کوانٹم میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

۱ تفاعل موج ۱
۱.۱ مساوات شروڈنگر ۱
۱.۲ شماریاتی مفہوم ۲
۱.۳ احتمال ۵
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات ۵
۱.۳.۲ استمراری متغیرات ۹
۱.۴ معمول زنی ۱۲
۱.۵ معیار حرکت ۱۵
۱.۶ اصول عدم یقینیت ۱۸

۲ غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر ۲۵
۲.۱ ساکن حالات ۲۵
۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں ۳۱
۲.۳ ہارمونی مرتعش ۴۲
۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب ۴۴
۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب ۵۳
۲.۴ آزاد ذرہ ۶۰
۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ ۷۰
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات ۷۰
۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں ۷۲
۲.۶ متناہی چوکور کنواں ۸۱

۳ قواعد وضوابط ۹۷
۳.۱ ہلبرٹ فضا ۹۷
۳.۲ قابل مشاہدہ ۱۰۱
۳.۲.۱ ہرمشی عاملین ۱۰۱

۳.۲.۲ تعین حال ۱۰۳
۳.۳ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل ۱۰۵
۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف ۱۰۶
۳.۳.۲ استمراری طیف ۱۰۸
۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم ۱۱۱
۳.۵ اصول عدم یقینیت ۱۱۵
۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت ۱۱۵
۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ ۱۱۸
۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ۱۱۹
۳.۶ ڈیراک علامتیت ۱۲۳

۴ تین ابعادی کوانٹم میکانیات ۱۳۷
۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر ۱۳۷
۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات ۱۳۹
۴.۱.۲ زاویائی مساوات ۱۴۱
۴.۱.۳ رداسی مساوات ۱۴۶
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر ۱۵۰
۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج ۱۵۱
۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف ۱۶۱
۴.۳ زاویائی معیار حرکت ۱۶۴
۴.۳.۱ امتیازی اقدار ۱۶۴
۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات ۱۷۰
۴.۴ چکر ۱۷۳
۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران ۱۸۱
۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ ۱۸۷

۵ متماثل ذرات ۲۰۵
۵.۱ دو ذروی نظام ۲۰۵
۵.۱.۱ بوسن اور فرمیان ۲۰۷
۵.۱.۲ قوت مبادلہ ۲۱۰
۵.۲ جوہر ۲۱۵
۵.۲.۱ ہیلیم ۲۱۶
۵.۲.۲ دوری جدول ۲۱۹
۵.۳ ٹھوس اجسام ۲۲۳
۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس ۲۲۳
۵.۳.۲ پٹی دار ساخت ۲۲۹
۵.۴ کوانٹائی شماریاتی میکانیات ۲۳۶
۵.۴.۱ ایک مثال ۲۳۶
۵.۴.۲ عمومی صورت ۲۳۹

۵.۴.۳ سب سے زیادہ محتمل تشکیل ۲۴۲
۵.۴.۴ α اور β کی طبعی اہمیت ۲۴۵
۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف ۲۴۹

۶ غیر تابع وقت نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی ۲۵۵
۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ ۲۵۷
۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں ۲۶۱
۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۶۲
۶.۲.۱ دوپڑتا انحطاط ۲۶۲
۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط ۲۶۷
۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت ۲۷۲
۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح ۲۷۳
۶.۳.۲ چکر ومدار ربط ۲۷۶
۶.۴ زیمان اثر ۲۸۳
۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر ۲۸۳
۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر ۲۸۵
۶.۴.۳ درمیانہ میدان زیمان اثر ۲۸۷
۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارا ۲۸۹

۷ تغیری اصول ۲۹۹
۷.۱ نظریہ ۲۹۹
۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال ۳۰۴
۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ ۳۰۹

۸ ونزل وکرامرز وبرلوان تخمین ۳۱۹
۸.۱ کلاسیکی خطہ ۳۲۰
۸.۲ سرنگزنی ۳۲۵
۸.۳ کلیات پیوند ۳۲۸

۹ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۴۱
۹.۱ دو سطحی نظام ۳۴۲
۹.۱.۱ مضطرب نظام ۳۴۲
۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۴۵
۹.۱.۳ سائن نما اضطراب ۳۴۷
۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب ۳۵۰
۹.۲.۱ برقناطیسی امواج ۳۵۰
۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود باخود اخراج ۳۵۱
۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب ۳۵۲

۹.۳ خود باخود اخراج ۳۵۴
۹.۳.۱ آئنسٹائن A اور B عددی سر ۳۵۴
۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات ۳۵۶
۹.۳.۳ قواعد انتخاب ۳۵۹

۱۰ حرارت ناگزر تخمین ۳۶۹
۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزر ۳۶۹
۱۰.۱.۱ حرارت ناگزر عمل ۳۶۹
۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت ۳۷۲
۱۰.۲ ہیّت بیری ۳۷۷
۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل ۳۷۷
۱۰.۲.۲ ہندسی ہیّت ۳۷۹
۱۰.۲.۳ اہارونووبوہم اثر ۳۸۴

۱۱ بکھراو ۳۹۳
۱۱.۱ تعارف ۳۹۳
۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو ۳۹۳
۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراو ۳۹۷
۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ ۳۹۸
۱۱.۲.۱ اصول وضوابط ۳۹۸
۱۱.۲.۲ لایا عمل ۴۰۱
۱۱.۳ ینتقلات حیط ۴۰۴
۱۱.۴ بارن تخمین ۴۰۷
۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ ۴۰۷
۱۱.۴.۲ بارن تخمین اوّل ۴۱۱
۱۱.۴.۳ تسلسل بارن ۴۱۶

۱۲ پس نوشت ۴۱۹
۱۲.۱ آئنسٹائن پوڈلسکیوروزن تضاد ۴۲۰
۱۲.۲ مسئلہ بل ۴۲۱
۱۲.۳ مسئلہ کلیہ ۴۲۶
۱۲.۴ شروڈنگر کی بلی ۴۲۷
۱۲.۵ کوانٹم زینو تضاد ۴۲۸

جوابات ۴۳۱

ا خطی الجبرا ۴۳۳
ا.ا سمتیات ۴۳۳
ا.۲ اندرونی ضرب ۴۳۳
ا.۳ قالب ۴۳۴

۱.۴ تبدیلی اساس ۴۳۴
۱.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار ۴۳۴
۱.۶ ہرمشی تبادلے ۴۳۴

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر:

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0 \tag{۶.۱}$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

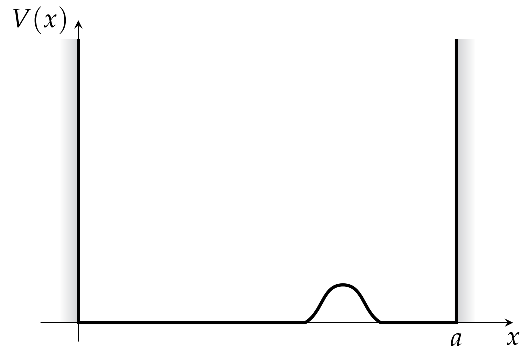
$$\langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm} \tag{۶.۲}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑا ڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے

$$H\psi_n = E_n \psi_n \tag{۶.۳}$$

تاہم ہماری خوش قسمتی کے علاوہ ایسی کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک حل کر پائیں۔ **نظریہ اضطراب**، غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر، قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے۔ ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ:

$$H = H^0 + \lambda H' \tag{۶.۴}$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

لکھ کر آغاز کرتے ہیں، جہاں H' اضطراب ہے (زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے)۔ ہم وقتی طور پر λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں؛ بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی، اور H اصل ہیملٹنی ہو گی۔ اگلے قدم میں، ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots \tag{۶.۵}$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots \tag{۶.۶}$$

یہاں n ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اول رتبی تصحیح** کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اول رتبی تصحیح** کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے؛ اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبی تصحیح ہوں گی، وغیرہ۔ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned}(H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]\\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]\end{aligned}$$

یا (λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}H^0\psi_n^0 + \lambda(H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0) + \lambda^2(H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1) + \cdots\\ = E_n^0\psi_n^0 + \lambda(E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0) + \lambda^2(E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0) + \cdots\end{aligned}$$

کمتر رتبہ (λ^0) کی صورت میں اس سے[1] $H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے، جو نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱)۔ رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہو گا۔

$$H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0 \tag{۶.۷}$$

[1] ہمیشہ کی طرح، طاقتی تسلسل پھیلاو کی یکتائی ضمانت دیتی ہے کہ ایک جیسی طاقت کے عددی سر ایک جیسے ہوں گے۔

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1 = E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0 \tag{۶.۸}$$

وغیرہ۔ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا؛ اب اس کی کوئی ضرورت نہیں لہٰذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں۔)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں (یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر تکمل لیتے ہیں)۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

تاہم H^0 ہرمشی ہے لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle$$

ہو گا، جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا۔ مزید $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہو گا۔[۲]

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \tag{۶.۹}$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے؛ بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹائی میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے۔ یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت، توانائی کی اول رتبی تصحیح ہو گی۔

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کے غیر مضطرب تفاعلات موج (مساوات ۲.۲۸) درج ذیل ہیں۔

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی "تہہ" (زمین) کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں (شکل ۶.۲)۔ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں۔

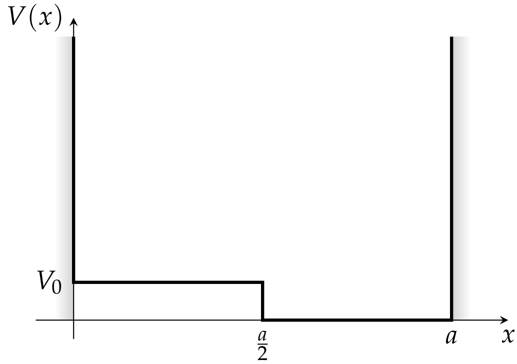
حل: یہاں $H' = V_0$ ہو گا لہٰذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہو گی۔

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|V_0|\psi_n^0\rangle = V_0\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گی؛ جی ہاں، تمام V_0 مقدار اوپر اٹھتی ہیں۔ یہاں حیرانگی کی بات صرف یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی

[۲] موجودہ سیاق و سباق میں $\langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle$ یا $\langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle$ (جہاں اضافی انتصابی لکیر شامل کی گئی ہے) لکھنے میں کوئی فرق نہیں، چونکہ ہم حال کو تفاعل موج کے لحاظ سے "نام" دیتے ہیں۔ لیکن موخر الذکر علامتی اظہار زیادہ بہتر ہے، چونکہ یہ ہمیں اس روایت سے آزاد کرتا ہے۔

شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی۔[3] اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت (شکل ۶.۳) میں درج ذیل ہو گا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے۔ یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں، تاہم اول رتبی تخمین کے نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

[3] یہاں کوئی سی چیز لامتناہی چوکور کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے، لہٰذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہو گا۔

مساوات ۶.۹ ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے؛ تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم مساوات ۶.۷ کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے۔

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \tag{۶.۱۰}$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے، لہٰذا یہ ψ_n^1 کی غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہٰذا (کسی بھی تفاعل کی طرح) ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ:

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0 \tag{۶.۱۱}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ψ_n^1 مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتے ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha\psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے، لہٰذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں؛ ایسا ہی کرتے ہوئے مساوات ۶.۱۱ کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا۔ عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۶.۱۰ میں مساوات ۶.۱۱ پر کرتے ہوئے، اور یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب مساوات شروڈنگر (مساوات ۶.۱) کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m\neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\sum_{m\neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle\psi_l^0|\psi_m^0\rangle = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle + E_n^1\langle\psi_l^0|\psi_n^0\rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہو گا اور ہمیں دوبارہ مساوات ۶.۹ ملتی ہے؛ اگر $l \neq n$ ہو تو

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۲}$$

ہو گا، لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n} \frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0 \tag{۶.۱۳}$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انحطاطی ہو، نسب نما کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہو گا)۔ ہاں اگر دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک جتنی ہوں (مساوات ۶.۱۲ کے نسب نما میں صفر پایا جائے گا) تب نسب نما ہمیں مصیبت میں ڈالتا ہے؛ ایسی صورت میں **انحطاطی نظریہ اضطراب**[۴] کی ضرورت پیش آئے گی، جس پر حصہ ۶.۲ میں غور کیا جائے گا۔

یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے۔ توانائی کی اول رتبی تصحیح، E_n^1، مساوات ۶.۹ دیتی ہے، اور تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح، ψ_n^1، مساوات ۶.۱۳ دیتی ہے۔ میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی انتہائی درست قیمتیں دیتا ہے (یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہو گی)، اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں۔

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں δ تفاعلی موڑا:

$$H' = \alpha\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ڈالتے ہیں، جہاں α ایک مستقل ہے۔

ا. اجازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ بتائیں جفت n کی صورت میں توانائیاں کیوں مضطرب نہیں۔

ب. زمینی حال کی تصحیح، ψ_1^1، کی اتساع (مساوات ۶.۱۳) کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے۔ اب فرض کریں مقیاس لچک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے: $k \to (1+\epsilon)k$، (جس سے اسپرنگ کی لچک کم ہو گی)۔

ا. نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک قیمتیں حاصل کریں (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں۔

ب. اب مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں۔ یہاں H' کیا ہو گا؟ اپنے نتیجے کا جزو-ا کے ساتھ موازنہ کریں۔ اشارہ: یہاں کسی نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نہ ضرورت اور نہ اجازت ہے۔

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں۔ یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

(جہاں V_0 ایک مستقل جس کا بعد توانائی ہے اور a کنویں کی چوڑائی ہے) کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں۔

---

[۴] degenerate perturbation theory

ا. پہلے قدم میں، ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے، زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں۔

ب. زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کی توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمین اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں۔

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

اسی طرح بڑھتے ہوئے، ہم ψ_n^0 اور دور تبی مساوات (مساوات ۶.۸) کا اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^2\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کے ہرمشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں:

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^2\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle$$

لہٰذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ ساتھ ہی $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ ہے لہٰذا E_n^2 کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle - E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle \tag{۶.۱۴}$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = 0$$

ہو گا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۵}$$

ہو گا۔ یہ دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل موج (ψ_n^2) کی دوم رتبی تصحیح، توانائی کی سوم رتبی تصحیح، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں، لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات ۶.۱۵ تک استعمال کرنا سودمند ہو گا۔[۵]

سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۱ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۲ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجے کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۳.۳۳ دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں مساوات شروڈنگر کو بلاواسطہ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہیں۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں؛ یعنی، دو (یا دو سے زیادہ) منفرد حالات (ψ_a^0 اور ψ_b^0) کی توانائیاں ایک جیسی ہوں، تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا، چونکہ $c_a^{(b)}$ (مساوات ۶.۱۲) اور E_a^2 (مساوات ۶.۱۵) بے قابو بڑھتے ہیں (ماسوائے اس صورت میں جب شمار کنندہ صفر ہو: $\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = 0$؛ اس پوشیدہ صورت کو ہم بعد میں استعمال کریں گے)۔ یوں انحطاطی صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہو گا۔

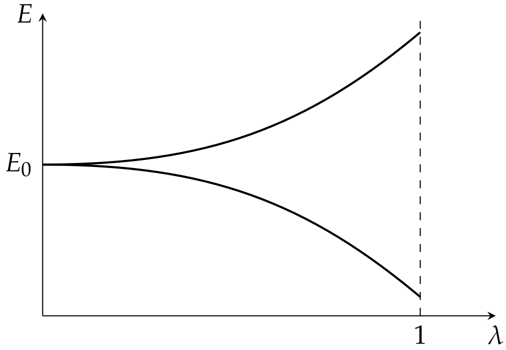
۶.۲.۱ دوپڑتا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \tag{۶.۱۶}$$

[۵] مختصر انداز لکھائی میں $V_{mn} \equiv \langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle$، $\Delta_{mn} \equiv E_m^0 - E_n^0$ اور n ویں توانائی کی پہلی تین تصحیح درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n^1 = V_{nn}, \quad E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}}, \quad E_n^3 = \sum_{l,m\neq n}\frac{V_{nl}V_{lm}V_{mn}}{\Delta_{nl}\Delta_{nm}} - V_{nn}\sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}^2}$$



شکل ۶.۴: انحطاط کا خاتمہ بذریعہ اضطراب۔

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \tag{۶.۱۷}$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا اور اس کی امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہو گی۔

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0 \tag{۶.۱۸}$$

عام طور پر اضطراب (H') انحطاط کو "توڑے" (یا "منسوخ" کرے) گا: جیسے جیسے ہم λ کی قیمت (0 سے 1 کی طرف) بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی (شکل ۶.۴)۔ مخالف رخ چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند (یعنی صفر) کر دیں تب "بالائی" حال کا تخفیف، ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں جبکہ "زیریں" حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا، تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے کہ یہ "**موزوں**"[۶] خطی جوڑ کیا ہوں گے۔ چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے، لہٰذا ہم اول رتبی توانائیوں (مساوات ۶.۹) کا حساب نہیں کر سکتے۔

اسی لیے، ہم ان "موزوں" غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ (مساوات ۶.۱۷) میں لکھتے ہیں، جہاں α اور β قابل تغیر ہوں گے۔ ہم مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi \tag{۶.۱۹}$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \cdots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda\psi^1 + \lambda^2\psi^2 + \cdots \tag{۶.۲۰}$$

[۶] good linear combinations

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں۔ انہیں مساوات ۶.۱۹ میں ڈال کر (ہمیشہ کی طرح) λ کی ایک جیسی طاقتیں اکٹھی کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \cdots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \cdots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ (مساوات ۶.۱۸) کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے، جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0 \tag{۶.۲۱}$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_a^0|H^0\psi^1\rangle + \langle\psi_a^0|H'\psi^0\rangle = E^0\langle\psi_a^0|\psi^1\rangle + E^1\langle\psi_a^0|\psi^0\rangle$$

چونکہ H^0 ہرمشی ہے، لہٰذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ مساوات ۶.۱۷ کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط (مساوات ۶.۱۶) کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha\langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle + \beta\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \tag{۶.۲۲}$$

حاصل ہو گا جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$W_{ij} \equiv \langle\psi_i^0|H'|\psi_j^0\rangle, \quad (i,j = a,b) \tag{۶.۲۳}$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا۔

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \tag{۶.۲۴}$$

دھیان رہے کہ (اصولاً) ہمیں تمام W معلوم ہیں، چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان قالب ہیں۔ مساوات ۶.۲۴ کو W_{ab} سے ضرب دے کر، مساوات ۶.۲۲ استعمال کرتے ہوئے βW_{ab} کو خارج کر کے، درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\alpha[W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \tag{۶.۲۵}$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات ۶.۲۵ ہمیں E^1 کی مساوات دیگی۔

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \tag{۶.۲۶}$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور (مساوات ۶.۲۳ سے) جانتے ہوئے کہ $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہو گا، ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\,\right] \tag{۶.۲۷}$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے، جہاں دو جذر دو مضطرب توانائیاں ہیں۔

لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہو گا؟ ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہو گا، لہٰذا مساوات ۶.۲۲ کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات ۶.۲۴ کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہو گا۔ یہ درحقیقت عمومی نتیجہ (مساوات ۶.۲۷) میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے (مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہو گا)۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_{+}^1 = W_{aa} = \langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle, \quad E_{-}^1 = W_{bb} = \langle\psi_b^0|H'|\psi_b^0\rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل ہوتے (مساوات ۶.۹)۔ یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے: حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے "موزوں" خطی جوڑ تھے۔ کیا اچھا ہوتا، اگر ہم آغاز سے ہی "موزوں" حالات جان پاتے؛ تب ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے۔ حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں۔

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہرمشی عامل ہے، جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے۔ اگر (H^0 کے انحطاطی امتیازی تفاعلات) ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں، جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں،

$$A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0 \quad \text{اور} \quad \mu \neq \nu \quad \text{ہو}$$

تب $W_{ab} = 0$ ہو گا (لہٰذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں قابل استعمال، "موزوں" حالات ہوں گے)۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے کہ $[A, H'] = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\langle\psi_a^0|[A, H']\psi_b^0\rangle &= 0 \\
&= \langle\psi_a^0|AH'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'A\psi_b^0\rangle \\
&= \langle A\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'\nu\psi_b^0\rangle \\
&= (\mu - \nu)\langle\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle = (\mu - \nu)W_{ab}
\end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہٰذا $W_{ab} = 0$ ہو گا۔

سبق: اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو، ایسا ہرمشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو؛ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائیں۔ ایسے عامل کی تلاش میں ناکامی کی صورت میں آپ کو مساوات ۶.۲۷ استعمال کرنا ہو گا، جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے۔

□

سوال ۶.۶: دو "موزوں" غیر مضطرب حالات

$$\psi^0_\pm = \alpha_\pm\psi^0_a + \beta_\pm\psi^0_b$$

لیں، جہاں $\alpha_\pm$ اور $\beta_\pm$ کو (معمول زنی تک) مساوات ۶.۲۲ (یا مساوات ۶.۲۴) تعین کرتا ہے۔ صریحاً درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\psi^0_\pm$ عمودی ہیں: $(\langle\psi^0_+|\psi^0_-\rangle = 0)$ ؛

ب. $\langle\psi^0_+|H'|\psi^0_-\rangle = 0$ ؛

ج. $\langle\psi^0_\pm|H'|\psi^0_\pm\rangle = E^1_\pm$ جہاں $E^1_\pm$ کی قیمت مساوات ۶.۲۷ دیتی ہے۔

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ، جس کی کمیت m ہے، ایک بند یک بعدی تار، جس کی لمبائی L ہے، پر آزادی سے حرکت کرتا ہے (سوال ۲.۴۶)۔

ا. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{2\pi inx/L}, \qquad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{2}{m}\Big(\frac{n\pi\hbar}{L}\Big)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $(n = 0)$ کے علاوہ تمام حالات دہرے انحطاطی ہیں۔

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہے۔ (یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں ایک ٹویا پیدا کرتا ہے، گویا تار کو مروڑ کر پکڑ بنایا گیا ہو۔) مساوات ۶.۲۷ استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمل کی حدوں کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm\infty$ رکھیں۔

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کے "موزوں" خطی جوڑ کیا ہوں گے؟ دکھائے کہ ان حالات کو لے کر، مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے، اول رتبی تصحیح حاصل ہو گی۔

د. ایسا ہرمشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو، اور دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہیں جنہیں آپ نے جزو-ج میں استعمال کیا۔

۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط

گزشتہ حصہ میں انحطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا، تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶.۲۲ اور مساوات ۶.۲۴ کو ہم قالبی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{۶.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ E^1 W، قالب کے امتیازی اقدار ہیں۔ مساوات ۶.۲۶ اس قالب کی امتیازی مساوات ہے، اور غیر مضطرب حالات کے "موزوں" خطی جوڑ $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم n پڑتا انحطاط کی صورت میں $n \times n$ قالب:

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle \tag{۶.۲۹}$$

کے امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ الجبرا کی زبان میں "موزوں" غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسی اساس تیار کرنا ہے جو قالب $\mathbf{W}$ کو وتری بناتی ہو۔ یہاں بھی اگر آپ ایسا عامل A تلاش کر سکیں، جو H' کا مقلوبی ہو، اور A اور H' کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر سکیں تو قالب W خود بخود وتری ہوگا، لہٰذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی۔[۷] (اگر آپ کو میری دو پڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تو سوال ۶.۱۰ حل کر کے اپنی تسلی کر لیں۔)

مثال ۶.۲: تین ابعادی لامتناہی کعبی کنویں (سوال ۴.۲):

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۰}$$

پر غور کریں۔ ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$\psi^0_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\!\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \sin\!\left(\frac{n_y\pi}{a}y\right) \sin\!\left(\frac{n_z\pi}{a}z\right) \tag{۶.۳۱}$$

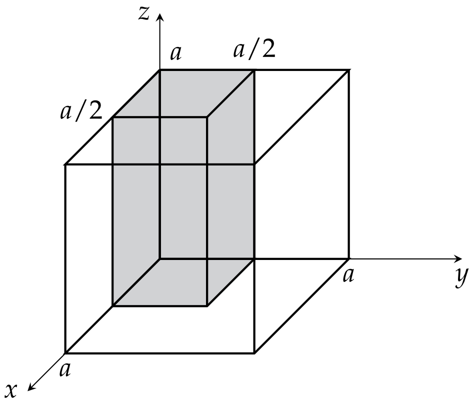
جہاں n_x، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں۔ ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں۔

$$E^0_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{۶.۳۲}$$

دھیان رہے کہ زمینی حال (ψ_{111}) غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے۔

$$E_1^0 \equiv 3\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{۶.۳۳}$$

[۷] انحطاطی نظریہ اضطراب، درحقیقت، ہیملٹنی کے انحطاطی حصہ کو وتری بنانے کے مترادف ہے۔ قوالب کا وتری بنانا (اور مقلوبی قوالب کا بیک وقت وتری بنانا) ضمیمہ کے حصہ ا.۵ میں سکھایا گیا ہے۔



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

تاہم پہلا ہیجان حال (تہرا) انحطاطی ہے:

$$\psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211} \tag{۶.۳۴}$$

اور ان تینوں کی توانائی:

$$E_1^0 \equiv 3\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} \tag{۶.۳۵}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۶}$$

جو ڈبے کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات ۶.۹ دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle\psi_{111}|H'|\psi_{111}\rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right)\mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4}V_0 \end{aligned} \tag{۶.۳۷}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔

اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہو گی۔ پہلے قدم میں ہم قالب $\mathbf{W}$ تیار کرتے ہیں۔ اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں (سوائے اس بات کے، کہ ان میں

سے ایک سائن کا دلیل دگنا ہے)؛ آپ درج ذیل کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4}V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہیں۔

$$W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z$$

تاہم z تکمل صفر ہوگا (جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا)، لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z = \frac{16}{9\pi^2}V_0$$

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے۔

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \tag{۶.۳۸}$$

قالب $\mathbf{W}$ بلکہ $4\,\mathbf{W}\,/\,V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات (ضمیمہ ۱.۵ کے تحت):

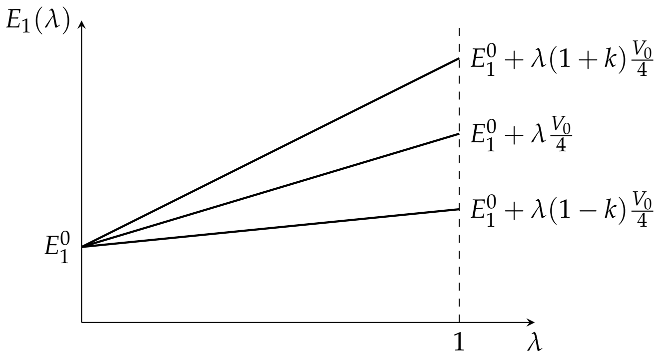
$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگی۔

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1+\kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1-\kappa \approx 0.2795$$



شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہو گا

$$E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases} \tag{۶.۳۹}$$

جہاں E_1^0 (مشترکہ) غیر مضطرب توانائی (مساوات ۶.۳۵) ہے۔ یہ اضطراب، توانائی E_1^0 کو تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ اگر ہم بھول کر اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) تینوں حالات کے لئے ایک جتنی اور $V_0/4$ کے برابر ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے۔

مزید "موزوں" غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہونگے

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c \tag{۶.۴۰}$$

جہاں عددی سر (α، β اور γ) قالب $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1$، $\beta = \gamma = 0$؛ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0$، $\beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$

حاصل ہوتے ہیں۔ (میں نے انہیں معمول شدہ کیا ہے۔) یوں "موزوں" حالات درج ذیل ہونگے۔[۸]

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{۶.۴۱}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں (مساوات ۶.۳۰) میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تفاعلی "موڑا":

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4)\delta(y - a/2)\delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور (تہرا انحطاطی) اول ہیجان حال کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف "تین" خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں۔ فرض کریں قالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے، اور ϵ کوئی چھوٹا عدد $(\epsilon \ll 1)$ ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی $(\epsilon = 0)$ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں۔

ب. قالب $\mathbf{H}$ کے ٹھیک ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں۔ ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں۔

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کا جزو-ا کے ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

[۸] یہ جانتے ہوئے کہ H' کے ساتھ، x اور y کو آپس میں تبدیل کرنے والا عامل، P_{xy} مقلوب ہے، ہم اس نتیجے کو قیاساً معلوم کر سکتے تھے۔ اس کے امتیازی اقدار (زیر تبدیلی جفت تفاعلوں کے لئے) $+1$ اور (طاق تفاعلات کے لئے) -1 ہے۔ یہاں ψ_a پہلے سے جفت ہے، $(\psi_b + \psi_c)$ جفت اور $(\psi_b - \psi_c)$ طاق ہے۔ یہ فیصلہ کن نہیں ہے، چونکہ جفت حالات کا ہر ایک خطی جوڑ جفت ہو گا۔ لیکن، اگر ہم عامل Q بھی استعمال کریں، جو z کو $a - z$ منتقل کرتا ہو، اور یہ جانتے ہوں کہ ψ_a ایسا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قدر -1 ہے اور باقی دو امتیازی تفاعلات کی امتیازی قدر $+1$ ہے، ابہام دور ہو جاتا ہے۔ یہاں عاملین P_{xy} اور Q مل کر، حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں A کا کردار ادا کرتے ہیں۔

د. دو ابتدا میں انحطاطی امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریہ اضطراب سے تلاش کریں۔ ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کی اول رتبی تصحیح، قالب W کی امتیازی اقدار ہوں گی۔ میں نے اس دعوے کی وجہ یہ پیش کی کہ یہ $n = 2$ صورت کی "قدرتی" عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ ۶.۲.۱ کے قدموں پر چل کر، درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات ۶.۱۷ کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات ۶.۲۲ کے مماثل کا مفہوم قالب $\mathbf{W}$ کی امتیازی قدر مساوات لی جا سکتی ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر (حصہ ۴.۲) کے مطالعہ کے دوران ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۶.۴۲}$$

(جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولمب مخفی توانائی ہے)۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے۔ ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ زیادہ اہم **مہین ساخت**[۹] ہے، جو در حقیقت دو منفرد وجوہات، **اضافیتی تصحیح**[۱۰] اور **چکر و مدار ربط**[۱۱]، کی بنا پر پیدا ہوتی ہے۔ بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کے لحاظ سے مہین ساخت، α^2 جزو ضربی کم، نہایت چھوٹا اضطراب ہے، جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \tag{۶.۴۳}$$

مہین ساخت مستقل[۱۲] کہلاتا ہے۔ اس سے بھی (مزید α جزو ضربی) چھوٹا **لیمب انتقال**[۱۳] ہے، جو برقی میدان کی کوانٹازنی سے وابستہ ہے، اور اس سے مزید ایک رتبہ کم، **نہایت مہین ساخت**[۱۴] کہلاتی ہے، جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول ۶.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے۔ سوال ۶.۱۱:

---

[۹] fine structure
[۱۰] relativistic correction
[۱۱] spin-orbit coupling
[۱۲] fine structure constant
[۱۳] Lamb shift
[۱۴] hyperfine structure

جدول ۶.۱: ہائیڈروجن کی بوہر توانائیوں میں تصحیح کی درجہ بندی۔

بوہر توانائی:	کا رتبہ	$\alpha^2 mc^2$
مہین ساخت:	کا رتبہ	$\alpha^4 mc^2$
لیمب انتقال:	کا رتبہ	$\alpha^5 mc^2$
نہایت مہین ساخت:	کا رتبہ	$(m/m_p)\alpha^4 mc^2$

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی (mc^2) کی صورت میں لکھیں۔

ب. (ϵ_0 ، e ، $\hbar$ اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر) مہین ساخت مستقل کی قیمت بنیادی اصول استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ تبصرہ: پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ خالص (بے بعدی) بنیادی عدد ہے۔ یہ برقناطیسیت (الیکٹران کا بار)، اضافیت (روشنی کی رفتار) اور کوانٹائی میکانیات (پلانک مستقل) کے بنیادی مستقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے۔ اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں، یقیناً آپ کو نوبیل انعام سے نوازا جائے گا۔ البتہ میرا مشورہ ہو گا کہ اس پر زیادہ وقت ضائع نہ کریں؛ (اب تک) بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں۔

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{۶.۴۴}$$

جس میں باضابطہ متبادل $\boldsymbol{p} \to (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہو گا۔

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{۶.۴۵}$$

تاہم مساوات ۶.۴۴ حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے؛ اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \tag{۶.۴۶}$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے (جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے، اور جس سے ہمیں فی الحال غرض بھی نہیں ہے)، جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے؛ ان کے فرق کو حرکت سے منسوب کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں سمتی رفتار کی بجائے (اضافیتی) معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۶.۴۷}$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہو گا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1-(v/c)^2]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \tag{۶.۴۸}$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حر کی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتیجہ (مساوات ۶.۴۴) دیتی ہے؛ ایک چھوٹے عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} T &= mc^2\Big[\sqrt{1+\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2} - 1\Big] = mc^2\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2 - \frac{1}{8}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^4 \cdots - 1\Big] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots \end{aligned} \tag{۶.۴۹}$$

ظاہر ہے کہ ہیملٹنی کی سب سے کم رتبی[۱۵] اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے۔

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2} \tag{۶.۵۰}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہو گی (مساوات ۶.۹)۔

$$E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\psi | p^2\psi \rangle \tag{۶.۵۱}$$

اب (غیر مضطرب حالات کے لئے) مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

$$p^2\psi = 2m(E-V)\psi \tag{۶.۵۲}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔[۱۶]

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle (E-V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2}[E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle] \tag{۶.۵۳}$$

---

[۱۵] چونکہ ہائیڈروجن میں الیکٹران کی حر کی توانائی کا رتبہ $10\,\mathrm{eV}$ ہے، جو اس کی ساکن توانائی $(511\,000\,\mathrm{eV})$ سے بہت کم ہے، لہٰذا ہائیڈروجن جوہر بنیادی طور پر غیر اضافیتی ہے اور یوں ہم صرف سب سے کم رتبی تصحیح رکھ سکتے ہیں۔ مساوات ۶.۴۹ میں p اضافیتی معیار حرکت (مساوات ۶.۴۷) ہے نا کہ کلاسیکی معیار حرکت (mv)۔ ہم مساوات ۶.۵۰ میں اب کوانٹائی عامل $-i\hbar\nabla$ کے ساتھ اول الذکر منسلک کرتے ہیں۔

[۱۶] یہاں، ہم نے p^2 اور $(E-V)$ کی ہرمشی پن استعمال کی جو درست نہیں ہے۔ در حقیقت ان حالات کے لئے جن کا $l = 0$ ہو عامل p^4 غیر ہرمشی ہو گا (سوال ۶.۱۵)، اور مساوات ۶.۵۰ پر ($l = 0$ کی صورت میں) نظریہ اضطراب کا اطلاق شک سے خالی نہیں ہو گا۔ خوش قسمتی سے، ہمیں ٹھیک ٹھیک جواب معلوم ہے؛ جسے (غیر اضافیتی) مساوات شروڈنگر کی بجائے (اضافیتی) مساوات ڈیراک استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، اور جو یہاں سرسری انداز میں حاصل نتیجہ کی تصدیق کرتا ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے؛ تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $V(r) = (-1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle\Big] \tag{۶.۵۴}$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی ہے۔

یہ کام مکمل کرنے کی خاطر، ہمیں (غیر مضطرب) حال ψ_{nlm} (مساوات ۴.۸۹) میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی۔ ان میں سے پہلا دریافت کرنا آسان ہے (سوال ۶.۱۲ دیکھیں):

$$\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle = \frac{1}{n^2a} \tag{۶.۵۵}$$

جہاں a رداس بوہر (مساوات ۴.۷۲) ہے۔ دوسرا اتنا آسان نہیں ہے (سوال ۶.۳۳ دیکھیں)، تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے۔[۱۷]

$$\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3a^2} \tag{۶.۵۶}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\frac{1}{n^2a} + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{(l+1/2)n^3a^2}\Big]$$

یا (مساوات ۴.۷۲ استعمال کرتے ہوئے) a کو خارج کر کے، (مساوات ۴.۷۰ استعمال کر کے) تمام کو E_n کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big[\frac{4n}{l+1/2} - 3\Big] \tag{۶.۵۷}$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2\times10^{-5}$ جزو ضربی کم ہے۔

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے، میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا (مساوات ۶.۵۱)۔ لیکن یہاں اضطراب کروی تشاکلی ہے، لہٰذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہو گا۔ مزید کسی E_n کے n^2 حالات کے لئے ان (ایک ساتھ تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کی منفرد امتیازی اقدار ہوں گی۔ یوں خوش قسمتی سے، تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے "موزوں" حالات ہوں گے (یا جیسا ہم کہتے ہیں n، l اور m **موزوں کوانٹائی اعداد**[۱۸] ہیں)، لہٰذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال قانوناً درست تھا (حصہ ۶.۲.۱ کے آخر میں سبق دیکھیں)۔

---

[۱۷] متغیر r کے کسی بھی طاقت کی توقعاتی قیمت کا عمومی کلیہ موجود ہے۔
[۱۸] good quantum numbers

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل (سوال ۴.۴۰) استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۵۵ ثابت کریں۔

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴.۴۳ میں حال ψ_{321} میں r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی۔ اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر سا کام)، $s = -1$ (مساوات ۶.۵۵)، $s = -2$ (مساوات ۶.۵۶)، اور $s = -3$ (مساوات ۶.۶۴) کے لیے کریں۔ اس پر تبصرہ کریں کہ $s = -7$ کی صورت میں کیا ہو گا۔

سوال ۶.۱۴: یک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے (سب سے کم رتبی) اضافیتی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں۔

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہرمشی اور p^4 غیر ہرمشی ہے۔ ایسے حالات کے لئے ψ، متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا (مساوات ۴.۱۳)۔

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle f|p^2 g\rangle = -4\pi\hbar^2\left(r^2 f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - r^2 g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^\infty + \langle p^2 f|g\rangle$$

تصدیق کریں کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہو گا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}}e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں، اور دکھائیں کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہوں گے۔ در حقیقت درج ذیل ہو گا۔

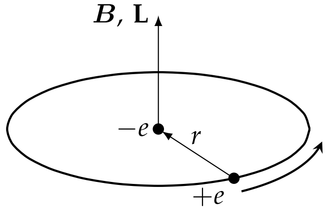
$$\langle\psi_{n00}|p^4\psi_{m00}\rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4}\frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4\psi_{n00}|\psi_{m00}\rangle$$

۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں؛ الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوکٹ میں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ پیدا کرتا ہے، جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر قوت مروڑ پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر (μ) کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس کی ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵۷) درج ذیل ہے۔

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{۶.۵۸}$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان $(\boldsymbol{B})$ اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر $(\boldsymbol{\mu})$ درکار ہو گا۔



شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

پروٹان کا مقناطیسی میدان۔ ہم (الیکٹران کے نقطہ نظر سے) پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے، اس کے مقناطیسی میدان کو بایوٹ وسیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے، جہاں e پروٹان کا بار، اور T دائرے پر ایک چکر کا دوری عرصہ ہے۔ اس کے برعکس، $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ (مرکزہ کے ساکن چوکٹ میں) الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ مزید، $\boldsymbol{B}$ اور $\mathbf{L}$ دونوں کا رخ ایک جیسا ہوگا (شکل ۶.۷ میں اوپر جانب)، لہٰذا

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\,\mathbf{L} \tag{۶.۵۹}$$

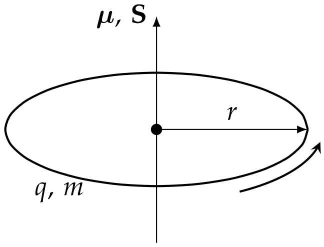
لکھا جا سکتا ہے (جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے)۔

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار حرکت۔ چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اس کے (چکری) زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے؛ مسکن مقناطیسی نسبت (جسے ہم حصہ ۴.۴.۱ میں دیکھ چکے ہیں)، ان کے بیچ تناسبی جزو ضربی ہوگا۔ آئیں اس مرتبہ، کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے، اسے اخذ کرتے ہیں۔ ایک ایسا بار q جس کی لپائی رداس r کے چھلا پر کی گئی ہو، اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو، پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف، رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے۔

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلے کی کمیت m ہو، جمودی معیار اثر (mr^2) ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت، S، ہوگا۔

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

اس تشکیل کے لیے ظاہر ہے کہ مسکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہو گا۔ دھیان رہے کہ یہ r (اور T) کا تابع نہیں ہے۔ اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل کا جسم ہوتا، مثلاً ایک کرہ (صرف اتنا ضروری ہے کہ یہ اپنے محور کے گرد گھومتا ہوا شکل طواف ہو)، میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے، تمام چھلوں کی پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کی قیمتیں معلوم کر پاتا۔ جب تک کمیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو (تاکہ بار اور کمیت کی نسبت یکساں ہو)، ہر چھلے کا اور لہٰذا پورے جسم کا مسکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہو گا۔ مزید، $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کے رخ ایک جیسے (یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف) ہوں گے، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right)\mathbf{S}$$

یہ خالصتاً کلاسیکی حساب ہے، درحقیقت، الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کی کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے۔

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m}\,\mathbf{S} \tag{۶.۶۰}$$

ڈیراک نے الیکٹران کی (اپنے) اضافیتی نظریہ میں "اضافی" جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے۔[۱۹]

ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$$

اس حساب میں ایک فریب سے کام لیا گیا ہے: میں نے الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں تجزیہ کیا، جو ایک غیر جمودی نظام ہے؛ چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے، لہٰذا یہ چھوکٹ اسراع

[۱۹] ہم دیکھ چکے ہیں کہ الیکٹران کو محور کے گرد چکر کاٹتا ہوا کرہ تصور کرنا، خطرے سے باہر نہیں ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ سادہ لوح کلاسیکی نمونہ، مسکن مقناطیسی نسبت کی غلط قیمت دیتا ہے۔ کلاسیکی توقعات سے حاصل قیمت کو g **جزو ضربی** کہتے ہیں: $\boldsymbol{\mu} = g(q/2m)\mathbf{S}$، لہٰذا نظریہ ڈیراک میں g جزو ضربی کی قیمت ٹھیک 2 ہے۔ لیکن **کوانٹائی برقی حرکیات** اس میں معمولی تصحیح دیتی ہے: **بے ضابطہ مقناطیسی معیار اثر**، g_e کی قیمت دراصل $2.002\ldots = \ldots + (\alpha/\pi) + 2$ ہے۔ اس کا حساب اور اس کی پیمائش (جو آپس میں شاندار حتمیت تک متفق ہیں) بیسویں صدی طبیعیات کی اہم ترین کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

پذیر ہو گا۔ اس حساب میں مجرد حرکیات تصحیح، جسے **طامس استقبالی حرکت**[20] کہتے[21] ہیں، شامل کر کے قبول کیا جا سکتا ہے، جو حساب میں جز و ضربی $1/2$ شامل کرتا ہے۔[22]

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \tag{۶.۶۱}$$

یہ **چکر و مدار باہم عمل**[23] ہے؛ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ مسکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت جز و ضربی جو اتفاقاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) کے، یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ سادہ لوح کلاسیکی نمونے سے حاصل کرتے ہیں۔ طبعی طور پر، یہ الیکٹران کے لمحاتی ساکن چھوکٹ میں، چکر کاٹتے ہوئے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر، پروٹان کے مقناطیسی میدان کی قوت مروڑ کے بدولت ہے۔

اب کوانٹائی میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا، لہٰذا چکر اور مداری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے (سوال ۶.۱۶ دیکھیں)۔ البتہ، L^2، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت:

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{۶.۶۲}$$

کے ساتھ H'_{so} مقلوب ہو گا، لہٰذا یہ مقداریں بقائی ہوں گی (مساوات ۴.۷۱ اور اس کے نیچے پیرا گراف دیکھیں)۔ دوسرے لفظوں میں، L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے "موزوں" حالات نہیں ہیں، جبکہ L^2، S^2، J^2، اور J_z کے امتیازی حالات "موزوں" حالات ہیں۔ اب

$$J^2 = (\mathbf{L}+\mathbf{S})\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \tag{۶.۶۳}$$

ہو گا لہٰذا $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ کی امتیازی اقدار درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

---

[20] Thomas precession

[21] سوچنے کا ایک انداز یہ ہو گا کہ آپ تصور کریں کہ الیکٹران مستمر انداز میں ایک ساکن نظام سے دوسرے ساکن نظام میں قدم رکھتا ہے؛ ان لورینز تبادلہ کے مجموعی اثر کو طامس استقبالی حرکت بیان کرتا ہے۔ ہم تجربہ گاہ کی چھوکٹ میں، جہاں پروٹان ساکن ہے، رہ کر اس پوری مصیبت سے نجات حاصل کر سکتے تھے۔ ایسی صورت میں، پروٹان کا میدان خالصتاً برقی ہو گا، اور آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ الیکٹران پر قوت مروڑ کیسا پیدا کرتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ حرکت پذیر مقناطیسی جفت قطب، برقی جفت قطب معیار اثر اختیار کرتا ہے، اور تجربہ گاہ کے چھوکٹ میں مرکزہ کے برقی میدان اور الیکٹران کے برقی جفت قطب معیار اثر کے بیچ باہم عمل، چکر و مدار ربط کا باعث بنتا ہے۔ چونکہ اس تجزیہ کے لئے زیادہ پیچیدہ برقی حرکیات درکار ہو گا لہٰذا بہتر یہی ہے کہ ہم الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں کام کریں جہاں طبعی پہلو زیادہ واضح ہے۔

[22] یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ طامس استقبالی حرکت g جز و ضربی سے 1 منفی کرتا ہے۔

[23] spin-orbit interaction

یہاں یقیناً $s = 1/2$ ہے۔ مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت (سوال ۶.۳۵-ج دیکھیں)

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \tag{۶.۶۴}$$

ہے، لہٰذا

$$E^1_{so} = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا، تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہوئے، درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔[۲۴]

$$E^1_{so} = \frac{(E_n)^2}{mc^2}\left\{\frac{n[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)}\right\} \tag{۶.۶۵}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ، بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود، اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چکر و مدار ربط (مساوات ۶.۶۵) ایک جتنا رتبہ (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں۔ انہیں جمع کرکے، ہمیں مکمل مہین ساخت کلیہ:

$$E^1_{fs} = \frac{(E_n)^2}{2mc^2}\left(3 - \frac{4n}{j+1/2}\right) \tag{۶.۶۶}$$

(سوال ۶.۱۷ دیکھیں) حاصل ہوتا ہے۔ اسے کلیہ بوہر کے ساتھ ملا کر، ہم ہائیڈروجن توانائی سطحوں کا عظیم نتیجہ:

$$E_{nj} = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2}\right)\right] \tag{۶.۶۷}$$

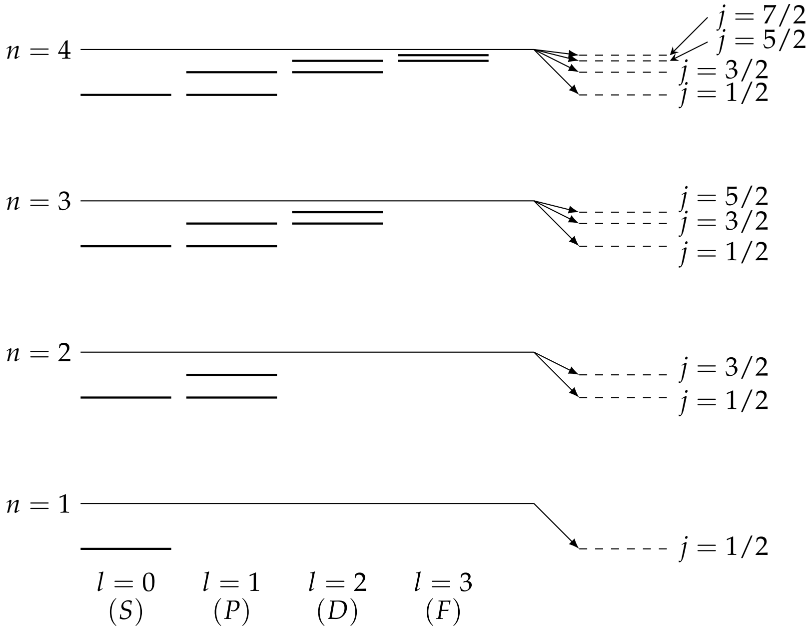
حاصل کرتے ہیں، جس میں مہین ساخت شامل ہے۔

مہین ساخت l میں انحطاط توڑتی ہے (یعنی کسی ایک n کیلئے، l کی مختلف اجازتی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہونگی)، تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتی ہے (شکل ۶.۹ دیکھیں)۔ مداری اور چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی اقدار (m_l اور m_s) اب "موزوں" کوانٹائی اعداد نہیں ہونگے؛ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے؛ "موزوں" کوانٹائی اعداد n، l، s، j، اور m_j ہونگے۔[۲۵]

---

[۲۴] یہاں بھی، $l = 0$ کی صورت میں ہمیں مسئلہ درپیش ہوگا، چونکہ ہم بظاہر صفر سے تقسیم کرتے ہیں۔ ساتھ ہی، اس صورت میں $j = s$ کی بنا پر، شمار کنندہ بھی صفر ہے، لہٰذا مساوات ۶.۶۵ غیر تعیین ہوگا۔ طبعی بنیادوں پر $l = 0$ کی صورت میں چکر و مدار ربط ہونا ہی نہیں چاہیے۔ اس ابہام کو دور کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم جزو ڈارون متعارف کریں۔ غیر متوقع طور پر، اگرچہ اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چکر و مدار ربط (مساوات ۶.۶۵) دونوں $l = 0$ کی صورت میں شک سے مبرا نہیں ہیں، ان کا مجموعہ (مساوات ۶.۶۶) تمام l کے لئے درست ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

[۲۵] کسی l اور s کے لئے، $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھنے کی خاطر ہمیں مناسب کلیبش و گورڈن عددی سر (مساوات ۴.۱۸۵) استعمال کرنے ہوں گے۔



شکل ۶.۹: ہائیڈروجن کی سطحیں توانائی، جن میں مہین ساخت شامل ہے (درست پیمانے کے مطابق نہیں ہے)۔

سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں۔ (الف) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{L}]$، (ب) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{S}]$، (ج) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{J}]$، (د) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},L^2]$، (ہ) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},S^2]$، (و) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},J^2]$؛ اشارہ: $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۹۹ اور مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں، لیکن یہ ایک دوسرے کے ساتھ مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چکر و مدار ربط (مساوات ۶.۶۵) سے مہین ساخت کلیہ (مساوات ۶.۶۶) اخذ کریں۔ اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ (مساوات ۶.۶۲) ہے؛ مثبت اور منفی علامت کو باری باری لیں، آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں ایک جیسا نتیجہ حاصل ہو گا۔

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن طیف کے مرئی خطہ میں سرخ بالمر لکیر نمایاں ترین ہے، جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے۔ سب سے پہلے، اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں۔ مہین ساخت اس لکیر کو قریب قریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتی ہے؛ اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہو گی اور ان کے بیچ فاصلہ کتنا ہو گا؟ اشارہ: پہلے قدم میں، معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنے ذیلی سطحوں میں تقسیم ہو گا، اور ہر ایک کے لیے، eV میں، E^1_{fs} تلاش کریں۔ یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں۔ سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں۔ توانائی کا اخراج (نوریہ کی صورت میں) $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہو گا، جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ (مہین ساخت کی پیدا) ΔE کی قیمت ہر منتقلی کے لئے بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو (eV میں) تلاش کریں۔ آخر میں، تعدد نوریہ میں تبدیل کر کے، ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بیچ فاصلہ (Hz کی صورت میں) تعین کریں؛ یہ ہر لکیر اور غیر مضطرب لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ نہیں (جو یقیناً، قابل مشاہدہ نہیں)، بلکہ یہ ہر لکیر اور اس سے اگلی لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ ہو گا۔ آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے: "سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے۔ بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $(???) = j$ سے $(???) = j$، 2 $(???) = j$ سے $(???) = j$، ... ہونگے۔ لکیر 1 اور لکیر 2 کے بیچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے، لکیر 2 اور لکیر 3 کے بیچ فاصلہ ??? Hz ہے، ...۔"

سوال ۶.۱۹: مساوات ڈیراک سے (نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر) ہائیڈروجن کے مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$E_{nj} = mc^2\left\{\left[1+\Big(\frac{\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}}\Big)^2\right]^{-1/2}-1\right\}$$

اس کو (یہ جانتے ہوئے کہ $\alpha \ll 1$ ہے) a^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ مساوات ۶.۶۷ حاصل ہوتا ہے۔

۶.۴ زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}}$ میں رکھنے سے، اس کی توانائی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ اس مظہر کو **زیمان اثر**[۲۶] کہتے ہیں۔ واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہو گا

$$H'_z = -(\boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s) \cdot \boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}} \tag{۶.۶۸}$$

جہاں

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\,\mathbf{S} \tag{۶.۶۹}$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اور

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m}\,\mathbf{L} \tag{۶.۷۰}$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت قطب معیار اثر ہے۔[۲۷] یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H'_z = \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}} \tag{۶.۷۱}$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان (مساوات ۶.۵۹)، جو چکر و مدار ربط پیدا کرتا ہے، کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہو گی۔ اگر $B_{\text{اندرونی}} \ll B_{\text{بیرونی}}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہو گی، اور H' کو ایک چھوٹا اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے، جبکہ $B_{\text{اندرونی}} \gg B_{\text{بیرونی}}$ کی صورت میں زیمان اثر غالب ہو گا، اور مہین ساخت اضطراب تصور کی جائے گی۔ ان خطوں کے بیچ، جہاں دونوں میدان مد مقابل ہوں گے، ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہو گی، اور ہیملٹنی کے متعلقہ حصے کو "ہاتھ سے" وتری بنانا لازم ہو گا۔ درج ذیل حصوں میں ہائیڈروجن کے لئے ہم ان تینوں صورتوں پر غور کریں گے۔

سوال ۶.۲۰: ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت، مساوات ۶.۵۹ استعمال کرتے ہوئے، تلاش کر کے "طاقتور" اور "کمزور" زیمان میدان کی مقداری تصویر کشی کریں۔

۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر $B_{\text{اندرونی}} \gg B_{\text{بیرونی}}$ ہو تب مہین ساخت (مساوات ۶.۶۷) غالب ہو گی، اور "موزوں" کوانٹائی اعداد n، l، j، اور m_j ہوں گے (تاہم، چکر و مدار ربط کی موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے، لہٰذا m_l اور m_s

[۲۶] Zeeman effect

[۲۷] مداری حرکت کے لئے کلاسیکی قیمت $(q/2m)$ ہی مسکن مقناطیسی نسبت ہو گی؛ صرف چکر کی صورت میں 2 کا "اضافی" جزو ضربی پایا جاتا ہے۔

"موزوں" کوانٹائی اعداد نہیں ہوں گے)۔[۲۸] رتبہ اول نظریہ اضطراب میں زیمان توانائی میں تصحیح درج ذیل ہو گی۔

$$E_Z^1 = \langle nljm_j | H_Z' | nljm_j \rangle = \frac{e}{2m} \boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}} \cdot \langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \rangle \tag{۶.۷۲}$$

اب $\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \;=\; \mathbf{J} + \mathbf{S}$ ہو گا۔ بدقسمتی سے، ہمیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے۔ لیکن ہم درج ذیل طریقہ سے اسے جان سکتے ہیں: کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} \;=\; \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۱۰)؛ اس مقررہ سمتیہ کے گرد $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں۔ بالخصوص، $\mathbf{J}$ پر $\mathbf{S}$ کی قائمہ تظلیل، $\mathbf{S}$ کی (وقتی) اوسط قیمت:

$$\mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{J^2} \mathbf{J} \tag{۶.۷۳}$$

ہو گی۔ لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$ ہے، لہٰذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ اور یوں

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \tag{۶.۷۴}$$

ہو گا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{J^2}\right) \mathbf{J} \right\rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\right] \langle \mathbf{J} \rangle \tag{۶.۷۵}$$

چوکور قوسین میں بند رکن کو **لنڈے g جزو ضربی**[۲۹] کہتے ہیں جس کو g_J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم محور z کو $\boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}}$ کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں؛ تب

$$E_Z^1 = \mu_B g_J B_{\text{بیرونی}} m_j \tag{۶.۷۶}$$

ہو گا، جہاں

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5}\,\text{eV/T} \tag{۶.۷۷}$$

بوہر مقناطیسہ[۳۰] کہلاتا ہے۔ مہین ساخت (مساوات ۶.۶۷) اور زیمان (مساوات ۶.۷۶) حصوں کا **مجموعہ کل** توانائی دے گا۔ مثال کے طور پر، زمینی حال ($n = 1$ ، $l = 0$ ، $j = 1/2$ لہٰذا $g_J = 2$) دو سطحوں:

$$\underbrace{-13.6\,\text{eV}(1 + \alpha^2/4)}_{\text{مساوات ۶.۶۷}} \; \underbrace{\pm \mu_B B_{\text{بیرونی}}}_{\text{مساوات ۶.۷۶}} \tag{۶.۷۸}$$

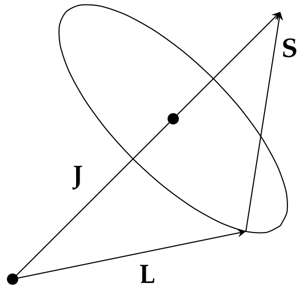
میں بٹ جائے گا، جہاں $m_j \;=\; 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j \;=\; -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہو گی۔ ان توانائیوں کو ($B_{\text{بیرونی}}$ کے تفاعل کے طور پر) شکل ۶.۱۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

---

[۲۸] یہاں ایک اضطراب (زیمان بٹوارا) کے اوپر دوسرا اضطراب (مہین ساخت) انبار ہے۔ "موزوں" کوانٹائی اعداد وہ ہوں گے جو غالب اضطراب، جو موجودہ مسئلہ میں مہین ساخت ہے، کے لئے درست ہوں۔ ثانوی اضطراب (زیمان بٹوارا) J_Z میں، جو یہاں حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں عامل A کا کردار ادا کرتا ہے، باقی انحطاط اٹھاتا ہے۔ عامل J_z تکنیکی لحاظ سے H_Z' کے ساتھ غیر مقلوبی ہے، تاہم مساوات ۶.۷۳ کی وقتی اوسط نقطہ نظر سے یہ مقلوبی ہوں گے۔

[۲۹] Lande g-factor

[۳۰] Bohr magneton



شکل ۶.۱۰: چکر و مدار ربط کی عدم موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J}$ کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں۔ کمزور میدان زیمان بٹوارے کی صورت میں ہر ایک حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۱ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں $B_{\text{بیرونی}}$ بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے۔ ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر

اگر $B_{\text{اندرونی}} \gg B_{\text{بیرونی}}$ ہو، تب زیمان اثر غالب ہوگا؛[۳۱] میدان $B_{\text{بیرونی}}$ کو z محور پر رکھ کر "موزوں" کوانٹائی اعداد n، l، m_l، اور m_s ہونگے (جبکہ j اور m_j نہیں ہونگے، چونکہ بیرونی قوت مروڑ کی صورت میں کل زاویائی معیار حرکت بقائی نہیں ہوگا، جبکہ L_z اور S_z بقائی ہونگے)۔ زیمان ہیملٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{\text{بیرونی}} (L_z + 2S_z)$$

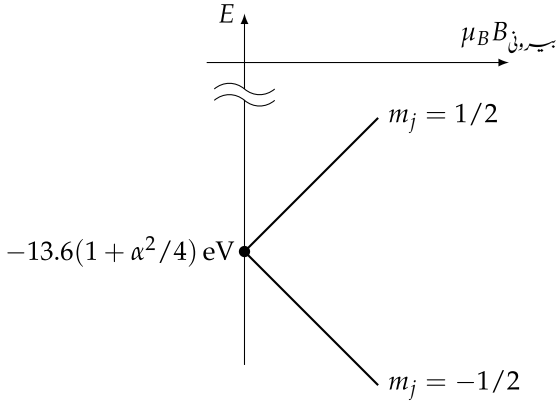
ہوگا، جبکہ "غیر مضطرب" توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{nm_lm_s} = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2} + \mu_B B_{\text{بیرونی}} (m_l + 2m_s) \tag{۶.۷۹}$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہوگا۔ تاہم ہم اس سے بہتر جواب حاصل کر سکتے ہیں۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہو گی۔

$$E^1_{fs} = \langle nlm_lm_s|(H'_r + H'_{so})|\rangle nlm_lm_s\rangle \tag{۶.۸۰}$$

[۳۱] ایسی صورت میں زیمان اثر کو پاشن و بیک اثر بھی کہتے ہیں۔



شکل ۶.۱۱: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا کمزور میدانی زیمان بٹوارا؛ بالائی لکیر $(m_j = 1/2)$ کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر $(m_j = -1/2)$ کی ڈھلوان -1 ہے۔

اضافیتی حصہ وہی ہو گا جو پہلے تھا (مساوات ۶.۵۷)؛ چکر و مدار جزو (مساوات ۶.۶۱) کے لیے ہمیں

$$\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\rangle = \langle S_x\rangle\langle L_x\rangle + \langle S_y\rangle\langle L_y\rangle + \langle S_z\rangle\langle L_z\rangle = \hbar^2 m_l m_s \tag{۶.۸۱}$$

درکار ہو گا (یاد رہے S_z اور L_z کے امتیازی تفاعلات کے لیے $\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = \langle L_x\rangle = \langle Ly\rangle = 0$ ہو گا)۔ ان تمام کو اکٹھے کر کے (سوال ۶.۲۲) ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$E^1_{fs} = \frac{13.6\,\text{eV}}{n^3}\alpha^2\left\{\frac{3}{4n} - \left[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)}\right]\right\} \tag{۶.۸۲}$$

(چوکور قوسین میں جزو، $l = 0$ کے لئے غیر تعیین ہے؛ اس صورت میں اس کی درست قیمت 1 ہے؛ سوال ۶.۲۴ دیکھیں۔) زیمان (مساوات ۶.۷۹) اور مہین ساخت (مساوات ۶.۸۲) حصوں کا مجموعہ کل توانائی دے گا۔

سوال ۶.۲۲: مساوات ۶.۸۰ سے آغاز کر کے مساوات ۶.۵۷ ، مساوات ۶.۶۱، مساوات ۶.۶۴، اور مساوات ۶.۸۱ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۸۲ اخذ کریں۔

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_l m_s\rangle$ پر غور کریں۔ طاقتور میدان زیمان بٹوارا کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کریں۔ اپنے جواب کو بوہر توانائی، (α^2 کے راست متناسب) مہین ساخت، اور ($\mu_B B_{\text{بیرونی}}$ کے راست متناسب) زیمان حصہ کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔ مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے، منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہو گی، اور ان کے انحطاط کیا ہوں گے؟

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو، تب $j = s$ ، $m_j = m_s$ ہو گا، اور کمزور اور طاقتور دونوں میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک جیسے ہوں گے۔ (مساوات ۶.۷۲ سے) E^1_Z اور (مساوات ۶.۶۷ سے) مہین ساخت

توانائیاں تعین کرکے، میدان کی طاقت سے قطع نظر، $l = 0$ زیمان اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں۔ دکھائیں کہ چوکور قوسین رکن کی قیمت 1 لیتے ہوئے، طاقتور میدان کلیہ (مساوات ۶.۸۲) یہی نتیجہ دے گا۔

۶.۴.۳ درمیانہ میدان زیمان اثر

درمیانے میدان کی صورت میں نہ H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہوگا، لہٰذا ہمیں دونوں کو، ایک نظر سے دیکھ کر، بوہر ہیملٹنی (مساوات ۶.۴۲) کے اضطراب تصور کرنا ہوگا۔

$$H' = H'_Z + H'_{fs} \tag{۶.۸۳}$$

میں $n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود رکھ کر، ان حالات کو، جن کی تصویر کشی l ، j ، اور m_j کرتے ہیں، [32] انحطاطی نظریہ اضطراب کی اساس لیتا ہوں۔ کلیبش و گورڈن عددی سر (سوال ۴.۵۱ یا جدول ۴.۸) استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر، درج ذیل ہوگا۔

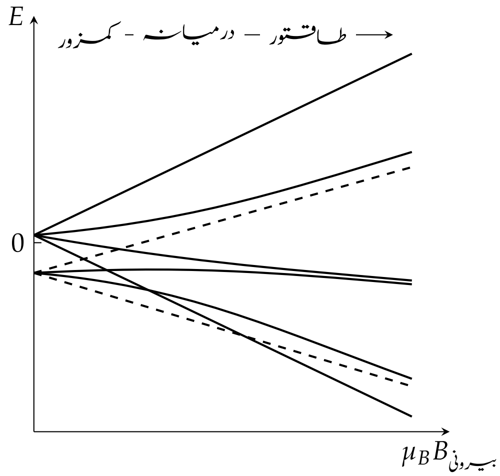
$$l=0\begin{cases}\psi_1 \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle\\ \psi_2 \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

$$l=1\begin{cases}\psi_3 \equiv |\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle\\ \psi_4 \equiv |\tfrac{3}{2}\tfrac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\\ \psi_5 \equiv |\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\\ \psi_6 \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\\ \psi_7 \equiv |\tfrac{3}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\\ \psi_8 \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفر قالبی ارکان، جنہیں مساوات ۶.۶۶ دیتی ہے، وتر پر ہوں گے؛ H'_Z کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں، اور مکمل قالب W (سوال ۶.۲۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$\begin{pmatrix}5\gamma-\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5\gamma+\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma-2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma+2\beta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma-\frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 5\gamma-\frac{1}{3}\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma+\frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 5\gamma+\frac{1}{3}\beta\end{pmatrix}$$

[32] آپ چاہیں تو l ، m_l ، m_s حالات استعمال کر سکتے ہیں، جو H'_Z کے قالبی ارکان کا حصول آسان لیکن H'_{fs} کا زیادہ مشکل بناتے ہیں؛ قالب $\mathbf{W}$ زیادہ پیچیدہ ہوگا، لیکن امتیازی اقدار (جو اساس کی تابع نہیں) دونوں صورتوں میں ایک جیسی ہوں گی۔



شکل ۶.۱۲: کمزور، درمیانہ اور طاقتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیمان بٹوارا۔

جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6\,\text{eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B \boldsymbol{B}_{\text{بیرونی}}$$

ابتدائی چار امتیازی اقدار پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں؛ اب صرف دو 2×2 ڈبوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے۔ ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا۔

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \tag{۶.۸۴}$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی، لیکن اس میں β کی علامت الٹ ہو گی۔ ان آٹھ توانائیوں کو جدول ۶.۲ میں پیش کیا گیا ہے، اور شکل ۶.۱۲ میں $B_{\text{بیرونی}}$ کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے۔ صفر میدان حد $(\beta = 0)$ میں یہ گھٹ کر مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں؛ کمزور میدان $(\beta \ll \gamma)$ میں یہ سوال ۶.۲۱ میں حاصل نتائج دیتی ہیں؛ طاقتور میدان $(\beta \gg \gamma)$ میں سوال ۶.۲۳ کے نتائج حاصل ہوتے ہیں (دھیان رہے، جیسا سوال ۶.۲۳ میں پیشگوئی کی گئی، بہت زیادہ طاقتور میدانوں میں پانچ منفرد سطح توانائی پر ارتکاز ہو گا)۔

سوال ۶.۲۵: قوالب H'_Z اور H'_{fs} کے ارکان دریافت کر کے، $n = 2$ کے لئے، متن میں دیا گیا قالب W مرتب کریں۔

جدول ۶.۲: مہین ساخت اور زیمان بٹوارا کے ساتھ، ہائیڈروجن کے $n = 2$ حالات کی سطحیں توانائی۔

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= E_2 - 5\gamma + \beta \\
\epsilon_2 &= E_2 - 5\gamma - \beta \\
\epsilon_3 &= E_2 - \gamma + 2\beta \\
\epsilon_4 &= E_2 - \gamma - 2\beta \\
\epsilon_5 &= E_2 - 3\gamma + \beta/2 + \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\
\epsilon_6 &= E_2 - 3\gamma + \beta/2 - \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\
\epsilon_7 &= E_2 - 3\gamma - \beta/2 + \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\
\epsilon_8 &= E_2 - 3\gamma - \beta/2 - \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4}
\end{aligned}$$

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طاقتور اور درمیانے میدان خطوں کے لیے زیمان اثر کا تجزیہ کریں۔ (جدول ۶.۲ کی طرز پر) توانائیوں کا جدول تیار کر کے، انہیں (شکل ۶.۱۲ کی طرح) بیرونی میدان کے تفاعلات کے طور پر ترسیم کریں، اور تصدیق کریں کہ درمیانے میدان نتائج دو تحدیدی صورتوں میں گھٹ کر درست قیمتیں دیتی ہیں۔

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارا

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت قطب ہے، اگرچہ نسب نما میں بڑی کمیت کی بنا پر اس کا جفت قطب معیار اثر، الیکٹران کے جفت قطب معیار اثر سے بہت کم ہو گا (مساوات ۶.۶۰)۔

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p}\mathbf{S}_p, \quad \boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S}_e \tag{۶.۸۵}$$

(پروٹان تین کوارکوں پر مشتمل مخلوط ساخت کا ذرہ ہے، اور اس کی مسکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں؛ اسی لئے g جزو ضربی کو g_p لکھا گیا ہے، جس کی پیمائشی قیمت 5.59 ہے جو الیکٹران کی قیمت (2) سے مختلف ہے۔) کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت، جفت قطب $\boldsymbol{\mu}$ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے۔[۳۳]

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})\boldsymbol{a}_{\text{r}} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۶}$$

[۳۳] اگر آپ مساوات ۶.۸۶ میں مشتمل ڈیلٹا تفاعلی جزو سے واقف نہیں، جفت قطب کو چکر کاٹتا ہوا بار دار کروی پوست تصور کر کے، ($\boldsymbol{\mu}$ کو برقرار رکھ کر) رداس کو صفر تک اور بار کو لامتناہی تک پہنچا کر، آپ اس کو اخذ کر سکتے ہیں۔

یوں، پروٹان کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا (مساوات ۶.۵۸)۔

$$H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(\mathbf{S}_p \cdot \boldsymbol{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \boldsymbol{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \, \delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۷}$$

نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف (مساوات ۶.۹) اضطرابی ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت ہو گی۔

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \boldsymbol{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \boldsymbol{a}_r - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e)}{r^3} \right\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle |\psi(0)|^2 \tag{۶.۸۸}$$

زمینی حال میں (یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو) تفاعل موج کروی تشاکلی ہو گا، اور پہلی توقعاتی قیمت صفر ہو گی (سوال ۶.۲۷ دیکھیں)۔ مزید، مساوات ۴.۸۰ کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہو گا، لہٰذا زمینی حال میں درج ذیل ہو گا۔

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle \tag{۶.۸۹}$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پائی جاتی ہے، لہٰذا اس کو **چکر چکر ربط**[۳۴] کہتے ہیں (چکر مدار ربط میں $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ پایا جاتا ہے)۔

چکر چکر ربط کی موجودگی میں، انفرادی چکری زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے؛ "موزوں" حالات، کل چکر:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p \tag{۶.۹۰}$$

کے امتیازی سمتیات ہوں گے۔ پہلے کی طرح، ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

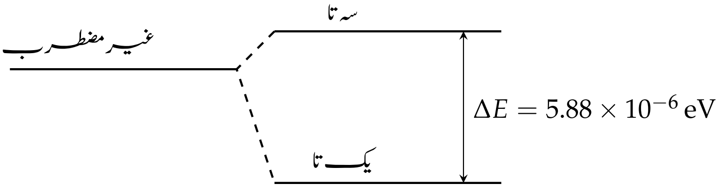
$$\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2) \tag{۶.۹۱}$$

اب الیکٹران اور پروٹان دونوں کا چکر $\frac{1}{2}$ ہے، لہٰذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہو گا۔ سہ تا حال (تمام چکر "ہم متوازی") میں کل چکر 1 ہو گا، لہٰذا $S^2 = 2\hbar^2$ ہو گا؛ یک تا حال میں کل چکر 0، لہٰذا $S^2 = 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$E^1_{hf} = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \begin{cases} +1/4, & (\text{سہ تا}) \\ -3/4, & (\text{یک تا}) \end{cases} \tag{۶.۹۲}$$

چکر چکر ربط، زمینی حال کے چکری انحطاط کو توڑ کر سہ تا تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا تشکیل کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۳)۔ ظاہر ہے کہ ان کے بیچ **درز توانائی**[۳۵] درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6}\,\text{eV} \tag{۶.۹۳}$$



شکل ۶.۱۳: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بٹوارا۔

سہ تا حال سے یک تا حال منتقلی کی بنا پر خارج نوریہ کا تعدد

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420\,\text{MHz} \tag{۶.۹۴}$$

ہو گا، اور اس کا مطابقتی طول موج $c/\nu = 21\,\text{cm}$ ہو گا، جو خورد موج خطہ میں پایا جاتا ہے۔ یہ وہ مشہور **21 سینٹی میٹر لکیر**[۳۶] ہے جو کائنات میں اخراج کی صورت میں ہر طرف پائی جاتی ہے۔

سوال ۶.۲۷: فرض کریں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دو مستقل سمتیات ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$\int (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{۶.۹۵}$$

(تکمل ہمیشہ کی طرح سعت $0 < \theta < \pi$ ، $0 < \phi < 2\phi$ پر کر لیا گیا ہے)۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو، درج ذیل دکھائیں۔

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}}) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ: $\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلیہ میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے، درج ذیل کے لیے زمینی حال کی نہایت مہین ساخت تعین کریں: (الف) **میونی ہائیڈروجن**[۳۷] (جس میں الیکٹران کے بجائے میون ہو گا، جس کا بار اور g جزو ضربی، بالترتیب، الیکٹران کے بار اور g جزو ضربی کے برابر، لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے)، (ب) **پازیٹرانیم**[۳۸] (جس میں پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران ہو گا، جس کی کمیت اور g جزو ضربی، بالترتیب، الیکٹران کی کمیت اور g جزو ضربی ہیں، لیکن بار کی علامت الٹ ہے)، (ج) **میونیئم**[۳۹] (جس میں پروٹان کی جگہ ضد میون ہو گا، (جس

[۳۴] spin-spin coupling
[۳۵] energy gap
[۳۶] 21-centimeter line
[۳۷] muonic hydrogen
[۳۸] positronium
[۳۹] muonium

کی کمیت اور g جزو ضربی عین میون کے برابر، لیکن بار الٹ ہے)۔ اشارہ: یاد رہے کہ ان عجیب "جوہروں" کا رداس بوہر حاصل کرتے وقت تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) استعمال کی جائی گی۔ دیکھا گیا ہے کہ پازیٹرانیم کے لئے حاصل جواب $(4.85 \times 10^{-4}\,\text{eV})$ ، تجرباتی حاصل قیمت $(8.41 \times 10^{-4}\,\text{eV})$ سے بہت مختلف ہے؛ اتنے زیادہ فرق کی وجہ نابودگی جوڑا[40] $(e^+ + e^- \;\rightarrow\; \gamma + \gamma)$ ہے، جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتا ہے، اور جو سادہ ہائیڈروجن، میونی ہائیڈروجن، اور میونیئم میں (ظاہر ہے کہ) نہیں ہو گا۔

اضافی سوالات برائے باب ۶

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی متناہی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ پروٹان کو رداس b کا یکساں بار دار کروی پوست تصور کریں، یوں پوست کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل، $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ، ہو گی؛ یہ زیادہ درست نہیں ہے، لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے، جس سے ہمیں مقدار کا رتبہ ٹھیک دے گا۔ اپنے نتیجے کو چھوٹی مقدار معلوم (b/a) کے طاقتی تسلسل توسیع میں لکھ کر، جہاں a رداس بوہر ہے، صرف ابتدائی جزو رکھ کر، درج ذیل روپ میں جواب حاصل کریں۔

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتیں تعین کرنی ہیں۔ آخر میں $b \approx 10 \times 10^{-15}\,\text{m}$ (جو تقریباً پروٹان کا رداس ہے) پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں۔ اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۰: ہم سمت تین ابعادی ہارمونی مرتعش (سوال ۴.۳۸) پر غور کریں۔ اضطراب

$$H' = \lambda x^2 yz$$

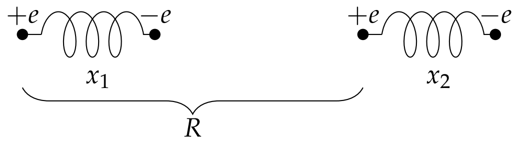
(جہاں λ ایک مستقل ہے) کے، درج ذیل پر، (رتبہ اول) اثر پر بحث کریں۔

ا. زمینی حال؛

ب. (تہرا انحطاطی) پہلا ہیجان حال۔ اشارہ: سوال ۲.۱۲ اور سوال ۳.۳۳ کے جوابات استعمال کریں۔

سوال ۶.۳۱: **وان در والز باہم عمل**۔ دو ایسے جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہو۔ چونکہ دونوں برقی معادل ہیں، لہٰذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جاتی، تاہم قابل تقطیب ہونے کی صورت میں ان کے بیچ کمزور قوت کشش پائی جائی گی۔ اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر، جوہر کو (کمیت m ، بار $-e$ کا) ایک الیکٹران جو (بار $+e$) کے مرکزہ کے ساتھ ایک اسپرنگ (جس کا مقیاس لچک k ہے) سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۴)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مراکزہ بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے۔ اس

[40] pair annihilation



شکل ۶.۱۴: دو قابل تقطیب قریبی جوہر (سوال ۶.۳۱)۔

غیر مضطرب نظام کی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی۔

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{۶.۹۶}$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہو گا۔

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2}\Big) \tag{۶.۹۷}$$

ا. مساوات ۶.۹۷ کی تفصیل پیش کریں۔ فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \tag{۶.۹۸}$$

ب. دکھائیں کے کل ہیملٹنی (مساوات ۶.۹۶ جمع مساوات ۶.۹۸) دوہارمونی مرتعش ہیملٹنیوں:

$$H = \Big[\frac{1}{2m}p_+^2 + \frac{1}{2}\Big(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\Big)x_+^2\Big] + \Big[\frac{1}{2m}p_-^2 + \frac{1}{2}\Big(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\Big)x_-^2\Big] \tag{۶.۹۹}$$

میں زیر تبدیلی متغیرات:

$$p\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \quad \text{اور نتیجتاً} \quad x\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2) \tag{۶.۱۰۰}$$

علیحدہ علیحدہ ہو گی۔

ج. ظاہر ہے کہ اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-) \quad \text{جہاں} \quad \omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \tag{۶.۱۰۱}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہوتی، جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ ہے، درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{R^6} \tag{۶.۱۰۲}$$

ماخوذ: دو جوہروں کے بیچ کشش مخفیہ پایا جاتا ہے، جو ان کے بیچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے۔ یہ دو معادل جوہروں کے بیچ **وان در والس باہم عمل**[41] ہے۔

د. یہی حساب دورتی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے دوبارہ کریں۔ اشارہ: غیر مضطرب حالات کا روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہوگا، جہاں $\psi_n(x)$ یک ذروی مرتعش تفاعل موج ہے جس میں کمیت m اور مقیاس لچک k ہوگا؛ مساوات ۶.۹۸ میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دورتی تخفیف ΔV ہوگی (دھیان رہے کہ اول رتبی تخفیف صفر ہے)۔

سوال ۶.۳۲: فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم λ کا تفاعل ہو۔ $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور امتیازی تفاعلات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial\lambda} = \Big\langle\psi_n\Big|\frac{\partial H}{\partial\lambda}\Big|\psi_n\Big\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انحطاطی امتیازی تفاعلات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جزو الف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 9.6 استعمال کریں۔)

(جزو ب): درج ذیل یک بعدی ہارمونی مدار اس کا اطلاق کریں۔

ایک)
$$\lambda = \omega$$
لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہوگا۔

دو)
$$\lambda = \hbar$$
لیں جو $\langle T\rangle$ دے گا اور

تین)
$$\lambda = m$$
جو $\langle T\rangle$ اور $\langle V\rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موازنا کریں۔

سوال ۶.۳۳: مسلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تعین کی جا سکتی ہیں۔ رداسی تفعلات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r}$$

---

[41] Van der Waals interaction

اور امتیازی اقدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max}+l+1)^2}$$

(جزو الف):
مسلہ Feynman-Hellmann میں $e = \lambda$ استعمال کرتے ہوے $\langle 1/r \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔
(جزو ب):
$l = \lambda$ کو استعمال کرتے ہوے $\langle 1/r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۴: Kramers' رشتہ

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s \rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle n + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0$$

صابط کریں جو ھائے ڈروجنکے حال ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1,$ اور $(2-s$ کا۔ تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رادای مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\right]u.$$

$\int(ur^su'')dr$ کو $\langle r^s \rangle$، $\langle r^{s-1} \rangle$، $\langle r^{s-2} \rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhisis کے ذریعے دوہرا تفرق کو بیٹھائیں۔ دیکھایں کے

$$\int(ur^su') = -(s/2) < r^{s-1} >$$

اور

$$\int(u'r^su')dr = -[2/(s+1)]\int(u''r^{s+1}u')dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)

سوال ۶.۳۵: (جزو الف):
رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s=0, s=1, s=2$ اور $s=3$ ڈال کے $\langle r^2 \rangle$, $\langle r \rangle$, $\langle r^{-1} \rangle$ اور $\langle r^3 \rangle$ کے قلبیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قلبیہ دریافت کر سکتے ہیں۔
(جزو ب):
دوسرے رخ آپکو مثلا درپیش ہوگا آپ $-1 = s$ پر کر کے دیکھیں کے آپکو صرف $\langle r^{-2} \rangle$ اور $\langle r^{-3} \rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔
جزو ج:
اگر آپ کسی طریقہ سے $\langle r^{-2} \rangle$ دریافت کر پایں تب آپ رشتہ Kramers' استعمال کر کے باکی تمام منفی قوعتوں کے لئے قلبیات دریافت کر سکتے ہیں۔

مساوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوئے $\langle r^{-3} \rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مساوات 64.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۶: ایک جوہر کو یکسا بیرونی برقی میدان $E_{\text{بیرونی}}$ میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی مماثل ہے اس سوال میں ہم ہائیڈروجن کے $n = 1$ اور $n = 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان z رخ ہے لہٰذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہو گی:

$$H'_S = eE_{\text{بیرونی}} z = eE_{\text{بیرونی}} r \cos\theta$$

اسکو hamiltonianbohr مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا اسے نظر انداز کرتے ہوئے عمدہ ساخت کو رعد کریں۔
(جزو الف):
اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔
(جزو ب):
پہلا ہیجان حال 4 پرتہ، ψ_{200}، ψ_{211}، ψ_{210}، ψ_{21-1} انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے، توانائی کی رتبہ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟
(جزو ج):
درج بالہ جزو ب میں موضوع تفعالات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جو عفت قطب معیارِ اثر ($p_e = -er$) کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابع نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کے پہلی ہیجان حال میں ہائیڈروجن برقی جو عفت قطب معیارِ اثر کا حامل ہو گا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکملات پائے جاتے ہیں تاہم تقریبین تمام کی قیمت سِفر ہے لہٰذا حساب سے قبل غور کریں اگر ϕ تکمل سفر ہو تب r اور θ تکملات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہو گی جزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{\text{بیرونی}};$$

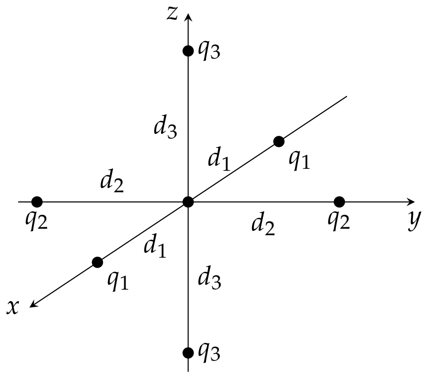
باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)

سوال ۶.۳۷: ہائیڈروجن کی $n = 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتدائی طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے اب انحطاطی حالات ψ_{3lm} ہونگے اور اب ہم z رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔
(جزو الف):
اضطرابی hamiltonian کو ظاہر کرنے والا 9×9 کا کالم تیار کریں
جزوی جواب

$$\langle 300|z|310\rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320\rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31\pm1|z|32\pm1\rangle = -(9/2)a.$$

(جزو ب):
امتیازی اقدار اور انکی انحطاط دریافت کریں

سوال ۶.۳۸: ڈوٹرئم کی زمینی حال میں نہایت موحین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طولِ موج میں تلاش کریں۔ ڈوٹرئم درحقیقت بھاری ہائیڈروجن ہے جسکے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران



شکل ۶.۱۵: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (قلمی جال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

ساتھ جڑ کر ڈوٹرئم بناتے ہیں جس کا چکر ایک مقناطیسی دارِ اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹرئم کا g-جزو 71.1 ہے۔

سوال ۶.۳۹: ایک کالم میں قریبی باردار کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۵) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ (چونکہ اس سوال کے ساتھ چکر کا کوئی واستہ نہیں ہے لہٰذا اسے نظر انداز کریں)

(جزو الف):
درج ذیل

$$r << d_1, r << d_2, and r << d_3,$$

کی صورت میں دیکھائے

$$H' = V_o + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon}\frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_o = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جزو ب):
زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔

(جزوج):
پہلی۔ ہیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں سے چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بٹے گا۔
ایک) کابی تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی۔ صورت میں۔
دو) چوں زاویہ تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔
تین) آرتھورامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔

سوال ۶.۴۰: بازاوقات ψ_n^1 کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلہ واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔
(الف)
ایک) ھائےڈروجن کی زمینی حال میں سٹارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان $E_{\text{بیرونی}}$ کی۔ موجودگی میں ھائےڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال stark36.6 اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n}cos\theta;$$

استعمال کر کے دیکھیں اپ نے مستقلات $A, B,$ اور C کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔
دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہو گی۔ جواب:

$$-m(3a^2eE_{\text{بیرونی}}/2\hbar)^2.$$

(جزوب)
اگر پروٹان کا برقی جست قطب میعارِ اثر p ہو تا تب ھائےڈروجن کے الیکٹرانکی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{epcos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
دو) دیکھائیں کہ رتبہ تک جوہر کا قل برقی جو عفت قطب میعارِ اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہو گا۔
تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہو گا؟

جوابات