2}$ پر اور چوڑائی تقریباً $120\,\mathrm{MeV/c^2}$ ہو گی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی (mc^2) کیوں بعض اوقات 1232 سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی خلل کے بنا ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2}\mathrm{MeV}\right)(10^{-23}\,\mathrm{s}) = 6 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$$

ہے جبکہ $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$ ہے۔ یوں کمیت میں پھیلاؤ اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت اجازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کمیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔[۲۴] □

ان مثالوں میں ہم نے جزو Δt کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مراد طول موج تھا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مراد وہ دورانیہ تھا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں Δt اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں "کافی زیادہ" تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا کوانٹم میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی ΔE "ادھار" لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar/(2\Delta E)$ کے اندر "واپس" کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہو گا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی جائز مطلب لیے جا سکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹم میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی

[۲۴] حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ 10^{-23} سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کمیتی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الٹ رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ فرض کریں کہ Δ تقریباً ایک پروٹان ($\sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً 10^{-23} سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ فرض کرنا مشکل ہو گا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔

غلط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ غلط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۷: درج ذیل ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷۲ کی اطلاق کریں۔

ا. $Q = 1$ ب. $Q = H$ ج. $Q = x$ د. $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲۷، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تفاعل موج اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۴ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

۳.۶ ڈیراک علامتیت

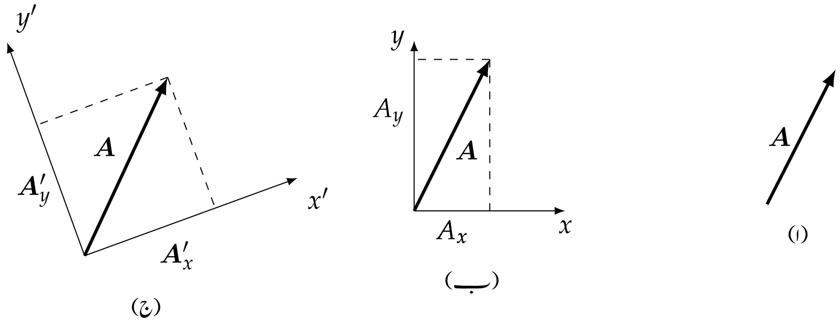
دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ پر غور کریں (شکل ۳.۳-ا)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ x اور y محدد کا ایک کارتیسی نظام قائم کرکے اس پر سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے اجزاء: $A_x = \hat{\imath} \cdot \boldsymbol{A}$ اور $A_y = \hat{\jmath} \cdot \boldsymbol{A}$ وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام قائم کرے جس کے محدد x' اور y' ہوں؛ وہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے اجزاء $A'_x = \hat{\imath}' \cdot \boldsymbol{A}$ اور $A'_y = \hat{\jmath}' \cdot \boldsymbol{A}$ پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس $(\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\})$ اور $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}')$ کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ از خود "باہر فضا" میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

یہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو "باہر ہلبرٹ فضا" میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ در حقیقت امتیازی تفاعل مقام کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو کا عددی سر موجی تفاعل $\Psi(x,t)$ ہوگا:

$$\Psi(x,t) = \langle x|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۵}$$

(جہاں $\hat{x}$ کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت x ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے)[۲۵]، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو، مقام و معیار حرکت موجی تفاعل

[۲۵] میں اس کو g_x (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس مقام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی



شکل ۳.۳: (ا) سمتیہ $\boldsymbol{A}$، (ب) xy محدد سے لحاظ سے $\boldsymbol{A}$ کے اجزاء، (ج) $x'y'$ محدد کے لحاظ سے $\boldsymbol{A}$ کے اجزاء

$\Phi(p,t)$ ہے:

$$\Phi(p,t) = \langle p|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۶}$$

(جہاں $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت p ہے کو سمتیہ $\langle p|$ ظاہر کرتا ہے)۔[26] ہم $|\mathcal{S}\rangle$ کے پھیلاو کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر رہے ہیں):

$$c_n(t) = \langle n|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۷}$$

(جہاں $\hat{H}$ کے n ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $\langle n|$ ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات ۳.۴۶۔ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات Ψ اور Φ، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \int \Psi(y,t)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int \Phi(p,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p\\ &= \sum c_n e^{-iE_nt/\hbar}\psi_n(x)\end{aligned} \tag{۳.۷۸}$$

(قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا "تبادلہ" دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle \tag{۳.۷۹}$$

مخصوص اساس سے چھٹکارا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ ہلبرٹ فضا کو، x پر، بطور قابل مربع تکمل تفاعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس مقام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

[26] مقامی فضا میں یہ $f_p(x)$ ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$،[27] کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$|\alpha\rangle = \sum_n a_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n|\alpha\rangle \quad \text{ہے، اور}$$
$$|\beta\rangle = \sum_n b_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n\langle e_n\beta\rangle \quad \text{ہے} \tag{۳.۸۰}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبی ارکان**[28][29]

$$\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \equiv Q_{mn} \tag{۳.۸۱}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\sum_n b_n|e_n\rangle = \sum_n a_n\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۲}$$

یا، سمتیہ $\langle e_m|$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$\sum_n b_n\langle e_m|e_n\rangle = \sum_n a_n\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۳}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn}a_n \tag{۳.۸۴}$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں قالبی ارکان معلومات فراہم کرتے ہے۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہو گا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد متناہی عدد (N) ہو گا۔ سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ ایسی صورت میں N ابعادی سمتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، (N) اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ عاملین $(N \times N)$ سادہ قالب کا روپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامتناہی آبادی سمتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔[30]

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

---

[27] میں فرض کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں n استمراری ہو گا اور مجموعات کی جگہ تکملات ہوں گے۔

[28] matrix elements

[29] یہ اصطلاح متناہی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس "قالب" کے ارکین کی تعداد اب لامتناہی ہو گی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

[30] یہاں "مساوات" کی نشان سے مراد "ظاہر کرتا ہے" لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علامتیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathcal{S}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ہو گا جہاں $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہے۔

ہیملٹنی کو ایک (ہرمشی) قالب کے روپ میں لکھا جا سکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں g اور h حقیقی مستقل ہیں۔ اگر ($t = 0$ پر) یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت t پر اس کا حال کیا ہو گا؟

حل: (تابع وقت) شروڈنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathcal{S}\rangle = H|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۵}$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شروڈنگر

$$H|\mathcal{S}\rangle = E|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۶}$$

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم H کی امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h - E = \mp g \Rightarrow E_\pm = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اجازتی توانائیاں $(h+g)$ اور $(h-g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm\alpha$$

لہٰذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{S}_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathcal{S}_+\rangle + |\mathcal{S}_-\rangle\right)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_nt/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{S}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i(h+g)t/\hbar}|\mathcal{S}_+\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar}|\mathcal{S}_-\rangle] \\
&= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar}\left[e^{-igt/\hbar}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^{igt/\hbar}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar}\begin{pmatrix}e^{-igt/\hbar}+e^{igt/\hbar}\\ e^{-igt/\hbar}-e^{igt/\hbar}\end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar}\begin{pmatrix}\cos(gt/\hbar)\\ -i\sin(gt/\hbar)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t=0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) **ارتعاش نیوٹرینو**[31] کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ **الیکٹران نیوٹرینو**[32]، اور $|2\rangle$ **میون نیوٹرینو**[33] کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں خلاف وتر جزو (g) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میون نیوٹرینو میں اور میون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

ڈیراک نے اندرونی ضرب $\langle\alpha|\beta\rangle$ میں براکٹ[34] کی علامت کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کر کے پہلے حصہ کو **برا**[35]، $\langle\alpha|$ ، اور دوسرے حصے کو **کٹ**[36]، $|\beta\rangle$ کا نام دیا۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ جوڑنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہو گا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک برا کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) ایک تفاعلی فضا میں برا کو تکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جا سکتا ہے:

$$\langle f| = \int f^*[\cdots]\,dx$$

جہاں چکور قوسین $[\cdots]$ میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو برا کے دائیں ہاتھ کٹ میں موجود ہو گا۔ ایک متناہی بعدی سمتی فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix} \tag{۳.۸۷}$$

---

[31] neutrino oscillations
[32] electron neutrino
[33] muon neutrino
[34] انگریزی میں قوسین کو براکٹ کہتے ہیں۔
[35] bra
[36] ket

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی برا ایک سمتیہ صف

$$\langle\alpha| = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \tag{۳.۸۸}$$

ہو گا۔ تمام برا کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتی فضا حاصل ہو گا جس کو **دوہری فضا**[۳۷] کہتے ہیں۔

برا کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{۳.۸۹}$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا وہ حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے "ساتھ ساتھ" پایا جاتا ہو:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle;$$

ہم اس کو $|\alpha\rangle$ کے احاطہ کیے گئے یک بعدی ذیلی فضا پر **عامل تظلیل**[۳۸] کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \tag{۳.۹۰}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \tag{۳.۹۱}$$

(جو عامل مماثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاو کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \tag{۳.۹۲}$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z|e_{z'}\rangle = \delta(z - z') \tag{۳.۹۳}$$

ہو، تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int |e_z\rangle\langle e_z|\,\mathrm{d}z = 1 \tag{۳.۹۴}$$

مساوات ۳.۹۱ اور مساوات ۳.۹۴ مکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

---

[۳۷] dual space

[۳۸] projection operator

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تظلیل **یک طاقتی**[۳۹] ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہوگا۔ $\hat{P}$ کے امتیازی اقدار تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ کٹ $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ کو (دوہری اساس $\langle 1|$ ، $\langle 2|$ ، $\langle 3|$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle\alpha|\beta\rangle$ اور $\langle\beta|\alpha\rangle$ تلاش کریں اور $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $\hat{A} \equiv |\alpha\rangle\langle\beta|$ کے نو ارکان قالب تلاش کر کے قالب $\mathbf{A}$ تیار کریں۔ کیا یہ ہرمشی ہے؟

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

جہاں $|1\rangle, |2\rangle$ معیاری عمودی اساس اور E ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی اقدار اور ($|1\rangle$ اور $|2\rangle$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ) امتیازی تفاعل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے $\hat{H}$ کا قالب $\mathbf{H}$ کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل $\hat{Q}$ کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ $\hat{Q}$ کو اس کے **طیفی تحلیل**[۴۰]

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہٰذا کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{\sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|\right\}|\alpha\rangle$$

---

[۳۹] idempotent
[۴۰] spectral decomposition

مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: **لیژانڈر کثیر رکنیاں۔** وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تفاعلات 1 ، x ، x^2 اور x^3 کو گرام وشمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال A.4 دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پہچان پائیں؛ (معیاری عمودزنی کے علاوہ)[41] یہ لیژانڈر کثیر رکنیاں ہیں (جدول ۱.۴)۔

سوال ۳.۲۶: ایک **خلاف ہرمشی**[42] (یا **منحرف ہرمشی**[43]) عامل اپنے ہرمشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

$$\hat{Q}^{\dagger} = -\hat{Q} \tag{۳.۹۵}$$

ا. دکھائیں کہ خلاف ہرمشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہو گی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہرمشی عاملین کا مقلب خلاف ہرمشی ہو گا۔ دو عدد خلاف ہرمشی عاملین کے مقلب کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ۳.۲۷: **ترتیبی پیمائشیں**[44]: قابل مشاہدہ A کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{A}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ψ_1 اور ψ_2 ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب a_1 اور a_2 ہیں، پائے جاتے ہیں۔ قابل مشاہدہ B کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{B}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ϕ_1 اور ϕ_2 اور بالترتیب امتیازی اقدار b_1 اور b_2 ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. قابل مشاہدہ A کی پیمائش a_1 قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فوراً) بعد یہ نظام کس حال میں ہو گا؟

ب. اب اگر B کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. قابل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ a_1 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳.۲۸: لامتناہی چکور کنواں کے n ویں ساکن حال کی معیار حرکت وفضا تفاعل موج $\Phi_n(p,t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p,t)|^2$ اور $|\Phi_2(p,t)|^2$ کو p کے تفاعل کے طور پر ترسیم کریں (نقاط $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p,t)$ کو استعمال کرتے ہوئے p^2 کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۲.۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

---

[41] لیژانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کونسی روایت بہتر ثابت ہو گی۔ انہوں نے مجموعی جز وضربی یوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تفاعلات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بدقسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

[42] anti-hermitian

[43] skew-hermitian

[44] sequential measurements

سوال ۳.۲۹: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں n کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تفاعل خالص سائن نما ہے (جس کا طول موج λ ہے) تاہم چونکہ یہ تفاعل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہٰذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سعت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت وفضا تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x,0)|^2$ اور $|\Phi(p,0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفروں کے بیچ) چوڑائیاں ω_x اور ω_p تعین کریں۔ دیکھیں کہ $n \to \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہو گا؟ ω_x اور ω_p کو Δx اور Δp کی اندازاً قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ σ_p کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنا ہو گا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۳۰: درج ذیل فرض کریں

$$\Psi(x,0) = \frac{A}{x^2+a^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے A تعین کریں۔

ب. (لمحہ $t=0$ پر) $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ_x تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت وفضا تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p,0)$ استعمال کرتے ہوئے (لمحہ $t=0$ پر) $\langle p \rangle$ $\langle p^2 \rangle$ اور σ_p کا حساب کریں۔

ھ. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: **مسئلہ وریل**۔ درج ذیل مساوات ۳.۷۲ کی مدد سے دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle xp \rangle - 2\langle T \rangle - \left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \right\rangle \tag{۳.۹۶}$$

جہاں T حرکی توانائی $(H = T + V)$ ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہو گا (ایسا کیوں ہے؟) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$2\langle T \rangle = \left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \right\rangle \tag{۳.۹۷}$$

اس کو **مسئلہ وریل** [۴۵] کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ ہو گا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

---

[۴۵] virial theorem

سوال ۳.۳۲: توانائی ووقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau/\pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x,0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x,t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کا تفاعل موج $\Psi(x,0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں قالبی ارکان $\langle n|x|n'\rangle$ اور $\langle n|p|n'\rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں قالبی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامتناہی) قالب $\mathbf{X}$ اور $\mathbf{P}$ تشکیل دیں۔ دکھائیں کہ اس اساس میں $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$ وتری ہو گا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جزوی جواب:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) \tag{۳.۹۸}$$

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک دوسرے جتنے احتمال کے ساتھ، $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p\rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3

ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ($|n\rangle = \psi_n(x)$، مساوات ۲.۶۷) میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد ($\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$) پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x\sigma_p = (2n+1)\hbar/2$ ہو گا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں **اتساقی حالات**[46] کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل[47] کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی قدر α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x\rangle$، $\langle x^2\rangle$، $\langle p\rangle$، $\langle p^2\rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ a_- کا ہرمشی جوڑی دار a_+ ہے۔ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہو گا۔

ب. σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$ ہو گا۔

[46] coherent states

[47] عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتفاقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاو

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاو کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$

ھ. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \to e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

شامل کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی a_- کا امتیازی حال ہو گا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی قدر ارتقا پذیر ہو گا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتفاقی حال ہمیشہ اتفاقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال $|n = 0\rangle$ از خود اتفاقی حال ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہو گا۔

سوال ۳.۳۶: **مبسوط اصول عدم یقینیت۔** متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۳) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$ ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \tag{۳.۹۹}$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{AB} + \hat{BA} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$ ہو گا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۱ میں z کا حقیقی جزو $\mathrm{Re}(z)$ جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۹ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہٰذا معیاری عدم یقینیت اصول غیر اہم ہو گا؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مدد گار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل قابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں a ، b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل قالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو قابل مشاہدہ A اور B کو درج ذیل قالب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں ω ، λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

ا. $\mathbf{H}$ ، $\mathbf{A}$ اور $\mathbf{B}$ کے امتیازی اقدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔ لمحہ t=0 پر H ، A اور B کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ t پر $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ انہیں سوالات کے جوابات A اور B کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

ا. ا) ایک تفاعل $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x+x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں x_0 کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا $\hat{p}/\hbar$ کو **فضا میں انتقال کا پیدا کار**[48] کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نما کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شروڈنگر مساوات کو $\Psi(x,t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t+t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x,t) \tag{۳.۱۰۰}$$

(جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا $-\hat{H}/\hbar$ کو **وقت میں انتقال کا پیدا کار**[49] کہتے ہے۔

ج. دکھائیں لمحہ $t+t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x,p,t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔[50]

$$\langle Q\rangle_{t+t_0} = \langle\Psi(x,t)|e^{i\hat{H}t_0/\hbar}\hat{Q}(x,p,t+t_0)e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}|\Psi(x,t)\rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۲ حاصل کریں۔ اشارہ: $t_0 = \mathrm{d}t$ لے کر $\mathrm{d}t$ میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

---

[48] generator of translation in space

[49] generator of translation in time

[50] بالخصوص $t = 0$ لے کر، t_0 کی زیر نوشت میں صفر لکھے بغیر
$$\langle Q(t)\rangle = \langle\Psi(x,t)|\hat{Q}|\Psi(x,t)\rangle = \langle\Psi(x,0)|\hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U}|\Psi(x,0)\rangle$$
ہو گا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں Q کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ $\hat{Q}$ کو $\Psi(x,t)^*$ اور $\Psi(x,t)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو تفاعل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U}$ کو $\Psi(x,0)^*$ اور $\Psi(x,0)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو **شروڈنگر نقطہ نظر** جبکہ موخر الذکر کو **ہیزنبرگ نقطہ نظر** کہتے ہیں۔

سوال ۳.۴۰:

ا. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شروڈنگر مساوات کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب: ($e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p,0)$)

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p,0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p,t)$ تشکیل دیں۔ ساتھ ہی $\left|\Phi(p,t)\right|^2$ تشکیل دیں جو تابع وقت نہیں ہو گا۔

ج. Φ پر مبنی موزوں تکملات حل کرتے ہوئے $\langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں $\langle H\rangle = \langle p\rangle^2/2m + \langle H\rangle_0$ ہو گا (جہاں زیر نوشت میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر

تین ابعاد تک توسیع با آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = H\Psi; \tag{۴.۱}$$

معیاری طریقہ کار کے اطلاق x کے ساتھ ساتھ y اور z پر کر کے:

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۴.۲}$$

ہیملٹنی عامل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{۴.۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{۴.۴}$$

[۱] جہاں کلاسیکی مشہود اور عامل میں فرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عامل پر "ٹوپی" کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہٰذا یہاں سے عاملین پر "ٹوپی" کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۴.۵}$$

کارتیسی محدد میں **لاپلاسی**[۲] ہے۔

مخفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $\left|\Psi(\boldsymbol{r}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int \left|\Psi\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = 1 \tag{۴.۶}$$

جہاں تکمل کو پوری فضا پر لینا ہوگا۔ اگر مخفی توانائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۷}$$

جہاں فضائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۴.۸}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۹}$$

جہاں مستقلات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\boldsymbol{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ **استمراریہ**[۳] حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے تکمل ہوگا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{p}$ کے تمام **باضابطہ مقلبیتی رشتے**[۴]: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

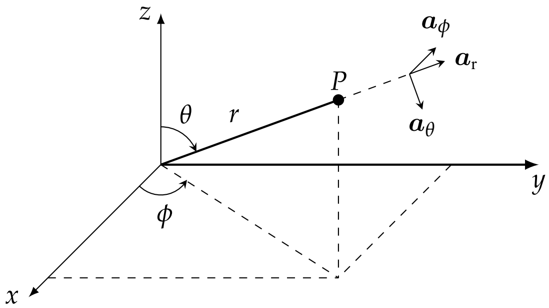
جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{۴.۱۰}$$

جہاں اشاریہ x ، y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔

---

[۲] Laplacian
[۳] continuum
[۴] canonical commutation relations



شکل ۱.۴: کروی محدد: رداس r، قطبی زاویہ θ، اور سمتی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہرنفسٹ کی تصدیق کریں:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle \boldsymbol{p}\rangle \tag{۴.۱۱}$$

(ان میں سے ہر ایک در حقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جزو کے لیے ہو گا۔)
اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۲}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x\sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبدا سے فاصلہ کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں **کروی محدد**[۵] (r,θ,ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہو گا (شکل ۱.۴)۔ کروی محدد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big) \tag{۴.۱۳}$$

---

[۵] spherical coordinates

یوں کروی محدد میں تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\Big]+V\psi=E\psi \tag{۴.۱۴}$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi) \tag{۴.۱۵}$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big]+VRY=ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کہ $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{gathered}\Big\{\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\Big\}\\+\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=0\end{gathered}$$

پہلی خمدار قوسین میں جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہٰذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہو گی۔[6]

$$\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=l(l+1) \tag{۴.۱۶}$$

$$\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=-l(l+1) \tag{۴.۱۷}$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی مربعی کنواں (یا ڈبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x، y \text{ اور } z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں}\\ \infty & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

حل کریں۔

---

[6] ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازماً عدد صحیح ہونا ہو گا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کرکے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انحطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انحطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انحطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2\theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=-l(l+1)Y\sin^2\theta \tag{۴.۱۸}$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانتے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{۴.۱۹}$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Big\{\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta\Big\}+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

پہلا جزو صرف θ کا تفاعل ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تفاعل ہے، لہٰذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہو گا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل[۷] کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{۴.۲۰}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2 \tag{۴.۲۱}$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2\Phi \implies \Phi(\phi)=e^{im\phi} \tag{۴.۲۲}$$

---

[۷] یہاں بھی ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہو گا۔ انتباہ: اب حرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل در پیش نہیں ہو گی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جا سکتا ہے جسے ہم Θ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مخفی توانائی لازماً حقیقی ہو گی لہٰذا برقی حرکیات میں اسمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4.1 دیکھیں) لہٰذا درج ذیل شرط[8] مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \tag{۴.۲۳}$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہو گا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہو گا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{۴.۲۴}$$

مساوات θ

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) + [l(l+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta = 0 \tag{۴.۲۵}$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = AP_l^m(\cos\theta) \tag{۴.۲۶}$$

جہاں P_l^m **شریک لیژانڈر تفاعل**[9] ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{|m|}P_l(x) \tag{۴.۲۷}$$

اور l ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے[10] جس کی تعریف **کلیہ روڈریگیس**[11]

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l (x^2-1)^l \tag{۴.۲۸}$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{4\cdot 2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

[8] یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کثافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقے سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

[9] associated Legendre function

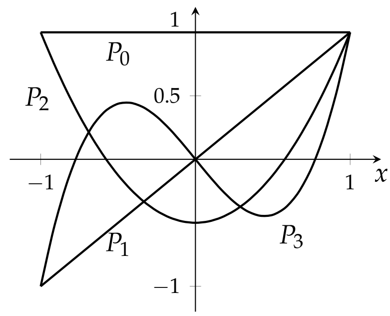
[10] دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہو گا۔

[11] Rodrigues formula

جدول ۱.۴: چند ابتدائی لیژانڈر کثیر رکنیاں $P_l(x)$۔ (ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات۔

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1\\
P_1 &= x\\
P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5 &= \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
$$

(ا)



(ب)

درجہ l کثیر رکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہو گی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیر رکنی نہیں ہو گا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$
P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3x\sqrt{1-x^2},
$$
$$
P_2^2(x) = (1-x^2)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3(1-x^2),
$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_l^m(\cos\theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ہوتا ہے لہٰذا $P_l^m(\cos\theta)$ ہر صورت $\cos\theta$ کا کثیر رکنی ہو گا جسے طاق m کی صورت میں $\sin\theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۲.۴ میں $\cos\theta$ کے چند شریک لیژانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہو گا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۲۷.۴ کے تحت $P_l^m = 0$ ہو گا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

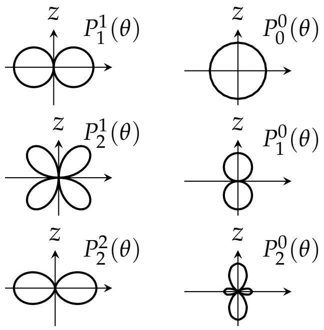
$$
l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots -1, 0, 1, \dots l-1, l \tag{۴.۲۹}
$$

ذرا رکیے! مساوات ۲۵.۴ دو رتبی تفرقی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور (یا) $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے قابو بڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدد میں حجمی رکن درج ذیل ہو گا

$$
\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۴.۳۰}
$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیژانڈر تفاعلات $P_l^m(\cos\theta)$: (ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات برائے $r = P_l^m(\cos\theta)$ (ان ترسیمات میں r آپ کو θ رخ تفاعل کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیں۔)



(ب)

$$
\begin{array}{ll}
P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) & P_0^0 = 1 \\
P_3^3 = 15\sin\theta(1-\cos^2\theta) & P_1^1 = \sin\theta \\
P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta & P_1^0 = \cos\theta \\
P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1) & P_2^2 = 3\sin^2\theta \\
P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) & P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta
\end{array}
$$

(ا)

لہٰذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \int |R|^2 r^2 \, \mathrm{d}r \int |Y|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 1$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 \, \mathrm{d}r = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 1 \tag{۴.۳۱}$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات[12] کو **کروی ہارمونیات**[13] کہتے ہیں:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta \tag{۴.۳۲}$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہو گا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروی ہارمونیات عمودی ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{۴.۳۳}$$

[12] معمول زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علامتیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہو گی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہو گا۔

[13] spherical harmonics

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta,\phi)$

$Y_0^0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = (\frac{15}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2}\cos\theta$	$Y_3^0 = (\frac{7}{16\pi})^{1/2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp(\frac{3}{8\pi})^{1/2}\sin\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp(\frac{21}{64\pi})^{1/2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = (\frac{5}{16\pi})^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = (\frac{105}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_2^{\pm 1} = \mp(\frac{15}{8\pi})^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp(\frac{35}{64\pi})^{1/2}\sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا l کو **اسمتی کوانٹائی عدد**[14] جب کہ m کو **مقناطیسی کوانٹائی عدد**[15] کہتے ہیں۔

سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۷، ۴.۲۸ اور ۴.۳۲ استعمال کرکے Y_0^0 اور Y_2^1 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A\ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) ناقابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کرکے $Y_l^l(\theta,\phi)$ اور $Y_3^2(\theta,\phi)$ تشکیل دیں۔ (آپ P_3^2 کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تشکیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کرکے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{2}{2l+1}\Big)\delta_{ll'} \tag{۴.۳۴}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: تکمل بالحصص استعمال کریں۔)

---

[14] azimuthal quantum number
[15] magnetic quantum number

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$، ایک دوسرے جیسا ہو گا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل وصورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$، پر اثر انداز ہو گی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]R=l(l+1)R \tag{۴.۳۵}$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r)\equiv rR(r) \tag{۴.۳۶}$$

$R=u/r$، $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r=[r(\mathrm{d}u/\mathrm{d}r)-u]/r^2$، $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[r^2(\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)]=r\,\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\left[V+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=Eu \tag{۴.۳۷}$$

اس کو **رداسی مساوات**[16] کہتے ہیں[17] جو شکل وصورت کے لحاظ سے یک بعدی شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں **موثر مخفیہ**[18] درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}}=V+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{۴.۳۸}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو **مرکز گریز جزو**[19] کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدا سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2\,\mathrm{d}r=1 \tag{۴.۳۹}$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r)=\begin{cases}0 & r\leq a\\ \infty & r>a\end{cases} \tag{۴.۴۰}$$

---

[16] radial equation

[17] یہاں m کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

[18] effective potential

[19] centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\Big]u \tag{۴.۴۱}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۴.۴۲}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مسلط کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = -k^2 u \implies u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \to 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے قابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب[20] کرنا ہو گا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہٰذا $ka = n\pi$ ہو گا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۴.۴۳}$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہو گا۔ زاویائی جزو (جو $Y_0^0(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ کی بنا غیر اہم ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \tag{۴.۴۴}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین **کوانٹائی اعداد**[21] n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nml}(r,\theta,\phi)$؛ جبکہ توانائی، E_{nl}، صرف n اور l پر منحصر ہو گی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \tag{۴.۴۵}$$

---

[20] در حقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ متناہی ہو: مساوات ۴.۳۱ میں r^2 کی بنا مبدا پر $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے قابل ہے۔

[21] quantum numbers

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$؛ چھوٹی x کے لئے متقاربی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$
$n_l \to -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \to \frac{2^l l!}{(2l+1)!}x^l$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا **کروی بیسل تفاعل**[22] ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا **کروی نیومن تفاعل**[23] ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x} \tag{۴.۴۶}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\\
j_1(x) &= (-x)\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x};\\
j_2(x) &= (-x)^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\sin x}{x} = x^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\\
&= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

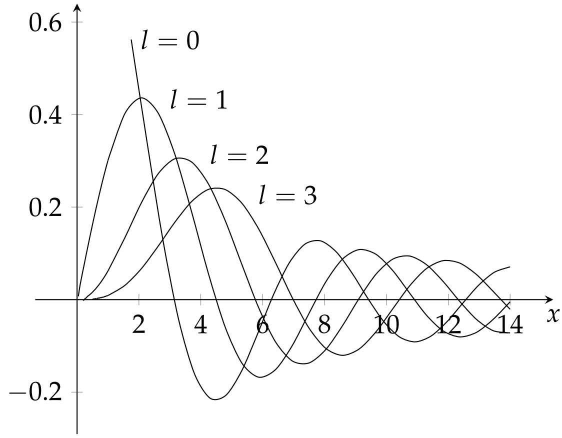
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

[22] spherical Bessel function
[23] spherical Neumann function



شکل ۴.۲: ابتدائی چار کروی بیسل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات متناہی ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے قابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$R(r) = Aj_l(kr) \tag{۴.۴۷}$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہو گا

$$j_l(ka) = 0 \tag{۴.۴۸}$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہو گا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۴.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بدقسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہو گا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{1}{a}\beta_{nl} \tag{۴.۴۹}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہو گا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{nl}^2. \tag{۴.۵۰}$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = A_{nl}j_l(\beta_{nl}r/a)Y_l^m(\theta,\phi). \tag{۴.۵۱}$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا توانائی کی ہر سطح $(2l+1)$ گنّا انحطاطی ہو گی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $x \ll 1$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر بے قابو بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r)=0$ اور $l=1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروی کنواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں اجازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$ ہو گا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \implies x = \tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو متناہی کروی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

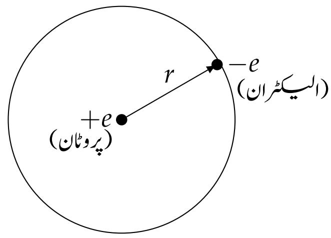
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ قانون کولمب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہو گی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۴.۵۲}$$

لہٰذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u = Eu \tag{۴.۵۳}$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے اجازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہٰذا میں اس کو، ہارمونی مرتعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراو کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہے، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہو گا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۴.۵۴}$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2}\Big]u$$

حاصل ہو گا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa} \tag{۴.۵۵}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \Big[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\Big]u \tag{۴.۵۶}$$

اس کے بعد ہم حالات کی متقاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \to \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہو گا لہٰذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حال درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{۴.۵۷}$$

تاہم ($\rho \to \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $B = 0$ لینا ہو گا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \tag{۴.۵۸}$$

اس کے برعکس $\rho \to 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہو گا؛[۲۴] لہٰذا تخمیناً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2}u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \to 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا $D = 0$ ہو گا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \tag{۴.۵۹}$$

اگلے قدم پر متقاربی رویہ کو چھیلنے کی خاطر نیا تفاعل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۶۰}$$

اس امید سے متعارف کرتے ہے کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہو گا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \rho^{l}e^{-\rho}\left[(l+1-\rho)v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\right]$$

---

[۲۴] یہ دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہو گی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علامتیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \Big\{ \Big[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \Big] v + 2(l+1-\rho)\frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \Big\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \tag{۴.۶۱}$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$، کو ρ کا طاقتی تسلسل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \tag{۴.۶۲}$$

ہمیں عددی سر (c_0 ، c_1 ، c_2 ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعہ میں "فرضی اشاریہ" j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپکو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کے نیا مجموعہ $j = -1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جزو ضربی $(j+1)$ اس جزو کو ختم کرتا ہے لہٰذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2\sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(l+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(l+1)]c_j = 0$$

یا

$$c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j \tag{۴.۶۳}$$

ہوگا۔ یہ کلیہ توالی عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کرکے (جو مجموعی مستقل کا روپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہے؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کرکے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔[25]

آئے j کی بڑی قیمت (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ توالی درج ذیل کہتا ہے۔[26]

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \tag{۴.۶۴}$$

لہٰذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \tag{۴.۶۵}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے قابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نما وہی غیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

---

[25] آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متقاربی رویہ کو کیوں (جزو ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جزو ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نکالنے سے تسلسل کا پہلا جزو ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس جزو ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ توالی حاصل ہوتا ہے (کرکے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

[26] آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $2(l+1) - \rho_0$ اور نسب نما میں $2l + 2$ رد کرنے کی طرح $j + 1$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جا سکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کرکے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہو گا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، j بلند تر، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلند تر}}+1)} = 0 \tag{۴.۶۶}$$

(یوں کلیہ توالی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$2(j_{\text{بلند تر}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کوانٹم عدد[۲۷]

$$n \equiv j_{\text{بلند تر}} + l + 1 \tag{۴.۶۷}$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\rho_0 = 2n \tag{۴.۶۸}$$

اب ρ_0 کو E تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon^2\hbar^2\rho^2} \tag{۴.۶۹}$$

لہٰذا اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴.۷۰}$$

یہ مشہور زمانہ **کلیہ بوہر**[۲۸] ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913ء میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شروڈنگر 1924ء میں منظر عام ہوئی۔)

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \tag{۴.۷۱}$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10}\,\text{m} \tag{۴.۷۲}$$

---

[۲۷] principal quantum number
[۲۸] Bohr formula

رداس بوہر[۲۹] کہلاتا[۳۰] ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \tag{۴.۷۳}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تفاعلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۴.۷۴}$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۷۵}$$

ہو گا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $j_{\text{بلند تر}} = n - l - 1$ کا کثیر رکنی ہو گا، جس کے عددی سر درج ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تفاعل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)}c_j \tag{۴.۷۶}$$

زمینی حال[۳۱] (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہو گا؛ طبعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_1 = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] = -13.6\,\text{eV} \tag{۴.۷۷}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی **بندشی توانائی**[۳۲] (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) $13.6\,\text{eV}$ ہے۔ مساوات ۴.۶۷ کے تحت $l = 0$ لہٰذا $m = 0$ ہو گا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi) \tag{۴.۷۸}$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہٰذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a}e^{-r/a} \tag{۴.۷۹}$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{|c_0|^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-2r/a}r^2\,\mathrm{d}r = |c_0|^2\frac{a}{4} = 1$$

---

[۲۹] Bohr radius

[۳۰] رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہٰذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

[۳۱] ground state

[۳۲] binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہو گا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہٰذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{۴.۸۰}$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6\,\text{eV}}{4} = -3.4\,\text{eV} \tag{۴.۸۱}$$

ہو گی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہو گا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے یا m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہو گی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہو گی۔ کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) $l = 0$ کے لئے $j = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہٰذا $v(\rho) = c_0(1-\rho)$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a} \tag{۴.۸۲}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاو عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہ توالی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \tag{۴.۸۳}$$

(ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہو گا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۴.۸۴}$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2l+1)$ ہو گی (مساوات ۴.۲۹)، لہٰذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہو گی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2 \tag{۴.۸۵}$$

کثیر رکنی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہو گی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \tag{۴.۸۶}$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_{q-p}^{p}(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جہاں

$$L_{q-p}^{p}(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^p L_q(x) \tag{۴.۸۷}$$

ایک **شریک لاگیغ کثیر رکنی**[۳۳] ہے جبکہ

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^q (e^{-x} x^q) \tag{۴.۸۸}$$

q ویں **لاگیغ کثیر رکنی**[۳۴] ہے۔[۳۵] (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ

---

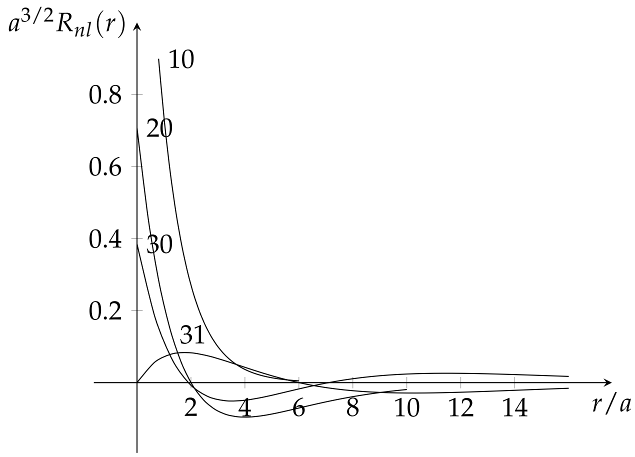
[۳۳] associated Laguerre polynomial

[۳۴] Laguerre polynomial

[۳۵] دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۴.۷: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاعلات، $R_{nl}(r)$

$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$ $R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$ $R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$ $R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$
$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$ $R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$ $R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$ $R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تفاعل موج $R_{nl}(r)$ کی ترسیمات۔

ذیل ہیں۔

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\, e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L^{2l+1}_{n-l-1}(2r/na)] Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۴.۸۹}$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولمب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$\int \psi^*_{nlm}\psi_{n'l'm'} r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۹۰}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور $(n \neq n')$ کی صورت میں H کی منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگیغ کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r\rangle$ اور $\langle r^2\rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x\rangle$ اور $\langle x^2\rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا تکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہو گا، اور زمینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2$ ، $l = 1$ ، $m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔انتباہ: یہ حال x ، y اور z کے لحاظ سے تشاکلی نہیں ہے۔یہاں $x = r\sin\theta\cos\phi$ استعمال کرنا ہو گا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہو گی۔(اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہو گا کہ r اور $r + \mathrm{d}r$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2$ ، $l = 1$ ، $m = 1$ اور $n = 2$ ، $l = 1$ ، $m = -1$ کے درج ذیل خطی جوڑ سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ تیار کریں۔اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت ی $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔(کیا یہ t کی تابع ہو گی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۴ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں **عبور**[36] کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقناطیسی فوٹان کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔[37] عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہٰذا عبور (جنہیں "کوانٹم چھلانگ" کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہو گی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \tag{۴.۹۱}$$

کے برابر ہو گا۔

اب **کلیہ پلانک**[38][39] کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہو گی:

$$E_\gamma = h\nu \tag{۴.۹۲}$$

[36] transition

[37] فطرتاً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

[38] Planck's formula

[39] فوٹان درحقیقت برقناطیسی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات قابل استعمال نہیں ہے۔اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ طول موج $\lambda = c/\nu$ ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R\Big(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\Big) \tag{۴.۹۳}$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}\Big)^2 = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \tag{۴.۹۴}$$

رڈبرگ مستقل[۴۰] کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ[۴۱] ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقلات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال $(n_f = 1)$ میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کار لیمان تسلسل[۴۲] کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال $(n_f = 2)$ میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلسل[۴۳] کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، پاشن تسلسل[۴۴] دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم[۴۵] میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ لتھیم[۴۶] میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$، بندشی توانائی $E_1(Z)$، رداس بوہر $a(Z)$، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقناطیسی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \to Ze^2$ ہوگا لہٰذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

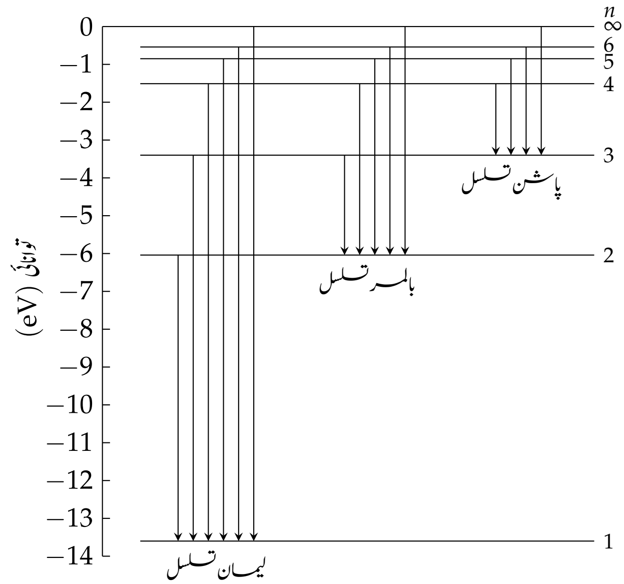
سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں۔)

ب. اس نظام کا "رداس بوہر" a_g کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

---

[۴۰] Rydberg constant
[۴۱] Rydberg formula
[۴۲] Lyman series
[۴۳] Balmer series
[۴۴] Paschen series
[۴۵] Helium
[۴۶] Lithium



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوط توانائیاں اور تحویلات۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہو گا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہو گا؟ جواب جاول میں دیں۔ خارج فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریویٹان) کا طول موج کیا ہو گا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{۴.۹۵}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{۴.۹۶}$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x$ ، $p_y \to -i\hbar\partial/\partial y$ ، $p_z \to -i\hbar\partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجازتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی اقدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]\end{aligned} \tag{۴.۹۷}$$

باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات 10.4 سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں یوں درمیانی دو اجزا حذف ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \tag{۴.۹۸}$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل $(x \to y, y \to z, z \to x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{۴.۹۹}$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلبیت رشتے ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہو گا

دھیان رہے کہ L_x L_y اور L_z غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں متعمم اصول عدم یقینیت مساوات 62.3 کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

یا

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right| \tag{۴.۱۰۰}$$

ہو گا یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہو گا اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{۴.۱۰۱}$$

L_x کے ساتھ مقلوب ہے

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

مقالب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات 64.3 استعمال کیا ہے بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہو گا اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہو گا

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \tag{۴.۱۰۲}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا

$$[L^2, \boldsymbol{L}] = 0 \tag{۴.۱۰۳}$$

اس طرح $\boldsymbol{L}$ کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہو گا اور ہم L^2 کا مثلاً L_z کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f \tag{۴.۱۰۴}$$

ہم نے حصہ 1.3.2 میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی یہی ترکیب یہاں پر بھی استعمال کرتے ہیں

یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$L\pm \equiv L_x \pm iL_y \tag{۴.۱۰۵}$$

L_z کا مقلب درج ذیل ہو گا

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{۴.۱۰۶}$$

اور ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوں گے

$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{۴.۱۰۷}$$

میں دعوی کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_\pm(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہو گا مساوات 107.4 کہتی ہے کہ

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۸}$$

لہٰذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_\pm f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہو گا جبکہ مساوات 106.4 کہتی ہے کہ

$$L_z(L_{\pm f}) = (L_z L_\pm) - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L \pm f + L_\pm(\mu f) = (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۹}$$

لہٰذا نئی امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے $L_\pm f$ L_z کا امتیازی تفاعل ہو گا ہم L_+ کو عامل رفعت کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو $\hbar$ بڑھاتا ہے جبکہ L_- عامل تقلیل کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو $\hbar$ کم کرتا ہے یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے جس کا ہر پایہ قریبی پایہ سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے $\hbar$ کی ایک اکائی دور ہو گا (شکل ۴.۶)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچے گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہو گا جو ایک ناممکن صورت ہے سیڑھی کا بالائی پایہ f_t درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$L_+ f_t = 0 \tag{۴.۱۱۰}$$

فرض کریں اس بالائی پایہ پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو حرف L کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی

$$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \tag{۴.۱۱۱}$$

اب درج ذیل ہو گا

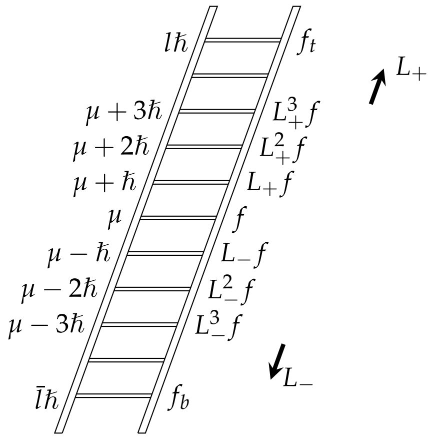
$$\begin{aligned} L_\pm L_\mp &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z) \end{aligned}$$

یا دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہو گا

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z \tag{۴.۱۱۲}$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$



شکل ۴.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی "سیڑھی"۔

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \tag{۴.۱۱۳}$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی قدر کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی قدر دیتی ہے ساتھ ہی اسی وجہ کی بنا سیڑھی کا سب سے نچلا پایہ f_b پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$L_- f_b = 0 \tag{۴.۱۱۴}$$

فرض کریں اس نچلے پایہ پر L_z کا امتیازی قدر $\hbar\bar{l}$ ہو

$$L_z f_b = \hbar\bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \tag{۴.۱۱۵}$$

مساوات 112.4 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

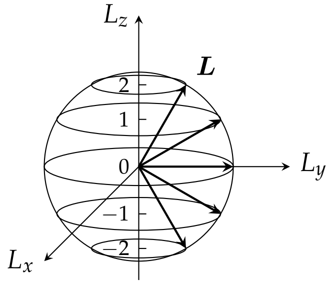
$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 l^{-2} - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) f_b$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \tag{۴.۱۱۶}$$

مساوات 113.4 اور 116.4 کا موازنہ کرنے سے $l(l+1) = \bar{l}(\bar{l} - 1)$ ہو گا لہذا یا $\bar{l} = l + 1$ ہو گا جو بے معنی ہے چونکہ نچلا پایہ سب سے اوپر (بالائی) پایہ سے بلند نہیں ہو گا یا درج ذیل ہو گا

$$\bar{l} = -l \tag{۴.۱۱۷}$$



شکل ۷.۴: زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی اقدار $m\hbar$ ہونگے جہاں m جس کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی کی قیمت N قدموں میں $-l$ تا $+l$ ہو گی بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ لہٰذا $l = N/2$ ہو گا یوں l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہو گا امتیازی تفاعلات کو اعداد l اور m بیان کرتے ہیں

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \tag{۴.۱۱۸}$$

جہاں درج ذیل ہونگے

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots; \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \tag{۴.۱۱۹}$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی یعنی سیڑھی کے $2l + 1$ پایہ ہونگے۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیر کا نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں ان تمام کی لمبائیاں $\hbar$ کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l+1)}$ ہوں گی جو یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے جبکہ m کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں $-2, -1, 0, 1, 2$ ہیں دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقادیر یعنی کرہ کا رداس z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑی ہے عموماً $l < \sqrt{l(l+1)}$ ہو گا ماسوائے $l = 0$ کی غیر اہم صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے کیا میں z محدد کو زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت مساوات 100.4 کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہو گا چلو مان لیا لیکن کیا یہ ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقاً z محدد کو $\boldsymbol{L}$ کے رخ منتخب کر لوں بالکل نہیں آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہے ایسا نہیں ہے کے آپ $\boldsymbol{L}$ کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کی سمتیہ کے تینوں اجزاء قابل تعین نہیں ہو سکتے ہیں جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت قابل تعین نہیں ہونگے اگر L_z کی قیمت قابل تعین ہو تب L_x اور L_y کی قیمتیں قابل تعین نہیں ہونگی شکل ۷.۴ میں سمتیات گمراہ کن ہے بہتر ہو تا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y ناقابل تعین ہیں

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہونگا زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 سے ابتدا کرتے ہوئے ہم نے صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر L^2 اور L_z کی امتیازی اقدار تعین کیے آئے اب امتیازی تفاعلات تیار کریں جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہو گا میں کانٹے کی بات سے شروع کرتا ہوں $f_l^m = Y_l^m$ L^2 اور L_z کی امتیازی تفاعلات وہی کروی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ 2.1.4 میں حاصل کیا یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف l اور m استعمال کیے اب میں آپ کو بتاپاؤں گا کہ کروی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں یہ الگ تھلگ امتیازی اقدار کے ہرمشی عاملین L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات ہیں

سوال ۴.۱۸: عمل رفت اور عمل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm}f_l^m = (A_l^m)f_l^{m\pm1} \tag{۴.۱۲۰}$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہو گا اشارہ پہلے دکھائیں کہ $L_{\pm}$ اور $L_{\mp}$ ایک دوسرے کے ہرمشی جوڑی دار ہے چونکہ L_x اور L_y مشہود ہیں آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہرمشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی تصدیق کر سکتے ہیں اس کے بعد مساوات 112.4 استعمال کریں جواب

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)} = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)} \tag{۴.۱۲۱}$$

دیکھیے گا کے سیڑھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہو گا جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں

سوال ۴.۱۹:

ا. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات 10.4 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل مقالب حاصل کریں

$$[L_z,x]=i\hbar y,\quad [L_z,y]=-i\hbar x,\quad [L_z,z]=0,\quad [L_z,p_x]=i\hbar p_y,\quad [L_z,p_y]=-i\hbar p_x,\quad [L_z,p_z]= \tag{۴.۱۲۲}$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 96.4 سے $[L_z,L_x]=i\hbar L_y$ حاصل کریں

ج. مقالب $[L_z,r^2]$ اور $[L_z,p^2]$ کی قیمتیں تلاش کریں جہاں $r^2 = x^2+y^2+z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ہوگا

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کے ہیملٹنی $H = (p^2/2m) + V$ $\boldsymbol{L}$ کے تمام تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہو گا یوں H L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ مشہود ہوں گے

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں ایک مخفی توانائی $V(\boldsymbol{r})$ میں ایک ذرے کی مداری زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{L}$ کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{L}\rangle = \langle\boldsymbol{N}\rangle$$

جہاں

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times (-\nabla V)$$

یہ مسئلہ اہرنفسٹ کا مماثل گھومتا تعلق ہے

ب. دکھائے کے کسی بھی کروی تشاکلی مخفی توانائی کے لیے $\mathrm{d}\langle \boldsymbol{L} \rangle\, \mathrm{d}t = 0$ ہوگا یہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کا کوانٹم میکانی روپ ہے

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا اب $\boldsymbol{L} = (\hbar/i)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla})$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{a}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{۴.۱۲۳}$$

جہاں $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہوگا یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}\Big[r(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\frac{\partial}{\partial r} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\theta})\frac{\partial}{\partial \theta} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big]$$

اب $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) = 0$ ، $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\theta}) = \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\phi}) = -\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہوتے ہیں شکل 1.4 لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}\Big(\boldsymbol{a}_{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \boldsymbol{a}_{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big) \tag{۴.۱۲۴}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\theta}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{\theta} = (\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} - (\sin\theta)\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۲۵}$$

$$\boldsymbol{a}_{\phi} = -(\sin\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\phi)\boldsymbol{j} \tag{۴.۱۲۶}$$

یوں

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}[(-\sin\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\phi\,\boldsymbol{j})\frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\phi}]$$

ہوگا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial \phi}\Big) \tag{۴.۱۲۷}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\Big(+\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۸}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{۴.۱۲۹}$$

ہمیں عامل رفعت اور عامل تقلیل بھی درکار ہوں گے

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i}\Big[(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

چونکہ $\cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$ ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۰}$$

بالخصوص سوال 21.4(a) درج ذیل ہو گا

$$L_+L_- = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۱}$$

لہٰذا سوال 21.4(b) درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$L^2 = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big] \tag{۴.۱۳۲}$$

ہم اب $f_l^m(\theta,\phi)$ پائین کر سکتے ہیں یہ L^2 کا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]f_l^m = \hbar^2 l(l+1)f_l^m$$

یہ ٹھیک زاویائی مساوات 18.4 ہے ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قدر $m\hbar$ ہو گا

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو ائن شمالی مساوات مساوات 21.4 کا معادل ہے ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں ان کا معمول شدا نتیجہ کروی ہارمونیات $Y_l^m(\theta,\phi)$ ہے اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروی ہارمونیات ہوں گے حصہ 1.4 میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر

حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقلوبی عاملین H L^2 اور L_z کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \tag{۴.۱۳۳}$$

ہم مساوات 132.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات 14.4 کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{2mr^2}\Big[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+L^2\Big]\psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورت حال پیدا ہوتی ہے علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں مساوات 29.4 حاصل ہوئی جبکہ زاویائی معیار حرکت کی الجبرائی نظریہ l اور لہذا m بھی کی نصف عدد صحیح قیمتیں مساوات 119.4 بھی دیتی ہے آپ کا خیال ہو گا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہے لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے کہ یہ انتہائی زیادہ اہمیت کے حامل ہے سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات 130.4 سے مساوات 131.4 اخذ کریں اشارہ تفاعل برق استعمال کرنا نہ بھولیں

ب. مساوات 129.4 اور 131.4 سے مساوات 132.4 اخذ کریں اشارہ مساوات 112.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں $L_+Y_l^l$ کیا ہو گا

ب. مساوات 130.4 کے ساتھ جزو (الف) کا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $L_zY_l^l = \hbar lY_l^l$ ہو گا $Y_l^l(\theta,\phi)$ کی ایک مستقل تک معمول شدہ قیمت تلاش کریں

ج. بلاواسطہ تکمل کے ذریعے مستقل معمول زنی تعین کریں اپنی حتمی نتیجے کا سوال 5.4 کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال 3.4 میں درج ذیل دکھایا

$$Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

عامل رفت کا $Y_2^2(\theta,\phi)$ پر اطلاق کریں معمول زنی کے لیے مساوات 121.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۴: بے کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات بندے ہوئے ہیں یہ نظام وسط کے گرد آزادی سے تین بودی حرکت کر سکتا ہے جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا

ا. دکھائیں کے اس نظام کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہو نگی

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

اشارہ کلاسیکی تمنائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انحطاطیت کیا ہو گی

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں پہلی قسم مرکز کمیت کے حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مداری $(\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ کہتے ہیں جبکہ دوسری چکر $(\boldsymbol{S} = I\boldsymbol{\omega})$ جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا زمین کا مداری زاویائی معیار حرکت ہوگا جبکہ روزانہ کی بنیاد پر شمال جنوبی محور کے گرد چکر کی بنا اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا کلاسیکی طور پر یہ فرق ہماری آسانی کے لئے ہے چونکہ حقیقتاً ہر پتھر ہر پہاڑ وغیرہ جن پر زمین مشتمل ہے کا زمین کے محور کے گرد انفرادی مداری زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ $\boldsymbol{S}$ کے برابر ہوگا کوانٹم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے لیکن یہاں ایک بنیادی فرق پایا جاتا ہے ہائیڈروجن کی صورت میں مرکزہ کے گرد الیکٹران کی طواف کی بنا مداری زاویائی معیار حرکت کے ساتھ ساتھ الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے لہذا اس کو مقام کے متغیرات r θ اور ϕ سے بیان نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ یہ کلاسیکی چکر کی طرح ہے لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے ایک ایکٹران جہاں تک ہم جانتے ہیں کی کوئی جسامت نہیں پائی جاتی ہے اور یہ نقطی ذرا ہے لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو مداری زاویائی معیار حرکت پر مشتمل حصوں میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے سوال 25.4 یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات بیرونی زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{L}$ کے ساتھ ساتھ اندرونی زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{S}$ بھی رکھتے ہیں چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کی نظریہ کی طرح ہے ہم باضابطہ مقلبیت رشتہ سے شروع کرتے ہیں

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \tag{۴.۱۳۴}$$

یوں پہلے کی طرح S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \tag{۴.۱۳۵}$$

جبکہ درج ذیل ہوگا جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s(m\pm 1)\rangle \tag{۴.۱۳۶}$$

تاہم یہاں امتیازی تفاعلات θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں لہذا یہ کروی ہارمونیات نہیں ہونگے اور کوئی وجہ نہیں پائی جاتی ہے کہ ہم s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتیں قبول نہ کریں

$$s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s \tag{۴.۱۳۷}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص ناقابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس مخصوص نسل کا چکر کہتے ہیں π میزون کا چکر 0 ہے الیکٹران کا چکر $1/2$ پروٹان کا چکر 1 ڈیلٹا کا چکر $3/2$ گریویٹون کا چکر 2 وغیرہ وغیرہ اس کے برعکس ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹرون کا مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت رکھ سکتا ہے جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہوگا تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہوگا جس کی بنا نظریہ چکر نسبتاً

سادہ ہے سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس درج ذیل ہو

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{۴.۱۳۸}$$

ہم آئنسٹائن کلیہ $E = mc^2$ کے تحت یہ فرض کرتے ہوئے کہ الیکٹران کی کمیت اس کی برقی میدان کے توانائی کی بنا ہے الیکٹران کا کلاسیکی رداس حاصل کرتے ہیں الیکٹران کا زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ لیتے ہوئے خط استوا پر کسی نقطے کی رفتار $\mathrm{m\,s^{-1}}$ میں تلاش کریں کیا حاصل جواب معنی خیز ہے درحقیقت تجربات سے ظاہر ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے کیا یہ جانتے ہوئے نتیجہ مزید غلط محسوس ہو گا

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ **کوارک**[۴۷] اور تمام **لپٹان**[۴۸] کیلئے $s = \frac{1}{2}$ ہو گا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف "دو" عدد امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ ہے جسے ہم **میدان چکر**[۴۹] (یا غیر رسمی طور پر $\uparrow$) اور دوسرا $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جس کو **مخالف میدان چکر**[۵۰] ($\downarrow$) کہتے ہیں۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو اجزائی قالب قطار (یا **چکر کار**[۵۱]) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \tag{۴.۱۳۹}$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۰}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۱}$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[۴۷] quarks
[۴۸] leptons
[۴۹] spin up
[۵۰] spin down
[۵۱] spinor

ساتھ ہی عاملین چکر 2×2 قالب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \tag{۴.۱۴۲}$$

ہم $\mathbf{S}^2$ کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا قالب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۳}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہو گا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۴}$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{۴.۱۴۵}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۶}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}_+\chi_- = \hbar\chi_+, \quad \mathbf{S}_-\chi_+ = \hbar\chi_-, \mathbf{S}_+\chi_+ = \mathbf{S}_-\chi_- = 0,$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۷}$$

اب چونکہ $S_\pm = S_x \pm iS_y$ ہے لہٰذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۸}$$

چونکہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں زیادہ صاف روپ $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۹}$$

یہ **پالی قالب چکر**[۵۲] ہیں۔ دھیان رکھیں کہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ اور $\mathbf{S}^2$ تمام ہرمشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس $\mathbf{S}_+$ اور $\mathbf{S}_-$ غیر ہرمشی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔

$\mathbf{S}_z$ کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۵۰}$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیمائش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $+\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{۴.۱۵۱}$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہو گا)۔[۵۳]

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شماریاتی مفہوم کے تحت ہمیں $\mathbf{S}_x$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

---

[۵۲] Pauli spin matrices

[۵۳] لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر S_z کی پیمائش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہو گا۔ (صفحہ ۱۰۸ پر حاشیہ ۱۴ دیکھیں۔)

لہٰذا $\beta = \pm\alpha$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{S}_x$ کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_{+}^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_{-}^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}) \tag{۴.۱۵۲}$$

بطور ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات سے فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\chi = \Big(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_{+}^{(x)} + \Big(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_{-}^{(x)} \tag{۴.۱۵۳}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a+b|^2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a-b|^2$ ہو گا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۵۴}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہٰذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہو گا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6 = (1/2)\left|(3+i)/\sqrt{6}\right|^2$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $1/6 = (1/2)\left|(-1+i)/\sqrt{6}\right|^2$ ہو گا۔ اتفاقاً S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big) + \frac{1}{6}\Big(-\frac{\hbar}{2}\Big) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلاواسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متلق ایک فرضی پیمائشی تجربا سے گزرتا ہوں۔ چونکہ یہ ان تصوراتی خیالات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ا میں تبصرا کیا گیا۔ فرض کریں ایک زرا حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے کہ اس زرے کی زاویائی چکری میارِ حرکت کا z جز کیا ہے۔ تب ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہوگا۔ چونکہ z کی پیمائس لازمن یہی قیمت دے گی۔ اس کے بجائے اگر پوچھنے والا سوال کرے کہ اس زرے کی چکر یا زاویائی میارِ حرکت کا x جز کیا ہوگا۔ تب ہم یہ کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائس سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ گر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماحرِ تبیات یا حصہ ا۔۲ کے نقطہِ نزر سے حقیقت پسند ہو تو وہ اس جواب کو ناکافی سمجھے گا۔ کیا آپ یہ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس زرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے۔ نہیں میں نے یہ تو نہیں کہا!۔ مجھے زرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے اور یہ ψ_+ ہے۔ یہ ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جز نہیں بتا سکتے اس لیئے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جز نہیں پایا جاتا ہے۔ یقینن ایسا ہی ہوگا۔ اگر S_x اور S_z کی قیمتیں تائین ہوں تب اصولِ ادم یقینیت متمئن نہیں ہوگا۔ یہ سنتے ہی سوال کرنے والا زرے کی چکر کا x جز از خود پیمائس کرتا ہے۔ اب فرض کریں کہ وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے۔ اس زرے کی S_x قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔ جی آپ درست فرماتے ہیں اب اس کی یہی قیمت ہے۔ جس سے یہ بلکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربہ سے پہلے بھی اس کی یہی قیمت تھی۔ اب ظاہر ہے آپ بال کی کھال اتار رہے ہو اور آپ کی ادم یقینیت اصول کا کیا بنا۔ میں اب S_x اور S_z دونوں کو جانتا ہوں۔ جی نہیں آپ نہیں جانتے ہیں۔ آپ نے پیمائس کے دوران زرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ ψ_+ اور اگرچہ آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں۔ آپ S_z کی قیمت اب نہیں جانتے ہیں۔ لیکن میں نے S_x کی پیمائس کے دوران ہم نے پوری کوسس کی کہ میں زرے کا سکون برباد نہ کروں۔ اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے تو خود تصدیق کریں۔ آپ S_z کی پیمائس کریں اور دیکھیں کہ کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ وہ $\hbar/2$ حاصل کرے جو میرے لیئے سرمندگی کا عصر ہوگا۔ اگر ہم اس پورے عمل کو بار بار دورائیں تو یہ سب اوقات اسے $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔ یہ کام آدمی کے لیئے

ایک عام آدمی، ایک فلسفی یا ایک کلاسیکی مایرِ تبیات کا یہ کہنا کہ کس زرے کا ٹھیک ٹھیک مکام یا میعارِ حرکت یا چکری زاویائی میارِ حرکت کا x جز یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نزر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم مکینیانیات کا گہرا مطلع نہ کیا ہو تقریبن ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو $1/2$ چکر نظام پر دوبارا غور کی جئے گا۔ یہ وکنٹم مکینیانیات کی پیچیدہ تفرقات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کیجیے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی میارِ حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں کو مطمین کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مثال 148.4 درج ذیل زروی فائدہ کو مطمین کرتی ہے۔

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \tag{۴.۱۵۵}$$

جہاں اشاریا x,y اور z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ ϵ_{jkl} Levi-Civita علامت ہے۔ جو $jkl = 1,2,3$ یا $2,3,1$ یا $3,1,2$ کی سورت میں $+1$ جبکہ $jkl = 1,3,2$ یا $2,1,3$ یا $3,2,1$ کی سورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹروں درج ذیل جکری حال میں ہے۔ $\psi = A\begin{bmatrix}3i\\4\end{bmatrix}$ (الف) مامولزنی مستقل A تاین کریں۔
(ب) S_x, S_y, S_z کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ دیحان رہے کہ یہاں σ سے مراد میارِ انہراف ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جیئے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدمی کی نیت کے عین متابک ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ 1 کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول سدا spinor χ مساوات 139.4 کے لیے $S_x, S_y, S_z, S_x^2, S_y^2$ اور S_z^2 تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$ ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor S_y کے امتیازی عدداد تلاش کریں۔ (ب) عمومی حال χ مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک زرے کے S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جیئے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیہان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکیے ہیں۔ (ج) S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ r کے ہم رہ چکری زاویائی میارِ حرکت کے اجزاء کا کالپ S_r تیار کریں۔ کروی محدد استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \tag{۴.۱۵۶}$$

S_r کی امتیازی عدداد اور معمور سدا امتیازی spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\sin(\theta/2)\end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\\ -\cos(\theta/2)\end{bmatrix}; \tag{۴.۱۵۷}$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری جز ضرب $e^{i\phi}$ سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہازا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک زرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ S_x, S_y اور S_z تیار کریں۔ اشعارہ S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر S_z, S_+ اور S_- کا عمل تاین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے استعمال کی گئی ترقیب استعمال کریں

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹتے ہوئے بار بار زرا پر مقناطیسی جفت کتب مشتمل ہو گا۔ اس کا مقناطیسی جفت کتبی معیارِ اثر μ، زرے کی چکری زاویائی معیارِ حرکت S کو راست متناسب ہو گا۔

$$\mu = \gamma S \tag{۴.۱۵۸}$$

جہاں تناسبی مستقل γ مسکن مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفت کتب پر قوتِ مروڑ $\mu \times B$ عمل کرتا ہے۔ جو کمپس کی سوئی کی طرح اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس قوتِ مروڑ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\mu . B \tag{۴.۱۵۹}$$

لہازا مقناطیسی میدان B میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے زرے کا ہیملٹونیں درج زیل ہو گا۔

$$H = -\gamma B.S \tag{۴.۱۶۰}$$

مثال ۴.۳: تقدیم لارمر فرض کریں z رخ یکساں مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \hat{k} \tag{۴.۱۶۱}$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے قالبی روپ میں ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{H} = -\gamma B_0 \boldsymbol{S}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۲}$$

ہیملٹنی $\boldsymbol{H}$ کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو $\boldsymbol{S}_z$ کے تھے

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \tag{۴.۱۶۳}$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہو گی جب جفت کتب کا معیار اثر مقناطیسی میدان کا متوازی ہو چونکہ ہیملٹنی غیر تابع وقت ہے لہذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial X}{\partial t} = \boldsymbol{H} X \tag{۴.۱۶۴}$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\chi(t) = a\chi + e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہو گا ہم ان مستقلات کو $a = \cos(\alpha/2)$ اور $b = \sin(\alpha/2)$ لکھ سکتے ہیں جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہو گا جس کی اہمیت جلد رونما ہو گی یوں درج ذیل ہو گا

$$\chi^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۵}$$

آئیں $\boldsymbol{S}$ کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle =& \chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ & \times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ =& \frac{\hbar}{2} \sin\alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \tag{۴.۱۶۶}$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin\alpha \sin(\gamma B_0 t) \tag{۴.۱۶۷}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos\alpha \tag{۴.۱۶۸}$$

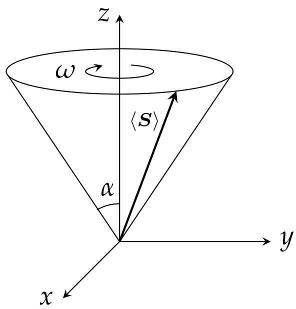
کلاسیکی صورت کی طرح شکل ۴.۸ محور z کے ساتھ s ایک مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد

$$\omega = \gamma B_0 \tag{۴.۱۶۹}$$

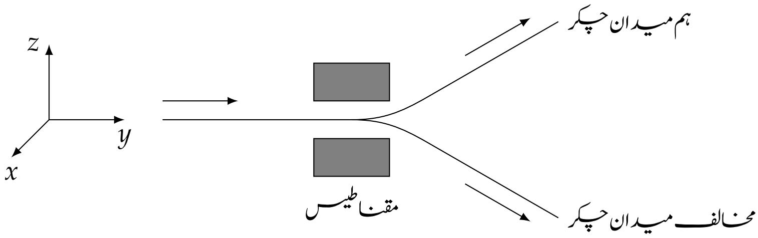
سے تقدیم کرتا ہے یہ حیرت کی بات نہیں ہے مسئلہ اہرنفسٹ کی وہ صورت جس سے سوال 20.4 میں اخذ کیا گیا اس کی ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ ارتقاء پائے گا بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سباق میں دیکھنا اچھا لگا مثال □

مثال ۴.۴: تجربہ سٹرن و گرلاخ ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت کتب پر نہ صرف قوت مروڑ بلکہ ایک قوت بھی پایا جاتا ہے

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۷۰}$$



شکل ۴.۸: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle S\rangle$ کی استقبالی حرکت۔



شکل ۴.۹: شٹرن وگرلاخ آلہ۔

اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے ایک مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقہ سے علیحدہ کیا جا سکتا ہے فرض کریں ایک نسبتاً بھاری تعدیلی جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان کے خطہ سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹) یعنی

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = -\alpha x\hat{\imath} + (B_0 + \alpha z)\hat{k} \tag{۴.۱۷۱}$$

جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے حقیقت میں ہمیں صرف z جزو سے غرض ہے لیکن بدقسمتی سے ایسا ممکن نہیں ہے چونکہ برقناطیسی قانون $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{F} = \gamma\alpha(-S_x\hat{\imath} + S_z\hat{k})$$

کہ تاہم B_0 کے گرد تقدیم لارمر کی بنا S_x تیزی سے ارتعاش کرتا ہے جس کے بنا اس کی اوسط قیمت صفر ہو گی لہٰذا z رخ کل قوت درج ذیل ہو گا

$$F_z = \gamma\alpha S_z \tag{۴.۱۷۲}$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی کلاسیکی طور پر چونکہ S_z کوانٹا شدہ نہیں ہو گا ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹازنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے مثال کے طور پر چاندی کہ جوہر استعمال کرتے ہوئے چونکہ اس کے اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مداری زاویائی معیار حرکت منسوخ ہو جاتے ہیں یوں صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہو گا لہٰذا شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل خالصتاً کلاسیکی تھا جبکہ کوانٹم میکانیات میں قوت کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے لہٰذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہو گا ہم اس عمل کو اس حوالہ چوکھٹ کے حوالہ سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہوں اس چوکھٹ میں ہیملٹنی صفر سے ابتدا کرتے ہوئے وقت T جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{۴.۱۷۳}$$

جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں $\boldsymbol{B}$ کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے ابتدا کرتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \qquad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے وقت $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقاء پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} \qquad 0 \leq 0t \leq T$$

جہاں مساوات 161.4 کے تحت

$$E_{\pm} = \mp\gamma(B_0 + az)\frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۴}$$

ہوگا لہٰذا $t \geq T$ کے لیے یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا

$$\chi(t) = \left(ae^{i\gamma TB_0/2}\chi_+\right)e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(be^{-i\gamma TB_0/2}\chi_-\right)e^{-i(\alpha\gamma T/2)z} \tag{۴.۱۷۵}$$

ان دونوں اجزاء کا آپ z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے مساوات 32.3 دیکھیں ہم میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۶}$$

اور یہ مثبت z رخ جانب حرکت کرے گا مخالف میدان جزو کا معیار حرکت غلط ہے اور یہ منفی z رخ کی جانب حرکت کرے گا یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہٰذا مساوات 174.4 پہلی حاصل کر تا نتیجہ مساوات 170.4 کے مطابق ہے کوانٹم میکانیات کی فلاسفی میں شٹرن و گرلاخ تجربہ میں کلیدی کردار ادا کیا ہے اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹم پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ نظام کا ابتدائی حال ہم جانتے ہیں جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جا سکتا ہے یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر لاتے ہیں آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر ترتیب شدہ شعاع کو شٹرن و گرلاخ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z جزو جاننا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گرلاخ علی سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کا یہ ایک سادہ مثال ہے □

سوال ۴.۲۶: مثال 3.4 میں

ا. وقت t پر چکری زاویائی معیار حرکت کے x رخ جزو کی پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہوگا

سوال ۴.۲۷: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0\cos(\omega t)\hat{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے

ا. اس نظام کا ہیملٹنی قالب تیار کریں

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹرون ابتدائی طور پر ہم میدان حال یعنی $\chi(0) = \chi_+^x$ سے ابتدا کرتا ہے مستقبل کی وقتوں کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں دیہان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات مساوات 162.4 کو بلاواسطہ حل کر سکتے ہیں

ج. S_x کی پیمائش میں $\hbar/2$ نتیجہ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا جواب

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم میدان B_0 کتنا

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات مثلاً ہائیڈروجن کے زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان ہیں ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہونگی

$$\uparrow\uparrow, \quad \uparrow\downarrow, \quad \downarrow\uparrow, \quad \downarrow\downarrow \tag{۴.۱۷۷}$$

جہاں پہلے تیر کا نشان یعنی بایاں تیر الیکٹران کو جبکہ دوسرا یعنی دایاں تیر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہو گا ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

$$\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)} \tag{۴.۱۷۸}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک S_z کا امتیازی حال ہو گا ان کے z اجزاء سادہ جمع دیتے ہیں

$$\begin{aligned} S_z\chi1\chi2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)})\chi1\chi2 = (S_z^{(1)}\chi1)\chi2 + \chi1(S_z^{(2)}\chi2) \\ &= (\hbar m_1\chi1)\chi2 + \chi1(\hbar m_2\chi2) = \hbar(m_1+m_2)\chi1\chi2 \end{aligned}$$

یاد رہے کہ $\boldsymbol{S}^{(1)}$ صرف $\chi1$ پر عمل کرتا ہے اور $\boldsymbol{S}^{(2)}$ صرف $\chi2$ پر عمل کرتا ہے یہ علامتیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہو گا

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \uparrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \downarrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ \downarrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے m کو چاہیے کہ $-s$ سے $+s$ تک عدد صحیح قدموں کے لحاظ سے بڑھے یوں ایسا نظر آتا ہے کہ $s = 1$ ہو گا جبکہ یہاں پر ایک اضافی حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات 146.4 استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ استعمال کرتے ہیں

$$\begin{aligned}S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات $|sm\rangle$ علامتی روپ میں درج ذیل ہوں گے

$$\left\{\begin{aligned} |11\rangle &= \uparrow\uparrow \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1\,-1\rangle &= \downarrow\downarrow \end{aligned}\right\} \quad s = 1 \,(\text{سہ تا}) \tag{۴.۱۷۹}$$

تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے سوال 34.4(الف) دیکھیں اسی وجہ کی بنا اسے تین کی جوڑی کہتے ہیں ساتھ ہی وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو کا $s = 0$ ہو گا

$$\left\{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right\} \qquad s = 0 \,(\text{یک تا}) \tag{۴.۱۸۰}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کی طلاق سے صفر حاصل ہو گا سوال 34.4(ب) دیکھیں یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک یا صفر ہو گا جو اس پر منحصر ہو گا کہ آیا وہ تین جوڑی یا وحدانی تقسیم اختیار کرتے ہیں اس کی تصدیق کرنے کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہو گا کہ تین جڑواں حالات S^2 کے امتیازی سمتیات ہوں گے جن کے امتیازی اقدار $2\hbar^2$ ہو گا جبکہ وحدانی S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہو گا جس کا امتیازی قدر صفر ہو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$S^2 = (\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}) \cdot (\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\boldsymbol{S}^{(1)} \cdot \boldsymbol{S}^{(2)} \tag{۴.۱۸۱}$$

مساوات 145.4 اور 147.4 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{(1)} \cdot \boldsymbol{S}^{(2)}(\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right)\left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right)\left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right)\left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow)\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا

$$\boldsymbol{S}^{(1)} \cdot \boldsymbol{S}^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}(2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

اسی طرح

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)}|10\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}|10\rangle \tag{۴.۱۸۲}$$

اور

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)}|00\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle \tag{۴.۱۸۳}$$

ہونگے مساوات 179.4 پر دوبارہ غور کرتے ہوئے اور مساوات 142.4 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں

$$S^2|10\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\Big)|10\rangle = 2\hbar^2|10\rangle \tag{۴.۱۸۴}$$

لہذا $|10\rangle$ یقینا S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہوگا اور

$$S^2|00\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\Big)|00\rangle = 0 \tag{۴.۱۸۵}$$

لہذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر 0 ہوگا میں آپ کے لئے سوال 34.4(c) چھوڑتا ہوں جہاں آپ نے تصدیق کرنا ہوگا کہ $|11\rangle$ اور $|1\ -1\rangle$ مختص امتیازی اقدار کی S^2 کے امتیازی تفاعلات ہیں ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر ایک چکر اور صفر چکر حاصل کیا جو کسی بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکر s کتنا حاصل ہوگا اس کا جواب یہ ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے (s_1+s_2) سے $s_2 > s_1$ کی صورت میں (s_2-s_1) تک اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں (s_1-s_2) تک نیچے آتے ہوئے ہر چکر

$$s = (s_1+s_2),\ (s_1+s_2-1),\ (s_1+s_2-2),\ \dots,\ |s_1-s_2| \tag{۴.۱۸۶}$$

حاصل ہو گا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے سب سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہوگا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صف بند ہوں اور کم سے کم اس صورت ہوگا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صف بند ہوں مثال کے طور پر اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ دو چکر کے ایک ذرہ کو ملائیں تب آپ کو $7/2$ $5/2$ $3/2$ اور $1/2$ کل چکر حاصل ہونگے جو تنظیم پر منحصر ہونگے دوسری مثال پیش کرتے ہیں حال ψ_{nlm} کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا کل زاویائی معیار حرکت چکر جمع دائری $l+1/2$ یا $l-1/2$ ہوگا اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l+1$ l یا $l-1$ ہوگا جہاں l کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا کہ الیکٹران ازخود $l+1/2$ تنظیم یا $l-1/2$ تنظیم رکھتا ہے

چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں لہذا صرف وہ مرکبی حالات جن کے لئے $m_1+m_2 = m$ حصہ ڈال سکتے ہیں لہذا املاپی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s اور z جزو m ہوگا مرکبی حالات $|s_1m_1\rangle|s_2m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C^{s_1s_2s}_{m_1m_2m}|s_1m_1\rangle|s_2m_2\rangle \tag{۴.۱۸۷}$$

ہو گا۔ مساوات 177.4 اور 178.4 اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ تھا میں نے یہاں غیر رسمی علامتیت $\uparrow = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ ، $\downarrow = |\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ استعمال کیا ہے مستقلات $C^{s_1s_2s}_{m_1m_2m}$ کو کلیبش و گوردن عددی سر کہتے ہیں جدول 8.4 میں چند سادہ صورتیں پیش کی گئی ہے مثال کے طور پر دو زرے ایک جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص اگر ایک ڈبہ میں دو چکر اور ایک چکر کے ساکن ذرات بائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3 اور z جزو صفر ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش $1/5$ احتمال کے ساتھ $\hbar$ یا $3/5$ احتمال کے ساتھ صفر یا $1/5$ احتمال کے ساتھ $\hbar-$ قیمت دے سکتی ہے اب دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ ایک ہو گا کلیبش و گوردن جدول کہ کسی بھی قطار کہ مربعوں کا مجموعہ ایک ہو گا ان جدولوں کو الٹ طریقے سے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے

$$|s_1m_1\rangle|s_2m_2\rangle = \sum_s C^{s_1s_2s}_{m_1m_2m}|sm\rangle \tag{۴.۱۸۸}$$

مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سایہ دار صف درج ذیل کہتی ہے

$$|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle|10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور ایک چکر کے دو ذرات رکھے اور آپ جانتے ہو کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لئے $m_2 = 0$ ہے تاکہ m لازمن $1/2$ ہو اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ $3/5$ احتمال کے ساتھ $5/2$ یا $1/15$ احتمال کے ساتھ $3/2$ یا $1/3$ احتمال کے ساتھ $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہو گا کلیبش و گوردن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ ایک ہو گا یہاں آپ کا کوئی قصور نہیں ہو گا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہوں ہم اس کتاب میں کلیبش و گوردن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ اعلٰی گروہی نظریہ کا حصہ ہے سوال ۴.۲۸:

ا. مساوات 177.4 میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ $\sqrt{2}\hbar|1 \quad -\quad 1\rangle$ حاصل کرتے ہیں

ب. مساوات 178.4 میں $|00\rangle$ پر $S_\pm$ کا اطلاع کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ صفر حاصل کرتے ہیں

ج. دکھائی کہ مساوات 177.4 میں دیے گئے $|11\rangle$ اور $|1 \quad -\quad 1\rangle$ S^2 کہ موضوع امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ہیں

سوال ۴.۲۹: کوارک کا چکر $1/2$ ہے تین کوارک کے ایک دونوں کے ساتھ مل کر ایک بیریون پیدا کرتے ہیں مثلا پروٹان یا نیوٹران دو کوارک کے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک آپس میں جوڑ کر ایک میانیہ پیدا کرتے ہیں مثلا پایان یا کایون فرض کریں کہ یہ کوارک کے زمینی حال میں ہیں لہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہو گا

ا. بیریون کے کیا ممکنہ چکر ہونگے

ب. میزان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے

سوال ۴.۳۰:

ا. ایک ذرا جس کا چکر ایک اور دوسرا ذرا جس کا چکر دو ہیں ساکن حال میں اس تقسیم سے پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3 اور z جزو $\hbar$ ہے اس دو چکر ذرے کے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہو گا

ب. ہائیڈروجن جوہر کے ψ_{510} میں ایک الیکٹران مخالف میدان پایا جاتا ہے اگر آپ پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کی مربع کی پیمائش کر سکیں تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کی انفرادی احتمال کیا ہو گا

سوال ۴.۳۱: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں جہاں $\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)} \equiv \boldsymbol{S}$ ہو گا اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$[S^2, \boldsymbol{S}^{(1)}] = 2i\hbar(\boldsymbol{S}^{(1)} \times \boldsymbol{S}^{(2)}) \tag{۴.۱۸۹}$$

میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 ایک دوسرے غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہو ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے مساوات 185.4 میں کلیبش و گورڈن عددی سر ہمارے لیے یہی کچھ کرتے ہیں ساتھ ہی مساوات 187.4 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}$ مقلوبی ہو گا جو ہماری معلومات مساوات 103.4 کی ایک مخصوص صورت ہے

سوال ۴.۳۲: تین آبادی ہارمونی مرتعش پر غور کریں جس کا مخفی قوہ درج ذیل ہیں

$$Vr = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{۴.۱۹۰}$$

ا. کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بودی مرتعش میں تبدیل کریں موخرالذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے اجازتی توانائیاں تعین کریں جواب

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \tag{۴.۱۹۱}$$

ب. E_n کی انحطاطیت $d_{(n)}$ تعین کریں

سوال ۴.۳۳: چونکہ مساوات 188.4 میں دیا گیا تین آبادی ہارمونی مرتعش مخفی قوہ کروی تشاکلی ہے لہذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدد کے ساتھ ساتھ کروی محدد میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا

جا سکتا ہے طاقتی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداسی مساوات حل کریں عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے اجازتی توانائیاں تعین کریں اپنے جواب کی تصدیق مساوات 189.4 کے ساتھ کریں

سوال ۴.۳۴:

ا. ساکن حالات کے لئے درج ذیل تین آبادی مسئلہ وریل ثابت کریں

$$2\langle T\rangle = \langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla V\rangle \tag{۴.۱۹۲}$$

اشارہ: سوال 31.3 دیکھیے گا

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T\rangle = -E_n; \quad \langle V\rangle = 2E_n \tag{۴.۱۹۳}$$

ج. مسئلہ وریل کو سوال 38.4 کے تین آبادی ہارمونی مرتعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T\rangle = \langle V\rangle = E_n/2 \tag{۴.۱۹۴}$$

سوال ۴.۳۵: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہے سوال 14.1 کی عمومیت سے تیں آبادی رو احتمال کی تعریف پیش کریں

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) \tag{۴.۱۹۵}$$

ا. دکھائے کہ $\boldsymbol{J}$ استمراری مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 \tag{۴.۱۹۶}$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مکامی بقا احتمال کو بیان کرتی ہے یوں مسئلہ پھیلاو کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V |\Psi|^2\, d^3\boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۷}$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے الفاظ میں کسی سطح سے احتمال کا اخراج اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کہ احتمال میں کمی کے برابر ہو گا

ب. حال $n=2$ $l=1$ $m=1$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے یہ تلاش کرے جواب

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a}\sin\theta \hat{phi}$$

ج. اگر ہم کمیت کے بہنے کو $m\boldsymbol{J}$ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{L} = m\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})\,\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب لگائے اور نتیجہ پر تبصرہ کریں

سوال ۴.۳۶: غیر تابع وقت معیار حرکت وفضا تفاعل موج کو تین آباد میں مساوات 54.3 کی قدرتی عمومیت پیش کرتی ہے

$$\phi(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int e^{-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})/\hbar}\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۸}$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن مساوات 80.4 کے لیے معیار حرکت وفضا تفاعل موج تلاش کریں اشارہ: کروی محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو $\boldsymbol{p}$ کے رخ رکھیں اور θ کا تکمل پہلے حاصل کریں جواب

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2a}{\pi}\Big)^{3/2}\frac{1}{[1+(ap/\hbar)^2]^2} \tag{۴.۱۹۹}$$

ب. تصدیق کیجئے گا کہ $\phi(\boldsymbol{p})$ معمول شدہ ہے

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن جوہر کے لیے $\psi(\boldsymbol{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2\rangle$ کا حساب لگائیں

د. اس حال میں حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی اپنی جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ وریل مساوات 191.4 کے بلا تضاد ہیں

سوال ۴.۳۷:

ا. حال $n = 3$ $l = 2$ اور $m = 1$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل موج ψ تیار کریں اپنی جواب کو صرف اور صرف r θ ϕ اور a رداس بوہر کی تفاعل کی صورت میں لکھے کسی دوسرے متغیر رو z وغیرہ یا تفاعلات Y v وغیرہ یا مستقلات A c_0 وغیرہ یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت ہے ہاں π e اور 2 وغیرہ استعمال کر سکتے ہیں

ب. r θ اور ϕ کے لحاظ سے موضوع تکملات حل کر کے تصدیق کریں کہ تفاعل موج معمول شدہ ہے

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں s کی کس ساتھ مثبت اور منفی کے لیے جواب متناہی ہو گا

سوال ۴.۳۸:

ا. حال $n = 4$ $l = 3$ اور $m = 3$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں اپنے جواب کو کروی محدد r θ اور ϕ کا تفاعل لکھیں

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی آپ کو تکملات جدول سے حاصل کرنے کی اجازت ہے

ج. اس حال میں ایک جوہر کے مشہود $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت یا قیمتیں متوقع ہے اور ان کے انفرادی احتمال کیا ہوں گے

سوال ۴.۳۹: ہیڈروجن کی زمینی حال میں مرکزہ کے اندر الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا

ا. پہلے یہ فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج مساوات 4.80 رداس $r = 0$ تک درست ہے اور مرکزہ کا رداس b لیتے ہوئے بالکل ٹھیک جواب حاصل کریں

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کی طاقتی تسلسل کی روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ سب سے کم رتبی جزو کا بھی ہو گا $P \approx (4/3)(b/a)^3$ دکھائے کہ $b \ll a$ کی صورت میں جو کہ درست ہے یہ تخمین موزوں ہو گی

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کہ بہت چھوٹی حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہو گا لہٰذا $P \approx (4/3)\pi b^3 \left|\psi(0)\right|^2$ لیا جا سکتا ہے تصدیق کیجیے گا کہ یوں بھی آپ وہی جواب حاصل کر سکتے ہیں

د. $a \approx 0.5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ اور $b \approx 1 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ لیتے ہوئے P کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں یہ الیکٹران کا اندازاً وہ وقت ہو گا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے

سوال ۴.۴۰:

ا. کلیہ توالی مساوات 4.76 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں رداسی تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ تکمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r \rangle^2$ کا حساب لگائیں

ج. دکھائیں کے ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں عدم یقینیت $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہو گی دھیان رہے کہ r میں نسبتی پھیلاو n بڑھانے سے گھٹتا ہے یوں n کی بڑی قیمت کے لیے نظام کلاسیکی نظر آنے شروع ہوتا ہے جس میں دائری مدار پہچانے جا سکتے ہیں n کی کئی قیمتوں کے لیے رداسی تفاعل امواج کا خاکہ بناتے ہوئے اس نقطے کی وضاحت کریں

سوال ۴.۴۱: ہم مکان طیفی خطوط کلیہ رڈبرگ مساوات 4.93 کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے صدر کوانٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہو مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہو گی

سوال ۴.۴۲: مشہودات $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں

ب. حال ψ_{nlm} میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں

ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں

سوال ۴.۴۳: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

ا. χ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل A تعین کریں

ب. اس الیکٹران کی S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی

ج. اگر اس الیکٹران کی S_x کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتے متوقع ہو گی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی

د. اس الیکٹران کی S_y کی پیمائش سے کیا قیمتے متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہو گا S_y کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی

سوال ۴.۴۴: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد $1/2$ چکر ذرات یکتا تنظیم 178.4 میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_a^{(1)}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{a}$ ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_b^{(2)}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{b}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں $\hat{a}$ اور $\hat{b}$ کے بیچ زاویہ θ ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta \tag{۴.۲۰۰}$$

سوال ۴.۴۵:

ا. کلیبش گورڈن عددی سروں کو $s_1 = 1/2$ اور $s_2 = anything$ کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $|sm\rangle$ کا امتیازی حال ویکٹر S^2 ہو گا

$$|sm\rangle = A|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle|s_2(m-\frac{1}{2})\rangle + B|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle|s_2(m+\frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ $S_x^{(2)}$ مثلاً ویکٹر $|s_2 m_2\rangle$ پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2+1}}; B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2+1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتی ہیں۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجے دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۴۶: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر کے ذرے کے لیے قالب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۴۷: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چکر کے قالبوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکری قالب تلاش کریں۔
جواب:

$$\boldsymbol{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \imath b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \imath b_s & 0 & -\imath b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \imath bs-1 & 0 & -\imath bs-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\imath b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \imath b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہوگا۔

سوال ۴.۴۸: کروی ہارمونیات کے لیے، ؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{\imath m\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر

میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجانڈر تفاعل کے تفرق کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1} - mxP_l^m \tag{۴.۲۰۱}$$

سوال ۴.۴۹: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi-)$$

ا. مداری زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) جز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیئر (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار z کے (S_z) جز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت کو $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ لیں۔

ھ. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہو گا؟

ح. آپ چکر کے z جز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۵۰:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلایا جا سکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہو گا

$$f(\phi+\varphi) \equiv e^{\frac{\imath L_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا $L_z/\hbar$ کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\boldsymbol{L}.\hat{n}/\hbar$ ہو گا جو $\hat{n}$ کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی $e^{(i\boldsymbol{L}.\hat{n}\varphi/\hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}/\hbar$ ہو گا بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{\imath(\sigma.\hat{n})\varphi/2}\chi \tag{۴.۲۰۲}$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور $x-axis$ کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) قالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور $y-axis$ کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا قالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہو گا؟

د. محور $z \quad - \quad axis$ کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ھ. درج ذیل دکھائیں

$$e^{\iota(\sigma.\hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + \iota(\hat{n}.\sigma)\sin(\varphi/2) \tag{۴.۲۰۳}$$

سوال ۴.۵۱: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتے (مساوات 99.4) امتیازی اقدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہو گا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جس کا بعد لمبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = \iota\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں کو $q's$ اور $p's$ مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2 - q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کمیت $m = \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega = 1$ ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی H کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی مرتعش کے ہیملٹنی کی امتیازی اقدار $(n+1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ہو گا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ مقلبیت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازماً عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۵۲: عمومی حال مساوات 139.4 میں 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $\sigma_{S_x}\sigma_{S_y} \geq (\hbar/2)|\langle S_z\rangle|$ میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہو گی b خالف حقیقی یا خالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۳: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا بار q ہو اور جو مقناطیسی میدان E اور B میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{۴.۲۰۴}$$

اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{۴.۲۰۵}$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \tag{۴.۲۰۶}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مخفی قوہ $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ اور φ غیر سمتی مخفی قوہ $(\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ ہیں لہذا شروڈنگر مساوات میں باضابطہ متبادل $(\boldsymbol{p} \to ((\hbar/\imath)\nabla))$ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{\imath}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi]\psi \tag{۴.۲۰۷}$$

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\rangle \tag{۴.۲۰۸}$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle\boldsymbol{r}\rangle/dt$ کو $\langle\boldsymbol{v}\rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle v\rangle}{dt} = q\langle\boldsymbol{E}\rangle + \frac{q}{2m}\langle(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{p})\rangle - \frac{q^2}{m}\langle(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\rangle \tag{۴.۲۰۹}$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle\boldsymbol{v}\rangle}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \langle\boldsymbol{v}\rangle \times \boldsymbol{B}), \tag{۴.۲۱۰}$$

اس طرح $\langle\boldsymbol{v}\rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ ؟؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۴.۵۴: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B_0}}{2}(x\hat{j} - y\hat{i})$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیت m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{۴.۲۱۱}$$

جہاں $\omega_1 = q\boldsymbol{B_0}/m$ اور $\omega_2 \equiv \sqrt{2q\boldsymbol{K}\mathrm{m}}$ ہو گا۔ تبصرہ: $\boldsymbol{K} = 0$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مماثل ہو گا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہو گا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ اجازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۵۵: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوہ $\boldsymbol{A}$ اور φ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جا سکتے ہیں، طبعی مقداریں میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوہ

$$\varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۴.۲۱۲}$$

(جہاں مقام اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان φ اور $\boldsymbol{A}$ دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گیج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایا یہ نظریہ گیج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$\Psi' \equiv e^{\imath q\Lambda/\hbar}\Psi \tag{۴.۲۱۳}$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گیج تبادلہ مخفی قوہ φ' اور $\boldsymbol{A}$ لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ ایک ہی طبعی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہو گا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

باب ۵

متماثل ذرات

۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک زرہ کے لیے فلحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے $\psi(r,t)$ فضائی مہدت r اور وقت t کا تفعال ہو گا۔ دو زراتی نظام کا حال پہلے زرے کے محناطر (r_1) دوسرے زرے کے محناطر (r_2) اور وقت کا طابع ہو گا۔

$$\psi(r_1, r_2, t) \tag{۵.۱}$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے shrodinger مساوات

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{۵.۲}$$

کے تحت ارتقا کرے گا۔ جہاں H مکمل نظام کا Hamiltonian ہے۔

$$H = -\frac{\hbar}{2m_1}v_1{}^2 - \frac{\hbar}{2m_2}v_2{}^2 + v(r_1, r_2, t) \tag{۵.۳}$$

زرہ ایک یا زرہ دو کے محددوں کے لحاظ سے تفرقات لینے کو Δ زیر نوشت میں ایک یا دو سے ظاہر کیا گیا ہے۔ زرہ ایک کا حجم d^3r_1 اور زرہ دو کا حجم d^3r_2 پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$|\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3r_1 d^3r_2 \tag{۵.۴}$$

ظاہر ہے کہ ψ کو درج ذیل کے لحاظ سے معمول پر لانا ہو گا۔

$$\int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3r_1 d^3r_2 = 1 \tag{۵.۵}$$

غیر تابع وقت مخفی توانائی کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\psi(r_1, r_2, t) = \psi(r_1, r_2)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \tag{۵.۶}$$

جہاں فضائی تفعال معاج ψ غیر تابع وقت shroudinger مساوات

$$-\frac{\hbar}{2m_1}\nabla_1^2\psi - \frac{\hbar}{2m_2}\nabla_2^2\psi + V\psi \tag{۵.۷}$$

جس میں E پورے نظام کی قل توانائی ہے۔

سوال ۵.۱: عام طور پر باہمی مخفی توانائی انحصار صرف 2 ذرات کے بیچ سمتیہ $r = r_1 - r_2$ پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات r_1 اور r_2 کی جگہ نئے متغیرات اور مرکز کمیت $R = \frac{(m_1r_1+m_2r_2)}{m_1+m_2}$ مساوات shroudinger ہوتی ہے۔

(الف)۔ دکھائیں کہ $r_1 = R + (\frac{\mu}{m_1})r, r_2 = R - (\frac{\mu}{m_2})r$ اور $\nabla_1 = (\frac{\mu}{m_2})\nabla_R + \nabla_r, \nabla_2 = (\frac{\mu}{m_1})\nabla_R - \nabla_r$ جہاں

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \tag{۵.۸}$$

نظام کی تشخیص شدہ کمیت ہے۔

(ب)۔ دکھائیں کہ غیر تابع وقت shroudinger مساوات درج ذیل رعب اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)}\nabla_R{}^2\psi - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r{}^2\psi + V(r)\psi = E\psi$$

(ج)۔ متغیرات کو $\psi(R, r) = \psi_r(R)\psi_r(r)$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_r ایک ذرہ کی shroudinger مساوات جہاں کمیت $(m_1 + m_2)$ مخفی توانائی صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R کو مطمئن کرتا ہے۔ جبکہ ψ_r ایک ذرے کی shroudinger مساوات جہاں تخفیف شدہ کمیت ہو۔ مخفی توانائی V(r) ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ قل توانائی اور ان کا مجموعہ $E = E_R + E_r$ ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکزی کمیت ایک آزاد ذرہ کی طرح حرکت کرتا ہے جبکہ ذرہ ایک کے لحاظ سے ذرہ دو کی نصبطی حرکت ایسے ہی ہو گی جیسا مخفی توانائی V میں تخفیف شدہ کمیت کا ایک ذرہ کرتی ہے mechanicsclassical میں بھی بلکل یہی تحلیل ہو گی جو 2 اجسام مسلے کو محاصل ایک جسم مسلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں Hydrogen کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم electron کی کمیت کی جگہ تخفیف شدہ کمیت استعمال کریں گے

(الف)۔ hydrogen کی بندش کی توانائی (مساوات 4،77) جاننے کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے دو بمعنی ہندسوں تک فیصد خلل کتنا ہوگا۔

(ب)۔hydrogen اور Dueterium کے لیے $(n = 2) > (n = 3)$ سرخ بالمر لکیروں کے بیچ تفعال معاج میں فرق تلاش کریں۔

(ج)۔Positronium کی بندشی توانائی تلاش کریں۔proton کی جگہ positron رکھنے سے positronium پیدا ہو گا۔positron کی کمیت electron کی کمیت کے برابر ہو گا جبکہ اس کی علامت Electron کی علامت کے مخالف ہے۔

(د)۔فرض کریں آپ hydrogenmuonic جس میں electron کی جگہ ایک muon کی موجودگی کی تصدیق کرنا چاہتے ہوں۔muon کا electron bar کے bar کے برابر ہے۔ جبکہ یہ electron سے 206٫77 گنا زیادہ کمیت رکھتا ہے۔ آپ Lyman α لکیر $n = 2$ تا $n = 1$ کے لیے کس طور معاج پر نظر رکھیں گے۔

سوال ۵.۳: کلورین کے قدرتی دو ہم جا $Cl^35andCl^37$ پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCL کی لرزشی طیف قریب قریب جوڑیوں پر مشتمل ہو گا۔جن میں فرق $\Delta_v = 7.51x10^-4v$ جہاں v خارجی photon کی تعدد ہے۔(اشارہ: اس کو ایک Harmonium مرتعش تصور کریں جہاں $\omega = sqrt\frac{k}{mu}$ ہو گا۔جہاں μ تخفیف شدہ کمیت (مساوات 5٫8) ہے۔جبکہ k دونوں ہمجا کے لیے ایک جیسا ہے۔

۵.۱.۱ بوزان اور فرمیون

فرض کریں ذرہ ایک یک ذرہ حال $\psi_a(r)$ اور ذرہ دو حال $\psi_b(r)$ میں پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ یہاں میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں ایسی صورت میں $\psi(r_1, r_2)$ سادہ حاصل ضرب ہو گا

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \tag{۵.۹}$$

ایسا کہتے ہوئے ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ ہم ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچان سکتے ہیں ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ ایک حال ψ_a میں اور ذرہ دو حال ψ_b میں ہے بیمانی ہوتا اور ہم بغیر جانے کے کونسا ذرہ ایک اور کونسا ذرہ دو ہے یہ کہتے کہ ایک ذرہ ψ_a میں اور دوسرا ذرہ ψ_b میں پایا جاتا ہے۔ کلاسیکی میکانیت میں یہ ایک بیوقفانہ اعتراض ہوتا۔ اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دیکر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔کوانٹم میکانیات میں صورتِ حال بنیادی طور پر مختلف ہے۔ آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بلکل یکساں ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے قاصر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ یہ الیکٹران اور وہ الیٹران کوانٹم میکانیات مین بے معنی ہیں ہم صرف ایک الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔اصولی طور پر غیر ممیز ذرات کی موجودگی کو کوانٹم میکانیات خوش اسلوبی سے سموتی ہے۔ہم ایک ایسا غیر مشرود تفاعل وج تیار کرتے ہیں جب اس کیبات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے ایسا دو طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔

$$\psi \pm (r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)] \tag{۵.۱۰}$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے یکساں ذرات کا حامل ہو گا بوزان جن کے لیئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور فرمیون جن کے لیئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزان کی مثال فوٹان اور میزون ہے جبکہ فرمیون کی مثال

پروٹان اور ایلکٹران ہے ایسے ہے کہ

$$\begin{cases} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزان جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیون ہوں گے} \end{cases} \tag{۵.۱۱}$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق جیسا ہم دیکھیں گے فرمیونز اور بوزانز کی شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہتے ہیں کو اضافی کوانٹم میکانیات میں ثابت کیا جا سکتا ہے۔ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔

اس سے بلخصوص اب یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ دو یکساں فرمیونز مثلاً دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_-(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_a(r_2) - \psi_a(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا کوئی موج تفاعل نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ پولی کا اخراجی اصول کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے بلکہ یہ دو ذراتی تفاعلی امواج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے جس کا اطلاق تمام یکساں فرمیونز پر ہوگا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے یہ فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال ψ_a میں اور دوسرا حال ψ_b میں پایا جاتا ہے لیکن اس مسئلہ کو زیادہ عمومی اور زیادہ نفیس طریقے سے وضع کیا جا سکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ P متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے

$$Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1) \tag{۵.۱۲}$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہوگا لحاظہ تصدیق کیجیے گا کہ P کے امتیازی اقدار ± 1 ہوں گے۔ اب اگر دو ذرات یکساں ہوں تب لازمی ہے کہ ہیملٹونی ان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتے گا $m_1 = m_2$ اور $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ اس طرح P اور H ہم آہنگ مشود ہوں گے

$$[P, H] = 0 \tag{۵.۱۳}$$

لحاظہ ہم دونوں کے بیک وقت امتیازی حالات کے تفاعلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیرِ مبادلہ

$$\psi(r_1, r_2) = \pm\psi(r_2, r_1) \tag{۵.۱۴}$$

مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشاکلی امتیازی قدر $+1$ یا غیر تشاکلی امتیازی قدر -1 ہوں۔ مزید ایک نظام جو اس حال سے آغاز کرے اس یحال میں برقرار رہتا ہے یکساں ذرات کا ایک نیا قائدہ جس کو میں ضرورت تشاکل کہتا ہوں کے تحت تفاعل موج کو مساوات 5.14 پر صرف پورا اُترنے کی ضرورت نہیں بلکہ اس پر لاظم ہے کہ وہ اس مساوات کو متمعن کرتا ہو۔ یہاں بوزون کے لیئے مثبت علامت اور فرمیونز کے لیئے منفی علامت استعال ہوگا۔ یہ ایک عمومی فکرہ ہے جس کی مساوات 5.10 ایک مخصوص صورت ہے۔

مثال ۵.۱: فرض کریں ایک لامتناہی چکور کنواں میں کمیت M کے باہم غیر متعمل دوذرات جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں پائے جاتے ہیں۔ آپکو فکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملا کیسے کیا جا سکتا ہے۔ یک ذرہ حالات درج ذیل ہوں گے۔ جہاں $K = \frac{(\pi)^2(\hbar)^2}{2m(a)^2}$ ہے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n(\Pi)}{a}x), \quad E_n = n^2K$$

یہ ذرات قابل ممیز ہونے کی صورت میں جہاں ذرہ 1 حال n_1 میں اور ذرہ 2 حال n_2 میں ہو مرکب تفاعل موج سادہ حاصل ضرب ہوگا۔

$$\psi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1n_2} = ((n_1)^2 + (n_2)^2)K.$$

مثال کے طور پر زمینی حال

$$\psi_{11} = \frac{2}{a}\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a}), \quad E_{11} = 2K;$$

پہلا ہیجان حال دوچند انحطاطی

$$\psi_{12} = \frac{2}{a}\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}), \quad E_{12} = 5K,$$
$$\psi_{21} = \frac{2}{a}\sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a}), \quad E_{21} = 5K;$$

ہوگا وغیرہ وغیرہ۔ دونوں ذرات یکساں بوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم پہلا ہیجان حال جسکی توانائی اب بھی 5K ہوگی غیر انحطاطی ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a}[\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}) + \sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a})]$$

اور اگر ذرات یکساں فرمیون ہوں تب کوئی حال بھی 2K توانائی کا نہیں ہوگا۔ جبکہ زمینی حال جسکی توانائی 5K ہوگی۔ درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a}[\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}) - \sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a})],$$

□

سوال ۵.۴:

(جزوالف) اگر Ψ_b اور Ψ_a عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات 10.5 میں مستقل 'A' کیا ہوگا؟

(جز و ب) اگر $\Psi_b = \Psi_a$ ہوں اور یہ معمول شدہ ہوں تب A کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف بوزون کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

(جز و الف) لامتناہی چکور کنواں میں باہم غیر متعمل دو یکساں ذرات کا ہملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال 1.5 میں دیا گیا فرمیون کا زمینی حال H کا مناسب امتیازی قدر والا امتیازی تفاعل ہوگا۔

(جز و ب) مثال 1.5 میں دیئے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو حالات تفاعل موج اور توانائیاں تینوں صورتوں میں قابل ممیز یکساں موزوں، یکساں فرمیون حاصل کریں۔

۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورتِ تشاکل کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہو اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہوں اگر یہ ذرات قابلِ ممیز ہوں اور ذرہ ایک حال ψ_a میں ہو تب انکا مجموعی تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \tag{۵.۱۵}$$

اگر یہ یکساں بوزون ہوں تب انکا مرکب تفاعل موج سوال 5.4 معمولزنی کے لیئے دیکھیں درج ذیل ہوگا

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۶}$$

اور اگر یہ یکساں فرمیونز ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۷}$$

آئیں ان ذرات کے بیچ علیحدگی کے فاصلے کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں

$$\langle(x_1 - x_2)^2\rangle = \langle x_1^2\rangle + \langle x_2^2\rangle - 2\langle x_1 x_2\rangle \tag{۵.۱۸}$$

پہلی صورت: قابلِ ممیز ذرات۔ مساوات 5.15 میں دی گئی تفاعل موج کے لیئے ایک ذرہ حال ψ_a میں x^2 کی توقعاتی قیمت

$$\langle x_1^2\rangle = \int x_1^2|\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1 \int |\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2 = \langle x^2\rangle_a$$

$$\langle x_2^2\rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1 \int x_2^2|\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2 = \langle x^2\rangle_b$$

اور

$$\langle x_1x_2\rangle = \int x_1\left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2\left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 = \langle x\rangle_a\langle x\rangle_b$$

یوں اس صورت درج ذیل ہو گا

$$\langle(x_1-x_2)^2\rangle_d = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \tag{۵.۱۹}$$

یہی جواب ذرہ ایک حال ψ_b میں اور ذرہ دو حال ψ_a میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔

دوم صورت: یکساں ذرات۔ مساوات 5.16 اور 5.17 کے تفاعل امواج کے لیے

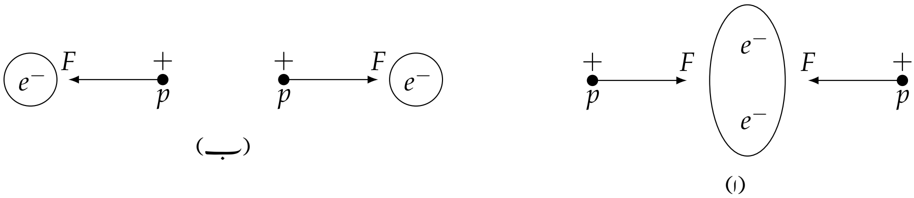
$$\begin{aligned}\langle x_1^2\rangle =&\frac{1}{2}\Big[\int x_1^2\left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int \left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2\\ &+\int x_1^2\left|\psi_b(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int \left|\psi_a(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2\\ &\pm\int x_1^2\psi_a(x_1)^*\psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int \psi_b(x_2)^*\psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2\\ &\pm\int x_1^2\psi_b(x_1)^*\psi_a * x_1\,\mathrm{d}x_1 \int \psi_a(x_2)^*\psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2\Big]\\ =&\frac{1}{2}\Big[\langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b \pm 0 \pm 0\Big] = \frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b\Big)\end{aligned}$$

بالکل اسی طرح

$$\langle x_2^2\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_b + \langle x^2\rangle_a\Big)$$

ظاہر ہے $\langle x_2^2\rangle = \langle x_1^2\rangle$ ہو گا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم

$$\begin{aligned}\langle x_1x_2\rangle =&\frac{1}{2}\Big[\int x_1\left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2\left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2\\ &+\int x_1\left|\psi_b(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2\left|\psi_a(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2\\ &\pm\int x_1\psi_a(x_1)^*\psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int x_2\psi_b(x_2)^*\psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2\\ &\pm\int x_1\psi_b(x_1)^*\psi_a(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int x_2\psi_a(x_2)^*\psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2\Big]\\ =&\frac{1}{2}\left(\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b + \langle x\rangle_b\langle x\rangle_a \pm \langle x\rangle_{ab}\langle x\rangle_{ba} \pm \langle x\rangle_{ba}\langle x\rangle_{ab}\right)\\ =&\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \pm \left|\langle x\rangle_{ab}\right|^2\end{aligned}$$



شکل ۵.۱: شریک گرفتی بندھ کی نقشہ کشی: (ا) تشاکل تنظیم قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکل تنظیم قوت دفع پیدا کرتی ہے۔

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) \, \mathrm{d}x \tag{۵.۲۰}$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 \big| \langle x \rangle_{ab} \big|^2 \tag{۵.۲۱}$$

مساوات 5.19 اور 5.21 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ فرق صرف آخری جز میں پایا جاتا ہے

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_d \mp 2 \big| \langle x \rangle_{ab} \big|^2 \tag{۵.۲۲}$$

قابل ممیز ذرات کے لحاظ سے انہی دو حالات کے یکساں بوزان ملائی علامت نسبتاً ایک دوسرے کے زیادہ قریب جبکہ یکساں فرمیون زیریں علامت نسبتاً ایک دوسرے سے زیادہ دور ہوں گے۔ دیہان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانپے نہیں $\langle x \rangle_{ab}$ صفر ہو گا غیر صفر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ صفر ہو تب مساوات 5.20 میں تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_a ظاہر کرتا ہو جبکہ صوابی میں ایک جوہو کے اندر الیکٹران کو ψ_b ظاہر کرتا ہو تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی فرق نہیں پڑے گا یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانپتے نہ ہوں کو آپ قابلِ ممیز ہونے کا ڈھونگ رچا سکتے ہیں۔ در حقیقت اسی کی بنا ماہرِ طبیعیات اور کیمیات آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً جائنت میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ تفاعل امواج کے ذریعہ عدم تشاکلی کی بنا جڑا ہے اور اگر اس سے کوئی ففرق پڑتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیئے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے۔

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتے ہے جب انکی موجی تفاعلات ایک دوسرے کو ڈھانپتے ہیں۔ ایسی صورت میں نظام کا رویہ کچھ یوں ہو گا جیا یکساں بوزون کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہو جو انہیں قریب کھینچتی ہے جبکہ یکساں فرمیونز کے بیچ قوت دفع پائے جاتی ہے جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم فل حال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں۔ ہم اس کو قوت مبادلہ کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک وقت نہیں ہے کوئی بھی چیز ان ذرات کو دھکیل نہیں رہی ہے یہ صرف ضرورت تشاکل کی جومیٹرائی نتیجہ ہے ساتھ ہی یہ کوانٹم میکانی مظہر ہے

جس کا کلاسیکی میکنیات میں کوئی مماثل نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دورست نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہائڈروجن سالمہ H_2 پر غور کریں اندازاً بات کرتے ہوئے مرکزہ ایک پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال مساوات 4.80 میں ایک الیکٹران اور مرکزہ دو پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمین حال دو میں ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہوگا اگر الیکٹران بوزون ہوتے تب ضرورت تشاکل یا اگر آپ قوت مبرہ پسند کرتے ہیں کوشش کرتے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کریں (شکل ۱.۵-ا) نتیجتاً منفی بار کا امبار دونوں پروٹانوں کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا جو شریک گرفتی بند کا سبب ہوتا۔ بد قسمتی سے الیکٹران در حقیقت فرمیون ہیں نہ کہ بوزون جس کی بنا منفی بار اطراف کی جانب منتقل ہوتا ہے (شکل ۱.۵-ب) جو سالمہ کو توڑنے کی کوشش کرتا ہے۔

ذرا رکیئے گا اب تک ہم نے چکر کو نظر انداز کیا ہے الیکٹران کے مکمل حال کو نہ صرف الیکٹران کا مکام تفاعل موج بلکہ الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرنے والا چکر کار تعین کرتے ہیں

$$\psi(r)\chi(s) \tag{۵.۲۳}$$

دو الیکٹران حال کو تشکیل دیتے ہوئے ہمیں صرف فضائی جزو کو مبادلہ کے لحاظ سے عدم تشاکلی بنانا ہوگا بلکہ پورے کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چکری حال مساوات 4.177 اور 4.178 پر نظریں ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یکتا ملاپ خلاف تشاکل ہے لحاظہ اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہوگا جبکہ تین سہتا حالات تشاکلی ہیں لحاظہ انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔ ظاہر ہے کہ یوں یکتا حال بندھن پیدا کرے گا جبکہ سہتا حال خلاف بندھن ہوگا۔ یقیناً ماہر کیمیات ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گرفتی بند کے لیئے ضراری ہے کہ دونوں الیکٹران یکتا حال کے مکین ہوں جہاں انکا کل چکر صفر ہوگا۔

سوال ۵.۶: لامتناہی چکور کنواں میں دو باہم غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال Ψ_n مساوات 28.2 اور دوسرا حال Ψ_l ۔ $n \neq l$ میں ہے۔ $\langle(x_1 - x_2)^2\rangle$ کا حساب اس صورت لگائیں کہ (الف) یہ غیر قابل ممیز ہوں۔ (ب) یہ یکساں بوزون ہوں اور (ج) یہ یکساں فرمیونز ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال Ψ_a دوسرا حال Ψ_b اور تیسرا حال Ψ_c میں پائے جاتے ہیں۔ حالات Ψ_a، Ψ_b اور Ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے مساوات 15.5، 16.5 اور 17.5 کی طرز پر تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) قابل ممیز ذرات کو (ب) یکساں بوزون کو اور (ج) یکساں فرمیونز کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاقلی ہوتا ہوگا۔ جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاقلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاقل تفاعل امواج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ سلیٹر نقطہ تیار کریں جس کی پہلی صف $\Psi_a(x_1)$، $\Psi_b(x_1)$، $\Psi_c(x_1)$ وغیرہ پر مشتمل ہو۔ اس کی دوسری صف $\Psi_a(x_2)$، $\Psi_b(x_2)$، $\Psi_c(x_2)$ وغیرہ پر مشتمل ہوگی اور اسی طرح اس کے بقایا صف ہوں گے۔ یہ نقطہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہوگا۔

۵.۲ جوہر

ایک مادل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کی کمیت M اور بار e کے Z الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔

$$H=\sum_{j=1}^{z}-\frac{h^2\ \triangle_j^2}{2m}-(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0})\frac{Ze^2}{r_j}+\frac{1}{2}(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0})\sum_{j\neq 1}^{z}\frac{e^2}{|r_j-r_k|}. \tag{۵.۲۴}$$

ہر سے قوسین میں بند جز و مرکزہ کے برقی میدان میں j الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرا جز و جو ماسوائے $k = j$ تمام j اور k مجموعہ پر ہے۔ الیکٹانز میں باہمی قوت دفاع کی بنا مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دو بار گنا جاتا ہے۔ ہمیں تفاعل موج $\Psi(r_1, r_2, ...r_z)$ کیلئے درج ذیل شروڈنگر مساوات حل کرنی ہوگی:

$$H\Psi=E\Psi \tag{۵.۲۵}$$

چونکہ الیکٹران یکساں فرمیون ہیں لہذا تمام حل قابل قبول نہیں ہوں گے۔ صرف وہ حل قابل قبول ہوں گے جن کا مکمل حال، مقام اور چکر

$$\Psi(r_1, r_2, ..., r_z)\chi(s_1, s_2, ..., s_z), \tag{۵.۲۶}$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکل ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ بد قسمتی سے ماسوائے سادہ ترین صورت $z = 1$ ہائیڈروجن کیلئے مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کی شروڈنگر مساوات ٹھیک حل نہیں کی جا سکتی ہے۔ کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے بابوں میں غور کیا جائے گا۔ ابھی میں الیکٹران کی قوت دفاع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ 1.2.5 میں ہم ہلیم کی زمینی حال اور ہیجان حالات پر غور کریں گے۔ جبکہ حصہ 2.2.5 میں ہم بالا جواہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کے لیۓ آپ شروڈنگر مساوات 25.5 کا حل $\Psi(r_1, r_2, r_3, ...r_z)$ حصل کر پائیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تشاکل تفاعل ایک مکمل خلاف تشاکل تفاعل کس طرح بنا پائیں گے جو شروڈنگر مساوات کو کسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے زیادہ جوہر ہلیم $Z = 2$ ہے۔ اس کا ہملٹنی

$$H=-\frac{h^2\ \triangle_1^2}{2m}-\frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1}+-\frac{h^2\ \triangle_2^2}{2m}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|r_1-r_2|}, \tag{۵.۲۷}$$

بار Ze کے مرکزہ کے دو ہائیڈروجن نما ہملٹنی الیکٹران 1 اور دوسرا الیکٹران 2 کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دفاع پر مشتمل ہو گا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر قابل علیحدگی ہو گا۔ اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس مساوات 72.4 اور چار گنا بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے وجہ نہ سمجھنے کی صورت میں سوال 16.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_{nlm}(r_1)\Psi_{n'l'm'}(r_2), \quad [5.28]$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہو گی جہاں $E_n = -13.6/n^2 eV$ ہو گا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}), \quad [5.29]$$

بالخصوص زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi_0(r_1, r_2) = \Psi_{100}(r_1)\Psi_{100}(r_2) = \frac{8e^{-}2(r_1 + r_2)/a}{\pi a^3}, \tag{۵.۲۸}$$

مساوات 80.4 دیکھیں اور اس طرح کی توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$E_0 = 8(-13.6eV) = -109eV. \quad [5.31]$$

چونکہ ψ_0 تشاکل تفاعل ہے لہذا چکر حال کو خلاف تشاکل ہونا ہو گا اور یوں ہلیم کے زمینی حال کا تنظیم یکتا ہو گا۔ جس میں چکر ایک دوسرے کے مخالف صف بند ہوں گے۔ حقیقت میں ہلیم کا زمینی حال یقینا یکتا ہے۔ لیکن اس کی توانائی تجرباتی طور پر $-78.975eV$ حاصل ہوتی ہے۔ جو مساوات 31.5 سے کافی مختلف ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کہ ہم نے الیکٹران کی توانائی دفاع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار ہے۔ مساوات 27.5 دیکھیں۔ جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی ‎-109‎ کی بجائے ‎-79eV‎ ہو گی۔ سوال 11.5 دیکھیں۔ ہلیم ہیجان حالات

$$\Psi_{nlm}\Psi_{100}. \quad [5.32]$$

ہائیڈروجن زمینی حال میں ایک الیکٹران اور دا سرا ہیجان حال پر مشتمل ہو گا۔ دانوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں لے جاتے ہی ایک فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر پھینکتا ہے۔ $(E > 0)$۔ یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہلیم باردار یہ (He^+) حصول ہو گا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں۔ سوال 9.5 دیکھیں۔ ہم ہمیشہ کی طرح تشاکل اور خلاف تشاکل حالات تیار کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.5; اول الفکر خلاف تشاکل چکر تنظیم یکتا کے ساتھ جائے گا۔ جنہیں پیرا ہلیم کہتے ہیں۔ جبکہ مؤخر ذکر کو تشاکل چکر تنظیم سہتا درکار ہو گی اور انہیں اور تھو ہلیم کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً پیرا ہلیم ہو گا جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ 2.1.5 میں دریافت کیا۔ تشاکل فضائی حال الیکٹرانز کو قریب لاتا ہے۔ جس کی بنا ہم توقع کرتے ہیں کہ پیرا ہلیم کی باہم متعامل توانائی زیادہ ہو گی۔ یقینا تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ اور تھو ہلیم کے لحاظ سے پیرا ہلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے۔ شکل 2.5 دیکھیں۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہلیم ایٹم کے دونوں الیکٹرانز کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں۔ خارج الیکٹران کی توانائی کیا ہو گی۔

ب. ہلیم باردار یہ He^+ کی تیف پر مقداری تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں کیفی تجزیہ کریں۔ (الف) اگر الیکٹران یکساں بوزون ہوتے۔ (ب) اگر الیکاٹران قابل ممیز ہوتے۔ جبکہ ان کی کمیت اور بار نہ ہوتا۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے اور ان کی تنظیم چکر یکتا اور سہتا ہے۔

سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات 30.5 میں دی گئی حال Ψ_0 کیلئے $\left(\frac{1}{|r_1 - r_2|)} \right)$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کری محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھتے ہوئے تا کہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}. \tag{۵.۲۹}$$

ہو۔ پہلے $d^3 r_2$ کا تکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے تکمل آسان ہے۔ بس اتنا یاد رکھیں کہ آپ کو مثبت جزو لینا ہو گا۔ آپ کو r_2 تکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہو گا۔ پہلا صفر سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$۔

ب. جزو الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہلیم کی زمینی حال میں الیکٹران کا باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔ اور اس کو E_0 مساوات 31.5 کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمیم حصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہو گا۔

۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹرانی تنظیم اسی طرح جوڑ کر حاصل کی جاتی ہے۔ پہلی تخمین کی حد میں انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے بار Z_e کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذرہ ہائڈروجن حالات (n, l, m) جنھیں مدارچے کہتے ہیں کہ انفرادی الیکٹران مکین ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان یا قابلِ ممیز ذرات ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ گر جاتے اور کیمیا اتنی دلچسپ نہ ہوتی۔ حقیقت میں الیکٹران یکساں فرمیان ہے جن پر پولی اصول منات لاگو ہتا ہے لحاظہ کسی ایک مدارچہ میں صرف دو الیکٹران رہ سکتے ہیں ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان بلکہ یہ کہنا زیادہ درست کہ یکتا تنظیم میں الیکٹران رہ سکتے ہیں۔ کسی بھی n کی قیمت کے لیئے n^2 ہائڈروجینی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی توانائی E_n ہو گی یوں $n = 1$ خول میں دو الیکٹرانوں کی جگہ $n = 2$ خول میں آٹھ $n = 3$ میں اٹھارہ اور n ویں خول میں $2n^2$ الیکٹرانوں کی جگہ ہو گی۔ کیفی طور پر بات کرتے ہیئے دوری جدول کے اُفقی صف انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے اگر شہ یہ پوری کہانی نہیں ہے چونکہ ایسا ہونے کی صورت میں انکی لمبائیاں $2, 8, 18, 32, 50,$ وغیرہ ہوتی

تا کہ $2, 8, 8, 18, 18$ وغیرہ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹرانوں کی باہمی توانائی دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے۔

ہیلیم کا $n = 1$ خول مکمل طور پر بھرا ہو گا لحاظہ اگلا جوہر لیتھیم $Z = 3$ کو ایک الیکٹران $n = 2$ خول میں رکھنا ہو گا۔ اب $n = 2$ کی صورت میں $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے۔ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ چونکہ بوہر توانائی n پر منحصر ہوتی ہے نا کہ l پر لحاظہ الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا الیکٹران کی توانائی دفا l کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیارے حرکت الیکٹران کو بیرونی روح دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا مرکزا سے دور ہوتا ہے اتنا ہی یہ مرکزا بہتر چھپاتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزا کا پورا Ze نظر آتا ہے جب کہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے e سے زیادہ موثر نظر آتا ہے۔ یوں کسی بھی ایک ہول میں کم سے کم توانائی کا حال یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران $l = 0$ ہو گا۔ اور بڑھتے l کے ساتھ توانائی بڑھے گی اس طرح لتیم میں تیسرا الیکٹران مدار جب $(2, 0, 0)$ کا مقید ہو گا۔ اگلا جوہر بیریلیم جس کا $Z = 4$ ہے اسی حال میں ہو گا لیکن اس کا چکر مخالف رخ ہو گا لیکن بوران $Z = 5$ کو $l = 1$ استعمال کرنا ہو گا۔ اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیین $Z = 10$ تک پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ ہول مکمل بھرا ہو گا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ ہول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ آغاز میں دو جوہر سوڈیم اور میگنیشیم ہیں جن کا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد ایلومینیم سے آرگان تک چھ ایسے جوہر ہیں جن کے لیے $L = 1$ ہو گا۔ آرگان کے بعد ہم توقع کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائینگے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہو گا البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران مرکزا کو اتنی خوش اسلوبی کے ساتھ پردہ کرتے ہیں کہ یہ اگلے ہول کو بھی ڈنگتا ہے لہذا پوٹیشیم $(Z = 19)$ اور کیلشیم $(Z = 20)$، $(l = 2)$، $(n = 3)$ کی بجائے $(L = 0)$، $(n = 4)$ منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم نیچے اتر کر سکینڈیم سے زنک تک کے جوہر اٹھاتے ہیں جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہو گا۔ اس کے بعد گیلیم سے کرپٹان تک $l = 1$ $n = 4$ ہو گا جس کے آخر میں ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف $n = 5$ کو چھلانگ لگاتے ہیں اور بعد میں واپس اتر کر $n = 4$ ہول کے۔ وہ مدارج جن کے لیے $l = 2$ $l = 3$ ہوں پر کرتے ہیں۔ یہاں جوہری حالات کی قدیم نام جنہیں تمام ماہر کیمیات اور تبیات کے زیادہ تر ماہرین استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہو گا اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے تیز پیمائی کاروں کو معلوم ہو گا کہ $l = 0$ کو s کہتے ہیں $l = 1$ کو p کہتے ہیں، $l = 2$ کو d کہتے ہیں اور $l = 3$ کو f کہتے ہیں۔ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راس پر آ گئے اور انہوں نے عروف تہجی کے تحت $(g, h, i, , k, l)$ وغیرہ نام دینا شروع کیا۔ انہوں نے ہماری ناک میں دم کرنے کی خاطر j کو نظر انداز کیا۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو (n, l) کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں عدد n حال کو اور حرف l مدارجی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ کوانٹم عدد m کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نما میں حال کے مقین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تنظیم

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^2 \qquad (۵.۳۰)$$

کہتی ہے کہ مدار جب $(1, 0, 0)$ میں 2 الیکٹران، مدار جب $(2, 0, 0)$ میں 2 جبکہ مدارج $(2, 1, 1)$، $(2, 1, 0)$ اور $(2, 1, -1)$ کے کسی ملاپ میں 2 الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ در حقیقت کاربن کا زمینی حل ہے۔

اس مثال میں 2 الیکٹران ایسے پائے جاتے ہیں جن کے مدارجی زاویائی معیارے ہر کت کوانٹم عدد ایک ہے لہذا مدارجی زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد ایک ہے لہذا کل مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹم نمبر l کسی ایک ذرہ کی جبکہ L کل قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک، دو یا صفر ہو سکتا ہے۔ جبکہ $(1s)$ کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یکتا

حال میں بندھے ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا۔ یہی کچھ $(2S)$ کے دو الیکٹرانوں کے لئے بھی ہوگا لیکن $(2p)$ کے دو الیکٹران یا تو یکتا نظام اور یا سہتا نظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کوانٹم عدد S کل کو ظاہر کرنے کے لئے بڑا حرف استعمال ہوگا۔ جس کی قیمت ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے میزان کل مدارچی جمع چکر J کی قیمت تین، دو، ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو ہن قواعد (سوال 1.5 دیکھیں) سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$^{2S+1}L_J \tag{۵.۳۱}$$

جہاں J اور S اعداد جبکہ L ایک حرف ہوگا اور چونکہ ہم کل کی بات کر رہے ہیں لہذا یہ بڑا حرف ہوگا کاربن کا زمینی حال 3D ہے جس کا کل چکّر ایک ہے جس کی بنا 3 لکھا گیا ہے کل مدارچی زاویائی معیار حرکت ایک ہے لہذا $1p$ لکھا گیا ہے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے لہذا صفر لکھا گیا ہے۔ جدول ۵.۱ میں دوری جدول کے ابتدائی چار صفحوں کے لئے انفرادی تنظیم اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات 34.5 کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔

سوال ۵.۱۲: جز الف: دوری جدول کے ابتدائی دو صفحوں کے لئے نیوون تک مساوات 33.5 کی روپ میں تنظیم الیکٹران پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۵.۱ کے ساتھ کریں۔
جز ب: ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات 34.5 کی روپ میں ان کا مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳: جز الف: ہن کا پہلا قاعدہ کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسا ہونے کے لیے صورت میں وہ حال جس کا کل چکری زیادہ سے زیادہ ہوگی کم سے کم توانائی ہوگی۔ ہیلیم کے ہیجان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔
جز ب: ہن کا دوسرا قاعدہ کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو۔ وہ حال جس کی مدارچی زاویائی معیار حرکت L1 زیادہ سے زیادہ ہوگی توانائی کم سے کم ہوگی۔ کاربن کے لئے L=2 کیوں نہیں ہوگا؟ اشارہ سیڑھی کا بالائی سر $(M_L = L)$ تشاکلی ہے۔
جز ج: ہن کا تیسرا قاعدہ کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول (n,l) نصف سے زیادہ بھرا نا ہو تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L-S|$ ہوگا۔ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L+S$ کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال 12.5 ب میں بوران کے مسائلہ سے شک دور کرے۔
جز د: قواعد ہن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ خلاف تشاکلی موزہ حال کے ساتھ خلاف تشاکل چکر حال استعمال ہوگا۔ سوال 12.5 ب میں کاربن اور نائٹروجن میں درپیش مشکلات سے چھٹکارا حاصل کریں۔ اشارہ کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر سیڑھی کے بالائی سر سے آغاز کریں۔

سوال ۵.۱۴: دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر چار ساٹھ ڈسپروسیم کا زمینی حال $^5I_8$ ہے۔ اس کے کل چکر کل مدارچے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم کل حالات کیا ہوں گے۔ ڈسپروسیم کے الیکٹران کی تنظیم کا خاکہ کیا ہو سکتا ہے۔

جدول ۱.۵: دوری جدول کے اولین چار قطاروں کی الیکٹران تنظیم

Z	عنصر	تنظیم	
1	H	$(1s)$	$^2S_{1/2}$
2	He	$(1s)^2$	$^1S_0$
3	Li	$(\text{He})(2s)$	$^2S_{1/2}$
4	Be	$(\text{He})(2s)^2$	$^1S_0$
5	B	$(\text{He})(2s)^2(2p)$	$^2P_{1/2}$
6	C	$(\text{He})(2s)^2(2p)^2$	$^3P_0$
7	N	$(\text{He})(2s)^2(2p)^3$	$^4S_{3/2}$
8	O	$(\text{He})(2s)^2(2p)^4$	$^3P_2$
9	F	$(\text{He})(2s)^2(2p)^5$	$^2P_{3/2}$
10	Ne	$(\text{He})(2s)^2(2p)^6$	$^1S_0$
11	Na	$(\text{Ne})(3s)$	$^2S_{1/2}$
12	Mg	$(\text{Ne})(3s)^2$	$^1S_0$
13	Al	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)$	$^2P_{1/2}$
14	Si	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^2$	$^3P_0$
15	P	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^3$	$^4S_{3/2}$
16	S	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^4$	$^3P_2$
17	Cl	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^5$	$^2P_{3/2}$
18	Ar	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^6$	$^1S_0$
19	K	$(\text{Ar})(4s)$	$^2S_{1/2}$
20	Ca	$(\text{Ar})(4s)^2$	$^1S_0$
21	Sc	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)$	$^2D_{3/2}$
22	Ti	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^2$	$^3F_2$
23	V	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^3$	$^4F_{3/2}$
24	Cr	$(\text{Ar})(4s)(3d)^5$	$^7S_3$
25	Mn	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^5$	$^6S_{5/2}$
26	Fe	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^6$	$^5D_4$
27	Co	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^7$	$^4F_{9/2}$
28	Ni	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^8$	$^3F_4$
29	Cu	$(\text{Ar})(4s)(3d)^{10}$	$^2S_{1/2}$
30	Zn	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}$	$^1S_0$
31	Ga	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)$	$^2P_{1/2}$
32	Ge	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^2$	$^3P_0$
33	As	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^3$	$^4S_{3/2}$
34	Se	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^4$	$^3P_2$
35	Br	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^5$	$^2P_{3/2}$
36	Kr	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6$	$^1S_0$

۵.۳ ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گرفتی الیکٹرانوں میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص موروثی مرکزا کے کولوم میدان سے آزاد، تمام قلمی جال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرنا شروع کرتے ہے اس حصہ میں ہم توبہت سادے نمونوں پے غور کرے گے۔ پہلا نمونہ الیکٹرون گیس نظریہ ہے جو سمرفیل نے پیش کیا اس نمونے میں سرحد کے اثرات کے علاوہ باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور الیکٹرانوں کو لامتناہی چاکور کنواں کے تین آبادی مماثل کی طرح ڈبے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے۔ دوسرا نمونہ بلخ نظریہ کہلایا جاتا ہے الیکٹرون کی باہمی دفاع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جیتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے، یہ نمونے ٹھوس اجسام کی کوانٹم نظریے کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں۔ اس کے باوجود یہ پولی حصولنات کا جموت میں گہرا کردار اور موصال، غیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتی ہے۔

۵.۳.۱ آزاد الیکٹرون گیس

فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل چکل کا ہے جس کے اصلا l_x، l_y اور l_z ہے اور فرض کرے کے اِس کے اندر الیکٹرون پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہوسکی ماسوائے ناقابلِ گزر دیواروں کے۔

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & otherwise \end{cases} \tag{۵.۳۲}$$

شرودنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

$$\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2X}{dx^2} = E_xX; \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2Y}{dy^2} = E_yY; \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2Z}{dz^2} = E_zZ$$

اور

$$E = E_x + E_y + E_z$$

درج ذیل لیتے ہوئے،

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

ہم عمومی حل حاصل کرتے ہے۔

$$X(x) = A_x\sin(K_xx) + B_x\cos(K_xx) \quad Y(y) = A_y\sin(K_yy) + B_y\cos(K_yy) Z(z) = A_z\sin(K_zz) + B_z\cos \tag{۵.۳۳}$$

سرحدی شرائط کے تحت

$$X(0) = Y(0) = Z(0), B_x = B_y = B_z = 0, X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$$

ہو گا۔ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$k_x l_x = n_x \pi, k_y l_y = n_y \pi, k_z l_z = n_z \pi$$

جہاں ہر n ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

$$n_x = 1, 2, 3, \dots \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

معمول شدہ تفلات موج درج ذیل ہونگے۔

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\Big(\frac{n_x \pi}{l_x} x\Big) \sin\Big(\frac{n_y \pi}{l_y} y\Big) \sin\Big(\frac{n_z \pi}{l_z} z\Big)$$

اور اجازاتی توانائیاں درج ذیل ہونگی۔

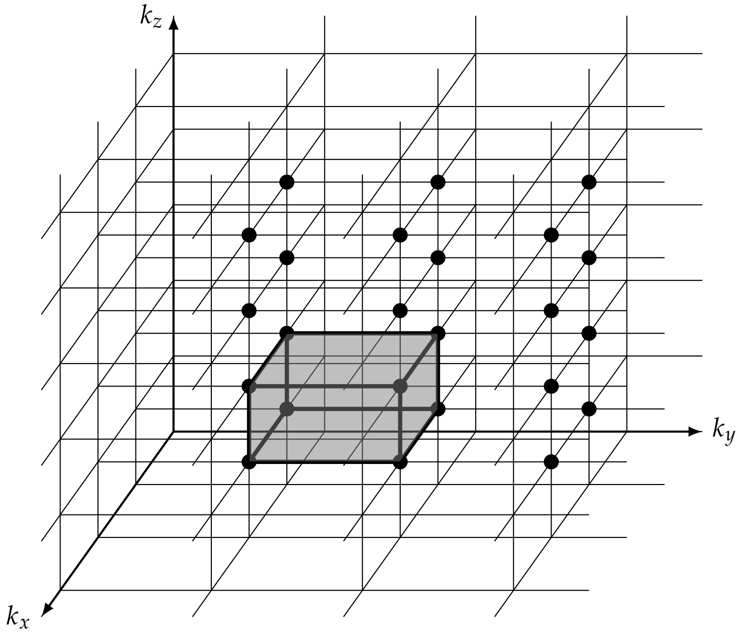
$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \Big(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2}\Big) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

جہاں سمتیاں موج، $k \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مطلق قیمت K ہو گی۔

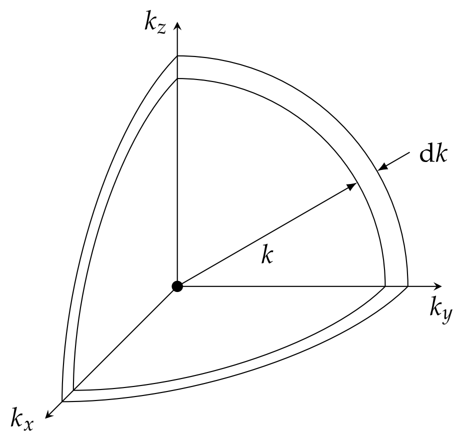
اگر آپ ایک تین آبادی فضا کا تصویر کرے جس کے محور $k_x k_y k_z$ ہو اور جس پر $k_x = (\pi/l_x)(2\pi/l_x)(3\pi/l_x)\dots$ اور $k_y = (\pi/l_y)(2\pi/l_y)(3\pi/l_y)\dots$ اور $k_z = (\pi/l_z)(2\pi/l_z)(3\pi/l_z)\dots$ پر سیدھے سطوت پائے جاتے ہو تب ہر انفرادی نقطہ تکاتے ایک منفرد یک ذرا ساکن حال دیگا (شکل ۵.۲)۔ اس جال میں ہر ایک خانہ لہٰذا ہر ایک حال کی فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم ہے۔

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں N جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے q آزاد الیکٹرون دیتا ہو۔ عملاً کسی بھی کلاں بینی جسامت کے چیز کے لیئے N کی قیمت بہت بڑی ہو گی جو ایوگادرو عدد میں گنی جائے گی جبکہ q ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہو گا۔ اگر ایلکٹرون بوزان یاقابلِ ممیز ذرات ہوتے تب وہ زمینی حال ψ_{111} میں سکونیت اختیار کرتے حقیقتاً الیکٹروں یکساں فرمیونز ہیں جن پر پالی اصول منات کا اطلاق ہوتا ہے لحاظہ کسی بھی حل کی مکین صرف دو الیکٹرون ہو سکتے ہیں۔ یہ k فضا میں ایک کرہ کا ایک ثمن رداس k_F تک بھرے گی جس کو اس حقیقت سے تعین کیا جا سکتا ہے کہ الیکٹران کی ہر ایک جوڑی کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہو گا (مساوات 40.5)۔



شکل ۵.۲: آزاد الیکٹران گیس۔ جال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک "ڈبا" کو سیاح دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبہ کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔



شکل ۵.۳: کروی پوست کا k فضا میں ایک مثمن۔

$$\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right) = \frac{Nq}{2}\left(\frac{\pi^3}{V}\right)$$

یوں

$$k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tag{۵.۳۴}$$

جہاں

$$\rho \equiv \frac{Nq}{V} \tag{۵.۳۵}$$

آزاد الیکٹران کثافت ہے (آزاد حجم میں الیکٹرانوں کی تعداد)۔

k فضا میں ممکن اور غیر ممکن حالات کی سرحد کو **فرمی سطح** کہتے ہیں (اسی کی بنا زیر نوشت میں F لکھا گیا)۔ اس سطح پر مطابقتی توانائی کو **فرمی توانائی** E_F کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$E_F = \frac{h^2}{2m}(3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}} \tag{۵.۳۶}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے. ایک خول جس کی موٹائی $\mathrm{d}k$ شکل ۵.۳ ہو کا حجم

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2)dk$$

لحاظہ اس خول میں الیکٹرون حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی

$$\frac{2[(\frac{1}{2})\pi k^2 \,\mathrm{d}k]}{\pi^3/V} = \frac{V}{\pi^2}k^2 \,\mathrm{d}k$$

ان میں سی ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ مساوات 5.39 لحاظہ خول کی توانائی

$$dE = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{V}{\pi^2}k^2dk \tag{۵.۳۷}$$

اور کل توانائی درج ذیل ہو گی

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m}\int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2(3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m}V^{\frac{-2}{3}} \tag{۵.۳۸}$$

کوانٹم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا سادہ گیس میں اندرونی حراری توانائی U کا ہوتا ہے۔ بل خصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں dV کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کمی رونما ہو گی

$$dE_{tot} = -\frac{2}{3}\frac{\hbar^2(3\pi^2Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m}V^{\frac{5}{3}}dV = -\frac{2}{3}E_{tot}\frac{dV}{V}$$

جو بیرون پر کوانٹم دباؤ P کا کیا ہوا کام $dW = PdV$ نظر آتا ہے

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_{tot}}{V} = \frac{2}{3}\frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar^2}{5m}\rho^{\frac{5}{3}} \tag{۵.۳۹}$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس شہ اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا۔ ایک اندرونی کوانٹم میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتی ہے جس کا الیکٹرون کے باہمی دفع جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں یا حراری حرکت جس کو ہم خارج کر چکے ہیں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے۔ بلکہ جو یکساں فرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات انحطاطی دباؤ کہتے ہیں اگرچہ منافی دباؤ بہتر اصطلاح ہو گی۔

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹرون کی اوسط توانائی $\frac{E_{tot}}{Nq}$ کو فرمی توانائی کے قصر کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\frac{3}{5}E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبا کی کثافت $8.96\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے جبکہ اس کا جوہری وزن $63.5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ہے۔

(الف) مساوات 5.43 استعمال کرتے ہوئے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی فرمی توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹرون وولٹ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) الیکٹران کی مطابقتی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ اشارہ: $E_F = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$ لیں۔ کیا تانبا میں الیکٹرون کو غیر اضافی تصور کرنا خطرے سے باہر ہو گا؟

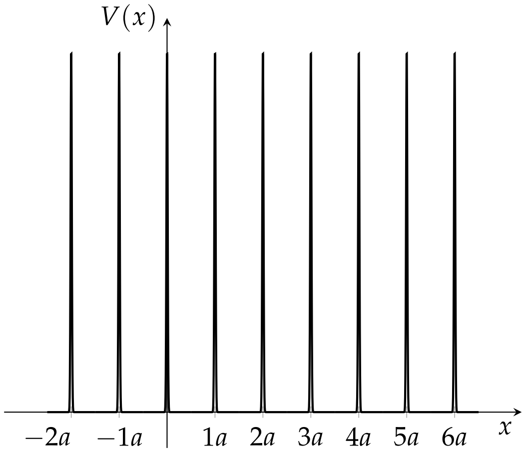
(ج) تانبہ کے لیئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حراری توانائی $k_B T$ جہاں k_B بولٹزمن مستقل اور T کیلون حرارت ہے فرمی توانائی کے برابر ہو گا؟ تبصرہ: اس کو فرمی حرارت کہتے ہیں۔ جب تک حقیقی حرارت فرمی حرارت سے کفی کم ہو مادہ کو ٹھنڈہ تصور کیا جا سکتا ہے اور اس میں الیکٹرون نچلے ترین قابلِ پہنچ حال میں ہوں گے۔ چونکہ تانبہ $1356\,\mathrm{K}$ پر گلتا ہے لحاظہ ٹھوس تانبہ ہر صورت ٹھنڈہ ہو گا۔

(د) الیکٹران گیس نمونہ میں تانبہ کے لیئے انحطاطی دباؤ مساوات 5.46 کا حساب لگائیں۔

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نصبتی اظافہ کے تناسب کو جسم مقیاس کہتے ہیں۔

$$B = -V\frac{dP}{dV}$$

دیکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $B = \frac{5}{3}P$ ہو گا اور سوال (د) 5.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانباہ کے لیئے جسیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربہ سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے



شکل ۵.۴: ڈیراک کنگھی۔ مساوات 57.5

مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں چونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ ایک حیرین کن نتیجہ ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم فاصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کا رویہ نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل و صورت مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جس سے یک بُعدی ڈیراک کنگھی کہتے ہیں اور جو ایک جتنے برابر فاصلوں پر نوکیلی ڈیلٹا تفاعلات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۴)۔ لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت سادہ بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ a کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

$$V(x+a) = V(x) \tag{۵.۴۰}$$

مسئلہ بلوخ کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{۵.۴۱}$$

کے حل سے مراد وہ تفاعل لیا جا سکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

$$\psi(x+a) = e^{iKa}\psi(x) \tag{۵.۴۲}$$

جہاں K ایک مستقل ہے۔ یہاں مستقل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو x کا تابع نہیں ہے اگرچہ یہ E کا تابع ہو سکتا ہے۔

ثبوت: مان لیں کے D ایک ہٹاؤ عامل ہے:

$$Df(x) = f(x+a) \tag{۵.۴۳}$$

دوری مخفیہ مساوات 5.47 کی صورت میں D ہیملٹنی کا مقلوبی ہو گا:

$$[D, H] = 0 \tag{۵.۴۴}$$

لحاظہ ہم H کے ایسے امتیازی تفاعلات چھنڈ سکتے ہیں جو بیک وقت D کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں: $D\psi = \lambda\psi$ یا

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \tag{۵.۴۵}$$

یہاں λ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اگر یہ صفر ہو تب چونکہ مساوات 5.52 تمام x کے لیئے مطمئن ہو گا لحاظہ ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو قابلِ قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ کسی بھی غیر مخلوط عدد کی طرح اس کو قوتِ نمائی روپ میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\lambda = e^{iKa} \tag{۵.۴۶}$$

جہاں K ایک مستقل ہو گا۔

اس مقام پر مساوات 5.53 امتیازی قدر λ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ K حقیقی ہے اور یوں اگرچہ $\psi(x)$ از خود غیر دوری ہے $|\psi(x)|^2$ جو درج ذیل ہے۔

$$\left|\psi(x+a)\right|^2 = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{۵.۴۷}$$

دوری ہو گا جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی حقیقی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لیئے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلابین سطح کے قلم میں کئی ایوگادرو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور الیکٹران پر سطحی اثر قابلِ نظر انداز ہو گا۔ ہم مسئلہ بلوخ پر پورا اترنے کی خاطر x کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تا کہ اس کی دم بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد اس کے سر پر پایا جاتا ہو باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط مسلط کرتے ہیں

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \tag{۵.۴۸}$$

یوں مساوات 5.49 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$e^{iNKa}\psi(x) = \psi(x)$$

لحاظہ $e^{iNKa} = 1$ یا $NKa = 2\pi n$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{۵.۴۹}$$

یہاں K لازماً حقیقی ہو گا مسئلہ بلوخ کی عفادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ مثلاً $(0 \leq x < a)$ کے وقفہ پر مسئلہ شروڈنگر حل کرنا ہو گا مساوات 5.49 کی بار بار اطلاق سے ہر جگہ کے حالات حاصل ہوں گے۔

اب فرض کریں کے مخفیہ در حقیقت نوکیلی ڈیلٹا تفاعلات ڈیراک کنگھی پر مشتمل ہو:

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \tag{۵.۵۰}$$

شکل 5.5 میں آپ تصور کریں گے کہ محور x کو یوں دائروی شکل میں گھومایا گیا ہے کہ Nویں نوکیلی تفاعل در حقیقت نقطہ $x = -a$ پر پایا جاتا ہے۔ اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے لیکن یاد رہے ہمیں دوریت سے دلچسپی ہے۔ کلاسیکی طور پر دہراتا ہوا مستطیلی مخفیہ استعمال کیا گیا جو اب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے خطہ $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہو گا لحاظہ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi,$$

ہو گا۔

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \tag{۵.۵۱}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), (0 < x < a). \tag{۵.۵۲}$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبدا کے بلکل بائیں ہاتھ پہلے خانہ میں تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = e^{-iKa}[A\sin k(x+a) + B\cos k(x+a)], (-a < x < 0). \tag{۵.۵۳}$$

نقطہ $x = 0$ پر ψ لازماً استماری ہو گا لحاظہ

$$B = e^{-iKa}[A\sin(ka) + B\cos(ka)]; \tag{۵.۵۴}$$

اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفاعل کی زور کے براہراست متناسب عدم استمرار پائے جائے گی مساوات 2.125 جس میں α کی علامت الٹ ہو گی چونکہ یہاں کنواں کی بجائے نوکیلی تفاعل پایا جاتا ہے

$$kA - e^{-iKa}k[A\cos(ka) - B\sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}B \tag{۵.۵۵}$$

مساوات 5.61 کو $A\sin(ka)$ کے لیئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$A\sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)]B \tag{۵.۵۶}$$

اس کو مساوات 5.62 میں پُر کرتے ہوئے اور k_B کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa}\cos(ka)] + e^{-iKa}\sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka)$$

حاصل ہو گا۔

جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے

$$\cos(ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka) \tag{۵.۵۷}$$

یہ ایک بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرونیگ پینی مخفیہ حاشیہ 18 دیکھیں کے لیئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہو گا لیکن جو خدوخال ہم دیکھنے جا رہے ہیں وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

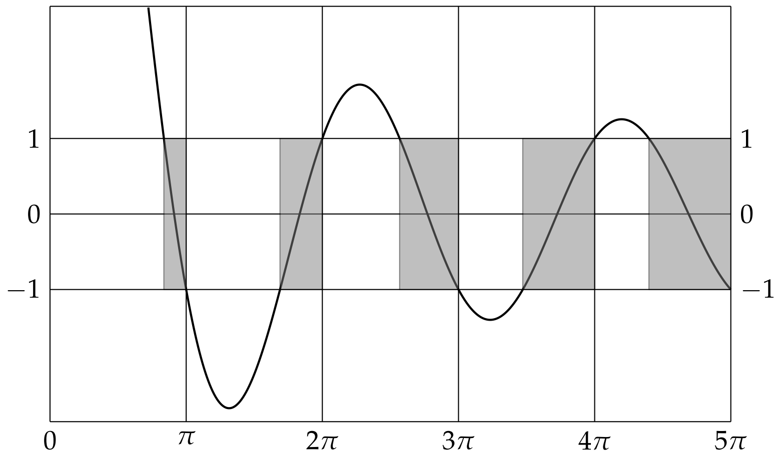
مساوات 5.64 k کی ممکنات قیمتیں لحاظہ اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہیں۔ علامتیت کو سادہ بنانے کی نقطہ نظر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$z \equiv ka, \text{and} \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \tag{۵.۵۸}$$

جس سے مساوات 5.64 کا دائیاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$f(z) \equiv \cos(z) + \beta\frac{\sin(z)}{z} \tag{۵.۵۹}$$

مستقل β بُعدی ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی زور کی ناپ ہے شکل ۵.۵ میں میں نے $\beta = 10$ کے لیئے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کے $f(z)$ ساتھ $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے اور چونکہ $|\cos(Ka)|$

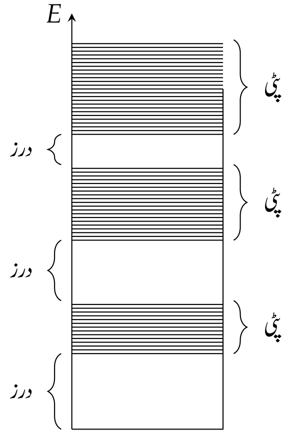


شکل ۵.۵: تفاعل $f(z)$ (مساوات 66.5) کو $\beta = 10$ کے لئے ترسیم کر کے اجازتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درز (جہاں $|f(z)| > 1$ ہو گا) پائے جاتے ہیں۔

کی قیمت کسی صورت ایک سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے لحاظہ ایسی خطوں میں مساوات 5.64 کا حل نہیں پایا جائے گا۔ یہ درز ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہے انکے بیچ اجازتی توانائیوں کی پٹیاں پائی جاتی ہیں مساوات 5.56 کے تحت $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہے لحاظہ n کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی اجازتی ہو گی۔ آپ تصور میں شکل ۵.۵ پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے فاصلوں پر $(n = 0)\ +1$ سے لے کر نیچے $(n = \frac{N}{2})\ -1$ تک اور واپس تقریباً $(n = N-1)\ +1$ تک جہاں بلوخ جزو ضربی e^{iKa} دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لحاظہ n کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حل حاصل نہیں ہو گا لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ان لکیروں میں ہر ایک کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع ایک اجازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں N حالات پائے جاتے ہیں جو ایک دوسرے کے اتنے قریب ہیں کہ کسی بھی نقطہ نظر سے انہیں ایک مسلسل خطہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل ۵.۶)۔

ہم نے ابھی تک اپنے رخ فیہ میں ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں Nq الیکٹران ہوں گے جہاں ہر ایک جوہر q تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصولِ منافت کے بنا صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل کریں گے اگر $q = 3$ ہو یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے وغیرہ وغیرہ. تین ابعاد میں اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے لیکن اجازتی پٹیاں جنکے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں تب بھی ہو گا۔ دوری مخفیہ کی نشانی بھی پٹی ہے۔

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو ممنوع خطہ سے گزرتے ہوئے اگلی پٹی تک چھلانگ کے لیئے ایک الیکٹران کو نصبتاً زیادہ توانائی درکار ہو گی ایسا مادہ برقی طور پر غیر موصل ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری



شکل ۵.۶: دوری مخفیہ کی اجزاتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

ہوئی نہیں ہے تب ایک الیکٹران کو بہت معمولی توانائی درکار ہو گی کہ وہ ہیجان ہو سکے اس طرح کا مادہ عموماً موصل ہو گا۔ ایک غیر موصل میں بڑے یا کم q کے چند جوہر کی ملاوٹ سے اگلی بلند پٹی میں چند اظافی الیکٹران رکھ دیئے جاتے ہیں پہلے سے مکمل پُر پٹی میں خول پیدا کیئے جاتے ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے اور ایسے اشیاء نیم موصل کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً بہت اچھا موصل ہونا چاہیئے تھا چونکہ انکے اجازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ فرق صرف نظریہ پٹی کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

(الف) مساوات 5.59 اور مساوات 5.63 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تفاعل مخفیہ میں ایک ذرے کی تفاعل موج درج ذیل روپ میں لکھی جا سکتی ہے

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa}\sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

معمولزنی مستقل C تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(ب) البتہ پٹی کے بالائی سر پر جہاں z π کا عدد صحیح مضرب ہو گا شکل 5.6 (الف) سے $\psi(x) = 0$ حاصل ہو گا ایسی صورت میں درست تفاعل موج تلاش کریں دیکھیئے گا کہ ہر ایک ڈیلٹا تفاعل پر ψ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی اجازتی پٹی کے نچلے نقطہ پر $\beta = 10$ کی صورت میں توانائی کی قیمت تین بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ $\frac{\alpha}{a} = 1\,\mathrm{eV}$ ہو گا۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیلٹا تفاعل سولن کے بجائے ڈیلٹا تفاعل کنواں پر غور کر رہے ہیں یعنی مساوات 5.57 میں α کی علامت تبدیل کریں۔ ایسی صورت میں شکل 5.6 اور 5.7 کی طرح کے شکال بنائیں۔ مثبت

توانائی حلوں کے لیئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے بس مساوات 5.66 میں موضوع تبدیلیاں لائیں لیکن منفی توانائی حلوں کے لیئے آپ کو کام کرنا ہوگا اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیئے گا جو اب $z-$ تک وسیع ہوگا۔ پہلی احبازتی پٹی میں اب کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دیکھائیں کہ مساوات 5.64 میں حاصل زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہے۔ کن صورتوں میں ایسا نہیں ہے؟ اشارہ: $(N = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ لیتے ہوئے دیکھیئے گا کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی کیا ممکنا قیمتیں ہوں گی؟

۵.۴ کوانٹم شماریاتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم احبازتی توانائی تنظیم کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کے بنا ہیجانی حالات ابھرنے شروع ہونگے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر T درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد N کے ذرات پائے جاتے ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی E_j ہوگی؟ دیہان رہے کہ اس احتمال کا کوانٹم عدم تعین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بلکل یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لیئے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہوگی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہوگا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھ سکیں چاہے یہ قابلِ تعین ہوں یا نہ ہوں۔

شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک جیسی کل توانائی E ہو ایک جتنا محتمل ہوگا۔ بلاواسطہ حراری حرکتوں کی بنا مستقل طور پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرا ذرہ ایک روپ حرکی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہوگی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقاء توانائی کی بنا کل مقررہ ہوگا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی لگاتار نئی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے قابل ہے درجہ حرارت T حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹم میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لحاظ سے کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہوگا کہ یہ ذرات قابلِ ممیز، یکساں بوزان یا یکساں فرمیون ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لحاظ میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کروں گا تا کہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چکور کنواں حصہ 2.2 میں کمیت m کے صرف تین باہم غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہو گی مساوات 2.27 دیکھیں

$$E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_A^2 + n_B^2 + n_C^2) \tag{۵.۶۰}$$

جہاں n_A، n_B اور n_C مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ $E = 363(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2})$ یعنی درج ذیل

$$n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363. \tag{۵.۶۱}$$

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیرہ ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہو گا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیرہ اور ایک پانچ جو تین مرتب اجتماعات میں ہو گا ایک عدد انیس اور دو ایک یہاں بھی تین مرتب اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک سات اور ایک پانچ چھ مرتب اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں n_A, n_B, n_C درج ذیل میں سے ایک ہو گا:

$$\begin{gathered}(11,11,11)\\(13,13,5),(13,5,13),(5,13,13)\\(1,1,19),(1,19,1),(19,1,1)\\(5,7,17),(5,17,7),(7,5,17),(7,17,5),(17,5,7),(17,7,5).\end{gathered}$$

اگر یہ ذرات قابلِ ممیز ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کوانٹم حال کو ظاہر کرے گا اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حراری توزن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کونسا ذرہ کس یک ذرہ حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال ψ_n کی تعداد مکین N_n۔ ہم اس دن ذرہ حال کے تمام تعدادِ مکین کے اجتماع کو تنظیم کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال ψ_{11} میں ہوں تب تنظیم درج ذیل ہو گا

$$(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,\dots) \tag{۵.۶۲}$$

یعنی $N_{11} = 3$ باقی تمام صفر اگر دو حال ψ_{13} میں اور ایک ψ_5 میں ہو تب تنظیم درج ذیل ہو گا

$$(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,\dots) \tag{۵.۶۳}$$

یعنی $N_5 = 1, N_{13} = 2$ باقی تمام صفر اگر دو ψ_1 میں ایک ψ_{19} میں تب تنظیم درج ذیل ہو گا

$$(2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,\dots) \tag{۵.۶۴}$$

یعنی $N_1 = 2, N_{19} = 1$ باقی تمام صفر اور اگر ایک ذرہ ψ_5 میں ایک ψ_7 میں اور ایک ψ_{17} میں تب تنظیم درج ذیل ہو گا

$$(0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,\dots) \tag{۵.۶۵}$$

یعنی $N_5 = N_7 = N_{17} = 1,$ باقی تمام صفر ان تمام میں آخری تنظیم زیادہ سے زیادہ محتمل ہو گی چونکہ اسکو چھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجازتی توانائی E_n حاصل کرنے کا احتمال P_n کیا ہو گا؟ توانائی E_1 صرف اس صورت حاصل ہو گا جب ذرہ تیسری تنظیم مساوات 5.71 میں ہو اس تنظیم میں نظام ہونے کا اتفاق تیرہ میں سے تین ہے اور اس تنظیم میں E_1 کے حصول کا احتمال $\frac{2}{3}$ لحاظ $\frac{2}{13}$ $= \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = P_1$۔ آپ E_5 کو تنظیم دو مساوات 5.70 تیرہ میں سے تین کا امکان جس کا احتمال $\frac{1}{3}$ یا تنظیم چار مساوات 5.72 تیرہ میں سے چھ امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ لحاظ $\frac{3}{13}$ $= \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = P_5$۔ آپ E_7 کو صرف چار سے حاصل کر سکتے ہیں لحاظ $\frac{2}{13}$ $= \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = P_7$۔ اسی طرح E_{11} صرف پہلی تنظیم سے مساوات 5.69 سے تیرہ میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہو گا لحاظ $\left(\frac{1}{13}\right) = P_{11}$ ہو گا۔ اسی طرح $P_{13} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$، $P_{17} = \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ اور $P_{19} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{13}$ ہو گا۔ انکی تصدیق درج ذیل سے ہو گی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1.$$

یہ قابلِ ممیز ذرات کے لیئے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات یکساں فرمیان ہوتے اپنی آسانی کے لیئے چکر کع نظر انداز کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پہلی تین تنظیم جو دو یا اس سے بھی برا تین ذرات کع ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں خارج امکان ہوں گے لحاظ چوتھی تنظیم میں صرف ایک حال ہو گا سوال 5.22 الف دیکھیں۔ یکساں فرمیونز کے لیئے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ ہو گا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات یکساں بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت ہر تنظیم میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22 ب دیکھیں۔ لحاظ $P_1 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$، $P_5 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$، $P_7 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$، $P_{11} = \left(\frac{1}{4}\right) \times (1) = \frac{1}{4}$، $P_{13} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$، $P_{17} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ اور $P_{19} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ہوتا۔ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دیکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح منحصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورتحال سے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہو گا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھا۔ چونکہ N کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو قابلِ ممیز ذرات کے لیئے اس مثال میں $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شماریاتی نقطہ نظر سے باقی

تمام امکانات کو رد کیا جا سکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم در حقیقت انکی زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم میں تقسیم ہے۔ اگر یہ $N = 3$ کے لیئے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم قابلِ ممیز ذرات کے لیئے $N = 3$ کی صور میں اخذ کرتے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عمومیت دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال ψ_5 میں ایک حال ψ_7 میں ایک اور حال ψ_{17} میں ایک یکساں تین فرمیون کا مکمل خلاف تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

(ب) تین یکساں بوزان کے لیئے مکمل تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (ا) تینوں حال ψ_{11} میں ہوں، (ب) اگر دو ψ_1 اور ایک ψ_{19} میں ہو، (ج) اگر ایک حال ψ_5 ایک حال ψ_7 اور ایک حال ψ_{17} میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں یک بُعدی حارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعمل ذرات ہیں جو حراری توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی $E = \left(\frac{9}{2}\right)\hbar\omega$ ہے۔

(الف) اگر یہ تمام ایک جیسی کمیت کے قابلِ ممیز ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تنظیمات ہوں گے اور ہر ایک کے لیئے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تنظیم کیا ہو گی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پیمائش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہو گا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیا ہو گی؟

(ب) یہی کچھ یکساں فرمیونز کے لیئے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج) یہی کچھ یکساں بوزان کے لیئے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیں اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرا توانائیاں E_1 E_2 E_3 ... انحطاط d_1 d_2 d_3 ... ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد d_n جن کی توانائیاں E_n ہیں فرض کریں ہم کمیت m کے N ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تنظیم N_1 N_2 N_3 ... میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں N_1 ذرات کی توانائی E_1 N_2 ذرات کی توانائی E_2 وغیرہ وغیرہ ہے سوال ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جا سکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ اس مخصوص تنظیم کی مطابقتی کتنے منفرد حالات ہونگے اس کا جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \ldots)$ اس بات پر منحصر ہو گا کہ آیا ذرات قابل ممیز یکساں فرمیان یا یکساں بوزان ہے لہذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات قابل ممیز ہیں دستیاب N ذرات میں سے کتنے طریقوں سے N_1 کو منتخب کرکے پہلا ٹوکرا میں رکھا جا سکتا ہے جواب: ثنائی عددی سر N_1 کو N میں سے منتخب کرتا

ہے

$$\binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \tag{۵.۶۶}$$

پہلا ذرہ N مختلف طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے جس کے بعد $(N-1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N-1$ مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-N_1+1) = \frac{N!}{(N-N_1)!}$$

لیکن یہ N_1 ذرات کے $N_1!$ مختلف مراتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہٰذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی ٹوکرہ میں ان N_1 ذرات کو کتنی مختلف طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے چونکہ پہلے ٹوکرا میں d_1 حالات ہیں لہٰذا ہر ایک ذرہ کو d_1 مختلف طریقوں سے چنا جا سکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہونگے اس طرح ایک ٹوکرہ جس میں d_1 منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی N میں سے N_1 ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہونگے

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}$$

دوسرے ٹوکرے میں صرف $(N-N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1,N_2,N_3,\dots) \tag{۵.۶۷}$$

$$= \frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}\frac{(N-N_1-N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!}\dots \tag{۵.۶۸}$$

$$= N!\frac{d_1^{N_1}d_2^{N_2}d_3^{N_3}\dots}{N_1!N_2!N_3!\dots} = N!\prod_{n=1}^{infty}\frac{d_n^{N_n}}{N_n!} \tag{۵.۶۹}$$

یہاں رک کر اس نتیجہ کی تصدیق کیجئے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں یکساں فرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہٰذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کے کونسا ذرا کس حال میں ہے ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص ایک ذرہ حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک N ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہٰذا N ویں ٹوکرا میں

N_n بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!} \tag{۵.۷۰}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلا حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر یکساں بوزان کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذرہ حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذرہ حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں N وی ٹوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم یکساں N_n ذرات کو d_n مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر مرتب اجتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر $d_n = 5$ اور $N_n = 7$ کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذرہ تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرا نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد N_n اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہیں جو ان نقطوں کو d_n گروہوں میں خانہ بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جا سکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک دوسرے جیسے ہیں اور ان کو $N_n!$ مختلف مرتب اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف مرتب اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں N وی ٹوکرا میں d_n یک ذرہ حالات کو N_n ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقے ہونگے

$$\frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n} \tag{۵.۷۱}$$

جس کی بنا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} \tag{۵.۷۲}$$

اس کی تصدیق کیجئے گا مثلا حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 75.574.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجئے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو الکراجی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتب اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ d ٹوکریوں میں N یکساں گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے

زیر نوشت میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام N کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صریحاً $N = 1$، $N = 2$، $N = 3$، اور $N = 4$ کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم

ہراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک دوسرے جتنا ہو گا یوں زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم $N_1, N_2, N_3, \ldots$ وہ ہو گا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تنظیم ہو گی جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N \tag{۵.۷۳}$$

اور

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E \tag{۵.۷۴}$$

پر پورا اترے اور جس کی $Q(N_1, N_2, N_3, \ldots)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$، $f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$ وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرانج مضرب کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$G(x_1, x_2, x_3, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + cdots \tag{۵.۷۵}$$

متعارف کر کے اس کے تمام تفرقات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0 \tag{۵.۷۶}$$

موجودہ صورت میں Q کی بجائے Q کی لوگارتھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگارتھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہٰذا Q کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جائے گی لہٰذا ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$G \equiv \ln(Q) + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۷۷}$$

جہاں α اور β لگرانج مضرب ہیں α اور β کے لحاظ سے تفرقات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں N_n کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے

اگر زراعت قابل ممیز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دیگا لہذا برج ذیل ہو گا

(۵.۷۸)
$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty}[N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big]$$

ہم مطابقتی تعداد مکین N_n کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین

$$\ln(z!) \approx z\ln(z) - z \qquad z \ll 1 \tag{۵.۷۹}$$

بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

(۵.۸۰)
$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty}[N_n \ln(d_n)] - N_n\ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n] + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۸۱}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لیے حل کرتے ہوئے ہم قابل ممیز ذرات کی زیادہ سے زیادہ متحمل تعداد مکین حاصل کرتے ہیں

$$N_n = d_n e^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۸۲}$$

اگر ذرات یکساں فرمیان ہوں تب Q کی قیمت مساوات 75.5 دیگی لہذا درج ذیل ہو گا

(۵.۸۳)
$$G = \sum_{n=1}^{\infty}\{\ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big]$$

یہاں ہم N_n کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $d_n \gg N_n$ بھی فرض کرتے ہیں لہذا اسٹرلنگ تخمین دونوں اجزاء کے لیے قابل استعمال ہو گی ایسی صورت میں

(۵.۸۴)
$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\ln(d_n!) - N_n\ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n)\ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n\Big] + \alpha N +$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۸۵}$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے N_n کے لیے حل کر کے ہم یکساں فرمیان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمتیں N_n حاصل کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n}{e}^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۸۶}$$

آخر میں اگر ذرات یکساں بوسن ہوں تب Q کی قیمت مساوات 77.5 دیگی اور درج ذیل ہو گا

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۸۷}$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $1 \ll N_n$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین استعمال کرتے ہوئے

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{(N_n + d_n - 1)\ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha \tag{۵.۸۸}$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۸۹}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لئے حل کرتے ہوئے ہم یکساں بوزان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha+\beta E_n)} - 1} \tag{۵.۹۰}$$

فرمیون کی صورت میں استعمال کرتا تخمین کو استعمال کرتے ہوئے شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا سوال ۵.۲۶: ترخیم $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر زیادہ سے زیادہ رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں لیگرانج مضروب کی ترکیب سے تلاش کریں اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا

سوال ۵.۲۷:

ا. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فیصد خلل کتنا ہو گا

ب. خلل کو ایک فیصد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح z کی کم سے کم قیمت کیا ہو گی

۵.۴.۴ α اور β کے طبعی اہمیت

لگرانج مضروب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے منسلک بالترتیب مقدار معلوم α اور β پائے گئی ریاضیاتی طور پر تعداد مکین مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو واپس مسلط شرائط مساوات 78.5 اور 79.5 میں پر کرتے ہوئے تعین کیا جاتا ہے البتہ کسی مغلیہ کے لیے مجموعہ کے حصول میں ہمیں اجازتی توانیاں (E_n) اور ان کی انحطاط (d_n) کا معلوم ہونا ضروری ہے میں سہ آبادی لامتناہی چکور کنواں میں ایک جتنی کمیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعامل ذرات کی کامل گیس کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں اس سے ہم پر α اور α کی طبعی مفہوم ایاں ہوں گی حصہ 1.3.5 میں ہم نے اجازتی توانیاں اخذ کی مساوات 39.5

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \tag{۵.۹۱}$$

جہاں درج ذیل تھا

$$\boldsymbol{k} = \Big(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z}\Big)$$

پہلے کی طرح یہاں بھی ہم مجموعہ کو تکمل میں بدلتے ہیں جہاں $\boldsymbol{k}$ ایک استمراری متغیر ہے اور جہاں $\boldsymbol{k}$ فضا کے π^3/V حجم میں ایک حال یا چکر s کی صورت میں $2s+1$ حالات پائے جاتے ہیں ثمن اول میں کروی خولوں کو اپنے ٹوکریاں تصور کرتے ہوئے شکل 4.5 انحطاط یعنی ہر ٹوکری میں حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی

$$d_k = \frac{1}{8}\frac{4\pi k^2\,\mathrm{d}k}{8(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k \tag{۵.۹۲}$$

قابل ممیز ذرات مساوات 87.5 کیلئے پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^2\,\mathrm{d}k = Ve^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\Big(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}\Big)^{3/2} \tag{۵.۹۳}$$

دوسری مسلط شرط مساوات 79.5 درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^4\,\mathrm{d}k = \frac{3V}{2\beta}e^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

جس میں مساوات 98.5 سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E = \frac{3N}{2\beta} \tag{۵.۹۴}$$

اگر آپ مساوات 97.5 میں جزو چکر $1 \quad + \quad 2s$ شامل کریں تو وہ اسی نقطہ پر ہدف ہو جاتا ہے لہٰذا مساوات 99.5 تمام چکر کے لیے درست ہو گا مساوات 99.5 ہمیں درجہ حرارت T پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ کا یاد دلاتی ہے

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}k_B T \tag{۵.۹۵}$$

جہاں k_B بولٹزمن مستقل ہے یہ ہمیں β اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \tag{۵.۹۶}$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین آبادی لامتناہی چکور کنواں میں موجود ممیز زراعت کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہو گا کہ مختلف اشیاء کے لئے جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں β کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی یہ دلیل کئی کتابوں میں دیا گیا ہے جس کو میں یہاں پیش نہیں کرتا میں مساوات 101.5 کو T کی تعریف مان لیتا ہوں روایتی طور پر α جو مساوات 98.5 کی مخصوص صورت سے ظاہر ہے کہ T کا تفاعل ہے کی جگہ کیمیاوی مخفیہ

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \tag{۵.۹۷}$$

استعمال کر کے مساوات 87.5, 91.5, اور 95.5 کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی ϵ کے کسی ایک مخصوص یک ذرا حال میں ذرات کی بلند تر محتمل عدد دے کسی ایک توانائی کے حامل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حامل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے خاطر صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہو گا

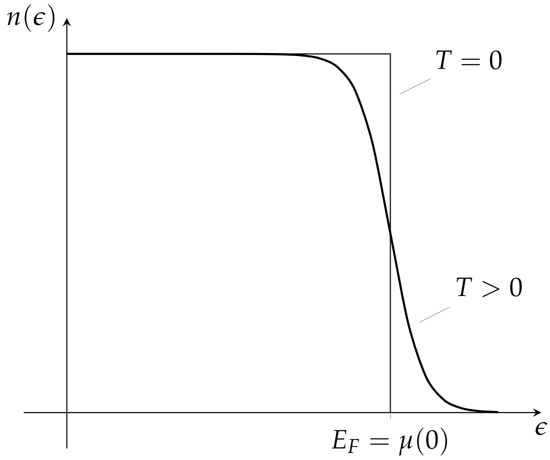
$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسول وبولٹزمن تقسیم} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}+1} & \text{فرمی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}-1} & \text{بوس و آئنسٹائن} \end{cases} \tag{۵.۹۸}$$

قابل ممیز ذرات پر میکسول و بولٹزمن تقسیم، یکساں فرمیان پر فرمی وڈیراک تقسیم اور یکساں بوزان پر بوس و آئنسٹائن تقسیم کا اطلاق ہو گا فرمی ڈیراک تقسیم $T0$ پر خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتا ہے

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \to \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$n(\epsilon) \to \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \tag{۵.۹۹}$$



شکل ۵.۷: فرمی وڈیراک تقسیم برائے $T = 0$ اور صفر سے کچھ زیادہ T کے لئے۔

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہونگے ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی مخفیہ عین فرمی توانائی ہو گی

$$\mu(0) = E_F \tag{۵.۱۰۰}$$

درجہ حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فرمی ڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے شکل ۵.۷ ہم قابل ممیز ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت T پر کل توانائی مساوات 99.5 درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \tag{۵.۱۰۱}$$

جبکہ مساوات 98.5 کے تحت کیمیاوی مخفیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\mu(T) = k_B T \left[\ln\left(\frac{N}{V}\right) + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right) \right] \tag{۵.۱۰۲}$$

میں مساوات 87.5 کی بجائے مساوات 91.5 اور 95.5 استقبال کرتے ہوئے یکساں فرمیان اور یکساں بوزان کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{(\hbar^2 k^2/2m)-\mu}/k_B T \pm 1} \, \mathrm{d}k \tag{۵.۱۰۳}$$

جہاں مثبت علامت فرمیان کو اور منفی علامت بوزان کو ظاہر کرتی ہے دوسری مسلط پابندی مساوات 79.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \frac{k^4}{e^{(\hbar^2k^2/2m)-\mu}/k_BT \pm 1}\,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۰۴}$$

ان میں سے پہلا $\mu(T)$ اور دوسرا $E(T)$ تعین کرتا ہے مثلاً موخر الذکر سے ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E/\partial T$ حاصل کرتے ہیں بدقسمتی سے ان ایک تکملات کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے چھوڑتا ہوں تاکہ آپ ان پر مزید غور کر سکیں سوال 28.5 اور 29.5 دیکھیں

سوال ۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر یکساں فرمیان کے لیے مساوات 108.5 اور 109.5 کے تکملات کی قیمتیں حاصل کریں اپنے نتائج کا موازنہ مساوات 43.5 اور 45.5 کے ساتھ کریں دھیان رہے کہ مساوات 108.5 اور 109.5 میں الیکٹرانوں کے لیے اضافی جزو ضربی دو (2) پایا جاتا ہے جو چکر انحطاط کو ظاہر کرتی ہے

سوال ۵.۲۹:

ا. بوزان کے لیے دکھائیں کے کیمیاوی مخفیہ ہر صورت میں کم سے کم اجازتی توانائی سے کم ہوگا اشارہ: $n(\epsilon)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے

ب. بالخصوص تمام T کے لیے کامل بوس گیس کے لیے $\mu(T) < 0$ ہوگا ایسی صورت میں N اور V کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کے T کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات 108.5 پر نظر ڈالیں

ج. حرارت T کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحران پیدا ہوتا ہے جسے بوز انجماعت کہتے ہیں جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے تکمل کی قیمت $\mu = 0$ کے لیے حاصل کرتے ہوئے اس فاصل حرارت کسی کا کلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا اس فاصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہذا غیر مسلسل مجموعہ مساوات 78.5 کی جگہ استمراری تکمل مساوات 108.5 کا استعمال بے معنی ہو جائے گا اشارہ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}X = \Gamma(s)\zeta(s) \tag{۵.۱۰۵}$$

جہاں Γ کو یولر کا γ تفاعل اور ζ کو رہمن زیٹا تفاعل کہتے ہیں ان کی موضوع اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں

د. ہیلیم کے لیے حرارت فاصل تلاش کریں اس درج حرارت پر اس کی کثافت $0.15\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہوگی تبصرہ ہیلیم کی تجرباتی حاصل حرارت فاصل کی قیمت $2.17K$ ہے

۵.۴.۵ سیاجسمی طیف

فوٹان برقناطیسی میدان کے کوانٹا ایک چکر کے یکساں بوزان ہوتے ہیں تاہم ان کی خاصیت یہ ہے کہ یہ بے قیمت ذرات ہیں جس کی بنا یہ قدرتی طور پر اضافیتی ہیں ہم درج ذیل چار دعوے جو غیر اضافی کوانٹم میکانیات

کا حصہ نہیں ہے کو قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں (1) فوٹان کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = hv = \hbar\omega$ دیتی ہے (2) عدد موج کے اور تعداد کا تعلق $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ہے جہاں c روشنی کی رفتار ہے (3) چکر کے صرف دو حالات ہو سکتے ہیں کوانٹم عدد m کی قیمت $+1$ یا منفی 1 ہو سکتی ہے تاہم یہ صفر نہیں ہو سکتی ہے (4) فوٹانوں کی تعداد بکائی مقدار نہیں ہے درجہ حرارت بڑھانے سے فی حجم فوٹانوں کی تعداد بڑھتی ہے جزو 4 کی موجودگی میں پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 کا اطلاق یہاں نہیں ہوگا ہم مساوات 82.5 اور اس کی سادگی بانی آنے والی مساواتوں میں $\alpha \rightarrow 0$ پر کر کے جزو 4 کا اطلاق کر سکتے ہیں یوں فوٹان کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد مقین مساوات 95.5 درج ذیل ہوگا

$$N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} \tag{۵.۱۰۶}$$

ایک ڈبہ جس کا حجم V ہو میں آزاد فوٹانوں کے لیے d_k کی قیمت مساوات 97.5 کو چکر جزو 3 کی بنا دو سے ضرب دے کے حاصل ہوگا جس کو k جزو 2 کی بجائے ω کی صورت میں لکھتے ہیں

$$d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^3 \,\mathrm{d}\omega \tag{۵.۱۰۷}$$

یوں تعددی ساتھ $\mathrm{d}\omega$ میں قضافت توانائی $N_\omega \hbar\omega/V$ کی قیمت $\rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ہوگی جہاں $\rho\omega$ درج ذیل ہیں

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_BT} - 1)} \tag{۵.۱۰۸}$$

یہ سیاہ جسم طیف کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو مقناطیسی میدان کی حرارت T پر توازن صورت میں فی اکائی حجم فی اکائی تعدد توانائی دیتی ہے اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل ۵.۸ میں ترسیم کیا گیا ہے

سوال ۵.۳۰:

ا. مساوات 113.5 استعمال کرتے ہوئے طول موج ساتھ $d\lambda$ میں قضافت توانائی تعین کریں اشارہ: $\rho(\omega)d\omega = \bar{\rho}(\pi)d\lambda$ لے کر $\bar{\rho}(\pi)$ کے لیے حل کریں

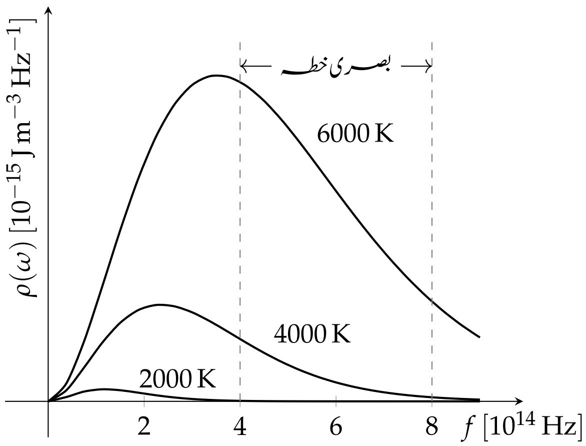
ب. وائن قانون ہٹاؤ اخذ کریں جو وہ طول موج دیتا ہے جس پر سیاہ جسم کی کثافت توانائی کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی

$$\lambda_{\text{بلند تر}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} m\boldsymbol{K}}{T} \tag{۵.۱۰۹}$$

اشارہ: آپ کو کیلکولیٹر یا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ماورائے مساوات $5e^{-x} = (5 - x)$ حل کر کے اعدادی جواب تین بامعنی آنسو تک حاصل کرنا ہوگا

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسم اخراج میں کل کثافت توانائی کا سٹیفن بلزمن کلیہ اخذ کریں

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}\right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-3}) T^4 \tag{۵.۱۱۰}$$



شکل ۵.۸: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات 113.5

اشارہ مساوات 110.5 کو استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں یاد رہے کہ $z(4) = \pi^4/90$ ہو گا

سوال ۵.۳۲: فرض کریں یک بودی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ مساوات 43.2 میں دو غیر متعمل زرات پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت m ہے فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلی ہیجان حال میں پایا جاتا ہے درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں (الف) زرات قابل ممیز ہے (ب) یہ یکساں بوزان ہے (ج) یہ یکساں فرمایان ہے چکر کو نظر انداز کریں اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر حال میں تصور کریں

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہوں اور تین منفرد یک زرہ حالات $\psi_a(x)$ ، $\psi_b(x)$ ، اور $\psi_c(x)$ دستیاب ہوں ایک دونوں سے مختلف کتنے تین ذرہ حالات درج ذیل صورت میں تیار کیے جا سکتے ہیں (الف) اگر زرات قابل ممیز ہو (ب) اگر یہ یکساں بوزان ہو (ج) اگر یہ یکساں فرمایان ہوں ضروری نہیں کہ زراعت مختلف حالات میں ہوں قابل ممیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے

سوال ۵.۳۴: دو آبادی لامتناہی چوکور کنواں میں غیر متعامل الیکٹرانوں کی فرمی توانائی کا حساب کریں فی اکائی رقبہ الیکٹرانوں کی تعداد σ لے

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے جنہیں صفوۃ بونا کہتے ہیں کو تجاذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباؤ روکتی ہے مساوات 46.5 مستقل کثافت فرض کرتے ہوئے ایسے جسم کا رداس R درج ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے

ا. کل الیکٹران توانائی مساوات 45.5 کو رداس مرکزہ پروٹان جمع نیوٹران N فی مرکزہ الیکٹران کی تعداد q اور الیکٹران کی کمیت m کی صورت میں لکھیں

ب. ایک یکساں کیس کرا کی تجاذبی توانائی تلاش کریں اپنے جواب کو علمگیر تجاذبی مستقل G ، R ، N ، اور مرکزہ کی کمیت M کی صورت میں لکھیں آپ دیکھیں گے کہ تجاذبی توانائی منفی ہو گی

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر جزو (الف) اور جزو (ب) کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2N^{1/3}}$$

دھیان رہے کہ کمیت بڑھنے سے رداس گھٹ رہا ہے ماسوائے N کے تمام مستقلات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں حقیقت میں جوہری عدد بڑھتے ہوئے q کی قیمت معمولی سی کم ہوتی ہے لیکن ہمارے لئے یہی کافی ہے جواب: $R = 7.6 \times 10^25N^{-1/3}$

د. ہماری سورج کے برابر کمیت کے سفید بونا کا رداس کلومیٹروں میں حاصل کریں

ھ. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ جزو (د) میں سفید بونا کی فرمی توانائی کو الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے موازنہ کریں آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے سوال 36.5 دیکھیے گا

سوال ۵.۳۶: ہم کلاسیکی حرکی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0^2$ پر کرتے ہوئے حصہ 1.3.5 کی آزاد الیکٹران گیس نظریہ کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ ہو گا بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہو گا

ا. مساوات 44.5 میں $\hbar^2k^2/2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فقرہ $\hbar ck$ پر کر کے E_{tot} کل حاصل کریں

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کے لئے سوال 35.5 کے جزو (الف) اور (ب) کو دوبارہ حل کریں آپ دیکھیں گے کے R کی قیمت سے قطع نظر کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائے جائے گی اگر کل توانائی مثبت ہو تب انحطاطی قوتیں تجاذبی قوتوں سے تجاوز کرے گی جس کی بنا ستارہ پھولے گا اس کے برعکس اگر کل منفی ہو تب تجاوزی قوتیں جیتی ہیں جس کی بنا ستارہ منہدم ہو گا مرکزیہ کی وہ فاصل تعداد ہندسی معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تجاذبی انہدام واقعہ ہو اس کو چندر شیکھر حد کہتے ہیں جواب: 2.4×10^{57} مطابقتی ستارہ کی کمیت کیا ہو گی اپنے جواب کو سورج کی کمیت کے مظرب کے صورت میں لکھیں اس سے بھاری ستاریں سفید بونا نہیں بناتے بلکہ مزید منہدم ہو کر اگر حالات درست ہو نیوٹران ستارہ کو جنم دیتے ہیں

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر مخالف β تحلیل $e^- + p^+ \rightarrow n + v$ تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے جس کی بنا نیوٹرینو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں آخر کار نیوٹران انحطاطی دباؤ انہدام کو روکتا ہے جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران انحطاطی قوتوں نے کیا سوال 35.5 دیکھیں ہماری سورج کے برابر کمیت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں ساتھ ہی نیوٹران فرمی توانائی کا حساب کر کے ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جا سکتا ہے

سوال ۵.۳۷:

ا. تیں آبادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ سوال 38.4 قابل ممیز زراعت کا کیمیاوی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں یہاں مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جا سکتی ہیں یاد رہے کہ لامتناہی چکور کنواں کی مثال میں تکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا تھا ہندسی تسلسل

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{۵.۱۱۱}$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

حاصل ہوگا اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں جواب

$$E=\frac{3}{2}N\hbar\omega\Big(\frac{1+e^{-\hbar\omega/k_BT}}{1-e^{-\hbar\omega/k_BT}}\Big) \tag{۵.۱۱۲}$$

ب. تہدیدی حد $k_BT \ll \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں

ج. مسئلہ مساوی خانہ بندی کی روشنی میں کلاسیکی حد $k_BT \gg \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں تین آبادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے درجات آزادی کتنے ہوں گے

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً یک بعدی لامتناہی چکور کنواں) کے لئے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات:

$$H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0 \tag{۶.۱}$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

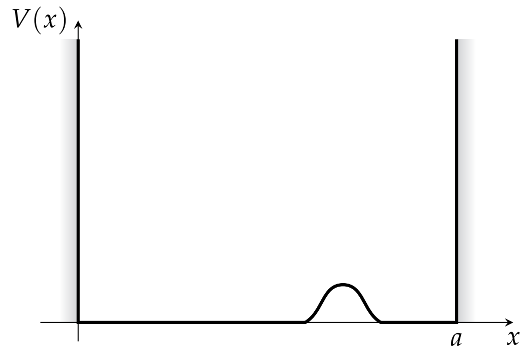
$$\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = \delta_{nm} \tag{۶.۲}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنواں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑ ڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے:

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۶.۳}$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کے ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ **نظریہ اضطراب** کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$H = H^0 + \lambda H' \tag{۶.۴}$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چکور کنواں میں معمولی اضطراب

جہاں H' اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی اور H اصل ہیملٹنی ہوگا اس کے بعد ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots \tag{۶.۵}$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots \tag{۶.۶}$$

یہاں n ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اول رتبی تصحیح** کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اول رتبی تصحیح** کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبی تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$(H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$
$$= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$

یا λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$H^0\psi_n^0 + \lambda(H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0) + \lambda^2(H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1) + \cdots$$
$$= E_n^0\psi_n^0 + \lambda(E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0) + \lambda^2(E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0) + \cdots$$

کمتر رتبہ λ^0 کی صورت میں اس سے $H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہوگا

$$H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0 \tag{۶.۷}$$

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1 = E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0 \tag{۶.۸}$$

وغیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہٰذا اس کی قیمت ایک، 1 ،کر دیں)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر تکمل لیتے ہیں

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

تاہم H^0 ہرمشی ہے لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle$$

ہو گا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ کی بنا درج ذیل ہو گا

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \tag{۶.۹}$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہو گی

مثال ۶.۱: لامتناہی چکور کنواں کی غیر مضطرب تفاعلات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنواں کی تہہ کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل ۶.۲ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں $H' = V_0$ ہو گا لہٰذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہو گی

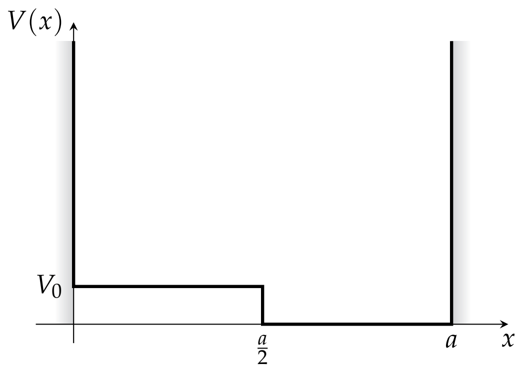
$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|V_0|\psi_n^0\rangle = V_0\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گی جی ہاں تمام کی تمام V_0 مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی[1] اس کے برعکس کنواں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل ۶.۳ ہو گا۔

---

[1] یہاں کوئی بھی چیز لامتناہی چکور کنواں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہٰذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہو گا

شکل ۶.۲: پورے کنواں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنواں میں مستقل اضطراب

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مساوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم

مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \tag{۶.۱۰}$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے لہٰذا یہ ψ_n^1 میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہٰذا کسی بھی تفاعل کی طرح ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۱}$$

اگر psi_n^1 / مساوات 10.6 کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha\psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہٰذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب شروڈنگر مساوات مساوات 1.6 کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\psi_m^0 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\langle\psi_l^0|\psi_m^0\rangle = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle + E_n^1\langle\psi_l^0|\psi_n^0\rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہو گا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر $l \neq n$ ہو تو درج ذیل ہو گا

$$(E_l^0 - E_n^0)c_l^{(n)} = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۲}$$

لہٰذا ادرج ذیل حاصل ہو گا

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{(E_n^0 - E_m^0)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۳}$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انحطاطی ہو نسب نما کوئی ی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہوتا) ہاں اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں

ایک دوسرے جتنی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نما میں صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں انحطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبی تصحیح E_n^1 مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح ψ_n^1 مساوات 13.6 دیتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چکور کنواں کے وسط میں δ تفاعلی موڑا ڈالتے ہیں

$$H' = \alpha\delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں α ایک مستقل ہے

ا. اجازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت n کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہونگی

ب. زمینی حال کی تصحیح ψ_1^1 کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاو میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس لچک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے $k \to (1+\epsilon)k$

ا. (الف) نہیں توانائیوں کی بالکل ٹھیک قیمتیں حاصل کرے آپ نے کل یہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں

ب. اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں یہاں H' کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو(الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی ناضرورت اور نہ اجازت ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چکور کنواں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور a کنواں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

ا. پہلی قدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں

ب. اول رتبی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمین اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم ψ_n^0 اور دور تبی مساوات مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^2\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کی ہرمشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^2\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle$$

لہٰذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا ساتھ ہی $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ ہو گا لہٰذا ہمارے پاس E_n^2 کا درج ذیل کلیہ رہ جاتا ہے

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle - E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle \tag{۶.۱۴}$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = 0$$

ہو گا جس کی بنا

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle = \sum m \neq n\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\right|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۵}$$

ہو گا جو دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل موج کی دوم رتبی تصحیح ψ_n^2 توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہو گا۔ سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2) سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح E_n^2 سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دو رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شروڈنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ منفرد حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 کی توانائیاں ایک دوسرے جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ $c_a^{(b)}$ مساوات 12.6 اور E_a^2 مساوات 15.6 بے قابو بڑھتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو $\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = 0$ اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انحطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول

رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہو گا۔

۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

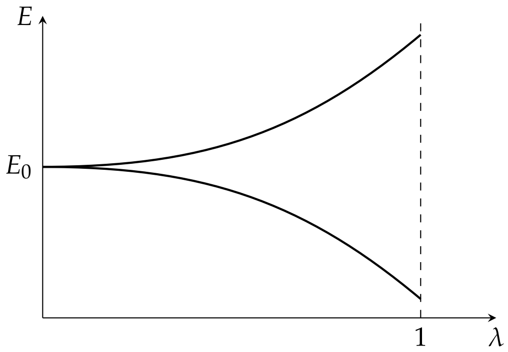
$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \tag{۶.۱۶}$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \tag{۶.۱۷}$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہو گا

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0 \tag{۶.۱۸}$$



شکل ۶.۴: انحطاط کا خاتمہ بذریعہ اضطراب۔

عام طور پر اضطراب (H') انحطاط کو "توڑے" (یا "منسوخ" کرے) گا جیسے جیسے ہم λ کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گا (شکل ۶.۴) مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند یعنی صفر کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں ہو گا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہٰذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات 9.6 کا حساب نہیں کر سکتے ہیں

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات 17.6 میں لکھتے ہیں جہاں α اور β قابل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi \tag{۶.۱۹}$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \cdots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda\psi^1 + \lambda^2\psi^2 + \cdots \tag{۶.۲۰}$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات 19.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح λ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \cdots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \cdots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ مساوات 18.6 کی بنا اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0 \tag{۶.۲۱}$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle\psi_a^0|H^0\psi^1\rangle + \langle\psi_a^0|H'\psi^0\rangle = E^0\langle\psi_a^0|\psi^1\rangle + E^1\langle\psi_a^0|\psi^0\rangle$$

چونکہ H^0 ہرمشی ہے لہٰذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha\langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle + \beta\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \tag{۶.۲۲}$$

حاصل ہو گا جہاں درج ذیل ہو گا

$$W_{ij} \equiv \langle\psi_i^0|H'|\psi_j^0\rangle, \quad (i,j = a,b) \tag{۶.۲۳}$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \tag{۶.۲۴}$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام W معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان قالب ہیں مساوات 24.6 کو W_{ab} سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے βW_{ab} کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\alpha[W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \tag{۶.۲۵}$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں E^1 کی مساوات دیگی

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \tag{۶.۲۶}$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ جانتے ہوئے $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_\pm^1 = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\right] \tag{۶.۲۷}$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو جذر دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہو گا ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہو گا لہٰذا مساوات 22.6 کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات 24.6 کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہو گا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہو گا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle\psi_b^0|H'|\psi_b^0\rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے موزوں خطی جوڑ تھے کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جان

پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہرمشی عامل ہے جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے اگر H^0 کے انحطاطی امتیازی تفاعلات ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں

$$A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0 \quad \text{اور} \quad \mu \neq \nu$$

تب $W_{ab} = 0$ ہوگا لہٰذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں قابل استعمال موزوں حالات ہوں گے

ثبوت: ہم فرض کر چکے ہیں کہ $[A, H'] = 0$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned}
\langle\psi_a^0|[A, H']\psi_b^0\rangle &= 0 \\
&= \langle\psi_a^0|AH'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'A\psi_b^0\rangle \\
&= \langle A\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'\nu\psi_b^0\rangle \\
&= (\mu - \nu)\langle\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle = (\mu - \nu)W_{ab}
\end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہٰذا $W_{ab} = 0$ ہوگا

سبق اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو ایسا ہرمشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو اپنے غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عامل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہوگا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm}\psi_a^0 + \beta_{\pm}\psi_b^0$$

جہاں $\alpha_{\pm}$ اور $\beta_{\pm}$ کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

ا. $\psi_{\pm}^0$ عمودی ہے $(\langle\psi_+^0|\psi_-^0\rangle = 0)$

ب. $\langle\psi_+^0|H'|\psi_-^0\rangle = 0$

ج. $\langle_{\pm}^0|H'|\psi_{\pm}^0\rangle = E_{\pm}^1$ جہاں E^1 کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے اپنے آپ پر بند یک بعدی خطہ جس کی لمبائی L ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

ا. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x/L}, \qquad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $n = 0$ کے علاوہ تمام حالات دہرا انحطاطی ہے

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہو یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں معمولی جھکاوٹ پیدا کر تا گویا تار کو یہاں مروڑا گیا ہوں مساوات 27.6 استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمل کی حدوں کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm\infty$ رکھیں

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہو گی

د. ایسا ہر مشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جزو-ج میں استعمال کیے

۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط

گزشتہ حصہ میں انحطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے مساوات 22.6 اور 24.6 کو ہم دوبارہ قالبی روپ میں لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{۶.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ E^1 W قالب کے امتیازی اقدار ہیں مساوات 26.6 اس قالب کی امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم n پڑتا انحطاط کی صورت میں $n \times n$ قالب

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \tag{۶.۲۹}$$

کے امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو قالب W کو وتری بناتا ہو یہاں بھی ایک ایسا عامل A تلاش کر کے جو H' کا مقلوبی ہو A اور H' کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر کے ہم قالب W حاصل کریں گے جو از خود وتری ہو گا لہٰذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دو پڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مثال ۶.۲: تین آبادی لامتناہی کعبی کنواں سوال 2.4 پر غور کریں

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۰}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$\psi^0_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin(\frac{n_x \pi}{a} x) \sin(\frac{n_y \pi}{a} y) \sin(\frac{n_z \pi}{a} z) \tag{۶.۳۱}$$

جہاں n_x ، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E^0_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{۶.۳۲}$$

دھیان رہے کہ زمینی حال ψ_{111} غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$E^0_1 \equiv 3\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \tag{۶.۳۳}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تہرا انحطاطی ہیں

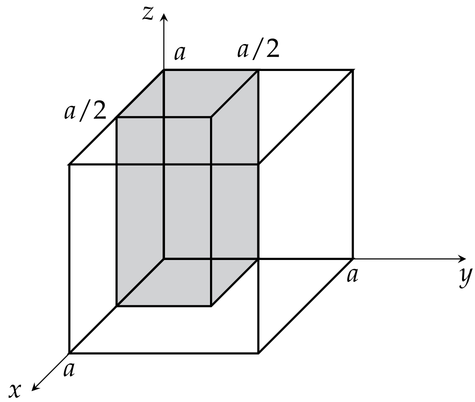
$$\psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211} \tag{۶.۳۴}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$E^0_1 \equiv 3\frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \tag{۶.۳۵}$$

ایک دوسری جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۶}$$



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

جو ڈبہ کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned} \tag{۶.۳۷}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہو گی پہلے قدم میں ہم قالب W تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلیل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned} W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

تاہم z تکمل صفر ہو گا جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض درج ذیل ہو گا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہو گا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \tag{۶.۳۸}$$

قالب $\mathbf{W}$ بلکہ $4\mathbf{W}/V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ا.۵ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہو گی جس کے امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1+\kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1-\kappa \approx 0.2795$$

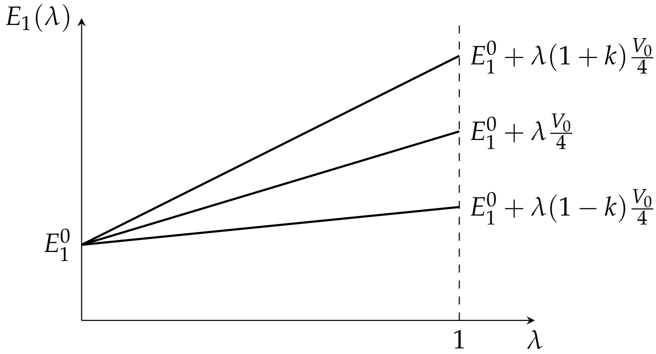
یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہو گا

$$E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases} \tag{۶.۳۹}$$

جہاں E_1^0 مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی E_1^0 تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی $V_0/4$ ہوتی جو در حقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہونگے

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c \tag{۶.۴۰}$$



شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

جہاں عددی سر (α ، β اور γ) قالب $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1$ ، $\beta = \gamma = 0$ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0$ ، $\beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں لی ہیں۔ یوں موزوں حالات درج ذیل ہونگے

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{۶.۴۱}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنواں مساوات 30.6 میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تفاعلی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4)\delta(y - a/2)\delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنواں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انحطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں

فرض کریں قالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے اور ϵ کوئی چھوٹا عدد $(\epsilon \ll 1)$ ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی $(\epsilon = 0)$ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. قالب $\mathbf{H}$ کے بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا جزو-ا کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح قالب W کے امتیازی اقدار ہوں گے میں نے دعویٰ کیا کہ یہ $n = 2$ صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چل کر درج ذیل سے آغاز کرکے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات 22.6 کے مماثل کا مفہوم قالب $\mathbf{W}$ کی امتیازی قدر مساوات لیا جا سکتا ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۶.۴۲}$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولمب مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرکے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے

جو در حقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر و مدار ربط، کی بنا پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت α^2 گنا کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \tag{۶.۴۳}$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی α گنا چھوٹا لیمب انتقال ہے جو بھر کی میدان کی کوانٹازنی سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی mc^2 کی صورت میں لکھیں

ب. ϵ_0 ، e ، $\hbar$ اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ خالص بے بعدی بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی مستقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نوبیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہو گا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{۶.۴۴}$$

جس میں باضابطہ متبادل $\boldsymbol{p} \to (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہو گا

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{۶.۴۵}$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \tag{۶.۴۶}$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال غرض بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جا سکتا ہے ہمیں

سمتی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (۶.۴۷)$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہو گا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1-(v/c)^2]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

ہو گا جس کی بنا درج ذیل ہو گا

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \qquad (۶.۴۸)$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} T &= mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1\right] = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{mc}\right)^4 \cdots - 1\right] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots . \end{aligned} \qquad (۶.۴۹)$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2} \qquad (۶.۵۰)$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہو گی مساوات 9.6

$$E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\psi | p^2\psi \rangle \qquad (۶.۵۱)$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شروڈنگر مساوات کہتی ہے

$$p^2\psi = 2m(E-V)\psi \qquad (۶.۵۲)$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle (E-V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2}[E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle] \qquad (۶.۵۳)$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle\Big] \tag{۶.۵۴}$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال ψ_{nlm} مساوات 89.4 میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle = \frac{1}{n^2a} \tag{۶.۵۵}$$

جہاں a رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا اتنا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3a^2} \tag{۶.۵۶}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\frac{1}{n^2a} + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{(l+1/2)n^3a^2}\Big]$$

یا مساوات 72.4 استعمال کرتے ہوئے a کو خارج کر کے باقی کو E_n مساوات 70.4 کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big[\frac{4n}{l+1/2} - 3\Big] \tag{۶.۵۷}$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2\times10^{-5}$ گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات 51.6 یہاں اضطراب کروی تشاکلی ہے لہٰذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہو گا مزید کسی E_n کے n^2 حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی اقدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں n، l اور m موزوں کوانٹم اعداد ہیں لہٰذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست تھا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل سوال 40.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات 55.6 ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال 43.4 میں حال ψ_{321} کے لیے r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ غیر اہم صفر $s = -1$ مساوات 55.6 $s = -2$ مساوات 56.6 اور $s = -3$ مساوات 64.6 کے لیے کریں $s = -7$ کی صورت میں کیا ہو گا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: یک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال 5.2 میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہرمشی ہے لیکن p^4 ہرمشی نہیں ہے ان حالات کے لئے ψ متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

مساوات 13.4 تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle f|p^2 g\rangle = -4\pi\hbar^2\left(r^2 f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - r^2 g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^\infty + \langle p^2 f|g\rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}}e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں اور دکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا

$$\langle\psi_{n00}|p^4\psi_{m00}\rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4}\frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4\psi_{n00}|\psi_{m00}\rangle$$

۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

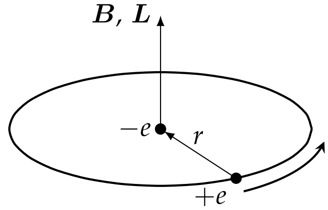
مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوکٹ میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر μ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیملٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{۶.۵۸}$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر $\boldsymbol{\mu}$ درکار ہوگا

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو بایوٹ وسیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$



شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے جہاں e پروٹان کے بار کو اور T دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوکٹ میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ ہو گا مزید $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{L}$ دونوں کا رخ ایک دوسرے جیسا ہو گا شکل ۶.۷ میں اوپر جانب لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\boldsymbol{L} \tag{۶.۵۹}$$

جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے

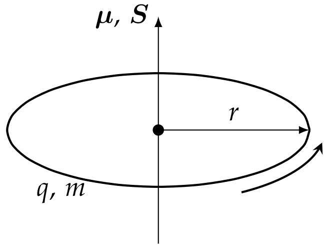
الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب مسکن مقناطیسی مثبت ہو گا جس کا سامنا ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار q جس کی لمبائی رداس r کے چھلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلا کی کمیت m ہو جمودی معیار اثر mr^2 ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہو گا

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$

اس تنظیم کے لیے ظاہر ہے کہ مسکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہو گا دھیان رہے کہ یہ r اور T کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل وصورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر $\boldsymbol{\mu}$ اور $\boldsymbol{S}$ کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کمیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تا کہ بار اور کمیت کا نسبت



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

یکساں ہو ہر چھلے کا اور لہٰذا پوری جسم کا مسکن مقناطیسی نسبت ایک دوسرے جیسا ہو گا مزید $\boldsymbol{\mu}$ اور $\boldsymbol{S}$ کے رخ ایک دوسرے جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہونگے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right)\boldsymbol{S}$$

یہ خالصتاً کلاسیکی حساب ہے درحقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S} \tag{۶.۶۰}$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے
ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$$

اس حساب میں ایک فریب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہٰذا یہ اسراع پذیر ہو گا اس حساب میں مجرد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے قبول کیا جا سکتا ہے جو حساب میں جزو ضربی $1/2$ شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L} \tag{۶.۶۱}$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ مسکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت جزو ضربی جو اتفاقاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبعی طور پر یہ الیکٹران کے لحاتی ساکن چھوکٹ میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت مروڑ کی بدولت ہے۔

اب کوانٹم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں L اور S کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہٰذا چکر اور دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ H'_{so} مقلوب ہو گا L^2، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{۶.۶۲}$$

لہٰذا یہ مقداریں بقائی ی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ L^2، S^2، J^2، اور J_z کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) = L^2 + S^2 + 2\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$$

کی بنا

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \tag{۶.۶۳}$$

ہو گا لہٰذا $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6(ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$\langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \tag{۶.۶۴}$$

لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{so} = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2c^2} \frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہیں

$$E^1_{so} = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)} \right\} \tag{۶.۶۵}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چکر و دائری بط ایک جتنا رتبہ (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کرکے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہو تا ہے

$$E^1_{fs} = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left(3 - \frac{4n}{j+1/2} \right) \tag{۶.۶۶}$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ جوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}\Big[1+\frac{\alpha^2}{n^2}\Big(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{2}\Big)\Big] \tag{۶.۶۷}$$

مہین ساخت l میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک n کیلئے l کی مختلف اجازتی قیمتیں ایک دوسرے جیسی توانائی کے حامل نہیں ہونگی تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری وچکر زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی اقدار m_l اور m_s اب موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کوانٹم اعداد n ، l ، s ، j ، اور m_j ہونگے

سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},\boldsymbol{L}]$، (ب) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}]$، (ج) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},\boldsymbol{J}]$، (د) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},L^2]$، (ہ) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},S^2]$، (و) $[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S},J^2]$؛ اشارہ: $\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{S}$ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ ہے مثبت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو قریب قریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہو گی اور ان کے بیچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے eV میں E^1_{fs} تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں فوٹان کی صورت میں توانائی کا اخراج $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت ΔE کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں فوٹان تعدد میں تبدیل کرکے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بیچ فاصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $j = (???)$ سے $j = (???)$، (2) $j = (???)$ سے $j = (???)$، ... ہونگے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بیچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بیچ فاصلہ ??? Hz ہے ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافیت استعمال کیے بغیر ڈیراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2\Big\{\Big[1+\Big(\frac{\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}}\Big)^2\Big]^{-1/2}-1\Big\}$$

یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $\alpha \ll 1$ ہے اس کو α^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

۶.۴ زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_{ext}$ میں رکھنے سے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زیمان اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_1 + \mu_2) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۶۸}$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S} \tag{۶.۶۹}$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1 = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{L} \tag{۶.۷۰}$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$H'z = \frac{e}{2m}(\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۷۱}$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر $B_{int} \gg B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور H' کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے جبکہ $B_{int} \ll B_{ext}$ کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت از خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زیمان میدان کتنا ہوگا

۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر $B_{int} \gg B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہوگی اور موزوں کوانٹم اعداد n، l، j، اور m_j ہونگے تاہم چکر و مدار ربط کی موجودگی میں $\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے لہٰذا m_l اور m_s موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے رتبہ اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زیمان تصحیح درج ذیل ہوگی

$$H_Z^1 = \langle nljm_j|H'_Z|nljm_j\rangle = \frac{e}{2m}\boldsymbol{B}_ext \cdot \langle \boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}\rangle \tag{۶.۷۲}$$

اب $\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{S}$ ہوگا بدقسمتی سے ہمیں $\boldsymbol{S}$ کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقہ سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)۔ اس مقررہ سمتیہ کے گرد $\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{S}$ تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص $\boldsymbol{J}$ پر $\boldsymbol{S}$ کی قائمہ تظلیل $\boldsymbol{S}$ کی وقتی اوسط قیمت ہوگا

$$\boldsymbol{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})}{j^2}\boldsymbol{J} \tag{۶.۷۳}$$

لیکن $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}$ ہے لہٰذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{S}$ ہوگا لہٰذا

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \tag{۶.۷۴}$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle \boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}\rangle = \Big\langle\Big(1 + \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}}{J^2}\Big)\boldsymbol{J}\Big\rangle = \Big[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\Big]\langle\boldsymbol{J}\rangle \tag{۶.۷۵}$$

چکور کوسائن میں بند رکن کو لنڈے g جزو ضرب کہتے ہیں جس کو g_j سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور z کو $\boldsymbol{B}_{ext}$ کے ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہوگا

$$E_Z^1 = \mu_B g_J B_{ext} m_j \tag{۶.۷۶}$$

جہاں

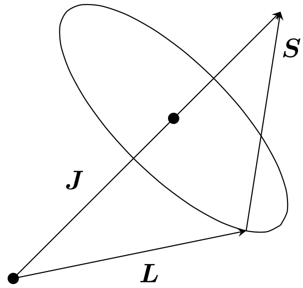
$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5}\,\text{eV/T} \tag{۶.۷۷}$$

بوہر مقناطیسہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زیمان کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال $n = 1$، $l = 0$، $j = 1/2$ لہٰذا $g_j = 2$ دو سطحوں میں بٹ جائے گا

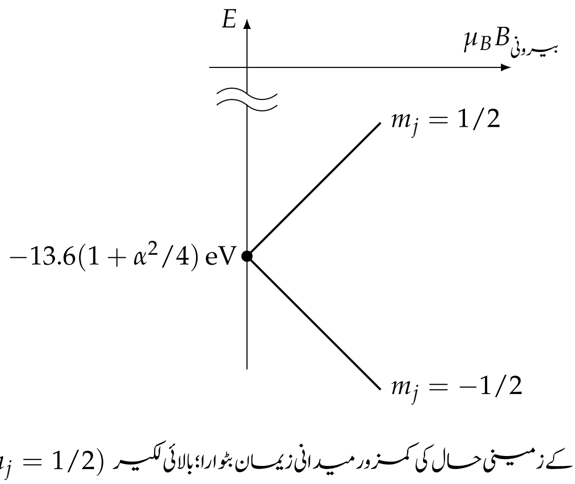
$$-13.6\,\text{eV}(1 + \alpha^2/4) \pm \mu_B B_{ext} \tag{۶.۷۸}$$

جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہوگی ان توانائیوں کو B_{ext} کے تفاعل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں کمزور میدان زیمان بٹنے کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں B_{ext} بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔



شکل ۶.۹: چکر و مدار ارتباط کی عدم موجودگی میں $\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{J}$ کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔



شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی کمزور میدانی زیمان بٹوارا؛ بالائی لکیر $(m_j = 1/2)$ کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر $(m_j = -1/2)$ کی ڈھلوان -1 ہے۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر

اگر $B_{ext} \gg B_{int}$ ہو تب زیمان اثر غالب ہو گا میدان B_{ext} کو z محور پر رکھ کر موزوں کوانٹم اعداد n، l، m_l، اور m_s ہونگے جبکہ j اور m_j نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت مروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہو گا جبکہ L_z اور S_z ہونگے زیمان ہیملٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{ext}(L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہو گی

$$E_{nmlms} = -\frac{13.6\,\text{electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext}(m_l + 2m_s) \tag{۶.۷۹}$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہو گا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہو گی

$$E^1_{fs} = \langle nlm_lm_s|(H'_r + H'_so)|\rangle nlm_lm_s\rangle \tag{۶.۸۰}$$

اضافیتی قصہ وہی ہو گا جو پہلے تھا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہو گا

$$\langle \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{L} \rangle = \langle S_x \rangle \langle L_x \rangle + \langle S_y \rangle \langle L_y \rangle + \langle S_z \rangle \langle L_y \rangle = \hbar^2 m_l m_s \tag{۶.۸۱}$$

دھیان رہے کہ S_z اور L_z کہ امتیازی تفاعلات کے لیے $0 = \langle Ly \rangle = \langle L_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle S_x \rangle$ ہو گا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{fs} = \frac{13.6\,\text{eV}}{n^3}\alpha^2 \Big\{ \frac{3}{4n} - \Big[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} \Big] \Big\} \tag{۶.۸۲}$$

چکور کو سائن کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہو گا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زیمان حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_jm_s\rangle$ پر غور کریں طاقتور میدان زیمان بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو بوہر توانائی l^2 کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B_{ext}$ کے براہ راست متناسب زیمان حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہو گی اور ان کے انحطاط کیا ہونگے

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو تب $j = s$، $m_j = m_s$ ہو گا لہذا کمزور اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک دوسرے جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے E^1_Z اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر $l = 0$ کیلئے زیمان اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کے درمیانی چکور کو سائن رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نا H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہوگا لہٰذا ہمیں دونوں کو ایک نظر سے دیکھ کر بوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہوگا

$$H' = H'_Z + H'_{fs} \tag{۶.۸۳}$$

$n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف l ، j ، اور m_j بیان کرتی ہے کو انحطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیبش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہوگا

$$l = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

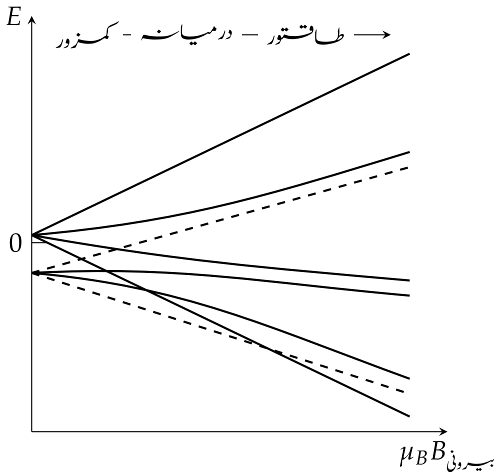
$$l = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفر قابلی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے وتر پر پائے جاتے ہیں H'_Z کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں اور $-\boldsymbol{W}$ کا مکمل قالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہوگا

$$\begin{array}{cccc}
5\gamma-\beta 0 & 00 & 00 & 00 \\
05\gamma+\beta & 00 & 00 & 00 \\
00 & \gamma-2\beta 0 & 00 & 00 \\
00 & 0\gamma+2\beta & 00 & 00 \\
00 & 00 & \gamma-\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma-\frac{1}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & 00 & \gamma+\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\
00 & 00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma+\frac{1}{3}\beta
\end{array}$$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6\,\text{eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B \boldsymbol{B}_{ext}$$



شکل ۶.۱۱: کمزور، درمیانہ اور طاقتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیمان بٹوارا۔

ابتدائی چار امتیازی اقدار پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں اب صرف دو 2×2 ڈبوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \tag{۶.۸۴}$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی لیکن اس میں β کی علامت الٹ ہو گی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۶.۱۱ میں B_{ext} کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد $\beta = 0$ میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طاقتور میدان $\gamma \ll \beta$ کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہونگے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیشگوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طاقتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۶.۲۵: قابلی ارکان H'_Z اور H'_{fs} دریافت کر کے $n = 2$ کے لئے متن میں دیا گیا قالب W تشکیل دیں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طاقتور اور درمیانی میدان خطوں کے لیے زیمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تفاعل کے طور پر ترسیم

کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیانے میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتیں دیتی ہے

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان از خود ایک مقناطیسی جفت کتب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا اس کا جفت کتب معیار اثر الیکٹران کے جفت کتب معیار اثر سے بہت کم ہو گا مساوات 60.6

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p}\boldsymbol{S}_p, \quad \boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{S}_e \tag{۶.۸۵}$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہٰذا اس کا ممکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی ممکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہو گا جس کی بنا صریحی g جذب ضربی g_p لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت کتب μ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\hat{r})\hat{r} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۶}$$

یوں پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا مساوات 58.6

$$H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\frac{[3(\boldsymbol{S}_p\cdot\hat{r})(\boldsymbol{S}_e\cdot\hat{r}) - \boldsymbol{S}_p\cdot\boldsymbol{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\boldsymbol{S}_p\cdot\boldsymbol{S}_e\delta^3((\boldsymbol{r})) \tag{۶.۸۷}$$

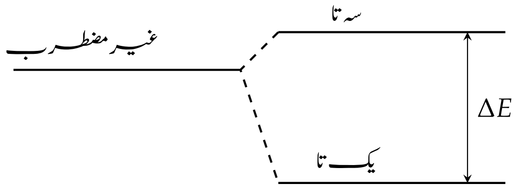
نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف مساوات 9.6 اس طرح بھی ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت ہو گی

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\langle\frac{3(\boldsymbol{S}_p\cdot\hat{r})(\boldsymbol{S}_e\cdot\hat{r} - \boldsymbol{S}_p\cdot\boldsymbol{S}_e)}{r^3}\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\langle\boldsymbol{S}_p\cdot\boldsymbol{S}_e\rangle|\psi(0)|^2 \tag{۶.۸۸}$$

زمینی حال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو تفاعل موج کروی تشاکلی ہو گا لہٰذا اول توقعاتی قیمت صفر ہو گی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہو گا لہٰذا زمینی حال میں درج ذیل ہو گا

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3}\langle\boldsymbol{S}_p\cdot\boldsymbol{S}_e\rangle \tag{۶.۸۹}$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کو چکر چکر ربط کہتے ہیں جیسا چکر مدار ربط میں $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$ پایا جاتا ہے چکر چکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چکر زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات



شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بٹوارا۔

کل چکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_p \tag{۶.۹۰}$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\boldsymbol{S}_p \cdot \boldsymbol{S}_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2) \tag{۶.۹۱}$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چکر ایک بٹا دو ہے لہٰذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہو گا سہ تا حال تمام چکر متوازی میں کل چکر ایک ہو گا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہو گا یک تا حال میں کل چکر صفر لہٰذا $S^2 = 0$ ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$E_{hf}^1 = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4}\begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases} \tag{۶.۹۲}$$

چکر چکر ربط زمینی بیجال کے چکر انحطاط کو توڑ کر سہ تا تنظیم کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6}\,\text{eV} \tag{۶.۹۳}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج فوٹان کا تعدد درج ذیل ہو گا

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420\,\text{MHz} \tag{۶.۹۴}$$

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21\,\text{cm}$ ہو گی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے یہ کائنات میں اخراج کی صورت میں وہ مشہور 21 سینٹی میٹر تحفی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے سوال ۶.۲۷: فرض کریں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{۶.۹۵}$$

تکمل ہمیشہ کی طرح $\pi > \theta > 0$ ، $2\phi > \phi > 0$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\left\langle \frac{3(\boldsymbol{S}_p \cdot \hat{r})(\boldsymbol{S}_e \cdot \hat{r}) - \boldsymbol{S}_p \cdot \boldsymbol{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ: $\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلیہ میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں الیکٹران کی بجائے میون ہو گا جس کا بار اور g جزو ضرب الیکٹرون کے بار اور g جزو ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیٹران ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور g جزو ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیئم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تخفیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا یہ گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب $4.85 \times 10^{-4}\ \text{eV}$ تجرباتی حاصل قیمت $8.41 \times 10^{-4}\ \text{eV}$ سے بہت مختلف ہے اس فرق کی وجہ نابودی جفت $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیئم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی متناہی جسامت کی بنا ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازا قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس b کا یکساں بار دار کروی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہو گی یہ درحقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم b/a کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں a رداس بوہر ہے صرف ابتدائی جزو رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

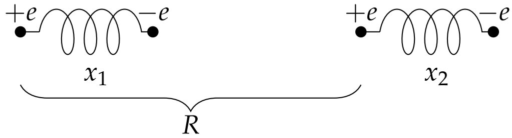
آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتیں تعین کرنی ہے آخر میں $b \approx 10e - 15\text{meter}$ جو تقریباً پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سمتی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مرتعش سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 yz$$

جہاں λ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں

۱. زمینی حال



شکل ۶.۱۳: دو قابل تقطیب قریبی جوہر (سوال 31.6)۔

ب. سہتا انحطاطی پہلی حجبان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندر والز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ کابل تقطیب ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت m اور بار $-e$ ہو ایک مرکزہ بار $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس لچک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{۶.۹۶}$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہو گا

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2}\right) \tag{۶.۹۷}$$

ا. مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \tag{۶.۹۸}$$

ب. دکھائیں کے کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دو ہارمونی مرتعش ہیملٹن یوں

$$H = \left[\frac{1}{2m}p_+^2 + \frac{1}{2}\left(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)x_+^2 big\right] + \left[\frac{1}{2m}p_-^2 + \frac{1}{2}\left(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)x_-^2 big\right] \tag{۶.۹۹}$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$X\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2), \quad \text{جس میں}\; p\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \tag{۶.۱۰۰}$$

علیحدہ ہو گا

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں RL}\omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \tag{۶.۱۰۱}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہو تا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{R^6} \tag{۶.۱۰۲}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بیچ کششی مخفیہ پایا جاتا ہے جو ان کے بیچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بیچ وندر وال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دور تبی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہو گی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا مرتعش تفاعل موج ہے جہاں m کمیت اور مقیاس لچک k ہو گا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دور تبی تخفیف ΔV ہو گی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال32.6:

فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم λ کا تفاعل ہو. $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور امتیازی تفعالات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \right| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \left| \psi_n \right\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انحطاطی امتیازی تفعالات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جز والف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 19.6 استمال کریں۔)

(جز وب): درج ذیل یقبودی ہارمونی مدار اس کا اطلاق کریں۔

ایک)

$$\lambda = \omega$$

لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہو گا۔

دو)

$$\lambda = \hbar$$

لیں جو $\langle T \rangle$ دے گا اور

تین)

$$\lambda = m$$

جو $\langle T \rangle$ اور $\langle V \rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگویوں کے ساتھ موعازنا کریں۔

سوال33.6:

مسلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ھائے ڈروجن کے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تین کی جا سکتی ہیں رداسی تفعلات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r}$$

اور امتیازی اقدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max}+l+1)^2}$$

(جزو الف):
مسلہ Feynman-Hellmann میں $\lambda = e$ استعمال کرتے ہوے $\langle 1/r\rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔
(جزو ب):
$\lambda = l$ کو استعمال کرتے ہوے $\langle 1/r^2\rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔
سوال 34.6:
رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s\rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle n + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0$$

ضابط کریں جو ھائے ڈروجن کے حال ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1$, اور $s-2)$ کا۔ تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رداسی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\right]u.$$

$\int(ur^su'')dr$ کو $\langle r^s\rangle$، $\langle r^{s-1}\rangle$، $\langle r^{s-2}\rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhisis کے ذریعے دوہرا تفرق کو بیٹھائیں۔ دیکھائیں کے

$$\int(ur^su') = -(s/2) < r^{s-1} >$$

اور

$$\int(u'r^su')dr = -[2/(s+1)]\int(u''r^{s+1}u')dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)
سول 35.6
(جزو الف):
رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s = 0, s = 1, s = 2$ اور $s = 3$ ڈال کے $\langle r^2\rangle, \langle r\rangle, \langle r^{-1}\rangle$ اور $\langle r^3\rangle$ کے قلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قلیہ دریافت کر سکتے ہیں۔

(جزوب):
دوسرے رخ آپکو مثلاً درپیش ہوگا آپ $s = -1$ پر کر کے دیکھیں کے آپکو صرف $\langle r^{-2}\rangle$ اور $\langle r^{-3}\rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔
جزوج:
اگر آپ کسی طریقہ سے $\langle r^{-2}\rangle$ دریافت کرپایں تب آپ رشتہ 'Kramers استعمال کر کے باکی تمام منفی قوعتوں کے لئے قلیات دریافت کر سکتے ہیں۔
مساوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوے $\langle r^{-3}\rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مساوات 64.6 کے ساتھ کریں۔
سوال 36.6:
ایک جوہر کو یقسا بیرونی برقی میدان E_{ext} میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی مماسل ہے اس سوال میں ہم ھائےڈروجن کے $n = 1$ اور $n = 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہٰذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

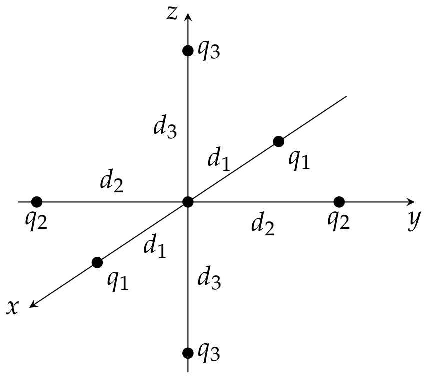
$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r\cos\theta$$

اسکو bohr hamiltonian مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا اسے نظر انداز کرتے ہوے عمدہ ساخت کو رعد کریں۔
(جزوالف):
اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔
(جزوب):
پہلا ھیجان حال 4 پرتہ ψ_{200}، ψ_{211}، ψ_{210}، ψ_{21-1}، انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوے، توانائی کی رتبہِ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟
(جزوج):
درج بالہ جزوب میں موضوع تفعالات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جوعفت قطب میعارِ اثر $(p_e = -er)$ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابع نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کے پہلی ھیجان حال میں ھائےڈروجن برقی جوعفت قطب میعارِ اثر کا حامل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکملات پاے جاتے ہیں تاہم تقریبن تمام کی قیمت سِفر ہے لہٰذا حساب سے قبل غور کریں اگر ϕ تکمل سفر ہو تب r اور θ تکملات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی جزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)
سوال 37.6: ھائےڈروجن کی $n = 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتدائی طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوے اب انحطاطی حالات ψ_{3lm} ہونگے اور اب ہم z رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔
(جزوالف):
اضطرابی hamiltonian کو ظاہر کرنے والا 9×9 کا کالم تیار کریں
جزوی جواب

$$\langle 300|z|310\rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320\rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31\pm 1|z|32\pm 1\rangle = -(9/2)a.$$



شکل ۶.۱۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (قلمی حال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

(جزو ب):
امتیازی اقدار اور انکی انحطاط دریافت کریں.
سوال 38.6: ڈوٹرئم کی زمینی حال میں نہایت موحین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طولِ موج میں تلاش کریں۔ ڈوٹرئم درحقیقت بھاری ہائے ڈروجن ہے جسکے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ جڑ کر ڈوٹرئم بناتے ہیں جسکا چکر ایک مقناطیسی دارِ اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹرئم کا g-جزو 71.1 ہے۔
سوال 39.6:
ایک کالم میں قریبی باردارا کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۴) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای جاتی ہیں۔ (چونکے اس۔ سوال کے ساتھ چکر کا کوئی۔ واستہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)
(جزو الف):
درج ذیل

$$r << d_1, r << d_2, and r << d_3,$$

کی صورت میں دیکھاے

$$H' = V_o + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_o = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جزوب):
زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔
(جزوج):
پہلی۔ھیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں سے چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بٹے گا۔
ایک) کابی تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی۔ صورت میں۔
دو) چوں زاویہ تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔
تین) آرتھوھامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔
سوال 40.6:
بازاوقات ψ_n^1 کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلہ واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔
(الف)
ایک) ھائے ڈروجن کی زمینی حال میں سٹارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان E_{ext} کی۔ موجودگی میں ھائے ڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال stark36.6 اثر دیکھیں۔)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n}cos\theta;$$

استعمال کرکے دیکھیں اپ نے مستقلات $A, B,$ اور C کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔
دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔ جواب:

$$-m(3a^2eE_{ext}/2\hbar)^2.$$

(جزوب)
اگر پروٹان کا برقی جست قطب میعارِ اثر p ہوتا تب ھائے ڈروجن کے الیکٹرانکی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{epcos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
دو) دیکھائیں کہ رتبہ تک جوہر کا قل برقی جو عفت قطب معارِ اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہو گا۔
تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہو گا؟

باب ۷

تغیری اصول

۷.۱ نظریہ

فرض کریں آپ ایک نظام جس کو ہیملٹنی H بیان کرتا ہو، کی زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حاصل کرنے سے قاصر ہوتے ہیں۔ اصول تغیریت آپ کو E_{gs} کی بالائی حد دیتا ہے۔ بعض اوقات آپ کو صرف اسی سے غرض ہوتا ہے اور عموماً ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے قریب قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ آئیں اس کا استعمال دیکھیے۔ کوئی بھی معمول شدہ تفاعل ψ لیں۔ میں درج ذیل دعوہ کرتا ہوں:

$$E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle$$

یعنی کسی بھی شائد غیر درست حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت زمینی حال توانائی سے زیادہ ہو گی۔ یقیناً اگر ψ اتفاقاً ایک ہیجان حال ہو تب H کی قیمت E_{gs} سے تجاوز کرے گی۔ اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل ψ کے لیے بھی ایسا ہو گا۔

ثبوت:

چونکہ H کے نامعلوم امتیازی تفاعلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں۔ لحاظہ ہم ψ کو ان کا خطی جوڑ لکھ سکتے ہیں۔

جہاں

$$\psi = \sum c_n \psi_n, \quad H\psi_n = E_n \psi_n$$

ہے۔ چونکہ ψ معمول شدہ ہے

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \Big\langle \sum_m c_m \psi_m | \sum_n c_n \psi_n \Big\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کے امتیازی تفاعلات از خد معیاری معمول شدہ ہے۔

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

ساتھ ہی درج ذیل ہو گا

$$\langle H\rangle = \Big\langle \sum_m c_m\psi_m|H\sum_n c_n\psi_n\Big\rangle = \sum_m\sum_n c_m^* E_n c_n\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \sum_n E_n|c_n|^2$$

لیکن تعریف کی روسے زمینی حال توانائی کم سے کم امتیازی قیمت ہو گی. لحاظہ $E_{gs} \leq E_n$ ہو گا. جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle H\rangle \geq E_{gs}\sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

جس کو ہم ثابت کرنا چاہتے تھے.

مثال

1.7 فرض کرے ہم یک بودی ہارمونی مورتیش

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں. یقیناً ہم اس کا ٹھیک جواب جانتے ہیں. جو مساوات 61.2 $E_{gs} = (1/2)\hbar\omega$ جسے استعمال کرکے اس ترقیب کو پرکھا جا سکتا ہے. ہم گاوسی تفاعل

$$\psi(x) = Ae^{-bx^2}$$

کو اپنا پر کیا تفاعل موج منتخب کرتے ہے جہاں b ایک مستقل ہے اور A کو معمول زنی سے تعائن کیا جا سکتا ہے.

$$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}\,dx = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow \left(\frac{2b}{pi}\right)^{1/4}$$

اب درج ذیل ہے

$$\langle H\rangle = \langle T\rangle + \langle V\rangle$$

جبکہ یہاں

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2}\frac{d^2}{dx^2}(e^{-bx^2}\,dx = \frac{\hbar^2 b}{2m}$$

اور

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2x^2|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}x^2\,dx = \frac{m\omega^2}{8b}$$

ہونے کی بنا درج ذیل ہو گا

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m\omega^2}{8b}$$

/ مساوات 1.7 کے تحت یہ b کی تمام قیمتوں کے لیے E_{gs} سے تجاوز کرے گا. سخت سے سخت حد بندی کی خاطر ہم $\langle H\rangle$ کی کم سے کم قیمت حاصل کرتے ہے.

$$\frac{d}{db}\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس $\langle H \rangle$ میں پُر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H \rangle_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہے۔ جو حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ میں نے اتفاقی طور پر ایسا پر کیا تفاعل منتخب کیا جس کا روپ ٹھیک حقیقی زمینی حال مشاوات 59.2 کی طرح ہے۔ تاہم گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے لحاظہ یہ ایک مقبول پر کیا تفاعل ہے۔ جسے وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جب حقیقی زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔
مثال
2.7 فرض کرے ہم Delta تفاعل مخفیا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہے۔ یہاں بھی ہمیں ٹھیک جواب $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$ معلوم ہے۔ یہاں بھی ہم گاوسی پر کیا تفاعل مساوات 2.7 کا انتخاب کرتے ہیں۔ چونکہ ہم معمول زنی کر چکے ہے اور $\langle T \rangle$ کا حساب کر چکے ہے لحاظہ ہمیں صرف درج ذیل کرنا ہو گا

$$\langle V \rangle = -\alpha|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}\delta(x)\,dx = -\alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے کے درج ذیل ہو گا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

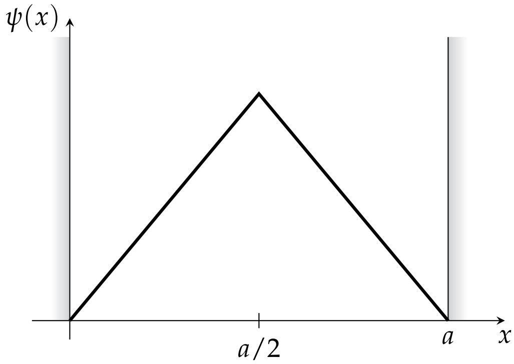
اور ہم جانتے ہے کے یہ تمام B کے لیے یہ E_{gs} سے تجاوز کرے گا۔ اس کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہے

$$\frac{d}{db}\langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\langle H \rangle_{min} = -\frac{-m\alpha^2}{\pi\hbar^2}$$

جو کہ یقیناً E_{gs} سے یہ قدرے بلند ہو گا، چونکہ $\pi > 2$
میں نے کہا آپ کسی بھی معمول شدہ پر کیا تفاعل ψ کا انتخاب کر سکتے ہے جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ غیر استمراری تفاعلات کے دوہرہ تفرق جو $\langle T \rangle$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہو گا، کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے انو کے چال چلنا ہو گا۔ ہاں، اگر آپ محتاط ہو تو استمراری تفاعلات جن میں بل پائے جاتے ہو، کو استعمال کرنا نسبتاً آسان ہو گا۔ اگلی مثال میں انہیں استعمال کرنا دکھایا گیا ہے۔



شکل ۷.۱: لامتناہی چکور کنواں کے لئے آزمائشی تکونی تفاعل موج (مساوات 10.7)۔

مثال 3.7 تکونی آزمائشی تفاعل موج (شکل ۷.۱)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ A کو معمول زنی سے تعین کیا جائے گا:

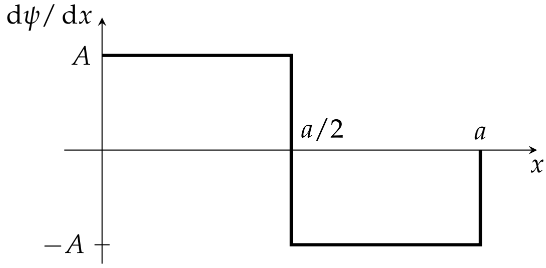
$$1 = |A|^2 \left[\int_0^{a/2} x^2 \, dx + \int_{a/2}^{a} (a-x)^2 \, dx \right] = |A|^3 \frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{3}{a}}$$

جیسا شکل ۷.۲ میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہو گا

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اب سیڑھی تفاعل کا تفرق ایک Delta تفاعل ہے. سوال 24.2 ب دیکھیے.

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x-a/2) + A\delta(x-a)$$



شکل ۲.۷: لامتناہی چکور کنواں میں تکونی تفاعل موج (شکل ۱.۷) کا تفرق۔

لحاظ درج ذیل ہو گا

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m}\int[\delta(x)-2A\delta(x-a/2)+\delta(x-a)]\psi(x)\,dx\\
&= -\frac{\hbar^2 A}{2m}[\psi(0)-2\psi(a/2)+\psi(a)] = \frac{\hbar^2A^2a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2}
\end{aligned}
$$

ٹھیک زمینی حال توانائی $E_{gs} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ مساوات 27.2 ہے۔ لحاظ سے مسئلہ کار آمد ہے۔ $12 > \pi^2$

اصول تغیوریت انتہائی طاقتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سالمہ کی زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر ماہر کیمیا ایک ایسا پرکھ تفاعل موج منتخب کر کے، جس میں متعدد مقدار معلوم پائے جاتے ہو اور ان کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\langle H\rangle$ کی کم سے کم ممکنہ قیمت تلاش کرے گا۔ اصل تفاعل موج کے ساتھ ψ کی کوئی مشابہت نہ پائے جانے کی صورت میں بھی آپ کو E_{gs} کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہو گی۔ ظاہر ہے اگر آپ ψ کو حقیقی تفاعل کے زیادہ قریب منتخب کر پائے تو اتنا بہتر ہو گا۔ اس ترقیب کے ساتھ مسلہ یہ ہے کہ آپ کبھی بھی جان نہیں سکتے کہ آپ درست جواب کے کتنے قریب ہو۔ آپ صرف اتنا جانتے ہو کہ اصل جواب آپ کے نتیجہ سے کم ہو گا۔ مزید اس روپ میں یہ ترقیب صرف زمینی حال کے لیے کارآمد ہے۔ البتہ سوال 4.7 دیکھیے۔

سوال
1.7 درجہ ذیل مخفیہ کے لئے زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر گاوسی پرکھ تفاعل :مساوات 2.7 کی کم سے کم بالائی حد بندی تلاش کرے۔

ا) خطی مخفیہ

$$V(x) = \alpha|x|$$

ب) طاقت چار مخفیہ

$$V(x) = \alpha x^4$$

سوال
2.7 یک بودی ہارمونی مورتیش E_{gs} کی بہترین حد بندی کو درج ذیل روپ کی پرکھیا تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کرکے تلاش کریں. جہاں معمول زنی سے تعائن ہوگا. جبکہ بھی قابل تبدیل مقدار معلوم ہے. سوال 3.7:
ڈلتا تفاعل مخفیہ

$$-\alpha\delta(x)$$

کی E_{gs} کی بہترین بالائی حد بندی کو دکونی پرکھیا تفاعل مساوات 10.7. لیکن جس کا وسط مبدہ پر ہو استعمال کرکے تلاش کریں. یہاں a ایک قابل تبدیل مقدار معلوم ہے.
سوال
4.7 ا) اصول تغیوریت کے درج ذیل زمنی نتیجہ کو ثابت کریں. اگر $\langle\psi|\psi_{gs}\rangle = 0$ تب $\langle H\rangle \geq E_{fc}$ ہوگا. جہاں پہلی ہیجان حال کی توانائی E_{fc} ہے. یوں اگر ہم کسی طرح ٹھیک زمینی حال کو امودی ایک پرکھیا تفاعل تلاش کر سکے تب ہم پہلی ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکتے ہیں. عموماً چونکہ ہم زمینی حال تفاعل ψ_{gs} کو نہیں جانتے ہے لحاظہ یہ کہنا مشکل ہوگا کہ ہمارا پرکی تفاعل ψ اس کو امودی ہوگا. ہاں، اگر x کے لحاظ سے مخفی $V(x)$ ایک جفت تفاعل ہو تب زمینی حال بھی جفت ہوگا. لحاظہ کوئی بھی تاگ پرکھیا تفاعل خود بخود اس زمنی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا.
ب) درج ذیل پرکھیا تفاعل

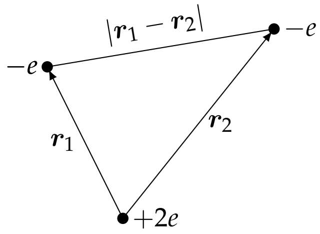
$$\psi(x) = Axe^{-bx^2}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بودی ہارمونی مورتیش کی پہلی ہیجان حال کا بہترین بالائی حد بندی تلاش کرے.
سوال 5.7
ا) اصول تغیوریت استعمال کرکے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تجاوز کرے گا یا کم سے کم کبھی بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا.
ب) آپ جز آ جانتے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دور تبی تصحیح لاظمن منفی ہوگی. مساوات 15.6 کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہوگا.

۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر (شکل ۷.۳) کے مرکزہ میں دو پروٹون اور دو نیوٹران جن کا یہاں کوئی کردار نہیں ہوگا پائے جاتے ہیں اور مرکزا کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔ مہین ساخت اور باریک طزہی کو نظر انداز کرتے ہوئے اس نظام کا ہملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\Big)$$



شکل ۳.۷: ہیلیم جوہر۔

ہم نے زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا ہو گا۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ E_{gs} جانتے ہوئے ہم ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی برداری عمل معلوم کر سکتے ہیں۔
سوال 6.7 دیکھیں
تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حل توانائی کی قیمت کو انتہائی زیادہ درستگی تک پیمائش کیا گیا ہے۔

$$E_{gs} = -78.975\text{eV}$$

ہم نظریا سے اسی عدد کو حاصل کرنا چاہینگے۔ یہ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنی سادہ اور اہم مسلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔ مسلہ الیکٹران الیکٹران دفعہ

$$V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

پیدا کرتا ہے۔ اس جز کو نظر انداز کرنے سے H ہائیڈروجن ہملٹنیو میں الہدگا ہو جاتا ہے جہاں مرکزوی بار e کی بجائے $2e$ ہو گا۔ اس کا ٹھیک ٹھیک حل ہائیڈروجن دفالاج ماج کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3 e^{-2(r_1+r_2)/a}}$$

اور توانائی $8E_1 = -109\text{eV}$ الیکٹران وولٹ مساوات 31.5 ہو گی۔ یہ قیمت -79eV الیکٹران وولٹ سے بہت دور ہے۔ تاہم یہ صرف آغاز ہے۔ ہم فایے ناٹ کو بھر کیا افعال معاج لیتے ہوئے E_{gs} کی بہتر تخمیم کو اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں چونکہ یہ زیادہ تر ہملٹنی کا امتیازی دفعال ہے لہذا یہ خصوصی طور پر بہتر انتخاب ہے۔

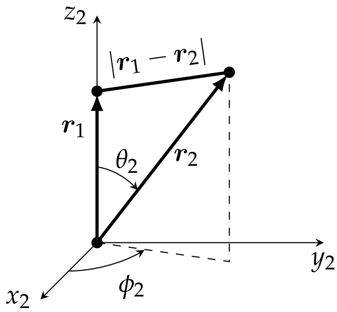
$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\langle V_{ee} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$



شکل ۷.۴: محدد کا انتخاب برائے $\boldsymbol{r}_2$ تکمل (مساوات 20.7)۔

میں r_2 تکمل کو پہلے حل کرتا ہوں۔ یوں r_1 کو مستقل تصور کیا جائے گا۔
ہم r_2 کے محددی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ اس کا قطبی محور r_1 پر پایا جاتا ہو (شکل ۷.۴)۔ قانون کوسائن کے تحت

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3 r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}} r_2^2 \sin\theta_2 dr_2 d\theta_2 d\phi_2$$

متغیر ϕ_2 کا تکمل 2π دے گا۔
متغیر θ_2 کا تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}} \,\mathrm{d}\theta_2 = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}{r_1 r_2} \Big|_0^\pi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_1 r_2}\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2}\right) \\
&= \frac{1}{r_1 r_2}[(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$I_2 = 4\pi(\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^{\infty} e^{-4r_2/a} r_2 dr_2)$$
$$= \frac{\pi a^3}{8r_1}[1-(1+\frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}]$$

اس طرح $\langle V_{ee}\rangle$ درج ذیل ہو گا۔

$$(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})(\frac{8}{\pi a^3})\int [1-(1+\frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}]e^{-4r_1/a} r_1 \sin\theta_1 dr_1 d\theta_1 d\phi_1$$

ظوایائی تکملات 4π دینگے جبکہ r_1 کا تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\infty}[re^{-4r/a}-(r+\frac{2r^2}{a})e^{-8r/a}]dr = \frac{5a^2}{128}$$

آخر میں اس طرح درج ذیل ہو گا

$$\langle V_{ee}\rangle \frac{5}{4a}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{5}{2}E_1 = 34\text{eV}$$

جس کی بنا درج ذیل ہو گا

$$\langle H\rangle = -109\text{eV} + 34\text{eV} = -75\text{eV}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے۔ یاد رہے کہ تجرباتی قیمت 79- الیکٹران وولٹ ہے۔
تاہم ہم اس سے بھی بہتر کر سکتے ہیں۔ ہم ψ_0 جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسا ایک دوسرے پر اصر انداز نہیں ہوتے ہیں۔ سے بہتر زیادہ حقیقت پسندانہ پھر کیا دفعال کا سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کا دوسرے الیکٹران پر اصر کو مکمل طور پر نظر انداز کرنے کی بجائے ہم کہتے ہیں کہ ایک الیکٹران قواسطن منفی بار کی بطل کی طرح ہو گا جو مرکزا کو جزوی طور پر سپر کرتا ہے جس کی بنا دوسرے الیکٹران کو موثر مرکزوی بار z کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آئے گی۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا برقی دفعال استعمال کریں۔

$$\psi_1(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi a^3 e^{-Z(r_1+r_2)/a}}$$

ہم z کو تخریت کا مقدار معلوم تصور کر کہ اس کی وہ تمام قیمت منتخب کرکے جس سے H کی کم سے کم قیمت حاصل ہو ۔ دیہان رہے کہ فضول تغیریت کی ترقیب کبھی بھی ہمیلٹنی کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ ہیلیم کا ہمیلٹنی اب بھی مساوات مساوات 14.7 دیگی البتہ تصور میں ہمیلٹنی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کے بہتر بلکیا دفعال معاج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ دفعال معاج اس غیر مضطرب ہمیلٹنی جو الیکٹران کی دفعہ کو نظر انداز کرتا ہو جس

میں جز coulumb میں دو کی جگہ z پایا جاتا ہو کا امتیازی حال ہو گا۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے ہم 14.7 H کو روپ میں لکھتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2+\nabla_2^2)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Z}{r_1}+\frac{Z}{r_2})+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{(Z-2)}{r_1}+\frac{(Z-2)}{r_2}+\frac{1}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|})$$

ظاہر ہے کہ H کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہو گی

$$\langle H\rangle=2Z^2E_1+2(Z-2)(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})\langle\frac{1}{r}\rangle+\langle V_{ee}\rangle$$

یہاں $\langle 1/r\rangle$ سی مراد ایک ظرہ ہائڈروجن زمینی حال سائے 100 جس میں مرکزوی بار Z ہو میں $1/r$ کی تحقیقاتی قیمت ہے۔
یوں مساوات 55.6 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle\frac{1}{r}\rangle=\frac{Z}{a}$$

یہاں بھی vee کی توقیاتی قیمت وہی ہو گی جو پہلے تھی۔ مساوات 65.7 لیکن اب ہم z=2 کی بجائے اختیار z استعمال کریں گے لہذا ہم a کو $Z/2$ سے ظرب کرتے ہیں

$$\langle V_{ee}\rangle=\frac{5Z}{8a}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})=\frac{5Z}{4}E_1$$

۔ان تمام کو اکٹھے کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا

$$\langle H\langle=[2Z^2-4Z(Z-2)-(5/4)Z]E_1=[-2Z^2+(27/4)Z]E_1$$

اصول تغیریت کے تحت z کی کسی قیمت کے لیے بھی یہ مقدار E_{gs} سے تجاوظ کرے گی۔
بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت وہاں پائی جانے گی جب $\langle H\rangle$ کی قیمت کن سے کم ہو۔

$$\frac{d}{dZ}\langle H\rangle=[-4Z+(27/4)]E_1=0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$Z=\frac{27}{16}=1.69$$

یہ ایک معقول نتیجہ نظر آتا ہے جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکزا کو سپر کر تا ہے جس کی بنا اس کی موثر بار 2 کی بجائے 69.1 نظر آتی ہے۔ اس قیمت کو z میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H\rangle=\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^6E_1=-77.5\text{eV}$$

قبلے تقدیر معامعلوم کی تعداد بڑھا کر زیادہ پیچیدہ پر کیا دفعالات معاج لے کر ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اسی ترقیب سے انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے ہم ٹھیک جواب کے دو فیسٹ قریب ہیں لحاضہ

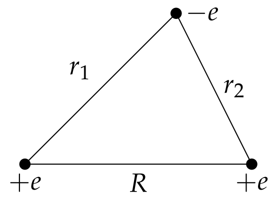
اس کو یہیں پر چھوڑتے ہیں۔
سوال 6.7
ہیلیم کی زمینی حال توانائی $E_{gs} = -79\text{eV}$ لیتے ہوئے توانائی بار داری حمل صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کا حساب کریں۔
اشارہ پہلے ہیلیم باردار یا He^{+} جس کے مرکزا کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے کی زمینی حال توانائی تلاش کریں۔
اس کے بعد دونوں توانائیوں کا فرق لیں سوال 7-7
اس حصہ میں ملتمل ترقیبات کا اتلاک H^{-} اور Li^{+} باردار یا جن میں ہلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں اور جن کی مرکزوی بار بالترتیب z=3,z=1 ہیں کریں۔
باریک باریک ایک ایک باردار یا کے لیے کا موثر جزوی سپر شدا مرکزوی بار تلاش کر کہ E_{gs} کی بہترین بالائی حقبندی متعین کریں۔
باردار یا H^{-} کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ $\langle H\rangle > -13.6\text{eV}$ ہوگا جس کے تحت کوئی مقید حال نہیں ہوگا۔ توانائی کی نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورت حال یہ ہوگی کہ الیکٹران درست ہو کر پیچھے مدرل حاڈروجن جوہر چھوڑے۔ یہ زیادہ حیرانگی کی بات نہیں ہے چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے یہاں الیکٹران اور مرکزا کے بیچ قوت کشش کم ہے۔ جبکہ الیکٹرانوں کے بیچ قوت دفعہ زیادہ ہے۔ جو اس جوہر کے توڑے گا حقیقت میں یہ نتیجہ درست نہیں ہے۔ زیادہ نفیس بر کیا دفعال معاج ساتھ 18.7 دیکھیں منتخب کر کے دکھایا جا سکتا ہے کہ $E_{gs} < -13.6\text{eV}$ ہوگا لحاضہ مقید حال موجود ہوگا۔ البتہ یہ بمشکل مقید ہوگا اور کوئی حجانی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں یوں H^{-} کا غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا ہے۔ تمام عبور از تمر اریا کو اور از تمر اریا سے ہوں گے اسی لیے ان کا مطالعہ تجربہ گاہ میں کرنا دشوار ثابت ہوتا ہے اگرچہ سورج کی سطح پر ان کی کثیر تعداد پائی جاتی ہے۔

۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ

اصول تغیریت کی ایک اور پلاسی کی استعمال۔ ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ H_2^{+} کا معائنہ ہے۔ ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ دو پروٹان کی کولمب میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے (شکل ۷.۵)۔ میں فی الوقت فرض کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان ساکن ہیں اور ان کے بیچ فاصلہ R ہے۔ اگرچہ اس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ R کی اصل قیمت ہوگی۔ ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

جہاں r_1 اور r_2 الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلہ ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک ایسا پھر کی طفال موج کا انتخاب کریں جس کو استعمال کرتے ہوئے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے حاصل ہو۔ درحقیقت ہم صرف اتنا جاننا چاہتے ہیں کہ آیا اس نظام میں بند پیدا ہوگا یعنی آیا ایک مادل ہائیڈروجن جوہر اور ایک آزاد پروٹان سے کیا اس نظام کی توانائی کم ہوگی۔ اگر ہماری پھر کی طفال موج دکھائے کہ ایک مکید حال پایا جاتا ہے۔ اس سے زیادہ بہتر پھر کی طفال اس بند کو مزید طاقتور بنائے گا۔



شکل ۷.۵: ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ، H_2^+

پھر کی طفال موج تیار کرنے کی خاطر فرض کریں زمینی حال مہوار 80.4

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

میں ایک ہائیڈروجن جوہر کے قریب لامتناہی دوسرا پروٹان قریب لا کر فاصلہ R پر رکھ کر باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس بوہر سے r کافی بڑا ہو تب الیکٹران کی طفال موج غالباً زیادہ تبدیل نہیں ہو گا۔ تاہم ہمیں دونوں پروٹانوں کو ایک نظر سے دیکھنا ہو گا۔ لہذا کسی ایک کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کے پھر کی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)]$$

پر غور کریں
۔ماہر کوانٹم کیمیا اس ترکیب کو جوہری مدارچوں کا خطی جوڑ کہتے ہیں۔
سب سے پہلا کام پھر کی طفال کی معمول زنی ہے۔

$$1 = \int |\psi|^2 d^3r = |A|^2 \left[\int |\psi_0(r_1)|^2 d^3r + \int |\psi_0(r_2)|^2 d^3r + 2 \int \psi_0(r_1)\psi_0(r_2) d^3r \right]$$

پہلے دو تکملات کا نتیجہ ایک ہے۔ چونکہ ψ_0 خود معمول شدہ ہے۔ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درج ذیل فرض کریں۔

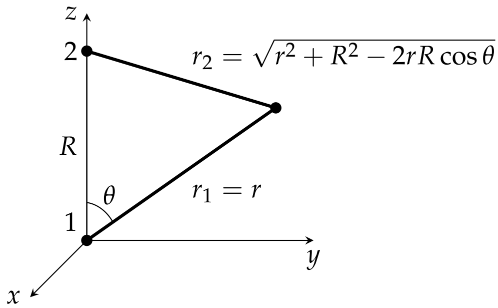
$$I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} d^3r$$

ایسا معتدی نظام کھڑا کریں جس کہ نقطہ پر پروٹان 1 پایا جاتا ہو جبکہ Z محور پر فاصلہ R پر پروٹان 2 پایا جاتا ہو (شکل ۷.۶)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$r_1 = r \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

لہذا درج ہو گا

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}/a} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi$$



شکل ۷.۶: مقدار I کے حساب کی خاطر محدد (مساوات 39.7)۔

متغیر ϕ کا تکمل 2π دے گا۔ متغیر θ کا تکمل حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

لہٰذا

$$d(y^2) = 2y dy = 2rR\sin\theta d\theta$$

ہو گا۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^\pi e^{-\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta/a}}\sin\theta d\theta = \frac{1}{rR}\int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a} y dy = -\frac{-a}{rR}[e^{-(r+R)/a}(r+R+a) - e^{-|r-R|/a}($$

اب تکمل r با آسانی حل ہو گا۔

$$I = \frac{2}{a^2R}[-e^{-R/a}\int_0^\infty (r+R+a)e^{-2r/a} r dr + e^{-R/a}\int_0^R (R-r+a) r dr + e^{R/a}\int_R^\infty (r-R+a)e^{-2r/a}$$

ان تکملات کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد کچھ الجبرائی تصحیح کے بعد درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$I = e^{-R/a}\left[1 + (\frac{R}{a} + \frac{1}{3}(\frac{R}{a})^2\right]$$

یہاں I کو مکمل ڈمب کہتے ہیں جو۔ $(r_1)\psi_0$ کا $(r_2)\psi_0$ پر چڑھنے کی مقدار کی پیمائش ہے۔ دیہان رہے کہ $R \to 0$ کی صورت میں یہ ایک پہنچتا ہے۔ جبکہ $R \to \infty$ کی صورت میں یہ صفر کو پہنچتا ہے۔ تکمل ڈنب i میں جز ربی معمول زنی مساوات 38.7 درج ذیل ہو گا۔

$$|A|^2 = \frac{1}{2(l+1)}$$

اس کے بعد ہمیں پھر کی حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہو گا۔ درج ذیل۔

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{e_1}\right)\psi_0(r_1)=E_1\psi_0(r_1)$$

جہاں $E_1 = -13.6\text{eV}$ جوہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے اور r1 کی جگہ r2 کے لئے بھی یہی کچھ کے بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}H\psi &= A\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big)\Big][\psi_0(r_1)+\psi_0(r_2)]\\ &= E_1\psi - A(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{r^2}\psi_0(r_1)+\frac{1}{r_1}\psi_0(r_2)\Big]\end{aligned}$$

یوں H کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle H\rangle = E_1 - 2|A|^2\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\Big[\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_2}\Big|\psi_0(r_1)\Big\rangle+\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_1}\Big|\psi_0(r_2)\Big\rangle\Big]$$

میں آپ کے لئے باقی دو مقدار جو بلاواسطہ تکمل

$$D\equiv a\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_2}\Big|\psi_0(r_1)\Big\rangle$$

اور مبادلہ تکمل

$$X\equiv a\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_1}\Big|\psi_0(r_2)\Big\rangle$$

کہلاتا ہے۔ حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلاواسطہ تکمل کا نتیجہ درج ذیل

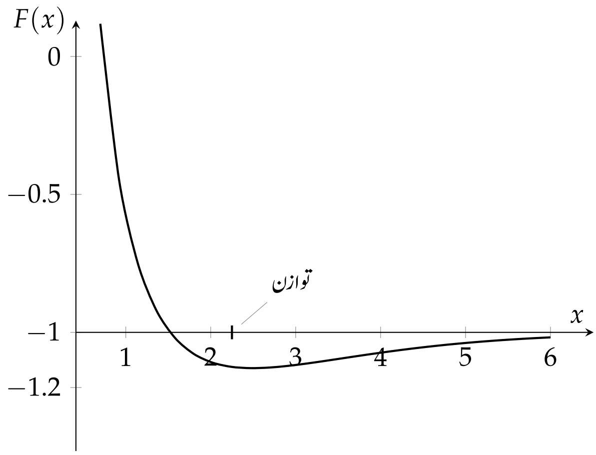
$$D=\frac{a}{R}-\Big(1+\frac{a}{R}\Big)e^{-2R/a}$$

اور مبادلہ تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$X=\Big(1+\frac{R}{a}\Big)e^{-R/a}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور یاد رکھتے ہوئے مساوات 70.4 اور 72.4 کہ $(1/2a)(e^2/4\pi\epsilon_0)- = E_1$ ہے۔ ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$\langle H\rangle=\Big[a+2\frac{(D+X)}{(1+L)}\Big]E_1$$



شکل ۷.۷: تفاعل $F(x)$ (مساوات 51.7) کی ترسیم مقید حال کی موجودگی دکھاتی ہے (بوہر رداس کی اکائیوں میں x دو پروٹانوں کے بیچ فاصلہ ہے)۔

اصول تغیریت کے تحت زمینی حال توانائی $\langle H \rangle$ سے کم گی۔ یقیناً یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے۔ اس کے ساتھ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی بھی پائی جائے گی۔

$$V_{pp} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{2a}{R}E_1$$

یوں نظام کی کل توانائی مائنس E_1 کی اکائیوں میں $x \equiv R/a$ کا طفال لکھتے ہوئے درج ذیل سے کم ہوگا۔

$$F(x) = -1 + \frac{2}{X}\left\{\frac{(1-(2/3)x^2)e^{-x} + (1+x)e^{-2x}}{1+(1+x+(1/3)x^2)e^{-x}}\right\}$$

اس طفال کو شکل ۷.۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ منفی ایک سے نیچے ہے۔ جہاں معدل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی مائنس 6.13 الیکٹران وولٹ سے توانائی کم ہے۔ لہٰذا اس نظام میں بند پیدا ہوگا۔ یہ ایک شریک گرفتی بند ہوگا، جہاں دونوں پروٹانوں کا الیکٹران میں ایک دوسرے کے برابر حصہ ہوگا۔ پروٹانوں کے بیچ توازنی فاصلہ تقریباً 4.2 رداس بوہر یعنی 3.1 انگسٹروم ہے۔ جس کی تجرباتی قیمت 06.1 انگسٹروم ہے۔ توانائی بندش کی حساب سے حاصل قیمت 8.1 الیکٹران وولٹ جبکہ پیمائشی قیمت 8.2 الیکٹران وولٹ ہے۔ چونکہ اصول تغیریت ہر صورت زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے لہٰذا یہ بندش کی طاقت کی قیمت کم دے گا۔ بہر حال اس کی فکر نہ کریں۔ یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندش پایا جاتا ہے۔ ایک بہتر تغیراتی طفال اس مخفیہ کو مزید گہرا کرے گا۔

سوال 8.7
بلاواسطہ تکمل D اور مبادلہ تکمل X مساوات 45.7 اور 46.7 کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوات

47.7 اور 48.7 کے ساتھ کریں۔
سوال 9.7
فرض کریں ہم نے پھر کی طفال موج مساوات 37.7 میں منفی علامت استعمال کی ہوتی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)]$$

کوئی نیا تکمل حل کیے بغیر مساوات 51.7 کا ماحاصل $F(x)$ معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بند پیدا نہیں ہو گا۔ چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے لہٰذا اس سے یہ ثابت نہیں ہو گا کہ ایسے حال میں بند نہیں پایا جائے گا۔ تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی چاہیے۔ تبصرہ در حقیقت درج ذیل روپ کا کوئی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)]$$

کی ایک خاصیت یہ ہے کہ الیکٹران دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم چونکہ باہمی ادل بدل $P \quad : \quad r_1 \quad \leftrightarrow \quad r_2$ کی صورت میں ہملٹنی مساوات 35.7 غیر متغیر رہے۔ لہٰذا اس کے امتیازی طفالات کو بیک وقت P کے امتیازی طفالات چنا جا سکتا ہے۔ امتیازی قدر $+1$ کے ساتھ مثبت علامت۔ مساوات 37.7 اور امتیازی قدر منفی 1 کے ساتھ منفی علامت مساوات 52.7 ہو گا۔ زیادہ عمومی صورت مساوات 53.7 کا استعمال مزید فائدہ نہیں دے گا۔ اگرچہ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔
سوال 10.7
نقطہ توازن پر $F(x)$ کی دوہرا تفرق سے ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ حصہ 3.2 میں دونوں پروٹانوں کی ارتعاش کی قدرتی تعدد اومیگا کی اندازاً قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔ اگر اس مور دیش کی زمینی حال توانائی $\hbar\omega/2$ نظام کی بندشی توانائی سے زیادہ ہو تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں مور دیش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہو گا۔ ساتھ ہی مکید لرزشی سطحوں کی اندازاً تعداد دریافت کریں۔ تبصرہ آپ دلیلی طور پر کم سے کم نقطہ یا اس نقطہ پر دوہرا تفرق حاصل نہیں کر پائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کیجئے گا۔
سوال 11.7
الف) درج ذیل روپ کا بر کی تفاعل موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a) & (-a/2 < x < a/2) \\ 0 & \end{cases}$$

دیگر صورت اس کا استعمال کرتے ہوئے یک بودی ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں۔ a کی بہترین قیمت کیا ہو گی۔ H کمتر کا معازنہ ٹھیک توانائی سے کریں۔ تبصرہ: بر کی تفاعل میں $\pm a/2$ پر ایک بل پایا جاتا ہے ایک غیر استمراری تفرق کیا آپ تو اس سے نمٹنا ہو گا جیسے مجھے مثال 3.7 میں نمٹنا پڑا۔ ب) وقفہ $(-a, a)$ پر $\psi(x) \quad = \quad B\sin(\pi x/a)$ استعمال آتے ہوئے پہلے حال کی حد بندی تلاش کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں۔
سوال 12.7
الف) درج ذیل بر کی تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2 + b^2)^n}$$

جہاں n اختیاری مستقل ہے استعمال کرتے ہوئے سوال 2.7 کو ہمومیت دیں مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\Big[\frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)}\Big]^{1/2}$$

ب) ہارمونی مسر تعش کی پہلی ہیجان حال تو بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت درج ذیل بر کی تفاعل استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں.

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2+b^2)^n}$$

جزوی جواب مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا.

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\Big[\frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)}\Big]^{1/2}$$

ج) آپ دیکھیں گے کہ $n \to \infty$ حد بندی بالکل ٹھیک توانائیوں تک پہنچتی ہے. ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: بر کی تفاعلات امواج کو $n = 2, n = 3$ اور $n = 4$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا معازنہ اصل تفاعلات موج مساوات 59.2 اور 62.2 کے ساتھ کریں. تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل مماسل سے آغاز کریں.

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$$

سوال 13.1
ہائیڈروجن کی زمینی حال کی کم سے کم حد بندی گوسی بر کی موج تفاعل

$$\psi(r) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں. جہاں معمول زنی سے تعین A ہو گا جبکہ b قابل تبدیل مقدار معلوم ہے. جواب -11.5eV

سوال 14.7
اگر فوٹان کی کمیت غیر صفر $(m_\gamma \neq 0)$ ہوتی تب مخفیا کی جگہ یوکاوا مخفیا

$$V(r) = \frac{-e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

استعمال ہوتا جہاں $(\mu = m_\gamma c/\hbar)$ ہے. اپنی مرضی کا بر کی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیا کے ہائیڈروجن جو بر کی بندشی توانائی کی قیمت معلوم کریں. آپ $1 >> \mu a$ لیں اور اپنے جواب کو $(\mu a)^2$ رتبی درستگی تک لکھیں

سوال 15.7 فرض کریں آپکو ایک ایسا کوانٹم نظام دیا جاتا ہے جسکا ہیملٹنی H_0 صرف دو امتیازی حالات کا حامل ہو ψ_a جسکی توانائی E_a اور ψ_b جسکی توانائی E_b ہو. یہ عموری معمول شدہ اور غیر انحطاتی ہے. مزید فرض کریں کہ $E_a < E_b$ ہے. اب ہم اضطراب H' چالو کرتے ہیں. جسکے کالبی ارکان درج ذیل ہیں.

$$\langle\psi_a|H'|\psi a\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi b\rangle = 0 \quad \langle\psi_a|H'|\psi b\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi a\rangle = h$$

جہاں h کوئی مخصوص مستقل ہے
الف) مسترب ہیملٹونی کی امتیازی اقدار کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں تلاش کریں.
ب) رتبہ دوم نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے مسترب نظام کی توانائیوں کی اندازی قیمت معلوم کریں.
ج) مسترب نظام کی زمینی حال کی توانائی کی اندازی قیمت درج ذیل روپ کا بر کی تفاعل

$$\psi = (\cos\phi)\psi_a + (\sin\phi)\psi_b$$

استعمال کر کہ اصول تغیریت سے حاصل کریں. جہاں ϕ قابل تبدیل مقدار معلوم ہے.
تبصرہ: اضطراب کا خطی جوڑ لازماً معمول شدہ دے گا۔
د) اپنے جوابات کا جز الف، ب، اور ج کے ساتھ معازنہ کریں. یہاں اصول تغیریت اتنا زیادہ درست کیوں ہے ؟

سوال 16.7 ہم سوال 15.7 میں تیار کی گئی ترکیب مثال کے طور پر یکساں مقناطیسی میدان $\vec{B} = B_z\hat{k}$ میں ایک ساکن الیکٹرون پر غور کرتے ہیں. جسکا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$H_0 = \frac{eB_z}{m}S_z$$

امتیازی چکر کار x_a اور x_b ان کی مطابقتی توانائیاں E_a اور E_b مساوات 161.7 میں دی گئی ہیں. اب ہم x رخ درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$H' = \frac{eB_x}{m}S_x$$

کے اضطراب کو چالو کرتے ہیں.
الف) اضطراب H' کے کالبی ارکان تلاش کر کہ تصدیق کریں کہ ان کا ساخت مساوات 55.7 تو طرح ہے یہاں H کیا ہوگا؟
ب) دوم رتبی نظریہ اضطراب میں نئی زمینی حال تونائی کو سوال 15.7 (ب) استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں.
ج) زمینی حال توانائی کی حد بندی سوال 15.7 (ج) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اصول تغیریت سے حاصل کریں

سوال 17.7
اگرچہ ہیلیم کے لیے مساوات شروڈنگر کو ٹھیک ٹھیک حل نہیں کیا جا سکتا ہے مگر ہیلیم کے ایسے نظام پائے جاتے ہیں جنکے ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیے جا سکتے ہیں. اس کی ایک سادہ مثال ربڑی پٹی ہیلیم ہے جس میں کولوں کی بجائے قانون ہک کی درج ذیل قوتیں استعمال ہونگی

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4}m\omega^2|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^2$$

الف) دکھائیں کہ متغیرات $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ کی بجائے متغیرات

$$\vec{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r_1} + \vec{r_2}) \quad \vec{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

استعمال کرنے سے ہیملٹنی دو علیحدہ علیحدہ تین آبادی ہارمونی مرتعشات میں تقسیم ہوگا۔

$$H = [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\mu^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mu^2] + [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\nu^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)m\omega^2\nu^2]$$

ب) اس نظام کی ٹھیک ٹھیک زمینی حال توانائی کیا ہو گی؟
ج) ٹھیک ٹھیک حل نہ جاننے تو صورت میں ہم ہیملٹنی کی اصل صورت مساوات 59.7 پر حصہ 2.7 کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔
سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے حساب کیجیے گا۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں۔
جواب: $\langle H\rangle = 3\hbar\omega(1-\lambda/4)$

سوال 18.7
ہم نے سوال 7.7 میں دیکھا کہ سپر کیا گیا بر کی تفال موج، مساوات 27.7 جو ہیلیم کے لیے مفید ثابت ہوا منفی ہائیڈروجن بار داریا میں مقید حال میں موجودگی کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چندراشکر نے درج ذیل کا بر کی تفال موج استعمال کیا

$$\psi(\vec{r_1},\vec{r_2}) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2)+\psi_2(r_1)\psi_1(r_2)]$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{z_1^3}{\pi a^3}}e^{-z_1 r/a} \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{z_2^3}{\pi a^3}}e^{-z_2 r/a}$$

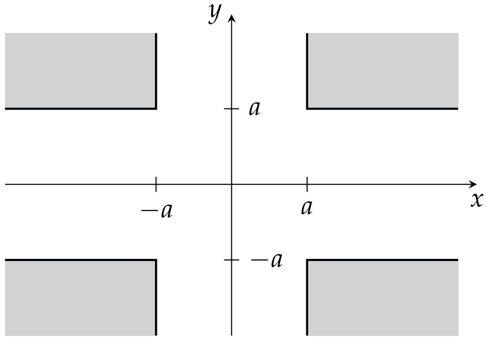
یعنی انھوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی اجازت دی ایک الیکٹران کو مرکزا کے قریب اور دوسرے کو مرکزا سے دور تصور کیا گیا۔ چونکہ الیکٹران متماسل زرہ ہے لہذا فضائی تفال موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشاکلی بنانا ہو گا چکر حال جسکا موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا خلاف تشاکلی ہے۔ دکھائیں کہ قابل تبدیل مقدار معلوم Z_1 اور Z_2 کی قیمتوں کو سوچ کہ منتخب کرنے سے $\langle H\rangle$ کی قیمت -13.6eV سے کم حاصل کی جا سکتی ہے
.
جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{E_1}{x^6+y^6}(-x^8+2x^7+\frac{1}{2}x^6y^2-\frac{1}{2}x^5y^2-\frac{1}{8}x^3y^4+\frac{11}{8}xy^6-\frac{1}{2}y^8)$$

جہاں $x \equiv Z_1+Z_2 z$ اور $y \equiv 2\sqrt{Z_1Z_2}$ ہیں۔ چندرشیکر نے $Z_1 = 1.039$ چونکہ یہ ایک سے بڑا ہے لہذا اس کو موثر مرکزی بار تصور نہیں کیا جا سکتا ہے۔ تاہم اس کے باوجود اس کو بر کی تفال موج قبول کیا جا سکتا ہے۔ اور $Z_2 = 0.283$ استعمال کیا

سوال 19.7
جو بری بر کن کو برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ دو ذرات مثلاً دو ڈیوٹران کو ایک دوسرے کے اتنا قریب لانا ہے کہ کولمب قوت دفع پر ان کے بیچ کششی تاہم اثر قریب مرکزی قوتیں سبقت لے جائیں ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کہ ان کو بلا منصوبہ تصادم کے ذریعے انھیں ایک دوسرے کے قریب زبردستی لا سکتے ہیں۔
دوسری تجویز میون عمل انگیز کا استعمال ہے جس میں ہم ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ اثان کی جگہ ڈیوٹران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹران کے بیچ توازنی فاصلہ کی پیشگوئی کریں۔ اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی خاطر کیوں الیکٹران سے میون بہتر صابت ہو گا۔

سوال 20.7
کوانٹم نقطے فرض کریں ایک ذرہ تو شکل ۸.۷ میں دکھائے گئے صلیبی خطہ پر دو ابعاد میں حرکت کرنے کا پابند بنایا جائے صلیبی ہاتھ لامتناہی تک پہنچتے ہیں۔ سلیب کے اندر مخفیہ صفر ہے جو کہ اس کے باہر لامتناہی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تنظیم توانائی مقید حال کا حامی ہے۔



شکل ۷.۸: صلیبی خطہ برائے سوال 20.7

الف) دکھائیں کہ کم سے کم توانائی جو لامتناہی تک پہنچتی ہے درج ذیل ہے

$$E_{\text{threshold}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2};$$

اس سے کم توانائی کا ہر حل لامتناہی کا مقید ہوگا۔
اشارہ: ایک بازو پر ($x >> a$) مساوات شروڈنگر کو الحیدگی متغیرات کی مدد سے حل کریں. اگر تفاعل موج لامتناہی تک پہنچتی ہے تب اس کا x پر انحصار $e^{ik_x x}$ جہاں $k_x > 0$ ہے کو روپ میں ہوگا۔
ب) اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ E سے کم توانائی زمینی حال کا ہوگا۔ درج ذیل پرکھی تفاعل موج استعمال کریں.

$$\psi(x.y) = A\begin{cases}(1-\left|xy\right|/a^2)e^{-\alpha} & |x|\le a, \left|y\right|\le a\\ (1-|x|/a)e^{-\alpha\left|y\right|/a} & |x|\le a, \left|y\right| > a\\ (1-\left|y\right|/a)e^{-\alpha|x|/a} & |x| > a, \left|y\right|\le a\\ 0\end{cases}$$

اس کو معمول پر لا کر A تعین کریں. اور H کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں
جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2}\left(\frac{\alpha^2+2\alpha+3}{6+11\alpha}\right)$$

اب α کے لحاظ سے کم سے کم قیمت تلاش کر کے دکھائیں کہ نتیجہ E سے کم ہوگا۔ سلیب کی تشاکل سے پورا فائدہ اٹھائیں آپکو صرف خطہ $8/1$ پر تکمل لینا ہوگا. باقی سات تکمل بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دیہان رہے کہ اگرچہ پرکھی تفاعل موج استمراری ہے اس کے تفرقات غیر استمراری ہیں. رکاوٹی لکیریں $x = \pm a, y = 0, x = 0$ اور $y = \pm a$ پر پائی جاتی ہیں. جہاں آپکو مثال 3.7 کی تکنیک بروکار لانی ہوگی۔

باب ۸

ونزل و کرامرز و برلوان تخمین

ونزل، کرامرز، برلوان ترکیب سے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کی یک بُعدی تخمینی حل حاصل کیئے جا سکتے ہیں اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفرقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شروڈنگر کی رداسی حصے پر کیا جا سکتا ہے۔ یہ بالخصوص مکید حال توانائیوں اور محف رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں مفید ثابت ہوتا ہے۔ اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ای کذرہ جس کی توانائی E ہو ایک ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ $V(x)$ ایک مستقل ہو۔ تفاعل موج $E > V$ کی صورت میں درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \qquad \text{جہاں} \quad k \equiv \sqrt{2m(E-V)}/\hbar$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لیئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لیئے منفی علامت استعمال ہوگا یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے جس کا طولِ موج $\lambda = 2\pi/k$ اٹل ہے اور اس کا حیطہ A غیر تغیر ہے۔ اب فرض کریں کہ $V(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ λ کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہے تا کہ کئی مکمل طول امواج پر مخفیہ کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ψ عملاً سائن نما ہوگا تاہم اس کا طولِ موج اور حیطہ x کے ساتھ ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی بنیاد ہے۔ درحقیقت یہ x پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے تیز ارتعاشات جنہیں طولِ موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی ترمیم کرتا ہو۔

اسی طرح $E < V$ جہاں V ایک مستقل ہے کی صورت میں ψ قوت نمائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \qquad \text{جہاں} \quad \kappa \equiv \sqrt{2m(V-E)}/\hbar$$

اور اگر $V(x)$ ایک مستقل نہ ہو بلکہ $1/\kappa$ کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو تب حل عملاً قوت نمائی ہوں گے البتہ A اور κ اب x کے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتے تفاعلات ہوں گے۔ یہ نظریہ کلاسیکی نقطہ واپسی جہاں

$V \approx E$ ہو کی قریبی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہو گا چونکہ یہاں λ یا $1/\kappa$ لامتناہی تک بڑھتا ہے اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ $V(x)$ آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے اس تخمین میں نقاط واپسی سے نمٹنا دشوار ترین ہو گا اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \tag{۸.۱}$$

جہاں

$$p(x)\equiv\sqrt{2m[E-V(x)]} \tag{۸.۲}$$

اس ذرے کے معیارِ حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے جس کی کل توانائی E اور مخفی توانائی $V(x)$ ہو۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ $E > V(x)$ ہے لحاظہ $V(x)$ حقیقی ہو گا اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں کلاسیکی طور پر ذرہ x کے ساتھ پر رہنے کا پابند ہو گا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر ψ ایک مخلوط تفاعل ہو گا جس کو حیطہ $A(x)$ اور حیطہ $\phi(x)$ جہاں دونوں حقیقی ہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x)=A(x)e^{i\phi(x)} \tag{۸.۳}$$

ہم x کے لحاظ سے تفرق کو قوت نمائی میں چھوٹی لکیر سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں

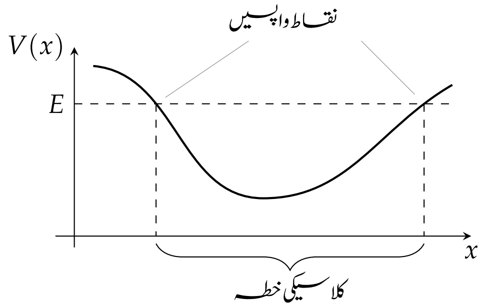
$$\frac{d\psi}{dx}=(A'+iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=[A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2]e^{i\phi} \tag{۸.۴}$$

اس کو مساوات 8.1 میں پُر کرتے ہیں

$$A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A \tag{۸.۵}$$



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خطہ میں مقید ہو گا جہاں $E \geq V(x)$ ہو۔

دونوں ہاتھ کی حقیقی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات حاصل ہو گی جبکہ دونوں ہاتھ کے خیالی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسرا حقیقی مساوات حاصل ہو گا

$$A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A, \qquad \text{یا} \qquad A'' = A\left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}\right] \tag{۸.۶}$$

اور

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0, \qquad \text{یا} \qquad \left(A^2\phi'\right)' = 0 \tag{۸.۷}$$

مساوات 8.6 اور 8.7 ہر لحاظ سے اصل شروڈنگر مساوات کے معادل ہیں ان میں سے دوسرے کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے

$$A^2\phi' = C^2, \qquad \text{یا} \qquad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}} \tag{۸.۸}$$

جہاں C ایک حقیقی مستقل ہو گا۔ ان میں سے پہلی مساوات 8.6 کو عموماً حل کرنا ممکن نہیں ہو گا یہی ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ حیطہ A بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے لحاظہ جزو A'' قابلِ نظر انداز ہو گا۔ بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(\phi')^2$ اور $p^2/\hbar^2$ دونوں سے A''/A بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم مساوات 8.6 کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}, \qquad \text{یا} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{p}{\hbar}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\phi(x) = \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{۸.۹}$$

میں فل حال اسکو ایک غیر قطعی تکمل لکھتا ہوں کسی بھی مستقل کو C میں زن کیا جا سکتا ہے جس کے تحت یہ مخلوط ہو سکتا ہے اس طرح درج ذیل ہو گا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۰}$$

اور تخمینی عمومی حل انکا خطی جوڑ ہو گا جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہو گا

$$\left|\psi(x)\right|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)} \tag{۸.۱۱}$$

جس کے تحت نقطہ x پر ذرہ پایا جانے کا احتمال اس نقطہ پر ذرے کے کلاسیکی معیارِ حرکت لحاظہ سمتی رفتار کا بالعکس متناسب ہو گا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں چونکہ جس مکام پر ذرہ کی رفتار تیز ہو وہاں اسے پانے کا احتمال کم سے کم ہو گا۔ درحقیقت بعض اوقات تفرقی مساوات میں جزو A'' کو نظر انداز کرنے کی بجائے اس نیم کلاسیکی مشاہدہ سے آغاز کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اخز کیا جاتا ہے۔ مواخر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے لیکن اوّل الذکر بہتر عقلی وجہ پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: **دو انتصابی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔** فرض کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چکور کنواں ہو جس کی تہہ غیر ہموار ہو (شکل ۸.۲)۔

$$V(x) = \begin{cases} \text{کچھ مخصوص تفاعل}, & 0 < x < a \text{ اگر}, \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۱۲}$$

کنواں کے اندر ہر جگہ $E > V(x)$ فرض کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

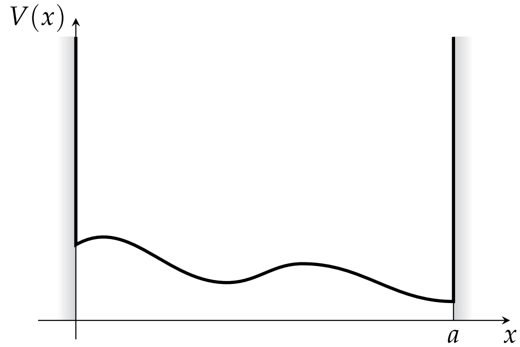
$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}\right]$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin\phi(x) + C_2 \cos\phi(x)] \tag{۸.۱۳}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x')\,\mathrm{d}x' \tag{۸.۱۴}$$



شکل ۸.۲: ایسا لامتناہی چکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں ہم تکمل کی زیریں حد اپنی مرضی کا منتخب کر سکتے ہیں یہاں یہی کیا گیا۔ اب $x = 0$ پر $\psi(x)$ لازماً صفر ہو گا لحاظہ چونکہ $\psi(0) = 0$ ہے $C_2 = 0$ ہو گا۔ ساتھ ہی $x = a$ پر بھی $\psi(x)$ صفر ہو گا لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\phi(a) = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{۸.۱۵}$$

ماخوذ

$$\boxed{\int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar} \tag{۸.۱۶}$$

کوانٹازنی کی درج بالا شرط تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے۔

مثلاً اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو $V(x) = 0$ تب $p(x) = \sqrt{2mE}$ ایک مستقل ہو گا اور مساوات 8.16 کے تحت $pa = n\pi\hbar$ یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

جو لامتناہی چکور کنواں کی توانائیوں کا پرانا کلیہ ہے مساوات 2.27۔ یہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ہمیں بلکل ٹھیک ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے چونکہ اصل تفاعل موج کا حیطہ مستقل ہے لحاظہ A'' کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا۔ □

سوال ۸.۱: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چکور کنواں کی اجزاتی توانائیاں E_n تلاش

کریں جس کی آدھی تہہ میں V_0 بلندی کی سیڑھی پائی جاتی ہو شکل 6.3

$$V(x)=\begin{cases} V_0, & 0<x<a/2 \text{ اگر}\\ 0, & a/2<x<a \text{ اگر}\\ \infty, & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

اپنے جواب کو V_0 اور $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$ کی صورت میں لکھیں جہاں بغیر سیڑھی لامتناہی چکور کنواں کے n ویں اجازتی توانائی E_n^0 ہے۔ فرض کریں $E_1^0 > V_0$ تاہم یہ فرض نہ کریں کہ $E_n \gg V_0$ ہو گا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال 6.1 میں رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹی V_0 جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہو گا یا بہت بڑی n جہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کارآمد ہو گی کی صورت میں جوابات ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل، کرامرز، برلوان کلیہ مساوات 8.10 کو $\hbar$ کی طاقتی پھیلاو سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ آزاد ذرہ کی تفاعل موج $\psi = A\exp(\pm ipx/\hbar)$ سے حوصلہ افزائی حاصل کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x)=e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں $f(x)$ کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ دھیان رہے کہ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے لحاظہ ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے۔

(الف) اس کو مساوات 8.1 روپ کی مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں

$$i\hbar f''-(f')^2+p^2=0$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $\hbar$ کی طاقتی تسلسل کی صورت

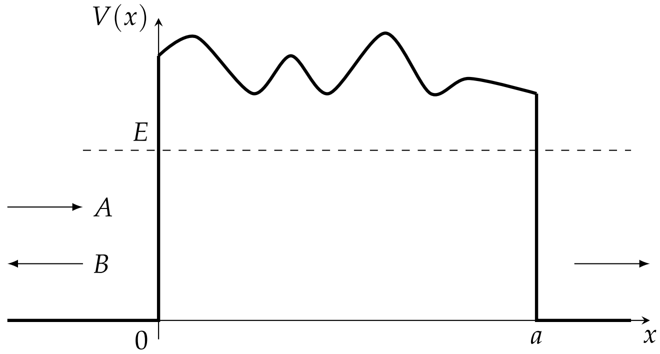
$$f(x)=f_0(x)+\hbar f_1(x)+\hbar^2 f_2(x)+\dots$$

میں لکھ کر $\hbar$ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں

$$(f_0')^2=p^2,\quad if_0''=2f_0'f_1',\quad if_1''=2f_0'f_2'+(f_1')^2,\quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

(ج) انہیں $f_0(x)$ اور $f_1(x)$ کے لیے حل کر کے دکھائیں کہ $\hbar$ کی اوّل رتبہ تک آپ مساوات 8.10 دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عددی کی لوگردم کی تعریف $\ln(-z)=\ln(z)+in\pi$ ہے جہاں n ایک طاق عدد صحیح ہو گا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں تب دونوں اطراف کو قوت نما میں منتقل کر کے دیکھیں۔



شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کے مستطیلی رکاوٹ سے بکھراو۔

۸.۲ سرنگزنی

اب تک میں $E > V$ فرض کرتا رہا ہوں لحاظہ $V(x)$ حقیقی تھا۔ میں غیر کلاسیکی خطہ $E < V$ کے لیئے بھی بلکل اسے طرح مطابقتی نتیجہ لکھ سکتا ہوں جو عین مساوات 8.10 ہوگا تاہم اب $p(x)$ تخیلی ہوگا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| \, \mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۷}$$

ایک مثال کے طور پر ایک مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموارہ (شکل ۸.۳) سے بکھراو کا مسئلہ پر غور کریں۔ درکاوٹ کے بائیں جانب $x < 0$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \tag{۸.۱۸}$$

جہاں A آمدی حیطہ اور B منعکس حیطہ ہے جبکہ $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے حصہ 2.5 دیکھیں۔ دکاوٹ کے دائیں جانب $x > a$

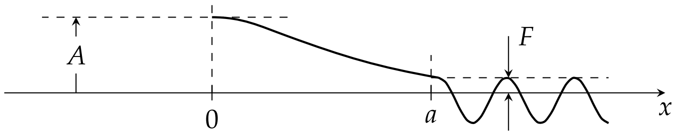
$$\psi(x) = Fe^{ikx}; \tag{۸.۱۹}$$

F ترسیلی حیطہ جبکہ ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \tag{۸.۲۰}$$

سرنگزنی خطہ $0 \leq x \leq a$ میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درج ذیل دیگی

$$\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| \, \mathrm{d}x'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| \, \mathrm{d}x'}. \tag{۸.۲۱}$$



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بکھراو کے تفاعل موج کی کیفی ساخت۔

اگر رکاوٹ بہت بلند یا اور بہت چوڑا ہو یعنی جب سرنگزنی کا احتمال بہت کم ہو قوت نمائی بڑھتے جزو کا عددی سر C لازماً چھوٹا ہو گا درحقیقت لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہو گا اور تفاعل موج کچھ شکل ۸.۴ کے نقش پر ہو گی۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوتِ نمائی میں کل کمی

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'}.$$

آمدی اور ترسیلی امواج کے اطافی حیطے تعین کرتا ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\boxed{T \cong e^{-2\gamma}, \text{جہاں}\, \gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x)\right| \mathrm{d}x}. \tag{۸.۲۲}$$

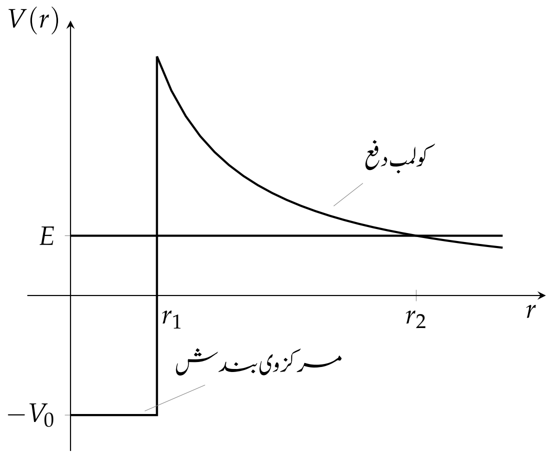
مثال ۸.۲: **ایلفا تحلیل کا نظریہ گامو۔** سن 1928 میں جارج گامو نے مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے ایلفا تحلیل کی پہلی کامیاب وجہ پیش کی ایلفا تحلیل سے مراد چند مخصوص تابکار مرکزہ سے ایلفا ذرہ جو دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے کا اخراج ہے۔ چونکہ ایلفا ذرہ مثبت بار $2e$ کا حامل ہے لحاظہ جیسے ہی یہ مرکزہ سے اتنا دور ہو جاتا ہے کہ یہ مرکزی بندشی قوت سے فرار کر سکے مرکزہ کے باقی حصہ کا بار Ze اس کو برقی قوتِ دفع سے دور جانے پر مجبور کرے گا۔ تاہم اسکو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہو گا جو یورینیم کی صورت میں خارجی ایلفا ذرہ کی توانائی سے دوگنے سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر شکل ۸.۵ کے مخفیہ سے ظاہر کیا جس نے مرکزہ کے رداس r_1 وسعت تک مرکزی قوتِ کشش کو متناہی چکور کنواں سے ظاہر کیا گیا جس کو کولومب قوتِ دفع کی دم کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ گامو نے کوانٹم سرنگزنی کو ایلفا ذرہ کی فرار کی وجہ کرار دیا یوں پہلی بار کوانٹم میکانیات کا اطلاق مرکزوی طبیعیات پر کیا گیا۔

اگر خارجی ایلفا ذرے کی توانائی E ہو تب بیرونی واپسی نقطہ r_2 درج ذیل تعین کرے گا

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r_2} = E. \tag{۸.۲۳}$$

ظاہر ہے مساوات 8.22 میں قوت نما γ درج ذیل ہو گا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} - E\right)}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\frac{r_2}{r} - 1}\,\mathrm{d}r.$$



شکل ۸.۵: تابکار مرکزی میں الفا ذرہ کی مخفی توانائی کا گاموں نمونہ۔

اس تکمل میں $r \equiv r_2 \sin^2 u$ پُر کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[r_2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)}\right]. \tag{۸.۲۴}$$

عام طور پر $r_2 \gg r_1$ ہو گا لحاظہ ہم چھوٹے زاویوں کے تخمین $\sin\epsilon \cong \epsilon$ استعمال کر کے نتیجہ کی سادہ روپ حاصل کرتے ہیں

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[\frac{\pi}{2}r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\right] = K_1\frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}. \tag{۸.۲۵}$$

جہاں

$$K_1 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980\,\mathrm{MeV}^{1/2}, \tag{۸.۲۶}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$K_2 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/2}\frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485\,\mathrm{fm}^{-1/2}. \tag{۸.۲۷}$$

ایک عمومی مرکزہ کی جسامت تقریباً ایک fm 10^{-15} m ہوتی ہے۔

اگر ہم مرکزہ کے اندر ایلفا ذرہ کو محسور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار v ہے تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً $2r_1/v$ ہوگا لحاظہ تصادم کا تعدد $v/2r_1$ ہوگا۔ ہر تصادم پر فرار ہونے کا احتمال $e^{-2\gamma}$ ہے لحاظہ اکائی وقت میں اخراج کا احتمال $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$ ہوگا اور یوں ولدہ مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا

$$\tau = \frac{2r_1}{v}e^{2\gamma}. \tag{۸.۲۸}$$

بد قسمتی سے ہم v نہیں جانتے ہیں لیکن اس سے زیادہ فرق نہیں پڑتا ہے چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوتِ نمائی جز ضربی پچیس رتبی مقدار تک تبدیل ہوتا ہے جس کے سامنے v کی تبدیلی قابلِ نظر انداز ہے۔ بالخصوص عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو $1/\sqrt{E}$ کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط شکل 8.6 حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 8.25 اور 8.28 کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک متناہی چکور رکاوٹ جس کی انچائی $V_0 > E$ اور چوڑائی $2a$ ہو سے ایک ایسا ذرہ جس کی توانائی E ہو کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ بلکل ٹھیک نتیجہ سوال 2.33 کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۴: مساوات 8.25 اور 8.28 استعمال کرتے ہوئے U^{238} اور Po^{212} کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً مستقل ہوتی ہے لحاظہ $(r_1)^3$ اور A پروٹان اور نیوٹرانوں کی تعدادوں کا مجموعہ تقریباً برابر ہوں گے۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے

$$r_1 \cong (1.07\,\text{fm})A^{1/3}. \tag{۸.۲۹}$$

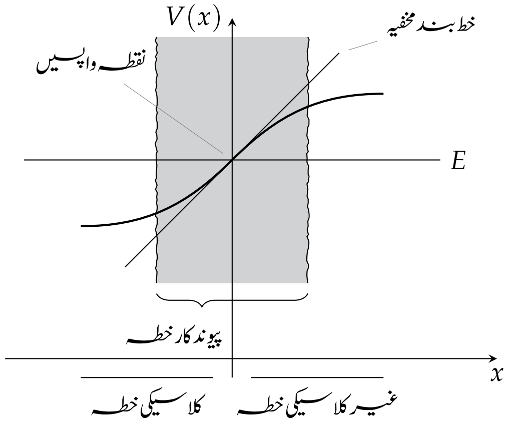
خارج شدہ ایلفا ذرہ کی توانائی کلیہ آئنسٹائن $E = mc^2$ سے اخذ کیا جا سکتا ہے

$$E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2. \tag{۸.۳۰}$$

جہاں m_p ولدہ مرکزہ کی کمیت m_d بیٹی مرکزہ کی کمیت اور m_α ایلفا ذرہ یعنی He^4 مرکزہ کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مرکزہ کیا ہوگا یاد رکھیں کہ ایلفا ذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لیکر فرار ہوتا ہے لحاظہ Z سے دو منفی کریں اور A سے چار منفی کریں گے۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی انصر تعین کریں۔ سمتی رفتار v کی اندازاً قیمت $E = (1/2)m_\alpha v^2$ سے حاصل کریں یہ مرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتا ہے لحاظہ v کی قیمت اصل سے زیادہ دیگا تاہم اس مرحلہ پر ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی اناصر کی تجربہ سے حاصل عرصہ حیات بالترتیب 6×10^9 سال اور 0.5 µs ہے۔

۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و فکر میں میں فرض کرتا رہا کہ مخفی کنواں یا رکاوٹ کی دیواریں انتصابی تھیں جس کی بنا بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ درحقیقت ہمارے بنیادی نتائج مساوات 8.16 اور 8.22 اس



شکل ۸.۶: دائیں ہاتھ نقطہ واپسی کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

صورت بھی کافی حد تک درست ہوں گے جب کناروں کی ڈھلان اتنی زیادہ نہ ہو یقیناً نظریہ گامو میں ایسی ہی صورت پر اسکا اطلاق کیا گیا۔ بہر حال ہم نقطہ واپسی $E = V$ جہاں کلاسیکی اور غیر کلاسیکی خطے ایک دوسرے کے ساتھ جڑتے ہیں اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ناقابلِ استعمال ہوتی ہے پر تفاعل موج کا قریبی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مکید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) کو دیکھتا ہوں، آپ مسئلہ بکھراو (سوال 8.10) حل کر سکتے ہیں۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم محور کو یوں رکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپسی $x = 0$ پر واقع ہو (شکل ۸.۶)۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین میں درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Be^{\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & x < 0 \text{ اگر}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left|p(x)\right|}}De^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x \left|p(x')\right|\,\mathrm{d}x'}, & x > 0 \text{ اگر}. \end{cases} \tag{۸.۳۱}$$

یہ فرض کرتے ہوئے تمام $x > 0$ E سے $V(x)$ بڑا ہو گا ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمائی کو خارج کر سکتے ہیں چونکہ $x \to \infty$ کرنے سے یہ بے قابو بڑھتا ہے۔ ہمارا کام ان دو حالوں کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے تاہم یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا پیش آتا ہے۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نے نقطہ واپسی جہاں $p(x) \to 0$ ہو گا ψ کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تفاعل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا ہے اور جیسا کہ ہمارا گمان تھا ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نقطہ واپسی کی پڑوس میں ناقابلِ استعمال ہوتا ہے لیکن اجازتی توانائیوں کو نکات واپسی پر سرحدی شرائط تعین کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا پیوند کار تفاعل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپسی کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تفاعل موج ψ_p صرف ممدہ کی پڑوس میں چاہیئے لحاظہ ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر

$$V(x) \cong E + V'(0)x, \tag{۸.۳۲}$$

سے تخمین کر کے اس خطی V کے لیے شروڈنگر مساوات حل کرتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x]\psi_p = E\psi_p,$$

یا

$$\frac{d^2\psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x\psi_p, \tag{۸.۳۳}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2}V'(0)\right]^{1/3}. \tag{۸.۳۴}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان α کو غیر تابع متغیر میں زن کر سکتے ہیں

$$z \equiv \alpha x, \tag{۸.۳۵}$$

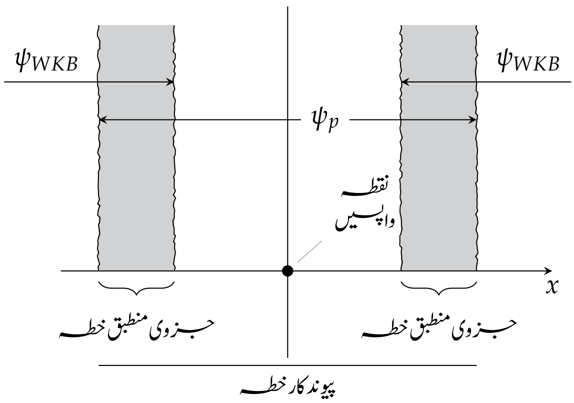
لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\frac{d^2\psi_p}{dz^2} = z\psi_p. \tag{۸.۳۶}$$

یہ مساوات ایری ہے جس کے حل تفاعلات ایر کہلاتے ہیں چونکہ مساوات ایری دو رتبی تفرقی مساوات ہیں لحاظہ دو خطی غیر تابع ایری تفاعلات $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ پائے جاتے ہیں۔ ان کا تعلق

جدول ۸.۱: ایری تفاعلات کے چند خواص

تفریقی مساوات:	$\frac{d^2y}{dz^2} = zy$
حل:	ایری تفاعلات کے خطی مجموعہ $Ai(z)$ اور $Bi(z)$
تکملی روپ:	$Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$ $Bi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{s^3}{3}+s} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right)\right] ds$



شکل ۸.۷: پیوند کار خطہ اور دو منطبق خطے۔

رتبہ $1/3$ کے بیسل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیئے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ کا خطی جوڑ

$$\psi_p(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x). \tag{۸.۳۷}$$

ہوگا۔ جہاں a اور b مناسب مستقلات ہیں۔

اب ψ_p مبدہ کی پڑوس میں تخمینی تفاعل موج ہے ہم نے مبدہ کے دونوں اطراف قریبی مشترکہ خطہ میں ψ_p کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کے ساتھ ہم پلو بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ دونوں اطراف کے مشترک خطے نقطہ واپسی کے اتنی قریب ہیں کہ خطی مخفیہ ψ_p کافی حد تک درست ہوگا لحاظہ ψ_p اصل تفاعل موج کا بہترین تخمین ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی فاصلہ پر ہیں کہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جا سکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کارآمد ہوگا لحاظہ مساوات 8.34 کی لاتعیت میں درج ذیل ہوگا

$$p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}. \tag{۸.۳۸}$$

بالخصوص مشترکہ خطہ دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x \left|p(x')\right| \mathrm{d}x' \cong \hbar\alpha^{3/2}\int_0^x \sqrt{x'}\,\mathrm{d}x' = \frac{2}{3}\hbar(\alpha x)^{3/2},$$

لحاظہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۳۹}$$

بڑی z کی صورت میں ایری تفاعلات کی متقاربی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خطہ دو میں پیوند کار تفعال موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۴۰}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \qquad \text{اور} \qquad b = 0. \tag{۸.۴۱}$$

ہم یہی کچھ مشترکہ خطہ ایک کے لیئے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 ہمیں $p(x)$ دیگا تاہم اس بار x منفی ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x' \cong \frac{2}{3}\hbar(-\alpha x)^{3/2} \tag{۸.۴۲}$$

اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}} \left[Be^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + Ce^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \tag{۸.۴۳}$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی z کے لیئے ایری تفاعل کی متقارب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں $b = 0$ لیا گیا ہو درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}}} \right]. \end{aligned} \tag{۸.۴۴}$$

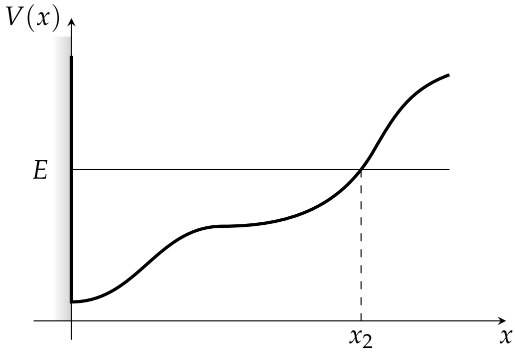
مشترکہ خطہ ایک میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \qquad \text{اور} \qquad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

جس میں a کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$B = -ie^{i\pi/4} D, \qquad \text{اور} \qquad C = ie^{-i\pi/4} D. \tag{۸.۴۵}$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش



شکل ۸.۸: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولزنی مستقل D کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبدہ سے اختیاری نقطہ x_2 منتقل کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & x < x_2 \text{اگر}; \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} |p(x')|\,\mathrm{d}x'\right], & x > x_2 \text{اگر}. \end{cases} \tag{۸.۴۶}$$

مثال ۸.۳: **ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔** فرض کریں ایک مخفیہ کنواں کی $x = 0$ پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں $\psi(0) = 0$ ہو گا لحاظہ مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} = n\pi, \qquad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یا درج ذیل ہو گا۔

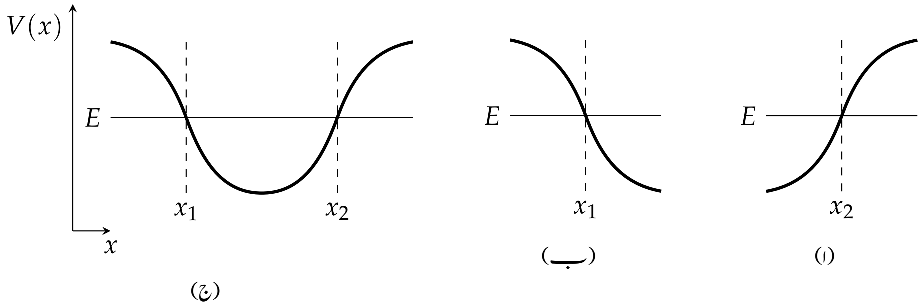
$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar \tag{۸.۴۷}$$

مثلاً نصف ہارمونی مرتعش

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \text{اگر}, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۴۸}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega\sqrt{x_2^2 - x^2}.$$



شکل ۸.۹: بالائی جانب ڈھلوان اور نیچے جانب ڈھلون نقطہ واپسی۔

ہو گا۔ جہاں درج ذیل نوطہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

لحاظہ

$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = m\omega\int_0^{x_2}\sqrt{x_2^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹازنی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right)\hbar\omega. \tag{۸.۴۹}$$

اس مخصوص صورت میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین در حقیقت ٹھیک ٹھیک اجازتی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □

مثال ۸.۴: **بغیر انتصابی دیواروں کا مخفیہ کنواں۔** اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-ا) ہوتی ہے مساوات 8.46 ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی (شکل ۸.۹-ب) پر انہی وجوہات کو بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل ہو گا سوال 8.9

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}\left|p(x')\right|\mathrm{d}x'\right], & x < x_1 \text{ اگر};\\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}}\sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & x > x_1 \text{ اگر}. \end{cases} \tag{۸.۵۰}$$

بالخصوص مخفیہ کنواں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ $(x_1 < x < x_2)$ میں تفاعل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}}\sin\theta_2(x), \qquad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4},$$ جہاں

لکھا جا سکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}}\sin\theta_1(x), \qquad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50۔ ظاہر ہے کہ $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ جہاں}} \tag{۸.۵۱}$$

یہ کوانٹازنی شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنواں کی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے دیہان رہے دو انتصابی دیواروں کے لیئے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتصابی دیوار کے لیئے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اُس عدد ($0, 1/4$ یا $1/2$) کا فرق ہے جو n سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین بڑی n کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لحاظ سے فرق صرف دیکھاوے کی حد تک ہے بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے شروڈنگر مساوات کیئے بغیر ایک سادہ تکمل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینی اجازتی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔ تفاعل موج از خود کہیں نہیں نظر آتا ہے۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل لچک کے ساتھ اُچھلتا ہوا کمیت m کی گیند کے کلاسیکی مسئلے کا مماثل کوانٹم میکانی مسئلے پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہو گی اس کو زمین سے بلندی x تفاعل لکھیں؟ منفی x کی صورت میں مخفیہ لامتناہی ہو گا چونکہ گیند وہاں کبھی کبھی نہیں جا سکتا۔

(ب) اس مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ایری تفاعل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی z کے لیئے $Bi(z)$ بے قابو بڑھتا ہے لحاظہ اس کو رد کرنا ہو گا۔ تفاعل $\psi(x)$ کو معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ اور $m = 0.100\,\mathrm{kg}$ لیکر حاصل کریں۔

(د) اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی eV میں کتنی ہو گی؟ اوسطاً یہ الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اشارہ: مسئلہ ویریل سے $\langle x \rangle$ تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی تھپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

(الف) اجازتی توانائیاں E_n کو m, g اور $\hbar$ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5(ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بلکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کوانٹم عدد n کتنا بڑا ہونا ہو گا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جس کی زاویائی تعدد ω ہو کی n ویں ساکن حال میں کمیت m کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی x_2 تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی (d) تک پہنچنا ہو گا کہ خطی مخفیہ مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی x_2 ہو خلل 1% تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2+d)-V_{lin}(x_2+d)}{V(x_2)}=0.01,$$

تب d کیا ہو گا؟

(ج) جب تک $5 \geq z$ ہو $Ai(z)$ کا متقارب روپ 1% تک درست ہو گا۔ جزو (ب) میں حاصل کردہ d کے لیئے n کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تا کہ $\alpha d \geq 5$ ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی n کے لیئے ایسا مترکہ خطہ موجود ہو گا جس میں خطی مخفیہ 1% تک کارآمد ہو گا اور بڑی z روپ کا ایری تفاعل بھی 1% تک درست ہو گا۔

سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ واپسی کے لیئے پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات 8.50 صفر کی تصدیق کریں۔

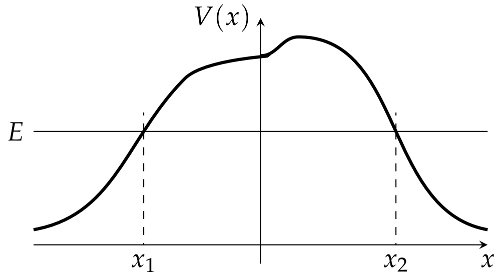
سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۰) سے بکھراو کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج لکھ کر آغاز کریں۔

$$\psi(x)\cong\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Ae^{\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}p(x')\,\mathrm{d}x'}+Be^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x<x_1);\\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}\left[Ce^{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}+De^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}\right], & (x_1<x<x_2);\\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Fe^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_2}^{x}p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x>x_2).\end{cases} \tag{۸.۵۲}$$

مستقل C کو صفر تصور نہ کریں۔ سرنگزنی احتمال $T=|F|^2/|A|^2$ کا حساب کر کے دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہو گا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ

$$V(x)=\alpha|x|^{\nu},$$



شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

جہاں v ایک مثبت عدد ہے کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو $v = 2$ جانچیں۔ جواب:

$$E_n = \alpha \left[(n - 1/2)\hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)} \tag{۸.۵۳}$$

سوال ۸.۱۲: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرکے سوال 2.51 کی مخفیہ کے لیے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجے کا ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $-[(9/8) - (1/\sqrt{2})]\hbar^2 a^2/m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشاکلی مخفیہ کے لیے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو $l = 0$ کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا

$$\int_0^{r_0} p(r)\,\mathrm{d}r = (n - 1/4)\pi\hbar, \tag{۸.۵۴}$$

جہاں r_0 نقطہ واپسی ہے یعنی ہم $r = 0$ کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگردمی مخفیہ

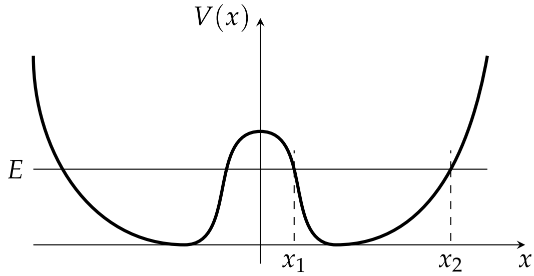
$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

کی اجازتی توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں جہاں V_0 اور a مستقلات ہیں۔ صرف $l = 0$ کی صورت پر غور کریں دیکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کمیت پر نہیں ہوگا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln\left(\frac{n + 3/4}{n - 1/4}\right).$$

سوال ۸.۱۴: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی درج ذیل روپ

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r)\,\mathrm{d}r = (n - 1/2)\pi\hbar \tag{۸.۵۵}$$



شکل ۸.۱۱: تشاکلی دوہرا کنواں؛ سوال 15.8۔

استعمال کر کے ہائڈروجن کی مکید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ معصر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز جزو شامل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل تکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2. \tag{۸.۵۶}$$

آپ دیکھیں گے کہ $n \gg l$ اور $n \gg 1/2$ کی صورت میں آپ کو بوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$E_{nl} \cong \frac{-13.6\,\mathrm{eV}}{[n-(1/2)+\sqrt{l(l+1)}]^2}. \tag{۸.۵۷}$$

سوال ۸.۱۵: تشاکلی دوہرا کنواں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم $E < V(0)$ والی مکید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خطہ (i) $x > x_2$، (ii) $x_1 < x < x_2$ اور (iii) $0 < x < x_1$ کے لیے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج لکھیں۔ نقطہ x_1 اور x_2 پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں x_2 کے لیے ایسا کیا گیا ہے آپ کو x_1 کے لیے کرنا ہو گا درج ذیل دیکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \dfrac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} |p(x')|\,\mathrm{d}x'\right], & (i) \\ \dfrac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & (ii) \\ \dfrac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[2\cos\theta e^{\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}|p(x')|\,\mathrm{d}x'} + \sin\theta e^{-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}\right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\theta \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{۸.۵۸}$$

(ب) چونکہ $V(x)$ تشاکلی ہے لحاظہ ہمیں صرف جفت $(+)$ اور طاق $(-)$ تفاعلات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اوّل الذکر صورت میں $\psi'(0) = 0$ ہوگا جبکہ مؤخر الذکر صورت میں $\psi(0) = 0$ ہوگا۔ دیکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹازنی شرط حاصل ہوتی ہے

$$\tan\theta = \pm 2e^{\phi}. \tag{۸.۵۹}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\phi \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{-x_1}^{x_1} \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'. \tag{۸.۶۰}$$

مساوات 8.59 تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ x_1 اور x_2 میں E کی قیمت داخل ہوتی ہے لحاظہ θ اور ϕ دونوں E کے تفاعلات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلند یا/اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں ϕ بڑا ہوگا لحاظہ e^{ϕ} انتہائی بڑا ہوگا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.59 کے تحت θ کی قیمتیں π کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ جہاں $1 \ll |\epsilon|$ ہے لکھ کر دیکھائیں کہ کوانٹازنی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp \frac{1}{2}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۱}$$

(د) فرض کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکافی ہے

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2, & x < 0, \text{اگر} \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2, & x > 0, \text{اگر} \end{cases} \tag{۸.۶۲}$$

اس مخفیہ کو ترسیم کرکے θ مساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دیکھائیں

$$E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۳}$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ ناقابلِ گزر ہو $\infty \to \phi$ تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ دوہری انحطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنواں میں یا دائیں کنواں میں ہو سکتا ہے۔ متناہی رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنوں کے بیچ رابطہ ممکن ہوگا لحاظہ انحطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات (ψ_n^+) کی توانائی معمولی کم اور طاق تفاعلات (ψ_n^-) کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

(و) فرض کریں ذرہ دائیں کنواں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیاں کنواں میں پایا جاتا ہو۔ دیکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنواں سے دوسرہ اور دوسرے سے واپس پہلا کنواں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$\tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}. \tag{۸.۶۴}$$

(ھ) متغیر ϕ کی قیمت جزو (د) میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لیئے تلاش کریں اور دیکھائیں جب $V(0) \gg E$ ہو تب $\phi \sim m\omega a^2/\hbar$ ہو گا۔

سوال ۸.۱۶: **سٹارک اثر میں سرنگزنی۔** بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جوہر سے سرنگزنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار یہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربہ میں ایسا ہو گا؟ ہم ایک سادہ ترین یک بُعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری متناہی چکور کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنواں کی تہہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہو گی یہاں فرض کریں $V_0 \gg \hbar^2/ma^2$ ہے۔ اشارہ: یہ $2a$ چوڑائی کی لامتناہی چکور کنواں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب $H' = -\alpha x$ متعارف کریں بیرونی برقی میدان $E = -E_{ext}\hat{\imath}$ میں $\alpha = eE_{ext}$ ہو گا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے $(\alpha a \ll \hbar^2/ma^2)$۔ کل مخفیہ کا خاکہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت x رخ سرنگزنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگزنی جز ضرب γ مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو فرار ہونے کے لیئے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب: $\gamma = \sqrt{8mV_0^3}/3\alpha\hbar, \tau = (8ma^2/\pi\hbar)e^{2\gamma}$۔

(د) معقول اعداد $V_0 = 20\,\mathrm{eV}$ بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت $a = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ عمومی جوہر کا رداس $E_{\text{بیرونی}} = 7 \times 10^6\,\mathrm{V/m}$ تجربہ گاہ میں مضبوط میدان e اور m الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ τ کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کوانٹم سرنگزنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود باخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت m رداس R اور قد h کا نلکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی مکام $(h/2)$ سے بلندی کو x سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی mgx ہو گی اور بوتل اُس صورت گرے گی جب x کی قیمت فاصل قیمت $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$ تک پہنچے۔ سرنگزنی احتمال مساوات 8.22 کو $E = 0$ کے لیئے حاصل کریں۔ حراری توانائی ($(1/2)mv^2 = (1/2)k_BT$) لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹم سکونیات کہا جا سکتا ہے جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت ہے $V(r,t) = V(r)$۔ایسی صورت میں تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات سے حل کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

جہاں $\psi(r)$ غیر تابع شروڈنگر مساوات

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نمائی جز ضربی $e^{iEt/\hbar}$ ظاہر کرتا ہے جو کسی بھی طبعی مقدار کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے $|\psi|^2$ لحاظہ تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی۔ان ساکن حالات کے خطی جوڑ تیار کر کے ہم ایسے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں جن کی تابعیت وقت زیادہ دلچسپ ہو تاہم اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کے انتقال جنہیں بعض اوقات کوانٹم چھلانگ کہتے ہیں کی خاطر ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ متعارف کریں کوانٹم حرکیات۔کوانٹم حرکیات میں ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا حل بلکل ٹھیک ٹھیک معلوم کیا جا سکتا ہے ہاں اگر ہیملٹنی میں غیر تابع وقت حصہ لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو تب ہم اسے اضطراب تصور کر سکتے ہیں۔اس باب میں میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں اور اس کا اطلاق جوہر سے اشعاعی اخراج اور انجذاب پر کرتا ہوں جو اس کی اہم ترین استعمال ہے۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں غیر مضطرب نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی H^0 کے امتیازی حالات ہوں گے

$$H^0\psi_a = E_a\psi_a, \qquad \text{اور} \qquad H^0\psi_b = E_b\psi_b \tag{۹.۱}$$

اور معیاری عمودی ہوں گے

$$\langle \psi_a \mid \psi_b \rangle = \delta_{ab} \tag{۹.۲}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے بالخصوص درج ذیل

$$\psi(0) = c_a\psi_a + c_b\psi_b \tag{۹.۳}$$

اس سے فرق نہیں پڑتا کے تفاعلات ψ_a اور ψ_b موزا وہ فضائی تفاعلات یا چکر کار یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے لحاظ میں $\psi(t)$ لکھتا ہوں جس سے میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اجطراب کی صورت میں ہر جز اپنی خصوصی قوت نمائی جز ضرن کے ساتھ ارتقا پائے گا

$$\psi(t) = c_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \tag{۹.۴}$$

ہم کہتے ہیں کہ حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے جس سے ہمارا اصل مطلب یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حال حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہو گا۔ تفاعل ψ کی معمولزنی کے تحت درج ذیل ہو گا

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1 \tag{۹.۵}$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

اب فرض کریں ہم تابع وقت اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ تشکیل کرتے ہیں لحاظہ تفاعل موج $\psi(t)$ کو بھی انکا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہو گا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے

$$\psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b(t)\psi_b e^{-E_bt/\hbar} \tag{۹.۶}$$

میں وقت نمائی جز ضربیوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں جیسا کے بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں لیکن میں چاہتا ہوں کے تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کے صورت میں بھی پایا جاتا ہو ہمیں نظر آتا رہے ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b تعین کریں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ذرہ آغاز میں حال $\psi_a(c_a(0) = 1, c_b(0) = 0)$ میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$ میں پایا جاتا ہو تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں منتقل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالبہ کرتے ہیں کہ $\psi(t)$ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرے

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad \text{جہاں } H = H^0 + H'(t) \tag{۹.۷}$$

مساوات 9.6 اور 9.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} &c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ &= i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} + c_a\psi_a\left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right)e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b\left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right)e^{-iE_bt/\hbar}\right] \end{aligned}$$

مساوات 9.1 کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزا دائیں ہتھ کے آکری دو اجزا کے ساتھ کٹ جاتے ہیں لحاظہ درج ذیل رہ جائے گا

$$c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar}\right] \tag{۹.۸}$$

تفاعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لیکر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت مساوات 9.2 بروۓ کار لاتے ہوئے $\dot{c}_a$ کو الگ کرتے ہیں

$$c_a\langle\psi_a \mid H' \mid \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a \mid H' \mid \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کی غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں

$$H'_{ij} \equiv \langle\psi_i \mid H' \mid \psi_j\rangle \tag{۹.۹}$$

دیہان رہے کہ H' ہرمیشی ہے لحاظہ $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہو گا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دیکر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}\left[c_aH'_{aa} + c_bH'_{ab}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۰}$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے $\dot{c}_b$ الگ کیا جا سکتا ہے

$$c_a\langle\psi_b \mid H' \mid \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_b \mid H' \mid \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_b e^{-iE_bt/\hbar}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar}\left[c_bH'_{bb} + c_aH'_{ba}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۱}$$

مساوات 9.10 اور 9.11 مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ تعین کرتے ہیں یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی تابع وقت شروڈنگر مساوات کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری ارکان قالب صفر ہوں گے عمومی صورت کے لیئے سوال 9.4 دیکھیں

$$H'_{aa} = H'_{bb} = 0 \tag{۹.۱۲}$$

اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ اختیار کرتی ہے

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}c_b, \qquad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0 t}c_a \tag{۹.۱۳}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} \tag{۹.۱۴}$$

میں $E_b \geq E_a$ لوں گا لحاظہ $\omega_0 \geq 0$ ہو گا۔

سوال ۹.۱: ایک ہائڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان $E = E(t)\hat{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $n = 1$ اور چار گنا انحطاطی پہلا ہیجان حالات $n = 2$ کے بیچ اضطراب $H' = eEz$ کے چاروں قالبی ارکان H'_{ij} کا حساب لگائیں۔ یہ بھی دیکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیئے $H'_{ii} = 0$ ہو گا۔ تبصرہ محور z کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروہِ کار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک تکمل حل کرنا ہو گا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لحاظہ زیادہ بلند ہیجان حالات میں منتقلی کو نظر انداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تنظیم کے طور پر کام کرے گا۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام خالص ψ_a اور کسی ψ_b کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کے غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہو گا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا نازک ہے یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانیہ کے لیئے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بلکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں فرض کیجیے گا کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر منقطع کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی فرق نہیں پڑے گا تاہم نتائج کی معقول تشریح ممکن ہو گی۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کی شکل وصورت وقت کے لحاظ سے δ تفاعل ہے

$$H' = U\delta(t)$$

جہاں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ ہے اور $U_{ab} = U_{ba}^{*} \equiv \alpha$ لیں۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں تب $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کیا ہوں گے اور کیا $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہو گا۔ انتقال ہونے کا احتمال $t \to \infty$ کے لیے $P_{a\to b}$ کیا ہو گا۔ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

جواب: $P_{a\to b} = \sin^2(|\alpha|/\hbar)$

۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بلکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا تاہم کم H' کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یکے بعد دیگرِ تخمین سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال

$$c_a(0) = 1, \qquad c_b(0) = 0 \tag{۹.۱۵}$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں رہے گا۔

رتبہ صفر:

$$c_a^{(0)}(t) = 1, \qquad c_b^{(0)}(t) = 0 \tag{۹.۱۶}$$

میں تخمین کے رتبہ کو زیر، بالا میں کوسین میں لکھتا ہوں۔

ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پر کر کے رتبہ اوّل تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ اوّل:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1;\\ \frac{\mathrm{d}c_b^{(1)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۷}$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پُر کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ دوم:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(2)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t H'ba(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' \Rightarrow\\ c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t H'_{ab}(t')e^{-i\omega_0 t'}\left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'')e^{i\omega_0 t''}\,\mathrm{d}t''\right]\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۸}$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا $(c_b^{(2)}(t) = c_b^{(1)}(t))$۔ دیہان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبی جز بھی پایا جاتا ہے دو رتبی تصحیح صرف تکملی حصہ ہو گا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے n ویں رتبی تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $n+1$ ویں رتبہ کے لیئے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں H' کا کوئی جز ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اوّل تصحیح میں H' کا ایک جز ضربی پایا جاتا ہے دور تبی تصحیح میں H' کے دو جز ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں خلل $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے بلکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہوگا۔ ہاں H' کی طاقت 1 تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2$ ایک کے برابر ہے اور رتبہ اوّل تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جا سکتی ہے زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیئے بھی ایسا ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa}=H'_{bb}=0$ نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب $c_a(0)=1, c_b(0)=0$ ہو رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ H' کی طاقت ایک تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2=1$ ۔

(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جا سکتا ہے درج ذیل لیکر

$$\mathrm{d}_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{aa}(t')\,\mathrm{d}t'} c_a, \qquad \mathrm{d}_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{bb}(t')\,\mathrm{d}t'} c_b \tag{۹.۱۹}$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$\dot{\mathrm{d}}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_b; \qquad \dot{\mathrm{d}}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_a \tag{۹.۲۰}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')]\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۲۱}$$

یوں H' کے ساتھ اضافی جز ضرب $e^{i\phi}$ منسلک ہونے کے علاوہ d_a اور d_b کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے جز (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ اپنے جواب کا جز (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں فرق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0)=a, c_b(0)=b$ کے لیئے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بلکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائن نما اضطراب

فرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائن نما ہو

$$H'(r,t) = V(r)\cos(\omega t) \tag{۹.۲۲}$$

تب درج ذیل ہو گا

$$H'_{ab} = V_{ab}\cos(\omega t) \tag{۹.۲۳}$$

جہاں V_{ab} درج ذیل ہے

$$V_{ab} \equiv \langle \psi_a \mid V \mid \psi_b \rangle \tag{۹.۲۴}$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری قابلی ارکان صفر ہوتے ہیں لحاظہ پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اوّل تک متغیرات تلاش کریں گے لحاظہ زیرِ بالا میں ترتیب کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اوّل تک درج ذیل ہو گا مساوات 9.17

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar}V_{ba}\int_0^t \cos(\omega t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' = -\frac{iV_{ba}}{2\hbar}\int_0^t \left[e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'}\right]\mathrm{d}t' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right] \end{aligned} \tag{۹.۲۵}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہو گا۔ انتقالی تعدد ω_0 کے بہت قریب جبری تعدد ω پر توجہ رکھنے سے چکور کوسین میں دوسرا جزو غالب ہو گا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

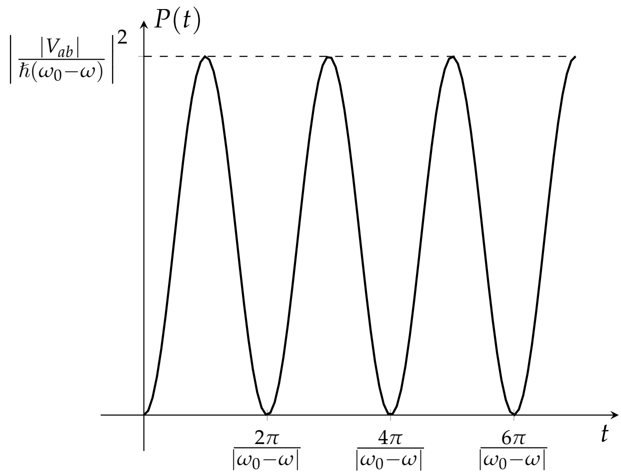
$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega| \tag{۹.۲۶}$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر انتقال کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0-\omega}\left[e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2}\right] \\ &= -i\frac{V_{ba}}{\hbar}\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{\omega_0-\omega}e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \end{aligned} \tag{۹.۲۷}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کرے کا لمحہ t پر حال ψ_b میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا جس کو انتقالی احتمال کہتے ہیں

$$P_{a\to b}(t) = \left|c_b(t)\right|^2 \cong \frac{\left|V_{ab}^2\right|}{\hbar^2}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۲۸}$$



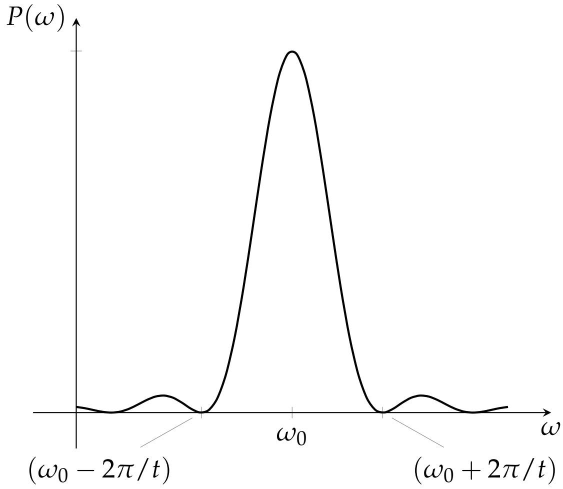
شکل ۹.۱: سائن نما اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات 28.9)۔

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائن نما ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2/\hbar^2(\omega_0-\omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جو لازمی طور پر ایک (1) سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہو گا یہ واپس صفر کو گرتا ہے۔ لمحات $t_n = 2n\pi/|\omega_0-\omega|$ جہاں $n = 1, 2, 3, \ldots$ ہیں پر ذرہ لازماً نچلی حال میں ہو گا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصہ کے لیئے چالو نہ کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ وقت $\pi/|\omega_0-\omega|$ پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی اُمید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقال نظریہ اضطراب کی پیدا کرادہ مصنوئی خاصیت نہیں ہے بلکہ بلکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہو گا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہو گا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقال کی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب جبری تعدد قدرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a\to b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی $(|V_{ab}t/2\hbar|)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi/t$ ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکارا ہو جاتا ہے۔ لحاظہ ہم بہت کم t کے لیئے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بلکل ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے ایک تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t}/2$ سے جبکہ دوسرا $e^{-i\omega t}/2$ سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2}e^{-i\omega t}, \qquad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2}e^{i\omega t} \tag{۹.۲۹}$$



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالمقابل متحرک تعدد (مساوات 9.28)۔

ہیملٹنی قالب کو ہرمیشی بنانے کی خاطر متاخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم $c_a(t)$ کے لیئے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو کو چنتے ہیں۔ اسکو گھومتی موج تخمین کہتے ہیں جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیئے بغیر بلکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ کے لیئے گھومتی موج تخمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رابی تعدد

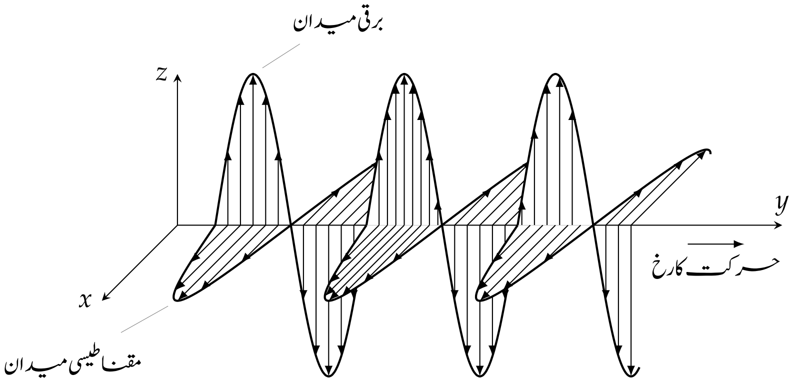
$$\omega_r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (\left|V_{ab}\right|/\hbar)^2} \tag{۹.۳۰}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتقالی احتمال $P_{a\to b}(t)$ تعین کر کے دکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہو گا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں $P_{a\to b}(t)$ عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہو گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور V پر یہ کیا پابندی عاید کرتی ہے۔

(د) نظام پہلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟



شکل ۹.۳: برقناطیسی موج۔

۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خرد امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم قائمہ ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہو گا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی جز کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طولِ موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائن نما ارتعاشی برقی میدان

$$E = E_0 \cos(\omega t)\hat{k} \tag{۹.۳۱}$$

کے زیر اثر ہو گا۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور z رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔

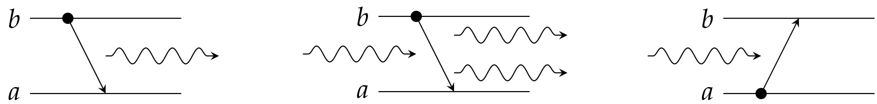
$$H' = -qE_0 z\cos(\omega t) \tag{۹.۳۲}$$

ظاہر ہے درج ذیل ہو گا

$$H'_{ba} = -pE_0\cos(\omega t). \text{where} p \equiv q\langle \phi_b|z|\phi_a\rangle \tag{۹.۳۳}$$

عمومی طور پر ψ متغیر z کا جفت یا طاق تفاعل ہو گا یہ ہماری اُس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ H' کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اُسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہو گا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہو گا۔

$$V_{ba} = -pE_0 \tag{۹.۳۴}$$



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود باخود اخراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیری حال ψ_a میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حال ψ_b میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a\to b}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۵}$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک فوٹان جذب کیا (شکل ۹.۴-ا)۔ جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ فوٹان در حقیقت کوانٹم برقی حرقیات برقناطیسی میدان کی کوانٹم نظریہ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اُس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حال $(c_a(0) = 0, c_b(0) = 1)$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بلکل وہی ہوں گے البتہ اس بار $P_{b\to a} = \left|C_a(t)\right|^2$ حاصل ہو گا جو نیچے رخ زیریں لیول میں منتقل کا احتمال ہو گا۔

$$P_{b\to a}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۶}$$

چونکہ ہم $b \leftrightarrow a$ کو آپس میں بدل رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے لحاظہ لاظماً یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا جز چنتے ہیں جس کے نصب نما میں $\omega + -\omega_0$ پایا جاتا ہے باقی حساب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حال میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں منتقل ہوتا ہے اور اس کے احتمال بلکل ٹھیک وہی ہو گا جو زیریں حال سے بالائی حال منتقلی کا ہے اس عمل کو تحرق زدہ اخراج کہتے ہیں۔ جس کی پیش گوئی آئینسٹائین نے کی تھی۔

تحرق زدہ اخراج کی صورت میں براقناطیسی میدان توانائی $\hbar\omega_0$ جوہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک فوٹان داخل ہوا اور دو فوٹان ایک اصل جس نے تحرق پیدا کیا اور ایک تحرق کی بنا پیدا باہر نکلے (شکل ۹.۴-ب)۔

اگر ایک بوتل میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی فوٹان دو فوٹان پیدا کرے گا اور یہ دو فوٹان از خود چار پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایمپلیفیکیشن ممکن ہوگا تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے فوٹان خارج ہوں گے لیزر اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دیہان رہے کہ لیزر عمل کے لیئے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو پاپولیشن انورزن کہتے ہیں چونکہ انجذاب جس کی بنا ایک فوٹان کم ہوتا ہے تحرقی اخراج جو ایک پیدا کرتا ہے بل مقابل ہوں گے لحاظہ دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے ایمپلیفیکیشن پیدا نہیں ہوگا۔

انجذاب اور تحرقی اخراج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود باخود اخراج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان کی عدم موجودگی میں جو اخراج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک فوٹان خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی زریعہ زمینی حال میں پہنچتا ہے پہلی نظر میں یہ سمجھ نہیں آتی کہ خود باخود اخراج کیوں کر ہوگا۔ ایک ساکن حال اگرچہ ہیجان جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کوانٹم برقی حرقیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی $\hbar\omega/2$ کا حامل ہوگا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقناطیسی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطی اخراج خود باخود اخراج کا سبب بنتی ہے۔ اگر جڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام اخراج تحرقی اخراج ہوگی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہوگا کہ آیا آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی اخراجی عمل کے بلکل الٹ ہے جہاں تمام خراج خود باخود ہوتا ہے اور تحرقی اخراج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کوانٹم برقی حرقیات اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجذاب تحرقی اخراج اور خود باخود اخراج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود اخراج کی وجہ زمینی حال برقناطیسی میدان کا اضطراب پیش نہیں کی تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود اخراج کا حساب کرنے کا مجاز بناتی ہے جس سے ہیجان جوہری حال کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جا سکتے ہے۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتفاقی برقناطیسی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیطہ ہوگا۔

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 \tag{۹.۳۷}$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$P_{b\to a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۸}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر یک رنگی موج کے لیے درست ہو گا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بڑی تعددی پٹی کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں $u \to \rho(\omega)d\omega$ ہو گا جہاں $\rho(\omega)d\omega$ تعددی ساتھ $d\omega$ میں کثافت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل تکمل کا روپ اختیار کرے گا

$$P_{b\to a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2\int_0^{\infty}\rho(\omega)\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}d\omega \tag{۹.۳۹}$$

کسر کی کوسین میں جزو کی چوٹی ω_0 پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲) جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہو گا لحاظہ ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے تکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{2\left|p\right|^2}{\epsilon_0\hbar^2}\rho(\omega_0)\int_0^{\infty}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}d\omega \tag{۹.۴۰}$$

متغیرات تبدیل کر کے $x \equiv (\omega_0-\omega)t/2$ لکھ کر تکمل کے حدوں کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر چونکہ باہر تکمل صفر ہی ہے اور قطعی تکمل کو جدول سے دیکھ کر

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi \tag{۹.۴۱}$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{\pi\left|p\right|^2}{\epsilon_0\hbar^2}\rho(\omega_0)t \tag{۹.۴۲}$$

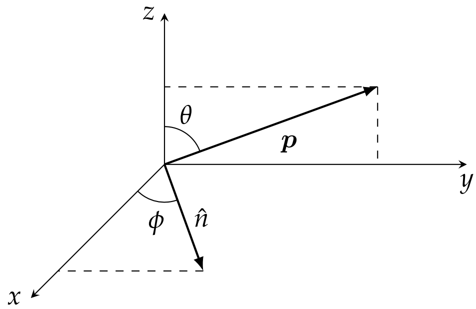
اس بار تحویلی احتمال وقت t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس غیر اتا کی تعدد کی وسعت پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بلخصوص تحویلی شرح $(R \equiv dP/dt)$ ایک مستقل ہو گا:

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۳}$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تقطیب شدہ ہے۔ لیکن ہم اُس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکنہ تکتیب پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہو گی۔ ہمیں $\left|p\right|^2$ کی جگہ $\left|\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}\right|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہو گی جہاں مساوات 9.33 کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{p} \equiv q\langle\psi_b|\boldsymbol{r}|\psi_a\rangle \tag{۹.۴۴}$$

اور اوسط تمام تکتیب اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}|^2$ کی اوسط زنی۔

اوسط درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ کروی محدد منتخب کر کے حرکت کے رخ کو z محور پر رکھیں (تاکہ تکتیب xy سطح میں ہو) اور مستقل $\boldsymbol{p}$ سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔

$$\hat{n} = \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \tag{۹.۴۵}$$

تب

$$|\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}|^2_{ave} = \frac{1}{4\pi}\int|\boldsymbol{p}|^2\sin^2\theta\sin^2\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}|^2_{ave} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}|\boldsymbol{p}|^2 \tag{۹.۴۶}$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر تکتیبی، غیر اتفاقی شعاع کے زیرِ اثر حال b سے حال a میں تحرقی اخراج کا تحویلی شرح درج ذیل ہو گا۔

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۷}$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیارِ اثر کا فتالبی رکن p ہو گا مساوات 9.44 اور $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$ پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافتِ توانائی $\rho(\omega_0)$ ہو گی۔

۹.۳ خود با خود اخراج

۹.۳.۱ آئنسٹائن A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالائی حال ψ_b میں N_b جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود با خود اخراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو $N_b A$ ذرات خود با خود اخراج کے عمل سے چھوڑیں گے۔

جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحرقی اخراج کی تحویلی شرح برقناطیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہو گا (ω_0) $B_{ab}\rho$۔ یوں بالائی حال کو تحرقی اخراج کی بنا اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات چھوڑیں گے۔ اسی طرح انجزابی ریٹ $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۸}$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہو گی اور $dN_b/dt = 0$ ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۴۹}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درجہ حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولٹزمان جزو ضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راست متناسب ہو گا لحاظہ

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T} \tag{۹.۵۰}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۵۱}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{۹.۵۲}$$

ان دونوں ریاضی جملوں کو موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$B_{ab} = B_{ba} \tag{۹.۵۳}$$

اور درج ذیل حاصل ہو گا

$$A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba} \tag{۹.۵۴}$$

مساوات 9.53 اُس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجزاب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرقی اخراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر

مساوات 9.54 ہے جو ہمیں تحرقی اخراجی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود باخود اخراجی شرح A دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2 \tag{9.55}$$

لحاظہ خود باخود اخراجی شرح درج ذیل ہو گا

$$A = \frac{\omega_0^3|p|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{9.56}$$

سوال ۹.۸: نیچے رختحویل میں خود باخود اخراج اور حراری تحرقی اخراج وہ تحرقی اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں مقابلہ ہو گا۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $300\,\mathrm{K}$ $T =$ پر $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت کم تعددوں پر حراری تحرقی اخراج غالب ہو گا جبکہ $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود باخود اخراج غالب ہو گا۔ دکھائی دینے والی روشنی کے لیئے کونسا غالب ہو گا؟

سوال ۹.۹: برقناطیسی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود اخراجی اشارہ در حقیقت تحرقی اخراج مساوات 9.47 ہو گا۔ لحاظہ آئنسٹائن عددی سر A اور B جانے بغیر آپ خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیئے کوانٹم برقی حرقیات بروئے کار لانی ہو گی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک فوٹان پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہو گا۔

(الف) مساوات 5.111 کی جگہ $N_\omega = d_k$ پُر کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارا ہونا ہو گا ورنہ کل خلائی توانائی لامتناہی ہو گی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیئے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات 9.47 استعمال کر کے خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحرقی اخراج کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحرقی اخراج کہ نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بلخصوص وقتی دورانیہ dt میں جوہروں میں تعداد کی کمی $A\,dt$ ہو گی۔

$$dN_b = -AN_b dt \tag{9.57}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیئے جا رہے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \tag{9.58}$$

ظاہر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد قوت نمائی طور پر کم ہو گی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{1}{A} \tag{۹.۵۹}$$

جسی اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ ہو گی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علامتیت کے بنا ایسا کیا گیا تحرقی اخراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر قابل رصوص سطح سے قطع نظر حال $\psi_b \quad \rightarrow \quad \psi_a$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی ψ_b کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات $(\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots)$ میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} \tag{۹.۶۰}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک سپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرج کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود باخود اخراجہ تنزل کی بنا حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\langle n|x|n'\rangle \hat{i}$$

آپ نے سوال 3.33 میں x کے قابلی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n.n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n'.n-1})$$

جہاں مرتعش کی قدرتی تعدد ω ہے۔ مجھے تحرقی اخراج کے تعدد کے لیئے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم اخراج کی بات کر رہے ہیں لحاظہ n' لازمی طور پر n سے نیچے ہو گا۔ ہماری اس مقصد کی غرض سے تب درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}\delta_{n'.n-1}\hat{i} \tag{۹.۶۱}$$

بظاہر تحویل سیڑھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور اخراجی فوٹان کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega \tag{۹.۶۲}$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر اخراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہو گا۔

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \tag{۹.۶۳}$$

اور n ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہو گا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \tag{۹.۶۴}$$

چونکہ ہر ایک اخراجی فوٹان $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لحاظہ اخراجی طاقت $A\hbar\omega$ ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(n\hbar\omega)$$

یا n ویں حال میں مرتعش کی توانائی $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \tag{۹.۶۵}$$

ابتدائی توانائی E کا کوانٹم مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اخراجی طقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار q کا اخراجی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{۹.۶۶}$$

ہارمونی مرتعش $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ جس کا حیطہ x_0 ہو گا میں مسرع $a = -x_0\omega^2\cos(\omega t)$ ہو گا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2x_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2x_0^2$ ہے لحاظہ $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہو گا۔ جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}E \tag{۹.۶۷}$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی اخراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد ($\hbar \to 0$) میں کلاسیکی اور کوانٹم کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹم کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش طاقتی اخراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحویل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائڈروجن کے چاروں $n = 2$ حالات کے لیئے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔
اشارہ: آپ کو $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$، $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$ وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے قالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر تکملات صفر کے برابر ہوں گے لحاظہ حساب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔
جواب: سوائے ψ_{200} جو لامتناہی ہے باقی تمام کے لیئے 1.60×10^{-9} سیکنڈز ہو گا۔

۹.۳.۳ قواعد انتخاب

شرح خود باخود اخراج درج ذیل روپ کے قالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال 9.11 حل کیا ہو اگر نہیں کیا اسی وقت پہلے اس کو حل کریں تو آپ نے دیکھا ہو گا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں۔ کیا بہتر ہو تا اگر ہم پہلے سے جان سکتے کہ کون سے تکملات صفر دیں گے تا کہ ہم اپنا قیمتی وقت غیر ضروری تکملات حل کرنے میں صرف نہ کرتے۔ فرض کریں ہم ہائڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کا ہیملٹنی کروی تشاکلی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹم اعداد n, l اور m سے ظاہر کر سکتے ہیں اور قالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n'l'm' | r | nlm \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت تبادلی رشتوں اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہرمیشیپن مل کر اس مقدار پر طاقتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

انتخابی قواعد برائے m اور m':

ہم پہلے x, y اور z کے ساتھ L_z کے مقلب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب 4 میں حاصل کیا گیا مساوات 4.122 دیکھیں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, [L_z, y] = -i\hbar x, [L_z, z] = 0 \tag{۹.۶۸}$$

ان میں سے تیسرے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n'l'm' \big| [L_z, z] \big| nlm \rangle = \langle n'l'm' | L_z z - z L_z | nlm \rangle \\ &= \langle n'l'm' \Big| [(m'\hbar) z - z(m\hbar)] \Big| nlm \rangle = (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | z | nlm \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ

$$\langle n'l'm' | z | nlm \rangle = 0 \quad \text{یا پھر} \quad m' = m \quad \text{یا} \tag{۹.۶۹}$$

لحاظہ ماسوائے $m' = m$ کی صورت میں z کے قابلی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔
ساتھ ہی x کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\big|[L_z,x]\big|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'\big|(L_zx - xL_z)\big|\,nlm\rangle\\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle \tag{۹.۷۰}$$

یوں آپ y کے قابلی ارکان کو مطابقتی x کے قابلی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی y کے قابلی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں y کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\big|[L_z,y]\big|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'\big|(L_zy - yL_z)\big|\,nlm\rangle\\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle \tag{۹.۷۱}$$

بلخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m'-m)^2\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا۔

$$\text{یا}\ (m'-m)^2 = 1,\ \text{یا پھر}\ \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = 0 \tag{۹.۷۲}$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں m کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$\Delta m = \pm 1\ \text{یا}\ 0\ \text{تک کوئی عبور واقع نہیں ہو گا جب} \tag{۹.۷۳}$$

اس نتیجہ کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہو گا فوٹان چکر ایک کا حامل ہے لحاظہ اس کے m کی قیمت $1, 0$ یا -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیارِ حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت فوٹان جو کچھ لے جاتا ہے جوہر اتنا کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے l اور l':

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبیت رشتہ اخذ کرنے کو کہا گیا۔

$$[L^2,[L^2,r]] = 2\hbar^2(rL^2 + L^2r) \tag{۹.۷۴}$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقلب کو $\langle n'l'm'|$ اور $|nlm\rangle$ کے بیچ لپیٹ کر انتخابی قائدہ اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\Big|[L^2,[l^2,r]]\Big|nlm\rangle &= 2\hbar^2\langle n'l'm'\Big|(rL^2+L^2)\Big|nlm\rangle\\ &= 2\hbar^4[l(l+1)+l'(l'+1)]\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = \langle n'l'm'\Big|(L^2[L^2,r]-[L^2,r]\\ &= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|[L^2,r]\Big|nlm\rangle\\ &= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|(L^2r-rL^2)\Big|nlm\rangle\end{aligned}$$

$$= \hbar^4[l'(l'+1)-l(l+1)]^2\langle n'l'm'|r|nlm\rangle \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ

$$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = [l'(l'+1)-l(l+1)]^2 \text{ یا}$$

$$\text{یا پھر } \langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0 \tag{۹.۷۶}$$

لیکن

$$[l'(l'+1)-l(l+1)] = (l'+l+1)(l'-l)$$

اور

$$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = (l'+l+1)^2+(l'-l)^2-1$$

کی بنا مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

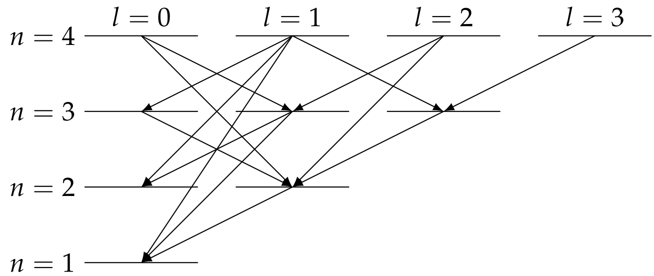
$$[(l'+l+1)^2-1][(l'-l)^2-1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اُس صورت جب $0 = l = l'$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھٹکارہ حاصل کیا گیا ہے لحاظ سے شرط $l' = l \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں l کے لیئے انتخابی قائدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{کوئی عبور واقع نہیں ہوگا جب تک } \Delta l = \pm 1 \tag{۹.۷۸}$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ فوٹان چکر ایک کا حامل ہے لحاظ زاویائی معیارِ حرکت جمع کرنے کے قواعد $l' = l+1, l' = l$ یا $l' = l-1$ کی اجازت دیں گے۔ برقی جفت کتنی اخراج کے لیئے زاویائی معایارِ حرکت کی بقا درمیانی صورت کی اجازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود اخراج کے ذریع تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد نہ ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائڈروجن کے لیئے ابتدائی چار بوہر



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجازتی تنزل۔

سطحوں کے لیے اجازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دیہان رہے کہ $2S$ حال ψ_{200} اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لحاظہ یہ تنزل پذیر نہیں ہو گا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عرصہ حیات مثلاً $2P$ حالات ψ_{210}، ψ_{211} اور ψ_{21-1} سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصادماً کی بنا یا ممنوعہ تحویل کی بنا سوال 9.21 یا متعدد فوٹان کے اخراج کے بنا تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات 9.74 میں دیگئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور $r.L = r.(r \times p) = 0$ کو استعمال کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2 z)$$

z سے r تک عمومیت دینا آسان کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دیکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0$ ہو گا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کمی ختم ہو گی۔

سوال ۹.۱۴: ہائڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جفت کتب تحویل کے زریع پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|\,300\rangle \to |\,nlm\rangle \to |\,n'l'm'\rangle \to \cdots \to |\,100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عرصہ حیات کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہو گا لحاظہ اس ترتیب میں ہر بار صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عرصہ حیات حاصل ہو گا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویلی شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \langle\psi_n \mid \psi_m\rangle = \delta_{nm} \tag{۹.۷۹}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب تشکیل دیں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H = H_0 + H'(t) \tag{۹.۸۰}$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیمی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\psi(t) = \sum c_n(t)\psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۹.۸۱}$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہو گا

$$c_m = -\frac{i}{\hbar}\sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} \tag{۹.۸۲}$$

جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے

$$H'_{mn} \equiv \langle\psi_m\Big|H'\Big|\psi_n\rangle \tag{۹.۸۳}$$

(ب) اگر نظام حال ψ_N میں آغاز کریں تب دیکھائیں کہ رتبہ اوّل نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{NN}(t')dt' \tag{۹.۸۴}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mN}(t')e^{i(E_m-E_N)t'/\hbar}dt' \quad (m \neq N) \tag{۹.۸۵}$$

(ج) فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منقطع کرنے کے علاوہ H' مستقل ہے۔ حال N سے حال $M(M \neq N)$ میں تحویل کے احتمال کو t کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$4\Big|H'_{MN}\Big|^2 \frac{\sin^2[(E_N-E_M)t/2\hbar]}{(E_N-E_M)^2} \tag{۹.۸۶}$$

(د) فرض کریں H' وقت کا سائن نما تفاعل $H' = V\cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دیکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور انکا احتمال درج ذیل ہے۔

$$P_{N\to M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2} \tag{۹.۸۷}$$

(و) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتفاقی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دیکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیئے تحرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اوّل تک سوال 9.15(ج) اور (د) کے لیئے تلاش کریں۔ معمولزنی شرط

$$\sum_m \left|c_m(t)\right|^2 = 1 \tag{۹.۸۸}$$

کی تصدیق کر کے تزاد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $\left|c_N(t)\right|^2$ یا $1 - \sum_{m\neq N}\left|c_m(t)\right|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چکور کنواں کہ N ویں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنواں کی تہہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنواں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہو گی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہو گا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دیکھائیں کہ تفاعل موج کی حیط زاویائی دور تبدیل ہو گا لیکن تحویل نہیں ہو گی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیط، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اُس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل نا کہ t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔ یہ صرف لامتناہی چکور کنواں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چکور کنواں کی زمینی حال میں کمیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنواں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 << E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \le x \le a/2 \text{ جب} \\ 0 & a/2 < x \le a \text{ جب} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اوّل نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرقی اخراج، تحرقی انجذاب اور خود با خود اخراج دیکھ چکے ہیں۔ خود با خود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0\hat{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی ممکن مقناطیسی نسبت γ ہو لارمر تعدد $\omega_0 = \gamma B_0$ مثال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf}[\cos(\omega t)\hat{\imath} - \sin(\omega t)\hat{\jmath}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B = B_{rf}\cos(\omega t)\hat{\imath} - B_{rf}\sin(\omega t)\hat{\jmath} + B_0\hat{k} \tag{۹.۸۹}$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیملٹنی قالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t)\end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دیکھائیں۔

$$\dot{a} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a\right): \quad \dot{b} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b\right) \tag{۹.۹۰}$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{a_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[a_0(\omega_0-\omega) + b_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{i\omega t/2}$$
$$b(t) = \left\{b_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[b_0(\omega-\omega_0) + a_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۱}$$

(د) ہوا میں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تفاعل تلش کریں۔
جواب: $P(t) = \{\Omega^2/[(\omega-\omega_0)^2+\Omega^2]\}\sin^2(\omega' t/2)$

(و) منحنی گمک

$$P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega-\omega_0)^2+\Omega^2} \tag{۹.۹۲}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرق تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لحاظ ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیارِ اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں فوٹان کا g جز وضربی ایک ٹیسلا کے ساکن میدان اور ایک مائکرو ٹیسلا حیطہ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہو گا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیارِ اثر کے لیئے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں فرض کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طولِ موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہو گا

$$E(r,t) = E_0 \cos(k.r - \omega t) \tag{۹.۹۳}$$

اگر جوہر کا مرکز مبدا پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r << 1$ $(|k| = 2\pi/\lambda$, لحاظ $k.r \sim r/\lambda << 1)$ ہو گا جس کی بنا ہم اس جز کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اوّل درستگی۔

$$E(r,t) = E_0[\cos(\omega t) + (k.r)\sin(\omega t)] \tag{۹.۹۴}$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جز وہ اجازتی برقی جفت کتب تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی جا چکی ہے۔ دوسرا جز وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تحویل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد کتبی معیارِ اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں اس کی تکتیب اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیئے ایسا کرنا ضروری ہو گا۔ جواب:

$$R_{b\to a} = \frac{q^2\omega^5}{\pi\epsilon_0\hbar c^5}|\langle a|(\hat{n}.r)(\hat{k}.r)|b\rangle|^2 \tag{۹.۹۵}$$

(ب) دیکھائیں کہ ایک بُعدی مرتعش کے لیئے ممنوعہ تحویلات سطح n سے سطح $n-2$ میں ہو گی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت $\hat{n}$ اور $\hat{k}$ پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہو گی۔

$$R = \frac{\hbar q^2\omega^3 n(n-1)}{15\pi\epsilon_0 m^2 c^5} \tag{۹.۹۶}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد فوٹان کا تعدد ہے نا کہ مرتعش کا تعدد۔ اجازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کا نصبط تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دیکھائیں کہ ہائڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی $2S \to 1S$ کی اجازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیئے بھی درست ہو گا غالب تنزل دو فوٹان اخراج کی بنا ہو گا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دسواں حصہ ہو گا۔

سوال ۹.۲۲: دیکھائیں کہ n, l سے n', l' میں تحویل کے لیئے ہائڈروجن کا خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{e^2\omega^3 I^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l+1 \text{ جب} \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l-1 \text{ جب} \end{cases} \tag{۹.۹۷}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr \tag{۹.۹۸}$$

جو ہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m' = m+1, m,$ یا $m-1$ کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دیہان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l+1$ صورت کے لیئے $\langle nlm|$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر صفر قابلی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1|r|nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m|r|nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1|r|nlm\rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l-1$ کے لیئے بھی کریں۔

باب ۱۰

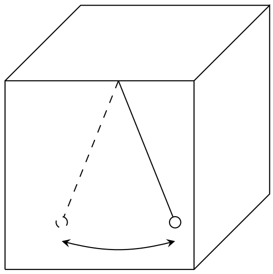
حرارت ناگزر تخمین

۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزر

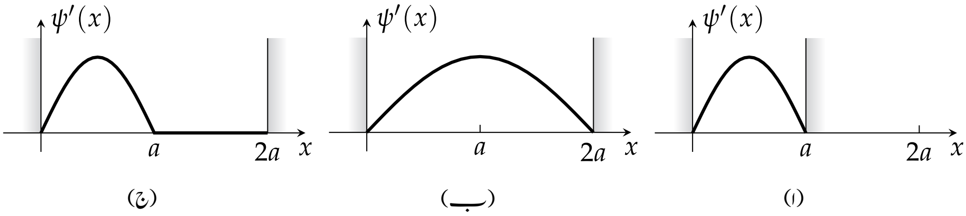
۱۰.۱.۱ حرارت ناگزر عمل

فرض کریں ایک کامل رقاص انتصابی ستہ میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے اگر آپ اس رقاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ افراتفری کے ساتھ دائروی صورت میں حرکت کرنے لگے گا لیکن اگر آپ بغیر جھٹکے کے رقاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تب رقاص اسی سطح یا اس کے متوازی سطح میں شائستگی اور روانی سے اسی حیطہ کے ساتھ جھولتا رہے گا بیرونی حالات کی بہت آہستہ آہستہ تبدیلی ہی حرارت نہ گزر عمل کی پہچان ہے دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف امتیازی وقتوں کی بات کی جا رہی ہے نظام کی حرکت جو یہاں رقاص کی ارتعاش کا دوری عرصہ ہو گا کو ظاہر کرنے والا اندرونی وقت T_i اور نظام میں نمایاں تبدیلی مثلاً لرزتے ہوئے چبوترا پر نصب رقاص کی صورت میں چبوترے کی لرزش کا دوری عرصہ کو ظاہر کرنے والا بیرونی وقت T_e حرارت ناگزر عمل میں $T_e \gg T_i$ ہو گا۔

حرارت نہ گزر عمل کے تجزیہ کا بنیادی حکمت عملی یہ ہو گا کہ پہلے بیرونی عوامل مقدار معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں بہت آہستہ آہستہ وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے مثال کے طور پر مقررہ لمبائی L کی رقاص کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہو گا اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو تب دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہو گا حصہ 3.7 میں ہائیڈروجن سالمہ پر تبصرہ کے دوران ایک زیادہ باریک بیں مثال پیش کی گئی ہم نے آغاز میں مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے ان کے بیچ فاصلہ R کی صورت میں الیکٹرون کی حرکت کے لئے حل کیا نظام کی زمینی حال توانائی کو R کے تفاعل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کی ان حنا سے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا سوال 10.7 طبیعت سالمہ میں اس ترکیب کو جس میں ساکن مرکزہ سے آغاز کرتے ہوئے الیکٹرانی تفاعلات موج کا حساب کر کے ان سے نسبتاً سست



شکل ۱.۱۰: حرارت ناگزر حرکت: اگر ڈبے کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تب رقاص اسی حیطہ کے ساتھ ابتدائی سطح کے متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۲.۱۰: (ا) لامتناہی چکور کنواں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تب ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تب ذرہ لمحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

رفتار مرکزہ کی مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارن واوپن ہائیمر تخمین کہتے ہیں حرارت نہ گزر تخمین کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جا سکتا ہے فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ H^i سے بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ H^f تک پہنچتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ اگر ذرا ابتدائی طور پر H^i کے n وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہوں تب یہ زیر مساوات شروڈنگر H^f کی n وی امتیازی حال میں منتقل ہو گا میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ H^i سے H^f تک تحویل کے دوران طیف غیر مسلسل اور غیر انحطاطی ہے یوں حالات کی ترتیب کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جا سکتا ہے لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔

مثال کے طور پر ہم لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرا کو زمینی حال میں تیار کرتے ہیں (شکل ۲.۱۰-ا)۔

$$\psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{۱۰.۱}$$

اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ آہستہ مقام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت ماسوائے

جزوضربی ہیّت کے یہ ذرہ توسیع شدہ کنواں کے زمینی حال میں منتقل ہو گا (شکل ۱۰.۲-ب)۔

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \tag{۱۰.۲}$$

دھیان رہے کے نظریہ اضطراب کی طرح ہم ہیملٹنی میں ایک چھوٹی تبدیلی کی بات نہیں کر رہے ہیں یہاں تبدیلی بہت بڑی ہے فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی بہت آہستہ آہستہ رونما ہو یہاں توانائی کی بقا نہیں ہو گی جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے نظام سے توانائی حاصل کرے گا جیسا کہ گاڑی کی انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بو کا کو توانائی فراہم کرتا ہے اس کے برعکس کنواں کی اچانک وسط کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج) جو نئے ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا ایک پیچیدہ خطی جوڑ ہو گا سوال 38.2 یہاں توانائی کی بقا ہو گی کم از کم اس کی توقعاتی قیمت کی ضرور ہو گی جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے خلا میں گیس کی آزادانہ پھیلاو سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱.۱۰: ایک لامتناہی چکور کنواں جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے کنواں کو وسیع بناتا ہے کو بالکل ٹھیک حل کرنا ممکن ہے اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہو گا

$$\Phi n(x,t) \cong \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/\hbar\omega} \tag{۱۰.۳}$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنواں کی لمحاتی چوڑائی اور چوڑائی a کے اصل کنواں کی n ویں اجازتی توانائی $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ہے عمومی حل ان Φ کا ایک خطی جوڑ:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x,t) \tag{۱۰.۴}$$

ہو گا جہاں عددی سر c_n وقت t کے تابع نہیں ہوں گے

ا. دیکھیں آیا تابع وقت شروڈنگر مساوات بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات 3.10 مطمئن کرتی ہے

ب. فرض کریں اصل کنواں کی زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز $(t = 0)$ کرتا ہے

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کے پھیلاؤ کے عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{0}^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz)\sin(z)\,\mathrm{d}z \tag{۱۰.۵}$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنواں کی پھیلنے کی رفتار کی ایک بے بودی پیمائش ہے بدقسمتی سے اس تکمل کی قیمت کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے

ج. فرض کریں ہم کنواں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنا چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں یوں بیرونی وقت $w(T_e) = 2a$ ہو گا ابتدائی زمینی حال کے تابع وقت قوت نمائی جزو ضربی کا دورانیہ اندرونی وقت ہو گا وقت T_e اور T_i تعین کر کے دیکھائے کے حرکت نہ گزر صورت حال سے مراد $1 \ll \alpha$ ہو گا جس کے تحت تکمل کے دائرہ کار پر $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$ ہو گا اس کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کے عددی سر c_n تعین کریں حال $\Psi(x,t)$ تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرارت نہ گزر کے مطابق ہے

د. دکھائیں گے $\Psi(x,t)$ میں جزو ہیئت کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\theta(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۶}$$

جہاں لمحہ t پر لحاتی امتیازی قدر $E_n(t) \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$ ہو گا اس نتیجہ پر تبصرہ کریں

۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت

مسئلہ حرارت نہ گزر بظاہر معقول نظر آتا ہے اور اسے با آسانی بیان کیا جا سکتا ہے تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں ایک ذرہ جو n وی امتیازی حال ψ_n میں آغاز کریں

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۷}$$

وہ ڈوری جزو ضربی اپنانے کے علاوہ اسی n وی امتیازی حال میں رہتا ہے

$$\Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۱۰.۸}$$

اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہوں تب امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \tag{۱۰.۹}$$

لیکن اب بھی کسی ایک مخصوص لمحہ پر یہ معیار عمودی سلسلہ

$$\langle\psi_n(t)|\psi_m(t)\rangle\delta_{nm} \tag{۱۰.۱۰}$$

تین گے جو مکمل ہے لہذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) \tag{۱۰.۱۱}$$

کے عمومی حل کو ان کا خطی مجموعہ

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)} \tag{۱۰.۱۲}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\theta_n(t) \approx -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۱۳}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے E_n کی صورت میں معیاری دوری جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے میں اس کو ہمیشہ کی طرح عددی سر $c_n(t)$ میں ضم کر سکتا تھا لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا لہٰذا طبیعت وقت کے اس حصہ کو سریہن لکھنا موزوں ہوگا مساوات 12.10 کو مساوات 11.10 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$i\hbar\sum_n[\dot{c}_n\psi_n + c_n\dot{\psi}_n + ic_n\psi_n\theta_n]e^{i\dot{\theta}_n} = \sum_n c_n(H\psi_n)e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۴}$$

جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نکتہ سے ظاہر کیا گیا ہے مساوات 9.10 اور 13.10 کی بنا آخری دو اجزاء کٹ جاتے ہیں لہٰذا درج ذیل باقی رہتا ہے

$$\sum_n \dot{c}_n\psi_n e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۵}$$

اس کا ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر لمحاتی امتیازی تفاعلات کی معیار ہمودیت مساوات 10.10 بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n\delta mne^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\langle\psi_m|\psi_m\rangle e^{i\theta_n}$$

یا درج ذیل ہوگا

$$\dot{c}_m(t) = -\sum_n c_n\langle\dot{\psi}_m|\psi_n\rangle e^{\theta_n-\theta_m} \tag{۱۰.۱۶}$$

اب مساوات 9.10 کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H}\psi_n + H\dot{\psi}_n = \dot{E}_n\psi_n + E_n\dot{\psi}_n$$

اور یہاں بھی ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر درج ذیل ہوگا

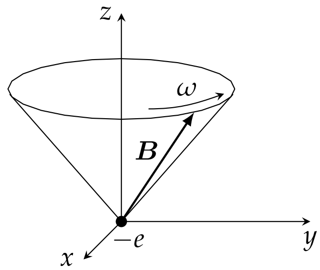
$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle + \langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = \dot{E}_n\delta_{mn} + E_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۷}$$

ہم H کے ہرمشی ہونے سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = E_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle$ لکھتے ہیں یوں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle = (E_n - E_m)\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۸}$$

یہ جانتے ہوئے کے توانائیاں غیر انحطاطی ہے مساوات 18.10 کو مساوات 16.10 میں پر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle - \sum_{n\neq m} c_n\frac{\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle}{E_n - E_m}e^{(-i/\hbar)\int_0^1[E_n(t')-E_m(t')]\,\mathrm{d}t'} \tag{۱۰.۱۹}$$



شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار ω سے مخروطی راہ جھاڑتا ہے (مساوات 24.10)۔

یہ بالکل ٹھیک نتیجہ ہے اب حرارت ناگزر تخمین کی باری آتی ہے فرض کریں $\dot{H}$ نہایت چھوٹا ہے تب دوسرا جزو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle \tag{۱۰.۲۰}$$

ہوگا جس کا حل

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\gamma_m(t)} \tag{۱۰.۲۱}$$

ہے جہاں درج ذیل ہوگا

$$\gamma_m(t) \equiv i\int_0^t \langle\psi_m(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_m(t')\rangle\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۲۲}$$

بالخصوص اگر ذرا n وی امتیازی حال یعنی $n \neq m$ کیلئے $c_n(0) = 1$ اور $c_m(0) = 0$ ہو سے آغاز کرے تب مساوات 12.10

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)}\psi_n(t) \tag{۱۰.۲۳}$$

ہوگا لہذا کئی ہیّتی جزو ضربیاں حاصل کرنے کے علاوہ یہ ذرا اعتکائی ہیملٹنی کی n وی امتیازی حال میں ہی رہے گا

مثال ۱۰.۱: فرض کریں ایک مقناطیسی میدان میں نکتہ پر کمیت m اور بار $-e$ کا ایک الیکٹرون ساکن پایا جاتا ہے اس مقناطیسی میدان کی مقدار B_0 ایک مستقل ہے جبکہ اس کا رخ z محور کے گرد ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے ایک مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے محور z کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ α ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0[\sin(\alpha)\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\alpha)\sin(\omega t)\hat{\jmath} + \cos\alpha\hat{k}] \tag{۱۰.۲۴}$$

اس کا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہو گا

$$H(t) = \frac{e}{m}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{e\hbar\beta_0}{2m}[\sin\alpha\cos(\omega t)\sigma_x + \sin\alpha\sin(\omega t)\sigma_y + \cos\alpha\sigma_z] \\ = \frac{\hbar\omega_1}{2}\begin{pmatrix}\cos\alpha & e^{-i\omega t}\sin\alpha \\ e^{i\omega t}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۵}$$

جہاں ω_0 درج ذیل ہیں

$$\omega_1 \equiv \frac{e\beta_0}{m} \tag{۱۰.۲۶}$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکر کار χ_+ اور χ_- درج ذیل ہیں۔

$$\chi_+(t) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t}\sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۷}$$

$$\chi_-(t) = \begin{pmatrix}e^{-i\omega t}\sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۸}$$

جو $\boldsymbol{B}(t)$ کے لمحاتی رخ کے ساتھ ہمچکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں سوال 30.4 دیکھیں ان کے مطابقتی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$E\pm = \pm\frac{\hbar\omega_1}{2} \tag{۱۰.۲۹}$$

فرض کریں $\boldsymbol{B}(0)$ کے ہمراہ الیکٹران ہمہ میدان صورت سے آغاز کرتا ہے

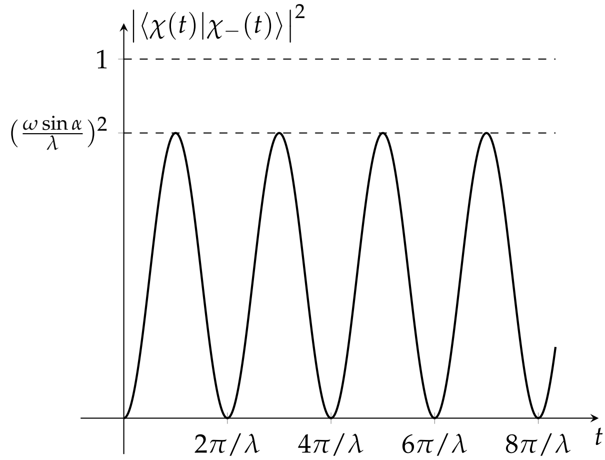
$$\chi(0) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۰}$$

تابع وقت شروڈنگر مساوات کا بلکل ٹھیک حل درج ذیل ہو گا سوال 2.10

$$\chi(t) = \begin{pmatrix}[\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1-\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1+\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{+i\omega t/2}\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۱}$$

جہاں λ درج ذیل

$$\lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1\cos\alpha} \tag{۱۰.۳۲}$$



شکل ۱۰.۴: غیر حرارت ناگزر صورت $(\omega \gg \omega_1)$ میں تحویلی احتمال (مساوات 34.10)۔

جسے χ_+ اور χ_- کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\chi(t) = \left[\cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i\frac{(\omega_1 - \omega\cos\alpha)}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) + i\left[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۳۳}$$

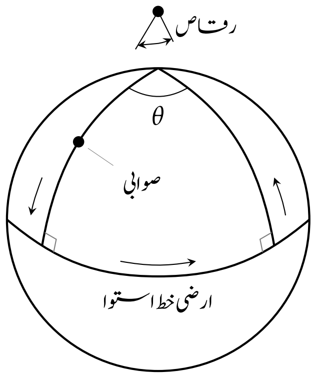
ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کے موجودہ رخ کے لحاظ سے خلاف میدان کو تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\right|^2 = \left[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]^2 \tag{۱۰.۳۴}$$

مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ $T_e \gg T_i$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت T_e ہے جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہو گا اور تفاعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت T_i ہو گا جو موجودہ صورت میں $\hbar/(E_+ - E_- = 1/\omega_1)$ ہو گا یوں حرارت نہ گزر تخمین سے مراد $\omega \ll \omega_1$ ہو گا غیر مضطرب تفاعلات موج کے دور کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے حرارت نہ گزر صورت $\lambda \cong \omega_1$ میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\right|^2 \cong \left[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]^2 \to 0 \tag{۱۰.۳۵}$$

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ پر $\boldsymbol{B}$ کے رخ ہو اس کے برعکس $\omega \gg \omega_1$ کی صورت میں $\omega \cong \lambda$ ہو گا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ ٹپکیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ $\square$



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر رقاص کی حرارت ناگزر منتقلی۔

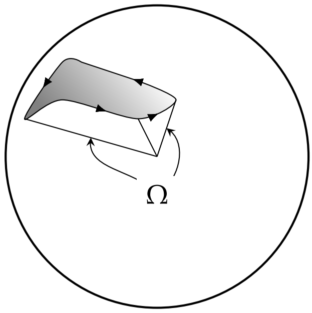
سوال ۱۰.۲: تصدیق کیجئے گا کہ مساوات 25.10 کی ہیملٹنی کیلئے مساوات 31.10 تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتی ہے ساتھ ہی مساوات 33.10 کی تصدیق کریں اور دکھائیں کے عددی سروں کے مربّعوں کا مجموعہ ایک ہو گا جو معمول زنی کی شرط ہے

۱۰.۲ ہیّت بیری

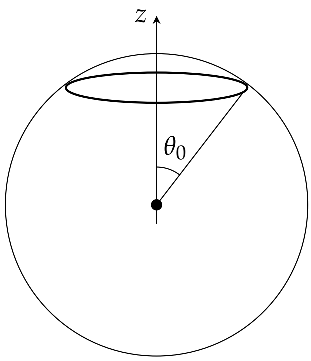
۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل

آئے حصہ 1.1.10 میں مستعمل کامل ہے رگڑھ لٹکن جس کے چبوترا کو ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاتا ہوں پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے حرارت نہ گزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا میں نے دھاوا کیا تھا کہ جب تک چبوترا کی حرکت اتنی رقاص کے دوری عرصہ کے لحاظ سے اتنی آہستہ ہو کے رقاص کی نمایاں حرکت کے دوران رقاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہوں یہ اسی مستوئی میں یا اس کے متوازی مستوئی میں اسی حیطہ اور اسی تعدد کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

لیکن اگر میں اس کامل رقاص کو شمالی قطب پر لے جا کر مثلاً صوابی شہر کے رخ جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) فی الحال تصور کریں کے دنیا گھوم نہیں رہی ہے میں اس کو بہت آہستہ آہستہ یعنی حرارت نہ گزر طریقہ سے صوابی سے گزرتے خط طول بلند پر چلتے ہوئے عرضی خط استوا تک پہنچتا ہوں یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے گا میں اس کو عرضی خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں رقاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے آخر میں میں اس نئی خط طول بلند پر چلتے ہوئے چبوترا کو شمالی قطب منتقل کرتا ہوں آپ دیکھ سکتے ہیں کے رقاص اسی مستوی میں اب نہیں جھولے گا جہاں سے اس نے آغاز کیا یقیناً نئی مستوی اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ Θ پایا جاتا ہے جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے دو خط طول بلند کے بیچ زاویہ Θ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جس راہ پر میں چبوترا اٹھا کر چلتا رہا وہ راہ زمین کے مرکز پر ٹھوس زاویہ Ω بناتی ہے یہ راہ شمالی نصف کرہ کا $\Theta/2\pi$ حصہ گھیرتی ہے لہذا اس کا رقبہ $A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$ ہو گا



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ Ω بناتا ہے۔



شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقو رقاص کی راہ۔

جہاں R زمین کا رداس ہے یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \tag{۱۰.۳۶}$$

جو اس نتیجہ کو نہایت عمدگی کے ساتھ پیش کرتا ہے اور جو راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں ہے (شکل ۱۰.۶)۔

کرہ کی سطح پر ایک بند راہ پر چلتے ہوئے حرارت نہ گزر منتقلی کی ایک مثال فوکالٹ رقاص ہے جہاں چبوترا کو اٹھا کر چلنے کی بجائے زمین کے گھومنے کو یہ کام سونپا جاتا ہے خط عرض بلد θ_0 درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$\Omega = \int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 2\pi(-\cos\theta)_0^{\theta_0} = 2\pi(1-\cos\theta_0) \tag{۱۰.۳۷}$$

زمین کے لحاظ سے جو اس دوران 2π زاویہ گھوم چکا ہوگا فوکالٹ رقاص کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi\cos\theta_0$ ہوگی اس نتیجہ کو عموماً گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس کو تو کی اثر سے حاصل کیا جاتا ہے لیکن یہاں یہ

خالصتاً جومیٹرئے مفہوم پیش کرتا ہے ایسا نظام جو بند راہ پر چل کے واپس ابتدائی نکتہ پہنچ کر اپنی ابتدائی حال میں نہیں لوٹتا غیر ہماقوائد نظام کہلاتا ہے یہاں ضروری نہیں کے راہ پر چلنے سے مراد حرکت دینا ہو اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھی غیر ہماقوائد نظام ہر جگہ پائے جاتے ہیں ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن غیر ہماقوائد اعلی ہے ہر ایک پیرا کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہو گی یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہو گا وغیرہ وغیرہ اگلے حصہ میں میں غیر ہماقواعد اعمالوں کی کوانٹم میکانیات پر غور کروں گا ہم نے دیکھنا ہو گا کے ہیملٹنی کے مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرارت نہ گزر پیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہو گا

۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ 2.1.10 میں دکھایا کے ایک ذرا جو $H(0)$ کے n وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہو حرارت نہ گزر حالات میں تابع وقت ہیتی جزو ضربی کے علاوہ $H(t)$ کی n وی امتیازی حال میں ہو گا بالخصوص اس کا تفاعل موج مساوات 23.10 درج ذیل ہو گا

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t)+\gamma_n(t)]}\psi_n(t) \tag{۱۰.۳۸}$$

جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۳۹}$$

حرکی ہیئت ہے جو تابع وقت تفاعل E_n کی صورت کے لیے جزو ضربی $e^{(-iE_nt/\hbar)}$ کو عمومیت دیتا ہے اور درج ذیل ہندسی ہیئت کہلاتا ہے

$$\gamma_n(t) \equiv \int_0^t \langle\psi_n(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t')\rangle\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۴۰}$$

چونکہ اب ہیملٹنی میں کوئی ایسا مقدار معلوم $R(t)$ پایا جاتا ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا $\psi_n(t)$ وقت t کا تابع ہو گا سوال 1.10 میں پھیلتے ہوئے چکور کنواں کی چوڑائی $R(t)$ ہو گی یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = \frac{\partial\psi_n}{\partial \boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۱}$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle\psi_n|\frac{\partial\psi_n}{\partial R}\rangle\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = i\int_{R_i}^{R_f}\langle\psi_n|\frac{\partial\psi_n}{\partial R}\,\mathrm{d}R \tag{۱۰.۴۲}$$

جہاں R_i اور R_f مقدار معلوم R_t کے بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی بالخصوص اگر کچھ دیر T بعد ہیملٹنی واپس اپنی ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہذا $\gamma_n(T) = 0$ ہو گا جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں ہے

میں نے مساوات 41.10 میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو فرض کریں N عدد مقدار معلوم $R_1(t)$ ، $R_2(t)$ ، . . . ، $R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t}=\frac{\partial\psi_n}{\partial R_1}\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\psi_n}{\partial R_2}\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial\psi_n}{\partial R_N}\frac{\mathrm{d}R_N}{\mathrm{d}t}=(\nabla_R\psi_n)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۳}$$

جہاں $\boldsymbol{R}\equiv(R_1,R_2,\dots,R_N)$ ہے اور ∇_R ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$\gamma_n(t)=i\int_{\boldsymbol{R}_i}^{\boldsymbol{R}_f}\langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۴}$$

اور اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنی اصل روپ اختیار کرتا ہوں تب کل ہندسی ہیّتی تبدیلی درج ذیل ہوگی

$$\gamma_n(T)=i\oint\langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۵}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں ایک بند راہ پر لکیری تکمل ہے جو عموماً غیر صفر ہوگا مساوات 45.10 کو پہلی مرتبہ 1984 میں میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ ہیّت بیری کہلاتا ہے دھیان رہے ہیں کہ جب تک تبدیلی اتنی آہستہ ہو کہ قیاس حرارت ناگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نا کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر اس کے برعکس مجموعی حرکتی ہیّت

$$\theta_n(T)=-\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(t')\,\mathrm{d}t'$$

گزرے ہوئے وقت کا تابع ہوگا

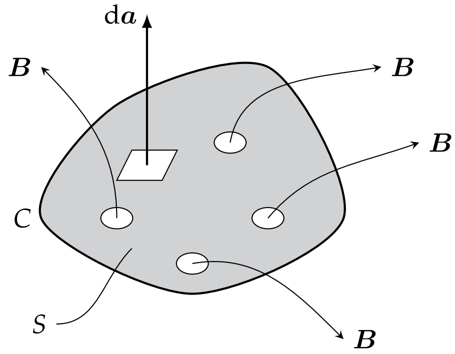
ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کا ہیّت کچھ بھی ہو سکتا ہے اور طبعی مقداروں میں جہاں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے ہیّتی جزو ضرب کٹ جاتا ہے اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندسی ہیّت کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے آخر $\psi_n(t)$ کا ہیّت بھی اختیاری ہے یہ جناب بیری کی دور اندیشی ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو کسی بند دائرے پر لے جاتے ہوئے واپس اپنی اصل روپ میں لانے سے ابتدائی اور اختتامی ہیّت کے بیچ فاصلہ غیر اختیاری ہوگا جسے حقیقتاً ناپا جا سکتا ہے مثال کے طور پر زراعت جو تمام حال Ψ میں ہوں کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے صرف ایک حصے کو حرارت نہ گزر تبدیل ہوتے مخفیہ سے گزارا جاتا ہے دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے مجموعی تفاعل موج درج ذیل روپ کا حاصل ہوگا

$$\Psi=\frac{1}{2}\Psi_0+\frac{1}{2}\Psi_0e^{i\Gamma} \tag{۱۰.۴۶}$$

جہاں سیدھی پہنچتی شعاع کا تفاعل موج Ψ_0 ہے اور متغیر H کی بنا شعاع کا اضافی ہیّت Γ ہے جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ حصہ ہندسی ہوگا اس صورت میں درج ذیل ہوگا

$$|\Psi|^2=\frac{1}{4}|\Psi_0|^2\left(1+e^{i\Gamma}\right)\left(1+e^{-i\Gamma}\right) \tag{۱۰.۴۷}$$

$$=\frac{1}{2}|\Psi_0|^2\left(1+\cos\Gamma\right)=|\Psi_0|^2\cos^2(\Gamma/2) \tag{۱۰.۴۸}$$



شکل ۱۰.۸: بند منحنی C کے بیچ سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہاو۔

یوں تعمیلی مداخلت اور تباہ کن مداخلت نکات جہاں Γ کی قیمت π کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہو گی کو دیکھ کر ہم Γ کی پیمائش کر سکتے ہیں بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی ہر کی ہیئت کی موجودگی میں ہندسی ہیت نظر نہیں آئے گی لیکن انہیں علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے تین آبادی مقدار معلوم فضا $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)$ کی صورت میں کلیاں بیری مساوات 45.10 سمتی مخفیہ $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں مقناطیسی بہاؤ کے کلیہ کا یاد دلاتی ہے سطح S جس کی سرحد منحنی C ہو سے درج ذیل بہاؤ گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۴۹}$$

مقناطیسی میدان کو سمتی مخفیہ کی روپ میں $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ لکھ کر مسئلہ سٹوکس کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۱۰.۵۰}$$

یوں مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے مقناطیسی میدان کے بہاؤ

$$\text{“}\boldsymbol{B}\text{”} = i\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \tag{۱۰.۵۱}$$

کو ہیئت بیری تصور کیا جا سکتا ہے دوسرے لفظوں میں تین آبادی صورت میں ہیئت بیری کو ایک سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۵۲}$$

مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جا سکتا ہے تاہم ہماری استعمال کے نقطہ نظر سے مساوات 51.10 محض $\gamma_n(T)$ کو لکھنے کا دوسرا انداز ہے

سوال ۱۰.۳:

ا. لامتناہی چکور کنواں کی چوڑائی w_1 سے بھڑ کر w_2 ہونے کی صورت میں مساوات 42.10 استعمال کرتے ہوئے ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں

ب. اگر وسعت مستقل شرح $(\mathrm{d}w/\,\mathrm{d}t = v)$ سے بڑھے تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہوگی

ج. اب اگر چوڑائی کم ہوواپس w_1 ہوجاتی ہے تب اس ایک تیرے کا ہیّت بیری کیا ہوگا

سوال ۱۰.۴: ڈیلٹا تفاعل کنواں مساوات 114.2 واحد ایک مقید حال مساوات 129.2 کا حامل ہے α آہستہ آہستہ α_1 سے بڑھ کر α_2 ہوتا ہے ہندسی تبدیلی ہیئت کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح $\mathrm{d}\alpha/\,\mathrm{d}t = c$ سے رونما ہوتب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہوگا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہٰنی ہیّت صفر ہوگا سوال 3.10 اور 4.10 اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن قانونی طور پر بالکل جائز جزو ضربی ہیّت منسلک کریں $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n}\psi_n(t)$ جہاں $\Phi_n(\boldsymbol{R})$ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقینا آپ غیر صفر ہندسی ہیت حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات 23.10 میں پر کرنے سے کیا ہوگا اور بند راہ پر صفر حاصل ہوگا سبق غیر صفر ہیّت بیری کی خاطر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی اور دوایسا ہیملٹنی درکار ہوگا جو غیر صفر مخلوط امتیازی تفاعلات دیتا ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیّت بیری کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مبدا پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال 1.10 میں کیا گیا اور جس میں محور z کے ساتھ ایک اٹل زاویا α بناتے ہوئے $\boldsymbol{B}(t)$ ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے حرارت نہ گزر صورت $\omega \ll \omega_1$ میں

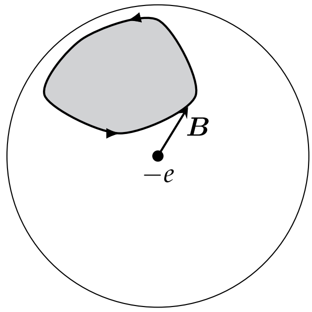
$$\lambda = \omega_1\sqrt{1 - 2\frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha + \left(\frac{w}{w_1}\right)^2} \cong \omega_1\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha\right) = \omega_1 - \omega\cos\alpha \tag{۱۰.۵۳}$$

ہوگا لہذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2}e^{i(\omega\cos\alpha)t/2}e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) \\ i\left[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\right]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۵۴}$$

دوسرے جزو کو $\omega/\omega_1 \rightarrow 0$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا ہر کی ہیّت درج ذیل ہے

$$\theta+(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E+(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{\omega_1 t}{2} \tag{۱۰.۵۵}$$



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ پر چلتا ہے۔

جہاں مساوات 29.10 سے $E_+ = \hbar\omega_1/2$ ہو گا لہٰذا ہندسی ہیئت درج ذیل ہو گی

$$\gamma+(t) = (\cos\alpha - 1)\frac{\omega t}{2} \tag{۱۰.۵۶}$$

ایک مکمل پھیرا کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہو گا لہٰذا ہیئت بیری درج ذیل ہو گی

$$\gamma+(T) = \pi(\cos\alpha - 1) \tag{۱۰.۵۷}$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس B_0 $r =$ کی کرہ کی سطح پر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان $\boldsymbol{B}(t)$ کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہو گا سوال 30.4 دیکھیں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۵۸}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ کے دونوں کروی محدد θ اور π وقت کے تفاعلات ہیں کروی محدد میں ڈھلواں درج ذیل ہو گا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$\nabla\chi_+ = \frac{\partial\chi_+}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_+}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi_+}{\partial\phi}\hat{\phi} \tag{۱۰.۵۹}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -(1/2)\sin(\theta/2) \\ (1/2)e^{i\phi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}\hat{\phi} \tag{۱۰.۶۰}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle \chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{2r}\Big[-\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta} + \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta} + 2i\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta}\hat{\phi}\Big] \tag{۱۰.۶۱}$$

$$= i\frac{\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}p\hat{h}i \tag{۱۰.۶۲}$$

مساوات 51.10 کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہو گی

$$\nabla\times\langle \chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\sin\theta\Big(\frac{i\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}\Big)\Big]\hat{r} = \frac{i}{2r^2}\hat{r} \tag{۱۰.۶۳}$$

یوں مساوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۶۴}$$

تکمل قرہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو $\boldsymbol{B}$ کی چھوٹی ایک پیرا میں گرتا ہو لہذا $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = r^2\,\mathrm{d}\Omega\hat{r}$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{2}\Omega \tag{۱۰.۶۵}$$

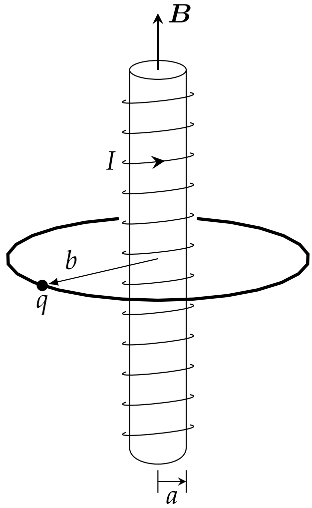
جہاں مبدہ پر ٹھوس زاویا Ω ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلا رگڑ رقاص کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرارت نہ گزر طریقے سے لے جانے سے کل ہندسی تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویا کی منفی منفی بادا ہو گا مساوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مساوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقیناہونا بھی چاہیے □

سوال۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مساوات 62.10 کا مماثل حاصل کریں جواب $-\Omega$ ایک ذرہ جس کا چکر s ہو کے لیے نتیجہ $-s\Omega$

۱۰.۲.۳ اہارونووبوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ φ اور $\boldsymbol{A}$ بلاواسطہ ناقابل پیمائش ہیں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{۱۰.۶۶}$$



شکل ۱۰.۱۰: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمبا پیچواں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

میکسول مساوات اور قاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیا کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ تشکیل دینے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیات کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda \tag{۱۰.۶۷}$$

جہاں Λ مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں ہو گا کوانٹم میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو φ اور $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں ناکہ $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\Big)^2 + q\varphi \tag{۱۰.۶۸}$$

بہر حال زیر ماپ تبادلہ یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برق اطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959ء میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سمتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرا کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہو گا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو و بوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیئت بیری کے ساتھ پیش کروں گا۔

فرض کریں ایک ذرا کو رداس b کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $b < a$ کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو I ہے (شکل ۱۰.۱۰) بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے

اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا یقیناً موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi}, \quad (r > a) \tag{۱۰.۶۹}$$

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہاؤ ہوگا ساتھ ہی لچھا از خود غیر باردار ہے لہٰذا غیر سمتی مخفیہ φ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$H = \frac{1}{2m}[-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2i\hbar q\boldsymbol{A}\cdot\nabla] \tag{۱۰.۷۰}$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ اسمت $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$ پر منحصر ہے لہٰذا $\nabla \to (p\hat{h}i/b)(\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\phi)$ ہوگا اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$\frac{1}{2m}\Big[-\frac{\hbar^2}{b^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} + \Big(\frac{q\Phi}{2\pi b}\Big)^2 + i\frac{hq\Phi}{\pi b^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\Big]\psi(\phi) = E\psi(\phi) \tag{۱۰.۷۱}$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\phi^2} - 2i\beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi} + \epsilon\psi = 0 \tag{۱۰.۷۲}$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \qquad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2 \tag{۱۰.۷۳}$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi} \tag{۱۰.۷۴}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} \tag{۱۰.۷۵}$$

نقطہ $\phi = 2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا λ عدد صحیح

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} = n \tag{۱۰.۷۶}$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\Big(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\Big)^2, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots) \tag{۱۰.۷۷}$$

لچھا دائرے پر ذرا کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت n جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرا کو ظاہر کرتا ہے q مثبت لیتے ہوئے منفی n کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرا کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ اجازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرا پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک زرا ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں B ہے لہذا $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہوگا تاہم $\boldsymbol{A}$ از خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ $\boldsymbol{A}$ ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیا کے لئے عمومیت دی جا سکتی ہے مخفی توانائی V جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی شروڈنگر مساوات

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 + V\right]\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{۱۰.۷۸}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جا سکتی ہے

$$\Psi = e^{ig}\Psi' \tag{۱۰.۷۹}$$

جہاں $g(\boldsymbol{r})$ درج ذیل ہے

$$g(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\mathcal{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{۱۰.۸۰}$$

اور $\mathcal{O}$ کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت بامعنی ہوگی جب پورا خطہ میں $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل $\mathcal{O}$ سے $\boldsymbol{r}$ تک راہ پر منحصر ہوگا اور یوں $\boldsymbol{r}$ کا تفاعل نہیں ہوگا Ψ' کی صورت میں Ψ کا ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla\Psi = e^{ig}(i\nabla g)\Psi' + e^{\nabla\Psi'}$$

لیکن $\nabla g = (q/\hbar)\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے لہذا

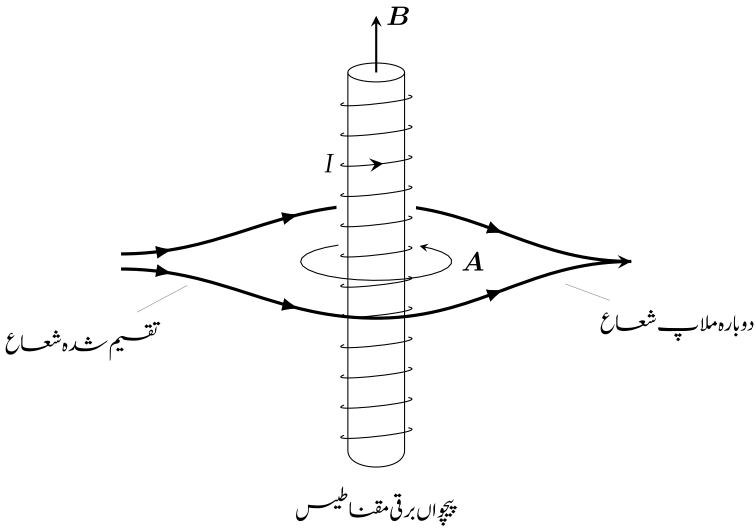
$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)\Psi = \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' \tag{۱۰.۸۱}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2\Psi = -\hbar^2 e^{ig}\nabla^2\Psi' \tag{۱۰.۸۲}$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی e^{ig} کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \tag{۱۰.۸۳}$$



شکل ۱۱.۱۰: اہارانو و بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پیچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

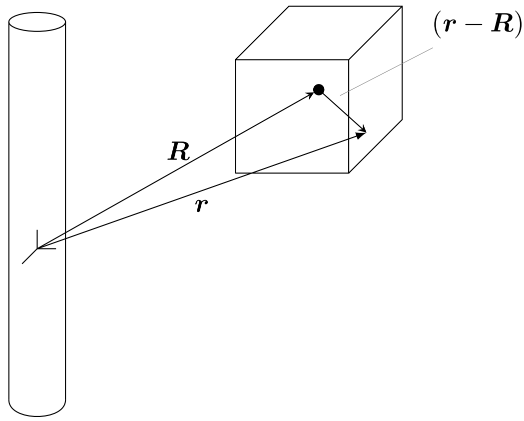
بظاہر Ψ' بغیر $\boldsymbol{A}$ شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا معمولی بات ہو گئی ہمیں صرف ہیتی جزو ضربی e^{ig} ساتھ منسلک کرنا ہو گا عہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۰) ان شعاعوں کو لمبے لچھا سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = 0$ ہو تاہم $\boldsymbol{A}$ جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہو گا اور دونوں اطراف V کی قیمت ایک دوسرے جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہیتی فرق پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar}\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\int\left(\frac{1}{r}\hat{\phi}\right)\cdot(r\hat{\phi}\,\mathrm{d}\phi) = \pm\frac{q\Phi}{2\hbar} \qquad (۱۰.۸۴)$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہو گی جو لمبے لچھے میں $\boldsymbol{A}$ کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہیتی فرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہو گا جس سے ان کی راہ گیرتے ہیں

$$\text{ہیّتی فرق} = \frac{q\Phi}{\hbar} \qquad (۱۰.۸۵)$$

اس ہیتی پنتقل سے قابل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کر چکے ہیں اہارانو و بوہم اثر کو ہندسی ہیت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے فرض کریں مخفیہ $V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$ ایک بار دار ذرا کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لچھے سے باہر نقطہ $\boldsymbol{R}$ پر ہے؛ شکل



شکل ۱۰.۱۲: مخفیہ $V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$ ایک ذرہ کو ڈبیہ میں مقید کیے ہوئے ہے۔

۱۰.۱۲ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبیہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پھیرا دینگے لہذا $\boldsymbol{R}$ وقت کا تفاعل ہو گا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]^2+V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right\}\psi_n=E_n\psi_n \tag{۱۰.۸۶}$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا جانتے ہیں ہم

$$\psi_n=e^{ig}\psi'_n \tag{۱۰.۸۷}$$

لیتے ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$g\equiv\frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}') \tag{۱۰.۸۸}$$

اور ψ' اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب $\boldsymbol{A}\to 0$ ہو

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right]\psi'=E_n\psi'_n \tag{۱۰.۸۹}$$

آپ نے دیکھا کہ ψ'_n ہٹاؤ $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}$ کا تفاعل ہے نہ کہ ψ_n کی طرح علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{R}$ کا تفاعل آئیے اب اس ڈبیہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پھیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حرارت سے گزر ہونے کے بھی ضرورت نہیں ہے ہیئت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle\psi_n|\nabla\psi_n\rangle$ کی قیمت درکار ہو گی درج ذیل کی بنا

$$\nabla_R\psi_n=\nabla_R[e^{ig}\psi'_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]=-\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})e^{ig}\psi'_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})+e^{ig}\nabla_R\psi'_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|\nabla\psi_n\rangle &= \int e^{-ig}[\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^* e^{ig}\Big[-i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})+\nabla_R\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\Big]\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\ &= -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})-\int[\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})]^*\nabla\psi_n'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{۱۰.۹۰}$$

بغیر زیر نوشت ∇ $\boldsymbol{r}$ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$ کے تفاعل پر عمل کے دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری تکمل ہیملٹنی $-(\hbar^2/2m)\nabla^2+V$ کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب $i/\hbar$ ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle = -i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \tag{۱۰.۹۱}$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\gamma_n(T)=\frac{q}{\hbar}\oint\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\frac{q}{\hbar}\int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۹۲}$$

جو اہارونو وبوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو وبوہم اثر ہندسی ہیت کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو وبوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جا سکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے $\boldsymbol{A}$ ازخود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا بہاؤ پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گیج غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چکور کنواں وقفہ $0 \le x \le a$ کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنواں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x)=f(t)\delta(x-\frac{a}{2}-\epsilon)$$

جہاں $f(t)$ آہستہ آہستہ صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت یہ ذرا ارتقائی ہیملٹنی کے زمینی حال میں ہی رہے گا

ا. وقت $t\to\infty$ پر زمینی حال کا خاکہ بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چکور کنواں کا زمینی حال ہو گا جس میں $a/2+\epsilon$ پر ناقابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرا بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصہ میں رہنے کا پابند ہو گا

ب. وقت t پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

جہاں $z \equiv ka$ $T \equiv maf(t)/\hbar^2$ $\delta \equiv 2\epsilon/a$ اور $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہیں

ج. اب $\delta = 0$ لیتے ہوئے z کے لیے ترسیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کے T کی قیمت 0 تا ∞ ہونے سے z کی قیمت π تا 2π ہو گی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب $\delta = 0.01$ لیتے ہوئے $T = 0, 1, 5, 20, 100$ اور 1000 کے لیے z اعدادی طریقہ سے حاصل کریں

ھ. کنواں کے دائیں نصف حصہ میں ذرہ پائے جانے کا احتمال بطور z اور δ کا تفاعل تلاش کریں جواب $P_r = 1/[1 + (I_+/I_-)]$ جہاں $I_\pm \equiv [1 \pm \delta - (1/z)\sin(z(1 \pm \delta))]\sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$ ہو گا جزو (د) میں دیے گئے T کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و. T اور δ کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترسیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنواں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک یک بعدی ہارمونی مرتعش کمیت m تعدد ω پر $F(t) = m\omega^2 f(t)$ جہاں $f(t)$ کوئی مخصوص تفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے $m\omega^2$ کو صریحاً لکھا ہے یوں $f(t)$ کا بعد فاصلہ ہو گا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t) \tag{۱۰.۹۳}$$

فرض کریں وقت $t = 0$ پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہٰذا $t \leq 0$ پر $f(t) = 0$ ہو گا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹم میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے

ا. اگر مرتعش مبدا پر ساکن حال $0 = \dot{x}_c(0) = (x_c(0)$ سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہو گا جواب

$$x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')]\, \mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۴}$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش n ویں حال $\psi_n(x)$ جہاں $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$ مساوات 61.2 دیتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کے حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Psi(x,t) = \psi_n(x - x_c)e^{\frac{i}{\hbar}\left[-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega t + m\dot{x}_c(x - \frac{x_c}{2}) + \frac{m\omega^2}{2}\int_0^t f(t')x_c(t')x_c(t')\,\mathrm{d}t'\right]} \tag{۱۰.۹۵}$$

ج. دکھائے کہ $H(t)$ کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\psi_n(x,t)=\psi_n(x-f);\quad E_n(t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{1}{2}m\omega^2f^2 \tag{۱۰.۹۶}$$

د. دکھائیں کہ حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے (t) $x_c(t) \quad\cong\quad f(t)$ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرارت نہ گزر تفاعل f کہ وقتی تفرق پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ $[\sin[\omega(t-t')]$ کو $(1/\omega)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t')\cos[\omega(t-t')]$ لکھ کر تکمل بل حصص استعمال کریں

ھ. اس مثال کے لیے مسئلہ حرارت نہ گزر کی تصدیق جز و(ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$\Psi(x,t)\cong\psi_n(x,t)e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)} \tag{۱۰.۹۷}$$

تصدیق کیجئے گا کہ ہر کی ہیت کا روپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندسی ہیت آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرارت نہ گزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر $c_m(t)$ کے حرارت نہ گزر تسلسل کا پہلا جز و تصور کیا جا سکتا ہے فرض کریں نظام n وی حال سے آغاز کرتا ہے حرارت نہ گزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندسی ہیتی جز و ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ n وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t)=\delta_{mn}e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرارت نہ گزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$c_m(t)=c_m(0)-\int_0^t\langle\psi_m(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t')\rangle e^{i\gamma_n(t')}e^{i(\theta_n(t')-\theta_m(t'))}\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۸}$$

اس سے ہم قریب حرارت نہ گزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری مرتعش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کے قریب حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہو گا میں تحویل ممکن ہو گی

$$c_{n+1}(t)=i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t\dot f(t')e^{i\omega t'}\,\mathrm{d}t'$$
$$c_{n-1}(t)=i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t\dot f(t')e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}t'$$

یقیناً تحویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

باب ۱۱

بکھراو

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو

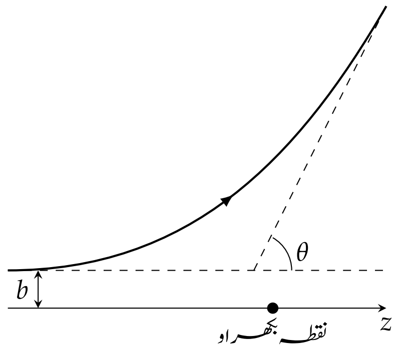
فرض کریں کسی مرکز بکھراو پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر داغا جاتا ہے جس کی توانائی E اور ٹکراو مقدار معلوم b کے ساتھ آکر کسی زاویائے بکھراو θ پر اُبھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لیئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے یوں خطِ حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لحاظہ تصداً کی بنا اس کی حرکت اُچھلنے کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراو کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراو مقدار معلوم کو جانتے ہوئے زاویائے بکھراو کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراو مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراو اتنا بڑا ہو گا۔

مثال ۱۱.۱: **سخت کرہ کا بکھراو۔** فرض کریں ہدف رداس R کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی بندوق کا ایک چھرہ ہے جو لچکیلی ٹپکی کھا کر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراو مقدار معلوم $b = R\sin\alpha$ اور زاویہ بکھراو $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

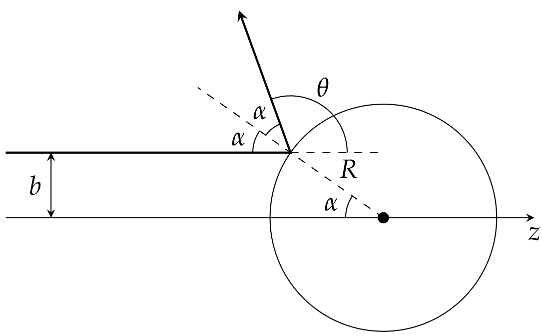
$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۱}$$

ظاہری طور پر درج ذیل ہو گا

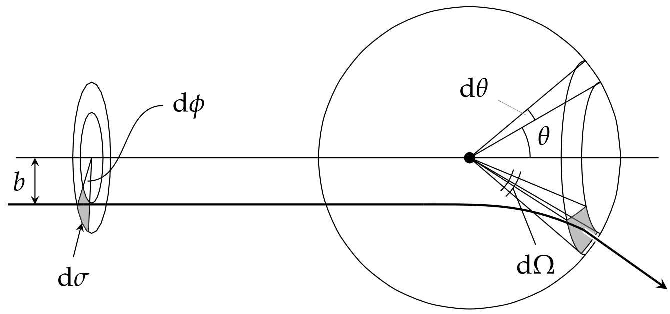
$$\theta = \begin{cases} 2\cos^{-1}(b/R), & \text{اگر } b \leq R \\ 0, & \text{اگر } b \geq R \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراو، جس میں ٹکراو مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراو θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے لچکدار بکھراو۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ بڑی $\mathrm{d}\sigma$ کی صورت میں $\mathrm{d}\Omega$ بھی بڑا ہو گا تناسبی جزو ضربی $D(\theta) \equiv \mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}\Omega$ کو تفریقی بکھراو عمودی تراش کہتے ہیں

$$\mathrm{d}\sigma = D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۳}$$

ٹکراو مقدار معلوم اور اسمتی زاویہ ϕ کی صورت میں $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہوں گے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{۱۱.۴}$$

چونکہ عمومی طور پر θ مقدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تفاعل ہو گا لحاظہ یہ تفرق در حقیقت منفی ہو گا اسی لیے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال ۱۱.۲: **سخت کرہ کے بکھراو کی مثال جاری رکھتے ہیں۔** سخت کرہ بکھراو مثال 11.1 کی صورت میں

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۵}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{۱۱.۶}$$

اس مثال میں تفریقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔ □

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا تکمل ہو گا

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۷}$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہو گا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراو کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\sigma = (R^2/4)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2 \tag{۱۱.۸}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً مرکزہ کا کولمب میدان کے لیئے بھی کار آمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہو گا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد} \tag{۱۱.۹}$$

فی اکائی وقت رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھراو والے ذرات کی تعداد $\mathrm{d}N = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$ ہو گی لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{۱۱.۱۰}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں با آسانی ناپا جا سکتا ہو لحاظہ اس کو عموماً تفرقی عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو $\mathrm{d}\Omega$ سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۱: **ردرفورڈ بکھراو**۔ بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار q_2 ہو سے بکھرتا ہے۔

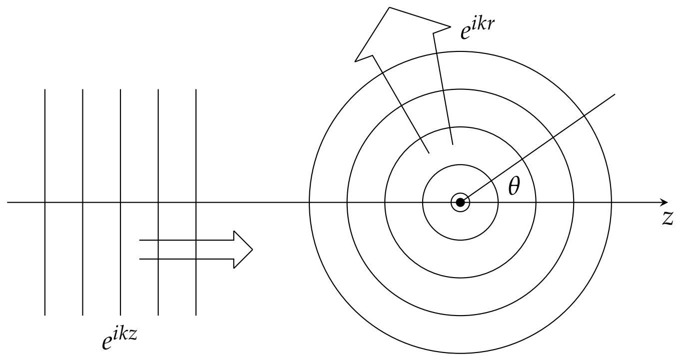
(الف) ٹکراو مقدار معلوم اور زاویہ بکھراو کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

جواب: $b = (q_1q_2/8\pi\epsilon_0 E)\cot(\theta/2)$

(ب) تفرقی بکھراو عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۱۱}$$



شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراو؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروی موج پیدا کرتی ہے۔

(ج) دیکھائیں کہ ردرفورڈ بکھراو کا کل عمودی تراش لامتناہی ہوگا۔ ہم کہتے ہیں $1/r$ مخفیہ لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراو

بکھراو کے کوانٹم نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور z رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراو مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۴)۔ یعنی ہم مساوات شروڈنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

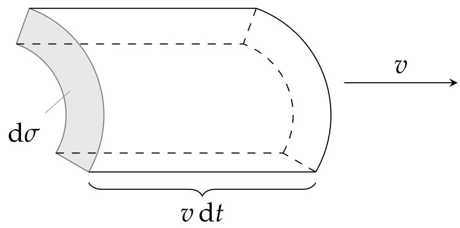
$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \qquad \text{بڑے } r \text{ کے لیے} \tag{۱۱.۱۲}$$

کروی موج میں جز ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے خاطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہوگا

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۱۱.۱۳}$$

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروی موج کا حیطہ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہوگا۔

ہمیں حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تعین کران ہوگا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ θ میں بکھراو کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفریقی عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً سمتی رفتار v پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت dt میں لامتناہی چھوٹی



شکل ۱۱.۵: وقت $\mathrm{d}t$ کے دوران رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم $\mathrm{d}V$ ہے۔

رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{آمدی}}\right|^2 \mathrm{d}V = |A|^2 \,(v\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھاو کا احتمال

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{بکھرا}}\right|^2 \mathrm{d}V = \frac{|A|^2|f|^2}{r^2}(v\,\mathrm{d}t)r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

بھی یہی ہوگا لحاظہ $\mathrm{d}\sigma = \left|f\right|^2 \mathrm{d}\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$D(\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{۱۱.۱۴}$$

ظاہر ہے کہ تفرقی عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے حیطہ بکھراو جو مساوات ژروڈنگر کے حل سے حاصل ہوگا کی مطلق مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم حیطہ بکھراو کی حساب کے دو ترا کیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تخمین پر غور کریں گے۔

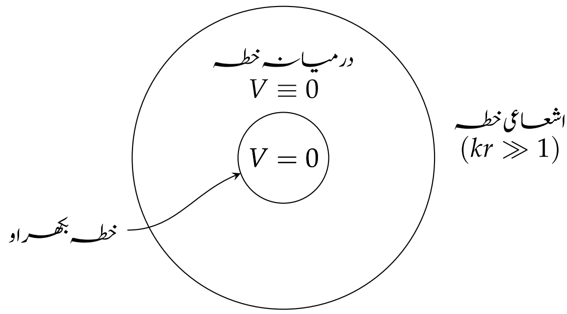
سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراو کے لیئے مساوات 11.12 کے مماثل تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول وضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لیئے مساوات شروڈنگر قابلِ علیحدگی حلوں

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۱۱.۱۵}$$



شکل ۱۱.۶: مقامی مخفیہ سے بکھراو؛ خطہ بکھراو، درمیانی خطہ، اور اشعاعی خطہ۔

کا حامل ہو گا جہاں Y_l^m کروی ہارمونی مساوات 4.32 ہے اور $u(r) = rR(r)$ ردائی مساوات مساوات 4.37

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu \tag{۱۱.۱۶}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابلِ نظر انداز ہو گا۔ لحاظہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} \approx -k^2u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جز رخصتی کروی موج کو اور دوسرا جز آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جب ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے اخذ کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لیئے تھا یا یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ $kr >> 1$ کے لیئے تھا جسے بصریات میں خطہ اشعاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہو گا کہ کسی متناہی بکھراؤ خطہ کے باہر یہ تقریباً صفر ہو گا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانی خطہ میں جہاں V کو رد کیا جا سکتا ہے لیکن مرکز گریز جز کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا ردائی مساوات درج ذیل روپ اختیار

کرتی ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = -k^2u \tag{۱۱.۱۷}$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروی بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ ہو گا

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr) \tag{۱۱.۱۸}$$

لیکن نہ ہی j_l جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی n_l جو متعمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروی ہینکل تفاعلات کہتے ہیں

$$h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + in_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - in_l(x) \tag{۱۱.۱۹}$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروی ہینکل تفاعلات پیش کیئے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_l^{(1)}(kr)$ جسے

جدول ۱۱.۱: کروی ہینکل تفاعلات $h_l^{(1)}(x)$ اور $h_l^{(2)}(x)$

$h_0^{(1)} = -i\frac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i\frac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{-ix}$

$$\left.\begin{aligned} h_l^{(1)} &\to \frac{1}{x}(-i)^{l+1}e^{ix} \\ h_2^{(2)} &\to \frac{1}{x}(i)^{l+1}e^{-ix} \end{aligned}\right\} x >> 1 \text{ کے لیئے}$$

ہینکل تفاعل کا پہلا قسم کہتے ہیں e^{ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_l^{(2)}(kr)$ ہینکل تفاعل کی دوسری قسم e^{-ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ یوں رخصتی امواج کے لیئے ہمیں کروی ہینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہو گی:

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr) \tag{۱۱.۲۰}$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہو گا بالکل ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left\{e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m}h_l^{(1)}(kr)Y_l^m(\theta,\phi)\right\} \tag{۱۱.۲۱}$$

اس کا پہلا جز آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروی تشاکلی ہے لحاظہ تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یاد رہے $Y_l^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درج ذیل ہو گا

$$Y_l^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۲}$$

جہاں l ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو P_l کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر a_l $C_{l,0} \equiv i^{l+1}k\sqrt{4\pi(2l+1)}a_l$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$\psi(r,\theta) = A\left\{e^{ikz} + k\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)a_l h_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\theta)\right\} \tag{۱۱.۲۳}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامتیت کیوں بہتر ہے a_l کو l واں حیطہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں ہینکل تفاعل $(-i)^{l+1}e^{ikr}/kr$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{(ikr)}}{r}\right\} \tag{۱۱.۲۴}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۵}$$

یہ مساوات 11.12 میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھاتا ہے کہ جزوی موج حیطوں a_l کی صورت میں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہوگا تفریقی عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)a_l^* a_{l'} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۶}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$\sigma = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|a_l|^2 \tag{۱۱.۲۷}$$

زاویائی تکمل کو حل کرنے کے لیئے میں نے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیرِ غور مخفیہ کے لیئے جزوی موج حیطوں a_l کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ مشلا صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیئے کروی محدد جبکہ آمدی موج کے لیئے کارتیسی محدد استعمال کیئے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\sum_{l,m}\left[A_{l,m}j_l(kr) + B_{l,m}n_l(kr)\right]Y_l^m(\theta,\phi)$$

یوں بلخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیئے اب مبدہ پر e^{ikz} متناہی ہے لحاظہ نیومن تفاعلات کی اجازت نہیں ہو گی $r = 0$ پر $n_l(kr)$ بے قابو بڑھتے ہیں اور چونکہ $z = r\cos\theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لحاظہ صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں سریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,\theta) = A\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\left[j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr)\right]P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۹}$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹم سخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل فرض کریں

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \le a \text{ کے لیئے} \\ 0, & r > a \text{ کے لیئے} \end{cases} \tag{۱۱.۳۰}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہو گا

$$\psi(a,\theta) = 0 \tag{۱۱.۳۱}$$

یوں تمام θ کے لیئے

$$\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\left[j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)(ka)}\right]P_l(\cos\theta) = 0 \tag{۱۱.۳۲}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$a_l = i\frac{j_l(ka)}{kh_l^(1)(ka)} \tag{۱۱.۳۳}$$

بلخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}\right|^2 \tag{۱۱.۳۴}$$

یہ بلکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جا سکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدید صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لیے $n_l(z)$ کی مقدار $j_l(z)$ سے بہت زیادہ ہو گی لحاظہ

$$\frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z)+in_l(z)} \approx -i\frac{j_l(z)}{n_l(z)}$$

$$\approx -i\frac{2^l l! z^l/(2l+1)!}{-(2l)!z^{-l-1}/2^l l!} = \frac{i}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^2 z^{2l+1} \tag{۱۱.۳۵}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لحاظہ بلند طاقتیں قابلِ نظرانداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $l = 0$ جز بکھراؤ میں غالب ہو گا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تفریقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہو گا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \tag{۱۱.۳۶}$$

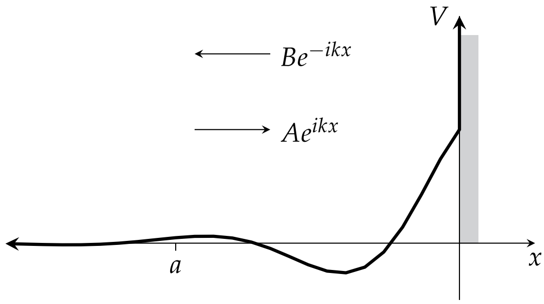
حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت جومیٹرائی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طولِ موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہو گا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُپر سے گزرتے ہیں نا کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیژانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ l کی مختلف قیمتوں والے عددی سر لازماً صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha\delta(r-a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کیصورپر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ تفریقی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لحاظہ صرف $l = 0$ جز



شکل ۱۱.۷: مقامی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامتناہی دیوار پائی جاتی ہے، سے یک بعدی بکھراو۔

خاطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $0 \neq l$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

جواب: $\sigma = 4\pi a^2\beta^2/(1+\beta)^2$

۱۱.۳ منتقلات حیط

پہلے نصف لکیر $0 < x$ پر مکامی مخفیہ $V(x)$ سے یک بُعدی بکھراو کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر اینٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۷}$$

مکمل طور پر منعکس ہو گا

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۸}$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا منعکد موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہو گا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدہ پر آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہو گا

$$\psi_0(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad (V(x) = 0) \tag{۱۱.۳۹}$$

لحاظ $B=-A$ ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x<-a$ کے لیئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$\psi(x)=A\left(e^{ikx}-e^{i(2\delta-kx)}\right)\qquad (V(x)\neq 0) \tag{۱۱.۴۰}$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیئے k لحاظ توانائی $E=\hbar^2k^2/2m$ کی صورت میں یتنقل حیط کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراؤ $(-a<x<0)$ میں مساوات زروڈنگر کو حل کرکے مناسب سرحدی شرائط مسلط کرکے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیط B کی بجائے یتنقل حیط کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیط تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعدادات پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیارِ حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں $m\neq 0$ والا کوئی جز نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زیاویائی معیارِ حرکت $(l=0,1,2,\ldots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظ ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی l سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0=Ae^{ikz}$ ہوگا لحاظ l ویں جزوی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$\psi_0^{(l)}=Ai^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta)\qquad (V(r)=0) \tag{۱۱.۴۱}$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$j_l(x)=\frac{1}{2}\left[h^{(1)}(x)+h_l^{(2)}(x)\right]\approx\frac{1}{2x}\left[(-i)^{l+1}e^{ix}+i^{l+1}e^{-ix}\right]\qquad (x\gg 1) \tag{۱۱.۴۲}$$

لحاظ بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$\psi_0^{(l)}\approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{ikr}-(-1)^le^{-ikr}\right]P_l(\cos\theta)\qquad (V(r)=0) \tag{۱۱.۴۳}$$

چکور کوسین میں دوسرا جز آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جز رخصتی موج ہے جو یتنقل حیط δ_l لیتا ہے

$$\psi^{(1)}\approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{i(kr+2\delta_1)}-(-1)^le^{-ikr}\right]P_l(\cos\theta)\qquad (V(r)\neq 0) \tag{۱۱.۴۴}$$

آپ e^{ikz} میں $h_l^{(2)}$ جز کی بنا اس کو کروی مرتکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_l$ یتنقل حیط پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_l^{(1)}$ حصہ کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر اُبھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں a_l کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو منتقل حیطہ δ_l کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متقاربی روپ

$$\psi^{(1)} \approx A\left\{\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{ikr}-(-1)^l e^{-ikr}\right]+\frac{(2l+1)}{r}a_l e^{ikr}\right\}P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۵}$$

کا δ_l کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$a_l=\frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l}-1\right)=\frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin(\delta_l) \tag{۱۱.۴۶}$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۷}$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$\sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l) \tag{۱۱.۴۸}$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے منتقلات حیطہ کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے منتقلی حیطہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_l جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_l استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x)=\begin{cases}0, & (x<-a).\\ -V_0, & (-a\le z\le 0).\\ \infty, & (x>0).\end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika}\left[\frac{k-ik'\cot(k'a)}{k+ik'\cot(k'a)}\right]e^{-ikx}, \qquad \text{جہاں}\ k'=\sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیطہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لیے یتقلات حیط δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراو کے لیے جزوی موج حیطی انتقال δ_l کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $l = 0$ جزوی موج انتقال حیط $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \to \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1}\left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)}\right], \qquad \text{جہاں}\ \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ

غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi + V\psi = E\psi \tag{۱۱.۴۹}$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{۱۱.۵۰}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{اور} Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi \tag{۱۱.۵۱}$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلم ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جز Q از خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لیے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \tag{۱۱.۵۲}$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک تکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0)\, d^3 r_0 \tag{۱۱.۵۳}$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(r) = \int \left[(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)\right] Q(r_0)\, d^3 r_0$$
$$= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0)\, d^3 r_0 = Q(r)$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لیے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s \tag{۱۱.۵۴}$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left[(\nabla^2 + k^2)e^{is\cdot r}\right] g(s)\, d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$\nabla^2 e^{is\cdot r} = -s^2 e^{is\cdot r} \tag{۱۱.۵۵}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$\delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۶}$$

لحاظہ مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

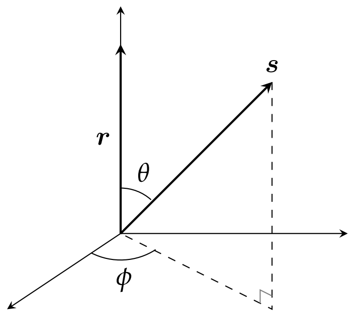
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2)e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \tag{۱۱.۵۷}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کر کے درج ذیل ملتا ہے

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۸}$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدد برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا تکمل۔

اب s تکمل کے نقطع نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کروی محدد (s,θ,ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r کتبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s\cdot r = sr\cos\theta$ ہو گا متغیر ϕ کا تکمل 2π ہو گا جبکہ θ تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} e^{isr\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{e^{isr\cos\theta}}{isr}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\sin(sr)}{sr} \tag{۱۱.۵۹}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)}\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s \tag{۱۱.۶۰}$$

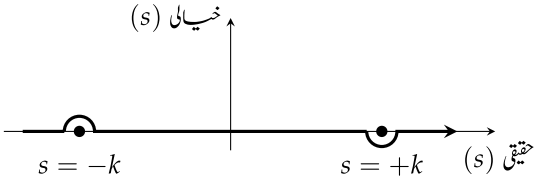
باقی تکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned}G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s\right\}\\ &= \frac{i}{8\pi^2 r}(I_1 - I_2)\end{aligned} \tag{۱۱.۶۱}$$

اگر z_0 خطِ ارتفاع کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ تکمل

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{۱۱.۶۲}$$

استعمال کرتے ہوئے ان تکملات کی قیمت تلاش کی جا سکتی ہے دیگر صورت تکمل صفر ہو گا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بلکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ تکمل لیا جا رہا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا



شکل ۱۱.۹: ارتفاعی تکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہو گا۔

شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتفاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

ہو گا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہو گا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا کہ یہ تمام قابلِ قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک تکمل کے لیے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہو گا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ تکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ تکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جز بہت بڑا اور مثبت ہو تب جز ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس تکمل کے لیے ہم بالا نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ا)۔ اب خط ارتفاع صرف $s=+k$ پر پائے جانے والا نادر نقطع کو گھیرتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$I_1=\oint\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\frac{1}{s-k}\,\mathrm{d}s=2\pi i\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\Bigg|_{s=k}=i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۳}$$

تکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جز بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جز ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خطِ ارتفاع $s=-k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لہٰذا اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہو گا

$$I_2=-\oint\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\frac{1}{s+k}\,\mathrm{d}s=-2\pi i\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\Bigg|_{s=-k}=-i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۴}$$

ماخوذ:

$$G(r)=\frac{i}{8\pi^2 r}\left[\left(i\pi e^{ikr}\right)-\left(-i\pi e^{ikr}\right)\right]=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{۱۱.۶۵}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیئے گا سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانز ہلم ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0 \tag{۱۱.۶۶}$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے قریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۶۷}$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0 \tag{۱۱.۶۸}$$

مساوات 11.67 شروڈنگر مساوات کی تکملی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جانے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراؤ مسائل کے لیئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$ ۔

سوال ۱۱.۹: دیکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لیئے مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ E منفی ہے لحاظہ $k = i\kappa$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہوگا۔

۱۱.۴.۲ بارن تخمین اوّل

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مکامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات

11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیے $|r| \gg |r_0|$ ہو گا لحاظہ

$$|r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right) \tag{۱۱.۶۹}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$|r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0 \tag{۱۱.۷۰}$$

ہم

$$k \equiv k\hat{r} \tag{۱۱.۷۱}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr}e^{-ik\cdot r_0} \tag{۱۱.۷۲}$$

ہو گا۔ لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\cdot r_0} \tag{۱۱.۷۳}$$

نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین $|r - r_0| \cong r$ دے سکتے ہیں قوت نما میں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہو گا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نما میں دوسرے جز کو پھیلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$\psi_0(r) = Ae^{ikz} \tag{۱۱.۷۴}$$

یوں بڑی r کے لیے درج ذیل ہو گا

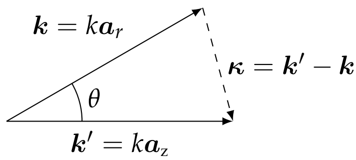
$$\psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{ik\cdot r_0}V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۵}$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراو پڑھ سکتے ہیں

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A}\int e^{-ik\cdot r_0}V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۶}$$

یہاں تک یہ بلکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروۓکار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدیہ مستوی موج کو مخفیہ قابلِ ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہو گا

$$\psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik'\cdot r_0} \tag{۱۱.۷۷}$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراو رخ ہے۔

جہاں تکمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$k' \equiv k\hat{z} \tag{۱۱.۷۸}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بلکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہو گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k'-k)\cdot r_0}V(r_0)\,\mathrm{d}^3\,r_0 \tag{۱۱.۷۹}$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اوّل الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ معاخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیارِ حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خطہ بکھراو پر کم توانائی لمبی طولِ موج بکھراو کے لیئے قوتِ نمائی جز ضربی بنیادی طور پر مستقل ہو گا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\int V(r)\,\mathrm{d}^3\,r, \qquad \text{کم توانائی} \tag{۱۱.۸۰}$$

میں نے یہاں r کے زیرِ نوشت میں کچھ نہیں لکھا اُمید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہو گی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراو درج ذیل مخفیہ لیں

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \le a \text{ اگر} \\ 0, & r > a \text{ اگر}\end{cases} \tag{۱۱.۸۱}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا۔

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}V_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{۱۱.۸۲}$$

تفریقی عمودی تراش

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۳}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۴}$$

□

ایک کروی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لیئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \tag{۱۱.۸۵}$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos\theta_0 \tag{۱۱.۸۶}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\kappa r_0 \cos\theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin\theta_0 \,\mathrm{d}r_0 \,\mathrm{d}\theta_0 \,\mathrm{d}\phi_0 \tag{۱۱.۸۷}$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیرِ نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa}\int_0^\infty rV(r)\sin(\kappa r)\,\mathrm{d}r \qquad \text{کروی تشاکل} \tag{۱۱.۸۸}$$

f کی زاویائی تابعیت κ میں سموئی گئی ہے شکل ۱۱.۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\kappa = 2k\sin(\theta/2) \tag{۱۱.۸۹}$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کا روپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$V(r) = \beta\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۱۱.۹۰}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(\kappa r)\,\mathrm{d}r = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2+\kappa^2)} \tag{۱۱.۹۱}$$

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔ □

مثال ۱۱.۶: ردرفورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہو گا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2} \tag{۱۱.۹۲}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{۱۱.۹۳}$$

اس کا مربع ہمیں تفریقی عمودی تراش دیگا

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۹۴}$$

جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لیئے کلاسیکی میکانیات، تخمین بارن اور کوانٹم نظریہ میدان تمام ایک دوسرے جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لیئے نرم کرہ بکھراؤ کا حیطہ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہو گا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں تکمل کی قیمت تلاکر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

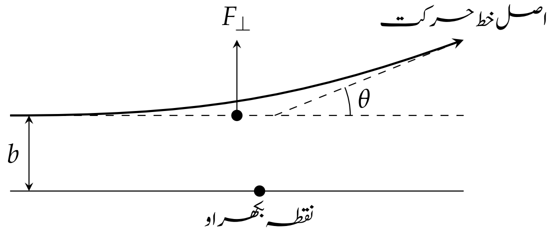
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لیئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لیئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لیکر پر ہی چلتے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$I = \int F_\perp \, \mathrm{d}t \tag{11.95}$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیارِ حرکت کی ایک اچھی تخمین ہو گی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہو گا جہاں p آمدی معیارِ حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \tag{11.96}$$

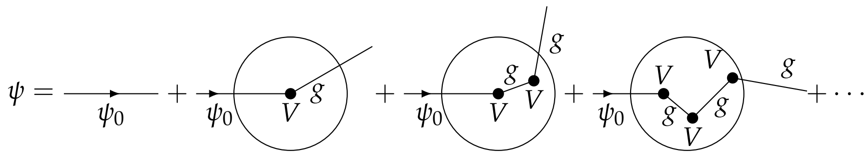
اسے ہم رتبہ اوّل تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبی کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبی تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ در حقیقت اس کی رتبہ اوّل تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبی تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بلکل ٹھیک جواب پر مرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{11.97}$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{11.98}$$



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظریری مفہوم۔

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیے جز ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جا سکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \tag{11.99}$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے تکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \tag{11.100}$$

اس عمل کو بار بار دوہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہو گا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \tag{11.101}$$

ہر تکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اوّل اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبی تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبی ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہو گا رتبی اوّل میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹم میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جز ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردر فورڈ بکھراؤ کے لیے θ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ مناسب حدوں کے اندر آپ کا نتیجہ بلکل ٹھیک ریاضی فکرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لیے حیطہ بکھراو تلاش کریں۔

جواب: $-(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1-(4mV_0a^2/5\hbar^2)]$

سوال ۱۱.۱۶: یک بُعدی مساوات شروڈنگر کے لیئے تفاعل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مماثل تکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|}V(x_0)\psi(x_0)\,\mathrm{d}x_0 \tag{۱۱.۱۰۲}$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدہ پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر یک بُعدی بکھراو کے لیئے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx}V(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \tag{۱۱.۱۰۳}$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل مساوات 2.114 اور ایک متناہی چکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراو کے لیئے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو یک بُعدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بلکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ ھیطہ بکھراو کے خیالی جز اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}Im(f(0)) \tag{۱۱.۱۰۴}$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \tag{۱۱.۱۰۵}$$

باب ۱۲

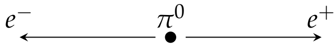
پس نوشت

اب چونکہ میں توقع کرتا ہوں آپ کوانٹم میکانیات کو سمجھتے ہیں ہم حصہ 1.2 میں کیا گیا سوال دوبارہ اٹھاتے ہیں کوانٹم میکانیات کے نتائج سے کیا مطلب اخذ کرنا چاہیے مسئلہ کا جڑ تفاعل موج کے ساتھ وابستہ شماریاتی مفہوم کی عدم تعینیت ہے۔ تفاعل ψ یا کوانٹم حال کہنا بہتر ہوگا جو مثال کے طور پر چکر کار ہو سکتا ہے صرف ممکنہ نتائج کی شماریاتی تقسیم مہیا کرتا ہے اور کسی بھی پیمائش کا نتیجہ یکتا طور پر تعین نہیں کرتا اس سے ایک اہم سوال کھڑا ہوتا ہے کیا پیمائش سے قبل نظام یہ مخصوص خاصیت حقیقتاً رکھتا تھا جسے حقیقت پسند نقطہ نظر کہتے ہیں یا پیمائش کے عامل نے اس خاصیت کو جنم دیا جو تفاعل موج کی شماریاتی پابندی کو مطمئن کرتا ہے۔ تقلید پسند نقطہ نظر یا ہم اس سوال کو ان بنیادوں پر رد کرتے ہیں کہ یہ سوال ایک فرضی سوال ہے انکاری نقطہ نظر۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے کوانٹم میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہے چونکہ کوانٹم میکانیات کی تمام فراہم کردہ معلومات یعنی اس کا تفاعل موج جانتے ہوئے آپ خواص تعین نہیں کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں کوانٹم میکانیات سے باہر کوئی اور معلومات ہوگی جس کو ψ کے ساتھ ملا کر طبعی حقائق کو مکمل طور پر بیان کرنا ممکن ہوگا۔

تقلید پسند نقطہ نظر اس سے بھی زیادہ سنگین سوالات کھڑے کرتا ہے چونکہ اگر پیمائشی عمل نظام کو ایک خاصیت اختیار کرنے پر مجبور کرتا ہو تب پیمائش ایک عجیب عمل ہوگا ساتھ ہی یہ جانتے ہوئے کہ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی نتیجہ دیتی ہے ہمیں ماننا ہوگا کہ پیمائشی عمل تفاعل موج کو یوں منحد اُکرتا ہے جو مساوات شروڈنگر کی تجویز کردہ ارتقا کے برعکس ہے۔

ان سب کی روشنی میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نسل در نسل ماہر طبیعیات انکاری سوچ کے پیچھے پناہ لینے پر مجبور کیوں ہوئے اور اپنے شاگردوں کو نصیحت کرتے رہے کہ نظریہ کے تصوراتی بنیادوں پر غور و فکر کر کے اپنا وقت ضائع نہ کریں۔



شکل ۱.۱۲: آئنسٹائن، پوڈلسکی وروزن تضاد کا بوہم انداز۔ ساکن π^0 کا تنزل الیکٹران وضد الیکٹران جوڑی میں ہوتا ہے۔

۱.۱۲ آئنسٹائن پوڈلسکیو روزن تضاد

1935 میں آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن نے مل کر آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن تضاد پیش کیا جسکا مقصد خالصتاً نظریاتی بنیادوں پر یہ ثابت کرنا تھا کہ صرف حقیقت پسندانا نقطہ نظر درست ہو سکتا ہے۔ میں اس تضاد کی ایک سادہ روپ جو داؤد بام نے پیش کی پر تبصرہ کرتا ہوں۔ تادیلی پائے میزان کی ایک الیکٹران اور ایک پرٹون میں تحلیل پر غور کریں

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$$

ساکن پائون کی صورت میں الیکٹران اور پروٹان ایک دوسرے کے مخالف رخ جائیں گے (شکل ۱.۱۲)۔ اب چونکہ پائون کا چکر صفر ہے لحاظہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کے تحت یہ الیکٹران اور پوزیٹران یکتا تنظیم میں ہوں گے

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_-\downarrow_+ - \downarrow_-\uparrow_+) \qquad (۱.۱۲)$$

اگر دیکھا جائے کہ الیکٹران ہم میدان ہے تب پوزیٹران لاظماً خلافِ میدان ہوگا اور اسی طرح اگر الیکٹران خلاف میدان پایا جائے تب پوزیٹران ہم میدان ہوگا۔ کوانٹم میکانیات آپ کو یہ بتانے سے قاصر ہے کہ کس پایون تحویل میں آپ کو کونسی صورت حال ملے گی تاہم کوانٹم میکانیات یہ ضرور بتا سکتی ہے کہ ان پیمائش کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق ہوگا اور اوسطاً نصف وقت ایک قسم اور نصف وقت دوسری قسم کی جوڑیاں پیدا ہوں گے۔ اب فرض کریں ہم ان الیکٹران اور پوزیٹران کو ایک عملی تجربے کے لیئے دس میٹر تک جانے دیں یا اصولاً دس نوری سال تک جانے دیں اور اس کے بعد الیکٹران کے چکر کی پیمائش کریں۔ فرض کریں آپ کو ہم میدان ملتا ہے۔ آپ فوراً جان پائیں گے کہ بیس میٹر یا بیس نوری سال دور کوئی دوسرا شخص پوزیٹران کو خلاف میدان پائے گا۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے اس میں کوئی حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ انکی پیدائش کے وقت سے ہی الیکٹران حقیقتاً ہم میدان اور پوزیٹران خلاف میدان تھے ہاں کوانٹم میکانیات ان کے بارے میں جاننے سے قاصر تھا۔ تاہم تقلید پسند نقطہ نظر کے تحت پیمائش سے قبل دونوں ذرات نہ ہم میدان اور نہ ہی خلاف میدان تھے الیکٹران پر پیمائش تفاعل موج کو منہدا کرتی ہے جو فوراً بیس میٹر یا بیس نوری سال دور پوزیٹران کو خلاف میدان بناتا ہے۔ آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن اس قسم کے دور عمل کرنے والے عوامل میں یقین نہیں رکھتے تھے۔ یوں انہوں نے تقلید پسند نقطہ نظر کو ناقابلِ قبول قرار دیا چاہے کوانٹم میکانیات جانتا ہو یا نہ جانتا ہو الیکٹران اور ہوزیٹران لاظماً کسی مخصوص چکر کے حامل تھے۔

ان کی دلیل اس بنیادی مفروضہ پر کھڑی ہے کہ کوئی بھی اثر روشنی کی رفتار سے تیز سفر نہیں کر سکتا ہے۔ ہم اسے اصول مقامیت کہتے ہیں۔ آپ کو شبہ ہو سکتا ہے کہ تفاعل موج کی انہدام کی خبر کسی متناہی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہے۔ تاہم ایسی صورت میں زاویائی معیارِ حرکت کی بقا متعین نہیں ہو گی چونکہ پوزیٹران تک انہدام کی خبر پہنچنے سے پہلے اگر ہم اس کے چکر کی پیمائش تو ہمیں دونوں اقسام کے چکر پچاس پچاس فیصد احتمال سے حاصل ہوں گے۔ آپ کا نظریہ جو بھی کہے تجربات کے تحت دونوں کے چکر ہر صورت ایک دوسرے کے مخالف ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے تفاعل موج کا انہدام یک دم ہوتا ہے۔

سوال ۱.۱۲: **یولیدہ حالات**۔ یولیدہ حالات کی ایک کلاسیکی مثال یکتا چکر تنظیم مساوات 12.1 ہے۔ اس دو ذرہ حال کو دو یک ذری حالات کا مجموعہ نہیں لکھا جا سکتا ہے لحاظہ جس کے بارے میں بات کرتے ہوئے کسی ایک ذرے کے علیحدہ حال کی بات نہیں کی جا سکتی ہے۔ آپ گمان کر سکتے ہیں کہ شائد ہماری علامتیت کی بنا ہے اور عین ممکن ہے کہ یک ذرہ حالات کا کوئی خطی جوڑ اس نظام کو کھول سکے درج ذیل مسئلے کا ثبوت پیش کریں۔

دو سطحی ایک نظام $| \psi_a\rangle$ اور $| \psi_b\rangle$ پر غور کریں جہاں $\langle \psi_i | \psi_j\rangle = \delta_{ij}$ ہو۔ مثلاً $| \psi_a\rangle$ ہم میدان اور $| \psi_b\rangle$ خلاف میدان کو ظاہر کر سکتا ہے۔ دو ذری حال

$$\alpha \mid \phi_a(1)\rangle \mid \phi_b(2)\rangle + \beta \mid \phi_b(1)\rangle \mid \phi_a(2)\rangle$$

جہاں $\alpha \neq 0$ اور $\beta \neq 0$ ہیں کو کسی بھی یک ذری حالات $| \psi_r\rangle$ اور $| \psi_s\rangle$ کا حاصل ضرب

$$\left|\psi_r(1)\right\rangle \left| \psi_s(2)\right\rangle$$

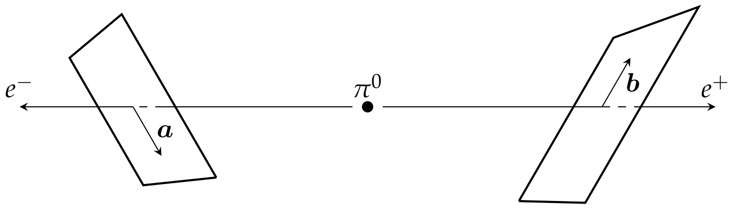
نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

اشارہ: $| \psi_r\rangle$ اور $| \psi_s\rangle$ کو $| \psi_a\rangle$ اور $| \psi_b\rangle$ کے خطی جوڑ لکھیں۔

۱۲.۲ مسئلہ بل

آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن کا کوانٹم میکانیات کی درستگی پر کوئی شک نہیں تھا البتہ ان کا دعوہ کہ طبعی حقیقت کو بیان کرنے کے لیئے یہ ایک نہ مکمل نظریہ ہے کسی بھی نظام کا حال پوری طرح جاننے کی خاطر ψ کے ساتھ ساتھ ایک اور مقدار λ درکار ہو گی۔ چونکہ فی الحال ہم نہیں جانتے کہ λ کو کس طرح ناپا یا حساب کے ذریعہ معلوم کیا جائے۔ لحاظہ ہم اسے درپردہ متغیر کہتے ہیں۔ تاریخی طور پر کئی درپردہ متغیر نظریات پیش کئے گئے جو پیچیدہ ہونے کے ساتھ ساتھ نامعقول ثابت ہوئے بہر حال سن 1964 تک اس پر کام کرنے کی وجہ نظر آتی تھی تاہم اس سال جناب بل نے ثابت کیا کہ درپردہ متغیر نظریہ اور کوانٹم میکانیات ساتھ ساتھ نہیں چل سکتے ہیں۔

بل نے آئنسٹائن، پڈولسکی اور روزن بوہم تجربہ کو عمومی بنانے کی بات کی الیکٹران اور پوزیٹران کاشف کو ایک ہی رخ رکھنے کی بجائے بل نے انہیں علیحدہ علیحدہ زاویوں پر رکھنے کی اجازت دی۔ پہلا کاشف اکائی سمتیہ a کے رخ الیکٹران چکر کا جز ناپتا ہے جبکہ دوسرا b کے رخ پوزیٹران کے چکر کا حصہ ناپتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ ہم اپنی آسانی کے



شکل ۱۲.۲: آئنسٹائن، پوڈلسکی وروزن تضاد کا بل انداز۔ کاشف آزادانہ طور پر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ رخ سمت بند ہیں۔

لیتے چکر کو $\hbar/2$ کی اکائیوں میں ناپتے ہیں یوں کاشف کے رخ ہم میدان کی قیمت $+1$ اور خلاف میدان کی قیمت -1 ناپی جائے گی۔ کئی π^0 تنزل کے نتائج درج ذیل جدول میں پیش کئے گئے نتائج کی طرح ہو سکتے ہیں۔ کاشف

الیکٹران	پوزیٹران	حاصل ضرب
$+1$	-1	-1
$+1$	$+1$	$+1$
-1	$+1$	-1
$+1$	-1	-1
-1	-1	$+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

کے رخوں کی کسی ایک جوڑی کے لیتے بل نے چکر کے حاصل ضرب کی اوسط قیمت تلاش کی جسے ہم $P(a,b)$ لکھتے ہیں۔ متوازی کاشفوں کی صورت میں $b = a$ ہو گا جو ہمیں اصل آئنسٹائن، پڈلسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے نتائج دیگا ایسی صورت میں ایک ہم میدان اور دوسرا اخلاف میدان ہو گا لحاظہ ان کا حاصل ضرب ہر صورت -1 ہو گا اور یوں اوسط کی قیمت بھی یہی ہو گی

$$P(a,a) = -1 \tag{۱۲.۲}$$

اسی طرح اگر کاشف زد متوازی ہوں تب $b = -a$ اور ہر حاصل ضرب $+1$ لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$P(a,-a) = +1 \tag{۱۲.۳}$$

اختیاری سمت بندی کے لیتے کوانٹم میکانیات درج ذیل پیش گوئی کرتی ہے

$$P(a,b) = -a \cdot b \tag{۱۲.۴}$$

سوال 4.50 دیکھیں۔ بل نے دریافت کیا کہ یہ نتیجہ کسی بھی درپردہ متغیر نظریہ کا ہم اہنگ نہیں ہو سکتا ہے۔

اس کا دلیل حیرت کن حد تک سادہ ہے فرض کریں الیکٹران پوزیٹران نظام کے مکمل حال کو کوئی درپردہ متغیر یا متغیرات λ ظاہر کرتا ہے۔ ایک پایئون تنزل سے دوسرے پایئون تنزل تک λ کی تبدیلی کو نہ ہم

سمجھتے اور نہ ہی قابو کرتے ہیں۔ ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ الیکٹران کی پیمائش پر پوزیٹران کاشف کی سمت بندی b کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے یاد رہے کہ تجربہ کرنے والا الیکٹران کی پیمائش کے بعد پوزیٹران کاشف کا رخ منتخب کر سکتا ہے۔ ایسی صورت میں چونکہ پوزیٹران کاشف کا رخ منتخب کرنے سے پہلے ہی الیکٹران کی پیمائش کی جا چکی ہو گی لحاظہ اس پر بھی کی سمت کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا ہے۔ یہ اصول مقامیت کا مفروضہ ہے یوں الیکٹران کی پیمائش کوئی تفاعل $A(a,\lambda)$ اور پوزیٹران کی پیمائش کوئی دوسرا تفاعل $B(b,\lambda)$ دیگا۔ ان تفاعلات کی قیمتیں صرف ±1 ہو سکتی ہیں

$$A(a,\lambda)=\pm1; \qquad B(b,\lambda)=\pm1 \tag{۱۲.۵}$$

جب کاشف متوازی ہوں تب تمام λ کے لیئے درج ذیل ہو گا

$$A(a,\lambda)=-B(a,\lambda) \tag{۱۲.۶}$$

اب پیمائشوں کی حاصل ضرب کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی جہاں $\rho(\lambda)$ درپردہ متغیر کی کثافت احتمال ہے

$$P(a,b)=\int\rho(\lambda)A(a,\lambda)B(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۷}$$

کسی بھی کثافت کا احتمال کے لیئے یہ غیر منفی ہو گا اور معمولزنی شرط $\int\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=1$ کو مطمئن کرے گا تاہم اس کے علاوہ ہم $\rho(\lambda)$ کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کرتے ہیں درپردہ متغیر کے مختلف نظریات ρ کے لیئے کافی مختلف تفاعلات پیش کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.6 کو استعمال کرتے ہوئے ہم B کو خارج کر سکتے ہیں۔

$$P(a,b)=-\int\rho(\lambda)A(a,\lambda)A(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۸}$$

اگر c کوئی تیسرا اکائی سمتیہ ہوتب درج ذیل ہو گا

$$P(a,b)-P(a,c)=-\int\rho(\lambda)\left[A(a,\lambda)A(b,\lambda)-A(a,\lambda)A(c,\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۹}$$

اور چونکہ $[A(b,\lambda)]^2=1$ ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

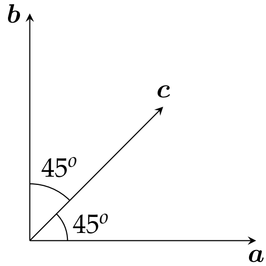
$$P(a,b)-P(a,c)=-\int\rho(\lambda)\left[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)\right]A(a,\lambda)A(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۱۰}$$

تاہم مساوات 12.5 کے تحت $-1\leq[A(a,\lambda)A(b,\lambda)]\leq+1$ مزید $\rho(\lambda)[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)]\geq0$ لحاظہ

$$\left|P(a,b)-P(a,c)\right|\leq\int\rho(\lambda)\left[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۱۱}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا

$$\left|P(a,b)-P(a,c)\right|\leq1+P(b,c) \tag{۱۲.۱۲}$$



شکل ۱۲.۳: کاشف کو یوں سمت بند کیا گیا ہے کہ بل عدم مساوات کی کوانٹائی خلاف ورزی ظاہر ہو۔

یہ مشہور بل عدم مساوات ہے۔ مساوات 12.5 اور 12.6 کے علاوہ کوئی شرط عائد نہیں کی گئی ہے ہم نے درپردہ متغیرات کی تعداد یا خاصیت یا تقسیم ρ کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کیا لحاظہ یہ عدم مساوات ہر مکامی درپردہ متغیر نظریہ کے لیئے کارامد ہو گا۔

لیکن ہم بہت آسانی سے دیکھا سکتے ہیں کہ کوانٹم میکانیات کی پیشاً گوئی مساوات 12.4 اور بل عدم مساوات ہم اہن نہیں ہیں۔ فرض کریں تینوں اکائی سمتیات ایک مستوی میں پائے جاتے ہوں اور a اور b کے ساتھ c کا زاویہ 45° ہو (شکل ۱۲.۳)۔ ایسی صورت میں کوانٹم میکانیات کہتی ہے کہ

$$P(a,b)=0, \qquad\qquad P(a,c)=P(b,c)=-0.707$$

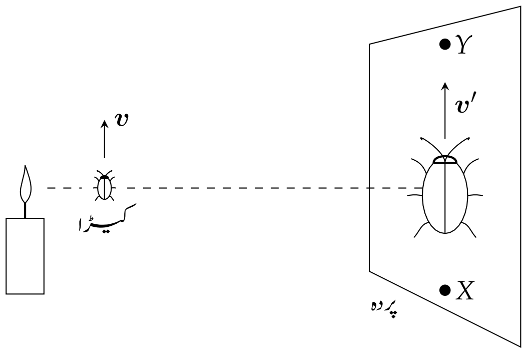
جبکہ بل عدم مساوات کہتی ہے کہ

$$0.707 \nleq 1-0.707=0.293$$

جب ایک دوسرے کے غیر ہم اہنگ نتائج ہیں یوں بل کی ترمیم سے آئنسٹائن، پڈولسکی اور روزن تضاد ایک ایسی بات ثابت کرتا ہے جو اس کے مصنفین تصور بھی نہیں کر سکتے تھے۔ اگر وہ درست ہوں تب نہ صرف کوانٹم میاکانیات نہ مکمل ہے بلکہ یہ مکمل طور پر غلط ہے اس کے برعکس اگر کوانٹم میکانیا درست ہے تب کوئی درپردہ متغیر نظریہ ہمیں اس غیر مکامیت سے نجات نہیں دو سکتی جسے آئنسٹائن مضائقہ خیز سمجھتا تھا۔ مزید اب ہم بہت سادی تجربہ سے اس مسئلے کو دفنا سکتے ہیں۔

بل عدم مساوات کو پرکھنے کے لیئے ساٹھ اور ستر کی دیہائیوں میں کئی تجربات سر انجام دئے گئے جن میں ایسپیکٹ، گرینگیئر اور روجیر کا کام قابلِ فخر ہے ہمیں یہاں انکے تجربہ کی تفصیل سے دلچسپی نہیں ہے۔ انہوں نے پائیون تنزل کی بجائے دو فوٹان جوہری انتقال استعمال کیا یہ خدشہ دور کرنے کے لیئے کہ الیکٹران کاشف کی سمت بندی کو کسی طرح پوزیٹران کاشف جان پائے گا فوٹان کی راوانگی کے بعد دونوں کی سمت بندی کی گئی۔ نتائج کوانٹم میکانیات کی پیشاً گوئی کی عین مطابق تھے اور بل عدم مساوات کے غیر ہم اہنگ تھے۔

ستم ظریفی کی بات ہے کہ کوانٹم میکانیات کی تجرباتی تصدیق نے سائنسی برادری کو ہلا کر رکھ دیا۔ لیکن اس کی وجہ حقیقت پسند سوچ کا غلط ثابت ہونا نہیں تھا عموماً سائنسدان کب کے اس حقیقت کو مان چکے تھے اور جو ابھی



شکل ۱۲.۴: پردہ پر کیڑے کا سایہ، روشنی کی رفتار c سے زیادہ رفتار v' سے حرکت کرتا ہے بشرطیکہ پردا کافی دور ہو۔

بھی مانتے تھے انکے لیئے غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات کا راستہ ابھی کھلا ہے چونکہ مثلا بل اطلاق ان پر نہیں ہوتا ہے۔ اصل سدمہ اس بات کا تھا کہ قدرت ازخود بنیادی طور پر غیر مکامی ہے۔ تفاعل موج کی فوراً انہدام کی صورت میں غیر مکامیت یا متماثل ذرات کے لیئے ضرورت تشاکلیت ہمیشہ تقلید پسند نظریہ کی خاصیت رہی ہے۔ تاہم ایسپیکٹ کے تجربہ سے قبل اُمید کی جا سکتی تھی کہ کوانٹم غیر مکامیت کسی طرح قائد و ضوابط کی غیر طبعی پیداوار تھی جس کے قابلِ کشف اثرات نہیں ہو سکتے ہیں اس اُمید کو بھول جائیں ہمیں فاصلہ پر یکدم عمل کے تصور کو دوبارہ دیکھنا ہو گا۔

ماہر طبیعیات روشنی سے زیادہ تیز رفتار اثر و رسوخ کو کیوں برداشت نہیں کر سکتے ہیں؟ آخر کئی چیزیں روشنی سے زیادہ تیز رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ ایک موم بتی کے سامنے چلتے ہوئے کیڑے کا سامنے دیوار پر سائے کی رفتار دیوار تک فاصلے کے راست متناسب ہو گی اصولاً آپ اس فاصلہ کو اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ سایہ کی رفتار روشنی سے زیادہ ہو (شکل ۱۲.۴)۔ تاہم دیوار پر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک سایہ نہ کوئی توانائی منتقل کر سکتا ہے اور نہ ہی کوئی خبر پہنچا سکتا ہے۔ نقطہ X پر ایک شخص ایسا کوئی عمل نہیں کر سکتا جو یہاں سے گزرتے ہوئے سائے کے ذریعہ نقطہ Y پر اثر انداز ہو۔

اس کے برعکس روشنی سے زیادہ تیز حرکت کرنے والے سبھی اثر و رسوخ کے ناقبلِ قبول مضمرات ہو سکتے ہیں۔ خصوصی نظریہ اضافت میں ایسے جمودی چوکھٹ پائے جاتے ہیں جن میں اس طرح کا اشارہ وقت میں پیچھے جا سکے گا یعنی سبب سے پہلے اثر رونما ہو گا جس سے ناقابلِ قبول منتقی مسائل کھڑے ہوتے ہیں۔ مثلاً آپ اپنے نوزادہ دادا کو قتل کر سکتے ہیں۔ جو ظاہر ہے ایک بری بات ہے۔ اب سوال یہ کھڑا ہوتا ہے کہ آیا روشنی سے تیز اثرات جن کیپیشا گوئی کوانٹم میکانیات کرتی ہے اور جو ایسپیکٹ کے تجربہ میں کسف ہتے ہیں ان معانوں میں سبھی ہے یا یہ سائے کی حرکت کی طرح غیر حقیقی ہے جن پر فلسفیانہ اعتراضات نہیں لگائے جا سکتے ہیں۔

آئیں تجربہ بل پر غور کریں کریں۔ کیا الیکٹران کی پیمائش کا پوزیٹران کی پیمائش پر اثر ہو گا یقیناً ایسا ہوتا ہے ورنہ ہم مواد کے بیچ باہم رشتہ کی وضاحت پیش کرنے سے قاصر ہوں گے۔ لیکن کیا الیکٹران کی پیمائش پوزیٹران

کی کسی مخصوص نتیجہ کا سبب ہے؟ الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائش کے ذریعہ پوزیٹران کاشف پر بیٹھے شخص کو اشارہ نہیں بھیج سکتا ہے چونکہ یہ اپنی پیمائش کے نتیجہ کو قابو نہیں کرتا یہ الیکٹران کو ہم میدان ہونے پر مجبور نہیں کر سکتا ہے جیسا نقطہ X پر کیڑا کے سارے پر وہ شخص اثرانداز نہیں ہو سکتا، ہاں الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص فیصلہ کر سکتا ہے کہ وہ پیمائش کرے یا نہ کرے تاہم پوزیٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائشی نتائج کو دیکھ کر یہ نہیں بتا سکتا کہ الیکٹران پر پیمائش کی گئی یا نہیں دونوں کاشف کے نتائج پر علیحدہ علیحدہ غور کرنے سے مکمل بلاواسطہ مواد دیکھنے کو ملتا ہے۔ صرف دونوں مواد کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں ان کے بیچ باہم رشتہ نظر آتا ہے کسی دوسرے جمودی چوکھٹ میں الیکٹران کی پیمائش سے قبل پوزیٹران کی پیمائش کی جائے گی لیکن اس کے باوجود اس سے کوئی منطقی تضاد پیدا نہیں ہوتا۔ دیکھا گیا باہم رشتہ اس پر منحصر نہیں کہ ہم کہیں الیکٹران کی پیمائش پوزیٹران کی پیمائش پر اثرانداز ہوتی ہے یا پوزیٹران کی پیمائش الیکٹران کی پیمائش پر اثرانداز ہوتی ہے۔ یہ ایک نہایت نازک اور خوبصورت اثر ہے جو بلاواسطہ مواد کے بیچ باہم رشتہ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

یوں ہمیں مختلف قسم کے اثرات کی بات کرنی ہو گی سبھی قسم جو وصول کنندہ کی کسی طبعی خاصیت میں حقیقی تبدیلیاں پیدا کرتا ہو جنہیں صرف ذیلی نظام پر تجرباتی پیمائش سے کشف کیا جا سکتا ہو اور آسمانی قسم جو توانائی یا معلومات کی ترسیل نہیں کرتا اور جس کے لیئے واحد ثبوت دو علیحدہ ذیلی نظاموں کے مواد کے بیچ باہم رشتہ ہے۔ اس باہم رشتہ کو کسی بھی طرح کسی ایک ذیلی نظام میں تجربات کے نتائج کو دیکھ کر کشف نہیں کیا جا سکتا ہے۔ سبھی اثرات روشنی کی رفتار سے تیز حرکت نہیں کر سکتے ہیں جبکہ آسمانی اثرات پر ایسی کوئی پابندی عائد نہیں۔ تفاعل موج کی انہدام سے وابستہ اثرات مؤخر الذکر قسم کی ہے جس کا روشنی سے تیز سفر کرنا حیران کن ضرور ہو سکتا ہے لیکن تباہ کن نہیں ہے۔

۱۲.۳ مسئلہ کلمیہ

کوانٹم پیمائش عموماً تباہ کن ہوتے ہیں یعنی یہ پیمائش کردہ نظام کے حال کو تبدیل کرتا ہے۔ یہی تجربہ گاہ میں اصول عدم یقینیت کو یقینی بناتا ہے ہم کیوں اصل حال کی کئی متماثل نقل کلمیہ بنا کر اصل نظام کو چھوئے بغیر ان کی پیمائش نہیں کرتے ایسا کرنا ممکن نہیں ہے۔ اگر آپ کلمیہ بنانے والا ایسا آلا بنا پائیں تو کوانٹم میکانیات کو خدا حافظ کہنا ہو گا۔

مثال کے طور پر آئنسٹائن، پوڈلسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے ذریعہ روشنی سے تیز رفتار پر خبر بھیجنا ممکن ہو گا فرض کریں پوزیٹران کاشف چلانے والا شخص ہاں یا نہیں کی خبر ترسیل کرتا ہے۔ خبر ہاں ہونے کی صورت میں بھیجنے والا پوزیٹران کا S_z ناپتا ہے یہ جاننے کی ضرورت نہیں کہ پیمائشی نتیجہ کیا ہے صرف اتنا جاننا ضروری ہے کہ پیمائش کی گئی ہے یوں الیکٹران کسی غیر مبہم حال $\uparrow$ یا $\downarrow$ میں ہو گا جس کا جاننا غیر اہم ہے۔ خبر وصول کرنے والا جلدی سے الیکٹران کی دس لاکھ کلمیہ تیار کر کے ہر ایک کی S_z ناپتا ہے اگر تمام کا ایک ہی جواب ہو کونسا جواب یہ جاننا ضروری نہیں ہم یقین سے کہہ سکیں گے کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی لحاظہ خبر ہاں ہو گی۔ اس کے برعکس اگر نصف الیکٹران ہم میدان اور نصف خلاف میدان ہوں تب یقیناً الیکٹران کی پیمائش نہیں کی گئی اور خبر نہیں ہو گا۔

لیکن سن 1982 ووٹرز، زورک اور ڈاکس نے ثابت کیا کہ ایسا مشین تیار نہیں کیا جا سکتا ہے جو کوانٹم متماثل ذرات پیدا کرتا ہو ہم چاہیں گے کہ یہ مشین حال $\langle \psi \mid$ میں ایک ذرہ جس کا نقل بنانا مقصود ہو اور حال $\langle X \mid$ میں ایک اضافی ذرہ لی کر حال $\langle \psi \mid$ میں دو ذرات اصل اور نقل دیتا ہو

$$| \psi\rangle \mid X\rangle \to | \psi\rangle \mid \psi\rangle \tag{۱۲.۱۳}$$

فرض کریں ہم ایسا مشین بنانے میں کامیاب ہوتے ہیں جو حال $\langle \psi_1 \mid$ کا کلمہ تیار کرتا ہو

$$| \psi_1\rangle \mid X\rangle \to | \psi_1\rangle \mid \psi_1\rangle \tag{۱۲.۱۴}$$

اور $\langle \psi_2 \mid$ پر بھی کام کرنے کے قابل ہو

$$| \psi_2\rangle \mid X\rangle \to | \psi_2\rangle \mid \psi_2\rangle \tag{۱۲.۱۵}$$

مثال کے طور پر اگر ذرہ ایک الیکٹران ہو تب $\langle \psi_1 \mid$ اور $\langle \psi_2 \mid$ ہم میدان اور خلاف میدان ہو سکتے ہیں۔ یہاں تک کوئی مسئلہ پیدا نہیں ہوتا یہ دیکھاں ہو گا کہ ان کا خطی جوڑ $| \psi\rangle = \alpha \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \psi_2\rangle$ کی صورت میں کیا ہو گا؟ ظاہر ہے ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$| \psi\rangle \mid X\rangle \to \alpha \mid \psi_1\rangle \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \psi_2\rangle \mid \psi_2\rangle \tag{۱۲.۱۶}$$

جو ہم نہیں چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل چاہتے ہیں

$$\begin{aligned} | \psi\rangle \mid X\rangle \to | \psi\rangle \mid \psi\rangle &= [\alpha \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \psi_2\rangle][\alpha \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \psi_2\rangle] \\ &= \alpha^2 \mid \psi_1\rangle \mid \psi_1\rangle + \beta^2 \mid \psi_2\rangle \mid \psi_2\rangle + \alpha\beta[\mid \psi_1\rangle \mid \psi_2\rangle + \mid \psi_2\rangle \mid \psi_1\rangle] \end{aligned} \tag{۱۲.۱۷}$$

آپ ہم میدان الیکٹران اور خلاف میدان الیکٹران کے کلمہ بنانے کی مشین بنا سکتے ہیں لیکن وہ کسی بھی اہم خطی جوڑ کی صورت میں ناکامی کا شکار ہو گا یہ بلکل ایسا ہو گا جیسا نقل بنانے کی مشین افقی لکیروں اور انتصابی لکیروں کی نقل خوش اصلوبی سے کرتا ہو لیکن وتری لکیروں کو مکمل طور پر بگاڑتا ہو۔

۱۲.۴ شروڈنگر کی بلّی

کوانٹم میکانیات میں پیمائش کا عمل ایک شرارتی کردار ادا کرتا ہے جس میں عدم تعینیت غیر مکامیت تفاعل موج کا انہدام اور باقی تمام تصوراتی مشکلات رونما ہتی ہیں۔ پیمائش کی غیر موجودگی میں مساوات شروڈنگر کے تحت تفاعل موج قابلِ تعین طریقہ سے ارتقا کرتا ہے اور کوانٹم میکانیات کسی بھی سادہ نظریہ میدان کی طرح نظر آتا ہے جو کلاسیکی برقی حرکیات سے بہت سادہ ہو گا چونکہ دو میدان E اور B کی بجائے اس میں واحد ایک غیر سمتی ψ پایا جاتا ہے۔ یہ پیمائش کا عمل ہی ہے جو کوانٹم میکانیات میں عجیب و غریب کردار ادا کرتے ہوئے اس کو سمجھ سے باہر خواص سے نوازتا ہے۔ یہ پیمائش حقیقت میں ہے کیا؟ اسے دیگر طبعی عوامل سے کیا منفرد بناتا ہے اور ہم کس طرح جان سکتے ہیں کہ پیمائش کی گئی ہے؟

شعوڈنگر نے اپنے مشہور تضاد بلّی کے مفروضہ نے اس بنیادی سوال کو پیش کیا۔

ایک بلّی کو فولاد کے ایک بند ڈبے میں بند کیا جاتا ہے اس ڈبے میں ایک گائگر گنتی کار اور کسی تاب کار مادہ کی اتنی چھوٹی مقدار رکھی جاتی ہے جس کا ایک گھنٹا میں صرف ایک جوہر کے تحلیل ہونے کا امکان ہو تاہم یہ بھی ممکن ہے کہ کوئی جوہر تحلیل نہ ہو تحلیل کی صورت میں گنتی کار اس ڈبے میں ایک زہریلی گیس چھوڑتا ہے۔ ایک گھنٹا گزرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ تحلیل نہ ہونے کی صورت میں یہ بلّی زندہ ہو گی۔ پہلی تحلیل اس کو زہر سے مار دیتی۔ اس مکمل نظام کا تفاعل موج اس حقیقت کو ظاہر کرنے کے لیئے زندہ اور مردہ بلّی کے برابر حصوں پر مشتمل ہو گا۔

ایک گھنٹا کے بعد بلّی کا تفاعل موج درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{زندہ}} + \psi_{\text{مردہ}}) \tag{۱۲.۱۸}$$

یہ بلّی نہ تو زندہ اور نہ ہی مردہ ہے بلکہ پیمائش سے پہلے یہ ان دونوں کا ایک خطی جوڑ ہو گا یہاں کھڑکی سے اندر دیکھ کر بلّی کا حال جاننے کو پیمائش تصور کیا جائے گا۔ آپ کا دیکھنے کا عمل بلّی کو زندہ یا مردہ ہونے پر مجبور کرتا ہے ایسی صورت میں اگر بلّی مردہ پائی جائے تو یقیناً اس کے زمہدار آپ ہی ہیں چونکہ آپ نے کھڑکی سے دیکھ کر اسے قتل کیا۔

شروڈنگر اس تمام کو ایک بکواس سے زیادہ نہیں سمجھتا تھا اور میرے خیال سے زیادہ تر ماہر طبیعیات ان کے ساتھ متفق ہیں۔ کلاں بین اجسام کا دو مختلف حالات کی ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہونے کا تصور بے معنی ہے۔ ایک الیکٹران تو ہم میدان اور خلاف میدان کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہو سکتا ہے لیکن ایک بلّی زندہ اور مردہ حالات کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں نہیں ہو سکتی ہے۔ اس کو کوانٹم میکانیات کی تقلید پسند تشریح کے ساتھ کس طرح ہم آہنگ بنایا جا سکتا ہے۔

شماریاتی مفہوم کے لحاظ سے مقبول ترین جواب یہ ہے کہ گنتی کار کی گنتی پیمائش ہو گی نا کہ کھڑکی میں سے انسانی مشاہدہ پیمائش سے مراد وہ عمل ہے جو کلاں بین نظام پر اثر انداز ہو جو یہاں گنتی کار ہے۔ پیمائش کا عمل اس لمحہ پر رونما ہو گا جب خرد بین نظام جسے کوانٹم میکانیات کے قوانین بیان کرتا ہے کلاں بین نظام جسے کلاسیکی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں کے ساتھ اس طرح باہم عمل کرے جس سے دائمی تبدیلی رونما ہو۔ کلاں بین نظام از خود منفرد حالات کی ایک خطی جوڑ کا مکین نہیں ہو سکتا ہے۔

۱۲.۵ کوانٹم زینو تضاد

اس عجیب قصہ کی اہم ترین خاصیت تفاعل موج کا انہدام ہے۔ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش سے اسی نتیجہ کے حصول کی خاطر خالصتاً نظریاتی بنیادوں پر اسے متعارف کیا گیا تھا یقیناً اس دورس اصول موضوعہ کے قابلِ مشاہدہ اثرات بھی ہوں گے۔ مسرا اور سدرشان نے سن 1977 میں تفاعلی

موج کی انہدام کا ایک ڈرامائی تجرباتی مظاہرہ تجویز کیا جسے انہوں نے کوانٹم زینو اثر کا نام دیا۔ ان کا تصور یہ تھا کہ ایک غیر مستحکم نظام مثلاً ہیجان حال میں ایک جوہر کو بار بار پیمائشی عمل سے گزارا جائے۔ ہر ایک مشاہدہ تفاعل موج کو منہدم کر کے گھڑی کو دوبارہ صفر سے چالو کرے گا اور یوں زیریں حال میں متوقع انتقال کو غیر معائنہ مدد تک روکا جا سکتا ہے۔

فرض کریں ایک نظام ہیجان حال ψ_2 سے آغاز کرتا ہے اور زمینی حال ψ_1 میں منتقلی کے لیئے اس کا قدرتی عرصہ حیات τ ہے۔ عام طور پر τ سے کافی کم وقتوں کے لیئے انتقالی احتمال وقت t کا راست متناسب ہو گا مساوات 9.42 دیکھیں چونکہ انتقالی شرح $1/\tau$ ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$P_{2\to 1} = \frac{t}{\tau} \tag{۱۲.۱۹}$$

وقت t پر پیمائش کرنے کی صورت میں بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau} \tag{۱۲.۲۰}$$

درض کریں ہم دیکھتے ہیں کے نظام بالائی حال میں ہی ہے ایسی صورت میں تفاعل موج واپس ψ_2 پر منحدن ہو گا اور پورا عمل ایک بار نئے سرے سے دوبارہ شروع ہو گا۔ اگر ہم وقت $2t$ پر دوسری پیمائش کریں تب بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \approx 1 - \frac{2t}{\tau} \tag{۱۲.۲۱}$$

جو وہی ہے جو اس صورت ہوتا اگر ہم پہلی پیمائش کرتے ہی نہیں سادہ سوچ کے تحت ایسا ہی ہونا چاہیئے تھا۔ اگر ایسا ہی ہوتا تب نظام کا بار بار مشاہدہ کرنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا اور نہ ہی کوانٹم زینو اثر پیدا ہوتا تاہم بہت قلیل وقت کی صورت میں انتقالی احتمال وقت t کے بجائے t^2 کا راست متناسب ہو گا 9.39 دیکھیں

$$P_{2\to 1} = \alpha t^2 \tag{۱۲.۲۲}$$

ایسی صورت میں دو پیمائشوں کے بعد بھی نظام کا بالائی حال میں ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1 - \alpha t^2\right)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2 \tag{۱۲.۲۳}$$

جبکہ پہلی پیمائش نہ کرنے کی صورت میں اب احتمال درج ذیل ہوتا

$$1 - \alpha (2t)^2 \approx 1 - 4\alpha t^2 \tag{۱۲.۲۴}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقت t گزرنے کے بعد نظام کے مشاہدہ کی بنا زیریں حال میں منتقلی کا احتمال کم ہوا ہے۔

یقیناً $t = 0$ سے لیکر $t = T$ تک n برابر وقفہ $T/n, 2T/n, 3T/n, \ldots, T$ پر نظام کا مشاہدہ کرنے کی وجہ سے اس دورانیہ کے آخر میں بھی نظام بالائی حال میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1 - \alpha(T/n)^2\right)^n \approx 1 - \frac{\alpha}{n}T^2 \tag{۱۲.۲۵}$$

جو $n \to \infty$ کی حد میں 1 تک پہنچتا ہے ایک غیر مستحکم نظام جس کا مسلسل مشاہدہ کیا جائے کبھی بھی تحویل نہیں ہو گا بعض مصنفین اس ماخوز سے اتفاق نہیں کرتے اور ان کے نزدیک یہ تفاعل موج کے انہدام غیر درست ہونے کا ثبوت ہے۔ تاہم ان کے دلائل مشاہدہ کے مفہوم کی غلط تشریح پر مبنی ہے اگر بلبلا خانہ میں ایک ذرہ کی راہ کو مسلسل مشاہدہ کرار دے دیا جائے تب یہ بلکل درست ہوں گے چونکہ ایسی ذرات یقیناً تحویل ہوتے ہیں اور ان کا عرصہ حیات پر کاشف کا قابلِ پیمائش اثر نہیں پایا جاتا ہے تاہم ایسا ذرہ خانہ کے اندر جوہروں کے ساتھ خادو خال باہم عمل کرتا ہے جبکہ کوانٹم زینو اثر کے لیئے ضروری ہے کہ یکے بعد دیگر پیمائشوں کے بیچ وقفہ اتنا کم ہو کہ نظام کو t^2 خطہ میں پکڑا جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ خود باخود انتقل کی صورت میں یہ تجربہ عملاً ممکن نہیں ہے۔ تاہم پیدا کردہ انتقال کی صورت میں نتائج کا نظریاتی پیشا گوئی کے ساتھ مکمل اتفاق پایا جاتا ہے۔ بدقسمتی سے یہ تجربہ تفاعل موج کی انہدام کا حتمی ثبوت پیش نہیں کر سکتا ہے اس مشاہدہ کے دیگر وجوہات بھی دئے جا سکتے ہیں۔

میں نے اس کتاب میں ایک ہم اہنگ اور بلا تضاد کہانی پیش کرنے کی کوشش کی ہے تفاعل موج ψ کسی ذرہ یا نظام کے حال کو ظاہر کرتا ہے۔ عمومی طور پر ای کذرہ کسی مخصوص حر کی خاصیت مثلاً مکام معیارِ حرکت توانائی زاویائی معیارِ حرکت وغیرہ کا حامل نہیں ہوتا اس وقت تک جب پیمائشی عمل مداخلت نہ کرے کسی ایک تجربہ میں حاصل ایک مخصوص قیمت کا احتمال ψ کی شماریاتی مفہوم تعین کرتا ہے۔ پیمائشی عمل سے تفاعل موج منحدم ہوتا ہے جس کی بنا فوراً دوسری پیمائش لاظماً وہی نتیجہ دیگی۔ اگرچہ دیگر تشریحات مثلاً غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات متعدد کائنات کا تصور بلا تضاد تاریخیں سگرہ نمونے وغیرہ بھی پائے جاتے ہیں لیکن میں یقین کرتا ہوں کہ یہ سب سے سادہ ہے جس سے عموماً ماہر طبیعیات اتفاق کرتے ہیں۔ یہ ہر تجربہ سے کامیابی سے ابھرا ہے تاہم یہ کہانی کا اختتام نہیں ہے ہمیں پیمائشی عمل کے بارے میں اور انہدام کے طریقے کار کے بارے میں بہت کچھ جاننا ہے عین ممکن ہے کہ آنے والے نسلیں زیادہ پیچیدا نظریہ جانتے ہوئے سوچتے ہوں کہ ہم اتنا سادہ کیسے ہو سکتے تھے۔

جوابات

ضمیمہ ا

خطی الجبرا

ا.ا سمتیات

ا.۲ اندرونی ضرب

ا.۳ قالب

ا.۴ تبدیلی اساس

ا.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار

ا.٦ ہرمشی تبادلے

فرهنگ