

کوانٹم میکانیٹ

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

| | |
|-----|-----------------------------------|
| ix | میری پہلی کتاب کا دیباچہ |
| ۱ | ۱ تفاسل موج |
| ۱ | ۱.۱ شر و ڈنگر مساوات |
| ۲ | ۱.۲ شکاریاتی مفہوم |
| ۵ | ۱.۳ احتمال |
| ۵ | ۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات |
| ۹ | ۱.۳.۲ استمراری متغیرات |
| ۱۲ | ۱.۴ معمول زنی |
| ۱۵ | ۱.۵ معیار حرکت |
| ۱۸ | ۱.۶ اصول عدم یقینیت |
| ۲۵ | ۲ غیر متایج وقت شر و ڈنگر مساوات |
| ۲۵ | ۲.۱ ساکن حالات |
| ۳۱ | ۲.۲ لامتناہی چوکور کٹواں |
| ۴۲ | ۲.۳ ہارمونی سر نقش |
| ۴۴ | ۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب |
| ۵۳ | ۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب |
| ۶۰ | ۲.۴ آزاد ذرہ |
| ۷۰ | ۲.۵ ڈیلٹا تفاسل محفہ |
| ۷۰ | ۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات |
| ۷۲ | ۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاسل کٹواں |
| ۸۱ | ۲.۶ مستثنائی چوکور کٹواں |
| ۹۷ | ۳ قواعد و ضوابط |
| ۹۷ | ۳.۱ ہلیرٹ فضا |
| ۱۰۱ | ۳.۲ متابل مشاہدہ |
| ۱۰۱ | ۳.۲.۱ ہر مشی عاملین |

| | | |
|-----|----------------------------------|-------|
| ۱۰۳ | تعیین حال | ۳.۲.۲ |
| ۱۰۵ | ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل | ۳.۳ |
| ۱۰۶ | غیر مسلسل طیف | ۳.۳.۱ |
| ۱۰۸ | استمراری طیف | ۳.۳.۲ |
| ۱۱۱ | متعمم شمار پائی مفہوم | ۳.۴ |
| ۱۱۵ | اصول عدم یقینیت | ۳.۵ |
| ۱۱۵ | اصول عدم یقینیت کا ثبوت | ۳.۵.۱ |
| ۱۱۸ | کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ | ۳.۵.۲ |
| ۱۱۹ | توانائی و وقت اصول عدم یقینیت | ۳.۵.۳ |
| ۱۲۳ | ڈیراک علامتیت | ۳.۶ |
| ۱۳۷ | تین البادی کو انظم میکانیات | ۴ |
| ۱۳۷ | کروی محدود میں مساوات شروڈنگر | ۴.۱ |
| ۱۳۹ | علیحدگی متغیرات | ۴.۱.۱ |
| ۱۴۱ | زاویائی مساوات | ۴.۱.۲ |
| ۱۴۶ | ردای مساوات | ۴.۱.۳ |
| ۱۵۰ | ہائڈروجن جوہر | ۴.۲ |
| ۱۵۱ | ردای تفاسل موج | ۴.۲.۱ |
| ۱۶۱ | ہائڈروجن کا طیف | ۴.۲.۲ |
| ۱۶۳ | زاویائی معیار حرکت | ۴.۳ |
| ۱۶۴ | امتیازی اشتداد | ۴.۳.۱ |
| ۱۷۰ | امتیازی تفاسلات | ۴.۳.۲ |
| ۱۷۳ | چکر | ۴.۴ |
| ۱۸۱ | مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران | ۴.۴.۱ |
| ۱۸۷ | زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ | ۴.۴.۲ |
| ۲۰۵ | متنائل ذرات | ۵ |
| ۲۰۵ | دو ذراتی نظام | ۵.۱ |
| ۲۰۷ | بوزان اور فرمیان | ۵.۱.۱ |
| ۲۱۰ | قوت مبادلہ | ۵.۱.۲ |
| ۲۱۵ | جوہر | ۵.۲ |
| ۲۱۶ | ہیلیم | ۵.۲.۱ |
| ۲۱۹ | دوری جدول | ۵.۲.۲ |
| ۲۲۱ | ٹھوس اجسام | ۵.۳ |
| ۲۲۳ | آزاد الیکٹران گیس | ۵.۳.۱ |
| ۲۲۸ | پٹی دار ساخت | ۵.۳.۲ |
| ۲۳۴ | کو انظم شمار پائی میکانیات | ۵.۴ |
| ۲۳۴ | ایک مثال | ۵.۴.۱ |
| ۲۳۷ | عمومی صورت | ۵.۴.۲ |

| | | |
|-----|---|-------|
| ۲۴۰ | زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل | ۵.۴.۳ |
| ۲۴۲ | α اور β کے طبعی اہمیت | ۵.۴.۴ |
| ۲۴۶ | سیاہ جسی طیف | ۵.۴.۵ |
| ۲۵۱ | غیر تابع وقت نظریہ اضطراب | ۶ |
| ۲۵۱ | غیر اخطاطی نظریہ اضطراب | ۶.۱ |
| ۲۵۱ | عمومی ضابطہ بندی | ۶.۱.۱ |
| ۲۵۳ | اول رتی نظریہ | ۶.۱.۲ |
| ۲۵۷ | دوم رتی توانائیاں | ۶.۱.۳ |
| ۲۵۸ | اخطاطی نظریہ اضطراب | ۶.۲ |
| ۲۵۸ | دو پڑتا اخطاط | ۶.۲.۱ |
| ۲۶۲ | بلند رتی اخطاط | ۶.۲.۲ |
| ۲۶۷ | ہائیڈروجن کا مہین ساخت | ۶.۳ |
| ۲۶۸ | اضافیتی تصحیح | ۶.۳.۱ |
| ۲۷۱ | چپکرومدار ربط | ۶.۳.۲ |
| ۲۷۶ | زیان اثر | ۶.۴ |
| ۲۷۶ | کمزور میدان زیان اثر | ۶.۴.۱ |
| ۲۷۹ | طاقتور میدان زیان اثر | ۶.۴.۲ |
| ۲۸۰ | درمیانی طاقت میدان زیان اثر | ۶.۴.۳ |
| ۲۸۲ | نہایت مہین ہواہ | ۶.۴.۴ |
| ۲۹۳ | تغیری اصول | ۷ |
| ۲۹۳ | نظریہ | ۷.۱ |
| ۲۹۸ | ہیلمی کا زمینی حال | ۷.۲ |
| ۳۰۳ | ہائیڈروجن سالہ باردار | ۷.۳ |
| ۳۱۳ | وزنل وکرا سرزور برلوان تخمین | ۸ |
| ۳۱۴ | کلاسیکی خطہ | ۸.۱ |
| ۳۱۹ | سرنگرنی | ۸.۲ |
| ۳۲۲ | کلیات پیوند | ۸.۳ |
| ۳۳۵ | تابع وقت نظریہ اضطراب | ۹ |
| ۳۳۶ | دو سطحی نظام | ۹.۱ |
| ۳۳۶ | مضطرب نظام | ۹.۱.۱ |
| ۳۳۹ | تابع وقت نظریہ اضطراب | ۹.۱.۲ |
| ۳۴۱ | سائنس اضطراب | ۹.۱.۳ |
| ۳۴۴ | اشعاعی احسراج اور انجذاب | ۹.۲ |
| ۳۴۴ | برقن طبعی امواج | ۹.۲.۱ |
| ۳۴۵ | انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج | ۹.۲.۲ |
| ۳۴۶ | غیر اتقاقی اضطراب | ۹.۲.۳ |

| | | |
|-----|--------|--|
| ۳۴۸ | ۹.۳ | خود با خود احسراج |
| ۳۴۸ | ۹.۳.۱ | آمنطائن A اور B عددی سر |
| ۳۵۰ | ۹.۳.۲ | بجبان حال کا عرصہ حیات |
| ۳۵۳ | ۹.۳.۳ | قواعد انتخاب |
| ۳۶۳ | ۱۰ | حرارت ناگزیر تخمین |
| ۳۶۳ | ۱۰.۱ | مسئلہ حرارت ناگزیر |
| ۳۶۳ | ۱۰.۱.۱ | حرارت ناگزیر عمل |
| ۳۶۶ | ۱۰.۱.۲ | مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت |
| ۳۷۱ | ۱۰.۲ | ہیت بیری |
| ۳۷۱ | ۱۰.۲.۱ | گرگئی عمل |
| ۳۷۳ | ۱۰.۲.۲ | ہندی ہیت |
| ۳۷۸ | ۱۰.۲.۳ | اہارو نوو پو ہم اثر |
| ۳۸۷ | ۱۱ | بکھراو |
| ۳۸۷ | ۱۱.۱ | تعارف |
| ۳۸۷ | ۱۱.۱.۱ | کلاسیکی نظریہ بکھراو |
| ۳۹۱ | ۱۱.۱.۲ | کوانٹم نظریہ بکھراو |
| ۳۹۲ | ۱۱.۲ | حبزوی موج تجزیہ |
| ۳۹۲ | ۱۱.۲.۱ | اصول وضوابط |
| ۳۹۵ | ۱۱.۲.۲ | الایا عمل |
| ۳۹۸ | ۱۱.۳ | میتقلات حیط |
| ۴۰۱ | ۱۱.۴ | بارن تخمین |
| ۴۰۱ | ۱۱.۴.۱ | مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ |
| ۴۰۵ | ۱۱.۴.۲ | بارن تخمین اول |
| ۴۱۰ | ۱۱.۴.۳ | شسل بارن |
| ۴۱۳ | ۱۲ | پس نوشت |
| ۴۱۴ | ۱۲.۱ | آمنطائن پوڈ لکیو روزن تضاد |
| ۴۱۵ | ۱۲.۲ | مسئلہ بل |
| ۴۲۰ | ۱۲.۳ | مسئلہ کلیہ |
| ۴۲۱ | ۱۲.۴ | شرودنگر کی ہلی |
| ۴۲۲ | ۱۲.۵ | کوانٹم زینو تضاد |
| ۴۲۵ | | جوابات |
| ۴۲۷ | ۱ | خطی الجبرا |
| ۴۲۷ | ۱.۱ | سمتیات |
| ۴۲۷ | ۲.۱ | اندرونی ضرب |
| ۴۲۷ | ۳.۱ | قتالب |

| | | |
|-----|------------------------------------|-----|
| ۴۲۷ | تبدیلی اساس | ۴.۱ |
| ۴۲۷ | امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار | ۵.۱ |
| ۴۲۷ | هر مشی تباولے | ۶.۱ |

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع یا آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شرودنگر

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی عمل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر اور ج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھا کلاسیکی متبادل مشاہدہ اور عمل میں مندرجہ کرنا دشوار ہو، وہاں میں عمل پر ”ٹوپی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عملیں پر ”ٹوپی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاسیا ہے۔

مختفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب $(x, y, z) = \mathbf{r}$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 \mathbf{r} = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کوپوری فنکشن پر لینا ہوگا۔ اگر مخفیہ وقت کے تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فنکشن تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقالات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیے تا ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

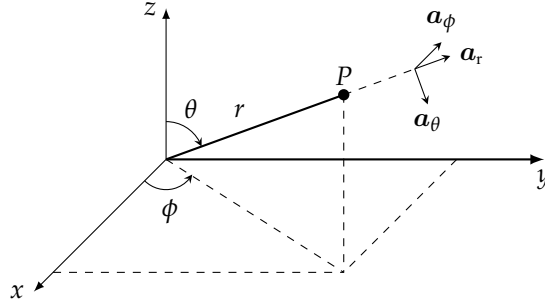
سوال ۴.۱:

۱. عاملین \mathbf{r} اور \mathbf{p} کے تمام باضابطہ مقلبتیے رشتے^۴: $[x, p_x]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_z]$ ، $[y, p_x]$ ، $[y, p_y]$ ، $[y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔



شکل ۴.۱: کروی محدود: رداس r ، قطبی زاویہ θ ، اور سمتی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ ابھر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگی۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات ۴.۱۱ تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x \sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں کروی محدود (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل ۴.۱)۔ کروی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کر وہی محدود میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔^۶

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی چوکور کوانٹا (یا ذب میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

^۶ ایسا کرنے سے ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازم عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

۱. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انخطائیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: ایک بعدی صورت میں انخطائی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال ۲.۴۵)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انخطائیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2 \theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو بچپائے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$(۴.۱۹) \quad Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا تعلق ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تعلق ہے، لہذا ہر جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$(۴.۲۰) \quad \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(۴.۲۱) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$(۴.۲۲) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

یہاں بھی ہم عمومیّت نہیں کھوئے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔
انتباہ: اب صرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$ ، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخہ الزکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جب زو ضربی منتقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم Θ میں منقسم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محفّیہ لازماً حقیقی ہوں گے لہذا برقی حرکیات میں سمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں لکھا جاتا ہے نہ کہ قوت نمائی صورت میں۔ کوانٹم میکینکات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل ۴.۱ دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط ^۸ عامہ کی جاسکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے نقطوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

مسوات θ

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (۴.۲۵)$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = A P_l^m(\cos \theta) \quad (۴.۲۶)$$

جہاں P_l^m شریک لیجینڈر تقاطع ^۹ ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x) \quad (۴.۲۷)$$

اور l وین لیجینڈر کشیرر کئی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے ^{۱۰} جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس ^{۱۱}:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (۴.۲۸)$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیجینڈر کشیرر کنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

^۸ یہ ظاہر سادہ شرط اتنی سادہ نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال شذافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ ۴.۳ میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر عامہ شرط حاصل کریں گے۔

^۹ associated Legendre function
^{۱۰} دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہوگا۔
^{۱۱} Rodrigues formula

جدول ۴.۱: چند ابتدائی لیڈانڈر کثیررکنیاں $P_l(x)$ ۔ (i) تقابلی روپ، (ب) تریما۔



$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (i)$$

درج l کثیررکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت یا طاق ہوگی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (ب) ہمیں $P_l^m(\cos \theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$ ہوتا ہے لہذا $P_l^m(\cos \theta)$ ہر صورت $\cos \theta$ کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق m کی صورت میں $\sin \theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos \theta$ کے چند شریک لیڈانڈر تقابلات پیش کیے گئے ہیں۔

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت $P_l^m = 0$ ہوگا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفسر قی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفسر قی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے، تاہم $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے متاثر ہوتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محمد میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹنڈر تفاسعات $P_l^m(\cos \theta)$: (۱) تفاسلی روپ، (ب) ترسیات برائے $r = P_l^m(\cos \theta)$ (ان ترسیات میں r آپ کو θ رخ تفاسلی کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیے۔)



لہذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاسعات Y_l^m کو Y_l^m ہارمونیاں کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

۴.۵۴ سوال کو مستقل ۴.۵۳ میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علاقیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہوگا۔
spherical harmonics^{۱۲}

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\ Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\ Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \end{aligned}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر l کو انٹیلیجیٹ کووانٹائی عدد^{۱۴} جب کہ m کو مقناطیسی کووانٹائی عدد^{۱۵} کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۲۷ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_2^1 اور Y_0^0 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔ سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (دو) ثابت بل مقبول دو سرا حاصل ہے؛ اس میں کیا حشرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ مرتب کریں۔ (آپ P_3^2 کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے مرتب کرنا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹنڈر کشیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left(\frac{2}{2l+1}\right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: مکمل بالخصوص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشابہی مخفیہ کے لئے تفعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$(۴.۳۵) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1)R$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$(۴.۳۶) \quad u(r) \equiv rR(r)$$

لہذا $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ، $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ، $R = u/r$ درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

اس کو رداسی مساوات^{۱۶} کہتے ہیں۔ اچھو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بعدی شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ^{۱۸} درج ذیل ہے

$$(۴.۳۸) \quad V_{\text{مؤثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو^{۱۹} کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبداء سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۳۹) \quad \int_0^\infty |u|^2 dr = 1$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامستناہی کروئی کنویں پر غور کریں۔

$$(۴.۴۰) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

^{۱۶} radial equation

^{۱۷} یہاں m کیت کو ظاہر کرتی ہے، رداسی مساوات میں طیجرگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

^{۱۸} effective potential

^{۱۹} centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنویں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنویں کے اندر ردائی مساوات درج ذیل ہے

$$(۴.۴۱) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۲) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مطبق کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل ردائی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \rightarrow 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے متناہی بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہذا $ka = n\pi$ ہوگا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$(۴.۴۳) \quad E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنویں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو $1/\sqrt{4\pi}$ ہے) لہذا اس کی شمولیت یہاں ایک تفسیر سا کام ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۴) \quad \psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو اٹھانے اعداد n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:

$\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی، E_{nl} ، صرف n اور l پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$(۴.۴۵) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B n_l(kr).$$

^{۲۰} درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے متناہی ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستناہی ہو: مساوات ۴.۴۱ میں r^2 کی ہنس پر مبادا $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے متناہی ہے۔
quantum numbers^{۲۱}

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$ ؛ چھوٹی x کے لئے مقتربی روپ۔

| | |
|---|--|
| $n_0 = -\frac{\cos x}{x}$ | $j_0 = \frac{\sin x}{x}$ |
| $n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$ | $j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$ |
| $n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$ | $j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$ |
| $n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$ | $j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$ |

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا کروی بیسل تفاعل^{۲۲} ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا کروی نیومن تفاعل^{۲۳} ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$(۴.۴۶) \quad j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

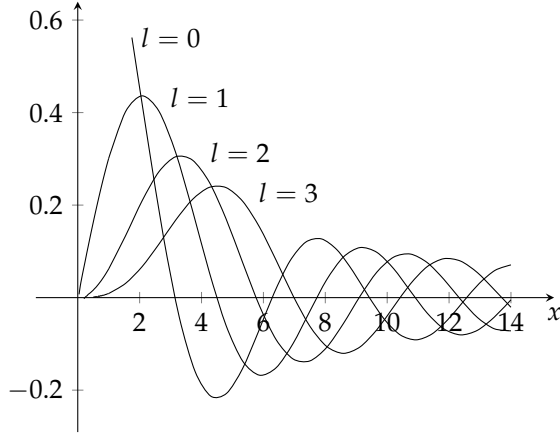
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

^{۲۲}spherical Bessel function
^{۲۳}spherical Neumann function



شکل ۳.۲: ابتدائی چار کروی بیل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدأ پر بیل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدأ پر نیومن تفاعلات بے فتابوڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$R(r) = A j_l(kr) \quad (۳.۴۷)$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$j_l(ka) = 0 \quad (۳.۴۸)$$

یعنی l رتبی کروی بیل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہوگا۔ اب بیل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۳.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے واصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$k = \frac{1}{a} \beta_{nl} \quad (۳.۴۹)$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیل تفاعل کا n واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2. \quad (۳.۵۰)$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (۳.۵۱)$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمولی ذریعے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l + 1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح $(2l + 1)$ گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروئی نیومن تعاملات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $1 \ll x$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ ہوتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کنویں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں احبازاتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو مستناہی کروئی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ متانوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۴.۵۲) \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب محفہ، مساوات ۴.۵۲، $E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موحصر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس کے بعد ہم حالات کی مفت رابی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \rightarrow \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ($\rho \rightarrow \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے فتا بوڑھتا ہے لہذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس $\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛^{۲۴} لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے فتا بوڑھتا ہے لہذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی روپ کو چھپانے کی خاطر نیا قیاس عمل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[(l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

^{۲۴} دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۶۱) \quad \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0$$

آخر میں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$ ، کو ρ کا متقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۶۲) \quad v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j$$

ہمیں عددی سر (c_0, c_1, c_2, \dots وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”مندرجہ اشاریہ“ j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ $-1 = j$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزودر $(j+1)$ اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم مندرجہ بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کاروپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔^{۲۵}

آئے j کی بڑی قیمت۔ (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابق ہوں گے جہاں بلند طاقستیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔^{۲۶}

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$(۴.۶۴) \quad c_j = \frac{2^j}{j!} c_0$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۶۵) \quad u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے فتابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت مساوی غیر پسندیدہ متغیراتی روسیہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیراتی حل بھی رد اسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

^{۲۵} آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقست تسلل کی ترکیب $u(\rho)$ پر کیوں لاگو نہیں کی گئی؟ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متغیراتی روسیہ کو کیوں (حبز و ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ حبز و ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلل کا پہلا حبز و ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس حبز و ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالتا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

^{۲۶} آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - 2(l+1)$ اور نسب نامہ میں $2l+2$ رد کرنے کی طرح $1+j$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، j بندیز، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j+1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد^{۲۷}

$$n \equiv j+1 \quad (۴.۶۷)$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احباباتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر^{۲۸} ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقتیل استعمال کا اس کی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

principal quantum number^{۲۷}
Bohr formula^{۲۸}

رواں بولہر^{۲۹} کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n - l - 1$ = بندہ j کا کشیدہ رکتی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ تواری دے گا (اور پورے تقاضا عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حال^{۳۱} (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $1 = n$ ہوگا؛ طبیعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ **توانائی**^{۳۲} (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۶ کے تحت $l = 0$ لہذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ تواری پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

^{۲۹} Bohr radius

^{۳۰} کرداس بولہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0 تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا اس میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

^{۳۱} ground state

^{۳۲} binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی بھی توانائی ہوگی۔ کلیہً توانی (مساوات ۴.۷۶) کے لئے $l = 0$ استعمال کرتے ہوئے $j = 0$ اور $c_1 = -c_0$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہذا $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad (۴.۸۲)$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاؤ عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہً توانی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \quad (۴.۸۳)$$

ہر منفرد صورت میں c_0 معمولی زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکن قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۴.۸۴)$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکن قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہوگی (مساوات ۴.۲۹)؛ لہذا E_n سطح توانائی کی کل انخطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (۴.۸۵)$$

کشیر رکتی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہً توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمولی زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (۴.۸۶)$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنچ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

| |
|--|
| $L_0 = 1$ |
| $L_1 = -x + 1$ |
| $L_2 = x^2 - 4x + 2$ |
| $L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$ |
| $L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$ |
| $L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$ |
| $L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$ |

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنچ کثیر رکنیاں، $L_{q-p}^p(x)$

| | |
|-------------------------------|---------------------------|
| $L_0^2 = 2$ | $L_0^0 = 1$ |
| $L_1^2 = -6x + 18$ | $L_1^0 = -x + 1$ |
| $L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$ | $L_2^0 = x^2 - 4x + 2$ |
| $L_0^3 = 6$ | $L_0^1 = 1$ |
| $L_1^3 = -24x + 96$ | $L_1^1 = -2x + 4$ |
| $L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$ | $L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$ |

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

ایک شریک لاگنچ کثیر رکنی^{۳۳} ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

q ویں لاگنچ کثیر رکنی^{۳۴} ہے۔^{۳۵} (جدول ۴.۵) میں چند ابتدائی لاگنچ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگنچ کثیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تقاعسل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تقاعسلات موج درجہ

^{۳۳} associated Laguerre polynomial

^{۳۴} Laguerre polynomial

^{۳۵} دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۷.۴: ہائیدروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

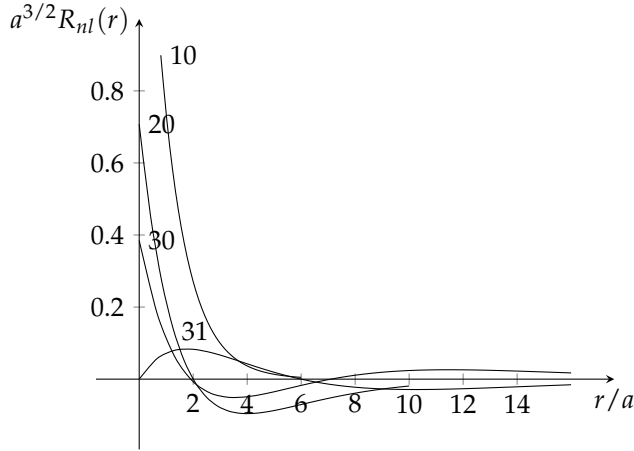
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیدروجن رداسی تقاسمات $R_{nl}(r)$ کی تریسٹ۔

ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظمیں ہیں جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولم توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنویں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں H کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا پر ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاینگ کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو کوئی نیا مکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہو گا، اور از مسینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2, l = 1, m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x, y اور z کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin \theta \cos \phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپ کو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + dr$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2, l = 1, m = 1$ اور $n = 2, l = 1, m = -1$ کے درج ذیل خطی مجموعے سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

۱. حال $\Psi(r, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تصویرت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی نوریہ کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔ ۳۷ عمل ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کو انٹیم چھلانگ“ کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا پر ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (نوریہ) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_{\gamma} = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

اب کلیہ پلانک^{۳۸} کے تحت نوریہ کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

^{۳۸}transition اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

^{۳۹}Planck's formula نوریہ درحقیقت برقی طبعی اخراج کا ایک کو انٹیم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کو انٹیم میکینکات متبادل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر نوریہ کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ طول موج $\lambda = c/v$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل^{۴۰} کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ^{۴۱} ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقالات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ($n_f = 1$) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمانی کارلیما^{۴۲} تسلیل^{۴۳} کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ($n_f = 2$) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلیل^{۴۴} کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، پاشنہ تسلیل^{۴۵} دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ انہیں طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلاء پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجنی جوہر^{۴۵} Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم^{۴۶} میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ لیتیم^{۴۷} میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقی طیفی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلیل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \rightarrow Ze^2$ ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تبادلی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں)۔

ب. اس نظام کا ”رداس بوہر“ a_0 کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

^{۴۰}Rydberg constant

^{۴۱}Rydberg formula

^{۴۲}Lyman series

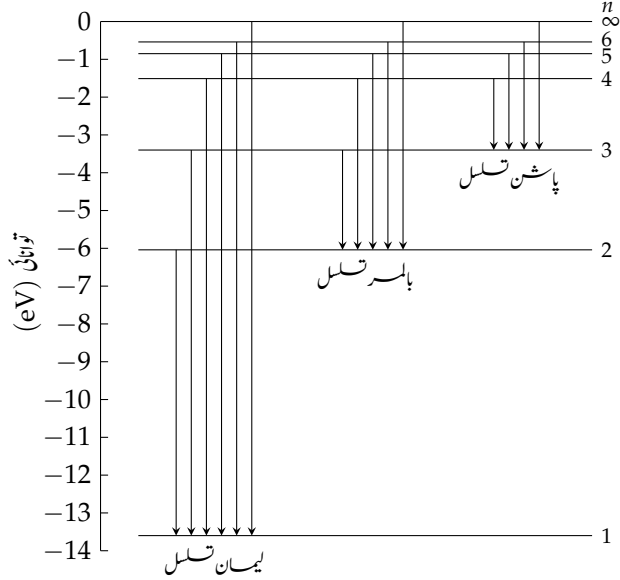
^{۴۳}Balmer series

^{۴۴}Paschen series

^{۴۵}hydrogenic atom

^{۴۶}Helium

^{۴۷}Lithium



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوں توانائیاں اور تویلیات۔

ج. تجاذبی گلیہ بھر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n - 1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔ حصار نورب (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹاؤن^{۴۸}) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کو انٹیم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مدارچی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی معتداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کو انٹیم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدأ کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$(۴.۹۵) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۹۶) \quad L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \rightarrow -i\hbar \partial / \partial x$, $p_y \rightarrow -i\hbar \partial / \partial y$, $p_z \rightarrow -i\hbar \partial / \partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونک مشین کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی افتدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبتی تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔^{۴۹}

$$(۴.۹۷) \quad [L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] \\ = [y p_z, z p_x] - [y p_z, x p_z] - [z p_y, z p_x] + [z p_y, x p_z]$$

باضابطہ مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = y p_x [p_z, z] + x p_y [z, p_z] = i\hbar (x p_y - y p_x) = i\hbar L_z$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چپکری ادل بدل ($x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

جو زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبتی رشتے^{۵۰} ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ L_x اور L_y غیر ہم آہنگ و قابل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۲۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

^{۴۹} کوانٹم میکانیات میں تمام عاملین و تانوں جبریتی تقسیم: $(B + C) = AB + AC$ پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۷۷ پر حاشیہ ۳۳ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ ہوگا۔
fundamental commutation relations^{۵۰}

یا

$$(۳.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$(۳.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

عامل L_x کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

(مقابلہ کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہوگا

$$(۳.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۰۳) \quad [L^2, \mathbf{L}] = 0$$

اس طرح \mathbf{L} کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہوگا اور ہم L^2 کا (مثلاً) L_z کے ساتھ ایک وقت امتیازی حالات

$$(۳.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(۳.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

L_z کے ساتھ مقاب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

الہذا

$$(۳.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہوگا۔

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (۴.۱۰۷)$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_{\pm}(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f) \quad (۴.۱۰۸)$$

لہذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_{\pm}f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہوگا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)f + L_{\pm}L_zf = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad (۴.۱۰۹)$$

لہذا نئے امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے L_z کا $L_{\pm}f$ امتیازی تفاعل ہوگا۔ ہم L_+ کو **عالمی** ^{۵۱} کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو \hbar بڑھاتا ہے جبکہ L_- **عالمی** ^{۵۲} کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو \hbar کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے، جس کا ہر پائے متر ہی پائے سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے \hbar کی ایک اکائی فاصلہ پر ہوگا (شکل ۴.۶)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اتارنے کی خاطر ہم عامل تقلیل ^{۵۲} لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچے گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت ^{۵۳} ہے۔ لازماً سیڑھی کا ایسا ”بالا ترین پائے“ f_t ، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن ^{۵۴} کرے گا۔

$$L_+f_t = 0 \quad (۴.۱۱۰)$$

فرض کریں اس بالا ترین پائے پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو (حرف ” l “ کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

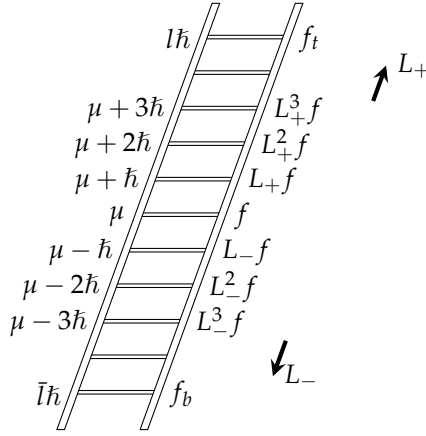
$$L_zf_t = \hbar lf_t; \quad L^2f_t = \lambda f_t \quad (۴.۱۱۱)$$

اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

raising operator^{۵۱}
lowering operator^{۵۲}

^{۵۳}بنا بنا طور پر $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ ہوگا، لیکن $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہوگا۔
^{۵۴}درحقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ L_+f_t معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے؛ اس کا معیار ضرر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔
سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۳.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی ”سیڑھی“۔

یاد دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی متدرج کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی متدرج دیتی ہے۔
ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ f_b بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

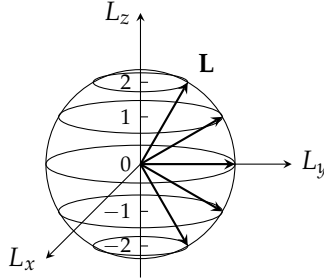
$$(۳.۱۱۴) \quad L_- f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر L_z کا امتیازی متدرج $\hbar \bar{l}$ ہو:

$$(۳.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

معادلات ۳.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$



شکل ۷. زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مساوات ۴.۱۱۳ اور مساوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$ ہوگا لہذا $\bar{l} = l + 1$ ہوگا (جو بے معنی ہے، چونکہ خپلاترین پاسب، بالاترین پاسب سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہوگا۔

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی امتداد $m\hbar$ ہونگے، جہاں m (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت N عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-l$ تا $+l$ ہوگی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ یعنی $l = N/2$ ہوگا، لہذا l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد l اور m کرتے ہیں:

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی سیدھی کے $2l + 1$ پائے ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیسرے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں \hbar کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l + 1)}$ ہوگی جو (یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے) جبکہ ان کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں $0, -1, -2$ ، $1, 2$ ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کار داس)، z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑا ہے! $l = 0$ کی ”حقیر“ صورت میں، عموماً $\sqrt{l(l + 1)} > l$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار

حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ ”کیا میں z محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟“ اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی z محدود L کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ L کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کام تمام اور معیار حرکت بیک وقت تعین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر L_z کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب L_x اور L_y ہم نہیں جانتے سکتے ہیں شکل ۴.۷ میں سمتیہ گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی اپائی کی حباتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y غیر تعین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی ترائیبا استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، L^2 اور L_z کے امتیازی افتدار تعین کیے۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا۔ میں کانٹے کی بات $Y_l^m = f_l^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات وہی کروئی ہارمونیاں ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف l اور m استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروئی ہارمونیاں کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی افتدار کے ہر مشی عملین (L^2 اور L_z) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad (۴.۱۲۰)$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ L_{\pm} اور L_{\mp} ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہیں (چونکہ L_x اور L_y قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \quad (۴.۱۲۱)$$

دیکھیے گائے سیدھی کی بلند ترین اور ٹھپے ترین پایہ پر کیا ہوگا (جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

۱. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات ۴.۱۰ سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل مطالب حاصل کریں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0 \quad (۴.۱۲۲)$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. معتالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$) تلاش کریں۔

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہمیلٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل L کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں H ، L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفی $V(r)$ میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت L کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt}\langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہرنتسٹ کام مثل گھومتا تعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی کے لیے $d\langle L \rangle/dt = 0$ ہوگا۔ (یہ زاویائی معیار حرکت کے بقا کا کوانٹم میکانی روپ ہے۔)

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا اب $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[r(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) \frac{\partial}{\partial r} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) = 0$ ، $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$ ، اور $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_\theta$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات a_θ اور a_ϕ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$(۳.۱۲۵) \quad a_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k}$$

$$(۳.۱۲۶) \quad a_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا کلاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$(۳.۱۲۷) \quad L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۸) \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۹) \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ہمیں عامل رزنت اور عامل تقطیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

تہا $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۰) \quad L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

بالخصوص (سوال ۳.۲۱-۱) درج ذیل

$$(۳.۱۳۱) \quad L_+ L_- = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

لہذا (سوال ۳.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۲) \quad L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

ہم اب $f_l^m(\theta, \phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ L^2 کا امتیازی قف عمل ہے، جس کا امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے۔

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

یہ ٹھیک ”زاویائی مساوات“ (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی مقدار $m\hbar$ ہوگا:

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو انتہائی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروئی ہارمونیات $Y_l^m(\theta, \phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروئی ہارمونیات ہوں گے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقبولی عاملین H اور L^2 کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۴.۱۳۳)$$

ہم مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات ۴.۱۴ کو مختصر اُدرج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہونیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، l کی (اور لہذا m کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: پرکھی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ سوال ۴.۲۲:

ا. حاب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_l^l$ کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جنزور-اکا نتیجہ اور یہ جاننے ہوئے کہ $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$ ہوگا، $L_z Y_l^l(\theta, \phi)$ کی قیمت معمولی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلاواسطہ مکمل کے ذریعے معمولی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجہ کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۲ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عاسل رفت کا $Y_2^2(\theta, \phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے، کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

۱. دکھائیں کہ اس بے لچکے پھر کی 59 کی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب۔ اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی؟

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکینیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مدار 54 ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم چکر 58 ($\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$) کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا پر زمین کا مدارچی زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنا پر اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ منقرض محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی ”مداری“ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ \mathbf{S} کے برابر ہوگا۔ کوانٹم میکینیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی منقرض پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنا پر مدارچی زاویائی معیار حرکت (جسے کروئی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو معتام کے متغیرات r اور ϕ سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطہ ذرا ہے، لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدارچی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات غیر غلق 59 زاویائی معیار حرکت \mathbf{L} کے ساتھ غلق 60 زاویائی معیار حرکت \mathbf{S} بھی رکھتے ہیں۔

rigid rotor⁵¹
orbital⁵²
spin⁵⁸
extrinsic⁵⁹
intrinsic⁶⁰

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو، ہمدارچی زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبت رشتوں^{۱۱} سے شروع کرتے ہیں۔

$$(۴.۱۳۴) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

یوں (پہلے کی طرح) S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات^{۱۲}

$$(۴.۱۳۵) \quad S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle$$

اور

$$(۴.۱۳۶) \quad S_{\pm}|sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں (لہذا یہ کروہی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنا پر ہم s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتوں

$$(۴.۱۳۷)$$

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص اور ثابت بل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) چکر^{۱۳} کہتے ہیں: π میزان کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1؛ ڈیٹاکا چکر $3/2$ ؛ گریوٹان کا چکر 2؛ وغیرہ وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹران کا) ہمدارچی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حاصل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہوگا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہوگا، جس کی بنا پر نظریہ چکر نسبتاً بدہ ہے۔^{۱۴}

^{۱۱} ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ ہمداری زاویائی معیار حرکت کے مسائل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ تفصیل انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماؤ کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقبولی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکر کی، ہمداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ ہمداری شامل ہوں گے۔

^{۱۲} چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے ”سمتاًویہ“ علاقیت استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے Y_l^m کو $|lm\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہذا میں S_z کے امتیازی قدر کے لئے m استعمال کروں گا، جیسا میں نے L_z کے لئے بھی کیا (بعض مصنفین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں m_l اور m_s لکھتے ہیں)۔

spin^{۱۳}

^{۱۳} یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے $1/2$ چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ پیچیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی بلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُعدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ 2×2 متالب اور 2 رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مصنفین کوانٹم میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی دگائی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنسٹائن کلب $E = mc^2$ سے کلاسیکی الیکٹران رداس r_c حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب ”خط استوا“ پر کسی نقطے کی رفتار (ms^{-1} میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (درحقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید عنطرا ردیتا ہے۔)

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک^{۶۶} اور تمام لپٹان^{۶۷} کیلئے $\frac{1}{2} = s$ ہوگا لہذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف ”دو“ امتیازی تغسلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر \uparrow) ہے جو ہم میدان چکر^{۶۸} کا راجحاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو مخالف میدان چکر^{۶۹} (\downarrow) کہلاتا ہے۔ انہیں کواس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دور کئی قتالاب قطار (یا چکر کار^{۷۰}) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

^{۶۵} classical electron radius
^{۶۶} quarks
^{۶۷} leptons
^{۶۸} spin up
^{۶۹} spin down
^{۷۰} spinor

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ساتھ ہی، عاملین چکر 2×2 متالاب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم S^2 کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالاب

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا $c = \frac{3}{4} \hbar^2$ اور $e = 0$ ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4} \hbar^2$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۴) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-,$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ S_x, S_y, S_z تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ $S = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالجے چکر^۱ ہیں۔ دھیان رکھیں کہ S_x, S_y, S_z اور S^2 تمام ہر مشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس S_+ اور S_- غیر ہر مشی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ یقیناً S_z کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر})$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیشانہ $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا (یعنی چکر کار لازمًا معمول شدہ ہوگا)۔^۲

$$(۴.۱۵۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیشانہ کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتانچ اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں S_x کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

^۱Pauli spin matrices

^۲لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہئے ہیں کہ اگر S_z کی پیشانہ کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہوگا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۴۲ دیکھیں۔)

لہذا $\beta = \pm \alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S_x کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مسادات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a+b|^2/2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a-b|^2/2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا

احتمال $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ ہوگا۔ اتفاقی طور پر S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک مندرجہ ذیل تجربے سے گزارش کروں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ مندرجہ ذیل ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ”اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا z جزو کیا ہے؟“، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $\hbar/2 +$ ہے؛ چونکہ S_z کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ”اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو کیا ہوگا؟“، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $\hbar/2 +$ یا $\hbar/2 -$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ”حقیقت پسند“ ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: ”کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟“ نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو ψ_+ ہے۔ ”تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟“ اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر S_x اور S_z کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا x جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ مندرجہ ذیل وہ $\hbar/2 +$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھتا ہے) ”اس ذرے کی S_x قیمت ٹھیک $\hbar/2 +$ ہے۔“ جی آپ درست فرما رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔“ ظاہر ہے، آپ بال کی کمال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بسا؟ میں اب S_x اور S_z دونوں کو حبانہ ہوں۔ ”جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں جبکہ S_z کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔“ لیکن S_x کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون حنراب نہ ہو۔ ”اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ $\hbar/2 -$ حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: ”اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک معنام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے“، ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تقریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب $1/2$ چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹم میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

- ا. تصدیق کیجیے گا کہ چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابلیت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔
- ب. دکھائیں کہ پالی چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۸) وتاعدہ ضرب

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۳)$$

- کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں، اور ϵ_{jkl} علامت لوپس و پچوینا^۳ ہے، جس کی قیمت $123 = jkl$ یا 231 یا 312 کی صورت میں $+1$ جبکہ $132 = jkl$ یا 213 یا 321 کی صورت میں -1 اور دیگر صورت 0 ہوگی۔
- سوال ۴.۲۷: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

- ا. معمولی ذنی مستقل A تعین کریں۔
- ب. S_x, S_y اور S_z کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔
- ج. ”عدم یقینیت“ $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں σ سے مراد معیار انحراف ہے تاکہ پالی وتالب!)۔
- د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکر دار ترتیبی مرتب اجتماعات جہاں L کی جگہ S ہوگا) کے عین مطابق ہیں۔
- سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle$ ، $\langle S_x^2 \rangle, \langle S_y^2 \rangle, \langle S_z^2 \rangle$ اور $\langle S^2 \rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ $\langle S^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle$ ہے۔
- سوال ۴.۲۹:
- ا. S_y کے امتیازی افتدار اور امتیازی چکر کار تلاش کریں۔
- ب. عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ a اور b غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!
- ج. S_y^2 کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ a_r کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا متالب S_r تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$a_r = \sin \theta \cos \phi i + \sin \theta \sin \phi j + \cos \theta k \quad (۴.۱۵۴)$$

متالب S_r کے امتیازی افتد اور (معمول شدہ) امتیازی چکر کار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad (۴.۱۵۵)$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری حبز و ضرب، مثلاً $e^{i\phi}$ ، سے ضرب دے سکتے ہو لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چکر ایک (1) ہے کے لیے چکری متالب (S_x ، S_y اور S_z) تیار کریں۔ اشارہ: S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے؟ ہر (ان) حال پر S_+ ، S_z اور S_- کا عمل تعین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چکر کاٹا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر μ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت S کا راست متناسب ہوگا:

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۶)$$

جہاں تناسبی متقل γ مسکن مقناطیسی نسبت^{۵۵} کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت سروڈ $\mu \times B$ عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت سروڈ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۷)$$

^{۵۴} magnetic dipole moment

^{۵۵} gyromagnetic ratio

^{۵۶} کلاسیکی طور پر ایک جسم، جس میں بار q اور کمیت m کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت $q/2m$ ہوگی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریے میں ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کلاسیکی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی ہے۔ ($\gamma = -e/m$)

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

لہذا مقناطیسی میدان B میں، ایک مفتام پر ساکن μ ، باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۵۸)$$

مثال ۴.۳: لارمر استقبالی حرکت: فرض کریں z رخ نیکیاں مقناطیسی میدان

$$B = B_0 k \quad (۴.۱۵۹)$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ متالابی روپ میں ہیمیلٹنی (مسوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۰)$$

ہیمیلٹنی H کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو S_z کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۱)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیمیلٹنی غنیر تابع وقت ہے لہذا تابع وقت شرودنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi \quad (۴.۱۶۲)$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

μ اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکت کی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہوگی، اور مزید اس کو قوت لورنز ($q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) کا بھی سامنا ہوگا، جس کو چنی توانائی تفاعل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے، لہذا اس کو (اب تک متعارف) شرودنگر مساوات میں نسب نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (حوالہ ۴.۵۹)، تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن دیگر صورت ساکن ہے۔

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہوگا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \quad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں^۸ جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۳)$$

آئیں S کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۴)$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger S_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۵)$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger S_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۶)$$

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۸) محور z کے ساتھ $\langle S \rangle$ مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد^۹

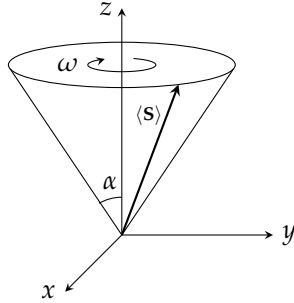
$$\omega = \gamma B_0 \quad (۴.۱۶۷)$$

سے استنباطی حرکت^{۱۰} کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہر نفٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle S \rangle$ اراقت پائے گا۔ بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سابق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

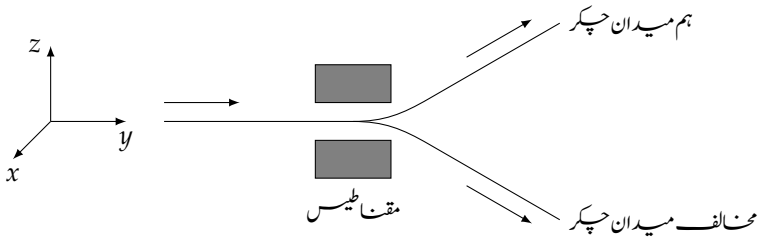
^۸ یہاں a اور b کو حقیقی فرض کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو t کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔

^۹ Larmor frequency

^{۱۰} کلاسیکی صورت میں صرغ توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقناطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استنباطی حرکت کرتا ہے۔



شکل ۴.۸: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle S \rangle$ کی استقبالی حرکت۔



شکل ۴.۹: شرٹن و گرلاخ آلہ۔

مثال ۴.۲: تجربہ شرٹن و گرلاخ: ^{۸۱} ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت سرورڈ بلکہ قوت: ^{۸۲}

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۶۸)$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بند چپکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تبدیلی ^{۸۳} جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان:

$$B(x, y, z) = -\alpha x i + (B_0 + \alpha z) k \quad (۴.۱۶۹)$$

کے خطے سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹)، جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف z حبزوں سے فرض ہے، لیکن بد قسمتی

^{۸۱} Stern-Gerlach experiment

^{۸۲} توانائی (مساوات ۳.۱۵۷) کی منفی دھلوں کے برابر قوت F ہوگی۔

^{۸۳} ہم تبدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت اور ذریعہ بنا پر شعاع کے جھکنے سے چپکارا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تاکہ ہم معتامی موٹی اکٹھے مسترب کر کے حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عملاً، شرٹن و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہوگا۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقی طیفی قانون $\nabla \cdot B = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا۔ ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگی۔

$$F = \gamma\alpha(-S_x i + S_z k)$$

تاہم B_0 کے گرد لار مسر استقبالی حرکت کی بنا، S_x تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اوسط قیمت دے گا، لہذا z رخ حالص قوت درج ذیل ہوگی

$$F_z = \gamma\alpha S_z \quad (۴.۱۷۰)$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ S_z کو انشادہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کو انشادہ کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مدار چکی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہوگا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی۔)

اب بالکل آخری قدم تک۔ دلیل حالصت کا اسیکی ہت جبکہ کو انٹرمیکانیات میں ”قوت“ کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوڑنے کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوڑنے میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت T (جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۱)$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں B کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت۔)

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۲)$$

ہوگا لہذا ($t \geq T$ کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$(۴.۱۴۳) \quad \chi(t) = \left(a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z}$$

ان دونوں اجزاء کا اب z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مساوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان حبز کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۴۴) \quad p_z = \frac{\alpha\gamma T \hbar}{2}$$

اور یہ مثبت z رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان حبز کا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی z رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی۔ (چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہذا مساوات ۴.۱۴۴ پہلے حاصل کردہ نتیجہ (مساوات ۴.۱۴۰) کے مطابق ہے۔)

کوانٹم میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گرلاخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جاسکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غصیر تنظیم شدہ شعاع کو شٹرن و گرلاخ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z حبز و جاننا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گرلاخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

۱. وقت t پر چمکری زاویائی معیار حرکت کی x رخ حبز کا پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

۱. اس نظام کا ہیملٹنی متالب تیار کریں۔

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹران ہم میدان حال (یعنی $\chi_+^{(x)} = \chi(0)$) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے، لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شروع و ختم مساوات (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج. S_x کی پیمائش سے $\hbar/2$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب:

$$\sin^2 \left(\frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم درکار میدان (B_0) کتنا ہوگا؟

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال^{۸۴} میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوں گی:^{۸۵}

$$(3.145) \quad \uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$$

جہاں پہلا تیسر کا نشان (یعنی بیاں تیسر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیسر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$(3.146) \quad S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک، S_z کا امتیازی حال ہوگا: ان کے z اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقے سے جمع ہوتے ہیں:

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar(m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

^{۸۴} میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ تاؤمدارچی زاویائی معیار حرکت ہو اور نا ہی ہمیں اس کے بارے میں فکر مند ہونے کی ضرورت ہو۔

^{۸۵} یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہوگا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہوگا۔

دیکھیں۔ یاد رہے $S^{(1)}$ صرف χ_1 پر عمل کرتا ہے اور $S^{(2)}$ صرف χ_2 پر عمل کرتا ہے۔ یہ علاقیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہوگا:

$$\uparrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\uparrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے: m کو چاہیے کہ $-s$ تا $+s$ عدد صحیح قدرتوں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ $s = 1$ ہے لیکن یہاں ایک ”اضافی“ حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات (sm) علامتی روپ میں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۷۷) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (سہ تا)}$$

(تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔) اسی بنا پر اسے سہ تا^{۸۶} ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو $s = 0$ کا حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۷۸) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (یک تا)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے منہر حاصل ہوگا (سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔)

یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چپکر کے دو ذرات کا کل چپکر ایک (1) یا منصر (0) ہوگا، جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا وہ سہ تا یا ایک تا تنظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ سہ تا حالات، S^2 کے امتیازی

سمتیات ہیں جن کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہے، اور یک تاحالات، S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قدر صفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۷۹) \quad S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}$$

معادلات ۴.۱۴۵ اور ۴.۱۴۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} (2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$(۴.۱۸۰) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} |10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۱) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2 \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4} |00\rangle$$

ہو گئے۔

معادلات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور معادلات ۴.۱۴۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$(۴.۱۸۲) \quad S^2 |10\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\right) |10\rangle = 2\hbar^2 |10\rangle$$

ہے لہذا $|10\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہوگا؛ اور

$$(۴.۱۸۳) \quad S^2 |00\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right) |00\rangle = 0$$

ہے لہذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر 0 ہوگا۔ (میں آپ کے لئے سوال ۴.۳۳-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہوگی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ موزوں امتیازی قدر کے، S^2 کے امتیازی تفاعلات ہیں۔)

ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر 1 چکر اور 0 چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکر s کیا حاصل ہونگے؟^{۸۷} اس کا جواب^{۸۸} ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک؛ اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک، بچنے آتے ہوئے ہر چکر:

$$s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2| \quad (۴.۱۸۴)$$

حاصل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، زیادہ سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہو گا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صنف بند ہوں، اور کم سے کم اس صورت ہو گا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صنف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ 2 چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو $7/2$ ، $5/2$ ، $3/2$ ، یا $1/2$ کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تشکیل پر منحصر ہو گا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال ψ_{nlm} کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا خالص زاویائی معیار حرکت۔ (چکر جمع مدارچی) $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ ہو گا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l + 1$ ، l ، یا $l - 1$ ہو گا (جہاں l کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہو گا کہ آیا کہ الیکٹران خود $l + 1/2$ تشکیل یا $l - 1/2$ تشکیل میں ہے)۔

(چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہذا) مجموعی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s ہو اور z جزو m ہو، مرکب حالات $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \quad (۴.۱۸۵)$$

ہو گا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامتیت $\uparrow = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ ، $\downarrow = |\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ استعمال کیا ہے)۔ مستقل $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$ کو **کلیش و گورڈن عدد** سر^{۸۹} کہتے ہیں۔ جدول ۴.۸ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر 2×1 جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈب میں (2 چکر اور 1 چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3، اور z جزو 0 ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش (1/5 احتمال کے ساتھ) \hbar یا (3/5 احتمال کے ساتھ) 0 یا (1/5 احتمال کے ساتھ) $-\hbar$ قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ 1 ہے۔ (کلیش و گورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے مرکبوں کا مجموعہ 1 ہو گا۔)

^{۸۷} میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یادوں) مدارچی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم حرف l استعمال کرتے)۔

^{۸۸} ثبوت کے لئے آپ کو اصل نصاب دیکھنا ہو گا۔

^{۸۹} Clebsch-Gordon coefficients

ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |sm\rangle \quad (۴.۱۸۶)$$

بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سب دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}} |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور 1 چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لیے $m_2 = 0$ ہے (m لازماً $1/2$ ہوگا) اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ ($3/5$ احتمال کے ساتھ) $5/2$ یا ($1/15$ احتمال کے ساتھ) $3/2$ یا ($1/3$ احتمال کے ساتھ) $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا (کلیش و گورڈن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ 1 ہوگا)۔

یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا ہوں کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ عملی گروپ نظریہ کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ $\sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$ حاصل ہوگا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں $|00\rangle$ پر S_{\pm} کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ 0 حاصل ہوگا۔

ج. دکھائی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے) S^2 کے موزوں امتیازی قدر والے امتیازی تفاعلات ہیں۔

سوال ۴.۳۵: کووارک ^{۹۲} کا چکر $1/2$ ہے۔ تین کووارک کے مل کر ایک ^{۹۲} بیریا ^{۹۲} مرتب کرتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کووارک کے (بلکہ یہ کہن زیادہ درست ہوگا کہ ایک کووارک اور ایک ضد کووارک) مل کر ایک ^{۹۳} میڈان ^{۹۳} مرتب کرتے ہیں (مثلاً ^{۹۳} پائون یا ^{۹۳} کایون ^{۹۵})۔ فرض کریں یہ کووارک کے زمینی حال میں ہیں (الہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا)۔

ا. بیریان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

ب. میڈان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

group theory^{۹۰}
quark^{۹۱}
baryon^{۹۲}
meson^{۹۳}
pion^{۹۴}
kion^{۹۵}

ا. چکر 1 کا ایک ساکن ذرہ اور چکر 2 کا ایک ساکن ذرہ اس تشکیل میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3، اور z حبزو \hbar ہے۔ چکر 2 ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے z حبزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال ψ_{510} میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انحصار ادی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں (جہاں $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$ ہوگا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(S^{(1)} \times S^{(2)}) \quad (۴.۱۸۷)$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیش وگورڈن عددی سرہی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $S^{(1)} + S^{(2)}$ مقلوبی ہوگا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

باب ۴ کے لئے اضافی سوالات

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے تینہ ابعادی ہارمونی مرتعش^{۹۱} پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (۴.۱۸۸)$$

ا. کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بعدی مرتعش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، احبازتی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۸۹)$$

ب. E_n کی اخطائیت $d(n)$ تعین کریں۔

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ میں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی مرتعش مخفیہ کروئی تشاکلی ہے لہذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدود کے علاوہ کروئی محدود میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے۔ طمستقی تسلل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداہی مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے احبازتی توانائیاں تعین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

۱. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل تین ابعادی مسئلہ وریل^{۹۷} ثابت کریں۔

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۰)$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۱)$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونک سر تعیش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۲)$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۴۱ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی رواج^{۹۸} کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۳)$$

۱. دکھائے کہ \mathbf{J} استمراری مساوات^{۹۹}:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۴)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مقامی بقا احتمال^{۱۰۰} کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاؤ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3 r \quad (۴.۱۹۵)$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ میں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا۔

ب. حال $m = 1$ ، $l = 1$ ، $n = 2$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے \mathbf{J} تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

^{۹۷}three-dimensional virial theorem

^{۹۸}probability current

^{۹۹}continuity equation

^{۱۰۰}conservation of probability

ج. اگر ہم کمیت کے بہاد کو mJ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$L = m \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3 r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تابع وقت) معیار حرکت فضا تفاعل موج^{۱۱} کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۴.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3 r \quad (۴.۱۹۶)$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حرکت کی فضا تفاعل عمل موج تلاش کریں۔ اشارہ: کردی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو \mathbf{p} کے رخ رکھیں اور θ کا مکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۷)$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ $\phi(\mathbf{p})$ معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے $\psi(\mathbf{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اپنے جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ دریل (مساوات ۴.۱۹۱) کا بلا تصادم ہے۔

سوال ۴.۴۳:

ا. حال $m = 1, l = 2, n = 3$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل عمل موج (ψ) تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف r, θ, ϕ اور a (رداس بوجہ) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر (ρ, z, v, Y) یا تفاعل (c_0, A) وغیرہ) یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں π اور e ، وغیرہ استعمال کیے جاسکتے ہیں)۔

ب. r, θ, ϕ کے لحاظ سے موزوں نکلمات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل عمل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ s کی کس سعت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب مستثنیٰ ہوگا؟

سوال ۴.۴۴:

ا. حال $m = 3, l = 3, n = 4$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل عمل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو کردی محدود r, θ اور ϕ کا تفاعل عمل لکھیں۔

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ (نکلمات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

^{۱۱} momentum space wave function

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ج. اس حال میں ایک جوہر کے متبادل مشاہدہ $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انحصار ہی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۴۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تغاغل موج (مساوات ۴.۸۰) تک درست ہے اور مرکزہ کاردار اس b لپیٹے ہوئے بالکل ٹھیک ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ کم سے کم رتبہ جزو یعنی: $P \approx (4/3)(b/a)^3$ ہوگا۔ دکھائیں کہ $b \ll a$ کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہوگی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہوگا لہذا $P \approx (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$ لیا جاسکتا ہے۔ تصدیق کیجیے گا کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا۔

د. $b \approx 10^{-15} \text{ m}$ اور $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ لیتے ہوئے P کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴۶:

ا. کلیہ تواری (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں ردائی تغاغل موج درجہ ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلا واسطہ مکمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں۔

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں ”عدم یقینیت“ $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہوگی۔ دھیان رہے کہ n بڑھانے سے r میں نسبتی پھیلاؤ گھٹتا ہے (یوں n کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آتا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پر چپانے جاسکتے ہیں)۔ ردائی تغاغل امواج کا خاکہ، n کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۷: ہم مکافہ طیفی خطوط: کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے

صدر کوانٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوگی۔

سوال ۴.۴۸: متبادل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں۔

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

- ب. حال ψ_{nlm} میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں۔
 ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔
 سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ا. χ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل A تعین کریں۔
 ب. اس الیکٹران کے S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
 ج. اس الیکٹران کے S_x کی پیمائش کی بجائے تو کیا قیمتیں متوقع ہونگی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
 د. اس الیکٹران کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_y کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات یکساں تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_a کے رخ ذرہ ۱ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو $S_a^{(1)}$ ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_b کے رخ ذرہ ۲ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو $S_b^{(2)}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں a_a اور a_b کے بیچ زاویہ θ ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۹۸)$$

سوال ۴.۵۱:

ا. کلیڈش گورڈن عددی سرکو، $s_1 = 1/2$ اور s_2 کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے S^2 کا امتیازی حال $|sm\rangle$ ہو۔

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |s_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |s_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات ۴.۱۷۹ تا مساوات ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاصر ہوں کہ (مثلاً) $S_x^{(2)}$ حال $|s_2 m_2\rangle$ کو کیا کرتا ہے، تب مساوات ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مساوات ۴.۱۷۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; \quad B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۸ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر ذرہ کے لیے متالاب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کے امتیازی افتدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مساوات ۴.۱۲۵ اور مساوات ۴.۱۲۷ میں $1/2$ چکر، سوال ۴.۳۱ میں 1 چکر، اور سوال ۴.۵۲ میں $3/2$ چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکر کی متالاب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j \equiv \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہے۔

سوال ۴.۵۴: کروئی ہارمونیکس کے لیے معمول زنی ضربیہ درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ ۴.۱.۲ سے درج ذیل جاننے ہیں۔

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جزو B_l^m تعیین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات ۴.۳۲ میں کیا)۔ مساوات ۴.۱۲۰، مساوات ۴.۱۲۱ اور مساوات ۴.۱۳۰ استعمال کرتے ہوئے B_l^m کی صورت میں B_l^{m+1} کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخوذ کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$

تک حل کریں۔ آخر میں سوال ۴.۲۲ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کی قیمت تلاش کریں۔ شریک لیٹنڈر تفاعل کے تصرف کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m \quad (۴.۱۹۹)$$

سوال ۴.۵۵: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے۔

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi_-)$$

ا. مدارچی زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ مدارچی زاویائی معیار حرکت کے z جزو (L_z) کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو (S_z) کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ لیں۔

ه. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں۔ آپ کیا قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس کی r ، θ ، ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

ح. آپ چکر کا z جزو اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں)۔ ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۶:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ٹیلر تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \phi) = e^{\frac{iL_z\phi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں ϕ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا پر L_z/\hbar کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار^{۱۲} کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۲۹ استعمال کریں اور سوال ۳.۳۹ سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$ ہو گا جو \mathbf{a}_n رخ گھومنے کا پیدا کار ہے، یعنی $e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n\phi/\hbar}$ محور \mathbf{a}_n کے گرد (دائیں ہاتھ سمت میں) زاویہ ϕ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$ ہوگا۔ بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_n)\phi/2} \chi \quad (۴.۲۰۰)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور x کے لحاظ سے 180° گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ، ہماری توقعات کے عین مطابق، ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے۔

ج. محور y کے لحاظ سے 90° گھومنے والا متالب تیار کریں اور (χ_+) پر اس کا اثر دیکھیں؟

د. محور z کے لحاظ سے 360° زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں۔

$$e^{i(\sigma \cdot a_n)\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(a_n \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۱)$$

سوال ۴.۵۷: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (ساواۓت ۴.۹۹) امتیازی اقدار کی (عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی اجازت دیتے ہیں، جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ خصوصی روپ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ پر ضرور کوئی اضافی شرط ملتا ہے جو نصف عددی قیمتوں کو حنا راج کرتی ہے۔ ہم مستقل a جس کا بُعد لمبائی ہو (مثلاً، ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر) ایسے ہوئے درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں۔

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y]$$

ا. تصدیق کیجیے کہ $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ ؛ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$ ہیں۔ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو تمام q اور p مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج. تصدیق کیجیے کہ ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کیت $m = \hbar/a^2$ اور تردد $\omega = 1$ ہو کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ ہوگا جہاں H ہیمیلٹنی ہیں۔

د. ہم جانتے ہیں ہارمونی مرتعش ہیمیلٹنی کے امتیازی اقدار $\hbar\omega(n + 1/2)$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ہوگا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیمیلٹنی کے روپ اور باضابطہ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا)۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازمًا عدد صحیح ہوں گے۔

سوال ۵۸:۴: عمومی حال (مساوات ۱۳۹) میں $1/2$ چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کے لئے شرط معلوم کریں (یعنی، فترہ $|\langle S_z \rangle| \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$ میں مساوی (=) صورت تلاش کریں)۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر ہم a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں؛ تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت حاصل ہو گی جب b حالص حقیقی یا حالص خیالی ہو۔

سوال ۵۹:۴: کلاسیکی حرکت میں ایک ذرہ، جس کا بار q ہو اور جو برقی میدان E اور مقناطیسی میدان B میں مستحق رفتار v کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جسے لورینز قوت کا قانون^{۱۰۳}:

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۲)$$

پیش کرتا ہے۔ اس قوت کو کسی بھی غیر مستحق مخفی توانائی تفاعل عمل کی ڈھلوان کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنگر اپنی اصلی روپ (مساوات ۱۰۱) میں اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے۔ تاہم اس کا نفیس روپ:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (۴.۲۰۳)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتا ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگی

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (۴.۲۰۴)$$

جہاں \mathbf{A} مستحق مخفی ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) اور φ غیر مستحق مخفی ($E = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$) ہے، لہذا شرودنگر مساوات (بنا بطن متبادل $((\hbar/i)\nabla \rightarrow \mathbf{p})$ پر کر کے) درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi \quad (۴.۲۰۵)$$

۱. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \rangle \quad (۴.۲۰۶)$$

ب. ہمیشہ کی طرح (مساوات ۱۳۲، دیکھیں) ہم $\frac{d\langle r \rangle}{dt}$ کو $\langle \mathbf{v} \rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{q}{2m} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \rangle \quad (۴.۲۰۷)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں E اور B میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}) \quad (۴.۲۰۸)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس طرح $\langle v \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین اورینٹز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی، جیسا ہم مسئلہ ہرنسٹ کے تحت توقع کر سکتے تھے۔

سوال ۴.۶۰: [پس منظر جاننے کے لیے سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] مندرجہ کریں

$$A = \frac{B_0}{2}(xj - yi) \quad \text{اور} \quad \varphi = Kz^2$$

ہیں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں۔

۱. میدان E اور B تلاش کریں۔

ب. ان میدان اس ذرہ کے امتیازی تفاعلات اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں جس کی قیمت m اور بار q ہو۔ جواب:

$$(۴.۲۰۹) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں $\omega_1 \equiv qB_0/m$ اور $\omega_2 \equiv \sqrt{2qKm}$ ہیں۔ تبصرہ: $K = 0$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹرون حرکت ہے^{۴۰} اکا کوانٹائی مشال ہوگا؛ کلاسیکی سائیکلوٹرون تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہوگا۔ اجزائی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1$ لنڈو سطحیں^{۴۵} کہلاتی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: [پس منظر جاننے کی خاطر سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] کلاسیکی برقی حرکت میں مقبض A اور φ یکساں طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں؛ طبعی مقداریں میدان E اور B ہوں گے۔ ۱. دکھائیں کہ مقبضے

$$(۴.۲۱۰) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں Λ مقام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان دیتے ہیں جو φ اور A دیتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱۰ ماپے تبادلہ^{۴۶} کہلاتی ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ ماپے غیر متغیر^{۴۷} ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفیہ کارکردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ ماپے غیر متغیر رہتا ہے یا نہیں۔ دکھائیں کہ ماپے تبادلہ مقبضے φ' اور A لیتے ہوئے درج ذیل

$$(۴.۲۱۱) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات ۴.۲۰۵) کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف پیتی حبز و ضربی کا فرق

^{۴۰}cyclotron motion

^{۴۵}Landau Levels

^{۴۶}gauge transformation

^{۴۷}gauge invariant

پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبعی حال^{۱۰۸} کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ ماب غیر متغیر ہوگا) مزید معلومات کے لیے حصہ ۱۰.۲.۳ سے رجوع کیجیے گا۔

^{۱۰۸} یعنی $\langle \mathbf{r} \rangle$ ، $d\langle \mathbf{r} \rangle / dt$ ، وغیرہ تبدیل نہیں ہوں گے۔ چونکہ Λ معتمد کا تابع ہے، $\langle \mathbf{p} \rangle$ (جس میں \mathbf{p} کو عامل $\nabla (\hbar/i)$ ظاہر کرتا ہے) تبدیل ہوگا، تاہم جیسا ہم نے مساوات ۴.۲۰۶ میں دیکھا، \mathbf{p} موجودہ سیاق و سباق میں میکانی معیار حرکت ($m\mathbf{v}$) کو ظاہر نہیں کرتا ہے (گراؤنج میکانیات میں اس کو باضابطہ معیار حرکت کہتے ہیں)۔

جوابات

- ensemble, 15
- expectation
 - value, 7
- formula
 - De Broglie, 18
- Fourier
 - inverse transform, 62
 - transform, 62
- Frobenius
 - method, 53
- function
 - Dirac delta, 71
- generalized
 - distribution, 71
 - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 59
- generator
 - translation in space, 135
 - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
 - oscillator, 32
- Hermitian
 - conjugate, 48
- hermitian, 101
 - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
 - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
 - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
 - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
 - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 66
- energy
 - allowed, 28
 - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
 - neutrino, 127
- particle
 - unstable, 21
- polynomial
 - Hermite, 57
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- potential, 14
 - reflectionless, 92
- probability
 - density, 10
- probability current, 21
- probable
 - most, 7
- recursion
 - formula, 54
- reflection
 - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
 - formula, 59
- scattering
 - matrix, 93
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
 - Fourier, 35
 - power, 42
 - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - conjugate, 102
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
 - operators, 45
- law
 - Hooke, 41
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
 - S, 93
 - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- operator, 17
 - lowering, 45
 - projection, 128
 - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

variables
 separation of, 25
 variance, 9
 vectors, 97
 velocity
 group, 64
 phase, 64
 virial theorem, 132
 wag the tail, 55
 wave
 incident, 76
 packet, 61
 reflected, 76
 transmitted, 76
 wave function, 2
 wavelength, 18

 outer, 23
 spectrum, 104
 square-integrable, 13
 square-integrable functions, 98
 standard deviation, 9
 state
 bound, 69
 excited, 33
 ground, 33
 scattering, 69
 statistical
 interpretation, 2
 step function, 79
 theorem
 Dirichlet's, 35
 Ehrenfest, 18
 Plancherel, 62
 transformations
 linear, 97
 transmission
 coefficient, 77
 tunneling, 69, 78
 turning points, 69
 uncertainty principle, 19, 116
 energy-time, 119

- اتباتی
حالات، 133
اجباتی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹریو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینی، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انخطاطی، 104، 89
اندرونی ضرب، 98
انکاس
شرح، 77
اوسط، 7
براء، 127
بقا
توانائی، 38
پیدا کار
تفاعل، 59
پیدا کار
فصل میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136
تجدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسل
ٹیلر، 41
طامتی، 42
فوریسر، 35
تعیین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2
- توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجباتی، 28
توقعات
قیمت، 7
جفت، 33
تفاعل، 30
حال
بکھراؤ، 69
زمینی، 33
مقید، 69
پہچان، 33
خطی الجبرا، 97
خطی تبدلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 60
دم بلانا، 95، 55
ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیگر، 34
ذره
غیر مستحکم، 21
رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85
ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

- فصل
سیرونی، 23
دوہری، 128
فورسٹر
الٹ بدل، 62
بدل، 62
وٹا بل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
وٹا بل
بھراو، 93
ترسیل، 94
وٹا بل ارکان، 125
وٹا بل
ہک، 41
قواب، 98
کٹ، 127
کشادہ
احتمال، 10
کشیر رکنی
ہرمانٹ، 57
کلیہ
ڈی پروگلی، 18
روڈریگیس، 59
کوپن، ہیگن مفہوم، 4
گرام شمد
ترکیب عودیت، 106
متعمم
تفعل، 71
تقسیم، 71
متعمم شماراتی مفہوم، 111
مختل
سب سے زیادہ، 7
مختفہ، 14
بلا العکاس، 92
مربع منکامل، 13
مربع منکامل تفعلات، 98
سرنگ زنی، 69، 78
سگر، 15
سمتیات، 97
سوچ
انکاری، 4
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سوڈیم، 23
سیڑھی
عاملین، 45
سیڑھی تفعل، 79
شروڈنگر
غیر تاج وقت، 27
شروڈنگر مساوات، 2
شروڈنگر نقطہ نظر، 136
شریک عمل، 102
شماراتی مفہوم، 2
شوارز عدم مساوات، 99
طاق، 33
طول موج، 18
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
عامل، 17
تخلیل، 128
تقلیل، 45
رفعت، 45
عدم تعین، 2
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عتدہ، 34
علیحدگی متغیرات، 25
عودی، 100، 34
معیاری، 34
غیر مسلسل، 105
فہرہ ناموس
ترکیب، 53

- مترہنگ
- ہارمونئی، 32
- مترہنگ، 101
- جوڑی دار، 48، 102
- مترہنگ، 130
- مترہنگ، 130
- ہلبرٹ فنکشن، 99
- ہیگزبرگ نقطہ نظر، 136
- ہیملٹن، 27
- یک طاق، 129
- مترہنگ
- ہارمونئی، 32
- مسئلہ
- اگر نقشہ، 18
- پلانشرال، 62
- ڈرٹھ، 35
- مسئلہ وریل، 132
- معمول زنی، 13
- معمول شدہ، 100
- معیار حرکت، 16
- معیار حرکتی فنکشن عمل موج، 113
- معیار عمودی، 34
- معیاری انحراف، 9
- معیاری عمودی، 100
- مقلوب، 43
- مقلوبیت
- باضابطہ رشتہ، 44
- مقلوب، 43
- مکمل، 100، 34
- منہدم، 111، 4
- موج
- آمدی، 76
- ترسیلی، 76
- منعکس، 76
- موجی اکٹھ، 61
- میون نیوٹرینو، 127
- واپسی نقطہ، 69
- وسطانیہ، 7