

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر . . . . .
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم . . . . .
۵	۱.۳	۳. احتمال . . . . .
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات . . . . .
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات . . . . .
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی . . . . .
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت . . . . .
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت . . . . .
۲۵	۲	غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات . . . . .
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں . . . . .
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش . . . . .
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب . . . . .
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب . . . . .
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ . . . . .
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه . . . . .
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات . . . . .
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں . . . . .
۸۱	۲.۶	۶. مستثنائی چوکور کنواں . . . . .
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا . . . . .
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ . . . . .
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین . . . . .

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۳	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زبان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۵	انجذاب، تحریق شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۶	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۸	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۵۸	آمنٹائن A اور B عددی سر . . . . .	۹.۳.۱
۳۶۰	ہیجان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۶۳	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۷۳	حرارت ناگزیر تخمین . . . . .	۱۰
۳۷۳	مسئلہ حرارت ناگزیر . . . . .	۱۰.۱
۳۷۳	حرارت ناگزیر عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۷۶	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۸۱	ہیٹ بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۸۱	گرگنی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۸۳	ہندی ہیٹ . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۸۸	اہارو نوو پو ہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۳۹۷	بکھراؤ . . . . .	۱۱
۳۹۷	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۳۹۷	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۴۰۱	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۴۰۲	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۴۰۲	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۴۰۵	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۰۸	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۱۱	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۱۱	مساوات شرودنگر کی عملی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۱۵	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۱۹	تسل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۲۳	پس نوشت . . . . .	۱۲
۴۲۴	آمنٹائن پوڈلکیو روزن تضاد . . . . .	۱۲.۱
۴۲۵	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۳۰	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۳۱	شرودنگر کی ملی . . . . .	۱۲.۴
۴۳۲	کوانٹائی زینو تضاد . . . . .	۱۲.۵
۴۳۵	جوابات . . . . .	
۴۳۷	خطی الجبرا . . . . .	۱
۴۳۷	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۳۷	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۳۸	قتالب . . . . .	۳.۱

۴۳۸	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۸	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۸	هر مشی تباولے	۶.۱





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

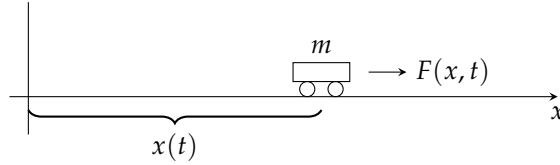
28 اکتوبر 2011ء

# باب ۱

## تفہ عمل موج

### ۱.۱ مساوات شروڈنگر

فرض کریں محور  $x$  پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہو پر قوت  $F(x, t)$  عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام  $x(t)$  کسی بھی وقت  $t$  پر متعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کا اسراع، سمتی رفتار  $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت  $p = mv$  یا حرکی توانائی  $T = \frac{1}{2}mv^2$  یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں، متعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم  $x(t)$  کیسے متعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون  $F = ma$  بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو مخفی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے  $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$  لکھا جائے گا)۔ ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ  $t = 0$  پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے ذریعہ ہم  $x(t)$  دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بُعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کا تذکرہ نہیں کر رہے ہیں۔ نیز، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ( $v \ll c$ ) تصور کریں گے۔

کوانٹائی میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کے تفاعل موج<sup>۲</sup>، جس کی علامت  $\Psi(x, t)$  ہے، کو مساوات شرودنگر<sup>۳</sup>:

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کر کے حاصل کرتے ہیں جہاں  $i$  منفی ایک  $(-1)$  کا جذر اور  $\hbar$  پلانک متقل، بلکہ اصل پلانک متقل تقسیم  $2\pi$  ہوگا۔

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مشاغل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات (عموماً  $\Psi(x, 0)$ ) استعمال کرتے ہوئے مساوات شرودنگر، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے،  $\Psi(x, t)$  کا تعین کرتی ہے، جیسے کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے وقت عہدہ نیوٹن  $x(t)$  متعین کرتا ہے۔

## ۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جاننے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں؟ ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج (جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے) فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے  $t$  پر یہ  $x$  کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کا شماریاتی مفہوم<sup>۴</sup> پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے  $t$  پر نقطہ  $x$  پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  ہوگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ<sup>۵</sup> درج ذیل ہے۔

$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{محتمل} & \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} \\ \text{محتمل} & \text{ت پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ} \end{cases}$$

احتمال  $|\Psi|^2$  کی ترسیم کے نیچے رقبے کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ  $A$  پر پایا جائے گا جہاں  $|\Psi|^2$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ  $B$  پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا پر اس نظریے سے ذرے کے بارے میں تمام متبادل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جاننے کے باوجود ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا معتم یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاصر رہتے ہیں۔ کوانٹائی میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کی صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔

wave function<sup>۲</sup>

Schrodinger align<sup>۳</sup>

statistical interpretation<sup>۴</sup>

<sup>۵</sup> تفاعل موج خود مخلوط ہے لیکن  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$  (جہاں  $\Psi^*$  تفاعل موج  $\Psi$  کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔



شکل ۱.۲: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ  $a$  اور  $b$  کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ  $A$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ  $B$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

یوں کوانٹائی میکانیات میں عدم تعین کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹائی میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتا ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹائی میکانیکی نظریے میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام  $C$  پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹائی عدم تعین کے بارے میں مختلف طبعیات فکر کے بارے میں علم حاصل ہو گا۔

(1) حقیقتی پسند<sup>۱</sup> سوچ: ذرہ مقام  $C$  پر ہوتا ہے۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹائی میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گی کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ  $C$  پر ہی ہوتا اور کوانٹائی میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے متاثر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعینیت فطرتاً نہیں پائی جاتی بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے مطابق کسی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں ہوتا۔ یوں  $\Psi$  مکمل کہانی بیان نہیں کرتا اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات<sup>۲</sup> کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند<sup>۳</sup> سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں ہوتا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ ایک مقام پر ”ظاہر ہو جائے“ (ہمیں اس بارے میں سوال کرنے کی اجازت نہیں کہ ذرہ مقام  $C$  کو کیوں منتخب کرتا ہے)۔ مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل ڈالتا ہے بلکہ یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی

<sup>۱</sup> indeterminacy

<sup>۲</sup> ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی خلل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ  $C$  کے قریب پایا گیا۔

<sup>۳</sup> realist

<sup>۴</sup> hidden variables

<sup>۵</sup> orthodox

عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرے کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے ہیں۔ ”یہ تصور جو کپن ہیگن مفہوم“ کہلاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہرین طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ تصور درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھا عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصے کے بحث مباحثوں کے بعد بھی واضح نہیں۔

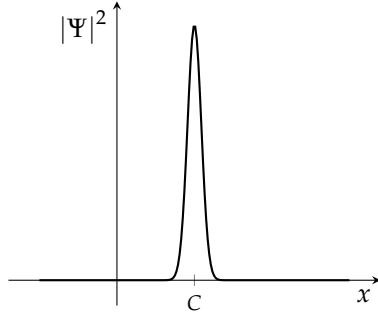
(3) انکاری سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حاصل نہیں بتا پاتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبعیات فکر کے حسی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرے کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربے پر متبادل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی علمی فکر اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جان بل کی دلیل سمجھ میں آ سکے گی۔ یہاں اتنا ثابت نا کافی ہو گا کہ تجربہ بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں<sup>۱۲</sup>۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتا ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کے عائد کردہ شرابیاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرے پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربے میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے جیسا کہ شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم<sup>۱۳</sup> کر کے اس کو سوزن بننے پر مجبور کرتا ہے (جس کے بعد تفاعل موج مساوات شرودنگر کے تحت ارتقا پائے گا لہذا دوسری پیمائش جلد کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دوبہرت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں: پہلے میں تفاعل موج وقت کے ساتھ مساوات شرودنگر کے تحت

Copenhagen interpretation<sup>11</sup>  
agnostic<sup>12</sup>

<sup>۱۲</sup> یہ نکتہ کہ زیادہ مشابہت ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں باب ۱۲ میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معامی خفیہ متغیر نظریات اور دیگر بناؤں مثلاً متعدد دنیاؤں<sup>۱۳</sup> تشریح موجود ہیں جن کی تینوں سوچوں کے ساتھ مطابقت نہیں ہے۔ بہر حال، فی الحال بہتر ہے کہ ہم کوانٹائی نظریے کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کے مسائل پر فکر کریں۔  
collapses<sup>14</sup>



شکل ۱.۳: تفسیر عمل موج کا انہدام: اس لمحے کے فوراً بعد  $|\Psi|^2$  کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

ارتقاء پاتا ہے، اور دوسرا جس میں پیمائش  $\Psi$  کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر منہدم کرتی ہے<sup>۱۵</sup>۔

### ۱.۳.۱ احتمال

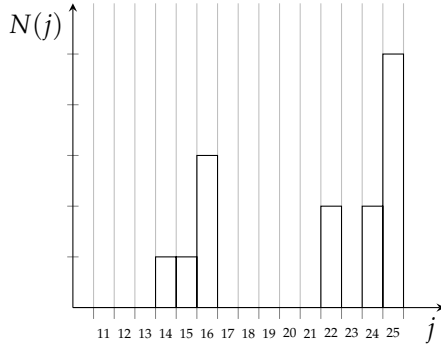
#### ۱.۳.۱ غیر مسلسل تغیرات

چونکہ کوانٹائی میکانیٹ کی شماراتی تشریح کی حباتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامات اور اصطلاحات سیکھنی ہوں گی جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔

فرض کریں ایک کمرہ میں 14 افراد موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک فرد،
- 15 سال عمر کا ایک فرد،
- 16 سال عمر کے تین افراد،
- 22 سال عمر کے دو افراد،
- 24 سال عمر کے دو افراد،
- 25 سال عمر کے پانچ افراد۔

<sup>۱۵</sup> کوانٹائی میکانیٹ میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور حیران کن ہے کہ انسان سوچ میں پڑ جاتا ہے کہ پیمائش درحقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خوردبینی (کوانٹائی) نظام اور کلاں بینی (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسے بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسے ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مد ہوش ”مشاہدہ کار“ کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسے وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس کٹھن مسئلہ پر دوبارہ باب ۱۲ میں بات کروں گا: ابھی کے لئے ہم سادہ سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنس دان تجربہ گاہ میں فیٹ، گھڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر  $j$  کے لحاظ سے تعداد  $N(j)$  دکھائی گئی ہے۔

اگر  $j$  عمر کے لوگوں کی تعداد کو  $N(j)$  لکھا جائے تو یوں لکھا جائے گا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ، مثال کے طور پر،  $N(17)$  کی قیمت صفر ہوگی۔ کمرے میں افراد کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(اس مثال میں، ظاہر ہے کہ،  $N = 14$  ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ابھرتے ہیں۔

سوال ۱: اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک فرد منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس فرد کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 افراد ہیں اور ہر ایک فرد کے انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر  $j$  عمر کے فرد کے انتخاب کا احتمال  $P(j)$  ہو تو  $P(14) = 1/14$ ،  $P(15) = 1/14$ ،  $P(16) = 3/14$ ، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$



دھیان رہے کہ چودہ یا پندرہ سال عمر کے مفرد کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کے انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی  $\frac{1}{7}$  ہوگا۔ واضح رہے کہ تمام احتمالات کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2: کوئی عمر سب سے زیادہ <sup>۱۶</sup> متعلقہ ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عمومی طور پر سب سے زیادہ احتمال کا  $j$  وہی  $j$  ہوگا جس کے لئے  $P(j)$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3: وسطانیہ <sup>۱۷</sup> عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ  $j$  کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کا احتمال ایک جیسا ہو۔)

سوال 4: ان کی اوسط <sup>۱۸</sup> عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر  $j$  کی اوسط قیمت جس کو ہم  $\langle j \rangle$  لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

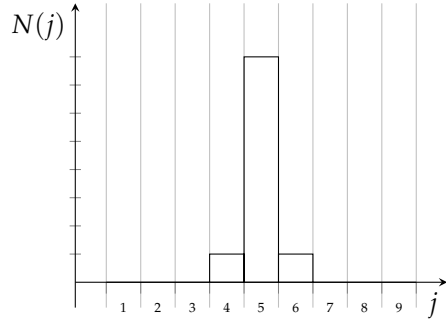
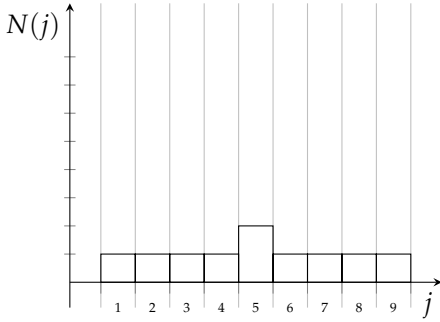
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹائی میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو <sup>۱۹</sup> توقعاتی قیمتے کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5: عمروں کے مربعوں کی اوسط کیا ہوگی؟ جواب: آپ  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $14^2 = 196$  حاصل کر سکتے ہیں، یا  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $15^2 = 225$ ، یا  $\frac{3}{14}$  احتمال سے  $16^2 = 256$ ، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ان کے مربعوں کی اوسط درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

most probable<sup>۱۶</sup>  
median<sup>۱۷</sup>  
mean<sup>۱۸</sup>  
expectation value<sup>۱۹</sup>



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیلات میں وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے اور سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے، تاہم ان ترسیلات میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر  $j$  کے کسی بھی تغا عمل کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) یاد رہے کہ مربع کی اوسط  $\langle j^2 \rangle$  عموماً اوسط کے مربع  $\langle j \rangle^2$  کے برابر نہیں ہوگی۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرے میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہوں تب  $\langle x^2 \rangle = 5$  جبکہ  $\langle x \rangle^2 = 4$  ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورت میں واضح مندرجہ پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے، وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے اور اجزاء کی تعداد ایک جیسی ہے۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے متضاد نوکیلے انحراف جیسی ہے جبکہ دوسری شکل افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل کی مانند ہوگی جبکہ دیہاتی علاقے میں ایک ہی کمرے پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل سے ظاہر ہوگی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے کسی بھی مقدار کی تقسیم کی ”وسعت“، ”عقدی صورت میں درکار ہوگی۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا منفرق

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام  $\Delta j$  کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ  $\langle j \rangle$  مستقل ہے لہذا اس کو مجموعے کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلے سے چھٹکارا حاصل کرنے کے لئے آپ  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کی اوسط لے سکتے ہیں لیکن  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے نجات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیر<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں جبکہ تغیریت کے جذر  $\sigma$  کو معیار<sup>۲۱</sup> انحراف<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں۔ روایتی طور پر  $\sigma$  کو اوسط  $\langle j \rangle$  کے گرد وسعت کی پیمائش مانا جاتا ہے۔ ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں  $\sigma$  اس کیلئے بہت آسانی سے حاصل ہوگا۔ آپ  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  معلوم کر کے ان کے فرق کا جذر لیں۔ جیسا کہ میں ذکر کر چکا ہوں  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا کہ آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں  $\sigma^2$  غیر منفی ہوگا، لہذا مساوات ۱.۱۲ سے سرآدرج ذیل ہوگا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت میں برابر ہو سکتے ہیں جب  $\sigma = 0$  ہو، جو تب ممکن ہوگا جب تقسیم میں کوئی وسعت نہ پائی جاتی ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

## ۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آئے ہیں جن کی قیمتیں جداگانہ ہوتی ہیں (گزشتہ مثال میں ہم نے امپداد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے، لہذا  $\Delta j$  عدد صحیح ہوتا ہے)۔ تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے

<sup>۲۰</sup> variance  
<sup>۲۱</sup> standard deviation

اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کے 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال دو دن کے بیچ عمر کا احتمال، 16 سال اور 16 سال ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دو گنا ہو گا۔ (سوائے ایسی صورت کے جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچے پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس متاعدے کے اطلاق کے نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی کم وقفے کی بات کر رہے ہیں۔) لہذا ایوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x) dx = \begin{cases} \text{بلا منصوب منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل  $\rho(x)$  کثافت احتمال<sup>۲۲</sup> کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ  $a$  تا  $b$  کے بیچ  $x$  پائے جانے کا احتمال  $\rho(x)$  کا کثمتل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی  $h$  ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچی جاتی ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کی وقتی اوسط کیا ہوگی؟<sup>۲۳</sup>

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ  $\frac{h}{2}$  سے کم ہو گا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ  $t$  پر فاصلہ  $x$

<sup>۲۲</sup>probability density

<sup>۲۳</sup>ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہو گا کہ میں متناہی نمونے (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر "اوسط" میں منفرق نہیں کر پارہا۔ یہ تجربہ کرنے والے کے لئے معصیت پیدا کر سکتا ہے، خصوصاً جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے عنبرض ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تحمین ہے۔

درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

اس کی سستی رفتار  $\frac{dx}{dt} = gt$  ہوگی اور پرواز کا دورانیہ  $T = \sqrt{2h/g}$  ہوگا۔ وقفہ  $dt$  میں تصویر کھینچنے کا احتمال  $\frac{dt}{T}$  ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت  $dx$  میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگی۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگی۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے ہم اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو  $\frac{h}{2}$  سے کچھ کم ہے، جیسے کہ ہمیں متوقع تھتا۔

شکل ۱.۶ میں  $\rho(x)$  کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال خود لامتناہی ہو سکتی ہے جبکہ احتمال (یعنی  $\rho$  کا مکمل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم) ہوگا۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳.۱ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

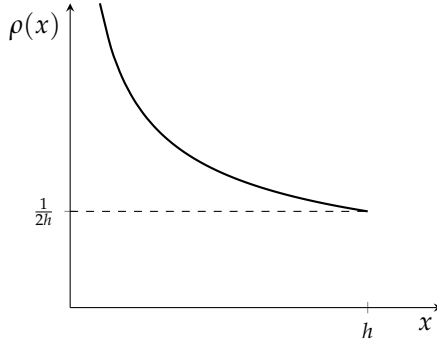
۱. اوسط کامریع  $\langle z \rangle^2$  اور مربعوں کا اوسط  $\langle z^2 \rangle$  تلاش کریں۔

ب. ہر  $z$  کے لیے  $\Delta z$  دریافت کریں، اور مساوات ۱.۱۱ کو استعمال کر کے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. حبزو-الف اور حبزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱:  $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

ب. بلاواسطہ منتخب کردہ تصویر میں، اوسط سے ایک معیاری انحراف (کے برابر فاصلہ) سے زیادہ دور،  $x$  پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں، جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $\lambda$  حقیقی مثبت مستقلات ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے  $A$  کی قیمت کا تعین کریں۔

ب. اوسط  $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط  $\langle x^2 \rangle$  اور معیاری انحراف  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج.  $\rho(x)$  کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

## ۱.۴ معمول زنی

ہم تفسر عمل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ  $t$  پر ایک ذرے کا نقطہ  $x$  پائے جانے کی کثافت احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت  $|\Psi|^2$  کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$(1.20) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگا۔

البتہ، یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونی چاہیے۔ تفاعل موج کا تعین مساوات شرودنگر کرتی ہے اور  $\Psi$  پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت میں جائز ہوگا جب ان دونوں میں اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر  $\Psi(x, t)$  حل ہو تب  $A\Psi(x, t)$  بھی حل ہوگا، جہاں  $A$  کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمول زنی<sup>۲۳</sup> کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کی معمول زنی کریں۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا۔ یہی کچھ مہمل حل  $\Psi = 0$  کے لیے بھی درست ہوگا۔ ایسا تفاعل موج جو ناقابل معمول زنی<sup>۲۵</sup> ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا، لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، مساوات شرودنگر کے مرصع مکالمہ<sup>۲۶</sup> حل ہونگے۔<sup>۲۷</sup>

یہاں رک کر غور کریں! فرض کریں لمحہ  $t = 0$  پر ایک تفاعل موج کی معمول زنی کی جاتی ہے۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ  $\Psi$  ارتقاپانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گا؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کی معمول زنی کریں چونکہ ایسی صورت میں  $A$  وقت  $t$  کا تابع تفاعل ہوگا نہ کہ ایک مستقل، اور  $A\Psi$  مساوات شرودنگر کا حل نہیں رہے گا) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماریاتی مفہوم غنیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹائی نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے، لہذا ہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف  $t$  کا تفاعل ہے، لہذا اس میں نے پہلے فترہ میں کل تفرق  $\frac{d}{dt}$  استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل  $t$  اور  $x$  دونوں کا تفاعل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق  $\partial/\partial t$  استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi$$

normalization<sup>۲۴</sup>

non-normalizable<sup>۲۵</sup>

square-integrable<sup>۲۶</sup>

<sup>۲۷</sup> ظاہر ہے کہ  $|x| \rightarrow \infty$  کی صورت میں  $\Psi(x, t)$  کو  $1/\sqrt{|x|}$  سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کی ہیئت غنیر معین رہتی ہے۔ تاہم جیسے ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی۔

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$(1.22) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

مساوات ۱.۲۱ میں عمل کی قیمت اب صریح معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ قابل معمول زنی<sup>۲۸</sup> ہونے کے لئے ضروری ہے کہ  $x \rightarrow \pm \infty$  کرتے ہوئے  $\Psi(x, t)$  صفر<sup>۲۹</sup> کو پہنچتا ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر تابع) مستقل ہوگا؛ بلکہ  $t = 0$  پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔

سوال ۱.۴: لمحہ  $t = 0$  پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $b$  مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج  $\Psi$  کی معمول زنی کریں (یعنی  $a$  اور  $b$  کی صورت میں  $A$  تلاش کریں)۔

ب. متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $\Psi(x, 0)$  ترسیم کریں۔

ج. لمحہ  $t = 0$  پر کس نقطے پر ذرہ پائے جانے کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ  $a$  کے بائیں جانب ذرہ پائے جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق  $b = a$  اور  $b = 2a$  کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر  $x$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

<sup>۲۸</sup>normalizable

<sup>۲۹</sup>ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی گھمبیر مثالیں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے؛ اور لامتناہی پر تفاعلات موج ہر صورت صفر کو پہنچتے ہیں۔



سوال ۱.۵: درج ذیل تعامل موج پر غور کریں جہاں  $A$ ،  $\lambda$  اور  $\omega$  مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا مخفی  $V^{۳۰}$  ایسا تعامل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تعامل موج  $\Psi$  کی معمول زنی کریں۔

ب. متغیرات  $x$  اور  $x^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر  $x$  کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $|\Psi|^2$  ترسیم کر کے اس پر نقاط  $(\langle x \rangle + \sigma)$  اور  $(\langle x \rangle - \sigma)$  کی نشاندہی کریں جس سے  $x$  کی ”پھیل“ کو  $\sigma$  سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہو۔ ذرہ اس سمت سے باہر پائے جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

## ۱.۵ معیار حرکت

حال  $\Psi$  میں پائے جانے والے ذرے کے مقام  $x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (1.۲۸)$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت  $\int x |\Psi|^2 dx$  حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ بلا تعین ہے) اس قیمت پر تعامل موج کو سوزن پر منہدم کرے گی جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو دوبارہ وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں  $\langle x \rangle$  ان ذرات کی پیمائشوں کا اوسط ہوگا جو یکساں حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرے کو دوبارہ ابتدائی حال  $\Psi$  میں لائیں گے یا آپ متعدد ذرات کے فرقہ کو ایک ہی حال  $\Psi$  میں لا کر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط  $\langle x \rangle$  ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار میں شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں، اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متعرب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلب اپنے اپنے ذرے کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا مستطیلی ترسیم  $|\Psi|^2$  کے لگ بھگ ہوگا، جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً  $\langle x \rangle$  ہوگی۔ (چونکہ ہم متناہی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کی جاسکتی کہ جوابات عین درست حاصل ہوں گے، لیکن

بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متعریب حاصل ہوں گے۔)) مختصراً، توقعاتی قیمت ذرات کے ضرورت پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرے پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ  $\Psi$  وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $\langle x \rangle$  تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل <sup>۳۲</sup> لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.29) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

مکمل بالخصوص <sup>۳۳</sup> کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.30) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$  استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا پر رد کیا کہ  $(\pm)$  لامتناہی پر  $\Psi$  کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ مکمل بالخصوص لاگو کرتے ہیں۔

$$(1.31) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ  $x$  کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے نہ کہ ذرے کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرے کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی۔ کوانٹائی میکانیات میں ذرے کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام بلا تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی بلا تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم  $\Psi$  جاننے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرے کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہوگی۔

$$(1.32) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

<sup>۳۲</sup> چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں مکمل کی حدود نہیں لکھ رہا ہوں۔  
<sup>۳۳</sup> فٹنڈہ ضرب کے تحت

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$

یوں مکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جزوے تفریق اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت آپ کو منفی علامت اور اضافی سرحدی جزو کی صورت میں ادا کرنی ہوگی۔

معادلات ۱.۳۱ ہمیں  $\Psi$  سے بلاواسطہ  $\langle v \rangle$  دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت  $p = mv$  کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$(1.33) \quad \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx$$

میں  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  کو زیادہ معنی خیز انداز میں پیش کرتا ہوں۔

$$(1.34) \quad \langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx$$

$$(1.35) \quad \langle p \rangle = \int \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

کوانٹائی میکینکس میں مقام کو عامل  $x^{35}$  ”بیان“ کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  ”بیان“ کرتا  $^{36}$  ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے بیچ لکھ کر عمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر متقداروں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بُدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا)۔ کسی بھی متقدار، مثلاً  $Q(x, p)$ ، کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر  $p$  کی جگہ  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  پُر کر کے حاصل عامل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے بیچ لکھ کر درج ذیل مکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.36) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.37) \quad \langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$$

momentum<sup>۳۴</sup>  
operator<sup>۳۵</sup>

<sup>۳۶</sup> ایک ”عامل“ آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تعادل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہوگا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ  $x$  سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ  $x$  کے لحاظ سے تفرق لیں (اور نتیجہ کو  $-i\hbar$  سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات  $(d/dt, d^2/dt^2, \partial/\partial x, \partial^2/\partial x^2)$  وغیرہ (یا ضرب کار  $(i, 2, x^2, \dots)$  وغیرہ)، اور یان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

حال  $\Psi$  میں ایک ذرے کی کسی بھی حرکی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۳ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ بوہر کی شارپاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے، مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ حقیقتاً یہ (کلاسیکی میکانیات کے لحاظ سے) کام کرنے کا اتنا نیا انداز ہے کہ بہتر ہوگا آپ اس کے استعمال کی مشق کریں؛ ہم (باب ۳ میں) اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر قائم کریں گے۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسئلہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر مکمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفریق کو  $x$  کے اوپر سے گزار کر، یہ جاننے ہوئے کہ  $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$  ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ  $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$  ہوگا؟

سوال ۱.۷:  $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$  کا حساب کریں۔ جواب:

$$(1.38) \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ اہر نفٹس کے مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

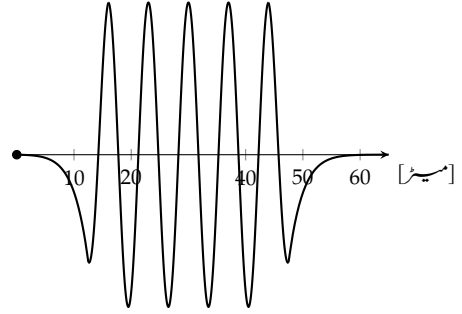
سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو  $x$  اور  $t$  کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹائی میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب  $e^{-iV_1/\hbar}$  ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟

## ۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بالیاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے متاصر ہو گئے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج <sup>۳۸</sup> پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھکادیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے متاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام بتانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننے بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج خاصی حد تک متبادل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہو گا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم متبادل تعین ہوگا۔ فورسٹر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصہ معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھا خاصہ معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹائی میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے  $\Psi$  کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ڈی بروگلی<sup>۳۹</sup>

$$(1.۳۹) \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

پیش<sup>۴۰</sup> کرتا ہے۔ یوں طول موج میں وسعت معیار حرکت میں وسعت کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہو گا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔ اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$(1.۴۰) \quad \sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

جہاں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  بالترتیب  $x$  اور  $p$  کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت<sup>۴۱</sup> ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”وسعت“ سے مراد یہ ہے کہ کیاں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو ( $\Psi$  کو نوکیلی بنا کر) ایسا

<sup>۳۹</sup> De Broglie formula

<sup>۴۰</sup> میں اس کا ثبوت جلد پیش کروں گا۔ بعض مصنفین کلیہ ڈی بروگلی کو ایک مسئلہ لے کر عامل  $\frac{\hbar}{i} \partial / \partial x$  سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے دھباں ہناتی ہے۔

<sup>۴۱</sup> uncertainty principle

حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں متعین نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو ( $\Psi$ ) کو ایک لمبی سائنس موج بن کر (ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نہ ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۳۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی جماعت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ  $\Psi$  کو ایک لمبی بلدار لکیر بن کر، جس میں بہت سارے امیڈ اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو،  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل  $V(x)$  کے لیے  $\Psi$  مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے؟

ج.  $x$ ،  $x^2$ ،  $p$  اور  $p^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل  $\pi$  کے ہندسی توسیع کے اولین ۲۵ ہندسوں (3, 1, 4, 1, 5, 9, ۰۰۰) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوب ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہر ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیمائش کی خراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے گھڑا کر 0 اور  $\pi$  زاویوں کے بیچ آکر رہ جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال  $\rho(\theta)$  کیا ہوگا؟ اشارہ: زاویہ  $\theta$  اور  $(\theta + d\theta)$  کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال  $\rho(\theta) d\theta$  ہوگا۔ متغیر  $\theta$  کے لحاظ سے  $\rho(\theta)$  کو وقفہ  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں  $\rho$  صفر ہوگا۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہوگا۔

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle \theta \rangle$ ،  $\langle \theta^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج. اسی طرح  $\langle \sin \theta \rangle$ ،  $\langle \cos \theta \rangle$  اور  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے محدود (یعنی افقی) لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

ا.  $\rho(x)$  کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟  $x$  کے لحاظ سے  $\rho(x)$  کو  $-2r$  تا  $+2r$  ترسیم کریں جہاں  $r$  سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ:  $x$  اور  $(x + dx)$  کے بیچ  $\psi$  کی موجودگی کا احتمال  $\rho(x) dx$  ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں  $\theta$  کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ  $d\theta$  کا مطابقتی  $dx$  کیا ہوگا؟

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے حصہ (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ  $L$  رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر  $L$  لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ  $t$  پر ( $a < x < b$ ) کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال  $P_{ab}(t)$  ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ہے۔  $J(x, t)$  کی اکائی کیا ہوگی؟ تبصرہ: چونکہ  $J$  آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ  $x$  پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے لہذا  $J$  کو رو احتمال<sup>۲۲</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $P_{ab}(t)$  بڑھ رہا ہو تب خطہ کے ایک سر میں احتمال کے آمد خطہ کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہوگا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال  $\rho$  کیا ہوگا؟ (یہ زیادہ مسزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک غیر مستحکم ذرہ<sup>۲۳</sup> کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ٹکڑے ہونے کا ”عصر حیات“  $\tau$  ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (مکمل طور پر) وقت نہائی گئے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = e^{-t/\tau}$$

<sup>۲۲</sup> probability current  
<sup>۲۳</sup> unstable particle

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۳ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی  $V$  ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں  $V$  کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں  $V_0$  حقیقی مخفی توانائی اور  $\Gamma$  مثبت حقیقی مستقل ہے۔

۱. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P$$

ب.  $P(t)$  کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات  $\Gamma$  کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شروع ڈنگر کے کسی بھی دو عدد (متبادل معمول زنی) حل  $\Psi_1$ ،  $\Psi_2$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ  $t = 0$  پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. معمول زنی مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب. لمحہ  $t = 0$  پر  $x$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ  $t = 0$  پر  $p$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو  $P = m d\langle x \rangle / dt$  سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د.  $x^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ه.  $p^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و.  $x(\sigma_x)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز.  $p(\sigma_p)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔



سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹائی میکانیات اس وقت کارآمد ہوگی جب ذرے کا ذی برونگی طول موج  $(h/p)$  نظام کی جسامت  $(d)$  سے زیادہ ہو۔ درجہ  $T$  (کیلون) پر حراری توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکی توانائی درج ذیل ہوگی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل ہے لہذا ذی برونگی طول موج درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹائی میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہوگا۔

ا. ٹھوس اجسام: فاصلہ حبال ٹھوس اجسام میں تقریباً  $d = 0.3 \text{ nm}$  ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران  $^{۴۵}$  کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مرکزہ کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ (سوڈیم  $^{۲۳}$  کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹائی میکانی ہوں گے جبکہ جوہری مرکزہ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹائی میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مائع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا) ماسوائے  $4 \text{ K}$  سے کم درجہ حرارت پر موجود ہیلیم  $^4$  کے لئے۔

ب. گیئرس: میکانی دباؤ  $P$  پر کن درجہ حرارت پر کامل گیئس کے جوہر کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیئس قانون  $(PV = Nk_B T)$  استعمال کر کے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب:  $T < (1/k_B)(h^2/3m)^{3/5} P^{2/5}$ ؛ ظاہر ہے ہم  $m$  کو چھوٹے سے چھوٹا اور  $P$  کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیئس کو کوانٹائی میکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباؤ پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا بیرونی فضا  $^{۴۸}$  میں (جہاں درجہ حرارت  $3 \text{ K}$  اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً  $1 \text{ cm}$  ہے) ہائیڈروجن کوانٹائی میکانی ہوگا؟

<sup>۴۵</sup> ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مرکزہ سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کا رداس ہوگا۔ اس کے برعکس، بیرون ترین الیکٹران کبھی نہیں جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے فاصلہ حبال کو موزوں فاصلہ لیا جاسکتا ہے۔ یہ مسئلہ بیرونی الیکٹران کے لئے ہے۔

sodium  $^{۲۳}$   
helium  $^4$   
outer space  $^{۴۸}$

## جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقاضا، 103  
امتیازی فتر، 103  
امتیازی فتر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطائی، 90، 104  
انخطائی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34



- بوسن، 208  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقناطیس، 284  
 بیریان، 191  
 میل  
 کروی تقا عمل، 148  
 بے لچک پھسکی، 173  
 پازیشٹرانیم، 207، 291  
 پاشن ویک اثر، 285  
 پالی اصول مناعت، 208  
 پالی متالب چکر، 177  
 پایان، 191  
 پیال، 234  
 پس پردہ، 219  
 پلانک  
 کلیہ، 162  
 پسیداکار  
 فضا میں انتقال کا، 136  
 وقت میں انتقال، 136  
 پسیداکار  
 تقا عمل، 60  
 گھومتا، 200  
 تجدیدی عرصہ، 89  
 تجربہ  
 شرٹن و گرلاخ، 184  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 78  
 تسل  
 بالمر، 162  
 پاشن، 162  
 ٹیلر، 42  
 طاقتی، 43  
 فوریئر، 35  
 لیمان، 162  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 209  
 تشکیل، 237  
 تعداد مکین، 237  
 تعیین حال، 103  
 تغیریت، 9  
 تقا عمل  
 ڈیٹا، 72  
 تقا عمل موج، 2  
 تقا علیہ، 128  
 تکمل  
 ڈھانچائی، 312  
 توانی  
 کلیہ، 55  
 توانائی  
 احبابتی، 29  
 توقعاتی  
 قیوت، 7  
 شنائی عددی سر، 239  
 حبرو ڈارون، 280  
 جسم مقیاس، 229  
 جفت، 34  
 تقا عمل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقناطیسی، 181  
 جوہری مدار چوں  
 خطی جوڑ ترکیب، 311  
 جی حبرو ضربی، 278  
 چکر، 173، 174  
 مخالف میدان، 175  
 ہم میدان، 175  
 چکر چکر رابطہ، 290  
 چکر کار، 175  
 چکر و مدار باہم عمل، 279  
 چکر و مدار رابطہ، 272  
 چندر شیکھر حد، 253  
 چوزاویہ تشکل، 298  
 حال  
 بھراؤ، 70

- 66، دوری سستی  
 66، گروہی سستی  
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،  
 194، رواحتمال،  
 روڈریگیس  
 142، کلیہ  
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،  
 زاویائی معیار حرکت  
 170، بقب  
 174، خنلقی  
 174، غیر خنلقی  
 283، زیسان اثر،  
 ساکن  
 27، حالایت،  
 243، شملنگ  
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،  
 32، سرحدی شراٹظ،  
 72، 79، سرنک زنی،  
 252، سفید بونا،  
 15، سگرا،  
 220، سلور،  
 128، سمتاویہ،  
 97، سمتیاریت،  
 224، سمتیہ موج،  
 سوچ  
 4، انکاری،  
 3، تقلید پسند،  
 3، حقیقت پسند،  
 23، سوڈیم،  
 188، سہ تا،  
 250، سیاہ جسمی طیف،  
 سیزھی  
 46، عاملین،  
 80، سیزھی تفسا عمل،  
 296، شمارک اثر،  
 27، شروڈنگر  
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،  
 156، 34، زمینی  
 70، مقید،  
 34، ہچپان،  
 236، حراری توازن،  
 حرکت  
 202، سائیکلوٹران،  
 97، خطی الجبرا،  
 97، خطی تبدلہ،  
 28، خطی جوڑ،  
 3، خفیہ متغیرات،  
 219، 235، خول،  
 254، درجبات آزادی،  
 236، درجہ حرارت،  
 234، درز،  
 290، درز توانائی،  
 61، دلیل،  
 96، 56، دم ہلانا،  
 219، دوری جدول،  
 ڈیراک  
 128، علامتیت،  
 229، کنگھی،  
 108، معیاری عمودیت،  
 ڈیلٹا  
 35، کرونیگر،  
 297، ڈیوٹریم،  
 297، ڈیوٹیران،  
 ذرہ  
 21، غیر مستحکم،  
 رو  
 21، احتمال،  
 146، ردای مساوات،  
 162، رڈبرگ،  
 162، کلیہ،  
 رشتہ  
 295، پترنک،  
 295، کرامرس،  
 رفتار



- کوانٹائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرفتتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گریویشن، 163  
 گیماتفا عمل، 249
- لاپلائی، 138  
 لارمر تعدد، 184  
 لاگتف  
 شریک کشیررکتی، 158  
 کشیررکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لپٹان، 175  
 لتضم، 162  
 لگراج مضرب، 242  
 لسٹو سطحیں، 202  
 لسٹو جی جزو ضربی، 284  
 لورینتز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈ انڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272
- ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم  
 تقف عمل، 72  
 تقفیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کردی، 139  
 محتالف بیٹا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تقفالات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروڈنگر، 2  
 مسکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وننمن ولمان، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناستائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فضا تقف عمل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 35، 100  
 مقطوع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250  
وسطانیہ، 7  
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپیلا فٹا عدد، 221  
کاشیہ فٹا عدد، 221  
کادو سرافٹا عدد، 221  
ہار مونی  
سر نقش، 32  
ہار مونی سر نقش  
تین البعدی، 193  
ہائیڈروجن  
میونی، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی تسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کاوا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلدیت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
مکمل، 100، 35  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصول، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزدہیلیم، 217  
نظریہ اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصول، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیومن  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ، 70