

# کوانٹم میکینیات

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۱۰/ ستمبر ۲۰۲۱



# عنوان

vii میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاعل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنائی چپکور کنواں
۴۰	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۲	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۱	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۸	۲.۵	ڈیلٹ تفاعل محفہ
۶۸	۲.۵.۱	مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۰	۲.۵.۲	ڈیلٹ تفاعل کنواں
۷۹	۲.۶	مستثنائی چپکور کنواں
۹۳	۳	قواعد و ضوابط
۹۳	۳.۱	ہلبرٹ فضا
۹۷	۳.۱.۱	وتابل معلوم حالات
۹۹	۳.۲	ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

۳.۲.۱	غیر مسلسل طیف	۹۹
۳.۲.۲	استمراری طیف	۱۰۱
۳.۳	متعمم شمارائی مفہوم	۱۰۴
۳.۴	اصول عدم یقینیت	۱۰۸
۳.۴.۱	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۱۰۸
۳.۴.۲	کم سے کم عدم یقینیت کا مجموعی اکتھ	۱۱۲
۳.۴.۳	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۱۱۲
۳.۵	ڈیراک علاقیت	۱۱۷
۴	تین البادی کو انظم میکانیات	۱۳۱
۴.۱	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۱۳۱
۴.۱.۱	علیحدگی متغیرات	۱۳۳
۴.۱.۲	زاویائی مساوات	۱۳۴
۴.۱.۳	ردای مساوات	۱۳۹
۴.۲	ہائیڈروجن جوہر	۱۴۳
۴.۲.۱	ردای تقف عمل موج	۱۴۴
۴.۲.۲	ہائیڈروجن کا طیف	۱۵۴
۴.۳	زاویائی معیار حرکت	۱۵۶
۴.۳.۱	امتیازی اقتدار	۱۵۷
۴.۳.۲	امتیازی تقف عملات	۱۶۲
۴.۴	چکر	۱۶۵
۴.۴.۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۱۷۲
۴.۴.۲	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۱۷۶
۵	متمثل ذرات	۱۹۱
۵.۱	دوزراتی نظام	۱۹۱
۵.۱.۱	بوزان اور فرمیون	۱۹۳
۵.۱.۲	قوت مبادلہ	۱۹۶
۵.۲	جوہر	۱۹۹
۵.۲.۱	ہیلیم	۲۰۰
۵.۲.۲	دوری جدول	۲۰۲
۵.۳	ٹھوس اجسام	۲۰۴
۵.۳.۱	آزاد الیکٹرون گیس	۲۰۵
۵.۳.۲	سخت پٹی	۲۰۸
۵.۴	کو انظم شمارائی میکانیات	۲۱۳
۵.۴.۱	ایک مشال	۲۱۴
۵.۴.۲	عمومی صورت	۲۱۶
۵.۴.۳	زیادہ سے زیادہ متمثل تنظیم	۲۱۹
۶	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۲۲۱

۶.۱	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۲۲۱
۶.۱.۱	عمومی ضابطہ بندی	۲۲۱
۶.۱.۲	اول رتبی نظریہ	۲۲۲
۶.۱.۳	دوم رتبی توانائیاں	۲۲۶
۶.۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۲۲۷
۶.۲.۱	دوپڑتا انخطاط	۲۲۷
۶.۲.۲	بلند رتبی انخطاط	۲۳۱
۶.۳	ہائیدروجن کا مہین ساخت	۲۳۵
۶.۳.۱	اضافیتی تصحیح	۲۳۶
۶.۳.۲	چکر و مدار ربط	۲۳۹
۶.۴	زیمان اثر	۲۴۳
۶.۴.۱	کمزور میدان زیمان اثر	۲۴۳
۶.۴.۲	طاقتور میدان زیمان اثر	۲۴۵
۶.۴.۳	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۲۴۶
۶.۴.۴	نہایت مہین بٹوارہ	۲۴۷

۷	تغیری اصول	۲۵۷
۷.۱	نظریہ	۲۵۷

۸	ونزل و کرامرز و ہرلوان تخمین	۲۷۵
۸.۱	کلاسیکی خطہ	۲۷۶
۸.۲	سرنگزنی	۲۸۰
۸.۳	کلیہ جوڑ	۲۸۳

۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۲۹۳
۹.۱	دو سطحی نظام	۲۹۴
۹.۱.۱	مضطرب نظام	۲۹۴
۹.۱.۲	تابع وقت نظریہ اضطراب	۲۹۷
۹.۱.۳	سائنس اضطراب	۲۹۹
۹.۲	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۳۰۱
۹.۲.۱	برقناطیسی امواج	۳۰۱
۹.۲.۲	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود باخود احسراج	۳۰۱
۹.۲.۳	غیر اتکائی اضطراب	۳۰۳
۹.۳	خود باخود احسراج	۳۰۵
۹.۳.۱	آئنسٹائن A اور B عددی سر	۳۰۵
۹.۳.۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۳۰۶
۹.۳.۳	قواعد انتخاب	۳۰۹

۱۰	حرارت ناگزیر تخمین	۳۱۹
۱۰.۱	مسئلہ حرارت ناگزیر	۳۱۹

۳۱۹	۱۰.۱.۱	حرارت ناگزیر عمل
۳۲۱	۱۰.۱.۲	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت
۳۲۵	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۲۵	۱۰.۲.۱	گرگنی عمل
۳۲۶	۱۰.۲.۲	ہندی ہیت
۳۳۱	۱۰.۲.۳	اہارونو یوہیم اثر

۳۳۹	۱۱	بھراو
۳۳۹	۱۱.۱	تعارف
۳۳۹	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بھراو
۳۴۱	۱۱.۱.۲	کوانٹم نظریہ بھراو
۳۴۲	۱۱.۲	جسروی موج تجزیہ
۳۴۲	۱۱.۲.۱	اصول وضوابط
۳۴۵	۱۱.۲.۲	لایا عمل
۳۴۷	۱۱.۳	یتقلات حیط
۳۵۰	۱۱.۴	بارن تخمین
۳۵۰	۱۱.۴.۱	مسوات شروڈنگر کی کھلی روپ
۳۵۲	۱۱.۴.۲	بارن تخمین اوّل
۳۵۸	۱۱.۴.۳	کسل بارن

۳۶۱	۱۲	پس نوشت
۳۶۲	۱۲.۱	آئنسٹائن پوڈولسکیوروزن تضاد
۳۶۳	۱۲.۲	مسئلہ بل
۳۶۷	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۳۶۸	۱۲.۴	شروڈنگر کی پٹی
۳۶۹	۱۲.۵	کوانٹم زیو تضاد

۳۷۳	جوابات
-----	--------

۳۷۵	۱	خطی الجبرا
۳۷۵	۱.۱	سمتیات
۳۷۵	۲.۱	اندرونی ضرب
۳۷۵	۳.۱	قالب
۳۷۵	۴.۱	تبدیلی اساس
۳۷۵	۵.۱	امتیازی تقاضات اور امتیازی اقتدار
۳۷۵	۶.۱	ہر مشی تبادلے

۳۷۷	منہرنگ
-----	--------

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

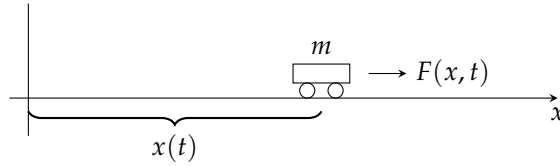


## باب ۱

### تفہم عمل موج

#### ۱.۱ شرودنگر مساوات

فرض کریں محور  $x$  پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہو، پر قوت  $F(x, t)$  عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام  $x(t)$  کسی بھی وقت  $t$  پر تعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کی اسراع، سمتی رفتار  $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت  $p = mv$  یا حرکت کی توانائی  $T = \frac{1}{2}mv^2$  یا کوئی اور حرکت کی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں تعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم  $x(t)$  کیسے تعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون  $F = ma$  بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو خفی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے  $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$  لکھا جائے گا۔) اس مساوات کے ساتھ ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ  $t = 0$  پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے ہم  $x(t)$  دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضیٰ قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کی بات نہیں کر رہے ہیں۔ دیگر، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ( $v \ll c$ ) تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کی تفاعل موج<sup>۲</sup> جس کی علامت  $\Psi(x, t)$  ہے کو شرودنگر مساوات<sup>۳</sup> حل کر کے حاصل کرتے ہیں

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

جہاں  $i$  منفی ایک  $(-1)$  کا جذر اور  $\hbar$  پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم  $2\pi$  ہوگا:

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات، جو عموماً  $\Psi(x, 0)$  ہوگا، استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے،  $\Psi(x, t)$  تعین کرتی ہے، جیسا کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے فاعلہ نیوٹن  $x(t)$  تعین کرتا ہے۔

## ۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں، ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے  $t$  پر یہ  $x$  کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم<sup>۴</sup> پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے  $t$  پر نقطہ  $x$  پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  دیگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ<sup>۵</sup> درج ذیل ہے۔

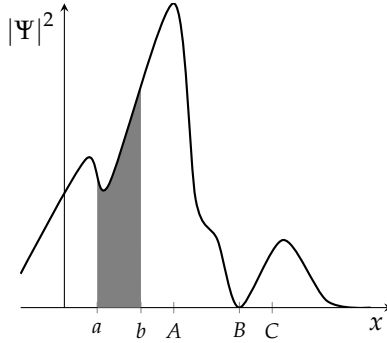
$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{محتمل} & \text{محتمل} \\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} & \text{محتمل} \end{cases} \text{ لمحے } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ}$$

احتمال  $|\Psi|^2$  کی ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ  $A$  پر پایا جائے گا جہاں  $|\Psi|^2$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ  $B$  پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا اس نظریہ سے ذرہ کے بارے میں تمام متبادل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جانتے ہوئے بھی ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاثر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کے صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں عدم تعین<sup>۶</sup> کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور

wave function<sup>۲</sup>  
Schrodinger align<sup>۳</sup>  
statistical interpretation<sup>۴</sup>

تفاعل موج از خود مخلوط ہے لیکن  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$  (جہاں  $\Psi^*$  تفاعل موج  $\Psi$  کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا چاہیے۔  
indeterminacy<sup>۶</sup>



شکل ۱.۲: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ  $a$  اور  $b$  کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ  $A$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ  $B$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتی ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کو انٹرمیکانی نظریہ میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام  $C$  پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کو انٹرمیکانی عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقہ سوچ کے بارے میں علم ہو گا۔

(1) حقیقت: پسند<sup>۸</sup> سوچ: ذرہ مقام  $C$  پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کو انٹرمیکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گا کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ  $C$  پر ہی تھا اور کو انٹرمیکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے متاثر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعین پن متدرجی میں نہیں پایا جاتا بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے تحت کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں  $\Psi$  مکمل کہانی بیان نہیں کرتا ہے اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات<sup>۹</sup> کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند<sup>۱۰</sup> سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتی ہے کہ وہ ایک مقام پر ”کھڑا ہو جائے“ (وہ مقام  $C$  کو کیوں منتخب کرتا ہے، اس بارے میں ہمیں سوال کرنے کی اجازت نہیں ہے)۔ مشاہدہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل پیدا کرتا ہے، یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرہ کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے

<sup>۸</sup>ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ مکمل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی حائل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ  $C$  کے قریب پایا گیا۔

realist<sup>۸</sup>  
hidden variables<sup>۹</sup>  
orthodox<sup>۱۰</sup>

ہیں۔ ”یہ تصور جو کوپنہیگن مفہوم“ پکارا جاتا ہے جناب یوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہر طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ سوچ درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھی عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصہ کی بحث و مباحثوں کے بعد بھی پراسرار کی کاشکار ہے۔

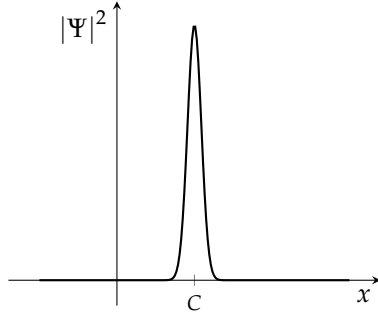
(3) انکار<sup>۱۱</sup> سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حاصل نہیں ہوتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964ء تک تینوں طبقہ سوچ کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جناب جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرہ کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربہ پر تامل مشاہدہ اٹھایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی عملی سوچ اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جناب جان بل کی دلیل سمجھ آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربہ بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں<sup>۱۲</sup>۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتی ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کی مطابقت شدہ ریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرہ پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کے پہلے تجربہ میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے جیسا شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم<sup>۱۳</sup> کر کے اس کو نوکیلی صورت اختیار کرنے پر مجبور کرتی ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گی لہذا دوسری پیمائش جلدی کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دوبہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پاتا ہے، اور دوسری جس میں پیمائش  $\Psi$  کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر گرنے پر مجبور کرتی ہے۔

Copenhagen interpretation<sup>۱۱</sup>  
agnostic<sup>۱۲</sup>

<sup>۱۳</sup> یہ فہم کہ زیادہ سخت ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں بعد میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معنائی خفیہ متغیرات کے نظریات اور دیگر ٹھیکائیاں مثلاً متعدد دنیا تشریح جو ان تینوں سوچ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتے ہیں۔ بہر حال، اب کے لئے بہتر ہے کہ ہم کو ان نظریہ کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کی مسائل کے بارے میں فکر کریں۔  
collapses<sup>۱۴</sup>



شکل ۱.۳: تقاعیل موج کا انہدام: اس لمحہ کے فوراً بعد  $|\Psi|^2$  کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

### ۱.۳.۱ احتمال

#### ۱.۳.۱.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیات کی شماراتی تشریح کی جاتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہوں گے جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ فرض کریں ایک کمرہ میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

• 14 سال عمر کا ایک شخص،

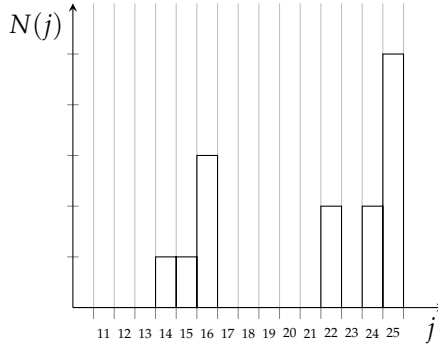
• 15 سال عمر کا ایک شخص،

• 16 سال عمر کے تین اشخاص،

• 22 سال عمر کے دو اشخاص،

• 24 سال عمر کے دو اشخاص،

• اور 25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد N(j) ترسیم کی گئی ہے۔

اگر عمر کے لوگوں کی تعداد کو N(j) لکھا جائے تب درج ذیل ہوگا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ N(17)، مثال کے طور پر، صفر ہوگا۔ کسرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ N = 14 ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال ۱ اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال P(j) ہو تب P(14) = 1/14، P(15) = 1/14، P(16) = 3/14، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$

دھیان رہے کی چودہ یا پندرہ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی  $\frac{1}{7}$  ہوگا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2 کوئی عمر سب سے زیادہ <sup>۱۵</sup> ممکن ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا  $j$  وہی  $j$  ہوگا جس کے لئے  $P(j)$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 وسطانیہ <sup>۱۶</sup> عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ  $j$  کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک دوسرے جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی اوسط <sup>۱۷</sup> عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر  $j$  کی اوسط قیمت جس کو ہم  $\langle j \rangle$  لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

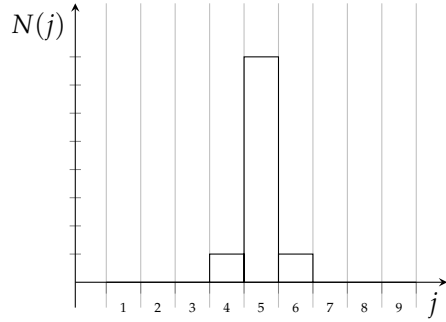
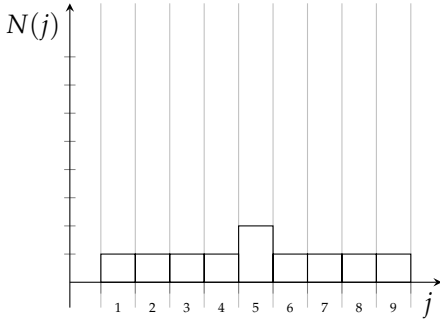
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو توقعاتی قیمت <sup>۱۸</sup> کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہوگا؟ جواب: آپ  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $14^2 = 196$  حاصل کر سکتے ہیں، یا  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $225 = 15^2$ ، یا  $\frac{3}{14}$  احتمال سے  $256 = 16^2$  حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

most probable<sup>۱۵</sup>  
median<sup>۱۶</sup>  
mean<sup>۱۷</sup>  
expectation value<sup>۱۸</sup>



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیلات میں ایک دوسرے جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر  $j$  کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷، ۱.۸ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط  $\langle j^2 \rangle$  عموماً اوسط کے مربع  $\langle j \rangle^2$  کے برابر نہیں ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہو تب  $\langle x^2 \rangle = 5$  جبکہ  $\langle x \rangle^2 = 4$  ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورتوں میں واضح منفرق پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند تر قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے متربیہ نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہوگی جبکہ دھاتی علاقہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاؤ، عددی صورت میں درکار ہوگا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا منفرق

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام  $\Delta j$  کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ  $\langle j \rangle$  مستقل ہے لہذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا



مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے خبات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیریت<sup>۱۹</sup> کہتے ہیں جبکہ تعبیریت کا جذر  $\sigma$  کو معیاری انحراف<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں۔ روایتی طور پر  $\sigma$  کو اوسط  $\langle j \rangle$  کے گرد پھیلاؤ کی پیمائش مانا جاتا ہے۔ ہم تعبیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں  $\sigma$  اس پلے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  معلوم کر کے ان کے منفرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپ کو یاد ہو گا میں نے ذکر کیا  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں  $\sigma^2$  غیر منفی ہو گا لہذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب  $\sigma = 0$  ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاؤ نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

### ۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلک ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے امیراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہذا  $\Delta$  عدد صحیح بھتا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال جمع دو دونوں

<sup>۱۹</sup> variance  
<sup>۲۰</sup> standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگنہ ہوگا۔ (ماسوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچ پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس متاعدہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} \text{بلا منصوبہ منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل  $\rho(x)$  کثافت احتمال<sup>۱۱</sup> کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ  $a$  تا  $b$  کے بیچ  $x$  پایا جانے کا احتمال  $\rho(x)$  کا مکمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

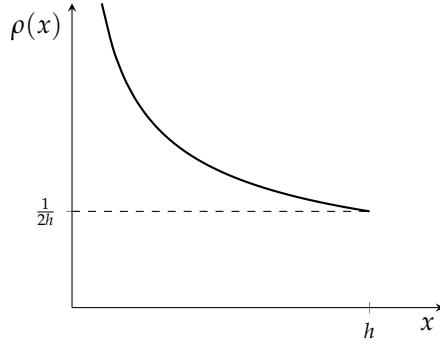
$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی  $h$  ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ و متقی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچے جاتے ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا اوسط قیمت کیا ہوگا؟

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ  $\frac{h}{2}$  سے کم ہوگا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ  $t$  پر فاصلہ  $x$  درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱:  $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سستی رفتار  $\frac{dx}{dt} = gt$  ہوگی اور پرواز کا دورانیہ  $T = \sqrt{2h/g}$  ہوگا۔ وقفہ  $dt$  میں تصویر کھینچنے کا احتمال  $\frac{dt}{T}$  ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت  $dx$  میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو  $\frac{h}{2}$  سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں  $\rho(x)$  کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال از خود لامستناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی  $\rho$  کا تکامل) لازماً مستناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہوگا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

۱. اوسط کا مربع  $\langle i^2 \rangle$  اور مربع کا اوسط  $\langle j^2 \rangle$  تلاش کریں۔

ب. ہر  $j$  کے لیے  $\Delta j$  دریافت کریں اور مساوات ۱۱.۱۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو ۱۱ اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلاواسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ  $x$  پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $\lambda$  مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے  $A$  کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط  $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط  $\langle x^2 \rangle$  اور معیاری انحراف  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج.  $\rho(x)$  کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

## ۱.۴ معمول زنی

ہم تعامل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ  $t$  پر ایک ذرے کا نقطہ  $x$  پر پائے جانے کی کثافت احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت  $|\Psi|^2$  کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.20)$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تعامل موج کو مساوات شرودنگر تعین کرتی ہے اور  $\Psi$  پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہوگا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر  $\Psi(x, t)$  حل ہو تب  $A\Psi(x, t)$  بھی حل ہوگا، جہاں  $A$  کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمول زنی<sup>۲۲</sup> کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمول پر لایا گیا ہے۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل  $\Psi = 0$  کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمول پر لانے کے متبادل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شرودنگر مساوات کے قابل مرلجہ تکامل<sup>۲۳</sup> حل ہونگے۔<sup>۲۴</sup>

یہاں رک کر ذرا غور کریں! فرض کریں لمحہ  $t = 0$  پر میں ایک تفاعل موج کو معمول پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ  $\Psi$  ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمول پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں  $A$  وقت  $t$  کا تابع تفاعل ہو گا تاکہ ایک مستقل، اور  $A\Psi$  شرودنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماراتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹم نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہذا اہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف  $t$  کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے پہلے فقرہ میں کل تفرق  $\frac{d}{dt}$  استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل  $t$  اور  $x$  دونوں کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق  $\frac{\partial}{\partial t}$  استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi| = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V\Psi$$

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$(1.24) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V\Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

normalization<sup>۲۵</sup>  
square-integrable<sup>۲۶</sup>

<sup>۲۵</sup> ظاہر ہے کہ  $|x| \rightarrow \infty$  کی صورت میں  $\Psi(x, t)$  کو  $1/\sqrt{|x|}$  سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا پتہ غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مسوات ۱.۲۱ میں مکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جاسکتی ہے:

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ  $x \rightarrow \pm \infty$  کرتے ہوئے  $\Psi(x, t)$  صفر <sup>۲۵</sup> کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر متاثر) مستقل ہوگا؛ لہذا  $t = 0$  پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔ سوال ۱.۴: لہذا  $t = 0$  پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $b$  مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج  $\Psi$  کو معمول پر لائیں (یعنی  $a$  اور  $b$  کی صورت میں  $A$  تلاش کریں)۔

ب. متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $\Psi(x, 0)$  ترسیم کریں۔

ج. لہذا  $t = 0$  پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ  $a$  کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق  $b = a$  اور  $b = 2a$  کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر  $x$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں  $A$ ،  $\lambda$  اور  $\omega$  مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا محقق <sup>۲۶</sup>  $V$  ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تفاعل موج  $\Psi$  کو معمول پر لائیں۔

ب. متغیرات  $x$  اور  $x^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

<sup>۲۵</sup> طبیعیات کی میدان میں لامتناہی پر تفاعل موج ہر صورت صفر کو پہنچتی ہے۔  
<sup>۲۶</sup> potential

ج. متغیر  $x$  کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $|\Psi|^2$  ترسیم کر کے اس پر نقاط  $(\langle x \rangle + \sigma)$  اور  $(\langle x \rangle - \sigma)$  کی نشاندہی کریں جس سے  $x$  کی ”پھیل“ کو  $\sigma$  سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہوگی۔ اس سمت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

## ۱.۵ معیار حرکت

حال  $\Psi$  میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام  $x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۱.۲۸) \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت  $\int x |\Psi|^2 dx$  حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعین ہے) تفاعل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں  $\langle x \rangle$  ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہوگی جو یکساں حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال  $\Psi$  میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی سگرائے کو ایک ہی حال  $\Psi$  میں لاکر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط  $\langle x \rangle$  ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیش کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متعرب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا منطقی ترسیم تقریباً  $|\Psi|^2$  دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً  $\langle x \rangle$  ہوگی۔ (چونکہ ہم مستحالی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کیا جاسکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متعرب حاصل ہوں گے۔) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سگرا پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ  $\Psi$  وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ  $\langle x \rangle$  تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱.۲۹) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

کمل بالخص کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۰) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں  $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$  استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا رد کیا کہ  $(\pm)$  لامتناہی پر  $\Psi$  کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ مکمل بالخصوص لاگو کرتے ہیں۔

$$(1.31) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ  $x$  کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے تاکہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم  $\Psi$  جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہوگا۔

$$(1.32) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

مساوات ۱.۳۱ میں  $\Psi$  سے بلاواسطہ  $\langle v \rangle$  دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت  $p = mv$  کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$(1.33) \quad \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx$$

میں  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$(1.34) \quad \langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx$$

$$(1.35) \quad \langle p \rangle = \int \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

کوانٹم میکانیات میں مقام کو عامل  $x$  اور معیار حرکت کو عامل  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  ظاہر کرتے ہیں۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے بیچ لکھ کر مکمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر متداریوں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$



اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار مثلاً  $Q(x, p)$  کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر  $p$  کی جگہ  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  پر کر کے حاصل حاصل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے پیچ لپیٹ کر درج ذیل عمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx \quad (1.36)$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx \quad (1.37)$$

حال  $\Psi$  میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکت کی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۲ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب بوبر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ مثال قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز ہے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

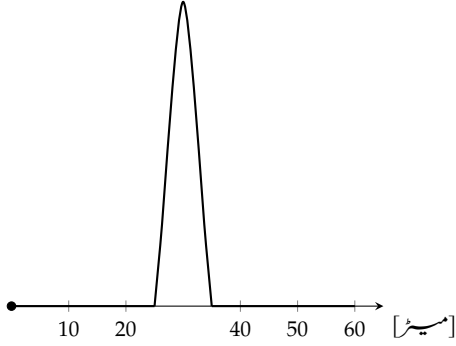
سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر عمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو  $x$  کے اوپر سے گزار کر، یہ جاننے ہوئے کہ  $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$  ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ  $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$  ہوگا؟

سوال ۱.۷:  $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$  کا حساب کریں۔ جواب:

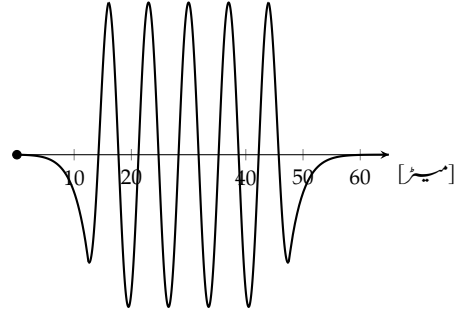
$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \quad (1.38)$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ ابھر لفظ کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو  $x$  اور  $t$  کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا پاتی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب  $e^{-iVt/\hbar}$  ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکت کی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصہ معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھا خاصہ معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔

## ۱.۶ اصول عدم یقینیت

منرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے متاصر ہو گئے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج<sup>۳۱</sup> پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھکادیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے متاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام ہوتا ناممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج حنا صی حد تک متبادل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہو گا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم متبادل تعین ہوگا۔ فورسٹر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھنڈا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے  $\Psi$  کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ذہن<sup>۳۲</sup> بروگلی

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.39)$$

پیش کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاؤ معیار حرکت میں پھیلاؤ کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہوگا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.40)$$

جہاں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  بالترتیب  $x$  اور  $p$  کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت<sup>۳۳</sup> ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”پھیلاؤ“ سے مراد یہ ہے کہ یکاں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو ( $\Psi$  کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں متعریب نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو ( $\Psi$  کو ایک لمبی سائنس موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے متعریب متعریب ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نہ ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۴۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی جامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ  $\Psi$  کو ایک لمبی بلدار لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو،  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = A e^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل  $V(x)$  کے لیے  $\Psi$  شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج.  $x$ ،  $x^2$ ،  $p$  اور  $p^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل  $\pi$  کے ہندسی پھیلاؤ کے اولین ۲۵ ہندسوں (۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ۹, ۰, ۰, ۰) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیماس کی خسراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے ٹکڑا کر 0 اور  $\pi$  زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال  $\rho(\theta)$  کیا ہوگا؟ اشارہ: زاویہ  $\theta$  اور  $(\theta + d\theta)$  کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال  $\rho(\theta) d\theta$  ہوگا۔ متغیر  $\theta$  کے لحاظ سے  $\rho(\theta)$  کو وقفہ  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں  $\rho$  صفر ہوگا)۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہوگا۔

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle \theta \rangle$ ،  $\langle \theta^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج. اسی طرح  $\langle \sin \theta \rangle$ ،  $\langle \cos \theta \rangle$  اور  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے  $x$  محدد (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱.  $\rho(x)$  کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟  $x$  کے لحاظ سے  $\rho(x)$  کو  $-2r$  تا  $2r$  ترسیم کریں جہاں  $r$  سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ:  $x$  اور  $(x + dx)$  کے بیچ  $\psi$  کی موجودگی کا احتمال  $\rho(x) dx$  ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ اسے کسی مخصوص خطہ میں  $\theta$  کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ  $d\theta$  کا مطابقتی  $dx$  کیا ہوگا؟

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ  $L$  رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر  $L$  لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ اسے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ  $t$  پر  $(a < x < b)$  کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال  $P_{ab}(t)$  ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ہے۔  $J(x, t)$  کی اکائی کیا ہوگی؟ تبصرہ: چونکہ  $J$  آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ  $x$  پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے

لہذا  $J$  کو رو احتمال<sup>۳۴</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $P_{ab}(t)$  بڑھ رہا ہو تب خطہ کے ایک سر میں احتمال کے آمد خطہ کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہوگا۔

ب۔ سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال  $\rho$  کیا ہوگا؟ (یہ زیادہ مسزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک غیر مستحکم ذرہ<sup>۳۵</sup> کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا ”عصر حیات“  $\tau$  ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (مکمل طور پر) وقت نمائی گھٹے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = e^{-t/\tau}$$

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۳ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی  $V$  ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں  $V$  کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں  $V_0$  حقیقی مخفی توانائی اور  $\Gamma$  مثبت حقیقی مستقل ہے۔

۱. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P$$

ب۔  $P(t)$  کے لیے حل کریں اور ذرے کا عصر حیات  $\Gamma$  کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شرودنگر کے کسی بھی دو عدد (معمول پر لانے کے قابل) حل  $\Psi_1$ ،  $\Psi_2$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ  $t = 0$  پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. معمول زنی مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب. لمحہ  $t = 0$  پر  $x$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ  $t = 0$  پر  $p$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو  $P = m d\langle x \rangle / dt$  سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د.  $x^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ه.  $p^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و.  $x(\sigma_x)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز.  $p(\sigma_p)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹم میکانیات اس وقت کارآمد ہوگی جب ذرے کاڈی بروگلی طول موج  $(h/p)$  نظام کی جسامت  $(d)$  سے زیادہ ہو۔ درجہ  $T$  (کیلون) پر حراری توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکی توانائی درج ذیل ہوگی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل ہے لہذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹم میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہوگا۔

۱. ٹھوس اجسام: فاصلہ حبال ٹھوس اجسام میں تقریباً  $d = 0.3 \text{ nm}$  ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران کوانٹم میکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مسرکزہ کوانٹم میکانی ہوں گے۔ (سوڈیم<sup>۲۶</sup> کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹم میکانی ہوں گے جبکہ جوہری مسرکزہ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹم میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مانع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا) ماسوائے  $4 \text{ K}$  سے کم درجہ حرارت پر موجود ہیلیم<sup>۳</sup> کے لئے۔

ب. گیس: میکانی دباؤ  $P$  پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کوانٹم میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی

گیس متانون  $(PV = Nk_B T)$  استعمال کر کے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب:  $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5} P^{2/5}$ ؛ ظاہر ہے ہم  $m$  کو چھوٹے سے چھوٹا اور  $P$  کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ)

گیس کو کوانٹم میکانی خواص رکھے۔ زمینی ہوا دباؤ پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا پروٹون فضا<sup>۳۸</sup> میں (جہاں درجہ حرارت 3 K اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً 1 cm ہے) ہائیڈروجن کوانٹم میکانی ہوگا؟





## باب ۲

# غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

## ۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف متعارفوں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفی توانائی  $V(x, t)$  کی لئے شرودنگر مساوات

$$(۲.۱) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کرتے ہوئے  $\Psi(x, t)$  حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ  $V$  وقت  $t$  کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں مساوات شرودنگر کو علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے، جو ماہر طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب

$$(۲.۲) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں  $\psi$  صرف  $x$  اور  $\varphi$  صرف  $t$  کا تفاعل ہے۔ ظاہری طور پر حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست و قدم نظر نہیں آتا ہے لیکن حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً ہوتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے حاصل حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ و تاہل علیحدگی حلوں کیلئے درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi$$

separation of variables<sup>1</sup>

جودہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar\psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \varphi + V\psi\varphi$$

دونوں اطراف کو  $\psi\varphi$  سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(۲.۳) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V$$

اب بائیں ہاتھ تفاعل صرف  $t$  کا تابع ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف  $x$  کا تابع ہے۔ یاد رہے اگر  $V$  از خود  $x$  اور  $t$  دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہوگا۔ صرف  $t$  تبدیل ہونے سے دایاں ہاتھ کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا  $t$  تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ اسی طرح صرف  $x$  تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا  $x$  تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل کہتے ہیں جس کو ہم  $E$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ یو مساوات ۲.۳ درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۴) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi$$

اور

$$(۲.۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دوسرا تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے۔ دونوں اطراف کو  $dt$  سے ضرب دیجئے ہوئے مکمل لیں۔ یوں عمومی حل  $Ce^{-iEt/\hbar}$  حاصل ہوگا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب  $\psi\varphi$  میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا ہم مستقل  $C$  کو  $\psi$  میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۶) \quad \varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو غیر متابع وقت شرودنگر مساوات<sup>۲</sup> کہتے ہیں۔ پوری طرح مخفی توانائی  $V$  جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ خفی توانائی کیلئے غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات کی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تاجع وقت شرودنگر مساوات کے زیادہ تر حل  $\psi(x)\varphi(t)$  کی صورت میں نہیں لکھے جاسکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہوگا۔

(1) یہ ساکن حالات ہیں۔ اگرچہ تعامل موج از خود

$$(۲.۷) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

وقت  $t$  کا تاجع ہے، کثافت احتمال

$$(۲.۸) \quad |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^* e^{+iEt/\hbar} \psi e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x)|^2$$

وقت کا تاجع نہیں ہے؛ تابعیت وقت کٹ جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حشر کی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب میں ہوگا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۹) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^* Q \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

ہر توقعاتی قیمت، وقت میں منتقل ہوگی؛ یہاں تک کہ ہم  $\varphi(t)$  کو رد کر کے  $\Psi$  کی جگہ  $\psi$  استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات  $\psi$  کو ہی تعامل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسئلہ کھڑے ہو سکتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تعامل موج ہر صورت تاجع وقت ہو گا۔ بالخصوص  $\langle x \rangle$  منتقل ہو گا لہذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت)  $\langle p \rangle = 0$  ہو گا۔ ساکن حال میں کبھی بھی کچھ نہیں ہوتا ہے۔

(2) یہ غیر مبہم کل توانائی کے حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حشر کی جمع خفی) کو ہیملٹن<sup>۲</sup> کہتے ہیں جس کو  $H$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(۲.۱۰) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

اس کا مطلب یقینی ہیملٹنی عامل، قواعد و ضوابط کے تحت  $p \rightarrow (\hbar/i)(\partial/\partial x)$  پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۱) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

یوں غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کریگی

$$(۲.۱۲) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۳) \quad \langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi dx = E \int |\psi|^2 dx = E \int |\Psi|^2 dx = E$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\psi$  کی معمولی  $\psi$  کی معمولی  $\psi$  کے مترادف ہے۔ مزید درج ذیل

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H} \psi) = \hat{H}(E \psi) = E(\hat{H} \psi) = E^2 \psi$$

کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = E^2 \int |\psi|^2 dx = E^2$$

یوں  $H$  کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۴) \quad \sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0$$

یاد رہے کہ  $\sigma = 0$  کی صورت میں تمام امکان کی قیمت ایک دوسری جیسی ہوگی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہوگا)۔ نتیجتاً متبادل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہوے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً ایک ہی قیمت  $E$  دے گی۔ (اسی کی بنا علیحدگی مستقل کو  $E$  سے ظاہر کیا گیا۔)

(3) عمومی حل متبادل علیحدگی حلوں کا خطہ جوڑا ہوگا۔ جیسا ہم جلد دیکھیں گے، غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل  $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$  دے گا جہاں ہر ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل  $(E_1, E_2, E_3, \dots)$  منسلک ہوگا لہذا ہر اجازتی توانائی کا ایک منفرد تقابل عمل موجب پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x) e^{-iE_1 t / \hbar}, \quad \Psi_2(x, t) = \psi_2(x) e^{-iE_2 t / \hbar}, \dots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑا خود ایک حل ہوگا۔ ایک بار متبادل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$(۲.۱۵) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}$$

حقیقتاً تاجع وقت شرودنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل  $(c_1, c_2, \dots)$  تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط مطمئن کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کر پائیں گے۔

linear combination<sup>\*</sup>  
allowed energy<sup>o</sup>

باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک بار غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تاجع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں ہم بہت کچھ کہا چکا ہے۔ میں ان کو مختصر اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ زیر غور عمومی مسئلہ کا غیر تاجع وقت خفی توانائی  $V(x)$  اور ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام  $t$  کیلئے  $\Psi(x, t)$  تلاش کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلی قدم میں آپ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ  $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$  حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی  $(E_1, E_2, E_3, \dots)$  ہوگی۔ ٹھیک ٹھیک  $\Psi(x, 0)$  پر بیٹھنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$(۲.۱۲) \quad \Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

یہاں کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت مستقل  $c_1, c_2, c_3, \dots$  دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت  $e^{-iE_n t/\hbar}$  چسپاں کریں گے۔

$$(۲.۱۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t)$$

چونکہ متابیل علیحدگی حل

$$(۲.۱۸) \quad \Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تاجع وقت ہوں گی لہذا یہ از خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۴) یہ خاصیت نہیں رکھتا ہے؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیاں ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر  $|\Psi|^2$  کا حساب کرتے ہوئے قوت نمائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتی ہیں۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ ابتدائی طور پر دو ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو:

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کہ مستقل  $c_n$  اور حالات  $\psi_n(x)$  حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت کیلئے تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  کیا ہوگا؟ کشاف احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔

حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

جہاں  $E_1$  اور  $E_2$  بالترتیب تفاعل  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left( c_1 \psi_1 e^{iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{iE_2 t/\hbar} \right) \left( c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \\ = c_1^2 \psi_1^2 + c_2^2 \psi_2^2 + 2c_1 c_2 \psi_1 \psi_2 \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar]$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ یور  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  استعمال کیا۔) ظاہری طور پر کثافت احتمال زاویائی تعدد  $(\frac{E_2 - E_1}{\hbar})$  سے سائن نمائندگی کا تعاش کر تا ہے لہذا یہ ہرگز ساکن حال نہیں ہوگا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعلات کے خطی جوڑنے حرکت پیدا کیا۔ □

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

۱. متبادل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل  $E$  لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۴ میں  $E$  کو  $E_0 + i\Gamma$  لکھ کر (جہاں  $E$  اور  $\Gamma$  حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام  $t$  کے لئے مساوات ۱۱.۲۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب  $\Gamma$  صفر ہو۔

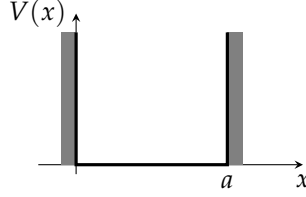
ب. غیر تاجع وقت تفاعل موج  $\psi(x)$  ہر موقع پر حقیقی لیا جاسکتا ہے (جبکہ تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تاجع شرودنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (تتی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی  $\psi$  ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص  $E$  کے لئے  $\psi(x)$  مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ  $(\psi + \psi^*)$  اور  $i(\psi - \psi^*)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر  $V(x)$  جھٹے تفاعل ہو یعنی  $V(-x) = V(x)$  تب  $\psi(x)$  کو ہمیشہ جفت یا طاق لیا جاسکتا ہے۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص  $E$  کے لئے  $\psi(x)$  مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب  $\psi(-x)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ  $\psi(x) \pm \psi(-x)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایا جاسکتا ہو،  $E$  کی قیمت لازماً  $V(x)$  کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مشا کیسا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

دکھائیں کہ  $E < V$  کی صورت میں  $\psi$  اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک دوسری جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تفاعل معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوگا۔



شکل ۲.۱: لامستثنائی چپکور کنواں (مساوات ۲.۱۹)

## ۲.۲ لامستثنائی چپکور کنواں

درج ذیل مندرجہ کریں (شکل ۲.۱)۔

$$(۲.۱۹) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اس مخفی توانائی میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی  $x = 0$  اور  $x = a$  پر، جہاں ایک لامستثنائی قوت اس کو مندرار ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ ایک کنواں میں ایک لامستثنائی لچکدار گیند ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا رہتا ہو۔ (اگرچہ یہ ایک مندرجہ مخفی توانائی ہے، آپ اس کو اہمیت دیں۔ اگرچہ یہ بہت سادہ نظر آتا ہے البتہ اس کی سادگی کی بنا ہی یہ بہت ساری معلومات مندرجہ کرنے کے قابل ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

کنواں سے باہر  $\psi(x) = 0$  ہوگا (البتہ ایساں ذرہ پایا جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنواں کے اندر، جہاں  $V = 0$  ہے، غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۲۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

یا

$$(۲.۲۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے مندرجہ کرتا ہوں کہ  $E \geq 0$  ہوگا۔ ہم سوال ۲.۲ سے جانتے ہیں کہ  $E < 0$  سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کا کلاسیکی سادہ ہارمونک مرتعش<sup>۱</sup> کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$(۲.۲۲) \quad \psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

جہاں  $A$  اور  $B$  اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستطالات کو مسئلہ کے سرحدی شرائط تعین کرتے ہیں۔  $\psi(x)$  کے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً  $\psi$  اور  $\frac{d\psi}{dx}$  دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہوگا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور  $V = \infty$  کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کچی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل  $\psi(x)$  کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (۲.۲۳)$$

تاکہ کنواں کے باہر اور کنواں کے اندر حل ایک دوسرے کے ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں  $A$  اور  $B$  کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

ہے لہذا  $B = 0$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = A \sin kx \quad (۲.۲۴)$$

یوں  $\psi(a) = A \sin ka$  کی بنیاد  $A = 0$  ہوگا (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل  $\psi(x) = 0$  ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا  $\sin ka = 0$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (۲.۲۵)$$

اب  $k = 0$  (بھی  $\psi(x) = 0$  دیتا ہے جس) میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  کی بنا  $k$  کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہذا ہم منفی کی علامت کو  $A$  میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۲.۲۶)$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ  $x = a$  پر سرحدی شرط مستقل  $A$  تعین نہیں کرتا ہے بلکہ اس کی بجائے مستقل  $k$  تعین کرتے ہوئے  $E$  کی اجازتی قیمتیں تعین کرتا ہے:

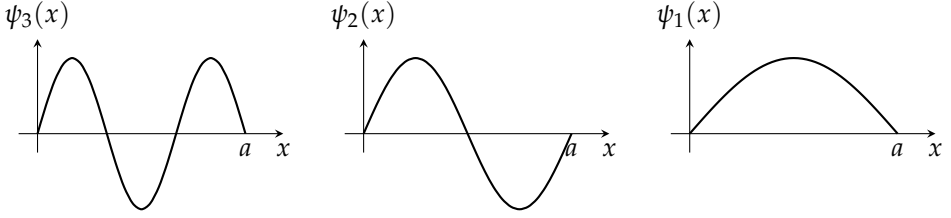
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (۲.۲۷)$$

کلاسیکی صورت کے برعکس لامتناہی چکور کنواں میں کو انٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص اجازت<sup>۸</sup> قیمتوں میں سے ہونا ہوگا۔ مستقل  $A$  کی قیمت حاصل کرنے کے لئے  $\psi$  کو معمول پر لانا ہوگا:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

boundary conditions<sup>۷</sup>  
allowed<sup>۸</sup>





شکل ۲.۲: لامستثنای چکور کنواں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

یہ  $A$  کی صرف مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر  $A = \sqrt{2/a}$  منتخب کرنا بہتر ہوگا (کیونکہ  $A$  کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنواں کے اندر شرودنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۲۸) \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میرے قول کو پورا کرتے ہوئے، (ہر مثبت عدد صحیح  $n$  کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت شرودنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامستثنای سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے جو لمبائی  $a$  کے دھاگے پر ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل  $\psi_1$  جو زمینی حالت کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں  $n^2$  کے براہ راست بڑھتی ہیں **پہچان** **حالات** کہلاتے ہیں۔ تفاعلات  $\psi_n(x)$  چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری جفت اور طاق ہیں۔  $\psi_1$  جفت ہے،  $\psi_2$  طاق ہے،  $\psi_3$  جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔

۲. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے **عقدوں** (عبور صفر) کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہوگا۔ (چونکہ آخری نقطہ کے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہذا)  $\psi_1$  میں کوئی عقدہ نہیں پایا جاتا ہے،  $\psi_2$  میں ایک پایا جاتا ہے،  $\psi_3$  میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

۳. یہ تمام درج ذیل نقطہ نظر سے باہمی **عمودوں** <sup>۱۲</sup> ہیں جہاں  $m \neq n$  ہے۔

$$(۲.۲۹) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0$$

ground state<sup>۹</sup>  
excited states<sup>۱۰</sup>  
nodes<sup>۱۱</sup>  
orthogonal<sup>۱۲</sup>

ثبوت:

$$\begin{aligned}
\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a \left[ \cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right] dx \\
&= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right\} \Big|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right\} = 0
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ  $m = n$  کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہوگا؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں ناقابل قبول ہوگا۔) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل ہمیں بتاتا ہے کہ مکمل کی قیمت 1 ہے۔ درحقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فترے میں سویا جا سکتا ہے:<sup>۱۳</sup>

$$(۲.۳۰) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

جہاں  $\delta_{mn}$  کرونیکر ڈیلٹا<sup>۱۴</sup> کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(۲.۳۱) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام)  $\psi$  معیار عمودی<sup>۱۵</sup> ہیں۔

۴. یہ مکمل<sup>۱۶</sup> ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تعامل  $f(x)$  کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے:

$$(۲.۳۲) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میں تعاملات  $\sin \frac{n\pi x}{a}$  کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اعلیٰ علم الاحصاء کے ساتھ واقعیت کی صورت میں آپ مساوات ۲.۳۲ کو  $f(x)$  کا فوریر تسلسل<sup>۱۷</sup> پہچان پائیں گے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تعامل کو فوریر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جا سکتا ہے، بعض اوقات مسئلہ ڈرشلے<sup>۱۸</sup> کہلاتا ہے۔<sup>۱۹</sup>

<sup>۱۳</sup> یہاں تمام  $\psi$  حقیقی ہیں لہذا  $\psi_m^* = \psi_m$  پر \* ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقل کی استعمال کے نقطہ نظر سے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔

<sup>۱۴</sup> Kronecker delta

<sup>۱۵</sup> orthonormal

<sup>۱۶</sup> complete

<sup>۱۷</sup> Fourier series

<sup>۱۸</sup> Dirichlet's theorem

<sup>۱۹</sup> تعامل  $f(x)$  میں متناہی تعداد کی عدم استمرار (چھلانگ) پائے جا سکتی ہیں۔

کسی بھی دیے گئے تفاعل  $f(x)$  کے لئے عددی سروں  $c_n$  کو  $\{\psi_n\}$  کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو  $\psi_m(x)$  سے ضرب دے کر تحمل لیں:

$$(۲.۳۳) \quad \int \psi_m(x)^* f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

(آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرونیٹر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دیتا ہے ماسوائے اس جزو کو جس کے لئے  $n = m$  ہو۔) یوں تفاعل  $f(x)$  کے پھیلاؤ کے  $n$  ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہوگا۔<sup>۲۰</sup>

$$(۲.۳۴) \quad c_n = \int \psi_n(x)^* f(x) dx$$

درج بالا چار خواص انتہائی طاقتور ہیں جو صرف لامتناہی چکور کنواں کے لیے مخصوص نہیں ہیں۔ پہلا خواص ہر اس صورت میں کارآمد ہوگا جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسرا، مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عامل گیر خواص ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ ان تمام مخفیہ کے لئے جن کو آپ کا (ممکنہ) سامن ہو سکتا ہے کے لئے عملیت کارآمد ہوگی، لیکن اس کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ جس کی بنا عموماً ماہر طبیعیات یہ ثبوت دیکھنے بغیر، اس کو مان لیتے ہیں۔

لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۳۵) \quad \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

میں نے دعویٰ کیا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔

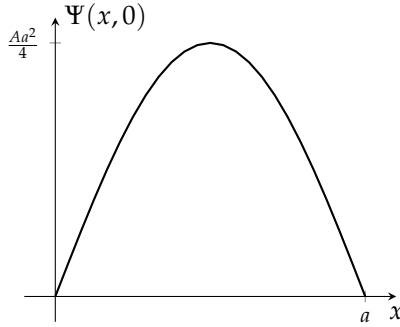
$$(۲.۳۶) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہوگا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج  $\psi(x, 0)$  پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر  $c_n$  درکار ہوں گے:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

تفاعلات  $\psi$  کی کمیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشل کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر  $\psi(x, 0)$  کو ہر صورت یوں بیان کر سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا  $c_n$  کو فورسٹر تسلسل سے حاصل

<sup>۲۰</sup> آپ یہاں فضلی تغیر کو  $m$  یا  $n$  کوئی تیسرا حرف لے سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کریں)، اور ہاں یاد رہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

کیا جاسکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x, 0) dx \quad (2.32)$$

آپ نے دیکھا: دی گئی ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاؤ کے عددی سروں  $c_n$  کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں پر کر  $\Psi(x, t)$  حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج جانتے ہوئے دلچسپی کی کسی بھی حرکت کی مقدار کا حساب، باب ۱ میں متعلقہ ترائیکب استعمال کرتے ہوئے، کیا جاسکتا ہے۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہوگا؛ صرف  $\psi$  کی قیمتیں اور احبازاتی توانائیاں یہاں سے مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جہاں  $A$  ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

کنواں سے باہر  $\psi = 0$  ہے۔  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^2(a - x)^2 dx = |A|^2 \frac{a^5}{30}$$

$A$  تعین کرتے ہیں:

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مسوات ۲.۳۷ کے تحت  $n$  واں عددی سر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[ a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left\{ a \left[ \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right. \\
 &\quad \left. - \left[ 2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right\} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[ -\frac{a^3}{n\pi} \cos(n\pi) + a^3 \frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3} \cos(n\pi) + a^3 \frac{2}{(n\pi)^3} \cos(0) \right] \\
 &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3} [\cos(0) - \cos(n\pi)] \\
 &= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا (مسوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

غیر محتاط بات چیت میں ہم کہتے ہیں کہ  $\Psi$  میں  $\psi_n$  کی مقدار کو  $c_n$  ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ  $n$  ویں ساکن حال میں ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے جو درست نہیں چونکہ ذرہ حال  $\Psi$  میں ناکہ حال  $\psi_n$  میں پایا جاتا ہے؛ مزید تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرہ کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی مشہود کی پیمائش کرتے ہو جس کا جواب ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیمائش سے  $E_n$  قیمت حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔ (کوئی بھی پیمائش، ”احبازتی“ قیمتوں میں سے کوئی ایک دے گی، اسی لئے انہیں احبازتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت  $E_n$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا

$$(۲.۳۸) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

باب ۲. غیر تابَع وقت شرودنگر مساوات

جس کا ثبوت  $\Psi$  کی عمود زنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام  $c_n$  غیر تابَع وقت ہیں لہذا میں  $t = 0$  پر ثبوت پیش کرتا ہوں۔ آپ باآسانی اس ثبوت کو عمومیّت دے کر کسی بھی  $t$  کے لئے ثبوت پیش کر سکتے ہیں)۔

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int \left( \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \right)^* \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

(یہاں بھی  $m$  پر مجموعہ لینے میں کرینیکر ڈیلٹا جب  $m = n$  کو چنتا ہے۔)

مزید، توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً درج ذیل ہوگی

$$(۲.۳۹) \quad \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n$$

جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جاسکتی ہے: غیر تابَع وقت شرودنگر مساوات کہتی ہے

$$(۲.۴۰) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left( \sum c_m \psi_m \right)^* H \left( \sum c_n \psi_n \right) dx \\ &= \sum \sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum |c_n|^2 E_n \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابَع وقت ہوگا اور یوں  $H$  کی توقعاتی قیمت بھی غیر تابَع وقت ہوگی۔ کوانٹم میکانیات میں بتا توانائی<sup>۲۱</sup> کی یہ ایک مثال ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تناسل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال  $\psi_1$  (شکل ۲.۲) کے ساتھ متربی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کرتے گے کہ  $|c_1|^2$  غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left( \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 = 0.998555 \dots$$

باقی تمام عددی سرسمل کر منرق دیئے ہیں:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left( \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت ہماری توقعات کے عین مطابق درج ذیل ہے۔

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \right)^2 \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{480\hbar^2}{\pi^4ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2}$$

یہ  $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$  کے بہت قریب، ہیجان حل حالتوں کی شمول کی بنا معمولی زیادہ ہے۔ □

سوال ۲.۳: دکھائیں کہ لامستثنائی چکور کنواں کے لئے  $E = 0$  یا  $E < 0$  کی صورت میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کا کوئی بھی متابل قبول حل نہیں پایا جاتا ہے۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلہ کی ایک خصوصی صورت ہے، لیکن اس بار شرودنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط پر پورا نہیں اتر سکتے ہیں۔)

سوال ۲.۴: لامستثنائی چکور کنواں کے  $n$  ویں ساکن حال کیلئے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$  اور  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول غیر یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال غیر یقینیت کی حد کے قریب ترین ہوگا؟

سوال ۲.۵: لامستثنائی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج اولین دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا.  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لائیں۔ (یعنی  $A$  تلاش کریں۔ آپ  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کی معیاری عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ  $t = 0$  پر  $\Psi$  کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا۔ اگر آپ کو شک ہے، جزو ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب.  $\Psi(x, t)$  اور  $|\Psi(x, t)|^2$  تلاش کریں۔ موحضہ الذکر کو وقت کے سائن تفاعل عمل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا۔ نتائج کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر  $\omega \equiv \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$  لیں۔

ج.  $\langle x \rangle$  تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔ اس ارتعاش کی زاویائی تعدد کتنی ہوگی؟ ارتعاش کا چیطہ کیا ہوگا؟ (اگر آپ کا چیطہ  $\frac{a}{2}$  سے زیادہ ہو تب آپ کو جیل بھیجنے کی ضرورت ہوگی۔)

د.  $\langle p \rangle$  تلاش کریں (اور اس سے زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ه. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش سے کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں؟ اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہوگا؟  $H$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ  $E_1$  اور  $E_2$  کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگرچہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی با معنی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (چونکہ یہ کسی بھی متابل پیمائش مقدار میں کٹ جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر ہم سوال ۲.۵ میں  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کرتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنجر مساوات

جہاں  $\phi$  کوئی مستقل ہے۔  $\Psi(x, t)$ ،  $|\Psi(x, t)|^2$  اور  $\langle x \rangle$  تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص  $\phi = \pi/2$  اور  $\phi = \pi$  کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامستثنیٰ چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a - x), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

ا.  $\Psi(x, 0)$  کا خاکہ کھینچیں اور مستقل  $A$  کی قیمت تلاش کریں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ  $E_1$  ہونے کا احتمال کتنا ہوگا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک لامستثنیٰ چکور کنواں، جس کی چوڑائی  $a$  ہے، میں کمیت  $m$  کا ایک ذرہ کنواں کے بائیں حصے سے ابتدا ہوتا ہے اور یہ  $t = 0$  پر بائیں نصف حصے کے کسی بھی نقطہ پر ہو سکتا ہے۔

ا. اس کی ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے اور اسے معمول پر لانا بھولے گئے۔)

ب. پیمائش توانائی کا نتیجہ  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۲.۹: لمحہ  $t = 0$  پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے  $H$  کی توقعاتی قیمت مکمل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$$

مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔ دھیان رہے کیونکہ  $H$  غیر تابع وقت ہے لہذا  $t = 0$  لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

## ۲.۳ ہارمونی مرتعش

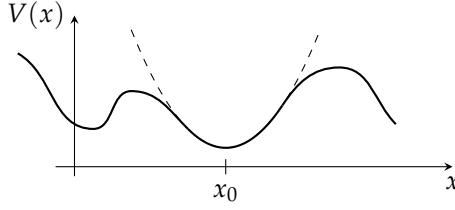
کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک پلک دار اسپرنگ جس کا مقیاس پلک  $k$  ہو اور کمیت  $m$  پر مشتمل ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت قانون ہکے<sup>۲۲</sup>

$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

کے تحت ہوگی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$





شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے معتمی کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکانی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

ہوگا جہاں

$$(۲.۴۱) \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

$$(۲.۴۲) \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

ہوگی جس کی ترسیم قطع مکانی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی سر تعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور قانون ہک اس سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہوگا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، معتمی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں تخمین قطع مکانی ہوگا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی  $V(x)$  کے کم سے کم نقطہ  $x_0$  کے لحاظ سے  $V(x)$  کو ٹیلر تسلسل<sup>۲۳</sup> کے لحاظ سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

اس سے  $V(x_0)$  مخفی کر کے (ہم  $V(x)$  سے کوئی بھی مستقل بغیر خطرو منکر مخفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہوگا) اور یہ جانتے ہوئے کہ  $V'(x_0) = 0$  ہوگا (چونکہ  $x_0$  کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلند رتبی ارکان رد کرتے ہوئے (جو  $(x - x_0)$  کی قیمت کم ہونے کی صورت میں متابل نظر انداز ہونگے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

جو نقطہ  $x_0$  پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس پگ  $k = V''(x_0)$  ہو۔ یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا سادہ ہارمونی سر تعش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا محیط کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوگا۔

کوانٹم میکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$(۲.۴۳) \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

کے لیے شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس پلک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات

$$(۲.۴۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو ”طاققت کے بل بوتے پر“ **طاققت تسلسل** کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولم مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **حالیہ سیدھی** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور جلد حل دیتا) ہے۔ اگر آپ طاققت تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپ کو یہ ترکیب سیکھنی ہوگی۔

### ۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتدا کرتے ہیں

$$(۲.۴۵) \quad \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2] \psi = E\psi$$

جہاں  $p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$(۲.۴۶) \quad H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$$

کو کو اجزائے ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عداد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ  $p$  اور  $x$  عاملین ہیں اور عاملین عموماً مقلوبے نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ  $xp$  سے مراد  $px$  نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل مقداروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$(۲.۴۷) \quad a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp ip + m\omega x)$$

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخیری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب  $a_- a_+$  کیا ہوگا؟

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو  $(xp - px)$  پایا جاتا ہے جس کو ہم  $x$  اور  $p$  کا مقلب<sup>۲۵</sup> کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیمائش ہے۔ عمومی طور پر عامل  $A$  اور عامل  $B$  کا مقلب (جسے چکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہوگا۔

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (۲.۴۸)$$

اس علاقیت کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar} [x, p] \quad (۲.۴۹)$$

ہمیں  $x$  اور عددی  $p$  کا مقلب دریافت کرنا ہوگا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہوگا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل  $f(x)$  عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آختر میں اس پر کھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۰) \quad [x, p]f(x) = \left[ x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = -i\hbar f(x)$$

پر کھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$[x, p] = i\hbar \quad (۲.۵۱)$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے باضابطہ مقلبیت<sup>۲۶</sup> رشتہ<sup>۲۷</sup> کہلاتا ہے۔

اسے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (۲.۵۲)$$

یا

$$H = \hbar\omega \left( a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) \quad (۲.۵۳)$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیمیلٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا اور دائیں ہاتھ اضافی  $-\frac{1}{2}$  ہوگا۔ یاد رہے گایاں  $a_+$  اور  $a_-$  کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ  $a_+$  کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$a_+a_- = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \quad (۲.۵۴)$$

بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$[a_-, a_+] = 1 \quad (۲.۵۵)$$

یوں ہیمیلٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = \hbar\omega \left( a_+a_- + \frac{1}{2} \right) \quad (۲.۵۶)$$

ہارمونی مرتعش کی شرودنگر مساوات کو  $a_{\pm}$  کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hbar\omega \left( a_{\pm}a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) = E\psi \quad (۲.۵۷)$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

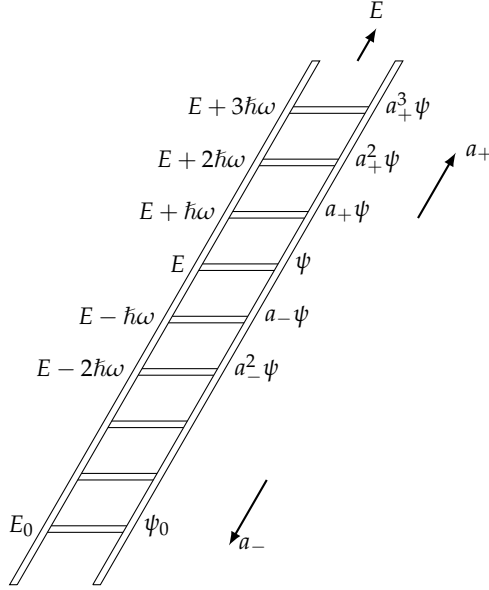
ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی  $E$  کی شرودنگر مساوات کو  $\psi$  مطمئن کرتا ہو ( $H\psi = E\psi$ ) تب توانائی  $(E + \hbar\omega)$  کی شرودنگر مساوات کو  $a_+\psi$  مطمئن کرے گا:  $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$  ثبوت:

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left( a_+a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega (a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+)\psi \\ &= \hbar\omega a_+ (a_-a_+ + \frac{1}{2})\psi = a_+ \left[ \hbar\omega (a_+a_- + 1 + \frac{1}{2})\psi \right] \\ &= a_+ (H + \hbar\omega)\psi = a_+ (E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)(a_+\psi) \end{aligned}$$

(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے  $a_-a_+$  کی جگہ  $a_+a_- + 1$  استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ  $a_+$  اور  $a_-$  کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے،  $a_{\pm}$  اور کسی بھی مستقل، مثلاً  $\hbar$ ،  $\omega$  اور  $E$  کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہوگا۔)

اسی طرح حل  $a_-\psi$  کی توانائی  $(E - \hbar\omega)$  ہوگی۔

$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega \left( a_-a_+ - \frac{1}{2} \right) (a_-\psi) = \hbar\omega a_- (a_+a_- - \frac{1}{2})\psi \\ &= a_- \left[ \hbar\omega (a_-a_+ - 1 - \frac{1}{2})\psi \right] = a_- (H - \hbar\omega)\psi = a_- (E - \hbar\omega)\psi \\ &= (E - \hbar\omega)(a_-\psi) \end{aligned}$$



شکل ۲.۵: ہارمونی مسرتش کے حالات کی ”سیڑھی“۔

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جانتے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ چونکہ  $a \pm$  کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہذا انہیں ہم عاملین سیڑھی<sup>۲۷</sup> پکارتے ہیں:  $a_+$  عاملِ رفت<sup>۲۸</sup> اور  $a_-$  عاملِ تقلیل<sup>۲۹</sup> ہے۔ حالات کی ”سیڑھی“ کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

ذرا کیے! عاملِ تقلیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہوگا جس کی توانائی صفر سے کم ہوگی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے)۔ نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہوگی۔ ایسا کیوں کر ہوگا؟ ہم جانتے ہیں کہ  $a_- \psi$  شرودنگر مساوات کا ایک نیا حل ہوگا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جاسکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے قابل بھی ہوگا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مسر بھی مکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہوگا: سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ (جس کو ہم  $\psi_0$  کہتے ہیں) پر درج ذیل ہوگا۔

$$a_- \psi_0 = 0 \quad (۲.۵۸)$$

ladder operators<sup>۲۷</sup>  
raising operator<sup>۲۸</sup>  
lowering operator<sup>۲۹</sup>

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\psi_0(x)$  تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left( \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

لکھی جاسکتی ہے جسے باآسانی حل کیا جاسکتا ہے:

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \implies \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

(C مستقل ہے۔) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ہم اس کو یہیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2 / \hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}}$$

لہذا  $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}}$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۹) \quad \psi_0(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شرودنگر مساوات میں پر کر کے

$$\hbar\omega(a_+ a_- + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$$

یہ جانتے ہوئے کہ  $a_- \psi_0 = 0$  ہوگا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۰) \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

سیڑھی کے نچلا پایہ (جو کو انٹم مرتعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جاسکتے ہیں۔<sup>۲۰</sup> جہاں ہر قدم پر توانائی میں  $\hbar\omega$  کا اضافہ ہوگا۔

$$(۲.۶۱) \quad \psi_n(x) = A_n (a_+)^n \psi_0(x), \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

<sup>۲۰</sup> ہارمونی مرتعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے ہٹ کر، حالات کی شمار  $n = 1$  کی بجائے  $n = 0$  سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۵۱ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔

یہاں  $A_n$  مستقل معمول زنی ہے۔ یوں  $\psi_0$  پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی سر تعش کے تمام ساکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسے بغیر ہم تمام احبازتی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

مثال ۲.۴: ہارمونی سر تعش کا پہلا ہیجبان حال تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۱۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left( -\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ (۲.۶۲) \quad &= A_1 \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

ہم اس کو قلم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2 dx = |A_1|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} dx = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں  $A_1 = 1$  ہوگا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے  $\psi_5$  حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجبان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محتاط چلنا ہوگا لہذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ  $\psi_n$  اور  $a \pm \psi_{n\pm 1}$  ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$(۲.۶۳) \quad a_+ \psi_n = c_n \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = d_n \psi_{n-1}$$

تناسبی مستقل  $c_n$  اور  $d_n$  کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (ظاہر ہے کہ مکملات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ  $\pm$  پر  $f(x)$  اور  $g(x)$  کو لازماً صفر پہنچنا ہوگا۔)

$$(۲.۶۴) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx$$

(خطی الجبر کی زبان میں  $a \mp$  اور  $a \pm$  ایک دوسرے کے ہر مشق جوڑی دار<sup>۳۱</sup> ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left( \mp \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) g dx$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

کمل بالخص کے ذریعے  $\int f^* \left( \frac{dg}{dx} \right) dx$  سے  $-\int \left( \frac{df}{dx} \right)^* g dx$  حاصل ہوگا (جہاں  $\pm\infty$  پر  $f(x)$  اور  $g(x)$  کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^* (a_{\pm} g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \pm \hbar \frac{d}{dx} + m \omega x \right) f \right]^* g dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx \end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_{\pm} \psi_n)^* (a_{\pm} \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} a_{\pm} \psi_n)^* \psi_n dx$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$(۲.۶۵) \quad a_+ a_- \psi_n = n \psi_n, \quad a_- a_+ \psi_n = (n+1) \psi_n$$

ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ \psi_n)^* (a_+ \psi_n) dx &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 dx = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_n)^* (a_- \psi_n) dx &= |d_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 dx = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \end{aligned}$$

چونکہ  $\psi_n$  اور  $\psi_{n\pm 1}$  معمول شدہ ہیں، لہذا  $|c_n|^2 = n+1$  اور  $|d_n|^2 = n$  ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۶) \quad a_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_+ \psi_0, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_+ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+)^2 \psi_0, \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} a_+ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a_+)^3 \psi_0, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_+ \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (a_+)^4 \psi_0, \end{aligned}$$

دیگر تفصیلات بھی اسی طرح حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۷) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$  ہوگا۔ (بالخصوص  $A_1 = 1$  ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)



لامستناہی چکور کنواں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$(۲.۶۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دوبار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے  $a_+$  اور بعد میں  $a_-$  اپنی جگہ سے ہلا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(a_+ a_-) \psi_n dx &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \end{aligned}$$

جب تک  $m = n$  نہ ہو  $\int \psi_m^* \psi_n dx$  لازماً صفر ہوگا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم  $\psi(x, 0)$  کو ساکن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عمودی مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت  $E_n$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے  $n$  ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔  
حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx$$

اس قسم کے کمالات جن میں  $x$  یا  $p$  کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات  $x$  اور  $p$  کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$(۲.۶۹) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \quad p = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a_+ - a_-)$$

اس مثال میں ہم  $x^2$  میں دلچسپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

اہلہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} \int \psi_n^* [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2] \psi_n dx$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے)  $\psi_n (a_+)^2$  تفاعل  $\psi_{n+2}$  کو ظاہر کرتا ہے جو  $\psi_n$  کو عمودی ہے۔ یہی کچھ  $\psi_n (a_-)^2$  کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے جو  $\psi_{n-2}$  کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کر کے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(n + n + 1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

جیسا آپ نے دیکھا مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حرکی توانائی ہے)۔  
 جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی مرتعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔ □

سوال ۲.۱۰:

ا.  $\psi_2(x)$  تیار کریں۔

ب.  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  کا خاکہ کھینچیں۔

ج.  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  کی عمودیت کی تصدیق مکمل لے کر صریحاً کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔

سوال ۲.۱۱:

ا. حالات  $\psi_0$  (مساوات ۲.۵۹) اور  $\psi_1$  (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح کلمات لے کر  $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle$ ، اور  $\langle p^2 \rangle$  کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی مرتعش کے مسائل میں متغیر  $\sqrt{m\omega/\hbar}x \equiv \xi$  اور مستقل  $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$  متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حرکی توانائی  $\langle T \rangle$  اور اوسط مخفی توانائی  $\langle V \rangle$  کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپ کو نیا مکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی مرتعش کے  $n$  ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے  $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$  اور  $\langle T \rangle$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی مرتعش مخفی قوتہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

ا. تلاش کریں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  اور  $|\Psi(x, t)|^2$  تیار کریں۔

ج.  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں  $\psi_1(x)$  کی بجائے  $\psi_2(x)$  دیتا تب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ اہر نفٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د۔ اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی سر تعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد  $\omega$  پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس پلک 4 گنا ہو جاتا ہے لہذا  $\omega' = 2\omega$  ہو گا جبکہ ابتدائی تعادل موج تبدیل نہیں ہو گا (یقیناً ہیملٹنی تبدیل ہونے کے بنا  $\Psi$  اب مختلف اندازے ارتقا پائے گا)۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی  $\hbar\omega/2$  قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ  $\hbar\omega$  حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

## ۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی سر تعش کی شرودنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi \quad (۲.۴۰)$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلا واسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (۲.۴۱)$$

شرودنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K) \psi \quad (۲.۴۲)$$

جہاں  $K$  توانائی ہے جس کی اکائی  $\frac{1}{2} \hbar\omega$  ہے۔

$$K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (۲.۴۳)$$

ہم نے مساوات ۲.۴۲ کو حل کرنا ہو گا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں  $K$  اور  $E$  کی ”اجبازتی“ قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔ ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں  $\xi$  کی قیمت (یعنی  $x$  کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں  $\xi^2$  کی قیمت  $K$  کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگی لہذا مساوات ۲.۴۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi \quad (۲.۴۴)$$

جس کا تخمینہ حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$\psi(\xi) \approx A e^{-\xi^2/2} + B e^{+\xi^2/2} \quad (۲.۴۵)$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

اس میں  $B$  کا جزو معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہے (چونکہ  $|x| \rightarrow \infty$  کرنے سے اس کی قیمت بے انتہا بڑھتی ہے)۔ طبی طور پر متبادل قبول حل درج ذیل متغیرب صورت کا ہوگا۔

$$\psi(\xi) \rightarrow ( ) e^{-\xi^2/2} \quad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے}) \quad (۲.۷۶)$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت مضام کو ”چھیلنا“ چاہیے،

$$\psi(\xi) = h(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (۲.۷۷)$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے،  $h(\xi)$ ، اس کی صورت  $\psi(\xi)$  سے سادہ ہو۔<sup>۳۲</sup> ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفصیلات

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \left( \frac{dh}{d\xi} - \xi h \right) e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \left( \frac{d^2 h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h \right) e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہذا شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2 h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0 \quad (۲.۷۸)$$

ہم ترکیبے فروبنیوس<sup>۳۳</sup> استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل  $\xi$  کے طاقتی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$h(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j \quad (۲.۷۹)$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفصیلات

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{d^2 h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 \xi + 3 \cdot 4a_4 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2} \xi^j$$

<sup>۳۲</sup> اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمین سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفصیلات مساوات کے طاقتی تسلسل حل میں متغیربانی جزو کا چھیلنا معمولاً پہلا قدم ہوتا ہے۔

<sup>۳۳</sup> Frobenius method

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۸۰) \quad \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j]\xi^j = 0$$

طافتی تسلسل پھیلاؤ کے یکسانی کی بنا پر ہر طاقت کا عددی سر صفر ہوگا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۸۱) \quad a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

یہ کلیہ توانی<sup>۳۴</sup> شروع و گنگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو  $a_0$  سے ابتداء کرتے ہوئے تمام جفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12} a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24} a_0, \dots$$

اور  $a_1$  سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6} a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20} a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120} a_1, \dots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۲.۸۲) \quad h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi)$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

متغیر  $\xi$  کا جفت تفاعل ہے جو از خود  $a_0$  پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

طاق تفاعل ہے جو  $a_1$  پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں  $\xi$  تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ  $j$  کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توانی (تخمیناً) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$$

جس کا تخمینہ حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

ہوگا جہاں  $C$  ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی  $j$  کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2/2}$$

اور اب اگر  $h$  کی قیمت  $e^{\xi^2/2}$  کے لحاظ سے بڑھے تب  $\psi$  (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں)  $e^{\xi^2/2}$  (مساوات ۲.۴۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متقارب رویہ ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طاق متقی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر  $j$  کی ایک ایسی بلند ترین قیمت،  $n$ ، پائی جائے گی جو  $a_{n+2} = 0$  دیتی ہو (یوں قیمت  $h$  تسلسل یا طاق  $h$  تسلسل اختتام پذیر ہوگا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہوگا؛ قیمت  $n$  کی صورت میں  $a_1 = 0$  ہوگا جبکہ طاق  $n$  کی صورت میں  $a_0 = 0$  ہوگا۔ یوں متقابل مقبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = 2n + 1$$

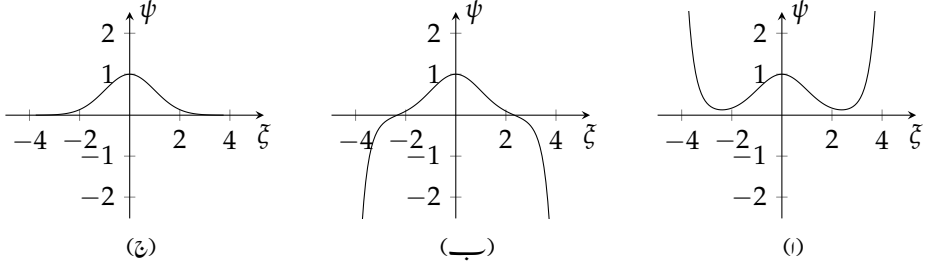
جہاں  $n$  کوئی غیر منفی عدد صحیح ہوگا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۴۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$(۲.۸۳) \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹائزیشن شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹائزیشن، شرودنجر مساوات کے طاق متقی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً  $E$  کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۴۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر  $E$  کے لیے اس کے دو خطی غیر متابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی  $x$  پر، بے متابو قوت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنیاد معمول پر لانے کے قابل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم  $E$  کی کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً  $0.49 \hbar \omega$ ) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-۱)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب  $E$  کی قیمت کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً  $0.51 \hbar \omega$ ) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-۲)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے قابل حل دے گی (شکل ۲.۶-۳)۔

کلیہ توانائی  $K$  کی اجبازتی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۸۴) \quad a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$



شکل ۲.۶: مساوات شروڈنگر کی (ا)  $E = 0.49\hbar\omega$ ، (ب)  $E = 0.51\hbar\omega$  اور (ج)  $E = \hbar\omega$  صورت میں حل۔

اگر  $n = 0$  ہو تب تسلسل میں ایک جزوی پایا جائے گا (ہمیں  $a_1 = 0$  لینا ہو گا تاکہ طبق  $h$  خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۳ میں  $j = 0$  سے  $a_2 = 0$  حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم  $n = 1$  کے لیے  $a_0 = 0$  لیں گے ۲.۵ اور مساوات ۲.۸۳ میں  $j = 1$  سے  $a_3 = 0$  حاصل ہو گا، لہذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہو گا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم  $n = 2$  کے لیے  $j = 0$  لے کر  $a_2 = -2a_0$  اور  $j = 2$  لے کر  $a_4 = 0$  حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا)۔ عمومی طور پر  $h_n(\xi)$  متغیر  $\xi$  کا  $n$  درجی کشیر رکھتی ہو گا، جو جفت عدد صحیح  $n$  کی صورت میں

۲.۵ دھیان رہے کہ  $n$  کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں  $a_j$  کا ایک منسرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمانٹ کشیرر کنیاں  $H_n(\xi)$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned}$$

جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح  $n$  کی صورت میں طاق طاقتوں کا کشیرر کنی ہوگا۔ جزو ضربی  $a_0$  اور  $a_1$  کے علاوہ یہ عین ہرمانٹے کیئر رکھنے  $H_n(\xi)$  میں  $3^۶$  ہیں۔ جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جزو ضربیوں منتخب کیا جاتا ہے کہ  $\xi$  کے بلند تر طاقت کا عددی سر  $2^n$  ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی سر نقش کے معمول شدہ  $3^۸$  کن حالات درج ذیل ہوں گے

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (۲.۸۵)$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶۷ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

شکل ۲.۷-۱۱ اور ب میں چند ابتدائی  $n$  کے لیے  $\psi_n(x)$  اور  $|\psi_n(x)|^2$  ترسیم کیے گئے ہیں۔ کوانٹم سر نقش حیران کن حد تک کلاسیکی سر نقش سے مختلف ہے۔ نہ صرف اس کی توانائیاں کوانٹا شدہ ہیں بلکہ اس کی موضعی تقسیم کے بھی عجیب خواص پائے جاتے ہیں۔ مثلاً کلاسیکی طور پر اجبازی سعت کے باہر (یعنی توانائی کے کلاسیکی حیط سے زیادہ  $x$  پر) ذرہ پایا جانے کا احتمال غیر صفر ہے (سوال ۲.۱۵ دیکھیں) اور تمام طاق حالات میں عین وسط پر ذرہ پائے جانے کا احتمال صفر ہے۔ کلاسیکی اور کوانٹائی صورتوں میں مشابہت صرف  $n$  کی بڑی قیمتوں پر پائی جاتی ہے۔ میں نے شکل ۲.۷-۲ ج میں کلاسیکی موضعی تقسیم کو  $n = 10$  کے کوانٹائی موضعی تقسیم پر ترسیم کیا ہے۔ انہیں ہموار کرنے سے یہ ایک دوسرے پر اچھی طرح بیٹھتے ہیں (البتہ کلاسیکی صورت میں ہم ایک ارتعاش میں وقت کے لحاظ سے معتام کی تقسیم کی بات کرتے ہیں جبکہ کوانٹائی صورت میں ہم یکساں تیار کردہ حالات کے ایک سگر کی تقسیم کی بات کرتے ہیں)۔ <sup>۳۹</sup>

سوال ۲.۱۵: ہارمونی سر نقش کے زمینی حال میں کلاسیکی اجبازی خطے کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین با معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک سر نقش کی توانائی  $E = (1/2)ka^2$  ہوگی جہاں  $a$  حیط ہے۔ یوں توانائی  $E$  کے سر نقش کا ”کلاسیکی اجبازی خطہ“  $\sqrt{2E/m\omega^2}$  تا

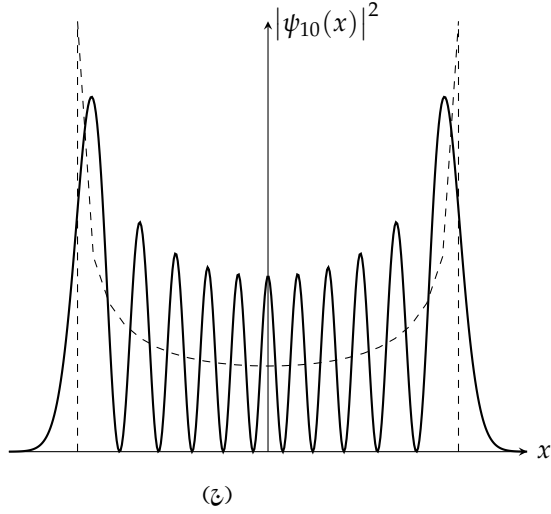
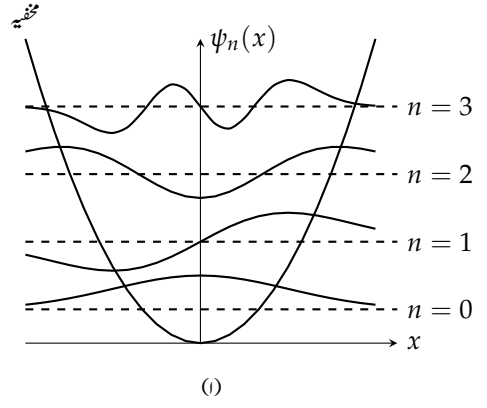
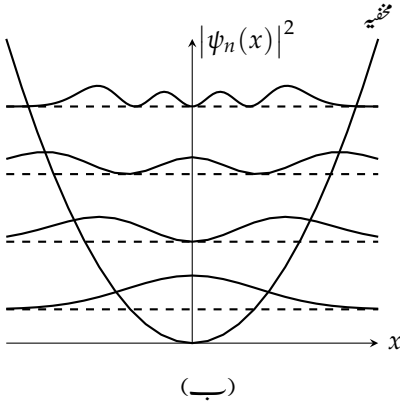
Hermite polynomials<sup>۳۶</sup>

<sup>۳۷</sup> ہرمانٹ کشیرر کنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

<sup>۳۸</sup> میں یہاں معمولی متقلات حاصل نہیں کروں گا۔

<sup>۳۹</sup> کلاسیکی تقسیم کو ایک حبیبی توانائی کے متعدد سر تقشات، جن کے نقاط آغزا بلا منصوب ہوں، کا سگر تصور کرتے ہوئے یہ مماثل زیادہ بہتر ہوگا۔





شکل ۲.۷: پارمونی سر تعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

باب ۲. غنیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$\sqrt{2E/m\omega^2}$  ہوگا۔ مکمل کی قیمت ”عمومی تقسیم“ یا ”تفاعل حائل“ کی جدول سے دیکھیں۔

سوال ۲.۱۶: کلیہ توانی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے  $H_5(\xi)$  اور  $H_6(\xi)$  تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر  $\xi$  کی بلند تر طاقت کا عددی سرروایت کے تحت  $2^n$  لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہم ہر مائٹ کشیررکٹی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

۱. کلیہ روڈریگیس<sup>۴۰</sup> درج ذیل کہتا ہے۔

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (۲.۸۶)$$

اس کو استعمال کر کے  $H_3$  اور  $H_4$  اخذ کریں۔

ب. درج ذیل کلیہ توانی گزشتہ دوہر مائٹ کشیررکٹیوں کی صورت میں  $H_{n+1}$  دیتا ہے۔

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi) \quad (۲.۸۷)$$

اس کو جبزوا کے نتائج کے ساتھ استعمال کر کے  $H_5$  اور  $H_6$  تلاش کریں۔

ج. اگر آپ  $n$  رتبی کشیررکٹی کا تفریق لیں تو آپکو  $1 - n$  رتبی کشیررکٹی حاصل ہوگی۔ ہر مائٹ کشیررکٹیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\frac{dH_n}{d\xi} = 2n H_{n-1}(\xi) \quad (۲.۸۸)$$

جس کی تصدیق ہر مائٹ کشیررکٹی  $H_5$  اور  $H_6$  کے لئے کریں۔

د. پیدا کار تفاعل<sup>۴۱</sup>  $e^{-z^2+2z\xi}$  کا  $z$  پر  $n$  واں تفریق  $H_n(\xi)$  ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر پھیلاؤ میں یہ  $z^n/n!$  کا عددی سر ہوگا۔

$$e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) \quad (۲.۸۹)$$

اس کو استعمال کر کے  $H_0$ ،  $H_1$  اور  $H_2$  دوبارہ اخذ کریں۔

## ۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے پرچگہ  $V(x) = 0$  ہوگا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہوئی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہوگی، لیکن کوانٹم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر متابع وقت شرودنگر مساوات ذیل

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi \quad (۲.۹۰)$$

یا ذیل ہے۔

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۲.۹۱)$$

یہاں تک یہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوہ صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نہ (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہوگی۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (۲.۹۲)$$

لامتناہی چکور کنواں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو  $k$  (اور یوں  $E$ ) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تابعیت وقت  $e^{-iEt/\hbar}$  جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) = Ae^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x + \frac{\hbar k}{2m}t)} \quad (۲.۹۳)$$

ایسا کوئی بھی تغاقل جو  $x$  اور  $t$  متغیرات کی مخصوص جوڑ  $(x \pm vt)$  کا تابع ہو (جہاں  $v$  مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو  $v$  رفتار سے  $\mp x$  رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تغاقل کے دلیل<sup>۲</sup> کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہوگا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x = \mp vt + \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (یعنی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں منفرق صرف  $k$  کی علامت کا ہے لہذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} \quad (۲.۹۴)$$

جہاں  $k$  کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$(۲.۹۵) \quad k \equiv \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے ”ساکن حالات“ حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج  $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$  ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۶) \quad p = \hbar k$$

ان امواج کی رفتار (یعنی  $t$  کا عددی سر تقسیم  $x$  کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۷) \quad v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو (جو حتمی حرکت کی ہوگی چونکہ  $V = 0$  ہے) کی کلاسیکی رفتار  $E = \frac{1}{2}mv^2$  سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۹۸) \quad v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}}$$

ظاہری طور پر کوانٹم میکانیکی تفاعلی موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاعلی موج معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے۔

$$(۲.۹۹) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2 (\infty)$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں متقابل علیحدگی حل طبعی طور پر متقابل مقبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جاسکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ متقابل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تاجع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی متقابل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ  $n$  پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر  $k$  کے لحاظ سے مکمل ہوگا)۔

$$(۲.۱۰۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

(نم)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  کو اپنی آسانی کیلئے مکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر  $c_n$  کی جگہ یہاں  $(1/\sqrt{2\pi})\phi(k) dk$  کردار ادا کرتا ہے۔ اب اس تفاعلی موج کو (موزوں  $\phi(k)$  کیلئے) معمول پر لایا جاسکتا

ہے۔ تاہم اس میں  $k$  کی قیمتوں کی سعت پائی جانے لگی، لہذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائے گی۔ ہم اس کو موجی اکٹھ<sup>۴۳</sup> کہتے ہیں۔

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں  $\Psi(x, 0)$  مندرہم کر کے  $\Psi(x, t)$  تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$(۲.۱۰۱) \quad \Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

پر پورا اترتا ہوا  $\psi(k)$  کیے تعین کیا جائے؟ یہ فوریر تبدیل کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب مسئلہ پلانشرال<sup>۴۵</sup>:

$$(۲.۱۰۲) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰، دیکھیں)۔  $F(k)$  کو  $f(x)$  کا فوریر بدل<sup>۴۶</sup> کہا جاتا ہے جبکہ  $f(x)$  کو  $F(k)$  کا الٹے فوریر بدل<sup>۴۷</sup> کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نسا کی علامت کا مندرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، احبازنی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: مکمل کا موجود<sup>۴۸</sup> ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقصد کے لئے، تفاعل  $\Psi(x, 0)$  پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں  $\phi(k)$  درج ذیل ہو گا۔

$$(۲.۱۰۳) \quad \phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ  $-a \leq x \leq a$  میں رہنے کا پابند ہو کو وقت  $t = 0$  پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔

<sup>۴۳</sup> wave packet

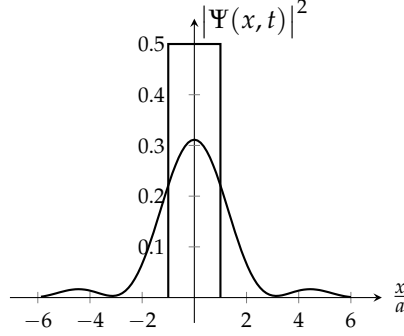
<sup>۴۴</sup> سائنس امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنا مقام بندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

<sup>۴۵</sup> Plancherel's theorem

<sup>۴۶</sup> Fourier transform

<sup>۴۷</sup> inverse Fourier transform

<sup>۴۸</sup> تفاعل  $f(x)$  پر عائد لازم کافی پابندی یہ ہے کہ  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$  متناہی ہو۔ (ایسی صورت میں  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk$  بھی متناہی ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں کمالات کی قیمتیں ایک دوسری پیشی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)



شکل ۲.۸: تفاعل  $|\Psi(x, t)|^2$  کی لحاظ سے  $t = 0$  پر مستطیل اور  $t = ma^2/\hbar$  پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۳)۔

حل: ہم پہلے  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لاتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^a dx = 2a |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے  $\psi(k)$  تلاش کرتے ہیں۔

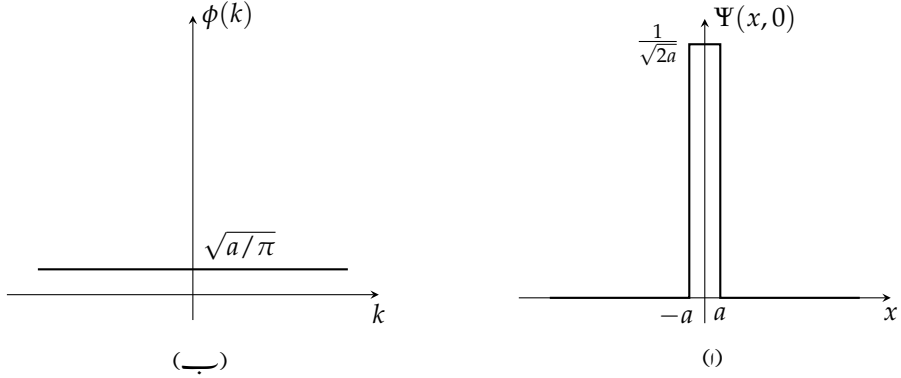
$$\begin{aligned} \phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$(۲.۱۰۴) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk$$

بد قسمتی سے اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقت پائی جاتی ہیں جن کے لئے  $\Psi(x, t)$  کا تکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر  $a$  کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمینہ  $\sin ka \approx ka$  لکھ کر درج



شکل ۲.۹: چھوٹے  $a$  کے لئے مثال ۲.۶- (ا)  $\Psi(x, 0)$  کی ترسیم؛ (ب)  $\phi(k)$  کی ترسیم۔

ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

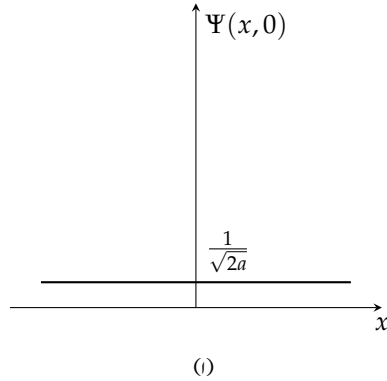
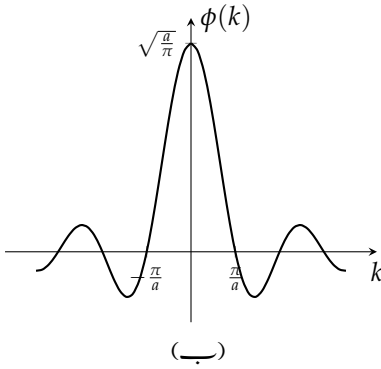
جو  $k$  کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاؤ کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہذا  $k$ ، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا پھیلاؤ لازماً زیادہ ہوگا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی  $a$ ) کی صورت میں مقام کا پھیلاؤ زیادہ ہوگا (شکل ۲.۱۰) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ka}{ka}$$

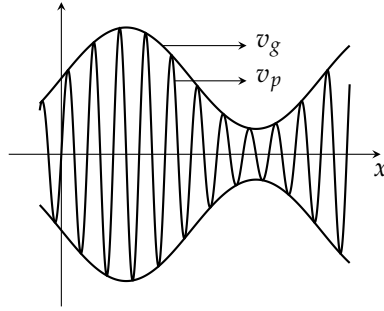
اب  $\sin z/z$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $z = 0$  پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر  $\pm\pi$  (جو یہاں  $k = \pm\pi/a$  کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی  $a$  کیلئے  $k = 0$  پر  $\phi(k)$  نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل  $\Psi_k(x, t)$ ، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ  $\Psi_k$  طبعی طور پر قابل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تقاضا عمل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سمیٹ سکتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصورات کچھ یوں ہے: سائن متعلقہ حالات کا خطی میل جس کے حیطہ کو  $\phi$  ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہوگا؛ یہ ”علائف“ میں ڈھانکے ہوئے ”لہروں“ پر مشتمل ہوگا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو دوری سمتی رفتار<sup>۹</sup> ( $v_p$ )

<sup>۹</sup> phase velocity



شکل ۲.۱۰:  $a$  کے لئے (i)  $\Psi(x, 0)$  کی ترسیم، (ب)  $\phi(k)$  کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ ”عنائف“ گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ عنائف کی رفتار، جس کو گروہی سمتی رفتار  $v_g$  کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہوگی۔ عنائف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہوگی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھماگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہوگی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہوگا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا محیط بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا محیط گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہو گا کہ کوانٹم میکانیات میں آزاد ذرے کے تفاعل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔



ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہوگی۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

(یہاں  $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$  ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے انتشاری رشتہ<sup>۵۱</sup>  $\omega(k)$  کا متغیر  $k$  کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہوگا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی  $k_0$  پر  $\phi(k)$  نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا  $k$  بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنیاد موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ  $k_0$  سے دور مکمل و متابل نظر انداز ہے لہذا ہم تقاضا  $\omega(k)$  کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega'_0(k - k_0)$$

جہاں نقطہ  $k_0$  پر  $k$  کے لحاظ سے  $\omega$  کا تفرق  $\omega'_0$  ہے۔

(مکمل کے وسط کو  $k_0$  پر منتقل کرنے کے عنصر سے) ہم متغیر  $k$  کی جگہ متغیر  $s = k - k_0$  استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0 + s)x - (\omega_0 + \omega'_0 s)t]} ds$$

وقت  $t = 0$  پر

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)x} ds$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega'_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)(x - \omega'_0 t)} ds$$

ماسوائے  $x$  کو  $(x - \omega'_0 t)$  منتقل کرنے کے یہ  $\Psi(x, 0)$  میں پایا جانے والا مکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} \Psi(x - \omega'_0 t, 0) \quad (۲.۱۰۵)$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں  $|\Psi|^2$  کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوگا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار  $\omega'_0$  سے حرکت کرے گا:

$$v_{گروہی} = \frac{d\omega}{dk} \quad (۲.۱۰۶)$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

(جس کی قیمت کا حاب  $k = k_0$  پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$v_{وری} = \frac{\omega}{k} \quad (۲.۱۰۷)$$

یہاں  $\omega = (\hbar k^2/2m)$  یعنی  $\omega/k = (\hbar k/2m)$  ہے جبکہ  $d\omega/dk = (\hbar k/m)$  ہے جو دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروپی سمتی رفتار نا کہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$v_{وری} = 2v_{کلاسیکی} \quad (۲.۱۰۸)$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر  $x$  کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے  $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$  اور  $[C \cos kx + D \sin kx]$  ہیں۔ مستقالات  $C$  اور  $D$  کو مستقالات  $A$  اور  $B$  کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقالات  $A$  اور  $B$  کو مستقالات  $C$  اور  $D$  کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کو انٹرمیکانیات میں جب  $V = 0$  ہو، قوت نمائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ  $\sin$  اور  $\cos$  ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامستناہی چکور کنواں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال رو  $J$  تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے ہوا کا رخ کیا ہوگا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ مستناہی وقفہ کے فوریسر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامستناہی تک بڑھاتے گے۔

۱. مسئلہ ڈرشل کہتا ہے کہ وقفہ  $[-a, +a]$  پر کسی بھی تفاعل  $f(x)$  کو فوریسر تسلسل کے پھیلاوے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

$a_n$  اور  $b_n$  کی صورت میں  $c_n$  کیا ہوگا؟

ب. فوریسر تسلسل کے عددی سرور کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} dx$$

ج.  $n$  اور  $c_n$  کی جگہ نئے متغیرات  $k = (\frac{n\pi}{a})$  اور  $ac_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(k)$  استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ  
 جسزہ-۱ اور جسزہ-۲ درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx,$$

جہاں ایک  $n$  سے اگلی  $n$  تک  $k$  میں تبدیلی  $\Delta k$  ہے۔

د. حد  $a \rightarrow \infty$  لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ:  $F(k)$  کی صورت میں  $f(x)$  اور  $f(x)$  کی صورت میں  $F(k)$  کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوں گی۔ اس کے باوجود حد  $a \rightarrow \infty$  کی صورت میں ان دونوں کی ساخت ایک دوسرے کے ساتھ مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-a|x|}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا.  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لائیں۔

ب.  $\phi(k)$  تلاش کریں۔

ج.  $\Psi(x, t)$  کو تکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں  $a$  بہت بڑا ہو، اور جہاں  $a$  بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: گاؤس موج اکٹھا ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-ax^2}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مستقلات ہیں ( $a$  حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا.  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لائیں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔ اشارہ: ”مربع مکمل کرتے ہوئے“ درج ذیل روپ کے تکمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

مان لیں  $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$  ہے۔ یوں  $(ax^2 + bx) = y^2 - (b^2/4a)$  ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج.  $|\Psi(x, t)|^2$  تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1 + (2\hbar a t / m)^2}}$$

وقت  $t = 0$  پر  $|\Psi|^2$  کا حاکم (بطور  $x$  کا تفاعل) بتائیں۔ کسی بڑے  $t$  پر دوبارہ حاکم کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $|\Psi|^2$  کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں  $\langle x \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$ ؛ اور احتمالات  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ جزوی جواب:

$$\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$$

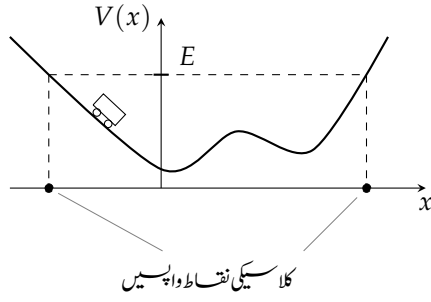
ه. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کارآمد ہے؟ کس لمحہ  $t$  پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

## ۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ

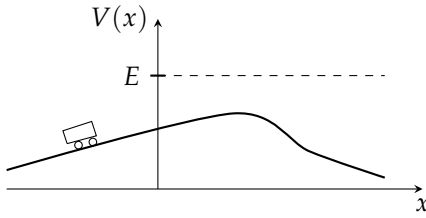
### ۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات

ہم غیر تاجع وقت شروع و نگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چکور کنواں اور ہارمونی سرقتش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اعشاریہ  $n$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر  $k$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موحصر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تاجع وقت شروع و نگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ ( $n$  پر ایسا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ ( $k$  پر) نکل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

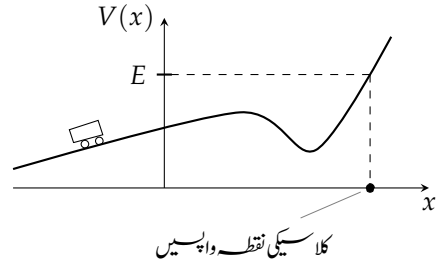
کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تاجع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر  $V(x)$  ذرے کی کل توانائی  $E$  سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-۱) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنواں میں ”پھنسا“ رہے گا: یہ **واپس نقطہ**  $E$  کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنواں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے مقید **حالت**  $E$  کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر  $E$  ایک (یا دونوں) جانب  $V(x)$  سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-۲ ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **بکھراؤ حالت**  $E$  کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی سرقتش)؛ بعض صرف بکھراؤ حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پہاڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔



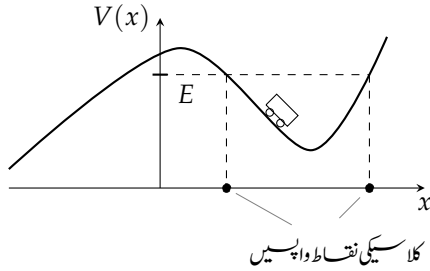
(i)



(ج)



(ب)



(د)

شکل ۲.۱۲: (i) مقید حال، (ب، ج) بچھراو حالات، (د) کلا سیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بچھراو حال۔

باب ۲. غیر تاج وقت شرودنگر مساوات

شرودنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ مندرجہ اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں سرنگے زلف<sup>۵۵</sup> (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی مستثنائی مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہذا مخفیہ کی قیمت صرف لامتناہی پراہم ہوگی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$\begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \quad (۲.۱۰۹)$$

”روزمرہ زندگی“ میں لامتناہی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں ملمہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$\begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \quad (۲.۱۱۰)$$

چونکہ  $\pm\infty \rightarrow x$  پر لامتناہی چکور کٹواں اور ہارمونی سرعش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہذا یہ صرف بکھراو حال<sup>۵۶</sup> پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

## ۲.۵.۲ ڈیلٹا تعامل کٹواں

مبداء پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا تعامل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل ۱۳.۲) ڈیلٹا تعامل<sup>۵۷</sup> کہلاتا ہے۔

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (۲.۱۱۱)$$

نقطہ  $x = 0$  پر یہ تعامل مستثنائی نہیں ہے لہذا تکنیکی طور پر اس کو تعامل کہنا غلط ہوگا (ریاضی دان اسے متعمم تعامل<sup>۵۸</sup> یا متعمم تقیم<sup>۵۹</sup> کہتے ہیں)۔ تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت یا ایک ڈیلٹا تعامل ہوگا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\delta(x - a)$  نقطہ  $a$  پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تعامل ہوگا۔ چونکہ  $\delta(x - a)$  اور ایک سادہ تعامل  $f(x)$  کا

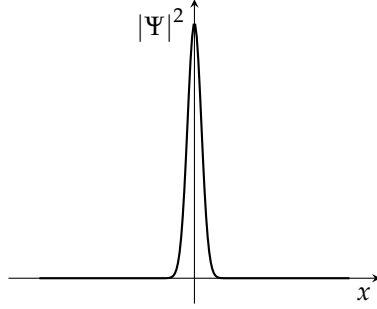
<sup>۵۵</sup>tunneling  
<sup>۵۶</sup>آپ کو یہاں پر روشنی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے  $E > V$  درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھراو حال، جو معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہوگا۔ اگر آپ اسے مطمئن نہیں ہیں تب  $E \leq 0$  کے لئے مساوات شرودنگر کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

<sup>۵۷</sup>Dirac delta function

<sup>۵۸</sup>generalized function

<sup>۵۹</sup>generalized distribution

<sup>۶۰</sup>ڈیلٹا تعامل کو ایسے مستطیل (یا مثلث) کی تصدیق صورت تصور کیا جاسکتا ہے جس کی چوڑائی بہت درجہ کم اور قد بہت بڑھتا ہو۔



شکل ۲.۱۳: ڈیراک ڈیلٹا فنکشن (مساوات ۲.۱۱۱)

حاصل ضرب نقطہ  $a$  کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوگا لہذا  $\delta(x - a)$  کو  $f(x)$  سے ضرب دینا، اسے  $f(a)$  سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$(۲.۱۱۲) \quad f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ڈیلٹا فنکشن کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$(۲.۱۱۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ  $a$  پر فنکشن  $f(x)$  کی قیمت ”اٹھاتا“ ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل  $-\infty$  تا  $+\infty$  ہو، صرف اتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ  $a$  شامل ہو لہذا  $a - \epsilon$  تا  $a + \epsilon$  تکمل لینا کافی ہوگا جہاں  $\epsilon > 0$  ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں  $\alpha$  ایک مثبت مستقل ہے۔<sup>۱۱</sup>

$$(۲.۱۱۴) \quad V(x) = -\alpha\delta(x)$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامستناہی چکور کنواں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانیاں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا فنکشن کنواں کے لیے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۲.۱۱۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi$$

جو مقید حالات ( $E < 0$ ) اور بکھراؤ حالات ( $E > 0$ ) دونوں پیدا کرتی ہے۔

<sup>۱۱</sup> ڈیلٹا فنکشن کی اکائی ایک بٹا سبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہذا  $\alpha$  کا بعد توانائی ضرب سبائی ہوگا۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ  $x < 0$  میں  $V(x) = 0$  ہوگا لہذا

$$(۲.۱۱۶) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = k^2 \psi$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $k$  درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے  $E$  منفی ہوگا لہذا  $k$  حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$(۲.۱۱۷) \quad k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$(۲.۱۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

ہوگا جہاں  $x \rightarrow -\infty$  پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا ہمیں  $A = 0$  منتخب کرنا ہوگا:

$$(۲.۱۱۹) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad (x < 0)$$

خطہ  $x > 0$  میں بھی  $V(x)$  صفر ہے اور عمومی حل  $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$  ہوگا؛ اب  $x \rightarrow +\infty$  پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا  $G = 0$  منتخب کرتے ہوئے درج ذیل ایسا جائے گا۔

$$(۲.۱۲۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad (x > 0)$$

ہمیں نقطہ  $x = 0$  پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہوگا۔ میں  $\psi$  کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

$$(۲.۱۲۱) \quad \begin{cases} 1. & \psi \text{ لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{d\psi}{dx} \text{ استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفی لامتناہی ہو} \end{cases}$$

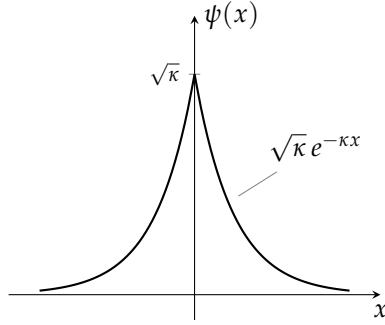
یہاں اول سرحدی شرط کے تحت  $F = B$  ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۲) \quad \psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases}$$

تفاعل  $\psi(x)$  کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا متناہی چکوروں کی طرح) جوڑ پر مخفی لامتناہی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ  $x = 0$  پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلک تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ  $x = 0$  پر  $\psi$  کے تفرق میں عدم استمراری ڈیلک تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں  $\frac{d\psi}{dx}$  عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$(۲.۱۲۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x) \psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx$$





شکل ۲.۱۳: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

پہلا عمل در حقیقت دونوں آخری نقاط پر  $\frac{d\psi}{dx}$  کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری عمل اس پٹی کا رقبہ ہوگا، جس کا قدمستانی، اور  $\epsilon \rightarrow 0$  کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہذا یہ عمل صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۴) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہوگا لہذا  $\frac{d\psi}{dx}$  عموماً استمراری ہوگا۔ لیکن جب سرح پر  $V(x)$  لامستانی ہو تب یہ دلیل متبادل مقبول نہیں ہوگی۔ بالخصوص  $V(x) = -\alpha\delta(x)$  کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$(۲.۱۲۵) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

یہاں درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x > 0) \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x < 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{+} = -Bk \\ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہذا  $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$  ساتھ ہی  $\psi(0) = B$  ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$(۲.۱۲۶) \quad k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$(۲.۱۲۷) \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

آخر میں  $\psi$  کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذر کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۸) \quad B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلٹا فنکشن عمل کی ”زور“  $\alpha$  کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$(۲.۱۲۹) \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

ہم  $E > 0$  کی صورت میں بکھراؤ حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شرودنگر مساوات  $x < 0$  کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۳۰) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۱۳۱) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

جہاں کوئی بھی جبزولے متاثر نہیں ہڑھتا ہے لہذا انہیں رد نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح  $x > 0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

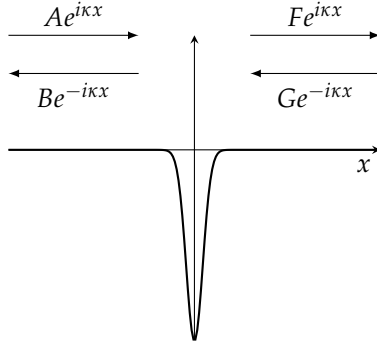
$$(۲.۱۳۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

نقطہ  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۳) \quad F + G = A + B$$

تفسیرات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), & (x > 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & (x < 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$



شکل ۲.۱۵: ڈیٹا انتفاع عمل کنواں سے بکھراؤ۔

لہذا  $\Delta(d\psi/dx) = ik(F - G - A + B)$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $\psi(0) = (A + B)$  ہوگا لہذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$(۲.۱۳۲) \quad ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$$

یا مختصراً:

$$(۲.۱۳۵) \quad F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $D$  بلکہ  $k$  شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہوگا۔ بہتر ہوگا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی طبعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ  $e^{ikx}$  (کے ساتھ تابع وقت جزو ضربی  $e^{-iEt/\hbar}$  منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا انتفاع عمل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح  $e^{-ikx}$  بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل  $A$  بائیں سے آمدی موج کا حیظ ہے،  $B$  بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا حیظ ہے،  $F$  (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا حیظ جبکہ  $H$  دائیں سے آمدی موج کا حیظ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراؤ کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا حیظ صفر ہوگا:

$$(۲.۱۳۶) \quad G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراؤ}$$

آمدی موج کا حیظ  $A$ ، منکسر موج کا حیظ  $B$  جبکہ ترسیل موج کا حیظ  $F$  ہوگا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو  $B$  اور  $F$

incident wave<sup>۱۲</sup>  
reflected wave<sup>۱۳</sup>  
transmitted wave<sup>۱۴</sup>

کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$(۲.۱۳۷) \quad B = \frac{i\beta}{1-i\beta} A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta} A$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراؤ کا مطالعہ کرنا چاہیں تب  $A = 0$  ہوگا؛  $G$  آمدی جیٹ،  $F$  منعکس جیٹ، اور  $B$  ترسیلی جیٹ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال  $|\psi|^2$  ہوتا ہے لہذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۳۸) \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

جہاں  $R$  کو شرح انعکاس<sup>۲۶</sup> کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو  $R$  آپ کو بتائے گا کہ ٹکرانے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہوگا جسے شرح ترسیل<sup>۲۷</sup> کہتے ہیں۔

$$(۲.۱۳۹) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \beta^2}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہوگا۔

$$(۲.۱۴۰) \quad R + T = 1$$

دھیان رہے کہ  $R$  اور  $T$  متغیر  $\beta$  کے لہذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵)  $E$  کے تفاعل ہوں گے۔

$$(۲.۱۴۱) \quad R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}}$$

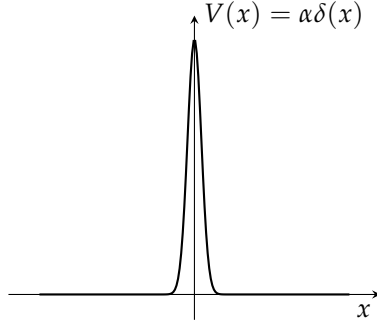
زیادہ توانائی ترسیل کا احتمال بڑھاتی ہے جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے۔

یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے لیکن ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ بکھراؤ موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں، لیکن ہم اس مسئلے کا حل جاننے ہیں۔ ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہوں گے جو معمول پر لانے جانے کے قابل ہوں، جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھے ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد

<sup>۲۶</sup> یہ معمول پر لانے کے قابل تفاعل نہیں ہے لہذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہوگا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

<sup>۲۷</sup> reflection coefficient

<sup>۲۸</sup> transmission coefficient



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

سے حل کرنا بہتر ہو گا۔<sup>۶۸</sup> چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جاسکتا ہے لہذا  $R$  اور  $T$  کو (بالترتیب)  $E$  کے قریب ذرات کی تخمینی شرح انکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم اب اسباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بکھر کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مادرات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں)  $\psi$  ایک مخلوط، غیر تابع وقت، سائن تفاعل ہے جو (مستقل جیٹ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مل کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے تفاعل موج، جن کی تابعیت وقت نہ ہونے کے برابر ہو، کے خطی جوڑ لے کر ایک (سرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے (سوال ۲.۴۳)

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف  $\alpha$  کی علامت تبدیل کرنی ہوگی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انکاس اور شرح ترسیل جو  $\alpha^2$  پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ایک ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنواں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی فاصلہ کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بکھراؤ غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر  $V > E$  ہو تب  $R = 0$  اور  $T = 1$  ہو گا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا! اگر  $V < E$  ہو تب  $T = 0$  اور  $R = 1$  ہو گا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بکھراؤ زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر  $V > E$  ہو تب بھی ایک ذرہ کے مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہو گا۔ اس مظہر کو **سرنگے زنی**<sup>۶۹</sup> کہتے ہیں

<sup>۶۸</sup> کنواں اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھ کے بکھراؤ کے اعدادی مطالعہ دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔  
<sup>۶۹</sup> tunneling

جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کے پشت پر ہے۔ اس کے برعکس بندر  $V > E$  کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہوگا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کودیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹم میکانیات آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل نکلات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$۱. \int_{-3}^{+1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \delta(x + 2) dx$$

$$ب. \int_0^{\infty} [\cos(3x) + 2] \delta(x - \pi) dx$$

$$ج. \int_{-1}^{+1} e^{|x|+3} \delta(x - 2) dx$$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا تفاعلات زیر علامت مکمل رہتے ہیں اور دو دفعت سے  $D_1(x)$  اور  $D_2(x)$  جو ڈیلٹا تفاعل پر مستحکم ہیں صرف درج صورت میں ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx$$

جہاں  $f(x)$  کوئی بھی سادہ تفاعل ہو سکتا ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$(۲.۱۴۲) \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$$

جہاں  $c$  ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی  $c$  کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. سیرہ تفاعل  $\theta(x)$  درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم  $\theta(0)$  کی تعریف  $\frac{1}{2}$  کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ  $d\theta/dx = \delta(x)$  ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ  $\psi$  کے تفرق کا  $x = 0$  پر عدم استمراریا جاتا ہے لہذا  $\langle p^2 \rangle$  کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴ ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب:  $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل  $\delta(x)$  کا فوریر تبدیل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۲.۱۴۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

تبصرہ: یہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگرچہ  $x = 0$  کے لئے یہ مکمل لامستثنائی ہے اور  $x \neq 0$  کی صورت میں چونکہ مکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوند کاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم  $-L$  تا  $+L$  مکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو،  $L \rightarrow \infty$  کرتے ہوئے مستثنائی مکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع تکمیل) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا فنکشن عمل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۱ پر مربع تکمیل کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲: درج ذیل حبڑواں ڈیلٹا فنکشن عمل مخفیہ پر غور کریں جہاں  $\alpha$  اور  $a$  مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

۱. اس مخفیہ کا خنکا کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟  $\alpha = \hbar^2/ma$  اور  $\alpha = \hbar^2/4ma$  کیلئے احبازتی توانائیاں تلاش کریں اور فنکشن عملات مون کا خنکا کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: حبڑواں ڈیلٹا فنکشن عمل کے مخفیہ (سوال ۲.۲) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

## ۲.۶ مستثنائی چکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر مستثنائی چکور کنواں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (۲.۱۴۵)$$

لیتے ہیں جہاں  $V_0$  ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۱۷.۲)۔ ڈیلٹا فنکشن عمل کنواں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں  $E < 0$  ہوگا) کے ساتھ ساتھ کھراؤ حالات (جہاں  $E > 0$  ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خط  $x < -a$  میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۲.۱۴۶)$$

باب ۲. غیر تانج وقت شرودنگر مساوات

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل  $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$  ہے لیکن  $x \rightarrow -\infty$  کے صورت میں اس کا پہلا جزو بے فتاوہ بڑھتا ہے لہذا (ہمیشہ طرح: مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۷) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad x < -a$$

خط  $-a < x < a$  میں جہاں  $V(x) = -V_0$  ہے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -V_0 \psi$$

جہاں  $l$  درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۸) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے  $E$  منفی ہے تاہم  $E > V$  کی بنا (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو  $-V_0$  سے بڑا ہونا ہوگا؛ لہذا  $l$  بھی حقیقی اور مثبت ہوگا۔ اس کا عمومی حل<sup>۱</sup>

$$(۲.۱۴۹) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), \quad -a < x < a$$

جہاں  $C$  اور  $D$  اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خط  $x > a$  جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے، عمومی حل  $\psi(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$  ہوگا لیکن یہاں  $x \rightarrow \infty$  کی صورت میں دوسرا جزو بے فتاوہ بڑھتا ہے لہذا قابل قبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad x > a$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے:  $\psi$  اور  $\frac{d\psi}{dx}$  نقاط  $-a$  اور  $a$  پر استمراری ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دیا گیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق ہوں گے (سوال ۲.۱ ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً  $+a$ ) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ  $\psi(-x) = \pm \psi(x)$  ہے لہذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہوگا۔ میں جفت حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے ہوں گے۔  $\cos$  جفت ہے (جبکہ  $\sin$  طاق ہے) لہذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$(۲.۱۵۱) \quad \psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

<sup>۱</sup> آپ جانتے ہیں تو عمومی حل کو قوت نئی روپ  $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$  میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی وہی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشکیلی مخفیہ کی بنا ہم جانتے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور  $\sin$  اور  $\cos$  کا استعمال اس حقیقت کو بلا واسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔



نقطہ  $x = a$  پر  $\psi(x)$  کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$Fe^{-\kappa a} = D \cos(la) \quad (۲.۱۵۲)$$

جبکہ  $\frac{d\psi}{dx}$  کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$-\kappa Fe^{-\kappa a} = -lD \sin(la) \quad (۲.۱۵۳)$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\kappa = l \tan(la) \quad (۲.۱۵۴)$$

چونکہ  $\kappa$  اور  $l$  دونوں  $E$  کے تفاعل میں لہذا اس کلیہ سے احبازتی توانائیاں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ احبازتی توانائی  $E$  کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad (۲.۱۵۵)$$

مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت  $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$  اور ہوگا لہذا  $\kappa a = \sqrt{z_0^2 - z^2}$  اور مساوات ۲.۱۵۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (۲.۱۵۶)$$

یہ  $z$  (لہذا  $E$ ) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر  $z_0$  ہے (جو کنواں کی ”جامت“ کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقے سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جاسکتا یا  $\tan z$  اور  $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$  کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے (شکل 18.2)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. موٹا ایک چوڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی  $z_0$  کی صورت میں طاق  $n$  کے لئے نقاط تقاطع  $z_n = n\pi/2$  سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} \quad (۲.۱۵۷)$$

اب  $E + V_0$  کنواں کی تہ کے اوپر توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں  $2a$  چوڑائی کے لامستثنائی چپکوروکنواں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ  $n$  یہاں طاق ہے لہذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہوگی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفاعل موج سے حاصل ہوگی)۔ یوں  $\infty \rightarrow V_0$  کرنے سے مستثنائی چپکوروکنواں سے لامستثنائی چپکوروکنواں حاصل ہوگا؛ تاہم کسی بھی مستثنائی  $V_0$  کی صورت میں مقید حالات کی تعداد مستثنائی ہوگی۔

ب. کم گہرا کم چوڑا کنواں جیسے جیسے  $z_0$  کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم سے کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ آخر کار ( $z_0 < \pi/2$ ) کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا) صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی ”کمزور“ کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔

اگر آپ  $\psi$  (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراؤ حالات  $E > 0$  کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ ہوں بائیں ہاتھ جہاں  $V(x) = 0$  ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۵۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۹) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

کنواں کے اندر جہاں  $V(x) = -V_0$  ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۰) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad (-a < x < a)$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۱) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

دائیں جانب جہاں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

یہاں آمدی جیٹ  $A$ ، انعکاسی جیٹ  $B$  اور ترسیلی جیٹ  $F$  ہے۔<sup>۴۲</sup>

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ  $-a$  پر  $\psi(x)$  کے استمرار کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۳) \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

نقطہ  $-a$  پر  $\frac{d\psi}{dx}$  کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۴) \quad ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

نقطہ  $+a$  پر  $\psi(x)$  کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۵) \quad C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika}$$

<sup>۴۲</sup> مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفصیلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بکھراؤ میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشکیلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حسرت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نفاذی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔

اور  $a + \frac{d\psi}{dx}$  کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$(۲.۱۶۶) \quad l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika}$$

ہم ان میں سے دو استعمال کرتے ہوئے  $C$  اور  $D$  حناج کر کے باقی دو حل کر کے  $B$  اور  $F$  تلاش کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے گا)۔

$$(۲.۱۶۷) \quad B = i \frac{\sin(2la)}{2kl} (l^2 - k^2) F$$

$$(۲.۱۶۸) \quad F = \frac{e^{-2ika} A}{\cos(2la) - i \frac{(k^2 + l^2)}{2kl} \sin(2la)}$$

شرح ترسیل  $T = |F|^2 / |A|^2$  کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۹) \quad T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left( \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right)$$

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں  $n$  عدد صحیح ہے

$$(۲.۱۷۰) \quad \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi$$

وہاں  $T = 1$  (اور کنواں ”شفاف“ ہوگا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۷۱) \quad E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

جو عین لامستثنای چپور کنواں کی اجازتی توانائیاں ہیں۔ شکل 19.2 میں توانائی کے لحاظ سے  $T$  ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۲.۲۹: مستثنای چپور کنواں کے طاق مقید حال کے تقاضا عمل موج کا تجزیہ کریں۔ اجازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیبی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا  $\psi(x)$  معمول پر لا کر مستقل  $D$  اور  $F$  تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈائی راک ڈیلٹا تقاضا عمل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور قد لامستثنای تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تقاضا عمل کنواں (مساوات ۲.۱۱۳) لامستثنای گبرہاؤن کے باوجود  $0 \rightarrow z_0$  کی بنا ایک ”کنزور“ محفہ ہے۔ ڈیلٹا تقاضا عمل محفہ کو مستثنای چپور کنواں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے  $C$  اور  $D$  کو  $F$  کی صورت میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la)] e^{ika} F; \quad D = [\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la)] e^{ika} F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیل رکاوٹ (جسے خطہ  $-a < x < a$  میں  $V(x) = +V_0 > 0$  لینے سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعیین کریں۔ تین صورتوں  $E < V_0$ ،  $E = V_0$  اور  $E > V_0$  کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تفعل موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب:  $E < V_0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔<sup>۳۴</sup>

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left( \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس  $E < V_0$  صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس  $E > V_0$  صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہوگی لہذا شرح ترسیل  $|F|^2 / |A|^2$  نہیں ہوگی (جہاں  $A$  آمدی جیٹ اور  $F$  ترسیلی جیٹ ہے)۔ دکھائیں کہ  $E > V_0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (۲.۱۴۲)$$

اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رد (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔  $E < V_0$  کی صورت میں  $T$  کیا ہوگا؟

د. صورت  $E > V_0$  کے لیے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے  $T + R = 1$  کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  اور حرکی توانائی  $E > 0$  ہو مخفیہ کی ایک احبابک گہرائی (شکل 34.2) کی طرف بڑھتا ہے۔

<sup>۳۴</sup> سیہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔

۱. صورت  $E = V_0/3$  میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳ کی طرح ہے، بس یہاں سیدھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکرا واپس لوٹنے کا احتمال جزو-۱ کے نتیجے سے بہت کم ہوگا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل 20.2 میں جیسے ہی گاڑی نقطہ  $x = 0$  پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی معدم استمرار کے ساتھ گر کر  $V_0 -$  ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئے ایک گاڑی کے لیے درست ہوگا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کمی محسوس کرتا ہے۔ باہر  $V = 0$  جبکہ مرکزہ کے اندر  $V = -12 \text{ MeV}$  ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ اشتقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی  $4 \text{ MeV}$  ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا اشتقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ نے جزو-۱ میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ  $T = 1 - R$  استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

### مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبداء پر  $-a < x < +a$  کے بیچ لامتناہی چکور کنواں کے اندر  $V(x) = 0$  اور اس کے باہر  $V(x) = \infty$  ہے۔ غیر تائع وقت شرودنگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری  $\psi$  (مساوات ۲.۲۸) میں  $(x+a)/2 \rightarrow x$  پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام  $\psi$  حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنواں کی چوڑائی  $2a$  ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل  $A$  اور  $\Psi(x, t)$  تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے  $\langle x \rangle$  کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ:  $\sin^n \theta$  اور  $\cos^n \theta$  کو تخفیف کے بعد  $\sin(m\theta)$  اور  $\cos(m\theta)$  کے خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے جہاں  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  ہوگا۔

سوال ۲.۳۸: کیمت  $m$  کا ایک ذرہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔ اچانک کنویں کا دایاں دیوار  $a$  سے  $2a$  منتقل ہوتا ہے جس سے کنواں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لحاقی طور پر اس عمل سے تقاضا عمل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

۱. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہوگا؟

۲. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہوگا؟

۳. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامتناہی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

۱. دکھائیں کہ لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرہ کا تفاعل موج کو انشائی تجدیدی عرصہ  $T = 4ma^2 / \pi \hbar$  کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے  $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$  ہوتا ہے۔

۲. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہوگا؟

۳. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصے ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کیت  $m$  ہے درج ذیل مٹنی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2 / ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

۱. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہوگی؟

۲. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنواں کے باہر ( $x > a$ ) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنواں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنواں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کیت  $m$  ہے ہارمونی مرتعش کی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغز کرتا ہے جہاں  $A$  کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \left( 1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

۱. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

۲. مستقبل کے لمحہ  $T$  پر تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\Psi(x, T) = B \left( 1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

جہاں  $B$  کوئی مستقل ہے۔ لمحہ  $T$  کی کم سے کم ممکن قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی مرتعش کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا سپرنگ جس کو کھینچا تو جابجا سکتا ہے لیکن اسے دیا نہیں جاسکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح سوچنا ہوگا جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہوگی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھا کر تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تقاضا عمل موج

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2} e^{ilx}$$

جہاں  $l$  ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھا کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبدأ پر لامتناہی چکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تقاضا عمل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات حل کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} \alpha \delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

جفت اور طاق تقاضا عمل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ اجبازی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترمیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تقاضا عمل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تقاضا عمل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں  $0 \rightarrow a$  اور  $a \rightarrow \infty$  پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کے منفرد حل جن کی توانائی  $E$  ایک دوسرے جیسی ہو کو **انحطاط**<sup>۵۶</sup> کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ شخص ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بعدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے جاتے ہیں۔<sup>۵۷</sup> اشارہ: مندرجہ کریں  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی،  $E$ ، ایک دوسری جیسی ہو۔ حل  $\psi_1$  کی شرودنگر مساوات کو  $\psi_2$  سے ضرب دیں اور اس سے  $\psi_2$  کی شرودنگر مساوات کو  $\psi_1$  سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ  $\psi_1 d\psi_2/dx - \psi_2 d\psi_1/dx$  ایک مستقل ہوگا۔ اب  $\pm\infty$  پر معمول پر لائے جانے کے قابل ہر حل  $0 \rightarrow \psi$  ہوگا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل درحقیقت صفر ہوگا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $\psi_2$  دراصل  $\psi_1$  کا مضرب ہے لہذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: مندرجہ کریں کمیت  $m$  کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط  $L$  ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں  $\psi(x + L) = \psi(x)$  ہوگا۔) اس کے ساکن حال تلاش کر کے انہیں معمول پر لائیں اور ان کی مطابقتی اجبازی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی  $E_n$  کے لئے دو آپس

<sup>۵۶</sup> ایسے دو حل جن میں صرف جبزو ضربی کا مشرق پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتب معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جبزو  $\phi$  کا مشرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جاسکتا ہے۔ یہاں ”منفرد“ سے مراد ”خطی طور پر غیر تابع“ ہے۔  
degenerate<sup>۵۷</sup>

<sup>۵۷</sup> جب ہم باب ۳ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاطی حالتیں جاتی ہیں۔ مندرجہ کریں کہ مخفی علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے پچھلے میں  $V = \infty$  ہو۔ مثلاً دو تہا لامتناہی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنواں میں پایا جائے گا۔

میں غنیر تابع حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا خلاف گھڑی حرکت کے لیے ہوگا، جنہیں آپ  $\psi_n^+(x)$  اور  $\psi_n^-(x)$  کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۴۵ کے مسئلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کارآمد کیوں نہیں ہے)؟

سوال ۲.۴۷: آپ کو صرف کئی تجزیہ کی اجازت ہے حساب کر کے نتیجہ اعزیز کرنے کی اجازت نہیں ہے۔ شکل 2.21 موئن دہرا چکور کٹوں پر غور کریں جہاں گرائی  $V_0$  اور چوڑائی  $a$  مقررہ ہیں جو اتنے بڑے ضرور ہیں کہ کئی مقید حال ممکن ہوں۔

(الف) زمینی تفاعل موج  $\psi_1$  اور پہلا ہیجان حال  $\psi_2$  کا خاکہ درج ذیل صورت میں کھینچیں۔

$$b = 0 \quad (ب) \quad b \approx a \quad (ج) \quad b \gg a$$

(ب)  $b$  کی قیمت صفر سے لامتناہی تک بڑھتے ہوئے توانائیاں  $E_1$  اور  $E_2$  کس طرح تبدیل ہوتی ہیں اس کا کئی جواب دیں۔

(ج) دو جوہری سالہ میں الیکٹران پر اثر انداز مخفی توانائی کا تاریخی ایک دوری نمونہ دوہرا کٹوں پیش کرتا ہے۔ مرکزوں کی قوت کشش کو دو کنویں ظاہر کرتی ہیں آزاد صورت میں یہ مرکزے کم سے کم توانائی کی صورت اختیار کریں گے۔ (ب) میں حاصل نتائج کے تحت کیا الیکٹران ان مرکزوں کو ایک دوسرے کے قریب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور پھینکے گا؟ اگر چہ دو مرکزوں کے بیچ قوت دفع بھی پایا جاتا ہے لیکن اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔

سوال ۲.۴۸: آپ نے مساوات 2.39 کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال 2.7 (د) میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں ہاشیہ میں میں نے آپ کو آگاہ کیا کہ اس سے پرانے طریقہ  $\langle H \rangle = \int \psi^*(x, 0) H \psi(x, 0) dx$  سے حاصل نہ کیجئے گا چونکہ  $\psi(x, 0)$  کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ مکمل بالخصوص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھے مسائل کے حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ منراہم کرتا ہے۔

(الف) آپ سوال 2.7 میں  $\psi(x, 0)$  کا پہلا تفرق حاصل کر کے اسکو سیدھی تفاعل  $\theta(x - a/2)$  کی صورت میں لکھیں جسے مساوات 2.143 میں پیش کیا گیا آخری سروں کی منکر نہ کریں صرف اندرونی خط  $0 < x < a$  کے لیے لکھیں۔

(ب) ابتدائی موجی تفاعل  $\psi(x, 0)$  کے دوسرے تفرق کو سوال 2.24 (ب) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

(ج) مکمل  $\int \psi^*(x, 0) H \psi(x, 0) dx$  کو حل کر کے اس کے قیمت حاصل کریں اور تصدیق کریں کہ یہ جواب وہی ہے جو آپ نے پہلے حاصل کیا تھا۔

سوال ۲.۴۹:

(الف) دیکھائیں کہ ہارمونی مرتعش مخفی توانائی کے وقت کے غنیر تابع شرودنجر مساوات مساوات 2.43 پر



درج ذیل پورا کرتا ہے

$$\psi(x, t) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} \left( x^2 + \frac{a^2}{2} (1 + e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t} \right) \right]$$

یہاں  $a$  ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔

(ب)  $|\psi(x, t)|^2$  تلاش کریں اور موجی اکٹھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

(ج)  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  کا حساب لگائیں اور دیکھیں کہ آیا مسئلہ اہر نفٹ مساوات 1.38 پر یہ پورا کرتے ہیں۔  
سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفسر عمل کنواں پر غور کریں

$$V(x, t) = -\alpha\delta(x - vt)$$

جہاں  $v$  ایک مستقل ہے کنواں کی سمتی رفتار کو ظاہر کرتا ہے۔

(الف) دیکھیں کہ وقت کے غیر متابع شرودنگر مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i[(E + (1/2)mv^2)t - mvx]/\hbar}$$

جہاں  $E = -\alpha^2/2\hbar^2$  ساکن ڈیلٹا تفسر عمل کے مقبض حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو شرودنگر مساوات میں پڑ کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں سوال 2.24 (ب) کا نتیجہ استعمال کریں۔

(ب) اس حال میں ہیملٹونی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں اور نتیجے پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۵۱: درج ذیل مخفی توانائی پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \text{sech}^2(ax)$$

جہاں  $a$  ایک مثبت مستقل ہے۔

(الف) اس مخفی توانائی کو ترسیم کریں۔

(ب) تصدیق کریں کہ اس مخفی توانائی کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A \text{sech}(ax)$$

اور اس کی توانائی تلاش کریں۔  $\psi_0$  کو معمول پر لائیں اور اس کا خط کھینچیں۔

(ج) دیکھیں کہ درج ذیل تفسر عمل کسی بھی مثبت توانائی  $E$  کے لیے شرودنگر مساوات کو حل کرتا ہے

$$\psi_k(x) = A \left( \frac{ik - a \tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

جہاں معمول کی طرح یہاں بھی  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے۔ چونکہ  $k \rightarrow -\infty$  سے  $z \rightarrow -1$  کے لئے  $\tanh z$  ہوگا  
لہذا  $x$  کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لئے

$$\psi_k(x) \approx Ae^{ikx}, \quad \text{بڑی منفی } x \text{ کے لئے}$$

جہاں  $\exp(-ikx)$  کی عدم موجودگی کی بنیاد بانیوں سے آپد ایک میج کو ظاہر کرتا ہے اور اس میں کوئی انعکاسی موج  
نہیں پایا جاتا۔  $x$  کی بڑی مثبت قیمتوں کے لئے  $\psi_k(x)$  کی متاثراتی صورت کیا ہوگی؟ اس مخفی توانائی کے لئے  $R$   
اور  $T$  کیا ہوں گے؟ یہ بلا انعکاس مخفی توانائی کی ایک بہت مشہور ایک مثال ہے کسی بھی توانائی کا ہر آمدی ذرہ اس سے  
سیدھا گزر جائے گا۔

سوال ۲.۵۲: بکھراؤ قالبہ مکانی مخفی توانائی کے لئے بکھراؤ کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے شکل  
2.22۔ بائیں ہاتھ خطہ ایک میں  $V(x) = 0$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۴۳) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ جہاں}$$

دائیں ہاتھ خطہ تین جہاں بھی  $V(x) = 0$  ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۴۴) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

ان دونوں کے بیچ خطہ دو میں مخفی توانائی جانے بغیر آپ کو  $\psi$  کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا لیکن چونکہ  
شرودنگر مساوات خطی ہے اور دور تہی تفرقی مساوات ہے لہذا اس کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Cf(x) + Dg(x)$$

جہاں  $f(x)$  اور  $g(x)$  دو خطی غیر تابع مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد درجہ اولیٰ شرائط ہوں گے جن میں سے دو  
خطہ ایک اور دو کو جوڑیں گے اور باقی دو خطہ دو اور تین کو جوڑیں گے۔ ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے  $C$  اور  $D$  کو خارج  
کر کے باقی دو کو حل کرتے ہوئے  $A$  اور  $G$  کی صورت میں  $B$  اور  $F$  تلاش کیئے جاسکتے ہیں

$$B = S_{11}A + S_{12}G, \quad F = S_{21}A + S_{22}G$$

یہ چار عددی سر  $S_{ij}$  پر منحصر ہوں گے لہذا  $E$  پر منحصر ہوں گے اور  $2 \times 2$  کا متالب  $S$  بنائیں گے جس  
سے بکھراؤ متالب یا مختصراً  $S$  متالب کہتے ہیں۔ متالب  $S$  آپ کو آتے ہوئے حیٹوں  $A$  اور  $G$  کی صورت  
میں جاتے ہوئے حیٹوں  $B$  اور  $F$  کی قیمت دیتے ہیں

$$(۲.۱۴۵) \quad \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

بائیں سے بکھراؤ کی صورت میں  $G = 0$  ہوگا لہذا انعکاسی اور ترسیمی شرح درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۴۶) \quad R_I = \frac{|B|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{11}|^2, \quad T_I = \frac{|F|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{21}|^2$$

دائیں سے بکھراؤ کی صورت میں  $A = 0$  ہوگا لحاظ درج ذیل ہوں گے

$$(۲.۱۷۷) \quad R_r = \frac{|F|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{22}|^2, \quad T_r = \frac{|B|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{12}|^2$$

(الف) ڈیلٹا تفاعل کنواں مساوات 2.114 کے لیے بکھراؤ کا  $S$  متلب تیار کریں۔

(ب) لامستثنای چکور کنواں مساوات 2.145 کے لیے  $S$  متلب تیار کریں۔ اشارہ: مسئلے کی تشکیلی پروہ کار لاتے ہوئے آپ کو کوئی نیا کام کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

سوال ۲.۵۳: **ترسیلی قالب**۔ متلب  $S$  سوال 2.52 آپ کو جانے والے حیطے  $B$  اور  $F$  کو آنے والے حیطوں  $A$  اور  $G$  کی صورت میں پیش کرتا ہے مساوات 2.175۔ بعض اوقات ترسیلی متلب  $M$  کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفی توانائی کے دائیں جانب حیطوں  $F$  اور  $G$  کو بائیں جانب حیطوں  $A$  اور  $B$  کی صورت میں پیش کرتا ہے

$$(۲.۱۷۸) \quad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(الف) متلب  $S$  کے اجزاء کی صورت میں متلب  $M$  کے چار اجزاء تلاش کریں اسی طرح متلب  $M$  کے چار اجزاء کی صورت میں متلب  $S$  کے اجزاء تلاش کریں۔ مساوات 2.176 اور 2.177 میں دیئے گئے  $R_r, T_r, R_l, T_l$  اور  $M$  متلب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

(ب) فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسی مخفی توانائی ہو جو دو تہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو شکل 2.23۔ دیکھیں کہ اس پورے نظام کا  $M$  متلب ان دو مخفی توانائیوں کے انفرادی  $M$  متلب کا حاصل ضرب ہوگا

$$(۲.۱۷۹) \quad M = M_2 M_1$$

ظاہر ہے کہ آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفی توانائیں بھی استعمال کر سکتے تھے یہی  $M$  متلب کی انفرادیت کا سبب ہے۔

(ج) نقطہ  $a$  پر واحد ایک ڈیلٹا تفاعل مخفی توانائی سے بکھراؤ کا  $M$  متلب تلاش کریں

$$V(x) = -\alpha \delta(x - a)$$

(د) جزو (ب) کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دوہرا ڈیلٹا تفاعل

$$V(x) = -\alpha [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

کے لیے  $M$  متلب تلاش کریں۔ اس مخفی توانائی کی ترسیلی شرح کیسے ہوگی؟

سوال ۲.۵۴: دم ہلانے کی ترکیب سے ہارمونی سرقتش کی زمینی حال کی توانائیوں کو پانچ معانی خیز ہندسوں تک تلاش کریں یعنی  $K$  کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات 2.72 کو اعدادی طریقہ سے پوں حل کریں کہ جی کی بڑی قیمت کے لیے حاصل تفاعل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ماتیہمڈیا میں درج ذیل پڑ کرنے سے ایسا ہوگا

$$\text{Plot[Evaluate}[u[x] /. \text{NDSolve}[u''[x] - (x^2 - K) * u[x] == 0, u[0] == 1, u'[0] == 0, u[x], x, 10^{-8}, 10, \text{N}]]$$

یہاں  $a, b$  ترسیم کی گئی اس کے ساتھ جبکہ  $c, d$  اس کی انتہائی ساتھ ہے  $a = 0, b = 10, c = 10, d = 10$ ۔ لیتے ہوئے شروع کریں۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا درست جواب  $K = 1$  ہے لحاظ آپ  $K = 0.9$  سے شروع کر سکتے ہیں۔ دیکھیں تفاع عمل موج کی دم کیا کرتی ہے۔ اب  $K = 1.1$  لیں ہم دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف چلے جائے گی۔ ان دونوں کی بیچ کہیں پر درست حل موجود ہے۔  $K$  کو درست جواب کے دونوں اطراف متریب سے متریب کرتے ہوئے درست جواب حاصل ہوگا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ سوال 2.54 استعمال کرتے ہوئے ہارمونی مرتعش کے ہیجانی حال کی توانائی پانچ بامعانی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیے آپ کو  $u[0] = 0$  اور  $u'[0] = 1$  لینا ہوگا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامتناہی چکور کنواں کی اولین چار توانائیوں کی قیمت پانچ بامعانی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 2.54 میں کی تفرقی مساوات میں موضوع تبدیلیاں لائیں اس بار آپ کو  $u(1) = 0$  پر نظر رکھنی ہوگی۔

## باب ۳

### قواعد و ضوابط

#### ۳.۱ ہلبرٹ فضا

گشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے کئی مفیکو کی بنی تھے۔ مثلاً ہارمونی مرتعش میں توانائی کی سطح میں جفت وصالے جبکہ باقی زیادہ عموماً نظر آتے ہیں، جنہیں ایک بار ثابت کرنا مفید ثابت ہو گا انکی مثالیں عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت ہے۔ اسکو ذہن میں رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیا جائے گا۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تقارن عمل موج اور عامل کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تقارن عمل موج ظاہر کرتی ہے۔ جبکہ متقابل مشاہدہ خواص کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر تصوراتی، سمتیات کی تعریفی، حالات پر تقارن عمل موج پورا اترتے ہیں۔ جبکہ عاملین ان پر خطی تبادلہ کے طور پر عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی قدرتی زبان خطی الجبرائی ہے۔

لیکن مجھے خدشہ ہے کہ اس طرز کی خطی الجبرائے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ ایک بُدی فضا میں سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کو ایک مخصوص معیاری عمودی اساس

$$(۳.۱) \quad |\alpha\rangle \rightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کے لحاظ سے N عدد اجزاء  $a_n$  سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔ دو سمتیات کا اندرونی ضرب  $\langle\beta|\alpha\rangle$  تین بُدی

نقطہ ضرب کو وسط دیتے ہوئے درج ذیل مخلوط عدد ہوگا،

$$(۳.۲) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N$$

خطی تبدلہ  $T$  جنہیں انہی مخصوص اساس کے لحاظ سے متالاب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ متالابی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتا ہے۔

$$(۳.۳) \quad |\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow b = Ta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کوانٹم میکانیات میں پائے جانے والے سمتیات زیادہ تر تفاعل ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں رہتے ہیں انہیں  $N$  اجزائی متالاب کے علامت سے ظاہر کرنا کچھ زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور متناہی ابعادی صورت میں ٹھیک رکھنے والے ریاضیاتی عمل لامتناہی ابعادی صورت میں پریشان کن صورت اختیار کر سکتے ہیں۔ اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ اگرچہ مساوات 3.2 متناہی مجموعہ ہر صورت موجود ہوگا لامتناہی مجموعہ یا مکمل عدم سرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگا۔ لحاظ اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل بے معنی ہوگی۔ یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علاقیت سے واقف ہوں گے، بہتر ہوگا کہ یہاں آپ ہوشیار رہیں۔

متغیر  $x$  کے تمام تفاعل مسل کر سکتی فضا پیدا کرتے ہیں، لیکن ہمارے لیئے یہ بس بڑا ہوگا۔ کسی بھی مکاناتی حال کو ظاہر کرنے کے لیئے ضروری ہے کہ تفاعل موج  $\Psi$  معمول پر لانے کے قابل ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام متالاب تکامل مربع تفاعل

$$(۳.۴) \quad f(x) \text{ Such that } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

اس سے بہت چھوٹا سمتی فضا دے گا سوال 3.1 (الف) کعبہ دیکھیے گا۔ ریاضی دان اسے  $L_2(a, b)$  کہتے ہیں جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا کہتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات میں

$$(۳.۵) \quad \text{تفاعل موج ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں}$$

ہم دو تفاعل عملوں کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔ جہاں  $f(x)$  اور  $g(x)$  دو تفاعل عمل ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f | g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

اگر  $f$  اور  $g$  دونوں متقابل مربع مکمل ہوں یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ انکا اندرونی ضرب موجود ہوگا مساوات 3.6 کا مکمل ایک مستثنائی عدد پر مرکوز ہوگا۔ یہ شواہز عدم مساوات کی درج ذیل تعمیلی صورت کے پیش نظر ہوگا۔

$$(3.4) \quad \left| \int_a^b f(x) * g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 3.6 اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے سوال 1-3 (ب)۔ بالخصوص درج ذیل پر دیہسان دیں

$$(3.8) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید  $f(x)$  کا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$(3.9) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

حقیقی اور غیر منفی ہوگا یہ صرف اس صورت صفر ہوگا جب  $f(x) = 0$  ہو۔

ایک تفاعل اس صورت معمول شدہ کہلاتا ہے جب اسکا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک کے برابر ہو دو تفاعل اس صورت عمودی ہوں گے جب انکا اندرونی ضرب صفر ہو اور تفاعلوں کا سلسلہ  $f_n$  اس صورت معیاری عمودی ہوگا جب تمام معمول شدہ اور باہمی طور پر عمودی ہوں:

$$(3.10) \quad \langle f_m|f_n \rangle = \delta_{mn}$$

آخر میں تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت مکمل ہوگا جب ہلبرٹ فضا میں ہر تفاعل کو انکا خطی جوڑ لکھا جاسکے:

$$(3.11) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

معیاری عمودی تفاعلوں  $f_n(x)$  کے عددی سر فوریر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیئے جاتے ہیں:

$$(3.12) \quad c_n = \langle f_n|f \rangle$$

آپ اسکی تصدیق کر سکتے ہیں۔ میں نے باب 2 میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ لامستثنائی چپکور کنواں کے ساکن حالات مساوات 2.28 وقفہ  $(0,a)$  پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات مساوات (2.67 اور 2.85) وقفہ  $(-\infty, \infty)$  مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

(الف) دیکھائیں کہ تمام متبادل مکمل مربع تقاعسوں کا سلسلہ سری فضا دے گا آپ حصہ A.1 میں تعریف کا موازنہ کریں اشارہ: آپ نے دیکھنا ہوگا کہ دو عدد متبادل مربع تقاعسوں کا مجموعہ از خود متبادل مکمل مربع ہوگا مساوات 3.7 استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تقاعسوں کا سلسلہ سری فضا ہوگا؟

(ب) دیکھائیں کہ مساوات 3.6 کا مکمل اندرونی ضرب ضرب کے تمام شرائط پر پورا اترتا ہے حصہ A.2۔ سوال 3.2

(الف) تقاعس  $x^v = f(x)$  متغیر  $v$  کے کس مقداری سعت وقفہ  $(0,1)$  پر ہلبرٹ فضا میں ہوگا؟ متغیر  $v$  کو حقیقی تصور کریں جو ضروری نہیں مثبت ہو۔

(ب) کیا  $\frac{1}{2} = v$  کی صورت میں  $f(x)$  ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تقاعس  $f(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ اور تقاعس  $f(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

چونکہ ہر مثبت عاملین کی توقعاتی قیمت حقیقی ہوتی ہے لحاظ یہ کو انٹرمیکانیات میں قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔

متبادل مشاہدہ کو ہر مثبت عاملین فضا ہر کرتے ہیں

(۳.۱۳)

آئیں اس کی تصدیق کریں۔ مثلاً کیا معیاری حرکت کا عامل ہر مثبت ہے؟

$$(۳.۱۴) \quad \langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ  $f(x)$  اور  $g(x)$  متبادل مکمل مربع ہیں لحاظ  $\pm\infty$  پر یہ صفر تک پہنچیں گے۔ لحاظ مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا ہوگا کہ مکمل بالخصوص کے بنا منفی کی علامت کو  $i$  کا محلول جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ علامت  $d/dx$  جس میں  $i$  نہیں پایا جاتا غیر ہر مثبت ہے اور یہ کسی بھی متبادل مشاہدہ کو فضا ہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۱: دیکھائیں کہ ہلبرٹ فضا میں تمام تقاعس  $h$  جن کے لیے  $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle h | \hat{Q}h \rangle$  ہوتا ہے تمام  $f$  اور  $g$  کے لیے  $\langle \hat{Q}f | g \rangle = \langle f | \hat{Q}g \rangle$  ہوگا۔ مساوات 3.16 اور 3.17 میں ہر مثبت کی تعریفات معادل ہیں۔ اشارہ پہلے  $h = f + g$  لیں اور بعد میں  $h = f + ig$  لیں۔

سوال ۳.۲:

(الف) دیکھائیں کہ دو ہر مثبت عاملین کا مجموعہ از خود ہر مثبت ہوگا۔

(ب) فرض کریں  $\hat{Q}$  ہر مثبت ہے اور  $\alpha$  ایک محلول عدد ہے۔  $\alpha$  پر کیا شرائط مسلط کرنے سے  $\alpha \hat{Q}$  بھی ہر مثبت ہوگا؟

(ج) دو ہر مثبت عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مثبت ہوگا؟

(د) دیکھائیں کہ ہلبرٹ فضا میں تمام  $(\hat{x} = x)$  اور ہیلبرٹ فضا میں  $(\hat{H} = -(\hbar^2/2m)d^2/dx^2 + V(x))$  ہر مثبت ہے۔

سوال ۳.۳: عامل  $\hat{Q}$  کا ہر مثبت جوڑی دار یا شریک عامل  $\hat{Q}^\dagger$  درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

(۳.۱۵)

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f | g \rangle \text{ (gandfallfor)}$$



یوں ہر میٹھی عامل اپنے ہر میٹھی جوڑی دار کے برابر ہوگا  $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$ ۔

(الف)  $x, i$  اور  $d/dx$  کے ہر میٹھی جوڑی دار تلاش کریں۔

(ب) ہارمونی سرکش کے عامل رفت  $a_+$  مساوات 2.47 کا ہر میٹھی جوڑی دار تیار کریں۔

(ج) دیکھیں کہ  $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$  ہوگا۔

### ۳.۱.۱ قابل معلوم حالات

کوانٹم میکانیات کی قابل معلومیت کی بنیاد عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ کہ صدرہ جو تمام  $\psi$  حال میں ہوں کی قابل مشاہدہ  $Q$  پیمائش سے ایک چھپے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں  $Q$  کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت جسے ہم  $q$  کہہ سکتے ہیں دیگا؟ اس کو 'قابل مشاہدہ'  $Q$  کی قابل معلوم حال کہہ سکتے ہو۔ ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ہیلٹون کی ساکن حالات قابل معلوم ہے۔ ساکن حال  $\psi_n$  میں ایک ذرہ کی قُل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی اجازتی توانائی  $E_n$  دیگا۔

قابل معلوم حال میں  $Q$  کی معیاری انحراف صفر ہوگی جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۳.۱۶) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{Q} - q)^2 \psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) \psi | (\hat{Q} - q) \psi \rangle = 0$$

اب اگر ہر پیمائش  $q$  دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی  $q$  ہوگی  $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ  $\hat{Q}$  ہر میٹھی ہے لحاظ  $Q - q$  بھی ہر میٹھی عامل ہوگا۔ میں نے اندرونی ضرب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایک حبز ضربی کو بائیں منتقل کیا لیکن ایسا واحد تفعل جس کا خود کے ساتھ اندرونی ضرب صفر ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۷) \quad \hat{Q}\psi = q\psi$$

یہ عامل کیونکہ امتیازی قدر مساوات یا آگنی قدر مساوات ہے۔  $\hat{Q}$  کا ایک امتیازی تفعل  $\psi$  ہے جس کی مطابقتی آگنی قدر  $Q$  ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۸) \quad \text{eigenfunctions are states Determinate } \hat{Q}$$

ایسے حال پر  $Q$  کی پیمائش لازماً امتیازی قدر  $q$  دیگی۔

دیباچہ رہے کہ آگنی قدر ایک عدد ہے تاکہ کوئی عامل یا تفعل۔ ایک آگنی تفعل کو ایک مستقل سے ضرب دینے سے دوبارہ ایک آگنی تفعل حاصل ہوگا جسکی آگنی قیمت وہی ہوگی۔ امتیازی تفعل کی تعریف کے روئے صفر ایک آگنی تفعل نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب کسی بھی عامل  $\hat{Q}$  اور تمام  $q$  کے لیے  $Q\psi = q\psi = 0$  ہوتا اور ہر عدد ایک آگنی قدر ہوتا۔ ہاں آگنی قدر کی قیمت صفر ہو سکتی ہے ایک عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس کا طیف حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی تفعل کی امتیازی قیمت ایک دوسرے جیسی ہوگی ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ طیف انحطاطی ہے۔

مشال کے طور پر متل توانائی کے متاثرہ معلوم حالات ہیلٹونی کے امتیازی تفاعل ہوں گے۔

$$(۳.۱۹) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جو عین وقت کا غیر متاثرہ شرودنگر مساوات ہے۔ ایسی سیاق و سباق میں ہم امتیازی متدرج کے لیے صرف  $E$  استعمال کرتے ہیں اور امتیازی تفاعل کے لیے  $\psi$  اس کے ساتھ جب  $\exp(-iEt/\hbar)$  جو  $\psi$  کا حاصل ہوگا جو اگر آپ چاہیں اب بھی  $H$  کا امتیازی تفاعل ہے۔

مشال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں دو ابعاد میں  $\phi$  قطبی معدد کا ایک متغیر ہے

$$(۳.۲۰) \quad \hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$$

یہ عامل سوال 2.46 میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا کیا  $\hat{Q}$  ہر میٹری ہے؟ اس کے امتیازی تفاعل اور امتیازی امتداد تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم متناہی وقفہ  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  پر تفاعل  $f(\phi)$  کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں  $\phi + 2\pi$  اور  $\phi$  ایک ہی طبعی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۳.۲۱) \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

تکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* (i \frac{dg}{d\phi}) d\phi = if^*g|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i (\frac{df^*}{d\phi}) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لحاظ  $\hat{Q}$  ہر میٹری ہے یہاں مساوات 3.26 کی بنا سرحدی جز خارج ہوگا۔ امتیازی امتداد مساوات

$$(۳.۲۲) \quad i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi)$$

کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$(۳.۲۳) \quad f(\phi) = Ae^{-iq\phi}$$

مساوات 3.26  $q$  کی ممکنہ قیمتوں کو درج ذیل پر رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$(۳.۲۴) \quad e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

□

اس عامل کا طیف تمام عدد صحیح پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر انخطاتی ہے۔

## ۳.۲ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبی طور پر قابل مشاہدہ کے تعین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل<sup>۱</sup> ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات بلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری<sup>۲</sup> ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا مثلاً ہارمونی سرکش کی ہیملٹنی، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً متناہی چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نہایت زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ درحقیقت یہ متناہی ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہر مشی تفاعل کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

## ۳.۲.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل  $f$  اور امتیازی قدر  $q$  ہو) اور<sup>۳</sup>

$$\langle f | \hat{Q}f \rangle = \langle \hat{Q}f | f \rangle$$

ہو ( $\hat{Q}$  ہر مشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ  $q$  ایک عدد ہے لہذا اس کو تکرار سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات 6.3) لہذا دائیں طرف  $q$  بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم  $\langle f | f \rangle$  صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت  $f(x) = 0$  امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہذا  $q = q^*$  یعنی  $q$  حقیقی ہوگا۔

□

discrete<sup>۱</sup>

continuous<sup>۲</sup>

۳ یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات بلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرہ کی متابل مشاہدہ کی پیشکش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۲: انفرادی امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ ساتھ مندرج کریں  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب  $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$  ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$q' \langle f | g \rangle = q \langle f | g \rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے مندرج کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے۔) اب (مسئلہ ۱ کے تحت)  $q$  حقیقی ہے، لہذا  $q' \neq q$  کی صورت میں  $\langle f | g \rangle = 0$  ہوگا۔

□

بھی وجہ ہے کہ لامستثنیٰ چپکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی متابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۲: ہمیں انحطاطی حالات ( $q' = q$ ) کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیا) امتیازی مقدار رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی مقدار والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۴، ۳-۱) اور ہم گرام شمد ترکیبے عمودیت<sup>۴</sup> (سوال A4 استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولی طور پر ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کو انٹرمیکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم مندرج کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریت سے ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اساس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنیٰ بعدی سمتی فضا میں ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامستثنیٰ بعدی فضاوں تک وسعت نہیں دی جاسکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کو انٹرمیکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہذا (ذرا کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: متابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔<sup>۵</sup>

<sup>۴</sup>Gram-Schmidt orthogonalization process

<sup>۵</sup>چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشل کے تحت، لامستثنیٰ چپکور کنواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں متابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

سوال ۳.۴:

۱. فرض کریں کہ عامل  $\hat{Q}$  کے دو امتیازی تفاعلات  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہیں اور ان دونوں کا امتیازی مٹر  $q$  ہے۔ دکھائیں کہ  $f$  اور  $g$  کا ہر خطی جوڑ از خود  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل ہوگا اور اس کا امتیازی مٹر  $q$  ہوگا۔

ب. تصدیق کریں کہ  $f(x) = e^x$  اور  $g(x) = e^{-x}$  عامل  $d^2/dx^2$  کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی امدار ایک دوسرے کے تفاعل  $f$  اور  $g$  کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ  $(-1, 1)$  پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۵:

۱. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہر مشی عامل کے امتیازی امدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی امدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

### ۳.۲.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور کمیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی امدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ  $p$  امتیازی مٹر اور  $f_p(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۲۵) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ  $p$  کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ متبادل یکساں مبرج نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی امدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۳-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۶) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم  $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$  لیں تب

$$(۳.۲۷) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۲۸) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p - p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیٹر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ مساوات ۳.۲۸ کو ڈیراک معیاری عمودیت<sup>۱</sup> کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب عمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (قابل تکامل مربع) تفاعل  $f(x)$  کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۹) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

پھیلاؤ عددی سر (جواب تفاعل  $c(p)$  ہوگا) کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ پھیلاؤ (مساوات ۳.۲۹) درحقیقت ایک فورسٹر تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۲۷) سائن نمائیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$(۳.۳۱) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ  $\hat{p}$  کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اعداد حقیقی ہوں گے) "مضامات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول

<sup>۱</sup> Dirac orthonormality

پر لانے کے متبادل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ بعد میں پتہ چلے گا)۔<sup>۷</sup>

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی افتد اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ  $y$  امتیازی افتد اور  $g_y(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(3.32) \quad xg_y(x) = yg_y(x)$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے)  $y$  ایک مقررہ عدد، جبکہ  $x$  استمراری متغیر ہے۔ متغیر  $x$  کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے  $x$  سے ضرب دینا، اس کو  $y$  سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ  $x = y$  کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی افتد کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تفاعلات متبادل یکساں مریع نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(3.33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم  $A = 1$  لیں تاکہ

$$(3.34) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(3.35) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(3.36) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

<sup>۷</sup> غیر حقیقی امتیازی افتد والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ ناصرف معمول پر لانے کے متبادل نہیں بلکہ  $\pm\infty$  پر بے متناہد ہوتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں ”مضامینات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (مستثنائی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ بلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا  $\hat{p}$  کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی افتد غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ بلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مسوائے 9.3 میں) سرحدی حیزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک  $f$  بلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب  $\hat{p}$  کا امتیازی تفاعل  $g$  ہو جس کا امتیازی افتد حقیقی ہو، تاہم امتیازی افتد کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل  $\hat{p}$  کا امتیازی افتد ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل  $\hat{p}$  کے امتیازی افتد ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں  $\hat{p}$  ہر مشی ہو۔

جہاں درج ذیل ہوگا

$$c(y) = f(y) \quad (3.32)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فورسیرے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہذا اس کے امتیازی اعداد کو استمراری متغیر  $p$  یا یہاں پیش مثالوں میں  $y$ ، اور بعد ازاں عموماً  $z$  سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اعداد والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عموماً بہت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب مکمل ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۶:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی سر تعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (مستثنیٰ چکور کنواں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۷: کیا لامستثنیٰ چکور کنواں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

### ۳.۳ متعمم شماراتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی متابل مشاہدہ مختار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متعمم شماراتی مفہوم<sup>۸</sup> پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے متابل بتاتی ہے۔ متعمم شماراتی مفہوم اور شرودنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقاء کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انٹرمیکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شماراتی مفہوم: حال  $\Psi(x, t)$  میں ایک ذرے کی ایک متابل مشاہدہ  $Q(x, P)$  کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل  $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$  کی کوئی ایک امتیازی فندر دے گی۔ اگر  $\hat{Q}$  کا طیف غیر مسلسل ہو تب



معیاری عمودی امتیازی تفاعل  $f_n(x)$  سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قدر  $q_n$  کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔} \quad (۳.۳۸)$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی اقدار  $q(z)$  حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات  $f_z(x)$  ہوں، سعت  $dz$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔} \quad (۳.۳۹)$$

پیشانی عمل کے بن تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم<sup>۹</sup> ہوتا ہے۔<sup>۱۰</sup>

شماراتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (۳.۴۰)$$

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو باآسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔<sup>۱۱</sup>

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x) \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۱)$$

کینی طور پر ” $\Psi$  میں  $f_n$  کی مقدار“ کو  $c_n$  ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیشانی  $Q$  کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $\Psi$  میں ” $f_n$  کی مقدار“ پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیشانی کی ٹھیک ٹھیک قیمت  $|c_n|^2$  ہوگی۔ متمم شماراتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔<sup>۱۲</sup>

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۲)$$

collapse<sup>۹</sup>

<sup>۱۰</sup> استمراری طیف کی صورت میں پیشانی قیمت کے گرد دو نواہ میں، پیشانی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود سعت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔  
<sup>۱۱</sup> دھیان رہے کہ تاہم وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں  $c_n(t)$  لکھنا

چاہیے۔

<sup>۱۲</sup> یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ ”اس ذرے کا حال  $f_n$  میں پائے جانے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے۔“ یہ کہنا بالکل غلط ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال  $\Psi$  میں ہے۔ ہاں  $Q$  کی پیشانی سے قیمت  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔ ایسی پیشانی اس حال کو تفاعل موج  $f_n$  پر منہدم کرتی ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال  $\Psi$  میں ہے، اس کا  $Q$  کی پیشانی کے بعد حال  $f_n$  میں ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جو یقیناً تقابلاً عمل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ (۳.۴۳) \quad &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n' n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned}$$

اسی طرح تمام ممکن امتیازی افتدرا کو افتدراوی طور ہر اس افتدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے  $Q$  کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$(۳.۴۴) \quad \langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2.$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۵) \quad \langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle$$

جسے  $\hat{Q} f_n = q_n f_n$  کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۴۶) \quad \langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n' n} = \sum_n q_n |c_n|^2.$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آ رہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماراتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چومارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال  $\Psi$  میں ایک ذرے کے لیے  $x$  کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی افتدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد  $y$  متغیر  $x$  کا امتیازی افتدر ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ذیراکہ معیاری عمودی) امتیازی تقابلاً عمل  $\delta(x - y)$  ہوگا۔ ظاہر اورج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۷) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سمت  $dy$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|\Psi(y, t)|^2$  ہوگا جو ٹھیک اصل شماراتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تقابلاً عمل  $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$  ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۸) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج<sup>۳</sup> پکارا اور  $\Phi(p, t)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  کا فورسیر بدل ہے جو مسئلہ پائشرال کے تحت اس کا الٹ فورسیر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۴۹) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متعمم شریاتی مفہوم کے تحت سعت  $dp$  میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۱) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کیت  $m$  ہے ڈیٹا تفاعل کوان  $V(x) = -\alpha\delta(x)$  میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا  $p_0 = m\alpha/\hbar$  سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟  
حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں  $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$  ہے)۔

$$(۳.۵۲) \quad \Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکت کی فضا تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۸: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکت کی فضا تفاعل موج  $\Phi(p, t)$  تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے  $p$  کی پیمائش کا کلاسیکی سعت کے باہر نتیجہ کا احتمال

(دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”تقسیم عمل خنل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔  
سوال ۳.۹: درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle x \rangle = \int \Phi^* \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp. \quad (۳.۵۳)$$

اشارہ: دھیان رہے کہ  $x e^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left( \frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$  ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل مقام  $i\hbar \partial/\partial p$  ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases} \quad (۳.۵۴)$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا)۔

### ۳.۴ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو  $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$  کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتوجہ رکھیں۔

#### ۳.۴.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ  $A$  کے لیے درج ذیل ہوگا (ساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں  $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$  ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ  $B$  کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (خوارزم عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \quad (۳.۵۵)$$

اب کسی بھی مخلوط عدد  $z$  کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$|z|^2 = [(\text{حقیقی}(z))^2 + (\text{خیالی}(z))^2] \geq [(\text{خیالی}(z))^2] = \left[ \frac{1}{2i}(z - z^*) \right]^2$$

یوں  $z = \langle f|g \rangle$  لیتے ہوئے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} [\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن  $\langle f|g \rangle$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \hat{B}\langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B}\Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g|f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

لہذا

$$\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عملین کا مقابلہ ہے (مساوات ۳.۴۸)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

یہ اصول عدم یقینیت<sup>۱۴</sup> کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہر مشی عملین کے مقابلہ میں بھی  $i$  کا جذریا پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود  $i$  کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔<sup>۱۵</sup>

<sup>۱۴</sup>uncertainty principle

<sup>۱۵</sup>یہ کہتا زیادہ درست ہوگا کہ دو ہر مشی عملین کا مقابلہ از خود حنائف ہر مشی ( $\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$ ) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۳)۔

مثال کے طور پر، مندرجہ ذیل میں مقام ( $\hat{A} = x$ ) پہلا اور معیار حرکت ( $\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ ) دوسرا متبادل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مادہ ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left( \frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۵۹)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو متبادل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر متقابل ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ<sup>۱۹</sup> کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ متبادل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۱۲.۳ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (متقابل) متبادل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔<sup>۲۰</sup>

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹن، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا  $z$  جزو باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی مقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا مقام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انٹرم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شمار یاتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا مقام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا مقام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فورسٹر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسیع سرعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج

<sup>۱۹</sup> incompatible observables

<sup>۲۰</sup> یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر متقابل متبادلوں کو بسکوقوت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک دوسرے جیسی میثاب تبادله سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ متقابل ہر مشی متبادلوں کو بسکوقوت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۱۱ دیکھیں۔

(اب) پوری طرح معین لیکن مقام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔<sup>۱۸</sup> مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر متمم کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہو گی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متبادل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً تب ممکن ہوگا جب دونوں متبادل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۰:

۱. درج ذیل مسائل مقلوب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (۳.۶۰)$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل  $f(x)$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx} \quad (۳.۶۱)$$

سوال ۳.۱۱: مقام ( $A = x$ ) میں عدم یقینیت اور توانائی ( $B = p^2/2m + V$ ) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

سکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۲: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر  $\hat{P}$  اور  $\hat{Q}$  کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے  $0 = [\hat{P}, \hat{Q}]f$  ہوگا۔

<sup>۱۸</sup> جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً)  $x$  کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود  $p$  کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے فوٹان اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے متابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا مقام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

## ۳.۴.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرقتش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد  $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$  کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۵ اور مساوات ۳.۵۶۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ  $\Psi$  کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو:  $g(x) = cf(x)$ ، جہاں  $c$  کوئی مخلوط عدد ہے تب شمار عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۵۶ میں  $z$  کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب  $0 = \text{حقیقی}(z)$  ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle_{\text{حقیقی}} = (c\langle f|f \rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب  $\langle f|f \rangle$  یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل  $c$  لازماً حاصِ خیالی ہوگا؛ جسے ہم  $ia$  لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۲) \quad g(x) = iaf(x), \quad z \text{ حقیقی}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۳.۶۳) \quad \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = ia(x - \langle x \rangle) \Psi$$

جو متغیر  $x$  کے تفاعل  $\Psi$  کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۳)۔

$$(۳.۶۴) \quad \Psi(x) = Ae^{-a(x - \langle x \rangle)^2 / 2\hbar} e^{i\langle p \rangle x / \hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ درحقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔<sup>۱۹</sup>

سوال ۳.۱۳: مساوات ۳.۶۳ کو  $\Psi(x)$  کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  مستقلات ہیں۔

## ۳.۴.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$(۳.۶۵) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

<sup>۱۹</sup> دھیان رہے کہ صرف  $\Psi$  کو  $x$  کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقلات“  $a$ ،  $A$ ،  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ  $\Psi$  کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتادہائی کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحے پر تفاعل موج  $x$  کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحے پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔



یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے  $\Delta x$  (متغیر  $x$  کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۵ کی طرح کا توانائی و وقت اصول عدم یقینیت<sup>۲۰</sup> درج ذیل ہے۔

$$(۳.۶۶) \quad \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں  $x$  اور  $t$  (بلکہ  $ct$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں  $p$  اور  $E$  (بلکہ  $E/c$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۶۶ اور مساوات ۳.۶۵ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکینکس نہیں کر رہے ہیں۔ شرودنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ  $t$  اور  $x$  کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفسیقی مساوات  $t$  میں یک رتی جبکہ  $x$  میں دور تبی ہے)، اور مساوات ۳.۶۵ سے قطعاً مساوات ۳.۶۶ مراد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ناہمی مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر متدار اس کے تفسیلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو  $\Delta t$  ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متابل مشاہدہ  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں  $H = p^2/2m + V$  ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{Q} \hat{H} \Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب  $\hat{H}$  ہر مشی ہے لہذا  $\langle \Psi | \hat{H} \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle$  اور یوں اورج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۷) \quad \frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۴ اور ۳.۲۸ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا،<sup>۲۱</sup> یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقلب تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر  $\hat{H}$  اور  $\hat{Q}$  آپس میں متبادل تبدیل ہوں، تب  $\langle Q \rangle$  مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے  $Q$  بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۵۸) میں ہم  $A = H$  اور  $B = Q$  لے کر فرض کریں کہ  $Q$  صریحاً  $t$  کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left( \frac{1}{2i} \frac{\hbar d \langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2 \left( \frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right|$$

ہم  $\Delta E \equiv \sigma_H$  اور درج ذیل تعریضات لیتے ہیں۔

$$(۳.۶۸) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d \langle Q \rangle / dt|}$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۹) \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں  $\Delta t$  کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا  $\Delta t$  اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں  $Q$  کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص  $\Delta t$  اس قابل مشاہدہ  $Q$  پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی  $\Delta E$  کی صورت میں تمام قابل

<sup>۲۱</sup> وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً  $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$  ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حناطر ایک ایسے ہارمونی سر تقش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقلب اس پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجب حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبے یا کم ہو جاتا ہو):  $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک متابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکساں طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے متغیر ہوں گی ( $\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$ )؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مادہ ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر  $a, b, \psi_1$  اور  $\psi_2$  حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ  $\tau = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$  ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے  $\Delta E = E_2 - E_1$  اور  $\Delta t = \tau$  لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً  $\geq \hbar/2$  ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے شکل 1.3؟ کئی طور پر  $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$  ہوگا لیکن  $E = p^2/2m$  ہے، لہذا  $\Delta E = p\Delta p/m$  ہوگا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت  $\geq \hbar/2$  ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۶ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۷: ذرہ  $\Delta$  تقریباً  $10^{-23}$  سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود نکلے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیمیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جبرس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط  $1232 \text{ MeV}/c^2$  پر اور چوڑائی تقریباً  $120 \text{ MeV}/c^2$  ہوگی (شکل 2.3)۔ ساکن صورت توانائی ( $mc^2$ ) کیوں بعض اوقات  $1232$  سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی خصل کے بنائے؟ جی نہیں کیوں کہ

$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2} \text{ MeV}\right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ  $3 \times 10^{-22} \text{ MeV s} = \hbar/2$  یوں کیفیت میں پھیلاؤ انتہائی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت احبازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیفیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔<sup>۲۲</sup> □

ان مثالوں میں ہم نے حبزو  $\Delta t$  کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مسر اد طول موج بھت؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مسر اد وہ دورانیہ بھت جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں  $\Delta t$  اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بن کو انٹرمیکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو احبازت ہے کہ آپ توانائی  $\Delta E$  ”ادھار“ لے کر وقت  $\Delta t \approx \hbar / (2\Delta E)$  کے اندر ”واپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی حبانز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کو انٹرمیکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی احبازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۶۹ کے حصول میں کوئی ایسی احبازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی غلط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ غلط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۴: درج ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۶۷ کی اطلاق کریں۔

$$۱. Q = 1 \quad ۲. Q = H \quad ۳. Q = x \quad ۴. Q = p$$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۵: معیاری انحراف  $\sigma_H$ ،  $\sigma_x$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تفاعل موج اور قابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۶: معیاری انحراف  $\sigma_H$ ،  $\sigma_x$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۷: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۱ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

<sup>۲۲</sup> حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ  $10^{-23}$  سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسی تراسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الارغ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ مندرجہ کریں کہ  $\Delta$  تقسیر یا ایک پروٹان ( $10^{-15} \text{ m}$ ) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقسیر یا  $10^{-23}$  سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ مندرجہ کر نامشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہوگا۔

## ۳.۵ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ  $A$  پر غور کریں (شکل 3.3 الف)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ  $x$  اور  $y$  محدد کا ایک کارتیسی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ  $A$  کے اجزاء:  $A_x = \hat{i} \cdot A$  اور  $A_y = \hat{j} \cdot A$  وضع کریں (شکل 3.3 ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام قائم کرے جس کے محدد  $x'$  اور  $y'$  ہوں؛ وہ سمتیہ  $A$  کے اجزاء  $A'_x = \hat{i}' \cdot A$  اور  $A'_y = \hat{j}' \cdot A$  پیش کرے گی (شکل 3.3 ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس  $\{\hat{i}, \hat{j}\}$  اور  $\{\hat{i}', \hat{j}'\}$  کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ از خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

یہی کچھ کو انٹرمیکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو ”باہر بلبرٹ فضا“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفاعل معام کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی پھیلاؤ کا عددی سر موثری تفاعل  $\Psi(x, t)$  ہوگا:

$$\Psi(x, t) = \langle x | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.40)$$

(جہاں  $\hat{x}$  کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $x$  ہے کو سمتیہ  $|x\rangle$  ظاہر کرتا ہے)<sup>۲۳</sup>، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی پھیلاؤ، معام و معیار حرکت موثری تفاعل  $\Phi(p, t)$  ہے:

$$\Phi(p, t) = \langle p | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.41)$$

(جہاں  $\hat{p}$  کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $p$  ہے کو سمتیہ  $|p\rangle$  ظاہر کرتا ہے)۔<sup>۲۴</sup> ہم  $|\mathcal{H}\rangle$  کے پھیلاؤ کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر رہے ہیں):

$$c_n(t) = \langle n | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.42)$$

(جہاں  $\hat{H}$  کے  $n$  ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ  $|n\rangle$  ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات 3.۴۱ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات  $\Psi$  اور  $\Phi$ ، اور عددی سروں کا سلسلہ  $\{c_n\}$  ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x) \end{aligned} \quad (3.43)$$

<sup>۲۳</sup> میں اس کو  $g_x$  (مساوات 3.۳۴) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس معام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھکارا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ بلبرٹ فضا کو،  $x$  پر، بطور متبادل منبع عمل تفاعل کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس معام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتیہ فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔  
<sup>۲۴</sup> معامی فضا میں یہ  $f_p(x)$  ہوگا (مساوات 3.۴۷)۔

(متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$(۳.۴۴) \quad |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس  $\{|e_n\rangle\}$  کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$(۳.۴۵) \quad \begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \\ |\beta\rangle &= \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے} \end{aligned}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے قالمیج ارکان<sup>۲۶</sup>

$$(۳.۴۶) \quad \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۴۷ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۳.۴۷) \quad \sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle$$

یا، سمتیہ  $|e_m\rangle$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$(۳.۴۸) \quad \sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۹) \quad b_m = \sum_n Q_{mn} a_n$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متابلی ارکان معلومات فراہم کرتے ہیں۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہوگا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد مستثنائی عدد  $(N)$  ہوگا۔ سمتیہ  $|\psi(t)\rangle$  ایسی صورت میں  $N$  ابعادی سیتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)،  $(N)$  اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عملین  $(N \times N)$  سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامستثنائی آبادی سیتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حلقی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

<sup>۲۵</sup> میں مندرج کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں  $n$  استمراری ہوگا اور مجموعہ اس کی جگہ نکلائے ہوں گے۔

<sup>۲۶</sup> matrix elements

<sup>۲۷</sup> یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”متالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامستثنائی ہوگی (جن کی گسٹتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تانج حالات ممکن ہیں۔<sup>۲۸</sup>

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$| \mathcal{Z} \rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ہوگا جس} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہے۔}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مٹی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں  $g$  اور  $h$  حقیقی مستقل ہیں۔ اگر ( $t = 0$ ) پر یہ نظام حال  $|1\rangle$  سے ابتدا کرے تب وقت  $t$  پر اس کا حال کیا ہوگا؟

حل: (تانج وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathcal{Z}\rangle = H |\mathcal{Z}\rangle \quad (۳.۸۰)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تانج تانج شرودنگر

$$H |\mathcal{Z}\rangle = E |\mathcal{Z}\rangle \quad (۳.۸۱)$$

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم  $H$  کی امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی افتدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \pm g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں  $(h+g)$  اور  $(h-g)$  ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm \alpha$$

<sup>۲۸</sup> یہاں ”مساوات“ کی نشان سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی عدا تیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathfrak{z}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathfrak{z}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathfrak{z}_{+}\rangle + |\mathfrak{z}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو  $e^{-iE_{\text{nt}}t/\hbar}$  منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathfrak{z}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i(h+g)t/\hbar}|\mathfrak{z}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar}|\mathfrak{z}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar} \left[ e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ  $t = 0$  پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو<sup>۳۹</sup> کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں  $|1\rangle$  الیکٹران نیوٹرینو<sup>۴۰</sup> اور  $|2\rangle$  میوون نیوٹرینو<sup>۴۱</sup> کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں حلافت وتر جزو ( $g$ ) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میوون نیوٹرینو<sup>۴۲</sup> میں اور میوون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

ڈیراک نے اندرونی ضرب  $\langle \alpha | \beta \rangle$  میں براکٹ<sup>۳۲</sup> کی علامت کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کر کے پہلے حصہ کو برا<sup>۳۳</sup>،  $\langle \alpha |$ ، اور دوسرے حصے کو کٹے<sup>۳۴</sup>،  $|\beta\rangle$  کا نام دیا۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ جوڑنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہو گا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک برا کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) ایک تفاعلی فنکشن میں برا کو مکمل

<sup>۳۹</sup>neutrino oscillations

<sup>۴۰</sup>electron neutrino

<sup>۴۱</sup>muon neutrino

<sup>۴۲</sup>انگریزی میں تو سین کو براکٹ کہتے ہیں۔

<sup>۳۳</sup>bra

<sup>۳۴</sup>ket



لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f| = \int f^*[\dots] dx$$

جہاں چکور قوسین  $[\dots]$  میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو برا کے دائیں ہاتھ کٹ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنیٰ بعدی سمتی فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی برا ایک سمتیہ صنف

$$\langle\alpha| = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (3.83)$$

ہوگا۔ تمام برا کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتی فضا حاصل ہوگا جس کو دوبارہ فضا<sup>۳۵</sup> کہتے ہیں۔

برا کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر  $|\alpha\rangle$  ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (3.84)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا وہ حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو  $|\alpha\rangle$  کے ساتھ ساتھ ”پایا جاتا ہو“:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle;$$

ہم اس کو  $|\alpha\rangle$  کے احاطہ کیے گئے ایک بعدی ذیلی فضا پر عامل<sup>۳۶</sup> تفصیل<sup>۳۶</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $\{|e_n\rangle\}$  غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \quad (3.85)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \quad (3.86)$$

(جو عامل مماثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس  $\{|e_n\rangle\}$  میں سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے پھیلاؤ کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (3.87)$$

اسی طرح اگر  $\{|e_z\rangle\}$  ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z') \quad (3.88)$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1 \quad (3.89)$$

مسائل ۸۶ اور مسائل ۸۹، مکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۱۸: دکھائیں کہ عاملین تظلیل کے طاقے ۳ ہیں، یعنی ان کے لئے  $\hat{P}^2 = \hat{P}$  ہوگا۔  $\hat{P}$  کے امتیازی امتداد تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری عمودی اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ کٹ  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا.  $\langle \alpha |$  اور  $\langle \beta |$  کو (دوہری اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کی صورت میں) تیار کریں۔

ب.  $\langle \alpha | \beta \rangle$  اور  $\langle \beta | \alpha \rangle$  تلاش کریں اور  $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*$  کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل  $\hat{A} \equiv |\alpha\rangle \langle \beta|$  کے نوار کان متالب تلاش کر کے متالب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مٹی ہے؟

سوال ۳.۲۰: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|)$$

جہاں  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$  معیاری عمودی اساس اور  $E$  ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی امتداد اور  $|1\rangle$  اور  $|2\rangle$  کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ (امتیازی تقاضا عمل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے  $\hat{H}$  کا متالب **H** کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۱: فرض کریں عامل  $\hat{Q}$  کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ  $\hat{Q}$  کو اس کے طیفی تحلیل<sup>۳۸</sup>

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکن سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

### مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۲: لیہ انڈر کثیر رکناں۔ وقفہ  $-1 \leq x \leq 1$  پر تصاعلات  $1$ ،  $x$ ،  $x^2$  اور  $x^3$  کو گرام وشمہ طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال 4.A دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پچان پائیں: (معیاری عمود زنی کے علاوہ) <sup>۳۹</sup> یہ لیہ انڈر کثیر رکناں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۳: ایک خلاف ہر مشہ <sup>۴۰</sup> (یا مخرف ہر مشہ <sup>۴۱</sup>) عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q} \quad (۳.۹۰)$$

ا. دکھائیں کہ خلاف ہر مشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشی عاملین کا مقابل خلاف ہر مشی ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشی عاملین کے مقابل کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳.۲۴: ترتیب پیمائش <sup>۴۲</sup>: قابل مشاہدہ  $A$  کو ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{A}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\psi_1$  اور  $\psi_2$ ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب  $a_1$  اور  $a_2$  ہیں، پائے جاتے ہیں۔ قابل مشاہدہ  $B$  کو ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{B}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\phi_1$  اور  $\phi_2$  بالترتیب امتیازی اقدار  $b_1$  اور  $b_2$  ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. قابل مشاہدہ  $A$  کی پیمائش  $a_1$  قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فورا) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب. اب اگر  $B$  کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

<sup>۳۹</sup> لیہ انڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کوئی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی جبڑو ضرئی یوں منتخب کیا کہ  $x = 1$  پر تمام تصاعلات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بدقسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

<sup>۴۰</sup> anti-hermitian

<sup>۴۱</sup> skew-hermitian

<sup>۴۲</sup> sequential measurements

ج. متابل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ  $a_1$  حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر مسین آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا ہے۔)

سوال ۳.۲۵: لامستثنائی چیکور کنواں کے  $n$  ویں ساکن حال کی معیار حرکت و فنکشن عمل موج  $\Phi_n(p, t)$  تلاش کریں۔  $|\Phi_1(p, t)|^2$  اور  $|\Phi_2(p, t)|^2$  کو  $p$  کے فنکشن کے طور پر ترسیم کریں (نقطہ  $p = \pm n\pi\hbar/a$  پر خصوصی توجہ دیں)۔  $\Phi_n(p, t)$  کو استعمال کرتے ہوئے  $p^2$  کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۳.۲۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۲۶: درج ذیل فنکشن عمل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں  $n$  کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ  $-n\lambda < x < n\lambda$  پر یہ فنکشن حائل صاف ہے (جس کا طول موج  $\lambda$  ہے) تاہم چونکہ یہ فنکشن لامستثنائی ہے، ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سمت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فنکشن عمل موج  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں۔  $|\Psi(x, 0)|^2$  اور  $|\Phi(p, 0)|^2$  ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفر کے پچھڑائیاں  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  تعین کریں۔ دیکھیں کہ  $n \rightarrow \infty$  کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  کو  $\Delta x$  اور  $\Delta p$  کی اندازہ قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ  $\sigma_p$  کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامن ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۲۷: درج ذیل مندرجہ کریں

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مستقل ہیں۔

ا.  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لاتے ہوئے  $A$  تعین کریں۔

ب. (لحہ  $t = 0$  پر)  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma_x$  تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت و فنکشن عمل موج  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د.  $\Phi(p, 0)$  استعمال کرتے ہوئے (لحہ  $t = 0$  پر)  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$  اور  $\sigma_p$  کا حساب کریں۔

ه. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۲۸: مسئلہ ورلڈ۔ درج ذیل مساوات ۳.۶۷ کی مدد سے دکھائیں

$$\left( \frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle - \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \right) \quad (۳.۹۱)$$

جہاں  $T$  حرکی توانائی ( $H = T + V$ ) ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$2\langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \quad (۳.۹۲)$$

اس کو مسئلہ وربل<sup>۳۳</sup> کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $\langle T \rangle = \langle V \rangle$  ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۲۹: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ  $\Delta t = \tau / \pi$  ہے جہاں ابتدائی حال  $\Psi(x, 0)$  کے عمودی حال تک  $\Psi(x, t)$  کی ارتقا کے لیے درکار وقت  $\tau$  ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفی کانتفاعل موج  $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$  استعمال کرتے ہوئے اس کی چانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۰: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالابی ارکان  $\langle n|x|n' \rangle$  اور  $\langle n|p|n' \rangle$  تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالابی وتری رکن  $n = n'$  دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستثنائی) متالب  $X$  اور  $P$  تشکیل دیں۔ دکھائیں کہ اساس میں  $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2$  وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جزوی جواب:

$$\langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) \quad (۳.۹۳)$$

سوال ۳.۳۱: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک دوسرے جتنے احتمال کے ساتھ،  $\hbar\omega/2$  یا  $3\hbar\omega/2$  دے گی۔ اس حال میں  $\langle p \rangle$  کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لہ  $t = 0$  پر اس کی قیمت (نہی زیادہ قیمت) ہو تب  $\Psi(x, t)$  کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۲: 35-3 ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات<sup>۳۴</sup> ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ( $\psi_n(x) = |n\rangle$ )، (مساوات ۲.۶۷) میں صرف  $n = 0$  عین عدم یقینیت کی حد ( $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ ) پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر  $\sigma_x \sigma_p = (2n+1)\hbar/2$  ہوگا۔ تاہم چند خطی جوز (جنہیں اتساقی حالات<sup>۳۳</sup> کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل<sup>۳۵</sup> کے امتیازی تفاعیل

<sup>۳۳</sup> virial theorem

<sup>۳۴</sup> coherent states

<sup>۳۵</sup> عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

ہوں گے

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی و تدر  $\alpha$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔)

۱. حال  $|\alpha\rangle$  میں  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$  دریافت کریں۔ اشارہ: مشال ۳.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ  $a_-$  کا ہر مشی جوڑی دار  $a_+$  ہے۔ فرض نہ کریں کہ  $\alpha$  حقیقی ہوگا۔

ب.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ دکھائیں کہ  $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$  ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتفاقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاؤ

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سر درج ذیل ہونگے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د.  $|\alpha\rangle$  کو معمول پر لاتے ہوئے  $c_0$  تعین کریں۔ جواب:  $e^{-|\alpha|^2/2}$

ه. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

شامل کر کے دکھائیں کہ  $|\alpha(t)\rangle$  اب بھی  $a_-$  کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی و تدر ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتفاقی حال ہمیشہ اتفاقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال ( $n = 0$ ) از خود اتفاقی حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی و تدر کیا ہوگا۔

سوال ۳.۳۳: مبوط اصول عدم یقینیت سے متعمم اصول عدم یقینیت (مسوات ۳.۵۸) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں  $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$  ہے۔

۱. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بن کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (۳.۹۴)$$

جہاں  $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$  ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۳.۵۶ میں  $z$  کا حقیقی جزو  $\text{Re}(z)$  جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۴ کو  $A = B$  صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں  $C = 0$  ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول غیر اہم ہوگا؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۴: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل متابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں  $a, b$  اور  $c$  حقیقی اعداد ہیں۔

۱. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  کیا ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  کیا ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۵: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل متالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متابل مشاہدہ  $A$  اور  $B$  کو درج ذیل متاسب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $\omega$ ،  $\lambda$  اور  $\mu$  حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

۱.  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{H}$  اور  $\mathbf{B}$  کے امتیازی افتدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{B}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں  $1 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2$  ہے۔ لمحہ  $t=0$  پر  $H$ ،  $A$  اور  $B$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ  $t$  پر  $|\mathcal{B}(t)\rangle$  کیا ہوگا؟ لمحہ  $t$  پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کی قیمتیں دے سکتے ہیں، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات  $B$  اور  $A$  کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳۶: ۳:

۱. ایک تفاعل  $f(x)$  جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں  $x_0$  کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بن  $\hat{p}/\hbar$  کو فضا میں انتقال کا پیدا کار<sup>۴۶</sup> کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نم کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شرودنجر مساوات کو  $\Psi(x, t)$  مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} \Psi(x, t) \quad (۳.۹۵)$$

(جہاں  $t_0$  کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بن  $\hat{H}/\hbar$  کو وقت میں انتقال کا پیدا کار<sup>۴۷</sup> کہتے ہیں۔

<sup>۴۶</sup> generator of translation in space  
<sup>۴۷</sup> generator of translation in time



ج. دکھائیں لمحہ  $t + t_0$  پر حرکی متغیر  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔<sup>۲۸</sup>

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۶۷ حاصل کریں۔ اشارہ:  $dt = dt_0$  لے کر  $dt$  میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۳:

ا. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شرودنگر مساوات کو معیار حرکت فنکشن میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:  
 $(e^{-ip^2t/2m\hbar} \Phi(p, 0))$

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹہ (سوال ۲.۴۳) کے لئے  $\Phi(p, 0)$  تلاش کر کے اس صورت کے لئے  $\Phi(p, t)$  تشکیل دیں۔ ساتھ ہی  $|\Phi(p, t)|^2$  تشکیل دیں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج.  $\Phi$  پر مبنی موزوں عملیات حل کرتے ہوئے  $\langle p \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$  کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں  $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2 / 2m + \langle H \rangle_0$  ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

<sup>۲۸</sup> بالخصوص  $t = 0$  لے کر،  $t_0$  کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر  
 $\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$   
 ہوگا جہاں  $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  ہے۔ یوں  $Q$  کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ  $\hat{Q}$  کو  $\Psi(x, t)^*$  اور  $\Psi(x, t)$  میں پھیلتے کر (تالیبت وقت کو تناسل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا  $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$  کو  $\Psi(x, 0)^*$  اور  $\Psi(x, 0)$  میں پھیلتے کر (تالیبت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موخر الذکر کو ہیبرنبرگ نقطہ نظر کہتے ہیں۔



## باب ۴

# تین ابعادی کوانٹم میکانیات

### ۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعاد تک توسیع باآسانی کی جاسکتی ہے۔ مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi;$$

معیاری طریقہ کار کے مطابق  $x$  کے ساتھ ساتھ  $y$  اور  $z$  پر کر کے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی عمل  $H$  کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھاں کلاسیکی مشہور اور عمل میں مشرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عمل پر ”ٹوٹی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عملیں پر ”ٹوٹی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

خفی تو انائی  $V$  اور تفاعل موج  $\Psi$  اب  $(x, y, z) = \mathbf{r}$  اور  $t$  کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم  $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$  میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}$  ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 \mathbf{r} = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کو پوری فصا پر لینا ہوگا۔ اگر خفی تو انائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فصائی تفاعل موج  $\psi_n$  غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقامت  $c_n$  ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(\mathbf{r}, 0)$  سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{p}$  کے تمام باضابطہ مقلبتیہ رشتے:  $[x, y]$ ،  $[x, p_y]$ ،  $[x, p_x]$ ،  $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ  $x, y$  اور  $z$  کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ  $r_x = x$ ،  $r_y = y$  اور  $r_z = z$  ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگا۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً)  $\sigma_x \sigma_{p_y}$  پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

#### ۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبداء سے فاصلہ کا تعلق ہوگا۔ ایسی صورت میں **کروئی محمد**  $(r, \theta, \phi)$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل 4-1)۔ کروئی محمد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کروئی محمد میں تابع وقت شرودنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو  $RY$  سے تقسیم کر کہ  $-2mr^2/\hbar^2$  سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین میں جبکہ صرف  $r$  کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف  $\theta$  اور  $\phi$  کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم  $l(l+1)$  روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔<sup>۶</sup>

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارٹیزی محدد میں علیحدگی مستغیرات استعمال کرتے ہوئے لامستغیری سرجمی کنواں (یا ڈب میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ اور } 0 \text{ تینوں کے پچپائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

۱. ممکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $E_3$ ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے  $E_1$  تا  $E_6$  تلاش کریں۔ ان کی انخطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حصوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: ایک بعدی صورت میں انخطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی  $E_{14}$  کی انخطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

## ۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات  $\theta$  اور  $\phi$  پر  $\psi$  کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو  $Y \sin^2 \theta$  سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

<sup>۶</sup> ایسا کرنے سے ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں  $l$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ  $l$  کو لازمًا عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچاننے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (۴.۱۹)$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے  $\Theta\Phi$  سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف  $\theta$  کا متغیر ہے، جبکہ دوسرا صرف  $\phi$  کا متغیر ہے، لہذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو  $m^2$  لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (۴.۲۰)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (۴.۲۱)$$

متغیر  $\phi$  کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (۴.۲۲)$$

[در حقیقت دو حل پائے جاتے ہیں:  $e^{im\phi}$  اور  $e^{-im\phi}$ ، تاہم  $m$  کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم  $\Theta$  میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مقنی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہذا برقی حرکیات میں اتنی تقارن عمل ( $\Phi$ ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی  $\phi$  کی قیمت میں  $2\pi$  کا اضافہ آئے، ہے، ہم فنکشن میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط<sup>۸</sup> مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں  $e^{im(\phi+2\pi)} = 1$  یا  $e^{2\pi im} = 1$  ہوگا جس کے تحت  $m$  لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

یہاں بھی ہم عموماً یہ نہیں کھوتے ہیں، چونکہ  $m$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ  $m$  کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔  
انتباہ: اب حرف  $m$  دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

<sup>۸</sup> یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ  $m$  کی قیمت سے قطع نظر، احتمال  $(|\Phi|^2)$  یک قیمتیتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقے سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے  $m$  پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

جدول ۴.۱: ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں۔

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

مساوات  $\theta$

$$(۴.۲۵) \quad \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$(۴.۲۶) \quad \Theta(\theta) = A P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں  $P_l^m$  شریک لیژانڈر تفاعل<sup>۹</sup> ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$(۴.۲۷) \quad P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

اور  $l$  ویں لیژانڈر کشیر رکنی کو  $P_l(x)$  ظاہر کرتا ہے<sup>۱۰</sup> جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس<sup>۱۱</sup>

$$(۴.۲۸) \quad P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{4 \cdot 2} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سی ظاہر ہے،  $P_l(x)$  متغیر  $x$  کی

<sup>۹</sup> associated Legendre function  
<sup>۱۰</sup> دھیان رہے کہ  $P_l^{-m} = P_l^m$  ہو گا۔  
<sup>۱۱</sup> Rodrigues formula



جدول ۴.۲: چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات  $P_l^m(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} P_2^0 &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) & P_0^0 &= 1 \\ P_3^3 &= 15\sin\theta(1 - \cos^2\theta) & P_1^1 &= \sin\theta \\ P_3^2 &= 15\sin^2\theta\cos\theta & P_1^0 &= \cos\theta \\ P_3^1 &= \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1) & P_2^2 &= 3\sin^2\theta \\ P_3^0 &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) & P_2^1 &= 3\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

درجہ  $l$  کثیررکنی ہے، اور  $l$  کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہوگی۔ تاہم  $P_l^m(x)$  عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق  $m$  کی صورت میں اس میں  $\sqrt{1-x^2}$  کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$\begin{aligned} P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2}, \\ P_2^2(x) &= (1-x^2) \left( \frac{d}{dx} \right)^2 \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2), \end{aligned}$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں  $P_l^m(\cos \theta)$  چاہیے اور چونکہ  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$  ہوتا ہے لہذا  $P_l^m(\cos \theta)$  ہر صورت  $\cos \theta$  کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق  $m$  کی صورت میں  $\sin \theta$  ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں  $\cos \theta$  کے چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح  $l$  کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید  $|m| > l$  کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت  $P_l^m = 0$  ہوگا۔ یوں  $l$  کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2l+1)$  ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکھیے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفرقی مساوات ہے:  $l$  اور  $m$  کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہوں گے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم  $\theta = 0$  اور  $\theta = \pi$  پر ایسے حل بے فتابوڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنیاد طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدود میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

لہذا معمولی ذنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$



مساوات  $\theta$  (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) نامتناہل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حیرانی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے  $Y_l^l(\theta, \phi)$  اور  $Y_3^2(\theta, \phi)$  تفصیل دیں۔ (آپ  $P_3^2$  کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ  $P_l^l$  آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تفصیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ  $l$  اور  $m$  کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹمانڈر کنشیرر کنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left( \frac{2}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: کھل بالخص استعمال کریں۔)

### ۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشاکلی مخفیہ کے لئے تف عمل موج کا زاویائی حصہ،  $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ  $V(r)$  کی شکل و صورت تف عمل موج کے صرف رداسی حصہ،  $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1) R \quad (۴.۳۵)$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r) \equiv rR(r) \quad (۴.۳۶)$$

لہذا  $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ،  $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ،  $R = u/r$  درج ذیل ہوگا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (۴.۳۷)$$

اس کو رداسی مساوات<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں<sup>۱۷</sup> جو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بعدی شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ<sup>۱۸</sup> درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (۴.۳۸)$$

<sup>۱۶</sup> radial equation

<sup>۱۷</sup> یہاں  $m$  کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل  $m$  نہیں پایا جاتا ہے۔

<sup>۱۸</sup> effective potential

جس میں  $[\hbar^2/2m][l(l+1)/r^2]$  اضافی حبزوپایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو اکہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدأ سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2 dr = 1 \quad (۴.۳۹)$$

کسی مخصوص مخفیہ  $V(r)$  کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروئی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \quad (۴.۴۰)$$

اس کے تفاعلات موج اور احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u \quad (۴.۴۱)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۴.۴۲)$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط  $u(a) = 0$  ملا کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت  $l = 0$  کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج  $R(r) = u(r)/r$  ہے اور  $0 \rightarrow r$  کی صورت میں  $[\cos(kr)]/r$  بے متابہ بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں  $B = 0$  منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ  $\sin(ka) = 0$  ہو لہذا  $ka = n\pi$  ہوگا جہاں  $n$  عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (۴.۴۳)$$

centrifugal term<sup>۱۹</sup>

<sup>۱۹</sup> دور حقیقت۔ ہم صرف انہی چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستحالی ہو؛ مساوات ۴.۳۱ میں  $R(r) \sim 1/r$  معمول پر لانے کے قابل ہے۔

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔  $u(r)$  کو معمول پر لانے سے حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو  $1/\sqrt{4\pi}$ )  $Y_0^0(\theta, \phi)$  کی بنا غیر اہم ہے (کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \quad (۴.۴۴)$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو اٹائی اعداد  $n$ ،  $l$  اور  $m$  استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:  $\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی،  $E_{nl}$ ، صرف  $n$  اور  $l$  پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح  $l$  کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \quad (۴.۴۵)$$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں  $j_l(x)$  رتبہ  $l$  کا کروئی بیل ٹافل  $^{22}$  ہے اور  $n_l(x)$  رتبہ  $l$  کا کروئی نیومن ٹافل  $^{23}$  ہے جن کی تعریضات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \quad (۴.۴۶)$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروئی بیل اور نیومن ٹافل تعریضات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر  $x$  کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

quantum numbers<sup>۲۱</sup>  
spherical Bessel function<sup>۲۲</sup>  
spherical Neumann function<sup>۲۳</sup>

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات،  $j_n(x)$  اور  $n_l(x)$ ؛ چھوٹی  $x$  کے لئے مقترانی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے فتا بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً  $B_l = 0$  منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۷) \quad R(r) = A j_l(kr)$$

اب سرحدی شرط  $R(a) = 0$  کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ  $k$  کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۴.۴۸) \quad j_l(ka) = 0$$

یعنی  $l$  رتبی کروی بیسل تفاعل کا  $(ka)$  ایک صفر ہوگا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل 2.4 دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامستثنیٰ تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔ تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے فنکشنوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط  $n\pi$  یا انفاط  $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{nl}$$

جہاں  $\beta_{nl}$  رتبہ  $l$  کروی بیسل تفاعل کا  $n$  واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$(۴.۵۰) \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$(۴.۵۱) \quad \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل  $A_{nl}$  کا تعین معمولی ذنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ  $l$  کی ہر ایک قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2l+1)$  مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح  $(2l+1)$  گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

ا. کروئی نیومن تفاعلات  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفیات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر  $1 \ll x$  کے لئے کارآمد  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کے تخمینہ کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ  $V(r) = 0$  اور  $l = 1$  کے لئے  $Arj_l(kr)$  رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کٹواں کیلئے  $l = 1$  کی صورت میں احبازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعیین کریں۔ دکھائیں کہ  $n$  کی بڑی قیمت کے لئے  $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$  ہوگا۔ (اشارہ: پہلے  $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$  دکھائیں۔ اس کے بعد  $x$  اور  $\tan x$  کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کیت  $m$  ہے کو مستناہی کروئی کٹواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال،  $l = 0$  کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ  $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$  کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

## ۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار  $e$  کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار  $-e$  کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل 3.4 دیکھیں)۔ فٹنوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۴.۵۲) \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

ہم نے اس مساوات کو  $u(r)$  کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں  $E$  تعیین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرکش کے تحلیل حل کی ترکیب سے، قدم بامقدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے)۔

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ( $E > 0$  کے لئے) استراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی مومنٹال ذکر میں ہے۔

#### ۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے  $e$  منفی ہونے کی وجہ سے  $\kappa$  حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو  $E$  سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ 1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[ 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

اس کے بعد ہم حالات کی مفت تاربی رویہ پر غور کرتے ہیں۔ اب  $\rho \rightarrow \infty$  کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ( $\rho \rightarrow \infty$  کی صورت میں)  $e^{\rho}$  بے وقتا بڑھتا ہے لہذا ہمیں  $B = 0$  لینا ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$



اس کے برعکس  $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛<sup>۲۴</sup> لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ( $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں)  $\rho^{-l}$  بے متابوڑ ہوتا ہے لہذا  $D = 0$  ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی رویہ کو چھیلنے کی خاطر یہ افت عمل  $v(\rho)$ :

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ  $u(\rho)$  سے  $v(\rho)$  زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[ (l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[ -2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح  $v(\rho)$  کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \quad (۴.۶۱)$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل،  $v(\rho)$ ، کو  $\rho$  کا طرقتی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad (۴.۶۲)$$

<sup>۲۴</sup> یہ دلیل  $l = 0$  کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

ہمیں عددی سر (  $c_0$  ،  $c_1$  ،  $c_2$  ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزوتفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”ضرعی اشاریہ“  $j$  کو  $j+1$  کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ  $j = -1$  سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزوضربی (  $j+1$  ) اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم ضرعے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل  $v(\rho)$  تعین کرتا ہے۔ ہم  $c_0$  سے شروع کر کے (جو مجموعی منتقل کاروب اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے  $c_1$  تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے  $c_2$  تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔<sup>۲۵</sup>

<sup>۲۵</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب  $u(\rho)$  پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متنازعاتی رویہ کو کیوں (جبزوضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جبزوضربی  $\rho^{l+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر  $c_{l+1}$  ہوگا)؛  $\rho^{l+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا جبزو  $\rho^0$  حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس جبزوضربی  $e^{-\rho}$  باہر نہ نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے  $c_{j+2}$  ،  $c_{j+1}$  اور  $c_j$  پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

آئے  $j$  کی بڑی قیمت (جو  $\rho$  کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔<sup>۲۶</sup>

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے مضر کرے کہ یہ بالکل ٹھیک ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \quad (۴.۶۴)$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \quad (۴.۶۵)$$

جو  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے بے متابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نہا وہی غنیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے حبانز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، بلند  $j$ ، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلند}}+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j_{\text{بلند}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد<sup>۲۷</sup>

$$n \equiv j_{\text{بلند}} + l + 1 \quad (۴.۶۷)$$

<sup>۲۶</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں  $\rho_0 - 2(l+1)$  اور نسب نماس میں  $2l+2$  رد کرنے کی طرح  $j+1$  میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تین میں ایک جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا چاہتا ہوں۔

<sup>۲۷</sup> principal quantum number

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب  $E$  کو  $\rho_0$  تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر<sup>۲۸</sup> ہے جو غالباً پورے کو انٹیم میکانیٹ میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور انٹیم کو انٹیم میکانیٹ کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

رداء بوہر<sup>۲۹</sup> کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کو انٹائی اعداد ( $n$ ،  $l$  اور  $m$ ) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

<sup>۲۸</sup> Bohr formula

<sup>۲۹</sup> Bohr radius

<sup>۳۰</sup> رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے:  $a_0$ ، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا میں اس کو صرف  $a$  لکھوں گا۔

ہوگا جبکہ  $v(\rho)$  متغیر  $\rho$  میں درجہ  $n - l - 1$  = بندہ  $z$  کا کشیدہ رکھی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تق عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حالت<sup>۳۱</sup> (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے  $n = 1$  ہوگا؛ طبعی مستقامت کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[ \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ  $z$  توانائی<sup>۳۲</sup> (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو بار بار دہرنا ہے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۷۷ کے تحت  $l = 0$  لہذا  $m = 0$  ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے  $j = 0$  کے لئے  $c_1 = 0$  حاصل ہوتا ہے)، لہذا  $v(\rho)$  ایک مستقل ( $c_0$ ) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی  $c_0 = 2/\sqrt{a}$  حاصل ہوگا۔ مزید  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح  $n = 2$  کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندہ  $z$  توانائی ہے کیونکہ  $l = 0$  ہو سکتا ہے (جس میں  $m = 0$  ہوگا) یا  $l = 1$  ہو سکتا ہے (جس کے لئے  $m$  کی قیمت  $-1$ ،  $0$  یا  $+1$  ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہوگی۔ کلیہ توالی

ground state<sup>۳۱</sup>  
binding energy<sup>۳۲</sup>

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

(ساوات ۴.۷۶)  $l = 0$  کے لئے  $j$  استعمال کرتے ہوئے  $c_1 = -c_0$  اور  $j = 1$  استعمال کرتے ہوئے  $c_2 = 0$  دے گا لہذا  $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۸۲) \quad R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد  $l$  اور  $n$  کے لئے پھیلاؤ عددی سر  $\{c_j\}$  مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہ  
تو  $l = 1$  کی صورت میں پہلے جب زو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛  $v(\rho)$  ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل  
حاصل ہوگا۔

$$(۴.۸۳) \quad R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a}$$

(ہر منفرد صورت میں  $c_0$  معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری  $n$  کے لئے (ساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ)  $l$  کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$(۴.۸۴) \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

جبکہ ہر  $l$  کے لئے  $m$  کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد  $(2l + 1)$  ہوگی (ساوات ۴.۲۹)، لہذا  $E_n$  سطح توانائی کی کل  
انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۸۵) \quad d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

کثیر رکنی  $v(\rho)$  (جو ساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی  
ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۸۶) \quad v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho)$$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

ایک شریکے لاگنچ کثیر رکنی<sup>۳۳</sup> ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$q$  ویں لاگنچ کثیر رکنی<sup>۳۴</sup> ہے۔<sup>۳۵</sup> (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگنچ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

<sup>۳۳</sup> associated Laguerre polynomial

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنج کشیر رکنیاں،  $L_q(x)$

---

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

---

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنج کشیر رکنیاں،  $L_{q-p}^p(x)$

---

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

---

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات،  $R_{nl}(r)$

$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$
$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$
$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$
$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$
$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$
$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$
$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$
$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$



چند ابتدائی شریک لائیج کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل 4.4 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ ان چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کو انسانی اعداد کے نتائج ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف  $n$  تعین کرتا ہے۔ یہ کولب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں  $l$  پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیاں کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ( $n \neq n'$ ) کی صورت میں  $H$  کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیما ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک  $|\psi|^2$  کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات متقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج  $R_{30}$ ،  $R_{31}$  اور  $R_{32}$  حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے  $R_{20}$  کو معمول پر لا کر  $\psi_{200}$  تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے  $R_{21}$  کو معمول پر لا کر  $\psi_{211}$ ،  $\psi_{210}$  اور  $\psi_{21-1}$  تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لائیج کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $l = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $l = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

<sup>۳۴</sup> Laguerre polynomial  
<sup>۳۵</sup> دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle r \rangle$  اور  $\langle r^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس جوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle x \rangle$  اور  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا مکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  ہوگا، اور از مینی حال میں تشکیلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال  $m = 1, l = 1, n = 2$  کے لیے  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال  $x, y$  اور  $z$  کے لحاظ سے تشکیلی نہیں ہے۔ یہاں  $x = r \sin \theta \cos \phi$  استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں  $r$  کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ  $r$  اور  $r + dr$  کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال  $m = 1, l = 1, n = 2$  اور  $m = -1, l = 1, n = 2$  کے درج ذیل خطی جوڑے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال  $\Psi(r, t)$  تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت  $\langle V \rangle$  تلاش کریں۔ (کیا یہ  $t$  کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

### ۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال  $\psi_{nlm}$  میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی فوٹان کے احراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔<sup>۳۷</sup> عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جاتیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کوانٹم چھلانگ“ کہتے ہیں) منتقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

<sup>۳۷</sup> فطرۃً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل حبان ضروری نہیں ہے۔

اب کلیہ پلانک<sup>۳۸</sup> کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

جبکہ طول موج  $\lambda = c/\nu$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left( \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ<sup>۳۹</sup> کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ<sup>۴۱</sup> ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو فطرت کے بنیادی مستقالات کی صورت میں  $R$  کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ( $n_f = 1$ ) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمانی کارلیماخ<sup>۴۲</sup> تسلسل<sup>۴۳</sup> کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ( $n_f = 2$ ) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر<sup>۴۴</sup> تسلسل<sup>۴۵</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح  $n_f = 3$  میں عبور، پاشن<sup>۴۶</sup> تسلسل<sup>۴۷</sup> دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل 7.4 دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے)۔ سوال ۳.۱۶: ہائیڈروجن جوہر  $Z$  پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں  $Z = 1$  جبکہ باردارہ ہیلیم<sup>۴۵</sup> میں  $Z = 2$  اور دہری باردارہ لیتیم<sup>۴۶</sup> میں  $Z = 3$  ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں  $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی  $E_1(Z)$ ، رداس بوہر  $a(Z)$ ، اور رڈبرگ<sup>۴۱</sup> مستقل  $R(Z)$  تعیین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقت طیفی طیف کے کس خطہ میں

Planck's formula<sup>۳۸</sup>

<sup>۳۹</sup> فوٹان در حقیقت برقت طیفی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات متاثر استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

Rydberg constant<sup>۴۰</sup>

Rydberg formula<sup>۴۱</sup>

Lyman series<sup>۴۲</sup>

Balmer series<sup>۴۳</sup>

Paschen series<sup>۴۴</sup>

Helium<sup>۴۵</sup>

Lithium<sup>۴۶</sup>

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

$Z = 2$  اور  $Z = 3$  کی صورت میں لیمن تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں  $e^2 \rightarrow Ze^2$  ہوگا لہذا اتمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تذبذبی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت  $m$  جبکہ سورج کی کمیت  $M$  لیں۔)

ب. اس نظام کا ”رد اس بوہر“  $a_g$  کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تذبذبی کلیہ بوہر لکھ کر رد اس  $r_0$  کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو  $E_n$  کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ  $n = \sqrt{r_0/a_g}$  ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد  $n$  کی اندازہ قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح  $(n-1)$  میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احسراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔  
- حسراج فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹاؤن) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

### ۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد  $n$ ،  $l$  اور  $m$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد  $(n)$  حال کی توانائی تعیین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ  $l$  اور  $m$  مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبادا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$L = r \times p \quad (۴.۹۵)$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \quad (۴.۹۶)$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ  $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ ،  $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$ ،  $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$  سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے احبازی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اعداد حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقابلیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

## ۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین  $L_x$  اور  $L_y$  آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ (۴.۹۷) \quad &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned}$$

باضابطہ مقلوبیت رشتوں مساوات 10.4 سے ہم جانتے ہیں کہ صرف  $x$  اور  $p_x$ ،  $y$  اور  $p_y$ ،  $z$  اور  $p_z$  عاملین غیر مقلوب ہیں یوں درمیانی دو اجزاء ہدف ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

ہم  $[L_y, L_z]$  یا  $[L_z, L_x]$  بھی تلاش کر سکتے تھے تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم اشاریہ کی چکری اول بدل ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ ) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلوبیت رشتے ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوگا

دھیان رہے کہ  $L_x$  اور  $L_y$  غیر ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں متعمم اصول عدم یقینیت مساوات 62.3 کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

یا

$$(۴.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا یوں ایسے حالات کی تلاش جو  $L_x$  اور  $L_y$  کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع

$$(۴.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$L_x$  کے ساتھ مقلوب ہے

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

معتاب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات 64.3 استعمال کیا یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $L_y$  اور  $L_z$  کے ساتھ بھی  $L^2$  مقلوب ہوگا

$$(۴.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اُدرج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۰۳) \quad [L^2, L] = 0$$

اس طرح  $L$  کے ہر جزو کے ساتھ  $L^2$  ہم آہنگ ہوگا اور ہم  $L^2$  کا مثلاً  $L_z$  کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں

$$(۴.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

ہم نے حصہ 1.3.2 میں ہارمونی مرتعش پریسیڈی عامل کی ترکیب استعمال کی یہی ترکیب یہاں پر بھی استعمال کرتے ہیں

یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$(۴.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

$L_z$  کا مقلوب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوں گے

$$(۴.۱۰۷) \quad [L^2, L_{\pm}] = 0$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر  $L^2$  اور  $L_z$  کا امتیازی تفاعل  $f$  ہو تب  $L_{\pm}(f)$  بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا مساوات 107.4 کہتی ہے کہ

$$(۴.۱۰۸) \quad L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f)$$

لہذا اسی امتیازی مقدار  $\lambda$  کے لیے  $L_{\pm}f$  بھی  $L^2$  کا امتیازی تفاعل ہوگا جبکہ مساوات 106.4 کہتی ہے کہ

$$(۴.۱۰۹)$$

$$L_z(L_{\pm}f) = (L_z L_{\pm})f + L_{\pm} L_z f = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) = (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f)$$

لہذا نئی امتیازی متدر  $\mu \pm \hbar$  کے لیے  $L_{\pm} f$  کا امتیازی تفسر عمل ہوگا ہم  $L_{+}$  کو عامل رفعت کہتے ہیں چونکہ  $L_z$  کے امتیازی متدر کو  $\hbar$  بڑھاتا ہے جبکہ  $L_{-}$  عامل تقلیل کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو کم کرتا ہے یوں ہمیں  $\lambda$  کی کسی ایک قیمت کے لیے حالات کی ایک سیزھی ملتی ہے جس کا ہر پایہ متربی پایہ سے  $L_z$  کی امتیازی متدر کے لحاظ سے  $\hbar$  کی ایک اکائی دور ہوگا شکل 8.4 سیزھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفعت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیزھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچیں گے جس کا  $z$  جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت ہے سیزھی کا بالائی پایہ  $f_t$  درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$(۳.۱۱۰) \quad L_{+} f_t = 0$$

فرض کریں اس بالائی پایہ پر  $L_z$  کی امتیازی قیمت  $\hbar l$  ہو صرف  $L$  کی مناسبت آپ پر حبلہ آیا ہوں گی

$$(۳.۱۱۱) \quad L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t$$

اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm} L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

یادو سرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_{-} L_{+} + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں  $L_z$  کی امتیازی متدر کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں  $L^2$  کی امتیازی متدر دیتی ہے ساتھ ہی اسی وجہ کی بنا سیزھی کا سب سے نچلے پایہ  $f_b$  پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$(۳.۱۱۴) \quad L_{-} f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے پایہ پر  $L_z$  کا امتیازی متدر  $\hbar \bar{l}$  ہو

$$(۳.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

مساوات 112.4 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$L^2 f_b = (L_{+} L_{-} + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مسوات 113.4 اور 116.4 کا موازنہ کرنے سے  $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$  ہوگا لہذا  $\bar{l} = l + 1$  ہوگا جو بے معنی ہے چونکہ خچلا پایہ سب سے اوپر (بالائی) پایہ سے بلند نہیں ہوگا یا درج ذیل ہوگا

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ  $L_z$  کے امتیازی امتداد  $m\hbar$  ہونگے جہاں  $m$  جس کی مناسبت آپ پر حبلد عیاں ہوگی کی قیمت  $N$  قدموں میں  $-l$  تا  $+l$  ہوگی بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $l = -l + N$  لہذا  $l = N/2$  ہوگا یوں  $l$  لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا امتیازی تفاعلات کو اعداد  $l$  اور  $m$  بیان کرتے ہیں

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

$l$  کی کسی ایک قیمت کے لیے  $m$  کی  $2l + 1$  مختلف قیمتیں ہوں گی یعنی سیرھی کے  $2l + 1$  پایہ ہونگے بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل 9.4 کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے جو  $l = 2$  کے لیے دکھایا گیا ہے یہاں تیسرا نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں ان تمام کی لمبائیاں  $\hbar$  کی اکائیوں میں  $\sqrt{l(l + 1)}$  ہوں گی جو یہاں  $\sqrt{6} = 2.45$  ہے جبکہ  $m$  کے  $z$  اجزاء  $m$  کی اجازتی قیمتیں  $2, 1, 0, -1, -2$  ہیں دھیان رہے کہ ان سمتیات کے متناظر یعنی کرہ کارڈ اس  $z$  محور کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑی ہے عموماً  $\sqrt{l(l + 1)} > l$  ہوگا ماسوائے  $l = 0$  کی غیر اہم صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا  $z$  رخ نہیں رکھ سکتے ہیں پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے کیا میں  $z$  محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت مسوات 100.4 کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہوگا چلو مان لیا لیکن کیا یہ ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی  $z$  محدود  $L$  کے رخ منتخب کر لوں بالکل نہیں آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے یہ ایسا نہیں ہے کہ آپ  $L$  کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کی سمتیہ کے تینوں اجزاء متبادل تعین نہیں ہو سکتے ہیں جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت متبادل تعین نہیں ہو سکتے اگر  $L_z$  کی قیمت متبادل تعین ہو تب  $L_x$  اور  $L_y$  کی قیمتیں متبادل تعین نہیں ہوگی شکل 9.4 میں سمتیات گمراہ کن ہے بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لمبائی کی حباتی جو یہ ظاہر کرتی کہ  $L_x$  اور  $L_y$  متبادل تعین ہیں

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں مسوات 99.4 سے ابتدا کرتے ہوئے ہم نے صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر  $L^2$  اور  $L_z$  کی امتیازی امتداد تعین کیے آئے اب امتیازی تفاعلات تیار کریں جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا ماسکین کا نئے کی بات سے شروع کرتا ہوں  $Y_l^m = L^2 f_l^m$  اور  $L_z$  کی امتیازی تفاعلات



وہی کردی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ 2.1.4 میں حاصل کیا یہی وجہ ہے کہ ہمیں نے حرف  $l$  اور  $m$  استعمال کیے اب میں آپ کو بتا دوں گا کہ کردی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں یہ الگ تھلگ امتیازی افتدار کے ہر مشی عاملین  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی تفاعلات ہیں

سوال ۴.۱۸: عمل رفت اور عمل تقلیل  $m$  کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$(۴.۱۲۰) \quad L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1}$$

جہاں  $A_l^m$  کوئی مستقل ہے امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر  $A_l^m$  کیا ہوگا اشارہ پہلے دکھائیں کہ  $L_{\pm}$  اور  $L_z$  ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہے چونکہ  $L_x$  اور  $L_y$  مشہود ہیں آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی تصدیق کر سکتے ہیں اس کے بعد مساوات 112.4 استعمال کریں جواب

$$(۴.۱۲۱) \quad A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}$$

دیکھیے گائے سیزھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہوگا جب آپ  $f_l^l$  پر  $L_+$  یا  $f_l^{-l}$  پر  $L_-$  لاگو کرتے ہیں

سوال ۴.۱۹:

۱. مقتمام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات 10.4 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل مقالب حاصل کریں

(۴.۱۲۲)

$$[[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \quad [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0]$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 96.4 سے  $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$  حاصل کریں

ج. مقالب  $[L_z, r^2]$  اور  $[L_z, p^2]$  کی قیمتیں تلاش کریں جہاں  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  اور  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  ہوگا

د. اگر  $V$  صرف  $r$  کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہیملٹنی  $H = (p^2/2m) + V$  کے تمام تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا یوں  $L^2$  اور  $L_z$  باہمی ہم آہنگ مشہود ہوں گے

سوال ۴.۲۰:

۱. دکھائیں ایک مخفی توانائی  $V(r)$  میں ایک ذرے کی مداری زاویائی معیار حرکت  $L$  کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسرود کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt} \langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

یہ مسئلہ اہر نفٹ کا مائل گھومت تعلق ہے

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ب. دکھائے کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی توانائی کے لیے  $d\langle L \rangle / dt = 0$  ہوگا یہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کوانٹم میکانی روپ ہے

### ۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے  $L_x$ ،  $L_y$  اور  $L_z$  کو کروی محدود میں لکھنا ہوگا اب  $L = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$  ہے جبکہ کروی محدود میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں  $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$  ہوگا یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[ r(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) \frac{\partial}{\partial r} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب  $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$ ،  $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_\theta$  اور  $(\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi) = \mathbf{a}_r$  (شکل 1.4 لہذا درج ذیل ہوگا)

$$L = \frac{\hbar}{i} \left( \mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات  $\mathbf{a}_\theta$  اور  $\mathbf{a}_\phi$  کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں

$$\mathbf{a}_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k} \quad (۴.۱۲۵)$$

$$\mathbf{a}_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j} \quad (۴.۱۲۶)$$

یوں

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۷)$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left( +\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۸)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۳.۱۲۹)$$

ہمیں آسٹل رشت اور اسٹل تقیل بقی درکار ہوں گے

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

چونکہ  $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$  ہوتا ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۳.۱۳۰)$$

بالخصوص سوال 21.4 (a) درج ذیل ہوگا

$$L_+ L_- = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۳.۱۳۱)$$

لہذا سوال 21.4 (b) درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (۳.۱۳۲)$$

ہم اب  $f_l^m(\theta, \phi)$  پائین کر سکتے ہیں یہ  $L^2$  کا امتیازی قفا عمل ہے جس کی امتیازی قدر  $\hbar^2 l(l+1)$  ہے

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

یہ ٹھیک زاویائی مساوات 18.4 ہے ساتھ ہی یہ  $L_z$  کا امتیازی قفا عمل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قدر  $m\hbar$  ہوگا

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جوان شملی مساوات مساوات 21.4 کا معادل ہے ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں ان کا معمول شدا نتیجہ کروئی ہارمونیات  $Y_l^m(\theta, \phi)$  ہے اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی قفا عملات کروئی ہارمونیات ہونگے جب 1.4 میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات مشروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انجبنے میں تین مقلوبی عملین  $H$  اور  $L^2$  کے بیک وقت امتیازی قفا عملات تیار کر رہے تھے

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۳.۱۳۳)$$

ہم مساوات 132.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات شرودنگر مساوات 14.4 کو مختصر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{2mr^2} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتی ہے علحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح  $l$  قیمتیں مساوات 29.4 حاصل ہوئی جبکہ زاویائی معیار حرکت کی الجبرائی نظریہ  $l$  اور لہذا  $m$  بھی کی نصف عدد صحیح قیمتیں مساوات 119.4 بھی دیتی ہے آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہے لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے کہ یہ انتہائی زیادہ اہمیت کے حامل ہے سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات 130.4 سے مساوات 131.4 اخذ کریں اشارہ تفاعل برقی استعمال کرنا نہ بھولیں

ب. مساوات 129.4 اور 131.4 سے مساوات 132.4 اخذ کریں اشارہ مساوات 112.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں  $L + Y_l^l$  کیا ہوگا

ب. مساوات 130.4 کے ساتھ حبز و (الف) کا نتیجہ اور یہ جاننے ہوئے کہ  $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$  ہوگا  $Y_l^l(\theta, \phi)$  کی ایک مستقل تک معمول شدہ قیمت تلاش کریں

ج. بلاواسطہ مکمل کے ذریعے مستقل معمول ذنی تعین کریں اپنی حتمی نتیجہ کا سوال 5.4 کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال 3.4 میں درج ذیل دکھایا

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عامل رفت کا  $Y_2^2(\theta, \phi)$  پر اطلاق کریں معمول ذنی کے لیے مساوات 121.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۴: پے کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی  $a$  ہے کے دونوں سروں پر کمیت  $m$  کے ذرات بندے ہوئے ہیں یہ نظام وسط کے گرد آزادی سے تین بودی حرکت کر سکتا ہے جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا

ا. دکھائیں کہ اس نظام کی اجبازتی توانائیاں درج ذیل ہوگی

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ کلاسیکی تمنائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے اس نظام کی  $n$  وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی

## ۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے پلک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں پہلی قسم مرکز کیت کے حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مداری ( $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ) کہتے ہیں جبکہ دوسری چکر ( $S = I\omega$ ) جو مرکز کیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنیاد پر  $S$  کا معیار زاویائی معیار حرکت ہوگا جبکہ روزانہ کی بنیاد پر شمال جنوبی محور کے گرد چکر کی بنیاد پر  $S$  کا معیار حرکت ہوگا کلاسیکی طور پر یہ فئزق ہماری آسانی کے لئے ہے چونکہ حقیقتاً ہر پختہ ہر پہاڑ وغیرہ جن پر زمین مشتمل ہے کا زمین کے محور کے گرد الفئزادی مداری زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ  $S$  کے برابر ہوگا کو انٹرمیکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے لیکن یہاں ایک بنیادی فئزق پایا جاتا ہے ہائیڈروجن کی صورت میں مرکزہ کے گرد الیکٹران کی طوائف کی بنیاد پر زاویائی معیار حرکت کے ساتھ ساتھ الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتے ہیں جس کا نصف میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے لہذا اس کو معتام کے متغیرات  $r$  اور  $\theta$  سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے چونکہ یہ کلاسیکی چکر کی طرح ہے لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں یہ مماثلت یہی پر حتم ہو جاتی ہے ایک الیکٹران جہاں تک ہم جانتے ہیں کوئی کوئی جاسمیت نہیں پائی جاتی ہے اور یہ فقط ذرا ہے لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو مداری زاویائی معیار حرکت پر مشتمل حصوں میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے سوال 25.4 یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات بیرونی زاویائی معیار حرکت  $L$  کے ساتھ ساتھ اندرونی زاویائی معیار حرکت  $S$  بھی رکھتے ہیں چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کی نظریہ کی طرح ہے ہم باضابطہ مقلبت رشتہ سے شروع کرتے ہیں

$$(۴.۱۳۴) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

یوں پہلے کی طرح  $S^2$  اور  $S_z$  کے امتیازی تفاعلات درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$(۴.۱۳۵) \quad S^2 |sm\rangle = \hbar^2 s(s+1) |sm\rangle; \quad S_z |sm\rangle = \hbar m |sm\rangle$$

جبکہ درج ذیل ہوگا جہاں  $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$

$$(۴.۱۳۶) \quad S_{\pm} |sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s(m \pm 1)\rangle$$

تاہم یہاں امتیازی تفاعلات  $\theta$  اور  $\phi$  کے تفاعل نہیں ہیں لہذا یہ کروئی ہارمونیات نہیں ہونگے اور کوئی وجہ نہیں پائی جاتی ہے کہ ہم  $s$  اور  $m$  کی نصف عدد صحیح قیمتیں مقبول نہ کریں

$$(۴.۱۳۷) \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے  $s$  کی ایک مخصوص نامتابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس مخصوص نسل کا چکر کہتے ہیں  $\pi$  میزون کا چکر 0 ہے الیکٹران کا چکر 1/2 پروٹان کا چکر 1 ڈیلٹا کا چکر 3/2 گریوٹون کا چکر 2 وغیرہ وغیرہ اس کے برعکس ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹرون کا مداری زاویائی معیار حرکت کو انٹم عدد 1 کوئی بھی عدد صحیح قیمت رکھ سکتا ہے جو نظام پھیڑنے سے تبدیل ہوگا تاہم کسی بھی ذرے کا  $s$  اٹل ہوگا جس کی بنیاد پر نظریہ چکر نسبتاً

سادہ ہے سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس درج ذیل ہو

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

ہم آئنسٹائن گلیے  $E = mc^2$  کے تحت یہ فرض کرتے ہوئے کہ الیکٹران کی کمیت اس کی برقی میدان کے توانائی کی بنا ہے الیکٹران کا کلاسیکی رداس حاصل کرتے ہیں الیکٹران کا زاویائی معیار حرکت  $(1/2)\hbar$  لیتے ہوئے خط استوا پر کسی نقطے کی رفتار  $ms^{-1}$  میں تلاش کریں کیا حاصل جواب معنی خیز ہے درحقیقت تجربہ بات سے ظاہر ہے کہ الیکٹران کا رداس  $r_c$  سے بہت کم ہے کیا یہ جانتے ہوئے نتیجہ مزید غلط محسوس ہوگا

### 1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک<sup>۴</sup> اور تمام لیپٹان<sup>۵</sup> کیلئے  $\frac{1}{2} = s$  ہوگا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف ”دو“ عدد امتیازی تفاسلات پائے جاتے ہیں: پہلا  $\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle$  ہے جسے ہم میدان<sup>۶</sup> چکر<sup>۹</sup> (یا غنیرر سسی طور پر  $\uparrow$ ) اور دوسرا  $\langle \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \rangle$  ہے جس کو مخالف میدان<sup>۷</sup> چکر<sup>۱۰</sup> ( $\downarrow$ ) کہتے ہیں۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو اجزائی متالب قطار (یا چکر کار<sup>۱۱</sup>) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

quarks<sup>۴</sup>  
leptons<sup>۵</sup>  
spin up<sup>۹</sup>  
spin down<sup>۱۰</sup>  
spinor<sup>۱۱</sup>

ساتھ ہی عاملین چکر  $2 \times 2$  متاب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم  $S^2$  کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متاب

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا  $c = \frac{3}{4} \hbar^2$  اور  $e = 0$  ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا  $d = 0$  اور  $f = \frac{3}{4} \hbar^2$  ہوگا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۴.۱۴۴) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اب چونکہ  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  ہے لہذا  $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$  اور  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۸) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ  $S_x, S_y, S_z$  تینوں میں  $\hbar/2$  کا حبز و ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ  $\frac{\hbar}{2}\sigma$  لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالب چکر<sup>۵۲</sup> ہیں۔ دھیان رکھیں کہ  $S_x, S_y, S_z$  اور  $S^2$  تمام ہر مٹی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کونفا ہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس  $S_+$  اور  $S_-$  غیر ہر مٹی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔  $S_z$  کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۰) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

عمومی حال  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی  $S_z$  کی پیمائش،  $|a|^2$  احتمال کے ساتھ  $+\hbar/2$  یا  $|b|^2$  احتمال کے ساتھ  $-\hbar/2$  دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۵۱) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہوگا)۔<sup>۵۳</sup>

تاہم اس کی بجائے آپ  $S_x$  کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں  $S_x$  کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ  $S_x$  کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو  $S_z$  کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

<sup>۵۲</sup>Pauli spin matrices

<sup>۵۳</sup>لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر  $S_z$  کی پیمائش کی جائے تب  $\frac{\hbar}{2}$  نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہوگا۔ (صفحہ ۱۰۵ پر حاشیہ ۱۲ دیکھیں۔)



لہذا  $\beta = \pm \alpha$  ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $S_x$  کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کاردرج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشنی متالب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۳) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ  $S_x$  کی پیمائش کریں تب  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $\frac{1}{2}|a+b|^2$  اور  $-\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $\frac{1}{2}|a-b|^2$  ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)  
مثال ۴.۲: فرض کریں  $\frac{1}{2}$  چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$(۴.۱۵۴) \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ  $S_z$  اور  $S_x$  کی پیمائش کرتے ہوئے  $+\hbar/2$  اور  $-\hbar/2$  حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔  
حل: یہاں  $a = (1+i)\sqrt{6}$  اور  $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$  ہے لہذا  $S_z$  کیلئے  $+\frac{\hbar}{2}$  کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ  $-\frac{\hbar}{2}$  حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح  $S_x$  کیلئے  $+\frac{\hbar}{2}$  کے حصول کا احتمال  $5/6 = \left| (1/2)(3+i)/\sqrt{6} \right|^2$  جبکہ  $-\frac{\hbar}{2}$  کے حصول کا احتمال  $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2$  ہوگا۔ اتفاقی طور پر  $S_x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left( +\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left( -\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو  $1/2$  چکر سے متعلق ایک فرضی پیمائشی تجربہ سے گزرتا ہوں۔ چونکہ یہ ان تصوراتی خیالات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ فرض کریں ایک ذرا حال  $\psi_+$  میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے کہ اس زرے کی زاویائی چکری میار حرکت کا  $z$  جز کیا ہے۔ تب ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب  $\hbar/2 +$  ہوگا۔ چونکہ  $z$  کی پیمائش لازمِ یہی قیمت دے گی۔ اس کے بجائے اگر پوچھنے والا سوال کرے کہ اس زرے کی چکری زاویائی میار حرکت کا  $x$  جز کیا ہوگا۔ تب ہم یہ کہنے پر مجبور ہو گئے کہ  $S_x$  کی پیمائش سے  $\hbar/2 +$  یا  $\hbar/2 -$  کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماحرِ تبات یا حصہ ۱-۲ کے نقطہ نظر سے حقیقت پسند ہو تو وہ اس جواب کو ناکافی سمجھے گا۔ کیا آپ یہ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس زرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے۔ نہیں میں نے یہ تو نہیں کہا!۔ مجھے زرے کا حال تھیک تھیک معلوم ہے اور یہ  $\psi_+$  ہے۔ یہ ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا  $x$  جز نہیں بتا سکتے اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص  $x$  جز نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً ایسا ہی ہوگا۔ اگر  $S_x$  اور  $S_z$  کی قیمتیں تائین ہوں تب اصولِ ادمِ یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔ یہ سنتے ہی سوال کرنے والا زرے کی چکر کا  $x$  جز از خود پیمائش کرتا ہے۔ اب فرض کریں کہ وہ  $\hbar/2 +$  قیمت حاصل کرتا ہے۔ وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے۔ اس زرے کی  $S_x$  قیمت  $\hbar/2 +$  ہے۔ جی آپ درست فرض مانتے ہیں اب اس کی یہی قیمت ہے۔ جس سے یہ بالکل سبب نہیں ہوتا کہ تجربہ سے پہلے بھی اس کی یہی قیمت تھی۔ اب ظاہر ہے آپ بال کی کھال اتار رہے ہو اور آپ کی ادمِ یقینیت اصول کا کیا بنتا۔ میں اب  $S_x$  اور  $S_z$  دونوں کو حبانہ ہوں۔ جی نہیں آپ نہیں جانتے ہیں۔ آپ نے پیمائش کے دوران زرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ  $\psi_+$  اور اگر چہ آپ اس کے  $S_x$  کی قیمت جانتے ہیں۔ آپ  $S_z$  کی قیمت اب نہیں جانتے ہیں۔ لیکن میں نے  $S_x$  کی پیمائش کے دوران ہم نے پوری کوس کی کہ میں زرے کا سکون برپا نہ کروں۔ اچھا اگر آپ میسرِ بات پر یقین نہیں کرتے تو خود تصدیق کریں۔ آپ  $S_z$  کی پیمائش کریں اور دیکھیں کہ کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ وہ  $\hbar/2$  حاصل کرے جو میرے لیے سرمنرگی کا عصر ہوگا۔ اگر ہم اس پورے عمل کو بار بار دورائیں تو یہ سب اوقات اسے  $\hbar/2 -$  حاصل ہوگا۔ یہ کام آدمی کے لیے

ایک عام آدمی، ایک فلسفی یا ایک کلاسیکی مایہ تبات کا یہ کینا کہ کس زرے کا ٹھیک ٹھیک مکان یا ميعار حرکت یا چکری زاویائی میار حرکت کا  $x$  جز یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نذر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھنا جس نے کوانٹم میکینکات کا گہرا مطالعہ کیا ہو تو قرین ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی عقل دنگ نہیں دہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو  $1/2$  چکر نظام پر دوبارہ غور کی جائے گا۔ یہ کوانٹم میکینکات کی پیچیدہ تفصیلات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کی جائے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی میار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مثال 148.4 درج ذیل زروی متاندہ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۵)$$

جہاں اشاریہ x, y, z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ  $\epsilon_{jkl}$  Levi-Civita علامت ہے۔ جو  $jkl = 1, 2, 3$  یا  $jkl = 3, 1, 2$  کی صورت میں +1 جبکہ  $jkl = 1, 3, 2$  یا  $jkl = 3, 2, 1$  کی صورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹرون درج ذیل چکری حال میں ہے۔  $\psi = A \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix}$  (الف) مامولزنی مستقل A تائین کریں۔

(ب)  $S_x, S_y, S_z$  کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت  $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$  اور  $\sigma_{S_z}$  تلاش کریں۔ دیحان رہے کہ یہاں  $\sigma$  سے مراد میار انہراف ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جائے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدنی کی نیت کے عین متاک ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ 1 کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول سدا spinor  $\chi$  مساوات 139.4 کے لیے  $S_x^2, S_y^2, S_z^2$  اور  $S_x, S_y, S_z$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ  $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$  ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor  $S_y$  کے امتیازی عدداد تلاش لیں۔ (ب) عمومی حال  $\chi$  مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک زرے کے  $S_y$  کی پیانس سے کیا قیمتیں متوقے ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جائے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیحان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکتے ہیں۔ (ج)  $S_y$  کی پیانس سے کیا قیمتیں متوقے ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ  $r$  کے ہم رہ چکری زاویائی میار حرکت کے اجزاء کا کالپ  $S_r$  تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (۴.۱۵۶)$$

$S_r$  کی امتیازی عدداد اور معمول سدا امتیازی spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad (۴.۱۵۷)$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری جز ضرب  $e^{i\phi}$  سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک زرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ  $S_x, S_y$  اور  $S_z$  تیار کریں۔ اشعارہ  $S_z$  کے کتے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر  $S_+, S_z, S_-$  کا عمل تائین کریں۔ نصاب میں 1/2 چکر کے لیے استعمال کی گئی ترتیب استعمال کریں

## ۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹتے ہوئے بار بار ذرا پر مقناطیسی جھک کتبہ مشتمل ہوگا۔ اس کا مقناطیسی جھک کتبہ معیار اثر  $\mu$ ، زرے کی چکری زاویائی معیار حرکت  $S$  کو راست متناسب ہوگا۔

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۸)$$

جہاں تناسبی مستقل  $\gamma$  مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان  $B$  میں رکھے گئے مقناطیسی جھک کتبہ پر قوت  $\mu \times B$  عمل کرتا ہے۔ جو کمپس کی سوئے کی طرح اس کو میدان کے متوازن لانے کی کوسس کرتا ہے۔ اس قوت  $\mu \times B$  کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۹)$$

لہذا مقناطیسی میدان  $B$  میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے زرے کا ہیملٹونین درج ذیل ہوگا۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۶۰)$$

مثال ۴.۳: تقسیم لار مسر فرض کریں  $z$  رخ نیکیاں مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \hat{k} \quad (۴.۱۶۱)$$

میں  $1/2$  چکر کا کن ذرہ پایا جاتا ہے متالابی روپ میں ہیملٹونی مساوات  $158.4$  درج ذیل ہوگا

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۲)$$

ہیملٹونی  $H$  کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو  $S_z$  کے تھے

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۳)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت کتبہ کا معیار اثر مقناطیسی میدان کا متوازی ہو چونکہ ہیملٹونی غیر متابع وقت ہے لہذا تابع وقت شرودنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial X}{\partial t} = H X \quad (۴.۱۶۴)$$

کے عمومی حل کو اس کن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ + e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات  $a$  اور  $b$  کو ابتدائی معلومات

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے یقیناً  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  ہوگا ہم ان مستقلات کو  $\cos(\alpha/2)$  اور  $a = \sin(\alpha/2)$  لکھ سکتے ہیں جہاں  $\alpha$  ایک مقررہ زاویہ ہوگا جس کی اہمیت جلد رونما ہوگی یوں درج ذیل ہوگا

$$\chi^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۵)$$

آئیں  $S$  کی توقعاتی قیمت بطور تفہیم وقت حاصل کریں

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۶)$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger S_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۷)$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger S_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۸)$$

کلاسیکی صورت کی طرح شکل 10.4 محور  $z$  کے ساتھ  $s$  ایک مستقل زاویہ  $\alpha$  پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد

$$\omega = \gamma B_0 \quad (۴.۱۶۹)$$

سے تقدیم کرتا ہے یہ حیرت کی بات نہیں ہے مسئلہ اہر نفٹ کی وہ صورت جس سے سوال 20.4 میں اخذ کیا گیا اس کی ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت  $\langle S \rangle$  ارتقاء پائے گا بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاح کو سابق میں دیکھنا اچھا لگا مثال  $\square$

مثال ۴.۴: تجرب سٹرن و گراخ ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت کتب پر نہ صرف قوت سروڈ بلکہ ایک قوت بھی پایا جاتا ہے

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۷۰)$$

اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے ایک مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے فرض کریں ایک نسبتاً بھاری تعدیلی جوہروں کی شعاع  $y$  رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان کے خط سے گزرتی ہے شکل 11.4 یعنی

$$B(x, y, z) = -\alpha x \hat{i} + (B_0 + \alpha z) \hat{k} \quad (۴.۱۷۱)$$

جہاں  $B_0$  ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل  $\alpha$  میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے حقیقت میں ہمیں صرف  $z$  جزوے عرض ہے لیکن بد قسمتی سے ایسا ممکن نہیں ہے چونکہ برقیاتی متانوں  $\nabla \cdot B = 0$  کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں  $x$  جزو بھی پایا جائے گا ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگا

$$F = \gamma \alpha (-S_x \hat{i} + S_z \hat{k})$$

کہ تاہم  $B_0$  کے گرد تقدیم لارمر کی بنا  $S_x$  تیزی سے ارتعاش کرتا ہے جس کے بنا اس کی اوسط قیمت صفر ہوگی لہذا  $z$  رخ کل قوت درج ذیل ہوگا

$$F_z = \gamma \alpha S_z \quad (۴.۱۷۲)$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی کلاسیکی طور پر چونکہ  $S_z$  کو انشادہ نہیں ہوگا ہم توقع کرتے کہ  $z$  محور پر شعاع کی اپائی پائی جاتی جبکہ حقیقت شعاع  $2s + 1$  علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کو انشادنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے مثال کے طور پر چاندی کہ جوہر استعمال کرتے ہوئے چونکہ اس کے اندر جانب تمام الیکٹران چوڑیوں کی صورت میں یو پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مداری زاویائی معیار حرکت منسوخ ہو جاتے ہیں یوں صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر  $s = 1/2$  ہی جوہر کا چکر ہوگا لہذا شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل حلاکت کلاسیکی تھ جبکہ کو انٹیم میکانیات میں قوت کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے لہذا اسی مسئلہ کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا ہم اس عمل کو اس حوالہ چوکھٹ کے حوالہ سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہوں اس چوکھٹ میں ہیملٹنی صفر سے ابتدا کرتے ہوئے وقت  $T$  جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۳)$$

جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں  $B$  کے  $x$  جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں فرض کریں جوہر کا چکر  $1/2$  ہے اور یہ درج ذیل حال سے ابتدا کرتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے وقت  $\chi(t)$  ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq t \leq T$$

جہاں مساوات 161.4 کے تحت

$$E_{\pm} = \mp \gamma (B_0 + az) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۴)$$

ہو گا لہذا  $t \geq T$  کے لیے یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا

$$\chi(t) = \left( a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left( b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z} \quad (۴.۱۷۵)$$

ان دونوں اجزاء کا آپ  $z$  رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے مساوات 32.3 دیکھیں ہمارے میدان حبز و کا معیار حرکت درج ذیل ہو گا

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T \hbar}{2} \quad (۴.۱۷۶)$$

اور یہ مثبت  $z$  رخ جانب حرکت کرے گا مخالف میدان حبز و کا معیار حرکت غلط ہے اور یہ منفی  $z$  رخ کی جانب حرکت کرے گا یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی چونکہ یہاں  $S_z = \hbar/2$  اور  $p_z = F_z T$  ہے لہذا مساوات 174.4 پہلی حاصل کرنا نتیجہ مساوات 170.4 کے مطابق ہے کو انٹیم میکانیات کی فلاسفی میں سٹرٹن و گرا لاغ تجربہ میں کلیدی کردار ادا کیا ہے اس کے ذریعے کو انٹیم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کو انٹیم پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ نظام کا ابتدائی حال ہم جانتے ہیں جس سے مساوات شرودنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جا سکتا ہے یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر لاتے ہیں آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر ترتیب شدہ اشعاع کو سٹرٹن و گرا لاغ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا  $z$  حبز و جانب چاہیں تب آپ انہیں سٹرٹن و گرا لاغ عملی سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کا یہ ایک سادہ مثال ہے □

سوال ۴.۲۶: مثال 3.4 میں

۱. وقت  $t$  پر چکری زاویائی معیار حرکت کے  $x$  رخ حبز و کی پیمائش نتیجہ  $\hbar/2$  حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا

ب.  $y$  رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہو گا

ج.  $z$  رخ اسی سوال کا جواب کیا ہو گا

سوال ۴.۲۷: ایک ارتعاشی مقناطیس میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \hat{k}$$

جہاں  $B_0$  اور  $\omega$  مستقل ہیں میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے

۱. اس نظام کا ہیملٹنی متاثر تیار کریں

ب. محور  $x$  کے لحاظ سے وقت  $t = 0$  پر یہ الیکٹرون ابتدائی طور پر ہامیڈان حال یعنی  $\chi(0) = \chi_+^x$  سے ابتدا کرتا ہے مستقبل کی وقتوں کے لیے  $\chi(t)$  تعین کریں دیہان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے لہذا آپ اس کی حالات سے  $\chi(t)$  حاصل نہیں کر سکتے ہیں خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شرودنگر مساوات مساوات 162.4 کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں

ج.  $S_x$  کی پیمائش میں  $\hbar/2$  نتیجہ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا جواب

$$\sin^2 \left( \frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

د.  $S_x$  کو مکمل الٹ کرنے کے لیے کم سے کم میدان  $B_0$  کتنا

## ۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس  $1/2$  چکر کے دو ذرات مثلاً ہائیڈروجن کے زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان ہیں ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوگی

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow \quad (۴.۱۷۷)$$

جہاں پہلے تیر کا نشان یعنی بائیں تیر الیکٹران کو جبکہ دوسرا یعنی دایاں تیر پروٹان کو ظاہر کرتا ہے سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

$$S \equiv S^{(1)} + S^{(2)} \quad (۴.۱۷۸)$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک  $S_z$  کا امتیازی حال ہوگا ان کے  $z$  اجزاء سادہ جمع دیتے ہیں

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar (m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

یاد رہے کہ  $S^{(1)}$  صرف  $\chi_1$  پر عمل کرتا ہے اور  $S^{(2)}$  صرف  $\chi_2$  پر عمل کرتا ہے یہ علامتیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد  $m$  یہاں  $m_1 + m_2$  ہوگا

$$\uparrow\uparrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\uparrow\downarrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\uparrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\downarrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$



پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے  $m$  کو چاہیے کہ  $-s$  سے  $+s$  تک عدد صحیح قدرتوں کے لحاظ سے بڑھے یوں ایسا نظر آتا ہے کہ  $s = 1$  ہوگا جبکہ یہاں پر ایک اضافی حال جس کا  $m = 0$  ہے بھی پایا جاتا ہے اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات 146.4 استعمال کرتے ہوئے  $\uparrow\uparrow$  حال پر عامل تقلیل  $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$  استعمال کرتے ہیں

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $s = 1$  کے تین حالات  $|sm\rangle$  علامتی روپ میں درج ذیل ہونگے

$$(۴.۱۷۹) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (سہ تہ)}$$

تصدیق کی خاطر  $|10\rangle$  پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں آپ کو یہ حاصل ہوتا ہے سوال 34.4 (لف) دیکھیں اسی وجہ کی بنا اسے تین کی جوڑی کہتے ہیں ساتھ ہی وہ عمودی حال جس کا  $m = 0$  ہوگا  $s = 0$  ہوگا

$$(۴.۱۸۰) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (یک تہ)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کی طلاق سے صفر حاصل ہوگا سوال 34.4 (ب) دیکھیں یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ  $1/2$  چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک یا صفر ہوگا جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا وہ تین جوڑی یا واحدانی تقسیم اختیار کرتے ہیں اس کی تصدیق کرنے کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ تین جزواں حالات  $S^2$  کے امتیازی سمتیات ہونگے جن کے امتیازی مقدار  $2\hbar^2$  ہوگا جبکہ واحدانی  $S^2$  کا وہ امتیازی سمتیہ ہوگا جس کا امتیازی مقدار صفر ہو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۴.۱۸۱) \quad S^2 = (S^{(1)} + S^{(2)}) \cdot (S^{(1)} + S^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2S^{(1)} \cdot S^{(2)}$$

مساوات 145.4 اور 147.4 سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} S^{(1)} \cdot S^{(2)}(\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} (2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

اس طرح

$$(۴.۱۸۲) \quad S^{(1)} \cdot S^{(2)} |10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow \uparrow - \uparrow \downarrow + 2 \uparrow \downarrow - \downarrow \uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} |10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۳) \quad S^{(1)} \cdot S^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow \uparrow - \uparrow \downarrow - 2 \uparrow \downarrow + \downarrow \uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4} |00\rangle$$

ہو گئے مساوات 179.4 پر دوبارہ غور کرتے ہوئے اور مساوات 142.4 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں

$$(۴.۱۸۴) \quad S^2 |10\rangle = \left( \frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2 \frac{\hbar^2}{4} \right) |10\rangle = 2\hbar^2 |10\rangle$$

لہذا  $|10\rangle$  یقیناً  $S^2$  کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی مقدار  $2\hbar^2$  ہوگا اور

$$(۴.۱۸۵) \quad S^2 |00\rangle = \left( \frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2 \frac{3\hbar^2}{4} \right) |00\rangle = 0$$

لہذا  $|00\rangle$  یقیناً  $S^2$  کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی مقدار 0 ہوگا میں آپ کے لئے سوال 34.4 (c) چھوڑتا ہوں جہاں آپ نے تصدیق کرنا ہوگا کہ  $|11\rangle$  اور  $|1-1\rangle$  مختص امتیازی اقدار کی  $S^2$  کے امتیازی تفاعلات ہیں ہم نے  $1/2$  چکر اور  $1/2$  چکر کو ملا کر ایک چکر اور صفر چکر حاصل کیا جو کسی بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے اگر آپ  $s_1$  چکر اور  $s_2$  چکر کو ملائیں تب کل چکر  $s$  کتنا حاصل ہوگا اس کا جواب یہ ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے  $(s_1 + s_2)$  سے  $s_2 > s_1$  کی صورت میں  $(s_2 - s_1)$  تک اور  $s_1 > s_2$  کی صورت میں  $(s_1 - s_2)$  تک نیچے آتے ہوئے ہر چکر

$$(۴.۱۸۶) \quad s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2|$$

حاصل ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے سب سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہوگا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صنف بند ہوں اور کم سے کم اس صورت ہوگا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صنف بند ہوں مثال کے طور پر اگر آپ  $3/2$  چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ دو چکر کے ایک ذرہ کو ملائیں تب آپ کو  $5/2$  اور  $1/2$  کل چکر حاصل ہونگے جو تنظیم پر منحصر ہونگے دوسری مثال پیش کرتے ہیں حال  $\psi_{nlm}$  کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا کل زاویائی معیار حرکت چکر جمع دائری  $l + 1/2$  یا  $l - 1/2$  ہوگا اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد  $l + 1$  یا  $l - 1$  ہوگا جہاں  $l$  کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا کہ الیکٹران از خود  $l + 1/2$  یا  $l - 1/2$  تنظیم رکھتا ہے

چونکہ  $z$  اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں لہذا صرف وہ سرکی حالات جن کے لئے  $m_1 + m_2 = m$  حصہ ڈال سکتے ہیں لہذا ملائی حال  $|sm\rangle$  جس کا کل چکر  $s$  اور  $z$  جزو  $m$  ہوگا سرکی حالات  $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$  کا خطی مجموعہ:

$$(۴.۱۸۷) \quad |sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$$

ہوگا مساوات 177.4 اور 178.4 اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں  $s_1 = s_2 = 1/2$  ہیں۔  
میں نے یہاں غیر رسمی علاقیت  $\uparrow = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$  اور  $\downarrow = |\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$  استعمال کیا ہے مستقلاً  $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$  کو  
کلیبش و گوردن عددی سرکہتے ہیں جدول 8.4 میں چند سادہ صورتیں پیش کی گئی ہے مثال کے طور پر دو ذرے ایک  
جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص اگر ایک ڈبہ میں دو چکر اور ایک چکر کے ساکن ذرات بائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3 اور  $z$  جزو  
صفر ہو تب  $S_z^{(1)}$  کی پیمائش  $1/5$  احتمال کے ساتھ  $\hbar$  یا  $3/5$  احتمال کے ساتھ صفر یا  $1/5$  احتمال کے  
ساتھ  $-\hbar$  قیمت دے سکتی ہے اب دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ ایک ہوگا کلیبش و گوردن جدول کہ کسی  
بھی قطار کہ سرہون کا مجموعہ ایک ہوگا ان جدولوں کو الٹ طریقے سے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے

$$(۴.۱۸۸) \quad |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |sm\rangle$$

مثال کے طور پر  $1 \times 3/2$  جدول میں سایہ دار صف درج ذیل کہتی ہے

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبہ میں  $3/2$  چکر اور ایک چکر کے دو ذرات رکھے اور آپ جانتے ہو کہ پہلے کے لیے  
 $m_1 = 1/2$  اور دوسرے کے لیے  $m_2 = 0$  ہے تاکہ  $m$  لازم  $1/2$  ہو اور آپ کل چکر  $s$  کی پیمائش کریں  
تب آپ  $3/5$  احتمال کے ساتھ  $5/2$  یا  $1/15$  احتمال کے ساتھ  $3/2$  یا  $1/3$  احتمال کے ساتھ  $1/2$   
حاصل کر سکتے ہیں اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہوگا کلیبش و گوردن جدول میں ہر صف کے سرہون کا  
مجموعہ ایک ہوگا یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا  
ہوں ہم اس کتاب میں کلیبش و گوردن عددی سرکو زیادہ استعمال نہیں کریں گے میں صرف چاہتا تھا کہ آپ  
ان سے واقف ہوں ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ اہلی گروہی نظریہ کا حصہ ہے سوال ۴.۲۸:

ا. مساوات 177.4 میں دیے گئے  $|10\rangle$  پر  $S_-$  کا اطلاق کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$  حاصل کرتے ہیں

ب. مساوات 178.4 میں  $|00\rangle$  پر  $S_{\pm}$  کا اطلاق کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ صفر حاصل کرتے ہیں

ج. دکھائی کہ مساوات 177.4 میں دیے گئے  $|11\rangle$  اور  $|1-1\rangle$   $S^2$  کے موضوع امتیازی امتداد والے امتیازی  
تفاعلات ہیں

سوال ۴.۲۹: کوارک کا چکر  $1/2$  ہے تین کوارک کے ایک دونوں کے ساتھ مل کر ایک بیرون پیدا کرتے ہیں مثلاً  
پروٹان یا نیوٹران دو کوارک کے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک آپس میں جوڑ کر  
ایک میانہ پیدا کرتے ہیں مثلاً پائون یا کاپون فرض کریں کہ یہ کوارک کے زمینی حال میں ہیں لہذا ان کا مداری زاویائی  
معیار حرکت صفر ہوگا

- ا. بیرونیوں کے کیا ممکنہ چکر ہونگے  
 ب. میزان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے  
 سوال ۴.۳۰:

ا. ایک ذرا جس کا چکر ایک اور دو سر اذرا جس کا چکر دو ہیں ساکن حال میں اس تقسیم سے پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3 اور  $z$  حبز  $\hbar$  ہے اس دو چکر ذرے کے زاویائی معیار حرکت کے  $z$  حبز کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا  
 ب. ہائیڈروجن جوہر کے  $\psi_{510}$  میں ایک الیکٹران مخالف میدان پایا جاتا ہے اگر آپ پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کی مربع کی پیمائش کر سکیں تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کی انفرادی احتمال کیا ہوگا  
 سوال ۴.۳۱:  $S^2$  اور  $S_z^{(1)}$  کا متلوبہ تعین کریں جہاں  $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$  ہوگا اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(S^{(1)} \times S^{(2)}) \quad (۴.۱۸۹)$$

میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ  $S_z^{(1)}$  اور  $S^2$  ایک دوسرے غیر متلوبہ ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے متاثر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہو ہمیں  $S^2$  کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر  $S_z^{(1)}$  امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے مساوات 185.4 میں کلیڈش و گورڈن عددی سر ہمارے لیے یہی کچھ کرتے ہیں ساتھ ہی مساوات 187.4 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $S^2$  کے ساتھ مجموعہ  $S^{(1)} + S^{(2)}$  متلوبہ ہوگا جو ہماری معلومات مساوات 103.4 کی ایک مخصوص صورت ہے

سوال ۴.۳۲: تین آبادی ہارمونی سر تعش پر غور کریں جس کا مخفی توجہ درج ذیل ہیں

$$Vr = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (۴.۱۹۰)$$

ا. کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بودی سر تعش میں تبدیل کریں  
 موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے احبازی توانائیاں تعین کریں جواب

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۹۱)$$

ب.  $E_n$  کی انخطائیت  $d_{(n)}$  تعین کریں

سوال ۴.۳۳: چونکہ مساوات 188.4 میں دیا گیا تین آبادی ہارمونی سر تعش مخفی توجہ کردی تشاکلی ہے لہذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی معد کے ساتھ ساتھ کردی معد میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا

جاسکتا ہے طاقی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداسی مساوات حل کریں عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے اجزائی توانائیاں تعین کریں اپنے جواب کی تصدیق مساوات 189.4 کے ساتھ کریں سوال ۴.۳۴:

۱. ساکن حالات کے لئے درج ذیل تین آبادی مسئلہ وریل ثابت کریں

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۲)$$

اشارہ: سوال 31.3 دیکھیے گا

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۳)$$

ج. مسئلہ وریل کو سوال 38.4 کے تین آبادی ہارمونی سر تقش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۴)$$

سوال ۴.۳۵: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہے سوال 14.1 کی عمومیت سے تین آبادی رواحتال کی تعریف پیش کریں

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۵)$$

۱. دکھائے کہ  $\mathbf{J}$  استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۶)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مکائی بقا احتمال کو بیان کرتی ہے یوں مسئلہ پھلاو کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3r \quad (۴.۱۹۷)$$

جہاں  $V$  ایک مقررہ حجم اور  $S$  اس کی سرحدی سطح ہے الفاظ میں کسی سطح سے احتمال کا اخراج اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا

ب. حال  $m = 1$   $l = 1$   $n = 2$  میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے یہ تلاش کرے جواب

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \phi$$

ج. اگر ہم کمیت کے پھنکے کو  $m_J$  سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$L = m \int (r \times J) d^3 r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال  $\psi_{211}$  کے لیے  $L_z$  کا حساب لگائے اور نتیجہ پر تبصرہ کریں

سوال ۴.۳۶: غنیر تابع وقت معیار حرکت و فنکشن تفاعل موج کو تین آباد میں مساوات 54.3 کی قدرتی عمومیت پیش کرتی ہے

$$\phi(p) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(p \cdot r)/\hbar} \psi(r) d^3 r \quad (۴.۱۹۸)$$

۱. زمینی حال میں ہائیڈروجن مساوات 80.4 کے لیے معیار حرکت و فنکشن تفاعل موج تلاش کریں  
اشارہ: بروئی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو  $p$  کے رخ رکھیں اور  $\theta$  کا عمل پہلے حاصل کریں جواب

$$\phi(p) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۹)$$

ب. تصدیق کیجئے گا کہ  $\phi(p)$  معمول شدہ ہے

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن جوہر کے لیے  $\psi(p)$  استعمال کرتے ہوئے  $\langle p^2 \rangle$  کا حساب لگائیں

د. اس حال میں حرکت توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی اپنی جواب کو  $E_1$  کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ ورلڈ مساوات 191.4 کے بلا تفساد ہیں

سوال ۴.۳۷:

۱. حال  $n = 3$  اور  $l = 2$  اور  $m = 1$  میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل موج  $\psi$  تیار کریں اپنی جواب کو صرف اور صرف  $r$   $\theta$   $\phi$  اور  $a$  رداس جوہر کی تفاعل کی صورت میں لکھ کسی دوسرے متغیر  $z$  وغیرہ یا تفاعل  $Y$   $v$  وغیرہ یا مستقلات  $A$   $c_0$  وغیرہ یا تفویضات استعمال کرنے کی اجازت ہے ہاں  $\pi$   $e$  اور 2 وغیرہ استعمال کر سکتے ہیں

ب.  $r$   $\theta$  اور  $\phi$  کے لحاظ سے موضوع نکلات حل کر کے تصدیق کریں کہ تفاعل موج معمول شدہ ہے

ج. اس حال میں  $r^s$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں  $s$  کی کس سا تھ مثبت اور منفی کے لیے جواب مستثنائی ہوگا

سوال ۴.۳۸:

۱. حال  $n = 4$  اور  $l = 3$  اور  $m = 3$  کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں اپنے جواب کو بروئی محدود  $r$   $\theta$  اور  $\phi$  کا تفاعل لکھیں

ب. اس حال میں  $r$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی آپ کو نکلات جدول سے حاصل کرنے کی اجازت ہے

ج. اس حال میں ایک جوہر کے مشہود  $L_x^2 + L_y^2$  کی پیمائش سے کیا قیمت یا قیمتیں متوقع ہے اور ان کے انفرادی احتمال کیا ہوں گے

سوال ۴.۳۹: ہیڈروجن کی زمینی حال میں مرکزہ کے اندر الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا

ا. پہلے یہ فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج مساوات 80.4 ردا اس  $r = 0$  تک درست ہے اور مرکزہ کا ردا اس  $b$  لیتے ہوئے بالکل ٹھیک جواب حاصل کریں

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد  $\epsilon \equiv 2b/a$  کی طاقتی تسلسل کی روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ سب سے کم رتبی جزو کا بھی ہوگا  $P \approx (4/3)(b/a)^3$  دکھائے کہ  $b \ll a$  کی صورت میں جو کہ درست ہے یہ تخمین موزوں ہوگی

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کہ بہت چھوٹی حجم میں  $\psi(r)$  تقریباً مستقل ہوگا لہذا  $P \approx | \psi(0) |^2 \pi b^3 (4/3)$  لیا جاسکتا ہے تصدیق کیجیے گا کہ یوں بھی آپ وہی جواب حاصل کر سکتے ہیں

د.  $b \approx 1 \times 10^{-15} \text{ m}$  اور  $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$  لیتے ہوئے  $P$  کی اندازن اعدادی قیمت حاصل کریں یہ الیکٹران کا اندازن وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے

سوال ۴.۴۰:

ا. کلیہ توانی مساوات 176.4 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ  $l = n - 1$  کی صورت میں ردا سی تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلا واسطہ عمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی  $N_n$  تعین کریں

ب. حال  $\psi_n(n-1)m$  روپ کے حالات کے لیے  $\langle r \rangle$  اور  $\langle r^2 \rangle$  کا حساب لگائیں

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی  $r(\sigma_r)$  میں عدم یقینیت  $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$  ہوگی دھیان رہے کہ  $r$  میں نسبتی پھیلاؤ  $n$  بڑھانے سے گھٹتا ہے یوں  $n$  کی بڑی قیمت کے لیے نظام کلاسیکی نظر آنے شروع ہوتا ہے جس میں دائری مدار پر چپانے جاسکتے ہیں  $n$  کی کئی قیمتوں کے لیے ردا سی تفاعل امواج کا حاکم بناتے ہوئے اس نقطے کی وضاحت کریں

سوال ۴.۴۱: ہم مکان طیفی خطوط کلیہ رڈبرگ مساوات 93.4 کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے صدر کو انٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں ایسی دو منفرد جوڑیاں  $\{n_i, n_f\}$  تلاش کریں جو  $\lambda$  کی ایک ہی قیمت دیتے ہو مثلاً  $\{6851, 6409\}$  اور  $\{15283, 11687\}$  آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوگی

سوال ۴.۴۲: مشہودات  $A = x^2$  اور  $B = L_z$  پر غور کریں

ا.  $\sigma_A \sigma_B$  کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں

ب. حال  $\psi_{nlm}$  میں ہائیڈروجن کے لیے  $\sigma_B$  کی قیمت معلوم کریں

ج. اس حال میں  $\langle xy \rangle$  کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں

سوال ۴.۴۳: ایک الیکٹران درج ذیل چپکری حال میں ہے

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

۱.  $\chi$  کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل  $A$  تعین کریں

ب. اس الیکٹران کی  $S_z$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا  $S_z$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی

ج. اگر اس الیکٹران کی  $S_x$  کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا  $S_x$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی

د. اس الیکٹران کی  $S_y$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہوگا  $S_y$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی

سوال ۴.۴۴: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد  $1/2$  چپکر ذرات۔ کتنا تنظیم?? میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $S_a^{(1)}$  کے رخ ذرہ 1 کے چپکری زاویائی معیار حرکت کا حبز  $\hat{a}$  ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $S_b^{(2)}$  کے رخ ذرہ 2 کے چپکری زاویائی معیار حرکت کا حبز  $\hat{b}$  ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں  $\hat{a}$  اور  $\hat{b}$  کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۴۰۰)$$

سوال ۴.۴۵:

۱. کلیش گورڈن عددی سروں کو  $s_1 = 1/2$   $s_2 = \text{anything}$  کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں  $A$  اور  $B$  عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے  $|sm\rangle$  کا امتیازی حال ویکٹر  $S^2$  ہوگا

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |S_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |S_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ  $S_x^{(2)}$  مثلاً ویکٹر  $|s_2 m_2\rangle$  پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں  $s = s_2 \pm 1/2$  علامتیں تعین کرتی ہیں۔



ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجہ دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۴۶: ہمیشہ کی طرح  $S_z$  کی امتیازی حالات کو اس سلیٹے ہوئے  $3/2$  چکر کے ذرے کے لیے متالاب  $S_x$  تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے  $S_x$  کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۴۷: مساوات 145.4 اور 147.4 میں  $1/2$  چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں  $3/2$  چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری  $s$  چکر کے لیے چکر کی متالاب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$  ہوگا۔

سوال ۴.۴۸: کروئی ہارمونیات کے لیے،؟؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جز  $B_l^m$  تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے  $B_l^{m+1}$  کی صورت میں  $B_l^m$  کا کلیہ تواری دریافت کریں۔ اس کو  $m$  کے ریاضی ماحول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے  $B_l^m$  کو مجموعی مستقل  $C(l)$  تک حل کریں۔ آخر

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجناڈر تفاعل کے تفسرک کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(۴.۲۰۱) \quad (1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m$$

سوال ۴.۴۹: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi -)$$

ا. مدار کی زاویائی معیار حرکت کے مربع  $(L^2)$  کی پیمائش کے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفسردی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ معیاری  $z$  زاویائی معیار حرکت کے  $(L_z)$  حیز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکر کی زاویائی معیار حرکت کے مربع  $(S^2)$  کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکر کی زاویائی معیار  $z$  کے  $(S_z)$  حیز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت  $S = J + L$ ۔

ه. آپ  $J^2$  کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفسردی احتمال کیا ہوگا۔  
و. یہی کچھ  $J_z$  کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی  $r, \theta, \phi$  پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگا؟

ح. آپ چکر کے  $z$  حیز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس  $r$  پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۵۰:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل  $f(\phi)$  جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) \equiv e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں  $\varphi$  اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا  $L_z/\hbar$  کو  $z$  کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی  $L \cdot \hat{n}/\hbar$  ہوگا جو  $\hat{n}$  کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی  $e^{(iL \cdot \hat{n}\varphi/\hbar)}$  کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ  $\varphi$  گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار  $S \cdot \hat{n}/\hbar$  ہوگا بالخصوص  $1/2$  چکر کے لیے

$$(۴.۲۰۲) \quad \chi' = e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} \chi$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور  $x - axis$  کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا  $(2 \times 2)$  متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہمہ میدان  $(\chi_+)$  کو مخالف میدان  $(\chi_-)$  میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور  $y - axis$  کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا متالب تیار کریں اور دیکھیں کہ  $(\chi_+)$  پر اس کا اثر کیا ہوگا؟

د. محور  $z - axis$  کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں

$$e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۳)$$

سوال ۴.۵۱: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (مساوات 99.4) امتیازی افتدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ  $L = r \times p$  کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہوگا۔ ہم  $a$  کو کوئی ایسا مستقل ایسے ہیں جس کا بود لبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس اس بوہر درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ  $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$  یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو  $q's$  اور  $p's$  مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2 - q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی سرعش جس کی کیت  $\hbar/a^2 = m$  ہو اور تعدد  $\omega = 1$  ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی  $H$  کے لیے  $L_z = H_1 - H_2$  گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی سرعش کے ہیملٹنی کی امتیازی افتدار  $\hbar\omega(n + 1/2)$  ہیں جہاں  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ہوگا (حصہ ?? کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ  $L_z$  کے امتیازی افتدار لازمًا عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۵۲: عمومی حال مساوات 139.4 می 1/2 چکر کے  $S_z$  اور  $S_y$  کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی  $| \langle S_z \rangle | \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$  میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومییت کھوئے بغیر  $a$  کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہوگی  $b$  حالف حقیقی یا حالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۳: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا؟؟؟؟  $q$  ہو اور جو مقناطیسی میدان  $E$  اور  $B$  میں مستحق رفتار  $v$  کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لوریسنز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۴)$$

اس قوت کو کسی بھی غیر مستحق مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو مقبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (۴.۲۰۵)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \quad (۴.۲۰۶)$$

جہاں  $A$  مستحق مخفی قوتہ  $\nabla \times A$  اور  $\phi$  غیر مستحق مخفی قوتہ  $(E = -\nabla \phi - \partial A / \partial t)$  ہیں لہذا شروڈنگر مساوات میں باضابطہ متبادل  $(\hbar/i) \nabla \rightarrow (p - qA)$  درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\phi \right] \psi \quad (۴.۲۰۷)$$

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d \langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (p - qA) \rangle \quad (۴.۲۰۸)$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم  $d \langle r \rangle / dt$  کو  $\langle v \rangle$  لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d \langle v \rangle}{dt} = q \langle E \rangle + \frac{q}{2m} \langle (p \times B - B \times p) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (A \times B) \rangle \quad (۴.۲۰۹)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں  $E$  اور  $B$  میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d \langle v \rangle}{dt} = q(E + \langle v \rangle \times B), \quad (۴.۲۱۰)$$

اس طرح  $\langle v \rangle$  کی توقعاتی قیمت عین لوریسنز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۴.۵۴: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں  $B_0$  اور  $K$  مستقل ہیں

$$A = \frac{B_0}{2}(x\hat{j} - y\hat{i})$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان  $E$  اور  $B$  تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیت  $m$  اور بار  $q$  ہوں کے ساکن حالات کی احبازی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$(۴.۲۱۱) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں  $qB_0/m = \omega_1$  اور  $\sqrt{2qKm} = \omega_2$  ہوگا۔ تبصرہ:  $0 = K$  کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مشاغل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد  $\omega_1$  ہوگا اور یہ  $z$  رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ احبازی توانائیاں  $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$  ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۵۵: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوت  $A$  اور  $\varphi$  یکساں طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں، طبیعتداریں میدان  $E$  اور  $B$  ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوت

$$(۴.۲۱۲) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں مقام اور وقت کا  $\Lambda$  ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان  $\varphi$  اور  $A$  دیتے ہیں۔ مساوات 20.4 گنج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوت کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا یہ نظریہ گنج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$(۴.۲۱۳) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گنج تبادلہ مخفی قوت  $\varphi'$  اور  $A$  لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ  $\Psi$  اور  $\Psi'$  میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبیعتدار کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔



## باب ۵

# تمثیل ذرات

### ۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذرہ کے لیے فعال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے  $\psi(r, t)$  فضائی مہدت  $r$  اور وقت  $t$  کا تفاعل ہوگا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے مختط  $(r_1)$  دوسرے ذرے کے مختط  $(r_2)$  اور وقت کا تابع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے shrodinger مساوات

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا۔ جہاں  $H$  مکمل نظام کا Hamiltonian ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} v_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} v_2^2 + v(r_1, r_2, t)$$

ذرہ ایک یا ذرہ دو کے محدودوں کے لحاظ سے تفصیلات لینے کو  $\Delta$  زیر نوشت میں ایک یا دو سے ظاہر کیا گیا ہے۔  
ذرہ ایک کا حجم  $d^3 r_1$  اور ذرہ دو کا حجم  $d^3 r_2$  پائے جانے کا اہتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

ظاہر ہے کہ  $\psi$  کو درج ذیل کے لحاظ سے معمول پر لانا ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفی توانائی کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۵.۶) \quad \psi(r_1, r_2, t) = \psi(r_1, r_2) e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

جہاں فضا کی تعامل معالج  $\psi$  غیر تابع وقت shrodingier مساوات

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi$$

جس میں  $E$  پورے نظام کی قتل توانائی ہے۔

سوال ۵.۱: عام طور پر باہمی مخفی توانائی انحصار صرف 2 ذرات کے بیچ سمتیہ  $r_1 - r_2$  پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات  $r_1$  اور  $r_2$  کی جگہ نے متغیرات اور مرکز کیمیت  $R = \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)}{m_1 + m_2}$  مساوات shrodingier ہوتی ہے۔

$$(الف) \quad \nabla_1 = \left(\frac{\mu}{m_2}\right) \nabla_R + \nabla_r, \nabla_2 = \nabla_r, r_1 = R + \left(\frac{\mu}{m_1}\right) r, r_2 = R - \left(\frac{\mu}{m_2}\right) r \quad \text{جہاں} \quad \left(\frac{\mu}{m_1}\right) \nabla_R - \nabla_r$$

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تشخیص شدہ کیمیت ہے۔

(ب)۔ دکھائیں کہ غیر تابع وقت shrodingier مساوات درج ذیل رعب اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(r) \psi = E \psi$$

(ج)۔ متغیرات کو  $\psi(R, r) = \psi_r(r) \psi_R(R)$  لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ  $\psi_r$  ایک ذرہ کی shrodingier مساوات جہاں کیمیت  $(m_1 + m_2)$  مخفی توانائی صفر ہو اور نظام کی توانائی  $E_R$  کو مطمئن کرتا ہے۔ جبکہ  $\psi_R$  ایک ذرے کی shrodingier مساوات جہاں تخفیف شدہ کیمیت ہو۔ مخفی توانائی  $V(r)$  ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ قتل توانائی اور ان کا مجموعہ  $E = E_R + E_r$  ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کیمیت ایک آزاد ذرہ کی طرح حرکت کرتا ہے جبکہ ذرہ ایک کے لحاظ سے ذرہ دو کی نصیبتی حرکت ایسے ہی ہوگی جیسا مخفی توانائی  $V$  میں تخفیف شدہ کیمیت کا ایک ذرہ کرتی ہے classical mechanics میں بھی بالکل یہی تحلیل ہوگی جو 2 اجسام ملے کو حاصل ایک جسم سلسلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں Hydrogen کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم electron کی کیمیت کی جگہ تخفیف شدہ کیمیت استعمال کریں گے

(الف)۔ hydrogen کی بندش کی توانائی (مساوات 4.77) حبانہ کی خاطر  $\mu$  کی جگہ  $m$  استعمال کرنے سے دو بمعنی ہندسوں تک فیصد حائل کتنہ ہوگا۔



(ب)۔ hydrogen اور Dueterium کے لیے  $(n = 2) > (n = 3)$  سرخ بالمر کلیروں کے بیچ تفاعل معاج میں مشرق تلاش کریں۔

(ج)۔ Positronium کی جس طرحی توانائی تلاش کریں۔ proton کی جگہ positron رکھنے سے positronium پیدا ہوگا۔ positron کی کیمیت electron کی کیمیت کے برابر ہوگا جبکہ اس کی علامت Electron کی علامت کے مخالف ہے۔

(د)۔ فرض کریں آپ hydrogenmuonic جس میں electron کی جگہ ایک muon کی موجودگی کی تصدیق کرنا چاہتے ہوں۔ muon کا electron bar کے برابر ہے۔ جبکہ یہ electron سے  $206.77$  گنا زیادہ کیمیت رکھتا ہے۔ آپ  $\alpha$  Lyman  $n = 1$  تا  $n = 2$  کے لیے کس طور معاج پر نظر رکھیں گے۔

سوال ۵.۳: کلورین کے متدرتی دو ہم حب  $Cl^{35}$  and  $Cl^{37}$  پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCL کی لرزشی طیف متدریب متدریب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا۔ جن میں مشرق  $7.51 \times 10^{-4} v$   $\Delta v$  جہاں  $v$  حرجی photon کی تعدد ہے۔ اشارہ: اس کو ایک Harmonium مرتعیث تصور کریں جہاں  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$  ہوگا۔ جہاں  $\mu$  تخفیف شدہ کیمیت (مساوات 5.8) ہے۔ جبکہ  $k$  دونوں ہجاکے لیے ایک جیسا ہے۔

#### ۵.۱.۱. بوزان اور فرمیون

فرض کریں ذرہ ایک ذرہ حال  $\psi_a(r)$  اور ذرہ دو حال  $\psi_b(r)$  میں پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ یہاں میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں ایسی صورت میں  $\psi(r_1, r_2)$  سادہ حاصل ضرب ہوگا

$$(۵.۹) \quad \psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2)$$

ایسا کہتے ہوئے ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ ہم ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچان سکتے ہیں ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ ایک حال  $\psi_a$  میں اور ذرہ دو حال  $\psi_b$  میں ہے پیمانی ہوتا اور ہم بغیر جانے کے کونسا ذرہ ایک اور کونسا ذرہ دو ہے یہ کہتے کہ ایک ذرہ  $\psi_a$  میں اور دوسرا ذرہ  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہے۔ کلاسیکی میکینیک میں یہ ایک یوقفانہ اعتراض ہوتا۔ اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دیکر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکینیک میں صورت حال بنیادی طور پر مختلف ہے۔ آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل یکساں ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے متاثر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ یہ الیکٹران اور وہ الیٹران کوانٹم میکینیک میں بے معنی ہیں ہم صرف ایک الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔ اصولی طور پر غیر میسر ذرات کی موجودگی کو کوانٹم میکینیک خوش اسلوبی سے سموتی ہے۔ ہم ایک ایسا غیر مشرود تفاعل وچ تیار کرتے ہیں جب اس کی بات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے ایسا دو طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔

$$(۵.۱۰) \quad \psi \pm (r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے یکساں ذرات کا حاصل ہوگا بوزان جن کے لیے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور فرمیون جن کے لیے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزان کی مثال فونان اور میزون ہے جبکہ فرمیون کی مثال

پروٹان اور الیکٹران ہے ایسے ہے کہ

$$(۵.۱۱) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزان جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیون ہوں گے} \end{array} \right.$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق جیسا ہم دیکھیں گے فرمیونز اور بوزانز کی شماریاتی خواہ اس ایک دوسرے سے بہت مختلف ہتے ہیں کو اضافی کو انٹرمیکانیات میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔

اس سے بالخصوص اب یہ اجنزر کر سکتے ہیں کہ دو یکساں فرمیونز مثلاً سولیکٹران ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر  $\psi_a = \psi_b$  ہو تب

$$\psi_-(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) - \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا کوئی موج تفاعل نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ پولی کا احسن راہی اصول کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے بلکہ یہ دو ذراتی تفاعل امواج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے جس کا اطلاق تمام یکساں فرمیونز پر ہوگا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے یہ فرض کیا ہے کہ ایک ذرہ حال  $\psi_a$  میں اور دوسرا حال  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہے لیکن اس مسئلہ کو زیادہ عمومی اور زیادہ نفیس طریقے سے وضوح کیا جاسکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ  $P$  متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے

$$(۵.۱۲) \quad Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1)$$

صاف ظاہر ہے کہ  $P^2 = 1$  ہوگا لحاظ تصدیق کیجئے گا کہ  $P$  کے امتیازی امتداد  $\pm 1$  ہوں گے۔ اب اگر دو ذرات یکساں ہوں تب لافظی ہے کہ ہیملٹونیان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتتے گا  $m_1 = m_2$  اور  $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$  اس طرح  $P$  اور  $H$  ہم اینگ مشود ہوں گے

$$(۵.۱۳) \quad [P, H] = 0$$

لحاظ ہم دونوں کے یک وقت امتیازی حالات کے تفاعلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ

$$(۵.۱۴) \quad \psi(r_1, r_2) = \pm \psi(r_2, r_1)$$

مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشابہی امتیازی فندر  $+1$  یا غیر تشابہی امتیازی فندر  $-1$  ہوں۔ مزید ایک نظام جو اس حال سے آغاز کرے اس بحال میں برقرار رہتا ہے یکساں ذرات کا ایک نیا فائدہ جس کو میں ضرورت تشاکل کہتا ہوں کے تحت تفاعل موج کو مساوات 5.14 پر صرف پورا اترنے کی ضرورت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو متعین کرتا ہو۔ یہاں بوزون کے لیے مثبت علامت اور فرمیونز کے لیے منفی علامت استعمال ہوگا۔ یہ ایک عمومی منکرہ ہے جس کی مساوات 5.10 ایک مخصوص صورت ہے۔

مثال ۵.۱: مندرجہ ذیل ایک لامتناہی چکور کنواں میں کیت M کے باہم غیر متعلق دو ذرات جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں پائے جاتے ہیں۔ آپکو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً کیسے کیا جاسکتا ہے۔ ایک ذرہ حالات درج ذیل ہوں گے۔ جہاں  $K = \frac{(\pi)^2(\hbar)^2}{2m(a)^2}$  ہے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n(\pi)}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

یہ ذرات متبادل میز ہونے کی صورت میں جہاں ذرہ 1 حال  $n_1$  میں اور ذرہ 2 حال  $n_2$  میں ہو مرکب تقاعلی موج سادہ حاصل ضرب ہوگا۔

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = ((n_1)^2 + (n_2)^2) K.$$

مثال کے طور پر زمینی حال

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K;$$

پہلا حبان حال دو چاند اخطائی

$$\psi_{12} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$

$$\psi_{21} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K;$$

ہوگا وغیرہ وغیرہ۔ دونوں ذرات یکساں یوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم پہلا حبان حال جسکی توانائی اب بھی 5K ہوگی غیر اخطائی ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

اور اگر ذرات یکساں مشرعیون ہوں تب کوئی حال بھی 2K توانائی کا نہیں ہوگا۔ جبکہ زمینی حال جسکی توانائی 5K ہوگی۔ درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

□

سوال ۵.۴:

(جزوالف) اگر  $\Psi_a$  اور  $\Psi_b$  عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات 10.5 میں متقل 'A' ہوگا؟

(جزوب) اگر  $\Psi_a = \Psi_b$  ہوں اور یہ معمول شدہ ہوں تب 'A' کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف یوزون کیلئے ممکن ہے۔)  
سوال ۵.۵:

(جزو الف) لامتناہی چکور کنواں میں باہم غیر متعامل دو یکاں ذرات کا ہملتنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال 1.5 میں دیا گیا فرمیون کا زمینی حال 'H' کا مناسب امتیازی متدروالا امتیازی تفاعل ہوگا۔

(جزوب) مثال 1.5 میں دیئے گئے حبان حالات سے اگلے دو حالات تفاعل موج اور توانائیاں تینوں صورتوں میں متبادل ممیز یکاں موزوں، یکاں فرمیون حاصل کریں۔

### ۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یکہ بُجدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشکل کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال  $\psi_a(x)$  میں اور دوسرا حال  $\psi_b(x)$  میں ہو اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہوں اگر یہ ذرات متبادل ممیز ہوں اور ذرہ ایک حال  $\psi_a$  میں ہو تب انکا مجموعی تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۵) \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

اگر یہ یکاں یوزون ہوں تب انکا مرکب تفاعل موج سوال 5.4 معمولی کے لیے دیکھیں درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۶) \quad \psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

اور اگر یہ یکاں فرمیون ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۷) \quad \psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

آئیں ان ذرات کے بیچ علیحدگی کے مناسلی کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں

$$(۵.۱۸) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

پہلے صورتے: قابل ممیز ذرات۔ مساوات 5.15 میں دی گئی تفاعل موج کے لیے ایک ذرہ حال  $\psi_a$  میں  $x^2$  کی توقعاتی قیمت

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

یوں اس صورت درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۹) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

یہی جواب ذرہ ایک حال  $\psi_b$  میں اور ذرہ دو حال  $\psi_a$  میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔  
دوم صورت سے: یکساں ذرات۔ مساوات 5.16 اور 5.17 کے تفسیر عمل امواج کے لیے

$$\begin{aligned} \langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b) \end{aligned}$$

بلکل اسی طرح

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

ظاہر ہے  $\langle x_2^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle$  ہوگا کیونکہ آپ ان میں تفریق نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2 \end{aligned}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۵.۲۰) \quad \langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا

$$(۵.۲۱) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

مسوات 5.19 اور 5.21 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ منفرق صرف آخری ہر میں پایا جاتا ہے

$$(۵.۲۲) \quad \langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_a \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

متماثل ممیز ذرات کے لحاظ سے انہی دو حالات کے یکساں بوزان ملائی علامت نسبتاً ایک دوسرے کے زیادہ متضرب جبکہ یکساں منرمیون زیریں علامت نسبتاً ایک دوسرے سے زیادہ دور ہولگے۔ دیہان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانچے نہیں  $\langle x \rangle_{ab}$  منمر ہوگا غیر منمر  $\psi_b(x)$  کی صورت میں جب بھی  $\psi_a(x)$  منمر ہوتا ہے مساوات 5.20 میں عمل کی قیمت منمر ہوگی۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو  $\psi_a$  ظاہر کرتا ہو جبکہ صوابی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو  $\psi_b$  ظاہر کرتا ہو تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی منفرق نہیں پڑے گا یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعل امواج ایک دوسرے کو ڈھانچتے ہوں کو آپ متماثل ممیز ہونے کا ڈھونگ رہا سکتے ہیں۔ درحقیقت اسی کی بناماہر طبیعیات اور کیمیات آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً حبانت میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ تفاعل امواج کے ذریعہ عدم تشاکلی کی بنا حبڑا ہے اور اگر اس سے کوئی منفرق پڑتا ہے تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے متاثر ہوتے۔

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتے ہے جب انکی موجدی تفاعلات ایک دوسرے کو ڈھانچتے ہیں۔ ایسی صورت میں نظام کاروبہ کچھ یوں ہوگا جیسا یکساں بوزون کے سچ قوت کشش پائی جاتی ہو جو انہیں متضرب کھینچتے ہے جبکہ یکساں منرمیونز کے سچ قوت دفع پائے جاتی ہے جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم فعل حال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں۔ ہم اس کو قوت مبادلہ کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک وقت نہیں ہے کوئی بھی چیز ان ذرات کو دکھیل نہیں رہی ہے یہ صرف ضرورت تشاکل کی جو میٹرانی نتیجہ ہے ساتھ ہی یہ کو انٹرمیکانی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکنیات میں کوئی متماثل نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دورست نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثال کے طر پر ہائڈروجن سالہ  $H_2$  پر غور کریں اندازاً بات کرتے ہوئے مرکزہ ایک پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال مساوات 4.80 میں ایک الیکٹران اور مرکزہ دو پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال دو میں ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہوگا اگر الیکٹران بوزون ہوتے تب ضرورت تشاکل یا اگر آپ قوت مبرہ پسند کرتے ہیں کوشش کرتے کہ دونوں پروٹان کے سچ الیکٹرانوں کو جمع کریں شکل 5.1 الف نتیجتاً منفی بار کا امبار دونوں پروٹانوں کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا جو شریک گر منستی بند کا سبب ہوتا۔ بد قسمتی سے الیکتران درحقیقت منرمیون ہیں نہ کہ بوزون جس کی بنا منفی بار اطراف کی جانب منتقل ہوتا ہے شکل 5.1 ب جو سالہ کو توڑنے کی کوشش کرتا ہے۔

ذرا کیے گا اب تک ہم نے چکر کو نظر انداز کیا ہے الیکٹران کے مکمل حال کو نہ صرف الیکٹران کا مکام

تفاعل موج بلکہ الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرنے والا چکر کار تعین کرتے ہیں

$$\psi(r)\chi(s) \quad (۵.۲۳)$$

دو الیکٹران حال کو تفکیک دیتے ہوئے ہمیں صرف فضائی جزو کو مبادلہ کے لحاظ سے عدم تشاکلی بنانا ہوگا بلکہ پورے کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چکر کی حال مساوات 4.177 اور 4.178 پر نظر میں ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یکتا ملاپ خلاف تشاکل ہے لحاظ اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہوگا جبکہ تین بہت حالات تشاکلی ہیں لحاظ انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔ ظاہر ہے کہ یوں یکتا حال بندھن پیدا کرے گا جنکہ بہت حال خلاف بندھن ہوگا۔ یقیناً ماہر کیمیا ت ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گرمیتی بند کے لیے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران یکتا حال کے ممکن ہوں جہاں انکا کل چکر صفر ہوگا۔

سوال ۵.۶: لامتناہی چکور کنواں میں دو باہم غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال  $\Psi_n$  مساوات 28.2 اور دوسرا حال  $\Psi_l$   $n \neq l$  میں ہے۔  $(x_1 - x_2)^2$  کا حساب اس صورت لگائیں کہ (الف) یہ غیر متابل ممیز ہوں۔ (ب) یہ یکاں بوزون ہوں اور (ج) یہ یکاں فرمیون ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال  $\Psi_a$  دوسرا حال  $\Psi_b$  اور تیسرا حال  $\Psi_c$  میں پائے جاتے ہیں۔ حالات  $\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c$  کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے مساوات 15.5، 16.5 اور 17.5 کی طرز پر تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) متابل ممیز ذرات کو (ب) یکاں بوزون کو اور (ج) یکاں فرمیون کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہوتا ہوگا۔ جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکل تفاعل امواج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ سیئر نقطہ تیار کریں جس کی پہلی صنف  $\Psi_a(x_1), \Psi_c(x_1), \Psi_b(x_1)$  وغیرہ پر مشتمل ہو۔ اس کی دوسری صنف  $\Psi_a(x_2), \Psi_b(x_2), \Psi_c(x_2)$  وغیرہ پر مشتمل ہوگی اور اسی طرح اس کے بقایا صنف ہوں گے۔ یہ نقطہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلے کارآمد ہوگا۔

## ۵.۲ جوہر

ایک ماڈل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کی کمیت M اور بار e کے الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔

$$H = \sum_{j=1}^Z -\frac{\hbar^2 \Delta_j^2}{2m} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{Ze^2}{r_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}. \quad (۵.۲۴)$$

ہر یہ قوسین میں بند جزو مرکزہ کے برقی میدان میں Z الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرا جزو جو ماسوائے  $k = 1, 2, \dots, Z$  تمام Z اور k مجموعہ پر ہے۔ الیکٹرانز میں باہمی قوت دافع کی بنا مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں  $\frac{1}{2}$  اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیے ہوئے ہر جوڑی کو دوبار گنا جاتا ہے۔ ہمیں تفاعل موج  $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$  کیلے درج ذیل شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی:

$$H\Psi = E\Psi \quad (۵.۲۵)$$

چونکہ الیکٹران یکساں فرمیون ہیں لہذا تمام حل متماثل مقبول نہیں ہوں گے۔ صرف وہ حل متماثل مقبول ہوں گے جن کا مکمل حال، مقفام اور چپکر

$$(۵.۲۶) \quad \Psi(r_1, r_2, \dots, r_z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تماثل ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ بد قسمتی سے ماسوائے سادہ ترین صورت  $1 = z$  ہائیڈروجن کیلئے مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کی شرودنگر مساوات ٹھیک حل نہیں کی جاسکتی ہے۔ کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے بابوں میں غور کیا جائے گا۔ ابھی میں الیکٹران کی قوت و دافع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ 1.2.5 میں ہم ہلیم کی زمینی حال اور جہان حالات پر غور کریں گے۔ جبکہ حصہ 2.2.5 میں ہم ہلا جواہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات 24.5 میں دی گئی ہملٹنی کے لیے آپ شرودنگر مساوات 25.5 کا حل  $\Psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_z)$  حاصل کر پائیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تماثل تقف عمل ایک مکمل خلاف تماثل تقف عمل کس طرح بنائیں گے جو شرودنگر مساوات کو کسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

### ۵.۲.۱ ہلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے زیادہ جوہر ہلیم  $Z = 2$  ہے۔ اس کا ہملٹنی

$$(۵.۲۷) \quad H = -\frac{\hbar^2 \Delta_1^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} - \frac{\hbar^2 \Delta_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|},$$

بار  $Ze$  کے مرکزہ کے دو ہائیڈروجن نما ہملٹنی الیکٹران 1 اور دوسرا الیکٹران 2 کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی و دافع پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر متماثل علیحدگی ہوگا۔ اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس مساوات 72.4 اور چار گنا بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے وجہ سے سمجھنے کی صورت میں سوال 16.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہائیڈروجن تقف عملات موج کے حاصل ضرب

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_{nlm}(r_1) \Psi_{n'l'm'}(r_2), \quad [5.28]$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی جہاں  $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$  ہوگا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}), \quad [5.29]$$

بالخصوص زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۲۸) \quad \Psi_0(r_1, r_2) = \Psi_{100}(r_1) \Psi_{100}(r_2) = \frac{8e^{-2(r_1 + r_2)/a}}{\pi a^3},$$



مساوات 80.4 دیکھیں اور اس طرح کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$E_0 = 8(-13.6\text{eV}) = -109\text{eV}. \quad [5.31]$$

چونکہ  $\psi_0$  تشاتل تشاتل ہے لہذا چکر حال کو خلاف تشاتل ہونا ہوگا اور یوں ہلیم کے زمینی حال کا تنظیم یکتا ہوگا۔ جس میں چکر ایک دوسرے کے مخالف صفت بند ہوں گے۔ حقیقت میں ہلیم کا زمینی حال یقیناً یکتا ہے۔ لیکن اس کی توانائی تجرباتی طور پر  $78.975\text{eV}$  حاصل ہوتی ہے۔ جو مساوات 31.5 سے کافی مختلف ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کہ ہم نے الیکٹران کی توانائی وضع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار ہے۔ مساوات 27.5 دیکھیں۔ جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی  $109$  کی بجائے  $79\text{eV}$  ہوگی۔ سوال 11.5 دیکھیں۔ ہلیم جہان حالات

$$\Psi_{nlm} \Psi_{100}. \quad [5.32]$$

ہائیڈروجن زمینی حال میں ایک الیکٹران اور دوسرا جہان حال پر مشتمل ہوگا۔ دونوں الیکٹران کو جہان حالات میں لے جاتے ہی ایک فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر پھینکتا ہے۔ ( $E > 0$ )۔ یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہلیم باردار یہ ( $\text{He}^+$ ) حاصل ہوگا۔ یہ باذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں۔ سوال 9.5 دیکھیں۔ ہم ہمیشہ کی طرح تشاتل اور خلاف تشاتل حالات تیار کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.5؛ اول الفکر خلاف تشاتل چکر تنظیم یکتا کے ساتھ جائے گا۔ جنہیں پیرا ہلیم کہتے ہیں۔ جبکہ مؤخر ذکر کو تشاتل چکر تنظیم سہت درکار ہوگی اور انہیں اور تھو، ہلیم کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً پیرا ہلیم ہوگا جبکہ جہان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ 2.1.5 میں دریافت کیا۔ تشاتل فصائی حال الیکٹرانز کو متعرب لاتا ہے۔ جس کی بنا ہم توقع کرتے ہیں کہ پیرا ہلیم کی باہم متعرب توانائی زیادہ ہوگی۔ یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ اور تھو، ہلیم کے لحاظ سے پیرا ہلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے۔ شکل 2.5 دیکھیں۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہلیم ایٹم کے دونوں الیکٹرانز کو  $n = 2$  حال میں رکھتے ہیں۔ خارج الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی۔

ب. ہلیم باردار یہ  $\text{He}^+$  کی تیغ پر مقداری تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں کیفی تجزیہ کریں۔ (الف) اگر الیکٹران یکساں بوزون ہوتے۔ (ب) اگر الیکٹران متابل ممیز ہوتے۔ جبکہ ان کی کیست اور بار نہ ہوتا۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی  $\frac{1}{2}$  ہے اور ان کی تنظیم چکر یکتا اور سہت ہے۔

سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات 30.5 میں دی گئی حال  $\Psi_0$  کیلئے  $\left(\frac{1}{|r_1 - r_2|}\right)$  کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کری محمد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو  $r_1$  پر رکھتے ہوئے تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}. \quad (۵.۲۹)$$

## باب ۵: متماثل ذرات

ہو۔ پہلے  $d^3r_2$  کا مکمل حل کریں۔ زاویہ  $\theta_2$  کے لحاظ سے مکمل آسان ہے۔ بس اتنا یاد رکھیں کہ آپ کو مثبت جزو دلینا ہوگا۔ آپ کو  $r_2$  مکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا۔ پہلا صفر سے  $r_1$  تک اور دوسرا  $r_1$  سے  $\infty$  تک۔ جواب:  $-\frac{5}{4a}$

ب۔ جزو الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہلیم کی زمینی حال میں الیکٹران کا باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔ اور اس کو  $E_0$  مساوات 31.5 کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمینہ حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔

## ۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹران تنظیم اسی طرح جوڑ کر حاصل کی جاتی ہے۔ پہلی تخمینہ کی حد میں اگلی باہمی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے بار  $Z_e$  کے مرکزہ کے کولمب محفہ میں یک ذرہ ہائڈروجن حالات  $(n, l, m)$  جنہیں مدار چے کہتے ہیں کہ انفرادی الیکٹران ممکن ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان یا فٹبل ممیز ذرات ہوتے تب یہ زمینی حال  $(1, 0, 0)$  گر جاتے اور کیا اتنی دلچسپ نہ ہوتی۔ حقیقت میں الیکٹران یکساں فضا میں ان کے جن پر پولی اصول منات لاگو ہوتا ہے لحاظ کسی ایک مدار چے میں صرف دو الیکٹران رہ سکتے ہیں ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان بلکہ یہ کہنا زیادہ درست کہ یکتا تنظیم میں الیکٹران رہ سکتے ہیں۔ کسی بھی  $n$  کی قیمت کے لیے  $n^2$  ہائڈروجنی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی توانائی  $E_n$  ہوگی یوں  $n = 1$  خول میں دو الیکٹرانوں کی جگہ  $n = 2$  خول میں آٹھ  $n = 3$  میں اٹھارہ اور  $n$  ویں خول میں  $2n^2$  الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی۔ کئی طور پر بات کرتے ہوئے دوری جدول کے آٹلی صف انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے اگر شے پوری کہانی نہیں ہے چونکہ ایسا ہونے کی صورت میں انکی لمبائیاں 2, 8, 18, 32, 50, وغیرہ ہوتی نا کہ 2, 8, 8, 18, 18, وغیرہ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹرانوں کی باہمی توانائی دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے۔

ہیلیم کا  $n = 1$  خول مکمل طور پر بھرا ہوگا لحاظ آگلا جوہر لیتیم  $Z = 3$  کو ایک الیکٹران  $n = 2$  خول میں رکھنا ہوگا۔ اب  $n = 2$  کی صورت میں  $l = 0$  یا  $l = 1$  ہو سکتا ہے۔ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ چونکہ جوہر توانائی  $n$  پر منحصر ہوتی ہے نا کہ  $l$  پر لحاظ الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک دوسرے جیسی ہوگی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا الیکٹران کی توانائی دفن  $l$  کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیارے حرکت الیکٹران کو بے رونی روح دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا مرکزہ سے دور ہوتا ہے اتنا ہی یہ مرکزہ بہتر چھپاتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا  $Z_e$  نظر آتا ہے جب کہ بے رونی الیکٹران کو مشکل سے  $e$  سے زیادہ موثر نظر آتا ہے۔ یوں کسی بھی ایک ہول میں کم سے کم توانائی کا حال یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران  $l = 0$  ہوگا۔ اور بڑھتے  $l$  کے ساتھ توانائی بڑھے گی اس طرح تہیم میں تیسرا الیکٹران مدار چے  $(2, 0, 0)$  کا مقید ہوگا۔ آگلا جوہر بیئرلیم جس کا  $Z = 4$  ہے اسی حال میں ہوگا لیکن اس کا چکر مخالف رخ ہوگا لیکن بوران  $Z = 5$  کو  $l = 1$  استعمال کرنا ہوگا۔ اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون

$Z = 10$  تک پہنچتے ہیں جہاں  $n = 2$  ہول مکمل بھرا ہوگا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر  $n = 3$  ہول کو بھرنے شروع کرتے ہیں۔ آغاز میں دو جوہر سوڈیم اور میگنیشیم ہیں جنکا  $l = 0$  ہے اور اس کے بعد الیمینیم سے آرگان تک چھ ایسے جوہر ہیں جن کے لیے  $L = 1$  ہوگا۔ آرگان کے بعد ہم توقع کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے  $n = 3$  اور  $l = 2$  ہوگا البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران سرکزا کو اتنی خوش اسلوبی کے ساتھ پردہ کرتے ہیں کہ یہ اگلے ہول کو بھی ڈنگتا ہے لہذا پوٹیشیم ( $Z = 19$ ) اور کیلشیم ( $Z = 20$ )، ( $l = 2$ )، ( $n = 3$ ) کی بجائے ( $L = 0$ )، ( $n = 4$ ) منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم نیچے اتر کر سیکنڈیم سے زنک تک کے جوہر اٹھاتے ہیں جن کے لیے  $n = 3$  اور  $l = 2$  ہوگا۔ اس کے بعد گلیمیم سے کرپٹان تک  $l = 1$  اور  $n = 4$  ہوگا جس کے آخر میں ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف  $n = 5$  کو چھلانگ لگاتے ہیں اور بعد میں واپس اتر کر  $n = 4$  ہول کے۔ وہ مدار جے جن کے لیے  $l = 2$  اور  $l = 3$  ہوں پر کرتے ہیں۔ یہاں جوہری حالات کی قدیم نام جنہیں تمام ماہر یکیات اور تبیات کے زیادہ تر ماہرین استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہوگا اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے تیز پیمائی کاروں کو معلوم ہوگا کہ  $l = 0$  کو  $s$  کہتے ہیں  $l = 1$  کو  $p$  کہتے ہیں،  $l = 2$  کو  $d$  کہتے ہیں اور  $l = 3$  کو  $f$  کہتے ہیں۔ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راس پر آگے اور انہوں نے عسرونفہی کے تحت ( $g, h, i, k, l$ ) وغیرہ نام دینا شروع کیا۔ انہوں نے ہماری ناک میں دم کرنے کی خاطر زکوٰۃ نظر انداز کیا۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو ( $n, l$ ) کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں عدد  $n$  حال کو اور حرف  $l$  مدار جی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ کو انٹیم عدد  $m$  کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نما میں حال کے مقین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تنظیم

$$(5s)^2(2s)^2(2p)^2 \quad (5.30)$$

کہتی ہے کہ مدار جب  $(1, 0, 0)$  میں 2 الیکٹران، مدار جب  $(2, 0, 0)$  میں 2 جبکہ مدار جے  $(2, 1, 1)$ ،  $(2, 1, 0)$  اور  $(2, 1, -1)$  کے کسی ملاپ میں 2 الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حل ہے۔ اس مثال میں 2 الیکٹران ایسے پائے جاتے ہیں جن کے مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد ایک ہے لہذا مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد ایک ہے لہذا کل مدار جی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم نمبر  $l$  کسی ایک ذرہ کی جبکہ  $L$  کل قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک، دو یا صفر ہو سکتا ہے۔ جبکہ  $(1s)$  کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یکساں حال میں بندھے ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا۔ یہی کچھ  $(2s)$  کے دو الیکٹرانوں کے لئے بھی ہوگا لیکن  $(2p)$  کے دو الیکٹران یا تو یکساں اور یا سہت نظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کو انٹیم عدد  $s$  کل کو ظاہر کرنے کے لئے بڑا حرف استعمال ہوگا۔ جس کی قیمت ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے میزان کل مدار جی جمع چکر  $J$  کی قیمت تین، دو، ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو ہن قواعد (سوال 1.5 دیکھیں) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$L_J^{2S+1} \quad (5.31)$$

جہاں  $J$  اور  $S$  اعداد جبکہ  $L$  ایک حرف ہوگا اور چونکہ ہم کل کی بات کر رہے ہیں لہذا یہ بڑا حرف ہوگا کاربن کا زمینی حال 3D ہے جس کا کل چکر ایک ہے جس کی بنا 3 لکھا گیا ہے کل مدار جی زاویائی معیار حرکت ایک ہے لہذا 1 لکھا گیا ہے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے لہذا صفر لکھا گیا ہے۔ جدول 1.5 میں دوری جدول کے ابتدائی چار صفحات کے لئے انفرادی تنظیم اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات 34.5 کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔

سوال ۵.۱۲: جبز الف: دوری جدول کے ابتدائی دو صفوں کے لئے نیوون تک مساوات 33.5 کی روپ میں تنظیم الیکٹران پیش کر کے ان کی تصدیق جدول 1.5 کے ساتھ کریں۔  
جبز ب: ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات 34.5 کی روپ میں ان کا مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳: جبز الف: ہن کا پہلا متعادلہ کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسا ہونے کے لیے صورت میں وہ حال جس کا کل چپکری زیادہ سے زیادہ ہوگی کم سے کم توانائی ہوگی۔ ہیلیم کے ہجہان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔  
جبز ب: ہن کا دوسرا متعادلہ کہتا ہے کہ کسی ایک چپکری صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو۔ وہ حال جس کی مدار جی زاویائی معیار حرکت  $L_1$  زیادہ سے زیادہ ہوگی توانائی کم سے کم ہوگی۔ کاربن کے لئے  $L=2$  کیوں نہیں ہوگا؟ اشارہ سیزھی کا بالائی سر ( $M_L = L$ ) تشاکلی ہے۔

جبز ج: ہن کا تیسرا متعادلہ کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول  $(n, l)$  نصف سے زیادہ بھرا نا ہو تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے  $J = |L - S|$  ہوگا۔ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب  $J = L + S$  کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال 12.5 ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کرے۔  
جبز د: قواعد ہن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چپکری حال کے ساتھ خلاف تشاکلی موازنہ حال کے ساتھ خلاف تشاکلی چپکری حال استعمال ہوگا۔ سوال 12.5 ب میں کاربن اور نائٹروجن میں درپیش مشکلات سے چھٹکارا حاصل کریں۔ اشارہ کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر سیزھی کے بالائی سر سے آغاز کریں۔

سوال ۵.۱۴: دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر چار ساٹھ ڈسپروسیئم کا زمینی حال  $I_8$  ہے۔ اس کے کل چپکر کل مدار چے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کو انٹم کل حالات کیا ہوں گے۔ ڈسپروسیئم کے الیکٹران کی تنظیم کا حث کہ کیا ہو سکتا ہے۔

### ۵.۳ ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈیلے مقبدر رفتی الیکٹرانوں میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص موروثی مرکز کے کولوم میدان سے آزاد، تمام متشکل حال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرنا شروع کرتے ہیں اس حصہ میں ہم تو بہت سادے نمونوں پر غور کرے گے۔ پہلا نمونہ الیکٹرون گیس نظریہ ہے جو سمر فیل نے پیش کیا اس نمونے میں سرحد کے اثرات کے علاوہ باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور الیکٹرانوں کو لامتناہی چپکوری کواں کے تین آبادی مشال کی طرح ڈبے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے۔ دوسرا نمونہ بلخ نظریہ کہایا جاتا ہے الیکٹرون کی بھی دفاع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جیتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے، یہ نمونہ ٹھوس اجسام کی کو انٹم نظریہ کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں۔ اس کے باوجود یہ پولی حصولات کا جوت میں گہرا کردار اور موصل، غنیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتی ہے۔

## ۵.۳.۱ آزاد الیکٹرون گیس

، فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اصلا  $l_x, l_y, l_z$  اور  $l_z$  ہے اور فرض کرے کے اس کے اندر الیکٹرون پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہو سکی ماسوائے نا قابل گزر دیواروں کے۔

$$(۵.۳۲) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

شرودنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi$$

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z$$

اور

$$E = E_x + E_y + E_z$$

درج ذیل لیتے ہوئے،

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۵.۳۳) \quad X(x) = A_x \sin(K_x x) + B_x \cos(K_x x) \quad Y(y) = A_y \sin(K_y y) + B_y \cos(K_y y) \quad Z(z) = A_z \sin(K_z z) -$$

سرحدی شرائط کے تحت

$$X(0) = Y(0) = Z(0), B_x = B_y = B_z = 0, X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$k_x l_x = n_x \pi, k_y l_y = n_y \pi, k_z l_z = n_z \pi$$

جہاں  $n$  ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

$$n_x = 1, 2, 3, \dots \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

معمول شدہ تفرقات موج درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right)$$

اور احزاب ذاتی توانائیاں درج ذیل ہو گی۔

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

جہاں سمتیاں موج،  $k \equiv (k_x, k_y, k_z)$  کی مطلق قیمت  $K$  ہو گی۔ اگر آپ ایک تین آبادی فضا کا تصویر کرے جس کے محور  $k_x = (\pi/l_x)(2\pi/l_x)(3\pi/l_x) \dots$  اور  $k_y = (\pi/l_y)(2\pi/l_y)(3\pi/l_y) \dots$  اور  $k_z = (\pi/l_z)(2\pi/l_z)(3\pi/l_z) \dots$  ہوتے ہوں تب ہر انفرادی نقطہ بتکاتے ایک منفرد ایک ذرا سا کن حال دیگا۔

اس حال میں ہر ایک خانہ لہذا ہر ایک حال کی فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم ہے۔

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں  $N$  جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصے کے  $q$  آزاد الیکٹرون دیتا ہو۔ عملاً کسی بھی کلاں بینی جامت کے چیز کے لیے  $N$  کی قیمت بہت بڑی ہو گی جو ایوگاڈرو عدد میں گنی جائے گی جبکہ  $q$  ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہو گا۔ اگر الیکٹرون بوزان یا متابل ممیز ذرات ہوتے تب وہ زمینی حال  $\psi_{111}$  میں سکونیت اختیار کرتے حقیقتاً الیکٹروں یکساں فضا میں جن پر پالی اصول مناسط کا اطلاق ہوتا ہے لحاظ کسی بھی حل کی ممکن صرف دو الیکٹرون ہو سکتے ہیں۔ یہ  $k$  فضا میں ایک کرہ کا ایک ٹکڑا  $k_F$  تک بھرے گی جس کو اس حقیقت سے تعین کیا جاسکتا ہے کہ الیکٹران کی ہر ایک جوڑی کو  $\frac{\pi^3}{V}$  حجم درکار ہو گا مساوات 5.40:

$$\frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left( \frac{\pi^3}{V} \right)$$

یوں

$$(5.33) \quad k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}}$$

جہاں

$$(5.35) \quad \rho \equiv \frac{Nq}{V}$$

آزاد الیکٹران کثافت ہے (آزاد حجم میں الیکٹرانوں کی تعداد)۔

$k$  فضا میں ممکن اور غیر ممکن حالات کی سرحد کو فرمی سطح کہتے ہیں (اسی کی بنا زیر نوشت میں  $F$  لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقی توانائی کو فرمی توانائی  $E_F$  کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$(5.36) \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$

الیکٹرون گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے۔ ایک خول جس کی موٹائی  $dk$  شکل 5.4 ہو کا حجم

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2)dk$$

لاحظہ اس خول میں الیکٹرون حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی

$$\frac{2[(\frac{1}{2})\pi k^2 dk]}{\pi^3} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  مساوات 5.39 لحاظ خول کی توانائی

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk \quad (5.37)$$

اور کل توانائی درج ذیل ہوگی

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m} V^{\frac{2}{3}} \quad (5.38)$$

کوانٹم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا کہ گیس میں اندرونی حرارتی توانائی  $U$  کا ہوتا ہے۔ بل خصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں  $dV$  کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کمی رونما ہوگی

$$dE_{tot} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m} V^{\frac{5}{3}} dV = -\frac{2}{3} E_{tot} \frac{dV}{V}$$

جو بیرون پر کوانٹم دباؤ  $P$  کا یہ ہوا کم  $dW = PdV$  نظر آتا ہے

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{tot}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} \quad (5.39)$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس شہ اندر کی طرف منہدن کیوں نہیں ہو جاتا۔ ایک اندرونی کوانٹم میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتی ہے جس کا الیکٹرون کے باہمی دفع جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں یا حرارتی حرکت جس کو ہم خارج کر چکے ہیں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے۔ بلکہ جو یکساں فرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات انحطاطی دباؤ کہتے ہیں اگرچہ منطقی دباؤ بہتر اصطلاح ہوگی۔

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹرون کی اوسط توانائی  $\frac{E_{tot}}{Nq}$  کو فرمی توانائی کے قصور کی صورت میں لکھیں۔

جواب:  $\frac{3}{5} E_F$

سوال ۵.۱۶: تناسب کی کثافت  $8.96 \text{ g cm}^{-3}$  ہے جبکہ اس کا جبری وزن  $63.5 \text{ g mol}^{-1}$  ہے۔

(الف) مساوات 5.43 استعمال کرتے ہوئے  $q = 1$  لیتے ہوئے تانبے کی فیری توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹرون ولٹ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) الیکٹران کی مطلبی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ اشارہ:  $(\frac{1}{2})mv^2 = E_F$  لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹرون کو غیر اضافی تصور کرنا خطرے سے باہر ہوگا؟

(ج) تانبے کے لیے کس درجہ حرارت پر امتیازی حراری توانائی  $k_B T$  جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل اور  $T$  کیلون حرارت ہے فیری توانائی کے برابر ہوگا؟ تبصرہ: اس کو فیری حرارت کہتے ہیں۔ جب تک حقیقی حرارت فیری حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو ٹھنڈہ تصور کیا جاسکتا ہے اور اس میں الیکٹرون خپلے ترین متبادل پہنچ حال میں ہوں گے۔ چونکہ تانبے 1356 K پر گستا ہے لحاظ سے ٹھوس تانبہ ہر صورت ٹھنڈہ ہوگا۔

(د) الیکٹران گیس نمونہ میں تانبے کے لیے اخطائی دباؤ مساوات 5.46 کا حساب لگائیں۔

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نصبتی اضافے کے تناسب کو جسم مقیاس کہتے ہیں۔

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

دیکھیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں  $P = \frac{5}{3} P$  ہوگا اور سوال (د) 5.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبہ کے لیے جیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربے سے حاصل قیمت  $13.4 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$  ہے مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں چونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ ایک حیران کن نتیجہ ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا متریب ہے۔

## ۵.۳.۲ سخت پٹی

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم وناصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کا رویہ نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل و صورت مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جس سے یک بُعدی ڈیراک کنگھی کہتے ہیں اور جو ایک جتنے برابر وناصلوں پر نوکیلی ڈیٹا وناصلوں پر مشتمل ہوتا ہے شکل 5.5۔ لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت سادہ بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل وناصلہ  $a$  کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

(۵.۴۰)

$$V(x+a) = V(x)$$

مسئلہ بلوچ کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر،

(۵.۴۱)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$



کے حل سے مراد وہ تفاعل ایسا جاسکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

$$\psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x) \quad (5.۴۲)$$

جہاں  $K$  ایک مستقل ہے۔ یہاں مستقل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو  $x$  کا تابع نہیں ہے اگرچہ یہ  $E$  کا تابع ہو سکتا ہے۔

ثبوت: مان لیں  $D$  کے ایک ہٹاؤ عامل ہے:

$$Df(x) = f(x+a) \quad (5.۴۳)$$

دوری مخفیہ مساوات 5.47 کی صورت میں  $D$  ہیلٹنی کا مقلوبی ہوگا:

$$[D, H] = 0 \quad (5.۴۴)$$

لاحظہ ہم  $H$  کے ایسے امتیازی تفاعلات چھنڈ سکتے ہیں جو بیک وقت  $D$  کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں:  $D\psi = \lambda\psi$  یا

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \quad (5.۴۵)$$

یہاں  $\lambda$  کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اگر یہ صفر ہو تب چونکہ مساوات 5.52 تمام  $x$  کے لیے مطمئن ہوگا لحاظ ہمیں  $0 = \psi(x)$  ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ کسی بھی غیر مخلوط عدد کی طرح اس کو قوت نہائی روپ میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\lambda = e^{iKa} \quad (5.۴۶)$$

جہاں  $K$  ایک مستقل ہوگا۔

اس مقام پر مساوات 5.53 امتیازی و تدور  $\lambda$  لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ  $K$  حقیقی ہے اور یوں اگرچہ  $\psi(x)$  از خود غیر دوری ہے  $|\psi(x)|^2$  جو درج ذیل ہے۔

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (5.۴۷)$$

دوری ہوگا جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی حقیقی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لیے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو  $V(x)$  کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوغ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاہین سطح کے قلم میں کئی ایوگاڈرو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ تھوس جسم کی سطح سے بہت دور الیکٹران پر سطحی اثر قابل نظر انداز ہوگا۔ ہم مسئلہ بلوغ پر پورا اترنے کی خاطر  $x$  کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کی دم بہت بڑی تعداد  $N \approx 10^{23}$  دوری فاصلوں کے بعد اس کے سر پر پایا جاتا ہو باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط مسلط کرتے ہیں

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \quad (5.۴۸)$$

یوں مساوات 5.49 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$e^{iNKa}\psi(x) = \psi(x)$$

لحاظ 1 یا  $NKa = 2\pi n$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.49)$$

یہاں  $K$  لازماً حقیقی ہوگا مسئلہ بلوخ کی عبادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ مثلاً  $(0 \leq x < a)$  کے وقفہ پر مسئلہ شروع کرنا ہوگا مساوات 5.49 کی بار بار اطلاق سے ہر جگہ کے حالات حاصل ہوں گے۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ درحقیقت نوکیلی ڈیلٹا تعاملات ڈیراک کنگھی پر مشتمل ہو:

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \quad (5.50)$$

شکل 5.5 میں آپ تصور کریں گے کہ محور  $x$  کو یوں دائروی شکل میں گھومایا گیا ہے کہ  $N$  وین نوکیلی تعامل درحقیقت نقطہ  $-a$  پر پایا جاتا ہے۔ اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے لیکن یاد رہے ہمیں دوریرت سے دلچسپی ہے۔ کلاسیکی طور پر دہراتا ہوا منطقی مخفیہ استعمال کیا گیا جواب بھی بہت سے مسنغین کا پسندیدہ مخفیہ ہے خط  $(0 < x < a)$  میں مخفیہ صفر ہوگا لحاظ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi,$$

ہوگا۔

جہاں ہمیشہ کہ طرح درج ذیل ہوگا

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (5.51)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), (0 < x < a). \quad (5.52)$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مباد کے بالکل بائیں ہاتھ پہلے خانہ میں تعامل موج درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = e^{-iKa} [A \sin k(x+a) + B \cos k(x+a)], (-a < x < 0). \quad (5.53)$$

نقطہ  $x = 0$  پر  $\psi$  لازماً استمراری ہوگا لحاظ

$$(۵.۵۴) \quad B = e^{-iKa} [A \sin(ka) + B \cos(ka)];$$

اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفاعل کی زور کے برابر است۔ متناسب عدم استمرار پائے جائے گی مساوات 2.125 جس میں  $\alpha$  کی علامت الٹ ہوگی چونکہ یہاں کنواں کی بجائے نوکیلی تفاعل پایا جاتا ہے

$$(۵.۵۵) \quad kA - e^{-iKa} k[A \cos(ka) - B \sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} B$$

مساوات 5.61 کو  $A \sin(ka)$  کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۵.۵۶) \quad A \sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)] B$$

اس کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہوئے اور  $k_B$  کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa} \cos(ka)] + e^{-iKa} \sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

حاصل ہوگا۔

جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے

$$(۵.۵۷) \quad \cos(ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

یہ ایک بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرڈنگ پنی مخفیہ ہاشیہ 18 دیکھیں کے لیے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہوگا لیکن جو خود حوالہ ہم دیکھنے حبار ہے ہیں وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

مساوات 5.64 کی مسکنات قیمتیں لحاظ اجبازتی توانائیاں تعین کرتی ہیں۔ علامت کو سادہ بنانے کی نقطہ نظر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۵.۵۸) \quad z \equiv ka, \text{ and } \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

جس سے مساوات 5.64 کا دائیاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(۵.۵۹) \quad f(z) \equiv \cos(z) + \beta \frac{\sin(z)}{z}$$

مستقل  $\beta$  بعدی ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی زور کی ناپ ہے شکل 5.6 میں میں نے  $\beta = 10$  کے لیے  $f(z)$  کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ  $f(z)$  ساتھ  $(-1, +1)$  سے باہر بھٹکتا ہے اور چونکہ  $|\cos(Ka)|$  کی قیمت کسی صورت ایک سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے لحاظ ایسی خطوں میں مساوات 5.64 کا حل نہیں

پایا جائے گا۔ یہ درز ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہے اسکے بیچ احبازتی توانائیوں کی پٹیاں پائی جاتی ہیں مساوات 5.56 کے تحت  $Ka = \frac{2\pi n}{N}$  ہے جہاں  $N$  ایک بہت بڑا عدد ہے لحاظ  $n$  کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی احبازتی ہوگی۔ آپ تصور میں شکل 5.6 پر  $\cos(\frac{2\pi n}{N})$  قیمت کے منسلکوں پر  $(n = 0) + 1$  سے لے کر نیچے  $(n = \frac{N}{2}) - 1$  تک اور واپس تقریباً  $(n = N - 1) + 1$  تک جہاں بلوغت جزو ضربی  $e^{iKa}$  دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لحاظ  $n$  کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حاصل حاصل نہیں ہوگا لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ان لکیریوں میں ہر ایک کا  $f(z)$  کے ساتھ تقاطع ایک احبازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں  $N$  حالات پائے جاتے ہیں جو ایک دوسرے کے اتنے فطریہ ہیں کہ کسی بھی نقطہ نظر سے انہیں ایک مسلسل خط تصور کیا جاسکتا ہے شکل 5.7۔

ہم نے ابھی تک اپنے مخفیہ میں ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں  $Nq$  الیکٹران ہوں گے جہاں ہر ایک جوہر  $q$  تعداد کے آزاد الیکٹران مہر کرے گا۔ پالی اصول مناسبت کے بن صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے ممکن ہو سکتے ہیں۔ یوں  $q = 1$  کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے اگر  $q = 2$  ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل کریں گے اگر  $q = 3$  ہو یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے وغیرہ وغیرہ۔ تین ابعاد میں اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے لیکن احبازتی پٹیاں جسے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں تب بھی ہوگا۔ دوری مخفیہ کی نشانی بھی پٹی ہے۔

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو ممنوع خط سے گزرتے ہوئے اگلی پٹی تک چھلانگ کے لیے ایک الیکٹران کو نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہوگی ایسا مادہ برقی طور پر غنیر مویش ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری ہوئی نہیں ہے تب ایک الیکٹران کو بہت معمولی توانائی درکار ہوگی کہ وہ نیچان ہو سکے اس طرح کا مادہ عموماً مویش ہوگا۔ ایک غنیر مویش میں بڑے یا کم  $q$  کے چند جوہر کی ملاوٹ سے اگلی بلند پٹی میں چند اضافی الیکٹران رکھ دیئے جاتے ہیں پہلے سے مکمل پٹی میں خول پیدا کیئے جاتے ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے اور ایسے اشیاء نیم مویش کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً بہت اچھا مویش ہونا چاہیئے تھا چونکہ اسکے احبازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ منرق صرف نظریہ پٹی کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

(الف) مساوات 5.59 اور مساوات 5.63 استعمال کرتے ہوئے دیکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تقاطع عمل مخفیہ میں ایک ذرے کی تقاطع موج درج ذیل روپ میں لکھی جاسکتی ہے

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa} \sin k(a - x)], (0 \leq x \leq a).$$

معمولاً  $C$  تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(ب) البتہ پٹی کے بالائی سر پر جہاں  $z = \pi a$  کا عدد صحیح مضرب ہوگا شکل 5.6 (الف) سے  $\psi(x) = 0$  حاصل ہوگا ایسی صورت میں درست تقاطع عمل موج تلاش کریں دیکھیں گے کہ ہر ایک ڈیلٹا تقاطع عمل پر  $\psi$  کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی احبازتی پٹی کے نچلے نقطہ پر  $10 = \beta$  کی صورت میں توانائی کی قیمت تین با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ  $1 \text{ eV} = \frac{\alpha}{a}$  ہوگا۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیٹا تفاعل سولن کے بجائے ڈیٹا تفاعل کنواں پر غور کر رہے ہیں یعنی مساوات 5.57 میں  $\alpha$  کی علامت تبدیل کریں۔ ایسی صورت میں شکل 5.6 اور 5.7 کی طرح کے شکل بنائیں۔ مثبت توانائی حلوں کے لیے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے بس مساوات 5.66 میں موضوع تبدیلیاں لائیں لیکن منفی توانائی حلوں کے لیے آپ کو کام کرنا ہوگا اور انہیں ترمیم پر شامل کرنا مت بھولیے گا جو  $z$  - تک وسیع ہوگا۔ پہلی احبازتی پٹی میں اب کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دیکھائیں کہ مساوات 5.64 میں حاصل زیادہ تر توانائیاں دوہری اخطا طئی ہے۔ کن صورتوں میں ایسا نہیں ہے؟ اشارہ:  $(N = 1, 2, 3, 4, \dots)$  لیتے ہوئے دیکھیے گا کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں  $\cos(Ka)$  کی کیا ممکنات تھیں ہوں گی؟

## ۵.۴ کوانٹم شمارياتی ميکانيات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم احبازتی توانائی تنظیم کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کے بنا ہیجانی حالات ابھرنے شروع ہونگے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر  $T$  درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد  $N$  کے ذرات پائے جاتے ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی  $E_j$  ہوگی دیہان رہے کہ اس احتمال کا کوانٹم عدم تعین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بلکہ یہی سوال کلاسیکی شمارياتی ميکانيات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لیے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہوگی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہوگا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھ سکیں چاہے یہ قابل تعین ہویا نہ ہوں۔

شمارياتی ميکانيات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک حسی کل توانائی  $E$  ہو ایک جتنا معتدل ہوگا۔ بلا واسطہ حراری حرکتوں کی بنا مستقل طور پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرے ذرہ ایک روپ حرکی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہوگی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقا توانائی کی بنا کل مقررہ ہوگا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی لگاتار نئی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے قابل ہے درجہ حرارت  $T$  حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹم ميکانيات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لحاظ یہ کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہوگا کہ یہ ذرات قابل میز، یکساں بوزان یا یکساں فرمیون ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لحاظ میں ایک انتہائی سادہ امثال سے شروع کروں گا تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

## ۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چکوروں کا حصہ 2.2 میں کیت  $m$  کے صرف تین باہم غیر متماثل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہوگی ماسوائے 2.27 دیکھیں

$$(5.۶۰) \quad E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

جہاں  $n_A, n_B$  اور  $n_C$  مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ  $E = 363 \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)$  یعنی درج ذیل

$$(5.۶۱) \quad n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363.$$

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیسرے ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہوگا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیسرہ اور ایک پانچ جو تین مرتب اجتماعات میں ہوگا ایک عدد آٹیس اور دو ایک یہاں تین مرتب اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک ساٹھ اور ایک پانچ چھ مرتب اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں  $n_A, n_B, n_C$  درج ذیل میں سے ایک ہوگا:

$$(11, 11, 11)$$

$$(13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13)$$

$$(1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1)$$

$$(5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5).$$

اگر یہ ذرات متماثل میسز ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کو انم حال کو ظاہر کرے گا اور شماراتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حرارتی توازن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کون سا ذرہ کس ایک ذرہ حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال  $\psi_n$  کی تعداد مکین  $N_n$ ۔ ہم اس دن ذرہ حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو تنظیم کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال  $\psi_{11}$  میں ہوں تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۲) \quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

یعنی  $N_{11} = 3$  باقی تمام صفر اگر دو حال  $\psi_{13}$  میں اور ایک  $\psi_5$  میں ہو تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۳) \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, \dots)$$

یعنی  $N_5 = 1, N_{13} = 2$  باقی تمام صفر اگر دو حال  $\psi_1$  میں ایک  $\psi_{19}$  میں ہو تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(5.۶۴) \quad (2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

یعنی  $N_1 = 2, N_{19} = 1$  باقی تمام صفر اور اگر ایک ذرہ  $\psi_5$  میں ایک  $\psi_7$  میں اور ایک  $\psi_{17}$  میں تب تنظیم درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \quad (5.25)$$

یعنی باقی تمام صفر،  $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$  ان تمام میں آخری تنظیم زیادہ سے زیادہ محتمل ہوگی چونکہ اسکوچھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجزائی توانائی  $E_n$  حاصل کرنے کا احتمال  $P_n$  کب ہوگا؟ توانائی  $E_1$  صرف اس صورت حاصل ہوگا جب ذرہ تیسری تنظیم مساوات 5.71 میں ہو اس تنظیم میں نظام ہونے کا اتفاق تیسرہ میں سے تین ہے اور اس تنظیم میں  $E_1$  کے حصول کا احتمال  $\frac{2}{13}$  لحاظ  $P_1 = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$  آپ  $E_5$  کو تنظیم دو مساوات 5.70 تیسرہ میں سے تین کا امکان جس کا احتمال  $\frac{1}{3}$  یا تنظیم چار مساوات 5.72 تیسرہ میں سے چھ امکان اور احتمال  $\frac{1}{3}$  لحاظ  $P_5 = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{13}$  آپ  $E_7$  کو صرف چارے حاصل کر سکتے ہیں لحاظ  $P_7 = \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$  اسی طرح  $E_{11}$  صرف پہلی تنظیم سے مساوات 5.69 سے تیسرہ میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہوگا لحاظ  $P_{11} = \left(\frac{1}{13}\right)$  اسی طرح  $P_{19} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{13}$  اور  $P_{17} = \left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ ،  $P_{13} = \left(\frac{3}{13}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$  درج ذیل سے ہوگی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1.$$

یہ متبادل میسر ذرات کے لیے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات یکساں فرم میان ہوتے اپنی آسانی کے لیے چکر کھنڈ نظر انداز کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پہلی تین تنظیم جو دو یا اس سے بھی برائیں ذرات کھ ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں خراب حال امکان ہوں گے لحاظ چوتھی تنظیم میں صرف ایک حال ہوگا سوال 5.22 الف دیکھیں۔ یکساں فرم میوز کے لیے  $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$  ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات یکساں بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت ہر تنظیم میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22 ب دیکھیں۔ لحاظ  $P_7 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ،  $P_5 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ،  $P_1 = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$  اور  $P_{17} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ،  $P_{13} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ،  $P_{11} = \left(\frac{1}{4}\right) \times (1) = \frac{1}{4}$  اور  $P_{19} = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$  ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دیکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح مختصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورتحال سے جہاں  $N$  ایک بہت بڑا عدد ہوگا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھا۔ چونکہ  $N$  کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو متبادل میسر ذرات کے لیے اس مثال میں  $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$  ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شمار یا نقطہ نظر سے باقی

تمام امکانات کو رد کیا جاسکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم درحقیقت انکی زیادہ سے زیادہ ممکنہ تنظیم میں تقسیم ہے۔ اگر  $N = 3$  کے لیے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم متقابل میز ذرات کے لیے  $N = 3$  کی صورت میں اخذ کرتے  $\frac{1}{3}$   $P_5 = P_7 = P_{17}$  میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عمومیت دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال  $\psi_5$  میں ایک حال  $\psi_7$  میں ایک اور حال  $\psi_{17}$  میں ایک یکاں تین فرمیون کا مکمل حنائی تشکل تفعل موج  $\psi(x_A, x_B, x_C)$  تیار کریں۔

(ب) تین یکاں بوزان کے لیے مکمل تشکل تفعل موج  $\psi(x_A, x_B, x_C)$  درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (۱) تینوں حال  $\psi_{11}$  میں ہوں، (ب) اگر دو  $\psi_1$  اور ایک  $\psi_{19}$  میں ہو، (ج) اگر ایک حال  $\psi_5$  ایک حال  $\psi_7$  اور ایک حال  $\psi_{17}$  میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں یک بعدی حارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات ہیں جو حرارتی توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی  $E = (\frac{9}{2})\hbar\omega$  ہے۔

(الف) اگر یہ تمام ایک جیسی کیفیت کے متقابل مہر ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تنظیمات ہوں گے اور ہر ایک کے لیے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ ممکنہ تنظیم کیا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پیمائش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہوگا؟ سب سے زیادہ ممکنہ توانائی کیا ہوگی؟

(ب) یہی کچھ یکاں فرمیونز کے لیے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج) یہی کچھ یکاں بوزان کے لیے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

## ۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیے اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرات توانائیاں  $E_1, E_2, E_3, \dots$  اخطا  $d_1, d_2, d_3, \dots$  ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد  $d_n$  جن کی توانائیاں  $E_n$  ہیں فرض کریں ہم کیفیت  $m$  کے  $N$  ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تنظیم  $N_1, N_2, N_3, \dots$  میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں  $N_1$  ذرات کی توانائی  $E_1, E_2, \dots$  ذرات کی توانائی  $E_2$  وغیرہ وغیرہ ہے سوال ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تنظیم کی مطابقت کتنے منفرد حالات ہونگے اس کا جواب  $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$  اس بات پر منحصر ہوگا کہ آیا ذرات متقابل میز یکاں فرمیاں یا یکاں بوزان ہے لہذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات متقابل میز ہیں دستیاب  $N$  ذرات میں سے کتنے طریقوں سے  $N_1$  کو منتخب کر کے پہلا نوکرا میں رکھا جاسکتا ہے جواب: ششائی عددی سر  $N_1$  کو  $N$  میں سے منتخب کرتا



ہے

$$(۵.۶۶) \quad \binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

پہلا ذرہ  $N$  مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے جس کے بعد  $(N - 1)$  ذرات رہ جاتے ہیں لہذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے  $N - 1$  مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N - 1)(N - 2) \dots (N - N_1 + 1) = \frac{N!}{(N - N_1)!}$$

لیکن یہ  $N_1$  ذرات کے  $N_1!$  مختلف مراتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں ہے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہذا ہم  $N_1!$  سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی نوکرہ میں ان  $N_1$  ذرات کو کتنی مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے چونکہ پہلے نوکرہ میں  $d_1$  حالات ہیں لہذا ہر ایک ذرہ کو  $d_1$  مختلف طریقوں سے چنا جاسکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات  $(d_1)^{N_1}$  ہوں گے اس طرح ایک نوکرہ جس میں  $d_1$  منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی  $N$  میں سے  $N_1$  ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہوں گے

$$\frac{N! d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!}$$

دوسرے نوکرے میں صرف  $(N - N_1)$  ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۵.۶۷) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$$

$$(۵.۶۸) \quad = \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!} \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!} \frac{(N - N_1 - N_2)! d_3^{N_3}}{N_3!(N - N_1 - N_2 - N_3)!} \dots$$

$$(۵.۶۹) \quad = N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} d_3^{N_3} \dots}{N_1! N_2! N_3! \dots} = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

یہاں رک کر اس نتیجہ کی تصدیق کیجئے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں یہاں فرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے ضرورت خلاف تشاکلت کے تحت ایک مخصوص ایک ذرہ حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک  $N$  ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہذا  $N$  ویں نوکرہ میں

$N_n$  بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۵.۷۰) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر یکساں بوزان کے لیے یہ حاب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذرہ حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک  $N$  ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذرہ حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں  $N$  وی نوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم یکساں  $N_n$  ذرات کو  $d_n$  مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر مرتب اجتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر  $d_n = 5$  اور  $N_n = 7$  کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذرہ تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرا نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد  $N_n$  اور صلیبوں کی تعداد  $d_n - 1$  ہیں جو ان نقطوں کو  $d_n$  گروہوں میں خانہ بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں  $(N_n + d_n - 1)!$  مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک دوسرے جیسے ہیں اور ان کو  $N_n!$  مختلف مرتب اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں  $(d_n - 1)!$  مختلف مرتب اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں  $N$  وی نوکرے میں  $d_n$  ایک ذرہ حالات کو  $N_n$  ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقہ ہونگے

$$(۵.۷۱) \quad \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n}$$

جس کی بنا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۵.۷۲) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 75.574.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجیے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو انکراچی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتب اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ  $d$  نوکریوں میں  $N$  یکساں گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے

زیر نوشتہ میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام  $N$  کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باتھیوں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صرفاً  $N = 1$ ،  $N = 2$ ،  $N = 3$ ، اور  $N = 4$  کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

### ۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ ممکن تنظیم

ہراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک دوسرے جتنا ہوگا یوں زیادہ سے زیادہ ممکن تنظیم  $N_1, N_2, N_3, \dots$  وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تنظیم ہوگی جو

$$(۵.۴۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$$

اور

$$(۵.۴۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E$$

پر پورا اترے اور جس کی  $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط  $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ،  $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$  وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل  $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرانج مضرب کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$(۵.۴۵) \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

متعارف کر کے اس کے تمام تصرفات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$(۵.۴۶) \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0$$

موجودہ صورت میں  $Q$  کے بجائے  $Q$  کی لوگار تھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگار تھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہذا  $Q$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور  $\ln(Q)$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جائے گی لہذا ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$(۵.۴۷) \quad G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  لگرانج معضرب ہیں  $\alpha$  اور  $\beta$  کے لحاظ سے تصرفات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں  $N_n$  کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے

اگر زراعت و تابل میسز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دیگا لہذا برج ذیل ہوگا

(۵.۷۸)

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

ہم مطابقتی تعداد مکین  $N_n$  کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرنگ تخمین

(۵.۷۹)

$$\ln(z!) \approx z \ln(z) - z \quad z \ll 1$$

بروئے کار لاتے ہوئے برج ذیل لکھتے ہیں

(۵.۸۰)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n)] - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں برج ذیل ہوگا

(۵.۸۱)

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر  $N_n$  کے لیے حل کرتے ہوئے ہم متابل میز ذرات کی زیادہ سے زیادہ متحمل تعداد مکین حاصل کرتے ہیں

(۵.۸۲)

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

## باب ۶

# غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

## ۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

### ۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بعدی لامتناہی چکور کنواں) کے لئے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا مکمل سلسلہ

$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی افتدار  $E_n^0$  حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنواں کی تہہ میں ایک چھوٹا موٹا ڈال کر؛ شکل 6-1) ہم نے امتیازی تقاضات اور امتیازی افتدار حسابنا چاہیں گے:

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ نظریہ اضطراب کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$

باب ۶. غیر تانج وقت نظریہ اضطراب

جہاں  $H'$  اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں  $\lambda$  کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی اور  $H$  اصل ہیملٹنی ہوگا اس کے بعد ہم  $\psi_n$  اور  $E_n$  کو  $\lambda$  کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں  $n$  ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو  $E_n^1$  ظاہر کرتا ہے جبکہ  $n$  ویں امتیازی تفاعل میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو  $\psi_n^1$  ظاہر کرتا ہے اسی طرح  $E_n^2$  اور  $\psi_n^2$  دوم رتبہ تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H') [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots) [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا  $\lambda$  کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

مستمر رتبہ  $\lambda^0$  کی صورت میں اس سے  $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$  حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول ( $\lambda^1$ ) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

رتبہ دوم ( $\lambda^2$ ) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

وغیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے  $\lambda$  استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں)

۶.۱.۲ اول رتبہ نظریہ

مساوات ۶.۷ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی  $(\psi_n^0)^*$  سے ضرب دے کر مکمل لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم  $H^0$  ہر مثنیٰ ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید  $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$  کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی

مثال ۶.۱: لامتناہی چکوروکٹوں کی غیر مضطرب تفاعلات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کٹوں کی تہہ کو مستقل مقدار  $V_0$  اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل 2.6 توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں  $H' = V_0$  ہوگا لہذا  $n$  ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں  $E_n \cong E_n^0 + V_0$  ہوں گے جی ہاں تمام کی تمام  $V_0$  مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی اس کے برعکس کٹوں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل 3.6 ہوگا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح  $\frac{V_0}{2}$  اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مساوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں

$$(۶.۱۰) \quad (H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

یہاں کوئی یو پیسڈ لامتناہی چکوروکٹوں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے لہذا یہ  $\psi_n^1$  میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہذا کسی بھی تفاعل کی طرح  $\psi_n^1$  کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے

$$(۶.۱۱) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0$$

اگر  $psi_n^1 / 10.6$  مساوات کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل  $\alpha$  کے لیے  $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہذا ہم جزو  $\psi_n^0$  کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں کیا گیا عددی سر  $c_m^{(n)}$  تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جاننے ہوئے کہ غیر مضطرب شعروں کے مساوات مساوات 1.6 کو  $\psi_m^0$  مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا  $\psi_l^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر  $l = n$  ہو تب بائیں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر  $l \neq n$  ہو تو درج ذیل ہوگا

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$(۶.۱۲) \quad c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

لہذا اورج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۱۳) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو نسب ناکوئی ی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے  $m = n$  نہیں ہوتا) ہاں اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک دوسرے جتنی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نامہ میں صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں انخطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبی تصحیح  $E_n^1$  مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ



تفاعل موج کی اول رتبہ تصحیح  $\psi_n^1$  مساوات 13.6 دی جاتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرورت ناکچا ہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی  $E_n^0 + E_n^1$  اصل قیمت  $E_n$  کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چکور کنواں کے وسط میں  $\delta$  تفاعلی موڈاڈالتے ہیں

$$H' = \alpha \delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں  $\alpha$  ایک مستقل ہے

- احباباتی توانائیوں کی اول رتبہ تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت  $n$  کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہوں گی
- زمینی حال کی تصحیح  $\psi_1^1$  کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاؤ میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش  $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$  کی احباباتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں  $\omega = \sqrt{k/m}$  کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس پک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے  $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$

- (الف) نہیں توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کرے آپ نے کل یہ کو دوم رتبہ تک  $\epsilon$  کی طقتیں تسلسل میں پھیلائیں
- اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبہ اضطراب کا حساب لگائیں یہاں  $H'$  کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نا ضرورت اور نہ احبابات ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چکور کنواں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں  $V_0$  ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور  $a$  کنواں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

- پہلی قدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں
- اول رتبہ نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبہ نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

## ۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم  $\psi_n^0$  اور دور تبی مساوات مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم  $H^0$  کی ہر مشی پین کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا ساتھ ہی  $1 = \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$  ہوگا لہذا ہمارے پاس  $E_n^2$  کا درجہ ذیل کلیہ رہ جاتا ہے

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle \quad (۶.۱۴)$$

تاہم مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} m \neq n \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۵)$$

ہوگا جو دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاسل موج کی دوم رتبی تصحیح  $\psi_n^2$  توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔ سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح ( $E_n^2$ ) سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق  $n$  کیلئے  $2m(\alpha / \pi \hbar n)^2 -$  حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح  $E_n^2$  سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی محفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان ( $E$ ) چالو کرتے ہیں جس کی بنا محفی توانائی میں  $H' = qEx$  متدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۱. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات  $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$  استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شرودنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

## ۶.۲ انخطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انخطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ مضطرب حالات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کی توانائیاں ایک دوسرے جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ  $c_a^{(b)}$  مساوات 12.6 اور  $E_a^2$  مساوات 15.6 بے فت بوڑھتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو  $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$  اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انخطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہو گا۔

### ۶.۲.۱ دو پڑتا انخطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  معمول شدہ ہیں۔

$$(۶.۱۶) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$(۶.۱۷) \quad \psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی  $H^0$  کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر  $E^0$  بھی وہی ہو گا

$$(۶.۱۸) \quad H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$

عام طور پر اضطراب ( $H'$ ) انخطاط کو ”توڑے“ (یا ”منوخ“ کرے) گا جیسے جیسے ہم  $\lambda$  کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی  $E^0$  دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گا شکل 4.6 مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے ایک خطی جوڑ میں ہو گا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات 9.6 کا حاب نہیں کر سکتے ہیں

باب ۶. غیر متابع وقت نظریہ اضطراب

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات 17.6 میں لکھتے ہیں جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  متبادل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروع کر

$$H\psi = E\psi \quad (۱.۱۹)$$

کو  $H = H^0 + \lambda H'$  اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots \quad (۱.۲۰)$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات 19.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح  $\lambda$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H^0 \psi^0 + \lambda (H' \psi^0 + H^0 \psi^1) + \dots = E^0 \psi^0 + \lambda (E^1 \psi^0 + E^0 \psi^1) + \dots$$

اب  $H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$  مساوات 18.6 کی بنا اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ  $\lambda^1$  رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$H^0 \psi^1 + H' \psi^0 = E^0 \psi^1 + E^1 \psi^0 \quad (۱.۲۱)$$

اس کا  $\psi_a^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

چونکہ  $H^0$  ہر مشی ہے لہذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \quad (۱.۲۲)$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا

$$W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b) \quad (۱.۲۳)$$

اسی طرح  $\psi_b^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \quad (۱.۲۴)$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام  $W$  معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے لحاظ سے  $H'$  کے ارکان متبادل ہیں مساوات 24.6 کو  $W_{ab}$  سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے  $\beta W_{ab}$  کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\alpha [W_{ab} W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \quad (۱.۲۵)$$

غیر صفر  $\alpha$  کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں  $E^1$  کی مساوات دیگی

$$(1.21) \quad (E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ جانتے ہوئے  $W_{ba} = W_{ab}^*$  ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(1.22) \quad E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[ W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right]$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو جذور دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر  $\alpha$  کی صورت میں کیا ہوگا ایسی صورت میں  $\beta = 1$  ہوگا لہذا مساوات 22.6 کے تحت  $W_{ab} = 0$  اور مساوات 24.6 کے تحت  $E^1 = W_{bb}$  ہوگا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 0$  کی صورت میں ہوگا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  پہلے سے موزوں خطی جوڑتھے کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جہاں پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۲.۱: فرض کریں  $A$  ایک ایسا ہر مشی عامل ہے جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ مقلوبی ہے اگر  $H^0$  کے انحطاطی امتیازی تفاعلات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  عامل  $A$  کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں جن کے منفرد امتیازی افتدار ہوں

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب  $W_{ab} = 0$  ہوگا لہذا  $\psi_b^0$  اور  $\psi_a^0$  نظریہ اضطراب میں متبادل استعمال موزوں حالات ہوں گے

ثبوت: ہم فرض کر چکے ہیں کہ  $[A, H'] = 0$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] | \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | AH' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A | \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A\psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' | \nu\psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب  $\mu \neq \nu$  ہے لہذا  $W_{ab} = 0$  ہوگا

سبق اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہوا ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کرنے کی کوشش کریں جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ مقلوبی ہو  $H^0$  اور  $A$  کے یکے وقت امتیازی تفاعلات کو اپنے غیر مضطرب حالات منتخب

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عمل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہوگا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

جہاں  $\alpha_{\pm}$  اور  $\beta_{\pm}$  کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

$$a. \langle \psi_+^0 | \psi_-^0 \rangle = 0 \text{ عسودی ہے}$$

$$b. \langle \psi_+^0 | H' | \psi_-^0 \rangle = 0$$

$$c. \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E^1 \text{ کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے اپنے آپ پر بندیک بعدی خطہ جس کی لمبائی  $L$  ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

a. دکھائیں کہ ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m} \left( \frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال  $n = 0$  کے علاوہ تمام حالات دہرا انخطاطی ہے

b. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں  $L \gg a$  ہو یہ  $x = 0$  پر مخفیہ میں معمولی چھکاوٹ پیدا کرتا گویا تار کو یہاں مروڑا گیا ہوں مساوات 27.6 استعمال کرتے ہوئے  $E_n$  کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ  $H'$  خطہ  $-a < x < a$  کے باہر تقریباً صفر ہے اور  $L \gg a$  ہے لہذا تکمیل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمیل کی حدود کو  $\pm L/2$  کی بجائے  $\pm \infty$  رکھیں

c. اس مسئلہ کے لئے  $\psi_n$  اور  $\psi_{-n}$  کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہوگی

د. ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ  $H^0$  اور  $A$  کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جبزونج میں استعمال کیے

## ۶.۲.۲ بلنڈرتبی انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جاسکتا ہے مساوات 22.6 اور 24.6 کو ہم دوبارہ تالیبی روپ میں لکھتے ہیں

$$(1.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ  $W$  و  $E^1$  و  $E^1$  کے امتیازی افتدار ہیں مساوات 26.6 اس و  $E^1$  کے امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ  $W$  کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم  $n$  پڑتا انخطاط کی صورت میں  $n \times n$  و  $E^1$

$$(1.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انخطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو و  $E^1$  کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر کے ہم و  $E^1$  حاصل کریں گے جو از خود و  $E^1$  ہو گا لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دو پڑتا انخطاط کو عمومیت دیتے ہوئے  $n$  پڑتا انخطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مشال ۶.۲: تین آبادی لامستناہی کعبی کنواں سوال 2.4 پر غور کریں

$$(1.30) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(1.31) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

جہاں  $n_x, n_y, n_z$  مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$(1.32) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

دھیان رہے کہ زمینی حال  $\psi_{111}$  غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$(۱.۳۳) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تیسرا انحطاطی ہیں

$$(۱.۳۴) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک دوسری جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جو ڈب کے ایک چوہتائی حصہ میں مخفیہ کو  $V_0$  مقدار بڑھاتا ہے شکل 5.6 زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتی ہے

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\ (۱.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی پہلے قدم میں ہم متالاب  $W$  تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلیل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\ &\quad \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \end{aligned}$$



تاہم  $z$  تکمل صفر ہوگا جیسا  $W_{ac}$  کے لیے بھی ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض درج ذیل ہوگا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہوگا جہاں  $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$  ہے

$$(۱.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

ماتر  $\mathbf{W}$  بلکہ  $4\mathbf{W}/V_0$  جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ۱.۵ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کے امتیازی امتداد درج ذیل ہوں گے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$

یوں  $\lambda$  کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۱.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 + \kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 - \kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں  $E_1^0$  مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی  $E_1^0$  تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے شکل 6.6 دیکھیں دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تصحیح مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی  $V_0/4$  ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

باب ۶. غیر تابَع وقت نظریہ اضطراب

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہونگے

(۶.۴۰)

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$

جہاں عددی سر (α, β, γ) وِتالِب W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں  $w = 1$  کے لیے  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$  جبکہ  $w = 1 \pm \kappa$  کے لیے  $\alpha = 0, \beta = \pm \gamma = 1/\sqrt{2}$  حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں پی کی ہیں۔ ہوں موزوں حالات درج ذیل ہونگے

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (۶.۴۱)$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنواں مساوات 30.6 میں نقطہ  $(a/4, a/2, 3a/4)$  پر ڈیلٹا تقابلی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنواں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انخطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابَع حالات پائے جاتے ہوں فرض کریں وِتالِبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں  $V_0$  ایک مستقل ہے اور  $\epsilon$  کوئی چھوٹا عدد ( $\epsilon \ll 1$ ) ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی ( $\epsilon = 0$ ) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. وِتالِب H کہ بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو  $\epsilon$  کی صورت میں دوم رتب تک طاقتمتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو  $H^0$  کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا حبزو-۱ کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی افتدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: مسین دعویٰ چکا ہوں کہ  $n$  پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح  $W$  کے امتیازی افتدار ہوں گے مسین نے دعویٰ کیا کہ یہ  $n = 2$  صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چپل کر درج ذیل سے آغاز کریں

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(ساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ ساوات 22.6 کے مثال کا مفہوم  $W$  کی امتیازی قدر مساوات لیا جاسکتا ہے۔

### ۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶.۴۲)$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولم مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم  $m$  کی بجائے تخفیف شدہ کیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور سپکرومدار ربط، کی بنیاد پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت  $\alpha^2$  گن کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۴۳)$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی  $\alpha$  گن چھوٹا لیمب انتفتال ہے جو بھسکی میدان کی کوانٹائزیشن سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے سچے مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

۱. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی  $mc^2$  کی صورت میں لکھیں

باب ۶. بغیر تابع وقت نظریہ اضطراب

ب۔  $\epsilon_0$  ،  $e$  ،  $\hbar$  اور  $c$  کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حنا الص بے بعدی بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی مستقالات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ حبزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نو بیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

### ۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا حبزو بظا ہر حرکی توانائی کو ظا ہر کرتا ہے

$$(۶.۴۴) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

جس میں باضابطہ متبادل  $(\hbar/i)\nabla^2 \rightarrow p$  پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا

$$(۶.۴۵) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$(۶.۴۶) \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

جہاں پہلا حبزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال عنصر جی نہیں ہے جبکہ دوسرا حبزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے ہمیں سختی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$(۶.۴۷) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

کی صورت میں  $T$  کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

ہوگا جس کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

غیراضافیتی حد  $p \ll mc$  کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد  $(p/mc)$  کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$T = mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 \dots - 1 \right]$$

$$(۶.۴۹) \quad = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبہ اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

غیر مضطرب حال میں  $H'$  کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں  $E_n$  کی تصحیح ہوگی مساوات 9.6

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle \psi | p^4 | \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شرودنگر مساوات کہتی ہے

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے  $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$  ہوگا

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں  $E_n$  زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال  $\psi_{nlm}$  مساوات 89.4 میں  $1/r$  اور  $1/r^2$  کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں  $a$  رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا مساوات ۱۷۲.۴ استعمال کرتے ہوئے  $a$  کو خارج کر کے باقی کو  $E_n$  مساوات ۷۰.۴ کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[ \frac{4n}{l+1/2} - 3 \right] \quad (۶.۵۷)$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار  $E_n$  سے تقریباً  $E_n / mc^2 = 2 \times 10^{-5}$  گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات ۵۱.۶ میں اضطراب کر دی تا کلی ہے لہذا یہ  $L^2$  اور  $L_z$  کا مقلوب ہوگا مزید کسی  $E_n$  کے حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی افتدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات  $\psi_{nlm}$  اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں  $l$ ،  $n$  اور  $m$  موزوں کو انٹیم اعداد ہیں لہذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست ہوتا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ ورل سوال ۱۴۰.۴ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۵۵.۶ ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴۳.۴ میں حال  $\psi_{321}$  کے لیے  $r^s$  کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق  $s = 0$  غیر اہم عنصر  $s = -1$  مساوات ۵۵.۶  $s = -2$  مساوات ۵۶.۶ اور  $s = -3$  مساوات ۶۴.۶ کے لیے کریں  $s = -7$  کی صورت میں کیا ہوگا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: ایک بعدی ہارمونی سر تعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم تہی اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال ۵.۲ میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے  $l = 0$  لیجئے ہوئے  $p^2$  ہر مشی ہے لیکن  $p^4$  ہر مشی نہیں ہے ان حالات کے لیے  $\psi$  متغیرات  $\theta$  اور  $\phi$  کا غیر تابع ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

مساوات ۱۳.۴ تکمیل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle f | p^2 g \rangle = -4\pi\hbar^2 \left( r^2 f \frac{dg}{dr} - r^2 g \frac{df}{dr} \right) \Big|_0^\infty + \langle p^2 f | g \rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ  $\psi_{n00}$  کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}} e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ  $p^4$  کے لئے کر کے دیکھیں اور لکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا

$$\langle \psi_{n00} | p^4 | \psi_{m00} \rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4} \frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4 \psi_{n00} | \psi_{m00} \rangle$$

### ۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے شکل 7.6 مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوٹے میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر  $\mu$  کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیملٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\mu \cdot B \quad (۶.۵۸)$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر  $\mu$  درکار ہوگا

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رویہ تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو بالوٹ و سیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو  $I = e/T$  ہے جہاں  $e$  پروٹان کے بار کو اور  $T$  دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوٹے میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت  $L = rmv = 2\pi mr^2/T$  ہوگا مزید  $B$  اور  $L$  دونوں کا رخ ایک دوسرے جیسا ہوگا شکل 7.6 میں اوپر جانب لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} L \quad (۶.۵۹)$$

جہاں میں نے  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  استعمال کر کے  $\mu_0$  کی جگہ  $\epsilon_0$  استعمال کیا ہے

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب ممکن مقناطیسی مثبت ہوگا جس کا منہ ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار  $q$  جس کی لمبائی  $r$  کے چلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ  $T$  سے گھومتا ہو پر غور کریں شکل 8.6 اس پھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو  $(q/T)$  ضرب رقبہ  $(\pi r^2)$  ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

اگر چھلا کی کیت  $m$  ہو جو ہمدی معیار اثر  $mr^2$  ضرب زاویائی سمتی رفتار  $(2\pi/T)$  اس کا زاویائی معیار حرکت ہوگا

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$

اس تنظیم کے لیے ظاہر ہے کہ ممکن مقناطیسی نسبت  $\mu/S = q/2m$  ہو گا دھیان رہے کہ یہ  $r$  اور  $T$  کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں نکلے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر  $\mu$  اور  $S$  کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تا کہ بار اور کیت کا نسبت یکساں ہو ہر جھلے کا اور لہذا پوری جسم کا ممکن مقناطیسی نسبت ایک دوسرے جیسا ہو گا مزید  $\mu$  اور  $S$  کے رخ ایک دوسرے جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہو گئے لہذا درج ذیل ہوگا

$$\mu = \left(\frac{q}{2m}\right)S$$

یہ حوالہ کا سیکی حساب ہے درحقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگن ہے

$$\mu_e = -\frac{e}{m}S \quad (۶.۶۰)$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی حیز و ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L$$

اس حساب میں ایک مضرب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوٹے میں تجزیہ کیا جو ایک غیر ہمدی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہذا یہ اسراع پذیر ہوگا اس حساب میں محدد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے مقبول کیا جاسکتا ہے جو حساب میں حیز و ضربی 1/2 شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L \quad (۶.۶۱)$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ ممکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت حیز و ضربی جو انقضا ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبی طور پر یہ الیکٹران کے لمحاتی ساکن چھوٹے میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹنے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت سرورڈ کی بدولت ہے۔



اب کو انم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چپکرو دائری ربط کی صورت میں  $L$  اور  $S$  کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہذا چپکرو دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البت  $H'_{s0}$  مقلوب ہو گا  $L^2$ ،  $S^2$  اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$(۶.۶۲) \quad J \equiv L + S$$

لہذا یہ مقداریں بقائی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں  $L_z$  اور  $S_z$  کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ  $L^2$ ،  $S^2$ ،  $J^2$ ، اور  $J_z$  کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (L + S) \cdot (L + S) = L^2 + S^2 + 2L \cdot S$$

کی بنا

$$(۶.۶۳) \quad L \cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

ہو گا لہذا  $L \cdot S$  کے امتیازی امتداد درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً  $S = 1/2$  ہے مزید  $1/r^3$  کی توقعاتی قیمت سوال 35.6 (ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$(۶.۶۴) \quad \langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

لہذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{s0}^1 = \langle H'_{s0} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2c^2} \frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو  $E_n$  کی صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۶۵) \quad E_{s0}^1 = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)} \right\}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چپکرو دائری ربط ایک جتنا رتبہ  $(E_n^2/mc^2)$  رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کر کے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

$$(۶.۶۶) \quad E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left( 3 - \frac{4n}{j+1/2} \right)$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ چھوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (۶.۶۷)$$

مہین ساخت  $l$  میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک  $n$  کیلئے  $l$  کی مختلف اجزائی قیمتیں ایک دوسرے جیسی توانائی کے حامل نہیں ہوں گی تاہم اب بھی یہ  $j$  میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری وچکر زاویائی معیار حرکت کے  $z$  حبز و امتیازی افتدار  $m_l$  اور  $m_s$  اب موزوں کو انٹم اعداد نہیں ہوں گے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کو انٹم اعداد  $n, l, s, j$  اور  $m_j$  ہوں گے سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف)  $[L \cdot S, L]$ ، (ب)  $[L \cdot S, S]$ ، (ج)  $[L \cdot S, J]$ ، (د)  $[L \cdot S, L^2]$ ، (ه)  $[L \cdot S, S^2]$ ، (و)  $[L \cdot S, J^2]$ ؛ اشارہ:  $L$  اور  $S$  زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ  $l \pm 1/2 = j$  ہے ثت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو  $n = 3$  سے  $n = 2$  میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو متفریب متفریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہوگی اور ان کے بچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ  $n = 2$  سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے  $\text{eV}$  میں  $E_{fs}^1$  تلاش کریں یہی کچھ  $n = 3$  کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر  $n = 3$  سے  $n = 2$  تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں فوٹان کی صورت میں توانائی کا اخراج  $(E_3 - E_2) + \Delta E$  ہوگا جہاں پہلا حبز و سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت  $\Delta E$  کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے  $\Delta E$  کو  $\text{eV}$  میں تلاش کریں آخر میں انہیں فوٹان تعدد میں تبدیل کر کے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بچ فاصلہ  $\text{Hz}$  کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بچ تعددی فاصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بچ تعددی فاصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر ( ) لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1)  $(???) = j$  سے  $(???) = j$ ، 2  $(???) = j$  سے  $(???) = j$ ، ... ہو گئے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بچ تعددی فاصلہ  $(???) \text{ Hz}$  ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بچ فاصلہ  $???$  ہے  $\text{Hz}$  ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر ذراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\}$$

یہ ذہن میں رکھئے کہ  $1 \ll \alpha$  ہے اس کو  $a^4$  رتب تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

### ۶.۴. زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان  $B_{ext}$  میں رکھئے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زیمان اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_1 + \mu_2) \cdot B_{ext} \quad (۶.۶۸)$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m} S \quad (۶.۶۹)$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1 = -\frac{e}{2m} L \quad (۶.۷۰)$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$H'_z = \frac{e}{2m} (L + 2S) \cdot B_{ext} \quad (۶.۷۱)$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر  $B_{int} \ll B_{ext}$  ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور  $H'_z$  کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے جبکہ  $B_{ext} \gg B_{int}$  کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت از خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی انداز قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زیمان میدان کتنا ہوگا

#### ۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر  $B_{int} \ll B_{ext}$  ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہوگی اور موزوں کو انٹم اعداد  $l, j, n$  اور  $m_j$  ہونگے تاہم چکر مدار ربط کی موجودگی میں  $L$  اور  $S$  علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے لہذا  $m_l$  اور  $m_s$  موزوں کو انٹم اعداد نہیں ہونگے رتب اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زیمان تصحیح درج ذیل ہوگی

$$H'_Z = \langle n l j m_j | H'_Z | n l j m_j \rangle = \frac{e}{2m} B_{ext} \cdot \langle L + 2S \rangle \quad (۶.۷۲)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

اب  $L + 2S = J + S$  ہوگا بد قسمتی سے ہمیں  $S$  کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقے سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت  $J = L + S$  ایک مستقل ہے شکل 10.6 اس مقررہ سمتیہ کے گرد  $L$  اور  $S$  تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص  $J$  پر  $S$  کی متاثرہ تقلیل  $S$  کی وقتی اوسط قیمت ہوگا

$$S_{ave} = \frac{(S \cdot J)}{J^2} J \quad (۱۰.۴۳)$$

لیکن  $L = J - S$  ہے لہذا  $L^2 = J^2 + S^2 - 2J \cdot S$  ہوگا لہذا

$$S \cdot J = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \quad (۱۰.۴۴)$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle L + 2S \rangle = \langle \left(1 + \frac{S \cdot J}{J^2}\right) J \rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\right] \langle J \rangle \quad (۱۰.۴۵)$$

چکور کوسائن میں بندرکن کولنڈے  $g$  جنز و ضرب کہتے ہیں جس کو  $g_j$  سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور  $z$  کو  $B_{ext}$  کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہوگا

$$E_Z^1 = \mu_B g_j B_{ext} m_j \quad (۱۰.۴۶)$$

جہاں

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \quad (۱۰.۴۷)$$

یوہر مقناطیہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زیمان کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال  $n = 1, l = 0, j = 1/2$  لہذا  $g_j = 2$  دو سطحوں میں بسٹ جائے گا

$$-13.6 \text{ eV} (1 + \alpha^2/4) \pm \mu_B B_{ext} \quad (۱۰.۴۸)$$

جہاں  $m_j = 1/2$  کے لیے مثبت علامت اور  $m_j = -1/2$  کے لیے منفی علامت استعمال ہوگی ان توانائیوں کو  $B_{ext}$  کے تقاسل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے سوال ۱۰.۲۱: آٹھ عدد  $n = 2$  حالات  $|2l m_j\rangle$  پر غور کریں کمزور میدان نیٹے کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل 11.6 کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں  $B_{ext}$  بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں

## ۶.۴.۲ طاقتور میدان زمین اثر

اگر  $B_{ext} \gg B_{int}$  ہو تب زمین اثر غالب ہوگا میدان  $B_{ext}$  کو  $z$  محور پر رکھ کر موزوں کو انظم اعداد  $n, l, m_l$  اور  $m_s$  ہونگے جبکہ  $j$  اور  $m_j$  نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت سروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہوگا جبکہ  $L_z$  اور  $S_z$  ہونگے زمین ہیلٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{ext} (L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۶.۷۹) \quad E_{nmlms} = -\frac{13.6 \text{ electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext} (m_l + 2m_s)$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہوگا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتب اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہوگی

$$(۶.۸۰) \quad E_{fs}^1 = \langle nlm_l m_s | (H'_r + H'_s) | nlm_l m_s \rangle$$

انفیتی قہ وہی ہوگا جو پہلے ہت مساوات 57.6 چکر و مدار حبزو مساوات 61.6 کے لیے نہیں درج ذیل درکار ہوگا

$$(۶.۸۱) \quad \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \langle S_x \rangle \langle L_x \rangle + \langle S_y \rangle \langle L_y \rangle + \langle S_z \rangle \langle L_z \rangle = \hbar^2 m_l m_s$$

دھیان رہے کہ  $S_z$  اور  $L_z$  کہ امتیازی تشاعات کے لیے  $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$  ہوگا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۶.۸۲) \quad E_{fs}^1 = \frac{13.6 \text{ eV}}{n^3} \alpha^2 \left\{ \frac{3}{4n} - \left[ \frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} \right] \right\}$$

چکور کوسائن کا حبزو  $l = 0$  کے لئے غیر تعین ہوگا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زمین حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۴۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۴۳: آٹھ عدد  $n = 2$  حالات  $|2lm_j m_s\rangle$  پر غور کریں طاقتور میدان زمین بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو بوہر توانائی  $l^2$  کے راست متناسب مہین ساخت اور  $\mu_B B_{ext}$  کے براہ راست متناسب زمین حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہوگی اور ان کے اخطاط کیا ہونگے

سوال ۶.۴۴: اگر  $l = 0$  ہو تب  $l = 0$ ،  $j = s$ ،  $m_j = m_s$  ہوگا بلذا کمزور اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات  $(|nm_s\rangle)$  ایک دوسرے چپے ہوں گے مساوات 72.6 سے  $E_Z^1$  اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر  $l = 0$  کیلئے زمین اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کہ درمیانی چکور کوسائن رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

## ۶.۳.۳ درمیانی طاقت میدان زیماں اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نا  $H'_Z$  اور نہ ہی  $H'_{fs}$  غالب ہوگا لہذا ہمیں دونوں کو ایک نظر سے دیکھ کر بوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہوگا

$$(۶.۸۳) \quad H' = H'_Z + H'_{fs}$$

میں  $n = 2$  صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف  $l, j, m_j$  بیان کرتی ہے کو اخطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے  $|lm_l\rangle |sm_s\rangle$  کو  $|jm_j\rangle$  کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہوگا

$$l = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

$$l = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = |11\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں  $H'_{fs}$  کے تمام غیر صفر وتالیبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے و تر پائے جاتے ہیں  $H'_Z$  کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں اور  $W$  کا مکمل متالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہوگا

$5\gamma - \beta$	00	00	00
$05\gamma + \beta$	00	00	00
00	$\gamma - 2\beta$	00	00
00	$0\gamma + 2\beta$	00	00
00	00	$\gamma - \frac{2}{3}\beta \frac{\sqrt{2}}{3}\beta$	00
00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma - \frac{1}{3}\beta$	00
00	00	00	$\gamma + \frac{2}{3}\beta \frac{\sqrt{2}}{3}\beta$
00	00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma + \frac{1}{3}\beta$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6 \text{ eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B B_{ext}$$

استدائی چار امتیازی امتداد پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں اب صرف دو  $2 \times 2$  ڈیوں کی امتیازی امتداد تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی امتداد دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \quad (۶.۸۴)$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی امتداد یہی مساوات دے گی لیکن اس میں  $\beta$  کی علامت الٹ ہوگی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل 12.6 میں  $B_{ext}$  کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد  $\beta = 0$  میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان  $\gamma \ll \beta$  کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طاقتور میدان  $\gamma \gg \beta$  کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہونگے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیش گوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طاقتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے

سوال ۶.۲۵: متالابی ارکان  $H'_Z$  اور  $H'_{fs}$  دریافت کر کے  $n = 2$  کے لئے مستن میں دیا گیا متالاب  $W$  تشکیل دیں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے  $n = 3$  حالات کے لیے کمزور، طاقتور اور درمیانی میدان خطوں کے لیے زیرمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تقاسم کے طور پر ترسیم کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیانے میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتی دیتی ہے

### ۶.۴. نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان از خود ایک مقناطیسی جھت کتب ہے اگر چہ نسب نامہ میں کمیت کی بنا اس کا جھت کتب معیار اثر الیکٹران کے جھت کتب معیار اثر سے بہت کم ہوگا مساوات 60.6

$$\mu_p = \frac{g_p e}{2m_p} S_p, \quad \mu_e = -\frac{e}{m_e} S_e \quad (۶.۸۵)$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہذا اس کا مکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہوگا جس کی بنا صریحی  $g$  جذب ضربی  $g_p$  لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جھت کتب  $\mu$  درج ذیل مقناطیسی میدان پسید کرتا ہے

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\boldsymbol{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (۶.۸۶)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

یو پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا مساوات 58.6

$$(۶.۸۷) \quad H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(S_p \cdot \hat{r})(S_e \cdot \hat{r}) - S_p \cdot S_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} S_p \cdot S_e \delta^3(r)$$

نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبہ تخفیف مساوات 9.6 اس طرح بھی ہیمیلٹنی کی توقعاتی قیمت ہوگی

$$(۶.۸۸) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \langle \frac{3(S_p \cdot \hat{r})(S_e \cdot \hat{r}) - S_p \cdot S_e}{r^3} \rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \langle S_p \cdot S_e \rangle |\psi(0)|^2$$

زمینی ہال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں  $l = 0$  ہو وقف عمل موج کروئی تشکلی ہوگا لہذا اول توقعاتی قیمت صفر ہوگی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت  $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$  ہوگا لہذا زمینی ہال میں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸۹) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle S_p \cdot S_e \rangle$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہذا اس کو چکر چکر ربط کہتے ہیں جیسا چکر مدار ربط میں  $S \cdot L$  پایا جاتا ہے چکر چکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چکر زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل چکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$(۶.۹۰) \quad S \equiv S_e + S_p$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(۶.۹۱) \quad S_p \cdot S_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2)$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چکر ایک ہٹا دے لہذا  $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$  ہوگا۔ تا حال تمام چکر متوازی میں کل چکر ایک ہوگا جس کے تحت  $S^2 = 2\hbar^2$  ہوگا یکتا حال میں کل چکر صفر لہذا  $S^2 = 0$  ہوگا یوں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۲) \quad E_{hf}^1 = \frac{4g_p \hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases}$$

چکر چکر ربط زمینی نیچال کے چکر انحطاط کو توڑ کر سہ تا تنظیم کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو نیچے کرتا ہے شکل 13.6 یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۳) \quad \Delta E = \frac{4g_p \hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}$$



سہ تاحال سے یک تاحال انتقال کے دوران حصار فوٹان کا تعدد درج ذیل ہوگا

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420 \text{ MHz} \quad (۶.۹۴)$$

اور اس کی مطابقتی طول موج  $c/\nu = 21 \text{ cm}$  ہوگی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے یہ کائنات میں احسراج کی صورت میں وہ مشہور 21 سینٹی میٹر تخی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے سوال ۶.۲۷: فرض کریں  $a$  اور  $b$  دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(a \cdot \hat{r})(b \cdot \hat{r}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} (a \cdot b) \quad (۶.۹۵)$$

کمل ہمیشہ کی طرح  $0 < \theta < \pi$ ،  $0 < \phi < 2\pi$  کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے  $l = 0$  ہو درج ذیل دکھائیں

$$\left\langle \frac{3(S_p \cdot \hat{r})(S_e \cdot \hat{r}) - S_p \cdot S_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ:  $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلب میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں ایکسٹران کی بجائے میون ہوگا جس کا بار اور  $g$  حبز و ضرب الیکٹرون کے بار اور  $g$  حبز و ضرب کے برابر لیکن کیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیسٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیسٹران ہوگا جس کی کیت اور  $g$  حبز و ضرب اور الیکٹران کی کیت اور  $g$  حبز و ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہوگا جس کی کیت اور  $g$  حبز و ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیق شدہ کیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس پوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا گیا ہے کہ پازیسٹرونیم کے لئے حاصل جواب  $4.85 \times 10^{-4} \text{ eV}$  تجرباتی حاصل قیمت  $8.41 \times 10^{-4} \text{ eV}$  سے بہت مختلف ہے اس مندرجہ کی وجہ نا پودی جفت  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$  ہے جو اضافی  $(3/4)\Delta E$  ہوتا ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی مستثنای جاست کی بنا ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی انداز قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس  $b$  کا ایک ساں بار دار کردی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل ہوگی یہ در حقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم  $b/a$  کے روپ میں طافستی تسلسل میں پھیلا کر جہاں  $a$  رداس پوہر ہے صرف ابتدائی حبز و رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

آپ نے مستقل  $A$  اور طاقت  $n$  کی قیمتیں تعین کرنی ہے آخر میں  $10e - 15 \text{ meter}$   $b$  جو تقریباً پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر مستی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی سر نقش سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 y z$$

جہاں  $\lambda$  ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں

۱. زمینی حال

ب. سہتا انخطاطی پہلی حبان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندروالز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ  $R$  ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ کامل تقطیب ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت  $m$  اور بار  $e$  ہو ایک مرکزہ بار  $+e$  کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس پلک کے سے جڑا ہوا تصور کریں شکل 14.6 ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا غیر مختصر یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H^0 = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \quad (۶.۹۶)$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہوگا

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} \right) \quad (۶.۹۷)$$

۱. مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ  $R$  سے  $|x_1|$  اور  $|x_2|$  کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \quad (۶.۹۸)$$

ب. دکھائیں کہ کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دوہارمونی سر نقش ہیملٹن یوں

(۶.۹۹)

$$H = \left[ \frac{1}{2m} p_+^2 + \frac{1}{2} \left( k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_+^2 \right] + \left[ \frac{1}{2m} p_-^2 + \frac{1}{2} \left( k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_-^2 \right]$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$X_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 \pm x_2), \quad p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 \pm p_2) \quad (۶.۱۰۰)$$

علیحدہ ہوگا

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۶.۱۰۱) \quad E = \frac{1}{2} \hbar (\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں } \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر  $E_0 = \hbar \omega_0$  ہوگا جہاں  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  ہے درج ذیل  $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$  فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$(۶.۱۰۲) \quad \Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^6}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے پچ کشتی مخفی پایا جاتا ہے جو ان کے پچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے پچ وندروال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دور تبی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ  $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$  ہوگی جہاں  $\psi_n(x)$  ایک ذرا سر قش تفاعل موج ہے جہاں  $m$  کمیت اور مقیاس پک  $k$  ہوگا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دور تبی تخفیف  $\Delta V$  ہوگی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال 32.6:

فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم  $\lambda$  کا تفاعل ہو۔  $H(\lambda)$  کے امتیازی امدار کو اور امتیازی تفعالات  $E_n(\lambda)$  اور  $\psi_n(\lambda)$  لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہت ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi_n \right\rangle$$

جہاں  $E_n$  کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام  $\psi_n$  کو انحطاطی امتیازی تفعالات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جزو الف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 9.6 استعمال کریں۔)

(جزو ب): درج ذیل یقودی ہارمونی مدار اسکا اطلاق کریں۔

(ایک)

$$\lambda = \omega$$

لیں جس سے  $V$  کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہوگا۔

(دو)

$$\lambda = \hbar$$

لیں جو  $\langle T \rangle$  دے گا اور

(تین)

$$\lambda = m$$

جو  $\langle T \rangle$  اور  $\langle V \rangle$  کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موعازنا کریں۔

سوال 33.6:

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

مسئلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہمارے ڈرو جسکے لئے  $1/r$  اور  $1/r^2$  کی توقعاتی قیمتیں تین کی حساب کتابیں  
رادا سی فعالیتات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

اور امتیازی افتدار جنہیں  $L$  کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max} + l + 1)^2}$$

(حبزوالف):

مسئلہ Feynman-Hellmann میں  $e = \lambda$  استعمال کرتے ہوئے  $\langle 1/r \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات  
55.6 کے ساتھ کریں۔

(حبزوب):

$l = \lambda$  کو استعمال کرتے ہوئے  $\langle 1/r^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔  
سوال 34.6:

رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2} \langle r^s \rangle - (2s+1)a \langle r^{s-1} \rangle n + \frac{s}{4} [(2l+1)^2 - s^2] a^2 \langle r^{s-2} \rangle = 0$$

صابط کریں جو ہمارے ڈرو جسکے حال  $\psi_{nlm}$  میں الیکٹران کے لئے  $R$  کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں  $(s, s-1, s-2)$  کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رادا سی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2 a^2} \right] u.$$

-  $\int (ur^s u'') dr$  کو  $\langle r^s \rangle$ ،  $\langle r^{s-1} \rangle$ ،  $\langle r^{s-2} \rangle$  کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhis کے ذریعے دہرا تفروق  
کو بیٹھائیں۔ دیکھائیں کے

$$\int (ur^s u') = -(s/2) \langle r^{s-1} \rangle$$

اور

$$\int (u' r^s u') dr = -[2/(s+1)] \int (u'' r^{s+1} u') dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)

سول 35.6

(حبزوالف):

رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں  $s = 0, s = 1, s = 2$  اور  $s = 3$  ڈال کے  $\langle r \rangle$ ،  $\langle r^2 \rangle$ ،  $\langle r^{-1} \rangle$  اور  $\langle r^3 \rangle$   
کے قیامت حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہیں کسی بھی مثبت طاقت کے لئے  
قلب دریافت کر سکتے ہیں۔

(حبزوب):

دوسرے رخ آچکومشلا درپیش ہوگا آپ  $-1 = s$  پر کر کے دیکھیں گے آچکوصرف  $\langle r^{-2} \rangle$  اور  $\langle r^{-3} \rangle$  کے بیچرشتہ حاصل ہوگا۔

(حبزوب):

اگر آپ کسی طریقے سے  $\langle r^{-2} \rangle$  دریافت کرپائیں تب آپرشتہ 'Kramers استعمال کر کے باکی تمام منفی قوتوں کے لئے قلیات دریافت کر سکتے ہیں۔

مسوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذکیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوئے  $\langle r^{-3} \rangle$  تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مسوات 64.6 کے ساتھ کریں۔

سوال 36.6:

ایک جوہر کو قیاسی بیرونی برقی میدان  $E_{ext}$  میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں ہشتی ہیں جسے سنارک اثر کہاجاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی مسائل ہے اس سوال میں ہم حائلے ڈروجن کے  $n = 1$  اور  $n = 2$  حالات کے لئے سنارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان  $Z$  رخ ہے لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r \cos \theta$$

اسکو hamiltonian bohr مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسئلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کرتے ہوئے عمدہ ساخت کو رعہ کریں۔

(حبزوالف):

اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔

(حبزوب):

پہلا ہیجان حال 4 پرستہ  $\psi_{210}, \psi_{211}, \psi_{200}$  انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے، توانائی کی رتبہ اول کا بھی تعین کریں۔ توانائی  $E_2$  کتنے سطحوں میں بٹے گا؟

(حبزوب):

درج بالہ حبزوب میں موضوع تفاعلات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جو عطف قطب معیار اثر  $(p_e = -er)$  کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابیح نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کہ پہلی ہیجان حال میں حائلے ڈروجن برقی جو عطف قطب معیار اثر کا حاصل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکسلات پائے جاتے ہیں تاہم تقریباً تمام کی قیمت سفر ہے لہذا حاب سے قبل غور کریں اگر  $\phi$  مکمل سفر ہو تب  $r$  اور  $\theta$  مکملات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی حبزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)

سوال 37.6: حائلے ڈروجن کی  $n = 3$  حالات کے لئے سنارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابستدائی طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے اب انحطاطی حالات  $\psi_{3lm}$  ہونگے اور اب ہم  $Z$  رخ برقی میدان حبالو کرتے ہیں۔

(حبزوالف):

اضطرابی hamiltonian کو غابہر کرنے والا  $9 \times 9$  کا کالم تیار کریں

حبزوی جواب

$$\langle 300|z|310 \rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320 \rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31 \pm 1|z|32 \pm 1 \rangle = -(9/2)a.$$

(جذب):

امتیازی اقتدار اور انکی انحطاط دریافت کریں۔

سوال 38.6: ڈوٹر نم کی زمینی حال میں نہایت موحدین منتقلی کے دوران حنا راج کردہ پھولان کا طول موج میں تلاش کریں۔  
 - ڈوٹر نم در حقیقت بھاری ہالے ڈروجن ہے جس کے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ  
 جبر کر ڈوٹر نم بناتے ہیں جس کا چکر ایک مقناطیسی دارا اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹر نم کا g-جزو 71.1 ہے۔

سوال 39.6:

ایک کالم میں متری باردارا کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطوں کو مضطرب کرتا ہے ایک تازہ نمونہ کے طور پر  
 فرض کریں hydrogen جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای جاتی ہیں شکل 15.6۔ (چونکہ اس سوال کے  
 ساتھ چکر کا کوئی واسطہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)  
 (جذب الف):

درج ذیل

$$r \ll d_1, r \ll d_2, \text{ and } r \ll d_3,$$

کی صورت میں دیکھئے

$$H' = V_0 + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_0 = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جذب):

زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔

(جذب):

پہلی۔ ہیجان حالات (n = 2) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں یہ چار  
 پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطوں میں بنے گا۔  
 ایک) کاپی تاشلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی صورت میں۔  
 دو) چوں زاویہ تاشلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔

تین) آر تھوہامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔

سوال 40.6:

بازاؤقات  $\psi_n^1$  کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلد واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔  
(الف)

ایک) ہائے ڈروجن کی زمینی حال میں سنارک اثر ایک یکاں بیرونی برقی میدان  $E_{ext}$  کی۔ موجودگی میں ہائے ڈروجن کی زمینی حال کارتب اول تخفیف تلاش کریں (سوال 36.6 stark اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n} \cos \theta;$$

استعمال کر کے دیکھیں اپ نے مستطالات  $A, B, C$  کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔

دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔ جواب:

$$-m(3a^2 e E_{ext} / 2\hbar)^2.$$

(جذب)

اگر پروٹان کا برقی جت قطب میعار اثر  $p$  ہوتا تب ہائے ڈروجن کے الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{ep \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبہ اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔

دو) دیکھیں کہ رتبہ تک جو ہر کاتل برقی جو عفت قطب میعار اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہوگا۔

تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہوگا؟





## باب ۷

# تغیری اصول

### ۱.۷ نظریہ

معرض کریں آپ ایک نظام جس کو ہیلٹنی H بیان کرتا ہو، کی زمینی حال توانائی  $E_{gs}$  کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حاصل کرنے سے متاصر ہوتے ہیں۔ اصول تغیریت آپ کو  $E_{gs}$  کی بالائی حد دیتا ہے۔ بعض اوقات آپ کو صرف اسی سے معرض ہوتا ہے اور عموماً ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے مترب قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ انہیں اس کا استعمال دیکھیے۔ کوئی بھی معمول شدہ تفاسل  $\psi$  لیں۔ میں درج ذیل دعوہ کرتا ہوں:

$$E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle$$

یعنی کسی بھی شانہ غیر درست حال  $\psi$  میں  $H$  کی توقعاتی قیمت زمینی حال توانائی سے زیادہ ہوگی۔ یقیناً اگر  $\psi$  انفاستاً ایک ہیجان حال ہو تب  $H$  کی قیمت  $E_{gs}$  سے تجاوز کرے گی۔ اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاسل  $\psi$  کے لیے بھی ایسا ہوگا۔

ثبوت:

چونکہ  $H$  کے نامعلوم امیتازی تفاسلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں۔ لحاظ ہم  $\psi$  کو ان کا خطی جوڑ لکھ سکتے ہیں۔ جہاں

$$\psi = \sum c_n \psi_n, \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

ہے۔ چونکہ  $\psi$  معمول شدہ ہے

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \left| \sum_n c_n \psi_n \right. \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

جہاں معرض کیا گیا ہے کے امتیازی تفاسلات از حد معیاری معمول شدہ ہے۔

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

ساتھ ہی درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \middle| H \sum_n c_n \psi_n \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* E_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2$$

لیکن تعریف کی رو سے زمینی حال توانائی کم سے کم امتیازی قیمت ہوگی۔ لحاظ  $E_{gs} \leq E_n$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle \geq E_{gs} \sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

جس کو ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

مثال

1.7 فرض کرے ہم ایک بودی ہارمونی مورٹیش

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً ہم اس کا ٹھیک ٹھیک جواب جانتے ہیں۔ جو مساوات 61.2  $E_{gs} = (1/2) \hbar \omega$  جسے استعمال کر کے اس ترقیب کو پرکھا جاسکتا ہے۔ ہم گامی تعامل

$$\psi(x) = A e^{-bx^2}$$

کو اپنا پرکھا تعامل موج منتخب کرتے ہیں جہاں  $b$  ایک مستقل ہے اور  $A$  کو معمولی زنی سے تعائن کیا جاسکتا ہے۔

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4}$$

اب درج ذیل ہے

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

جبکہ یہاں

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-bx^2}) dx = \frac{\hbar^2 b}{2m}$$

اور

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} x^2 dx = \frac{m \omega^2}{8b}$$

ہونے کی بنا درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m \omega^2}{8b}$$

/ مساوات 1.7 کے تحت  $b$  کی تمام قیمتوں کے لیے  $E_{gs}$  سے تجاویز کرے گا۔ سخت سے سخت حرارت کی خاطر ہم  $\langle H \rangle$  کی کم سے کم قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m \omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m \omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس  $\langle H \rangle$  میں پھر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle H \rangle_{min} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہیں۔ جو حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ ہمیں نے اتفاقی طور پر ایسا پرکھنا تھا۔ کیا منتخب کیا جس کا روپ ٹھیک حقیقی زمینی حال مساوات 59.2 کی طرح ہے۔ تاہم گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے لحاظ یہ ایک مقبول پرکھنا تھا۔ عمل ہے۔ جسے وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جب حقیقی زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔

مثال 2.7 فرض کرے ہم Delta تفاعل مخفی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \alpha \delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یہاں بھی ہمیں ٹھیک جواب  $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$  معلوم ہے۔ یہاں بھی ہم گاوسی پرکھنا تھا۔ عمل مساوات 2.7 کا انتخاب کرتے ہیں۔ چونکہ ہم معمول زنی کر چکے ہیں اور  $\langle T \rangle$  کا حساب کر چکے ہیں۔ لحاظ ہمیں صرف درج ذیل کرنا ہوگا

$$\langle V \rangle = -\alpha |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} \delta(x) dx = -\alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ یہ تمام B کے لیے  $E_{gs}$  سے تباہ کر دے گا۔ اس کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہیں

$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2 \alpha^2}{\pi \hbar^4}$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle_{min} = -\frac{m\alpha^2}{\pi \hbar^2}$$

جو کہ یقیناً  $E_{gs}$  سے یہ قدرے بلند ہوگا، چونکہ  $\pi > 2$

میں نے کہا آپ کسی بھی معمول شدہ پرکھنا تھا  $\psi$  کا انتخاب کر سکتے ہیں جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ غیر استمراری تفاعلات کے دوہرہ تفرق جو  $\langle T \rangle$  کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہوگا، کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے انوکھے چال چلنا ہوگا۔ ہاں، اگر آپ محتاط ہو تو استمراری تفاعلات جن میں بل پائے جاتے ہیں، کو استعمال کرنا نسبتاً آسان ہوگا۔ اگلی مثال میں انہیں استعمال کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال  
3.7 کوئی پریکٹیف عمل موج شکل 1.7

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے ایک بودی لامستناہی چپکورو کو اس کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کرے۔ A کو معمولی زنی سے تعائن کیا جائے گا۔

$$1 = |A|^2 \left[ \int_0^{a/2} x^2 dx + \int_{a/2}^a (a-x)^2 dx \right] = |A|^3 \frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{3}{a}}$$

جیسا شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہوگا

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

دیگر صورت۔ اب سیدھی تعامل کا تفرق ایک Delta تعامل ہے۔ سوال 24.2 ب دیکھو۔

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x - a/2) + A\delta(x - a)$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} \int [\delta(x) - 2A\delta(x - a/2) + \delta(x - a)] \psi(x) dx \\ &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} [\psi(0) - 2\psi(a/2) + \psi(a)] = \frac{\hbar^2 A^2 a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2} \end{aligned}$$

ٹھیک زمینی حال توانائی  $E_{gs} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  مساوات 27.2 ہے۔ لحاظ یہ مسئلہ کارآمد ہے۔  $12 > \pi^2$

اصول تغیریت انتہائی طامتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سالہ کی زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر ماہر کیا ایک ایسا پریکٹیف عمل موج منتخب کرے، جس میں متعدد مقدار معلوم پائے جاتے ہو اور ان کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے  $\langle H \rangle$  کی کم سے کم ممکن قیمت تلاش کرے گا۔ اصل تعامل موج کے ساتھ  $\psi$  کی کوئی مشابہت نہ پائے جانے کی صورت میں بھی آپ کو  $E_{gs}$  کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہوگی۔ ظاہر ہے اگر آپ  $\psi$  کو حقیقی تعامل کے زیادہ متعیر

منتخب کر پائے تو اتنا بہتر ہوگا۔ اس ترقیب کے ساتھ مسئلہ یہ ہے کہ آپ کبھی بھی جان نہیں سکتے کہ آپ درست جواب کے کتنے قریب ہو۔ آپ صرف اتنا جاننے ہو کہ اصل جواب آپ کے نتیجے سے کم ہوگا۔ مزید اس روپ میں یہ ترقیب صرف زمینی حال کے لیے کارآمد ہے۔ البتہ سوال 4.7 دیکھیے۔

سوال 1.7 درجہ ذیل مخفیہ کے لئے زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر گامی پر کیا تفاعل مساوات 2.7 کی کم سے کم بالائی حد بندی تلاش کرے۔  
(۱) خطی مخفیہ

$$V(x) = \alpha|x|$$

(ب) طاقت چار مخفیہ

$$V(x) = \alpha x^4$$

سوال 2.7 یک بودی ہارمونی مورٹیش  $E_{gs}$  کی بہترین حد بندی کو درج ذیل روپ کی پر کیا تفاعل عمل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کر کے تلاش کریں۔ جہاں معمولی زنی سے تعائن ہوگا۔ جبکہ بھی متابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔ سوال 3.7:  
ڈلتا تفاعل مخفیہ

$$-\alpha\delta(x)$$

کی  $E_{gs}$  کی بہترین بالائی حد بندی کو کوئی پر کیا تفاعل مساوات 10.7۔ لیکن جس کا وسط مبدہ پر ہوا استعمال کر کے تلاش کریں۔ یہاں  $a$  ایک متابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

سوال

(14.7) اصول تغیریت کے درج ذیل زمینی نتیجہ کو ثابت کریں۔ اگر  $\langle \psi | \psi_{gs} \rangle = 0$  تب  $\langle H \rangle \geq E_{fc}$  ہوگا۔ جہاں پہلی ہیجان حال کی توانائی  $E_{fc}$  ہے۔ یوں اگر ہم کسی طرح ٹھیک زمینی حال کو امودی ایک پر کیا تفاعل تلاش کر کے تب ہم پہلی ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکتے ہیں۔ عموماً چونکہ ہم زمینی حال تفاعل  $\psi_{gs}$  کو نہیں جاننے کے لحاظ سے کہنا مشکل ہوگا کہ ہمارا پر کیا تفاعل  $\psi$  اس کو امودی ہوگا یا، اگر  $x$  کے لحاظ سے مخفی  $V(x)$  ایک جفت تفاعل ہو تب زمینی حال بھی جفت ہوگا۔ لحاظ کوئی بھی تاگ پر کیا تفاعل خود بخود اس زمینی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا۔  
(ب) درج ذیل پر کیا تفاعل

$$\psi(x) = A x e^{-bx^2}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بودی ہارمونی مورٹیش کی پہلی ہیجان حال کا بہترین بالائی حد بندی تلاش کرے۔

سوال 5.7

(۱) اصول تغیریت استعمال کر کے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انخطاطی نظریہ استراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تباؤ کرے گا یا کم سے کم کبھی بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا۔

(ب) آپ جزا جاننے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دور تبی تصحیح لاظمن منفی ہوگی۔ مساوات 15.6 کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہوگا۔

### حصہ 2.7 ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر کے مرکزہ میں دو پروٹون اور دو نیوٹران جن کا یہاں کوئی کردار نہیں ہوگا پائے جاتے ہیں اور مرکزہ کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔

شکل

3.7 مہین ساخت اور باریک طرز ہی کو نظر انداز کرتے ہوئے اس نظام کا ہملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right)$$

ہم نے زمینی حال توانائی  $E_{gs}$  کا حساب کرنا ہوگا۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکٹھا کرنے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔  $E_{gs}$  جانتے ہوئے ہم ایک الیکٹران اکٹھا کرنے کے لیے درکار توانائی برداری عمل معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 6.7 دیکھیں

تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حل توانائی کی قیمت کو انتہائی زیادہ درستگی تک پیش کیا گیا ہے۔

$$E_{gs} = -78.975 \text{ eV}$$

ہم نظریہ سے اسی عدد کو حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنی سادہ اور اہم مسئلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔ مسئلہ الیکٹران الیکٹران دفعہ

$$V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

پیدا کرتا ہے۔ اس چیز کو نظر انداز کرنے سے  $H$  حایزروجن، ہلٹنیو میں الہدگ ہو جاتا ہے جہاں مرکزہ کی بار  $e$  کی بجائے  $2e$  ہوگا۔ اس کا ٹھیک ٹھیک حل حایزروجن، دفن لاج مانج کا حاصل ظرب ہوگا۔

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

اور توانائی  $-109 \text{ eV} = 8E_1$  الیکٹران دولٹ مساوات 31.5 ہوگی۔ یہ قیمت  $-79 \text{ eV}$  الیکٹران دولٹ سے بہت دور ہے۔ تاہم یہ صرف آغاز ہے۔ ہم فائے ناٹ کو بھر کیا افعال معالج لیتے ہوئے  $E_{gs}$  کی بہتر تخمینہ کو اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں چونکہ یہ زیادہ تر ہملٹنی کا امتیازی دفعہ ہے لہذا یہ خصوصی طور پر بہتر انتخاب ہے۔

$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\langle V_{ee} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \left(\frac{8}{\pi a^3}\right)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

میں  $r_2$  تکمل کو پہلے حل کرتا ہوں۔ یوں  $r_1$  کو مستقل تصور کیا جائے گا۔ ہم  $r_2$  محدودی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ  $r_1$  محدودی محور پر پایا جاتا ہو۔ متانوں قوسین کے تحت

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}$$

لحاضہ درج ذیل ہوگا

$$I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}} r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\phi_2$$

متغیر  $\phi_2$  کا تکمل  $2\pi$  دے گا۔  
متغیر  $\theta_2$  کا تکمل درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}} d\theta_2 &= \left. \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}}{r_1r_2} \right|_0^\pi \\ &= \frac{1}{r_1r_2} (\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2}) \\ &= \frac{1}{r_1r_2} [(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\pi \left( \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^\infty e^{-4r_2/a} r_2 dr_2 \right) \\ &= \frac{\pi a^3}{8r_1} [1 - (1 + \frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}] \end{aligned}$$

اس طرح  $\langle V_{ee} \rangle$  درج ذیل ہوگا۔

$$\left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{8}{\pi a^3} \right) \int [1 - (1 + \frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}] e^{-4r_1/a} r_1 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\phi_1$$

ظوایائی کمالات  $4\pi$  دینگے جبکہ  $r_1$  کا تکمل درج ذیل ہوگا

$$\int_0^\infty [re^{-4r/a} - (r + \frac{2r^2}{a})e^{-8r/a}] dr = \frac{5a^2}{128}$$

آخر میں اس طرح درج ذیل ہوگا

$$\langle V_{ee} \rangle \frac{5}{4a} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = -\frac{5}{2} E_1 = 34\text{eV}$$

جس کی بنا درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = -109\text{eV} + 34\text{eV} = -75\text{eV}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے۔ یاد رہے کہ تجرباتی قیمت 79- الیکٹران وولٹ ہے۔ تاہم ہم اس سے بھی بہتر کر سکتے ہیں۔ ہم  $\psi_0$  جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسا ایک دوسرے پر اصرار انداز نہیں ہوتے ہیں۔ سے بہتر زیادہ حقیقت پسندانہ پھر کیا دفعال کا سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کا دوسرے الیکٹران پر اصرار کو مکمل طور پر نظر انداز کرنے کی بجائے ہم کہتے ہیں کہ ایک الیکٹران کو اسٹرن مغنی بار کی بطل کی طرح ہوگا جو مرکز کو حبزوی طور پر سپر کرتا ہے جس کی بنا دوسرے الیکٹران کو موثر مرکزوی بار  $z$  کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آئے گی۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا برقی دفعال استعمال کریں۔

$$\psi_1(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi a^3 e^{-Z(r_1+r_2)/a}}$$

ہم  $z$  کو تغیریت کا مقدار معلوم تصور کر کے اس کی وہ تمام قیمت منتخب کر کے جس سے  $H$  کی کم سے کم قیمت حاصل ہو۔ دیہان رہے کہ فضول تغیریت کی ترقیب کبھی بھی ہیلٹی کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ ہیلیم کا ہیلٹی اب بھی مساوات 14.7 دیگی البتہ تصور میں ہیلٹی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کے بہتر بلکیا دفعال معاج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ دفعال معاج اس غیر مضطرب ہیلٹی جو الیکٹران کی دفعہ کو نظر انداز کرتا ہو جس میں حبز coulumb میں دو کی جگہ  $z$  پایا جاتا ہو کا امتیازی حال ہوگا۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے ہم 14.7  $H$  کو روپ میں لکھتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(Z-2)}{r_1} + \frac{(Z-2)}{r_2} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$$

ظاہر ہے کہ  $H$  کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہوگی

$$\langle H \rangle = 2Z^2 E_1 + 2(Z-2) \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \langle V_{ee} \rangle$$

یہاں  $\langle 1/r \rangle$  سی مراد ایک ظرہ ہائڈروجن زمینی حال سے 100 جس میں مرکزوی بار  $Z$  ہو میں  $1/r$  کی تحقیقاتی قیمت ہے۔

یوں مساوات 55.6 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{a}$$

یہاں بھی  $v_{ee}$  کی توقیاتی قیمت وہی ہوگی جو پہلے تھی۔ مساوات 65.7 لیکن اب ہم  $z=2$  کی بجائے اختیار  $z$  استعمال کریں گے لہذا ہم  $a$  کو  $Z/2$  سے ظرب کرتے ہیں

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{5Z}{8a} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = \frac{5Z}{4} E_1$$



۔ ان تمام کو اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\langle H \rangle = [2Z^2 - 4Z(Z - 2) - (5/4)Z]E_1 = [-2Z^2 + (27/4)Z]E_1$$

اصول تغیریت کے تحت  $z$  کی کسی قیمت کے لیے بھی یہ مقدار  $E_{gs}$  سے تجاوز کرے گی۔  
بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت وہاں پائی جانے لگی جب  $\langle H \rangle$  کی قیمت کم سے کم ہو۔

$$\frac{d}{dZ} \langle H \rangle = [-4Z + (27/4)]E_1 = 0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$Z = \frac{27}{16} = 1.69$$

یہ ایک معقول نتیجہ نظر آتا ہے جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکز کو سپر کرتا ہے جس کی بنا اس کی موثر بار 2 کی بجائے 69.1 نظر آتی ہے۔ اس قیمت کو  $z$  میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^6 E_1 = -77.5 \text{ eV}$$

قبلہ تقدیر معلوم کی تعداد بڑھا کر زیادہ پیچیدہ پر کیا فعالیتات معالج لے کر ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اسی ترقیب سے انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے ہم ٹھیک جواب کے دو فیصد متریب ہیں لحاظ اس کو یہیں پر چھوڑتے ہیں۔

سوال 6.7

ہیلیم کی زمینی حال توانائی  $E_{gs} = -79 \text{ eV}$  لیتے ہوئے توانائی بارداری حاصل صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کا حساب کریں۔

اشارہ پہلے ہیلیم بارداری  $He^+$  جس کے مرکز کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے کی زمینی حال توانائی تلاش کریں۔

اس کے بعد دونوں توانائیوں کا فرق لیں سوال 7-7

اس حصہ میں ملتمل ترقیبات کا اتلاک  $H^-$  اور  $Li^+$  بارداری جن میں ہلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں اور جن کی مرکزوی بار بالستریب  $z=3, z=1$  ہیں کریں۔

باریک باریک ایک ایک بارداریا کے لیے کاموثر حبزوی سپر شد امسکزوی بار تلاش کر کے  $E_{gs}$  کی بہترین بالائی حقدی متعین کریں۔

بارداریا  $H^-$  کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ  $\langle H \rangle > -13.6 \text{ eV}$  ہوگا جس کے تحت کوئی مقید حال نہیں ہوگا۔

توانائی کی نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورت حال یہ ہوگی کہ الیکٹران درست ہو کر پیچھے مدرل حاڈروجن جوہر چھوڑے۔

یہ زیادہ حیرانگی کی بات نہیں ہے چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے یہاں الیکٹران اور مرکز کے بیچ قوت کشش کم ہے۔

جبکہ الیکٹرانوں کے بیچ قوت دفع زیادہ ہے۔ جو اس جوہر کے توڑے گا حقیقت میں یہ نتیجہ درست نہیں ہے

۔ زیادہ نفیس برکیہ فعال معالج ساتھ 18.7 دیکھیں نتیجہ کر کے دکھایا جاسکتا ہے کہ  $E_{gs} < -13.6 \text{ eV}$  ہوگا

لحاف مقید حال موجود ہوگا۔ البتہ یہ بمشکل مقید ہوگا اور کوئی حبنی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں یوں  $H^-$  کا

غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا ہے۔ تمام عبور از تھراپا کو اور از تھراپا سے ہوں گے اسی لیے ان کا متالیا تجربہ

گاہ میں کرنا دشوار ثابت ہوتا ہے اگرچہ سورج کی سطح پر ان کی کشیر تعدا دپائی جاتی ہے۔

حصہ 3.7

ہائیڈروجن سالہ باردار یہ اصول تغیریت کی ایک اور پلاسی کی استعمال۔ ہائیڈروجن سالہ باردار یہ  $H_2^+$  کا معائنہ ہے۔ ہائیڈروجن سالہ باردار یہ دو پروٹان کی کلوں میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ شکل 5.7 میں منلوقت مندرجہ کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان ساکن ہیں اور ان کے بیچ فاصلہ R ہے۔ اگرچہ اس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ R کی اصل قیمت ہوگی۔ ہمیشہ درجہ ذیل ہوگا۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

جہاں  $r_1$  اور  $r_2$  الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلہ ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک ایسا پھر کی طفل موج کا انتخاب کریں جس کو استعمال کرتے ہوئے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے حاصل ہو۔ درحقیقت ہم صرف اتنا جاننا چاہتے ہیں کہ آیا اس نظام میں بند پیدا ہوگا یعنی آیا ایک ماڈل ہائیڈروجن جوہر اور ایک آزاد پروٹان سے کیا اس نظام کی توانائی کم ہوگی۔ اگر ہماری پھر کی طفل موج دکھائے کہ ایک ممکنہ حال پایا جاتا ہے۔ اس سے زیادہ بہتر پھر کی طفل اس بند کو مزید طاقتور بنائے گا۔ پھر کی طفل موج تیار کرنے کی خاطر مندرجہ کریں زمینی حال مہوار 80.4

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

میں ایک ہائیڈروجن جوہر کے متعریب لامتناہی دوسرا پروٹان متعریب لاکر فاصلہ R پر رکھ کر باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس جوہر سے r کافی بڑا ہو تب الیکٹران کی طفل موج غالب زیادہ تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم ہمیں دونوں پروٹانوں کو ایک نظر سے دیکھنا ہوگا۔ لہذا کسی ایک کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک دوسرے جیسا ہوگا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درجہ ذیل روپ کے پھر کی طفل

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)]$$

پر غور کریں

۔ ماہر کو انظم کی اس ترکیب کو جوہری مدار چوں کا خطی جوڑ کہتے ہیں۔ سب سے پہلا کام پھر کی طفل کی معمول زنی ہے۔

$$1 = \int |\psi|^2 d^3r = |A|^2 \left[ \int |\psi_0(r_1)|^2 d^3r + \int |\psi_0(r_2)|^2 d^3r + 2 \int \psi_0(r_1)\psi_0(r_2) d^3r \right]$$

پہلے دو نکلات کا نتیجہ ایک ہے۔ چونکہ  $\psi_0$  خود معمول شدہ ہے۔ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درجہ ذیل مندرجہ کریں۔

$$I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} d^3r$$

ایسا معتدی نظام کھڑا کریں جس کہ نقطہ پر پروٹان 1 پایا جاتا ہو جبکہ Z محور پر فاصلہ R پر پروٹان 2 پایا جاتا ہو۔ شکل 6.7 یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$r_1 = r \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

لہذا درجہ ہوگا

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}/a} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

متغیر  $\phi$  کا مکمل  $2\pi$  دے گا۔ متغیر  $\theta$  کا مکمل حل کرنے کی خاطر درجہ ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

لہذا

$$d(y^2) = 2y dy = 2rR \sin \theta d\theta$$

ہوگا۔ تب درجہ ذیل ہوگا۔

$$\int_0^\pi e^{-\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}/a} \sin \theta d\theta = \frac{1}{rR} \int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a} y dy = -\frac{a}{rR} [e^{-(r+R)/a} (r+R+a) - e^{-|r-R|/a} (r+R-a)]$$

اب مکمل  $r$  با آسانی حل ہوگا۔

$$I = \frac{2}{a^2 R} [-e^{-R/a} \int_0^\infty (r+R+a) e^{-2r/a} r dr + e^{-R/a} \int_0^R (R-r+a) r dr + e^{R/a} \int_R^\infty (r-R+a) e^{-2r/a} r dr]$$

ان عملیات کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد کچھ الجبرائی تفصیل کے بعد درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$I = e^{-R/a} \left[ 1 + \left( \frac{R}{a} + \frac{1}{3} \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right) \right]$$

یہاں  $I$  کو مکمل ڈمب کہتے ہیں جو۔  $\psi_0(r_1)$  کا۔  $\psi_0(r_2)$  پر چپڑھنے کی مقدار کی پیشکش ہے۔ دیہان رہے کہ  $R \rightarrow 0$  کی صورت میں یہ ایک پہنچتا ہے۔ جبکہ  $R \rightarrow \infty$  کی صورت میں یہ صفر کو پہنچتا ہے۔ مکمل ڈمب  $i$  میں حبز زنی معمول زنی مساوات 38.7 درجہ ذیل ہوگا۔

$$|A|^2 = \frac{1}{2(l+1)}$$

اس کے بعد ہمیں پھر کی حال  $\psi$  میں  $H$  کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہوگا۔ درجہ ذیل۔

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{e_1} \right) \psi_0(r_1) = E_1 \psi_0(r_1)$$

جہاں  $E_1 = -13.6\text{eV}$  جو ہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے اور  $r_1$  کی جگہ  $r_2$  کے لئے بھی کچھ کے بنا درجہ ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} H\psi &= A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right] [\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)] \\ &= E_1\psi - A \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_2} \psi_0(r_1) + \frac{1}{r_1} \psi_0(r_2) \right] \right) \end{aligned}$$

یوں  $H$  کی توقعاتی قیمت درجہ ذیل ہوگی۔

$$\langle H \rangle = E_1 - 2|A|^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[ \langle \psi_0(r_1) | \frac{1}{r_2} | \psi_0(r_1) \rangle + \langle \psi_0(r_1) | \frac{1}{r_1} | \psi_0(r_2) \rangle \right]$$

میں آپ کے لئے باقی دو مفردار جو بلا واسطہ مکمل

$$D \equiv a \langle \psi_0(r_1) | \frac{1}{r_2} | \psi_0(r_1) \rangle$$

اور مبادلہ مکمل

$$X \equiv a \langle \psi_0(r_1) | \frac{1}{r_1} | \psi_0(r_2) \rangle$$

کہلاتا ہے۔ حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلا واسطہ مکمل کا نتیجہ درجہ ذیل

$$D = \frac{a}{R} - \left( 1 + \frac{a}{R} \right) e^{-2R/a}$$

اور مبادلہ مکمل کا نتیجہ درجہ ذیل ہے۔

$$X = \left( 1 + \frac{R}{a} \right) e^{-R/a}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور یاد رکھتے ہوئے مساوات 70.4 اور 72.4 کہ  $E_1 = -(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/2a)$  ہے۔ ہم درجہ ذیل آخذ کرتے ہیں۔

$$\langle H \rangle = \left[ a + 2 \frac{(D + X)}{(1 + L)} \right] E_1$$

اصول تغیریت کے تحت زمینی حال توانائی  $\langle H \rangle$  سے کم گی۔ یقیناً یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے۔ اس کے ساتھ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی بھی پائی جائے گی۔

$$V_{pp} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{2a}{R} E_1$$

یوں نظام کی کل توانائی مائٹس  $E_1$  کی اکائیوں میں  $R/a \equiv x$  کا طفال لکھتے ہوئے درج ذیل سے کم ہوگا۔

$$F(x) = -1 + \frac{2}{X} \left\{ \frac{(1 - (2/3)x^2)e^{-x} + (1+x)e^{-2x}}{1 + (1+x + (1/3)x^2)e^{-x}} \right\}$$

اس طفال کو شکل 7.7 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ منفی ایک سے نیچے ہے۔ جہاں معدل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی مائٹس 6.13 اسیکڑان وولٹ سے توانائی کم ہے۔ لہذا اس نظام میں بند پیدا ہوگا۔ یہ ایک شریک گرمی بنی ہوگا، جہاں دونوں پروٹانوں کا اسیکڑان میں ایک دوسرے کے برابر حصہ ہوگا۔ پروٹانوں کے بیچ توازن فیصلہ تقریباً 4.2 ردا اس بوہر یعنی 3.1 اےنگسٹروم ہے۔ جس کی تجرباتی قیمت 06.1 اےنگسٹروم ہے۔ توانائی بندش کی حساب سے حاصل قیمت 8.1 اسیکڑان وولٹ جبکہ پیشانی قیمت 8.2 اسیکڑان وولٹ ہے۔ چونکہ اصول تغیریت ہر صورت زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے لہذا یہ بندش کی طاقت کی قیمت کم دے گا۔ بہر حال اس کی منکر نہ کریں۔ یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندش پایا جاتا ہے۔ ایک بہتر تغیراتی طفال اس مخفیہ کو مزید گہرا کرے گا۔

سوال 8.7

بلا واسطہ عمل D اور مبادلہ عمل X مساوات 45.7 اور 46.7 کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوات 47.7 اور 48.7 کے ساتھ کریں۔

سوال 9.7

فرض کریں ہم نے پھر کی طفال موج مساوات 37.7 میں منفی علامت استعمال کی ہوتی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)]$$

کوئی نیا عمل حل کیے بغیر مساوات 51.7 کا ماسل  $F(x)$  معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بند پیدا نہیں ہوگا۔ چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے لہذا اس سے یہ ثابت نہیں ہوگا کہ ایسے حال میں بند نہیں پایا جائے گا۔ تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی چاہیے۔ تبصرہ در حقیقت درج ذیل روپ کا کوئی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)]$$

کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اسیکڑان دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم چونکہ باہمی اول بدل  $r_1 \leftrightarrow r_2$  کی صورت میں ہملٹنی مساوات 35.7 غیر متغیر ہے۔ لہذا اس کے امتیازی طفالات کو بیک وقت P کے امتیازی طفالات چنا جاسکتا ہے۔ امتیازی فدر 1+ کے ساتھ مثبت علامت۔ مساوات 37.7 اور امتیازی فدر منفی 1 کے ساتھ منفی علامت مساوات 52.7 ہوگا۔ زیادہ عمومی صورت مساوات 53.7 کا استعمال مزید فائدہ نہیں دے گا۔ اگرچہ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔

سوال 10.7

نقطہ توازن پر  $F(x)$  کی دوہر تفرق سے ہائیڈروجن سالہ باردار یہ حصہ 3.2 میں دونوں پروٹانوں کی ارتعاش کی فدرتی تعدد اومیکہ کی انداز قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔ اگر اس موردیش کی زمینی حال توانائی  $\hbar\omega/2$  نظام کی بندشی توانائی سے زیادہ ہو تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں موردیش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہوگا۔ ساتھ ہی مکید لرزشی سطحوں کی انداز تعدد دریافت کریں۔ تبصرہ آپ دلیلی طور پر کم سے کم نقطہ یا اس نقطہ پر دوہر تفرق حاصل نہیں کر پائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کیجئے گا۔

سوال 11.7  
الف) درج ذیل روپ کا برکی تفسال موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos(\pi x/a) & (-a/2 < x < a/2) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

دیگر صورت اس کا استعمال کرتے ہوئے ایک بودی ہارمونی سرعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں۔  
کی بہترین قیمت کیا ہوگی۔ H کمتر کا معازنہ ٹھیک توانائی سے کریں۔ تبصرہ: برکی تفسال میں  $a/2 \pm$  پر ایک بل پایا جاتا ہے ایک غیر استمراری تفرک کیا آپ تو اس سے نمٹنا ہوگا جیسے مجھے مثال 3.7 میں نمٹنا پڑا۔ ب) وقفہ  $\psi(x) = B \sin(\pi x/a)$  پر  $(-a, a)$  استعمال آتے ہوئے پہلے حال کی حد بندی تلاش کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں۔

سوال 12.7

الف) درج ذیل برکی تفسال موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2 + b^2)^n}$$

جہاں n اختیاری مستقل ہے استعمال کرتے ہوئے سوال 2.7 کو ہمویت دیں مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[ \frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ب) ہارمونی سرعش کی پہلی جہاں حال تو بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت درج ذیل برکی تفسال استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2 + b^2)^n}$$

جسزوی جواب مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[ \frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ج) آپ دیکھیں گے کہ  $n \rightarrow \infty$  حد بندی بالکل ٹھیک توانائیوں تک پہنچتی ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: برکی تفسالات امواج کو  $n=2, n=4$  اور  $n=6$  کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا معازنہ اصل تفسالات موج مساوات 59.2 اور 62.2 کے ساتھ کریں۔ تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی حنا طر درج ذیل مسائل سے آغاز کریں۔

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

سوال 13.1

ہائیڈروجن کی زمینی حال کی کم سے کم حد بندی گوسی برکی موج تفسال

$$\psi(r) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ جہاں معمول زنی سے تعین A ہوگا جبکہ b متبادل تبدیل مقدار معلوم ہے۔ جواب  $-11.5\text{eV}$   
سوال 14.7  
اگر فوٹان کی کمیت غیر صفر ( $m_\gamma \neq 0$ ) ہوتی تب مخفیا کی جگہ یو کو مخفیا

$$V(r) = \frac{-e^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

استعمال ہوتا جہاں ( $\mu = m_\gamma c / \hbar$ ) ہے۔ اپنی سررضی کا برکی تفال موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیا کے ہائیڈروجن جو برکی بندشی توانائی کی قیمت معلوم کریں۔ آپ  $1 \ll \mu a$  لیں اور اپنے جواب کو  $(\mu a)^2$  رتبی درستی تک لکھیں  
سوال 15.7 مندرجہ کریں آپکو ایک ایسا کو انٹم نظام دیا جاتا ہے جسکا ہیملٹنی  $H_0$  صرف دو امتیازی حالات کا حاصل ہو  $\psi_a$  جسکی توانائی  $E_a$  اور  $\psi_b$  جسکی توانائی  $E_b$  ہو۔ یہ عمومی معمول شدہ اور غیر انہتاتی ہے۔ مزید مندرجہ کریں کہ  $E_a < E_b$  ہے۔ اب ہم استر ا ب  $H'$  چالو کرتے ہیں۔ جسکے کالبی ارکان درج ذیل ہیں۔

$$\langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle = 0 \quad \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle = \hbar$$

جہاں  $\hbar$  کوئی مخصوص مستقل ہے

(الف) متر ہیلٹونی کی امتیازی امتدار کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں تلاش کریں۔  
(ب) رتبہ دوم نظریہ استر ا ب استعمال کرتے ہوئے متر ب نظام کی توانائیوں کی اندازی قیمت معلوم کریں۔  
(ج) متر ب نظام کی زمینی حال کی توانائی کی اندازی قیمت درج ذیل روپ کا برکی تفال

$$\psi = (\cos \phi) \psi_a + (\sin \phi) \psi_b$$

استعمال کر کہ اصول تغیریت سے حاصل کریں۔ جہاں  $\phi$  متبادل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

تبصرہ: استر ا ب کا خطی جوڑ لازماً معمول شدہ دے گا۔

(د) اپنے جوابات کا جز الف، ب، اور ج کے ساتھ معازنہ کریں۔ یہاں اصول تغیریت اتنا زیادہ درست کیوں ہے ؟

سوال 16.7 ہم سوال 15.7 میں تیار کی گئی ترکیب مثال کے طور پر یکساں کنطیسی میدان  $\vec{B} = B_z \hat{k}$  میں ایک ساکن الیکٹرون پر غور کرتے ہیں۔ جسکا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$H_0 = \frac{eB_z}{m} S_z$$

امتیازی چپکر کار  $x_a$  اور  $x_b$  ان کی مطابقتی توانائیاں  $E_a$  اور  $E_b$  مساوات 161.7 میں دی گئی ہیں۔ اب ہم  $x$  رخ درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$H' = \frac{eB_x}{m} S_x$$

کے استر ا ب کو چالو کرتے ہیں۔

(الف) استر ا ب  $H'$  کے کالبی ارکان تلاش کر کہ تصدیق کریں کہ ان کا ساخت مساوات 55.7 تو طرح ہے یہاں  $H$  کیا ہوگا؟

ب) دوم رتبی نظریہ استرابط میں نئی زمینی حال توانائی کو سوال 15.7 (ب) استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

ج) زمینی حال توانائی کی حدودی سوال 15.7 (ج) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اصول تغیریت سے حاصل کریں

سوال 17.7

اگرچہ ہیلیم کے لیے مساوات شرودنگر کو ٹھیک ٹھیک حل نہیں کیا جاسکتا ہے مگر ہیلیم کے ایسے نظام پائے جاتے ہیں جنکے ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ اس کی ایک سادہ مثال ربڑی پٹی ہیلیم ہے جس میں کونوں کی بجائے قانون ہاک کی درج ذیل قوتیں استعمال ہونگی

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4}m\omega^2|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2$$

الف) دکھائیں کہ متغیرات  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  کی بجائے متغیرات

$$\vec{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad \vec{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

استعمال کرنے سے ہیملٹنی دو الیحدہ الیحدہ تین آبادی ہارمونی مرتعشات میں تقسیم ہوگا۔

$$H = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_\mu^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mu^2 \right] + \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_\nu^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)m\omega^2\nu^2 \right]$$

ب) اس نظام کی ٹھیک ٹھیک زمینی حال توانائی کیا ہوگی؟

ج) ٹھیک ٹھیک حل نہ جاننے تو صورت میں ہم ہیملٹنی کی اصل صورت مساوات 59.7 پر حصہ 2.7 کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔

سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے حساب کیجیے گا۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازت کریں۔

$$\langle H \rangle = 3\hbar\omega(1 - \lambda/4)$$

سوال 18.7

ہم نے سوال 7.7 میں دیکھا کہ سپر کیا گیا برکی تقال موج، مساوات 27.7 جو ہیلیم کے لیے مفید ثابت ہوا منفی ہائیڈروجن باردار یا میں مقید حال میں موجودگی کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چند را شکر نے درج ذیل کا برکی تقال موج استعمال کیا

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) + \psi_2(r_1)\psi_1(r_2)]$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{z_1^3}{\pi a^3}} e^{-z_1 r/a} \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{z_2^3}{\pi a^3}} e^{-z_2 r/a}$$

یعنی انھوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی احبازت دی ایک الیکٹران کو مرکزہ کے قریب اور دوسرے کو مرکزہ سے دور تصور کیا گیا۔ چونکہ الیکٹران متبادل زمرہ ہے لہذا فضائی تقال موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشا کلی ہونا ہوگا چکر حال جہاں موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں پایا احبازت خلاف تشا کلی ہے۔ دکھائیں کہ متبادل تبدیل مقدار معلوم  $Z_1$  اور  $Z_2$  کی قیمتوں کو سوچ کہ منتخب کرنے سے  $\langle H \rangle$  کی قیمت 13.6eV - سے کم حاصل کی جاسکتی ہے



جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{E_1}{x^6 + y^6} (-x^8 + 2x^7 + \frac{1}{2}x^6y^2 - \frac{1}{2}x^5y^2 - \frac{1}{8}x^3y^4 + \frac{11}{8}xy^6 - \frac{1}{2}y^8)$$

جہاں  $x \equiv 2\sqrt{Z_1 Z_2}$  اور  $y \equiv 1.039 Z_1$  چونکہ یہ ایک سے بڑا ہے لہذا اس کو موثر مرکزی بار تصور نہیں کیا جاسکتا ہے۔ تاہم اس کے باوجود اس کو برکی تفال موج مقبول کیا جاسکتا ہے۔ اور  $Z_2 = 0.283$  استعمال کیا

سوال 19.7

جوہری برکن کو برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ دو ذرات ملاً دو ڈیوٹران کو ایک دوسرے کے اتنا مقرب لانا ہے کہ کولمب قوت دفع پر ان کے بچ کشتی تاہم اثر مقرب مرکزی قوتیں سبقت لے جائیں ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کہ ان کو بلا منصوبہ تادم کے ذریعہ انہیں ایک دوسرے کے مقرب زبردستی لاسکتے ہیں۔ دوسری تجویز میون عمل انگیز کا استعمال ہے جس میں ہم ہائیڈروجن سالمہ باردا پر اٹان کی جگہ ڈیوٹران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹران کے بچ تو ازنی فاصلہ کی پیش گوئی کریں۔ اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی خاطر کیوں الیکٹران سے میون بہتر صابت ہوگا۔

سوال 20.7

کو انٹم نقطے مندرجہ ذیل شکل 8.7 میں دکھائے گئے سلیبی خطہ پر دوبارہ میں حرکت کرنے کا پابند بنایا جائے سلیبی ہاتھ لامتناہی تک پہنچتے ہیں۔ سلیب کے اندر مختفی صفر ہے جو کہ اس کے باہر لامتناہی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تنظیم توانائی مقید حال کا حامی ہے۔  
(الف) دکھائیں کہ کم سے کم توانائی جو لامتناہی تک پہنچتی ہے درج ذیل ہے

$$E_{\text{threshold}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2};$$

اس سے کم توانائی کا ہر حل لامتناہی کا مقید ہوگا۔

اشارہ: ایک بازو پر  $(x > a)$  مساوات شر وڈنگر کو الحیدگی متغیرات کو مدد سے حل کریں۔ اگر تفال موج لامتناہی تک پہنچتی ہے تب اس کا  $x$  پر انحصار  $e^{ik_x x}$  جہاں  $k_x > 0$  ہے کوروپ میں ہوگا۔  
(ب) اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ  $E$  سے کم توانائی زمینی حال کا ہوگا۔ درج ذیل برکی تفال موج استعمال کریں۔

$$\psi(x, y) = A \begin{cases} (1 - |xy|/a^2)e^{-\alpha} & |x| \leq a, |y| \leq a \\ (1 - |x|/a)e^{-\alpha|y|/a} & |x| \leq a, |y| > a \\ (1 - |y|/a)e^{-\alpha|x|/a} & |x| > a, |y| \leq a \\ 0 & \end{cases}$$

اس کو معمول پر لا کر  $A$  تعین کریں۔ اور  $H$  کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں  
جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2} \left( \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{6 + 11\alpha} \right)$$

اب  $\alpha$  کے لحاظ سے کم سے کم قیمت تلاش کر کہ دکھائیں یہ نتیجہ E سے کم ہوگا۔ سلیب کی تشکل سے پورا فائدہ اٹھائیں آپکو صرف خطہ  $1/8$  پر مکمل لینا ہوگا۔ باقی سات مکمل بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دیہان رہے کہ اگر چہ ہر کی قتال موج استمراری ہے اس کے تفرکات غیر استمراری ہیں۔ رکاوٹی لکیریں  $x = \pm a$  اور  $x = 0, y = 0$  پر  $y = \pm a$  پائی جاتی ہیں۔ جہاں آپکو مثال 3.7 کی تکنیک بروکار لانی ہوگی

## باب ۸

# ونزل وکرامرز و برلوان تخمین

ونزل، کرامرز، برلوان ترکیب سے غیر متابع وقت شروڈنگر مساوات کی یک بُعدی تخمینی حل حاصل کیے جاسکتے ہیں اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفرقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شروڈنگر کی رد اسی حصے پر کیا جاسکتا ہے۔ یہ بالخصوص مکسید حال توانائیوں اور محض رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں مفید ثابت ہوتا ہے۔ اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ای کذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو اک ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ  $V(x)$  ایک مستقل ہو۔ تفاعل موج  $E > V$  کی صورت میں درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \sqrt{2m(E - V)/\hbar} \quad \text{جہاں}$$

وائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لیے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لیے منفی علامت استعمال ہوگا یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے جس کا طول موج  $\lambda = 2\pi/k$  اٹل ہے اور اس کا جیٹ  $A$  غیر تغیر ہے۔ اب فرض کریں کہ  $V(x)$  مستقل نہیں ہے بلکہ  $\lambda$  کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہے تاکہ کئی مکمل طول امواج پر مخفیہ کو مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\psi$  عملائیں نہ ہوگا تاہم اس کا طول موج اور جیٹ  $x$  کے ساتھ ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوگا۔ یہی ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی بنیاد ہے۔ درحقیقت یہ  $x$  پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے تیز ارتعاشات جنہیں طول موج اور جیٹ میں آہستہ آہستہ تبدیلیی ترمیم کرتا ہو۔

اسی طرح  $E < V$  جہاں  $V$  ایک مستقل ہے کی صورت میں  $\psi$  قوت نمائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \sqrt{2m(V - E)/\hbar} \quad \text{جہاں}$$

اور اگر  $V(x)$  ایک مستقل نہ ہو بلکہ  $1/\kappa$  کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو تب حل عملاً قوت نمائی ہوگا البتہ  $A$  اور  $\kappa$  اب  $x$  کے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتے تفاعلات ہوں گے۔ یہ نظریہ کلاسیکی نقطہ واپسی جہاں

$E \approx V$  ہو کی متریبی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا چونکہ یہاں  $\lambda$  یا  $1/\kappa$  لامتناہی تک بڑھتا ہے اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ  $V(x)$  آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے اس تخمین میں نقصات واپسی سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

## ۸.۱ کلاسیکی خط

مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

اس ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے جس کی کل توانائی  $E$  اور محلی توانائی  $V(x)$  ہو۔ منسل حال میں  $E > V(x)$  ہے لحاظ  $V(x)$  حقیقی ہوگا اس خط کو ہم کلاسیکی خط کہتے ہیں کلاسیکی طور پر ذرہ  $x$  کے ساتھ پرہنے کا پابند ہوگا شکل 8.1۔ عمومی طور پر  $\psi$  ایک مخلوط تقاضا ہوگا جس کو حیث  $A(x)$  اور حیث  $\phi(x)$  جہاں دونوں حقیقی ہیں کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

ہم  $x$  کے لحاظ سے تفرق کو قوت نمائی میں چھوٹی لکیر سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

اس کو مساوات 8.1 میں پڑ کرتے ہیں

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$

دونوں ہاتھ کی حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات حاصل ہوگئی جبکہ دونوں ہاتھ کے خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسرا حقیقی مساوات حاصل ہوگا

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A, \quad \text{یا} \quad A'' = A \left[ (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

اور

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0, \quad \text{یا} \quad (A^2\phi')' = 0$$

مساوات 8.6 اور 8.7 بر لحاظ سے اصل شرودنگر مساوات کے معادل ہیں ان میں سے دوسرے کو با آسانی حل کیا جاسکتا ہے

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2, \quad \text{یا} \quad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں  $C$  ایک حقیقی مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی مساوات 8.6 کو عموماً حل کرنا ممکن نہیں ہوگا یہی ہمیں تخمینہ کی ضرورت پیش آتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ حیطہ  $A$  بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے لحاظ سے  $A''$  متاثر نظر انداز ہوگا۔ بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $(\phi')^2$  اور  $p^2/\hbar^2$  دونوں سے  $A''/A$  بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم مساوات 8.6 کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}, \quad \text{یا} \quad \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

میں فعل حال اس کو ایک غیر قطعی عمل لکھتا ہوں کسی بھی مستقل کو  $C$  میں زن کیا جاسکتا ہے جس کے تحت یہ مخلوط ہو سکتا ہے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}$$

اور تخمینہ عمومی حل انکا خطی جوڑ ہوگا جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت نقطہ  $x$  پر ذرہ پایا جانے کا احتمال اس نقطہ پر ذرے کے کلاسیکی معیار حرکت لحاظ ستمی رفتار کا بلکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں چونکہ جس مقام پر ذرہ کی رفتار تیز ہو وہاں اسے پانے کا احتمال کم سے کم ہوگا۔ درحقیقت بعض اوقات تفرقی مساوات میں جزو  $A''$  کو نظر انداز کرنے کی بجائے اس نیم کلاسیکی مشاہدہ سے آغاز کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اعز کیا جاتا ہے۔ مواخر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے لیکن اوّل الذکر بہتر عملی و فب پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ فرض کر لیں ہمارے پاس ایک لامستناہی چکور کنواں ہو جس کی تہ غیر ہموار ہو شکل 8.2۔

$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کچھ مخصوص تفاعل}, & 0 < x < a, \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کنواں کے اندر ہر جگہ  $E > V(x)$  منرج کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۴) \quad \phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'$$

جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی کا منتخب کر سکتے ہیں یہاں یہی کیا گیا۔ اب  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  لائٹا صفر ہوگا لحاظ چونکہ  $\psi(0) = 0$  ہے  $C_2 = 0$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $x = a$  پر بھی  $\psi(x)$  صفر ہوگا لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۵) \quad \phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ماخوذ

$$(۸.۱۶) \quad \boxed{\int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar}$$

کوانٹائی کی درج بالا شرط تخمینی احبازتی توانائیاں تعیین کرتا ہے۔

مثلاً اگر کنویں کی تہ ہموار ہو  $V(x) = 0$  تب  $p(x) = \sqrt{2mE}$  ایک مستقل ہوگا اور مساوات 8.16 کے تحت  $pa = n\pi\hbar$  یا

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

جو لامستناہی چکور کنواں کی توانائیوں کا پرانا کلیہ ہے مساوات 2.27- یہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ہمیں بالکل ٹھیک ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے چونکہ اصل تفاعل موج کا حیطہ مستقل ہے لحاظ  $A''$  کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا۔ □

سوال ۸.۱: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامستناہی چکور کنواں کی اجزائی توانائیاں  $E_n$  تلاش کریں جس کی آدھی تہ میں  $V_0$  بسندی کی سیڑھی پائی جاتی ہو شکل 6.3

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو  $V_0$  اور  $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$  کی صورت میں لکھیں جہاں بغیر سیڑھی لامستناہی چکور کنواں کے  $n$  ویں اجزائی توانائی  $E_n^0$  ہے۔ مندرجہ کریں  $E_1^0 > V_0$  تاہم یہ مندرجہ نہ کریں کہ  $E_n \gg V_0$  ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال 6.1 میں رتبہ اوّلں طریقہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹی  $V_0$  جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہوگا یا بہت بڑی  $n$  جہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کارآمد ہوگی کی صورت میں جوابات ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل، کرامرز، برلوان کلیہ مساوات 8.10 کو  $\hbar$  کی طبعی پیمائش اور  $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$  سے حوصلہ افزائی حاصل کر کے درج ذیل لکھتے ہیں آزاد ذرہ کی تفاعل موج

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں  $f(x)$  کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ دیہان رہے کہ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے لحاظ ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے۔

(الف) اس کو مساوات 8.1 روپ کی مساوات شرودنگر میں پُر کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(ب) تفاعل  $f(x)$  کو  $\hbar$  کی طبعی تسلسل کی صورت

$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر  $\hbar$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$(f'_0)^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

(ج) انہیں  $f_0(x)$  اور  $f_1(x)$  کے لیے حل کر کے دیکھائیں کہ  $\hbar$  کی اوّل رتبہ تک آپ مساوات 8.10 دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عددی کی لوگ ردیم کی تعریف  $\ln(-z) = \ln(z) + in\pi$  ہے جہاں  $n$  ایک طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں تب دونوں اطراف کو قوت نم میں منتقل کر کے دیکھیں۔

## ۸.۲ سرنگزنی

اب تک میں  $E > V$  فرض کرتا رہا ہوں لحاظ  $V(x)$  حقیقی ہوتا ہے۔ میں غیر کلاسیکی خط  $E < V$  کے لیے بھی بالکل اے طرح مطابقتی نتیجہ لکھ سکتا ہوں جو عین مساوات 8.10 ہوگا تاہم اب  $p(x)$  تخیلی ہوگا

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

ایک مثال کے طور پر ایک مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہو شکل 8.3 سے بھراؤ کا مسئلہ پر غور کریں۔ درکاوٹ کے بائیں جانب  $x < 0$

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

جہاں  $A$  آمدی حیطہ اور  $B$  منعکس حیطہ ہے جبکہ  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے جسے  $k$  2.5 دیکھیں۔ درکاوٹ کے دائیں جانب  $x > a$

$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx};$$

$F$  ترسیلی حیطہ جبکہ ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}.$$

سرنگزنی خط  $0 \leq x \leq a$  میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درج ذیل دیگی

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}.$$

اگر رکاوٹ بہت بلند یا اور بہت چوڑا ہو یعنی جب سرنگزنی کا احتمال بہت کم ہو قوت نمائی بڑھتے جسز کا عددی سر  $C$  لازماً چھوٹا ہوگا درحقیقت لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا اور تنفس عمل موج کچھ شکل 8.4 کے نقش پر ہوگی۔ غیر کلاسیکی خط پر قوت نمائی میں کل کمی

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}.$$



آمدی اور ترسیلی امواج کے اعلانی حیٹے تعین کرتا ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۲) \quad T \cong e^{-2\gamma}, \text{ جہاں } \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx.$$

مثال ۸.۲: ایلفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ سن 1928 میں جارج گامو نے مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے ایلفا تحلیل کی پہلی کامیاب وجہ پیش کی ایلفا تحلیل سے مراد چند مخصوص تابکار مرکزہ سے ایلفا ذرہ جو دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے کا اخراج ہے۔ چونکہ ایلفا ذرہ مثبت بار 2e کا حامل ہے لحاظ جیسے ہی یہ مرکزہ سے اشتنا دور ہو جاتا ہے کہ یہ مرکزی بندشی قوت سے منسار کر کے مرکزہ کے باقی حصہ کا بار Ze اس کو برقی قوت دفع سے دور جانے پر مجبور کرے گا تاہم اسکو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا جو یورینیم کی صورت میں خارجی ایلفا ذرہ کی توانائی سے دوگنے سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر شکل 8.5 کے مخفیہ سے ظاہر کیا جس نے مرکزہ کے رداس  $r_1$  و صحت تک مرکزی قوت کشش کو مستثنیٰ چپکور کنواں سے ظاہر کیا گیا جس کو کولومب قوت دفع کی دم کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ گامو نے کوانٹم سرنگزنی کو ایلفا ذرہ کی منسار کی وجہ کرار دیا یوں پہلی بار کوانٹم میکانیات کا اطلاق سرکردی طبیعیات پر کیا گیا۔

اگر خارجی ایلفا ذرے کی توانائی E ہو تب بیرونی واپسی نقطہ  $r_2$  درج ذیل تعین کرے گا

$$(۸.۲۳) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E.$$

ظاہر ہے مساوات 8.22 میں قوت  $\gamma$  درج ذیل ہوگا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr.$$

اس تکمل میں  $r \equiv r_2 \sin^2 u$  پر کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے

$$(۸.۲۴) \quad \gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right].$$

عام طور پر  $r_1 \ll r_2$  ہوگا لحاظ ہم چھوٹے زاویوں کے تخمین  $\sin \epsilon \cong \epsilon$  استعمال کر کے نتیجہ کی سادہ روپ حاصل کرتے ہیں

$$(۸.۲۵) \quad \gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ \frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}.$$

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi \sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

ایک عمومی مرکزہ کی جامت تقریباً ایک  $10^{-15} \text{ fm}$  ہوتی ہے۔

اگر ہم مرکزہ کے اندر ایٹماذہ کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار  $v$  ہے تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً  $2r_1/v$  ہوگا لحاظ تصادم کا تعدد  $v/2r_1$  ہوگا۔ ہر تصادم پر منراق ہونے کا احتمال  $e^{-2\gamma}$  ہے لحاظ اکائی وقت میں احسراج کا احتمال  $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$  ہوگا اور یوں ولدہ مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم  $v$  نہیں جانتے ہیں لیکن اس سے زیادہ منرق نہیں پڑتا ہے چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوت نمائی حبز ضربی پچھیں رتی مقدار تک تبدیل ہوتا ہے جس کے سامنے  $v$  کی تبدیلی متابل نظر انداز ہے۔ بالخصوص عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو  $1/\sqrt{E}$  کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط شکل 8.6 حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 8.25 اور 8.28 کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک مستنای چپکور کاوٹ جس کی انچائی  $V_0 > E$  اور پوٹائی  $2a$  ہو سے ایک ایٹماذہ جس کی توانائی  $E$  ہو کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات 8.22 استما کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ بالکل ٹھیک نتیجہ سوال 2.33 کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۴: مساوات 8.25 اور 8.28 استعمال کرتے ہوئے  $U^{238}$  اور  $PO^{212}$  کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً مستقل ہوتی ہے لحاظ  $(r_1)^3$  اور  $A$  پروٹان اور نیوٹرانوں کی تعدادوں کا مجموعہ تقریباً برابر ہوئے۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}.$$

خارج شدہ ایٹماذہ کی توانائی کلیہ آئنسٹائن  $E = mc^2$  سے اغز کیا جاسکتا ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2.$$

جہاں  $m_p$  ولدہ مرکزہ کی کیمیت  $m_d$  بیٹی مرکزہ کی کیمیت اور  $m_\alpha$  ایٹماذہ یعنی  $He^4$  مرکزہ کی کیمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مرکزہ کیا ہوگا یا درکھیں کہ ایٹماذہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لیکر منرار ہوتا ہے لحاظ  $Z$  سے دو منفی کریں اور  $A$  سے چار منفی کریں گے۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی انصر تعین کریں۔ سمتی رفتار  $v$  کی اندازانجیت  $E = (1/2)m_\alpha v^2$  سے حاصل کریں یہ مرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتا ہے لحاظ  $v$  کی قیمت اصل سے زیادہ دیگاتا ہم اس مرحلہ پر ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی انصر کی تجربہ سے حاصل عرصہ حیات بالترتیب  $6 \times 10^9$  سال اور  $0.5 \mu\text{s}$  ہے۔

## ۸.۳ کلیہ جوڑ

اب تک کے بحس و منکر میں میں فرض کرتا رہا کہ مخفی کنواں یار کا دھڑ کی دیواریں انتہائی تھیں جس کی بسا بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ درحقیقت ہمارے بنیادی نتائج مساوات 8.16 اور 8.22 اس صورت بھی کافی حد تک دوست ہو گئے جب کناروں کی ڈھلان اتنی زیادہ نہ ہو یقیناً نظریہ گامو میں ایسی ہی صورت پر انکااطلاق کیا گیا۔ بسر حال ہم نقطہ واپسی  $E = V$  جہاں کلاسیکی اور غیر کلاسیکی خطے ایک دوسرے کے ساتھ جڑتے ہیں اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نا قابل استعمال ہوتی ہے پر تفاعل موج کا تریبی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مکید حال مسئلہ شکل 8.1 کو دیکھتا ہوں آپ مسئلہ بجھراو سوال 8.10 کر سکتے ہیں۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم محور کو یوں رکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپسی  $x = 0$  پر واقع ہو شکل 8.7۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Be^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \text{ اگر}, \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} De^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

یہ فرض کرتے ہوئے تمام  $x > 0$  سے  $V(x)$  بڑا ہوگا ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمائی کو خارج کر سکتے ہیں چونکہ  $x \rightarrow \infty$  کرنے سے یہ بے فتابو بڑھتا ہے۔ ہمارا کام ان دو حوالوں کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے تاہم یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامن پیش آتا ہے۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نے نقطہ واپسی جہاں  $p(x) \rightarrow 0$  ہوگا  $\psi$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تفاعل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا ہے اور جیسا کہ ہمارا گمان تھت ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نقطہ واپسی کی پڑوس میں نا قابل استعمال ہوتا ہے لیکن احبازتی توانائیوں کو نکالت واپسی پر سرحدی شرائط تعین کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا پیوند کار تفاعل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپسی کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تفاعل موج  $\psi_p$  صرف مدہ کی پڑوس میں چاہیے لحاظ ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمین کر کے اس خطی  $V$  کے لیے شر و ڈنگر مساوات حل کرتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p,$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p,$$

جہاں درج ذیل ہے

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}.$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان  $\alpha$  کو غیر تابع متغیر میں زن کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x,$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p.$$

یہ مساوات ایری ہے جس کے حل تفاعلات ایر کہلاتے ہیں چونکہ مساوات ایری دو رتی تفرقی مساوات ہیں لحاظ دو خطی غیر تابع ایری تفاعلات  $Ai(z)$  اور  $Bi(z)$  پائے جاتے ہیں۔ ان کا تعلق

جدول ۸.۱: ایری تفاعلات کے چند خواص

$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$ <p style="text-align: center;">ایری تفاعلات کے خطی مجموعہ <math>Ai(z)</math> اور <math>Bi(z)</math></p> $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$ $Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{s^3}{3} + s} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$	<p>تفریقی مساوات:</p> <p>حل:</p> <p>نکلی روپ:</p>
---	---

رتبہ 1/3 کے میل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیئے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج  $Ai(z)$  اور  $Bi(z)$  کا خطی جوڑ

$$(۸.۳۷) \quad \psi_p(x) = a Ai(\alpha x) + b Bi(\alpha x).$$

ہوگا۔ جہاں  $a$  اور  $b$  مناسب مستقالات ہیں۔

اب  $\psi_p$  مبدہ کی پڑوس میں تخمینی تفاعل موج ہے ہم نے مبدہ کے دونوں اطراف متربی مشترکہ خطے میں  $\psi_p$  کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کے ساتھ ہم پلو بنانا ہوگا شکل 8.9 دیکھیں۔ دونوں اطراف کے مشترکہ خطے نقطہ واپسی کے اتنی متربی ہیں کہ خطی مخفیہ  $\psi_p$  کافی حد تک درست ہوگا لحاظ  $\psi_p$  اصل تفاعل موج کا بہترین تخمین ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی مناصلہ پر ہیں کہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کارآمد ہوگا لحاظ مساوات 8.34 کی لامیت میں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۳۸) \quad p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar \alpha^{3/2} \sqrt{-x}.$$

بالخصوص مشترکہ خطہ دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar \alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar (\alpha x)^{3/2},$$

لحظہ و نزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۹) \quad \psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar \alpha^{3/4} x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}.$$

بڑی  $z$  کی صورت میں ایری تفاعلات کی متقاربی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خطہ دو میں پیوندکار تفاعل موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}.$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha \hbar}} D, \quad \text{اور} \quad b = 0.$$

ہم ابھی کچھ مشترکہ خطہ ایک کے لیے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 میں  $p(x)$  دیگاتاہم اس بار  $x$  منفی ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3} \hbar (-\alpha x)^{3/2}$$

اور و نزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar \alpha^{3/4} (-x)^{1/4}}} \left[ B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right].$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی  $z$  کے لیے ایری تفاعل کی متقارب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں  $b = 0$  لیا گیا ہو درج ذیل ہوگی

$$(۸.۴۴) \quad \begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[ \frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

مشترکہ خطہ ایک میں و نزل، کرامرز، برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنہ سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar \alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar \alpha}}.$$

جس میں  $a$  کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۸.۴۵) \quad B = -ie^{i\pi/4}D, \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4}D.$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیدا ورز کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولی متقل  $D$  کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبدہ سے اختیاری نقطہ  $x_2$  منتقل کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۴۶) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2; \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2. \end{cases}$$

مثال ۸.۳: ایک انتصابی دیوار والا محفہ کنواں۔ فرض کریں ایک محفہ کنواں کی  $x = 0$  پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو شکل 8.10۔ ایسی صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا لفظ مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یادرج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۷) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left( n - \frac{1}{4} \right) \pi \hbar.$$

مثلاً نصف ہارمونی مرتعش

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & x > 0; \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}.$$

ہوگا۔ جہاں درج ذیل نوطہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

لفظ

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹائزنی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar \omega.$$

اس مخصوص صورت میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درحقیقت ٹھیک ٹھیک اجزائی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی سرعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □

مثال ۸.۴: بغیر انتضابی دیواروں کا مخفیہ کنواں۔ اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ شکل 8.11 (الف) ہوتی ہے مساوات 8.46 ونزل، کرامرز، برلوان تفعلات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی شکل 8.11 (ب) پر انہی وجوہات کو بروہ کار لاتے ہوئے درج ذیل ہوگا سوال 8.9

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx' \right], & x < x_1; \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x > x_1. \end{cases}$$

بالخصوص مخفیہ کنواں شکل 8.11 (ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ  $(x_1 < x < x_2)$  میں تفعل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}, \quad \text{جہاں}$$

لکھا جاسکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50 ظاہر ہے کہ  $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$  ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(۸.۵۱) \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ جہاں}}$$

یہ کوانٹائزنی شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنواں کی اجزائی توانائیاں تعین کرتا ہے دیہان رہے دو انتضابی دیواروں کے لیے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتضابی دیوار کے لیے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اُس عدد  $(0, 1/4, 1/2 \text{ یا } 3/4)$  کا فرق ہے جو  $n$  سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین بڑی  $n$  کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لحاظ سے یہ فرق صرف دیکھاوے کی حد تک ہے بشر حال یہ نتیجہ انتضابی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات کیے بغیر ایک سادہ مکمل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینہ اجزائی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل پلک کے ساتھ اچھلتا ہوا کمیت  $m$  کی گیند کے کلاسیکی مسئلے کا مشل کو انٹرمیکانی مسئلے پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی  $x$  تفاعل لکھیں؟ منفی  $x$  کی صورت میں مخفی لامستثنائی ہوگا چونکہ گیند وہاں کبھی کبھی نہیں جاسکتا۔

(ب) اس مخفی کے لیے مساوات شرودنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ایری تفاعل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی  $z$  کے لیے  $Bi(z)$  بے متابو بڑھتا ہے لحاظ اس کو رد کرنا ہوگا۔ تفاعل  $\psi(x)$  کو معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجزائی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  اور  $m = 0.100 \text{ kg}$  لیکر حاصل کریں۔

(د) اس سٹی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی  $\text{eV}$  میں کتنی ہوگی؟ اوسط ایلیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ ویریل سے  $\langle x \rangle$  تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی تھپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

(الف) اجزائی توانائیاں  $E_n$  کو  $m, g$  اور  $\hbar$  کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5 (ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پڑ کر کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بالکل ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کو انٹرم عدد  $n$  کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجزائی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جسکی زاویائی تعدد  $\omega$  ہو کی  $n$  ویں ساکن حال میں کمیت  $m$  کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی  $x_2$  تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی ( $d$ ) تک پہنچنا ہوگا کہ خطی مخفی مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی  $x_2$  ہو حاصل 1% تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2 + d) - V_{lin}(x_2 + d)}{V(x_2)} = 0.01,$$

تب  $d$  کیا ہوگا؟

(ج) جب تک  $z \geq 5$  ہو  $Ai(z)$  کا مقارب روپ 1% تک درست ہوگا۔ جب  $z$  (ب) میں حاصل کردہ  $d$  کے لیے  $n$  کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تاکہ  $\alpha d \geq 5$  ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی  $n$  کے لیے ایسا مترکہ خطہ موجود ہوگا جس میں خطی مخفی 1% تک کارآمد ہوگا اور بڑی  $z$  روپ کا ایری تفاعل بھی 1% تک درست ہوگا۔



سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ واپسی کے لیے پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات 8.50 صفر کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ شکل 8.12 سے بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی وزنل، کرامرز، برلوان تفعل موج لکھ کر آغز کریں

$$(۸.۵۲) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ A e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} + B e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} \right], & (x < x_1); \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ C e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2); \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ F e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2). \end{cases}$$

مستقل C کو صفر تصور کریں۔ سرنگزنی استعمال  $T = |F|^2 / |A|^2$  کا حساب کر کے دیکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہوگا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نائی مخفیہ

$$V(x) = \alpha |x|^v,$$

جہاں  $v$  ایک مثبت عدد ہے کی اجازتی توانائیوں کو وزنل، کرامرز، برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو  $v = 2$  جانچیں۔ جواب:

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[ (n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: وزنل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کر کے سوال 2.51 کی مخفیہ کے لیے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجہ کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب:  $-\left[(9/8) - (1/\sqrt{2})\right] \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کردی تشاکلی مخفیہ کے لیے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر وزنل، کرامرز، برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو  $l = 0$  کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar,$$

جہاں  $r_0$  نقطہ واپسی ہے یعنی ہم  $r = 0$  کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگر دی مخفیہ

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

کی اجازتی توانائیوں کی انداز قیمت تلاش کریں جہاں  $V_0$  اور  $a$  مستقل ہیں۔ صرف  $l = 0$  کی صورت پر غور کریں دیکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کیت پر نہیں ہوگا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left( \frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right).$$

سوال ۸.۱۴: ونزل، کرامرز، برلوان تنہین کی درج ذیل روپ

$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$

استعمال کر کے ہائڈروجن کی مکید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ معصر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز حبز و شاسل کرنامت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2.$$

آپ دیکھیں گے کہ  $l \gg 1$  اور  $n \gg 1/2$  کی صورت میں آپ کو بوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}.$$

سوال ۸.۱۵: تشکلی دوہرہ کنواں شکل 8.13 پر غور کریں۔ ہم  $E < V(0)$  والی مکید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خط (i)  $x > x_2$  (ii)  $x_1 < x < x_2$  اور (iii)  $0 < x < x_1$  کے لیے ونزل، کرامرز، برلوان تنہات موج لکھیں۔ نقطہ  $x_1$  اور  $x_2$  پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں  $x_2$  کے لیے ایسا کیا گیا ہے آپ کو  $x_1$  کے لیے کرنا ہوگا درج ذیل دیکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ 2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

(ب) چونکہ  $V(x)$  تشکلی ہے لحاظ ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تنہات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول الذکر صورت میں  $\psi'(0) = 0$  ہوگا جبکہ مناسر الذکر صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا۔ دیکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹائی شرط حاصل ہوتی ہے

$$(۸.۵۹) \quad \tan \theta = \pm 2e^{\phi}.$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۶۰) \quad \phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'.$$

مسوات 8.59 تمثینی احبازتی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ  $x_1$  اور  $x_2$  میں  $E$  کی قیمت داخل ہوتی ہے لحاظ  $\theta$  اور  $\phi$  دونوں  $E$  کے تقاضات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلندیا/ اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں  $\phi$  بڑا ہوگا لحاظ  $e^\phi$  انتہائی بڑا ہوگا۔ ایسی صورت میں مسوات 8.59 کے تحت  $\theta$  کی قیمتیں  $\pi$  کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت متفریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے  $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$  جہاں  $|\epsilon| \ll 1$  ہے لکھ کر دیکھیں کہ کوانٹل زنی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۶۱) \quad \theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}.$$

(د) مندرجہ کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکانی ہے

$$(۸.۶۲) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & x < 0, \text{ اگر} \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & x > 0, \text{ اگر} \end{cases}$$

اس مخفیہ کوترسیم کر کے  $\theta$  مسوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دیکھائیں

$$(۸.۶۳) \quad E_n^\pm \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \mp \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\phi}.$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نامتابل گزر ہو  $\phi \rightarrow \infty$  تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں  $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$  دوہری اخطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنواں میں یا دائیں کنواں میں ہو سکتا ہے۔ مستثنیٰ رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنوں کے بیچ رابطہ ممکن ہوگا لحاظ اخطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات  $(\psi_n^+)$  کی توانائی معمولی کم اور طاق تقاضات  $(\psi_n^-)$  کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

(و) مندرجہ کریں ذرہ دائیں کنواں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہتا زیادہ درست ہوگا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیں کنواں میں پایا جاتا ہو۔ دیکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنواں سے دوسرے اور دوسرے سے واپس پہلا کنواں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$(۸.۶۴) \quad \tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^\phi.$$

(ح) متغیر  $\phi$  کی قیمت جب  $V(0) \gg E$  میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لیے تلاش کریں اور دیکھائیں جب  $\phi \sim m \omega a^2 / \hbar$  تب

سوال ۸.۱۶: سٹارک اثر میں سرنگزنی۔ بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جوہر سے سرنگزنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار یہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربے میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ ترین یہ بعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری مستثنیٰ چپکوں کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنواں کی تہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہوگی یہاں فرض کریں  $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$  ہے۔ اشارہ: یہ  $2a$  چوڑائی کی لامتناہی چپکوں کنواں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب  $H' = -\alpha x$  متعارف کریں بیرونی برقی میدان  $E = -E_{ext}$  میں  $\alpha = eE_{ext}$  ہوگا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے ( $\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2$ )۔ کل مخفیہ کا حاکم ترمیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت  $x$  رخ سرنگزنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگزنی حبز ضرب  $\gamma$  مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو مزار ہونے کے لیے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب:  $\gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}$ ,  $\tau = (8ma^2 / \pi\hbar)e^2\gamma$ ۔

(د) معقول اعداد  $V_0 = 20 \text{ eV}$  بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت  $a = 10^{-10} \text{ m}$  عمومی جوہر کارڈاس  $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$  بیرونی  $E$  تجربے گاہ میں مضبوط میدان  $e$  اور  $m$  الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ  $\tau$  کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کو انجم سرنگزنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود بخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت  $m$  رداس  $R$  اور فتد  $h$  کا تکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی مکالم ( $h/2$ ) سے بلندی کو  $x$  سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی  $mgx$  ہوگی اور بوتل اس صورت گرے گی جب  $x$  کی قیمت فاصل قیمت  $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$  تک پہنچے۔ سرنگزنی احتمال مساوات 8.22 کو  $E = 0$  کے لیے حاصل کریں۔ حراری توانائی  $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$  لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پڑ کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

## باب ۹

# تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹم سکونیات کہا جاسکتا ہے جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت ہے  $V(r, t) = V(r)$ ۔ ایسی صورت میں تابع وقت شرودنگر مساوات

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے

$$\psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

جہاں  $\psi(r)$  غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$H\psi = E\psi$$

کو متعین کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو وقت نمائی حیز ضربی  $e^{iEt/\hbar}$  ظاہر کرتا ہے جو کسی بھی طبعی مقدار کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے  $|\psi|^2$  لحاظ تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑ تیار کر کے ہم ایسے تفاعلات موجد تیار کر سکتے ہیں جن کی تابعیت وقت زیادہ دلچسپ ہوتا ہے اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کے انتقال جنہیں بعض اوقات کوانٹم چھلانگ کہتے ہیں کی خاطر ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ متعارف کریں کوانٹم حرکیات۔ کوانٹم حرکیات میں ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا حل بالکل ٹھیک ٹھیک معلوم کیا جاسکتا ہے ہاں اگر ہیملٹنی میں غیر تابع وقت حصہ لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو تب ہم اسے اضطراب تصور کر سکتے ہیں۔ اس باب میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیسرا کرتا ہوں اور اس کا اطلاق جوہر سے اشعاعی اخراج اور انجذاب پر کرتا ہوں جو اس کی اہم ترین استعمال ہے۔

## ۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کنے کی غرض سے مندرجہ کریں غیر مضطرب نظام کے صرف دو حالات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی  $H^0$  کے امتیازی حالات ہوں گے

$$(9.1) \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b$$

اور معیاری عمودی ہوں گے

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ بلخصوص درج ذیل

$$(9.3) \quad \psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  موزا وہ فضائی تفاعلات یا چپکر کار یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے لحاظ میں  $\psi(t)$  لکھتا ہوں جس سے میرا مراد وقت  $t$  پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ہر جز اپنی خصوصی قوت نمائی جز ضرن کے ساتھ ارتقائے گ

$$(9.4) \quad \psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

ہم کہتے ہیں کہ حال  $\psi_a$  میں ذرہ پائے جانے کا احتمال  $|c_a|^2$  ہے جس سے ہمارا اصل مطلب یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت  $E_a$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_a|^2$  ہوگا۔ تفاعل  $\psi$  کی معمولی کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

### ۹.۱.۱ مضطرب نظام

اب مندرجہ کریں ہم تابع وقت اضطراب  $H'(t)$  چالو کرتے ہیں۔ چونکہ  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  ایک مکمل سلسلہ تشکیل کرتے ہیں لحاظ تفاعل موج  $\psi(t)$  کو بھی انکا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب  $c_b$  اور  $c_a$  وقت  $t$  کے تفاعلات ہوں گے

$$(9.6) \quad \psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

میں وقت نمائی جز ضریوں کو  $c_a(t)$  یا  $c_b(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں جیسا کہ بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کے صورت میں بھی پایا جاتا ہو ہمیں نظر آتا رہے ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات  $c_a$  اور  $c_b$  تعین کریں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ذرہ آغاز میں حال  $\psi_a$  ( $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت  $t_1$  پر  $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$  میں پایا جاتا ہو تب ہم کہیں گے کہ نظام  $\psi_a$  سے  $\psi_b$  میں منتقل ہوا ہے۔

ہم  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  معلوم کرنے کی غرض سے مطالب کرتے ہیں کہ  $\psi(t)$  تابع وقت شرودنگر مساوات کو متبع کرے

$$(۹.۷) \quad H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \text{جس } H = H^0 + H'(t)$$

مساوات 9.6 اور 9.7 سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} & c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ &= i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_bt/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات 9.1 کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہتھ کے آکری دو اجزاء کے ساتھ کٹ جاتے ہیں لحاظ درج ذیل رہ جائے گا

$$(۹.۸) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right]$$

تفاعل  $\psi_a$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیکر  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  کی عمودیت مساوات 9.2 بروکار لاتے ہوئے  $\dot{c}_a$  کو الگ کرتے ہیں

$$c_a\langle\psi_a | H' | \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a | H' | \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں

$$(۹.۹) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i | H' | \psi_j\rangle$$

دیمان رہے کے  $H'$  ہر میٹری ہے لحاظ  $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$  ہوگا۔ دونوں اطراف کو  $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$  سے ضرب دیکر درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۹.۱۰) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح  $\psi_b$  کے ساتھ اندرونی ضرب سے  $\dot{c}_b$  الگ کیا جاسکتا ہے

$$c_a\langle\psi_b | H' | \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_b | H' | \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_b e^{-iE_bt/\hbar}$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۹.۱۱) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar} \right]$$

مسوات 9.10 اور 9.11 مل کر  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  تعین کرتے ہیں یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی تابع وقت شرڈنگر مساوات کے مکمل معدل ہیں۔ عمومی طور پر  $H'$  کے وترتی ارکان متالب صفر ہوں گے عمومی صورت کے لیے سوال 9.4 دیکھیں

$$H'_{aa} = H'_{bb} = 0 \quad (9.12)$$

اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ اختیار کرتی ہے

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a \quad (9.13)$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} \quad (9.14)$$

میں  $E_b \geq E_a$  لوں گے لفظ  $\omega_0 \geq 0$  ہوگا۔

سوال 9.1: ایک ہائڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان  $E = E(t)\hat{k}$  میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال  $n = 1$  اور چارگن انخطاطی پہلا ہیجان حالات  $n = 2$  کے بچ اضطراب  $H' = eEz$  کے چاروں متالبی ارکان  $H'_{ij}$  کا حساب لگائیں۔ یہ بھی دیکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے  $H'_{ii} = 0$  ہوگا۔ تبصرہ محور  $z$  کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروکار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے  $n = 2$  حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لحاظ زیادہ بلند ہیجان حالات میں منتقلی کو نظر انداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تنظیم کے طور پر کام کرے گا۔

سوال 9.2: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں  $c_a(0) = 1$  اور  $c_b(0) = 0$  لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام حالص  $\psi_a$  اور کسی  $\psi_b$  کے بچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہوگا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا ناگزیر ہے یہاں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی  $E_a$  یا  $E_b$  نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانہ کے لیے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں فرض کیجیے گا کہ وقت  $t = 0$  پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت  $t$  پر منتقل کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی مندرق نہیں پڑے گا تاہم نتائج کی معقول تشریح ممکن ہوگی۔

سوال 9.3: فرض کریں اضطراب کی شکل و صورت وقت کے لحاظ سے  $\delta$  تفاعل ہے

$$H' = U\delta(t)$$



جہاں  $U_{aa} = U_{bb} = 0$  ہے اور  $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$  لیں۔ اگر  $c_a(-\infty) = 1$  اور  $c_b(-\infty) = 0$  ہوں تب  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کی ہوں گے اور کیا  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہوگا۔ انتقال ہونے کا احتمال  $t \rightarrow \infty$  کے لیے  $P_{a \rightarrow b}$  کیا ہوگا۔ اشارہ: آپ ڈیلیٹاقت عمل کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha| / \hbar)$$

## ۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ مفروض نہیں کیا تاہم کم  $H'$  کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یکے بعد دیگرے تخمینے سے حل کر سکتے ہیں۔ مفروض کریں ذرہ زیریں حال

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عند اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں رہے گا۔  
رتبہ صفر:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

میں تخمینے کے رتبہ کو زیر، بالا میں کو سین میں لکھتا ہوں۔  
ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پر کر کے رتبہ اول تخمینے حاصل کرتے ہیں۔  
رتبہ اول:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1; \quad \frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پر کر کے رتبہ دوم تخمینے حاصل کرتے ہیں۔  
رتبہ دوم:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \Rightarrow c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[ \int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں  $c_b$  تبدیل نہیں ہوا  $(c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t))$ ۔ دیہان رہے کہ  $c_a^{(2)}(t)$  میں صفر رتبہ جز بھی پایا جاتا ہے دور تہی تصحیح صرف تکلی حصہ ہوگا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے  $n$  ویں رتبہ تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے  $n + 1$  ویں رتبہ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں  $H'$  کا کوئی حبز ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اول تصحیح میں  $H'$  کا ایک حبز ضربی پایا جاتا ہے۔ دور تہی تصحیح میں  $H'$  کے دو حبز ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں حائل

$$|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$$

سے صاف ظاہر ہے بلکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہوگا۔ ہاں  $H'$  کی طاقت 1 تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2$  ایک کے برابر ہے اور رتبہ اول تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جاسکتی ہے زیادہ بلند رتبہ تخمین کے لیے بھی ایسا ہوگا۔

سوال ۹.۴: مندرجہ کریں آپ  $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$  نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب  $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$  ہو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں۔ دیکھائیں کہ  $H'$  کی طاقت ایک تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$ ۔

(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جاسکتا ہے درج ذیل لیکر

$$(۹.۱۹) \quad \dot{d}_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad \dot{d}_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۹.۲۰) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

جہاں درج ذیل ہے

$$(۹.۲۱) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

یوں  $H'$  کے ساتھ اضافی حبز ضرب  $e^{i\phi}$  منسلک ہونے کے علاوہ  $d_a$  اور  $d_b$  کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حبز (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں۔ اپنے جواب کا حبز (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں مندرجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت  $c_a(0) = a, c_b(0) = b$  کے لیے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بلکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

## ۹.۱.۳ سائنس مضرب

فرض کریں مضرب میں تابعیت وقت سائنس ہو

$$(9.22) \quad H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t)$$

تب درج ذیل ہوگا

$$(9.23) \quad H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t)$$

جہاں  $V_{ab}$  درج ذیل ہے

$$(9.24) \quad V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری و تالی ارکان صفر ہوتے ہیں لحاظ پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اول تک متغیرات تلاش کریں گے لحاظ زیر بالا میں تریب کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اول تک درج ذیل ہوگا مساوات 9.17

$$(9.25) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{i V_{ba}}{2\hbar} \int_0^t [e^{i(\omega_0 + \omega)t'} + e^{i(\omega_0 - \omega)t'}] dt' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right] \end{aligned}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ انتہائی تعدد  $\omega_0$  کے بہت متریب جبری تعدد  $\omega$  پر توجہ رکھنے سے چکور کوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

$$(9.26) \quad \omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر امتلا کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہوگا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.27) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}}{\omega_0 - \omega} [e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t/2}] \\ &= -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} \end{aligned}$$

ایک ذرہ جو حال  $\psi_a$  سے آغاز کرے کالم  $t$  پر حال  $\psi_b$  میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا جس کو انتہائی احتمال کہتے ہیں

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائن نار تعاضل کرتا ہے شکل 9.1 سے  $|V_{ab}|^2 / \hbar^2 (\omega_0 - \omega)^2$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جولاظمی طور پر ایک سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہوگا یہ وابستہ کو کرتا ہے۔ لحاظ  $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$  جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$  ہیں پر ذرہ لائٹمپلی حال میں ہوگا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصہ کے لیے چالو نہ کریں۔ بہتر ہوگا کہ آپ وقت  $|\omega_0 - \omega| \pi$  پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی امید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقال نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں ہے بلکہ بالکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہوگا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقال کی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہوگا جب جب جبری تعدد قدرتی تعدد  $\omega_0$  کے قریب ہو۔ شکل 9.2 میں  $\omega$  کے لحاظ سے  $P_{a \rightarrow b}$  ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی  $(|V_{ab}t|/2\hbar)^2$  جبکہ چوڑائی  $4\pi/t$  ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکر اہو جاتا ہے۔ لحاظ ہم بہت کم  $t$  کے لیے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بالکل ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے ایک تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں  $\cos(\omega t)$  کے  $e^{i\omega t}/2$  سے جبکہ دوسرا  $e^{-i\omega t}/2$  سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر  $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$  لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$(9.۲۹) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$

ہیملٹنی و تالاب کو ہر میشی بنانے کی خاطر مناظر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم  $c_a(t)$  کے لیے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو کو چھتے ہیں۔ اسکو گھومتی موج تھمین کہتے ہیں جناب راہی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تھمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیے بغیر بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات  $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$  کے لیے گھومتی موج تھمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو راہی تعدد

$$(9.۳۰) \quad \omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}|/\hbar)^2}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتقالی احتمال  $P_{a \rightarrow b}(t)$  تعین کر کے دیکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہوگا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں  $P_{a \rightarrow b}(t)$  عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہوگا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور  $V$  پر یہ کیا پابندی عاید کرتی ہے۔

(د) نظام پبلسلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟

## ۹.۲ اشعاعی احسراج اور انجذاب

### ۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگر چہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، حشر د امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعدد کا منرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم متائمر ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا شکل 9.3۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی حبز کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طول موج جوہر کی جامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فصائی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائنس ارتعاشی برقی میدان

$$E = E_0 \cos(\omega t) \hat{k} \quad (9.31)$$

کے زیر اثر ہوگا۔ فصل حال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور  $z$  رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا جہاں  $q$  الیکٹران کا بار ہے

$$H' = -qE_0 z \cos(\omega t) \quad (9.32)$$

ظاہر ہے درج ذیل ہوگا

$$H'_{ba} = -pE_0 \cos(\omega t). \text{ where } p \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle \quad (9.33)$$

عمومی طور پر  $\psi$  متغیر  $z$  کا جفت یا طاق تفاعل ہوگا یہ ہماری اس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ  $H'$  کے وتری لمبی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کہ تحت ہوگا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہوگا۔

$$V_{ba} = -pE_0 \quad (9.34)$$

### ۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود باخود احسراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیری حال  $\phi_a$  میں پایا جاتا ہو پر تعظیم شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حال  $\phi_b$  میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left( \frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر  $E_b - E_a = \hbar\omega_0$  توانائی حبزب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک فوٹان حبزب کیا شکل 9.4 (الف) جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ فوٹان در حقیقت کو انٹرم برقی حرکیات

برقناطیسی میدان کی کو انجم نظریہ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حال ( $c_a(0) = 0, c_b(0) = 1$ ) سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بالکل وہی ہوں گے البتہ اس بار  $P_{b \rightarrow a} = |C_a(t)|^2$  حاصل ہوگا جو نیچے درج زیریں یول میں منتقل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left( \frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.34)$$

چونکہ ہم  $b \leftrightarrow a$  کو آپس میں بدل رہے ہیں جو  $\omega_0$  کی جگہ  $\omega_0 - \omega$  ڈالتا ہے لحاظ لائیں یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا حجب دیکھتے ہیں جس کے نصب نما میں  $\omega_0 + \omega$  پایا جاتا ہے باقی حساب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حال میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں منتقل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالائی حال منتقلی کا ہے اس عمل کو تحرق زدہ احراج کہتے ہیں۔ جس کی پیش گوئی آئنسٹائن نے ہی تھی۔

تحرق زدہ احراج کی صورت میں براقناطیسی میدان توانائی  $\hbar\omega_0$  جو ہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک فونان داخل ہوا اور دو فونان ایک اصل جس نے تحرق پیدا کیا اور ایک تحرق کی بنیاد پیدا کر کے شکل 9.4 (ب)۔ اگر ایک بولتوں میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی فونان دو فونان پیدا کرے گا اور یہ دو فونان از خود چار پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایک پمپنگیشن ممکن ہوگا تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے فونان خارج ہوں گے لیزر اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دیہان رہے کہ لیزر عمل کے لیے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو پاپولیشن انورزن کہتے ہیں چونکہ انخراب ہس کی بنا ایک فونان کم ہوتا ہے تحرقی احراج جو ایک پیدا کرتا ہے بل مقابل ہوں گے لحاظ دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے ایک پمپنگیشن پیدا نہیں ہوگا۔

انخراب اور تحرقی احراج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود بخود احراج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان کی عدم موجودگی میں جو احراج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک فونان خارج کرتا ہے شکل 9.4 (ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی ذریعہ زمینی حال میں پہنچتا ہے پہلی نظر میں یہ سمجھ نہیں آتی کہ خود بخود احراج کیوں کر ہوگا۔ ایک ساکن حال اگرچہ ہیجان جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کو انجم برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی  $\hbar\omega/2$  کا حاصل ہوگا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقناطیسی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطہ احراج خود بخود احراج کا سبب بنتی ہے۔ اگر حبڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام احراج تحرقی احراج ہوگی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہوگا کہ

آیہ آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی احسراجی عمل کے بلکل الٹ ہے جہاں تمام احسراج خود بخود ہوتا ہے اور تحسرجی احسراج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کو انجم برقی حسرجیات اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجذاب تحسرجی احسراج اور خود بخود احسراج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود بخود احسراج کی وجہ زمینی حال برقت طبعی میدان کا اضطراب پیش نہیں کی تاہم انکے نتائج ہمیں خود بخود احسراج کا حساب کرنے کا محباز بنتی ہے جس سے ہیجان جوہری حال کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جاسکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتا کی برقت طبعی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حسرجی شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

### ۹.۲.۳ غیر اتا کی اضطراب

برقت طبعی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں  $E_0$  ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا جیٹ ہوگا۔

$$(9.36) \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$(9.38) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد  $\omega$  پر یک رنگی موج کے لیے درست ہوگا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بری تعددی پٹی کی برقت طبعی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں  $\rho(\omega) d\omega \rightarrow u$  ہوگا جہاں  $\rho(\omega) d\omega$  تعددی ساتھ  $d\omega$  میں کثافت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل عمل کا روپ اختیار کرے گا

$$(9.39) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

کسنگی کو سین میں جسزوی چوٹی  $\omega_0$  پر پائی جاتی ہے شکل 9.2 جبکہ عام طور پر  $\rho(\omega)$  کافی چوڑا ہوگا لحاظ ہم  $\rho\omega$  کی جگہ  $\rho(\omega_0)$  لکھ کر اسے عمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(9.40) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

متغیرات تبدیل کر کے  $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$  لکھ کر عمل کے حدود کو  $\pm\infty$  تک وصعت دے کر چونکہ باہر عمل صفر ہی ہے اور قطعی عمل کو حدود سے دیکھ کر

$$(9.41) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t \quad (9.42)$$

اس بار تھوہلی احتمال وقت  $t$  کا راستہ متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یکرنگی اضطراب کے برعکس غیر اتالی تعداد کی وضعت پائیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بلخصوص تھوہلی شرع ( $R \equiv dP/dt$ ) ایک مستقل ہوگا:

$$R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0) \quad (9.43)$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج  $y$  رخ سے آمدی شکل 9.3 اور  $z$  رخ تکلیب شدہ ہے۔ لیکن ہم اس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکنہ تکلیب پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی ( $\rho(\omega)$ ) ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں  $|p|^2$  کی جگہ  $|p \cdot \hat{n}|^2$  کی اوسط قیمت درکار ہوگی جہاں مساوات 9.33 کو عموماً دیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$p \equiv q \langle \psi_b | r | \psi_a \rangle \quad (9.44)$$

اور اوسط تمام تکلیب اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔ اوسط درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ کروی محدود منتخب کر کے حرکت کے رخ کو  $z$  محور پر رکھیں تاکہ تکلیب  $xy$  سطح میں ہو اور مستقل سمتیہ  $\rho$  سطح  $yz$  میں پایا جاتا ہو شکل 5.9۔

$$p \cdot \hat{n} = p \cos \theta \quad (9.45)$$

تب

$$|p \cdot \hat{n}|_{ave}^2 = \frac{1}{4\pi} \int |p|^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

اور درج ذیل ہوگا

$$|p \cdot \hat{n}|_{ave}^2 = \frac{|p|^2}{4\pi} \left( -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi (2\pi) = \frac{1}{3} |p|^2 \quad (9.46)$$

ماخوذ ہر جانب سے آمدی، غیر تکلیبی، غیر اتالی شعاع کے زیر اثر حال  $b$  سے حال  $a$  میں تحرقی اخراج کا تھوہلی شرع درج ذیل ہوگا۔

$$R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0) \quad (9.47)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیار اثر کمالی رکن  $p$  ہوگا مساوات 9.44 اور  $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$  پرنی اکائی تعداد میدان میں کثافت توانائی  $\rho(\omega_0)$  ہوگی۔



## ۹.۳. خود باخود احسراج

## ۹.۳.۱ آہنطائن A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال  $\psi_a$  میں  $N_a$  اور بالائی حال  $\psi_b$  میں  $N_b$  جو ہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود احسراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو  $N_b$  ذرات خود باخود احسراج کے عمل سے چوڑیں گے۔ جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحسرقی احسراج کی تحویلی شرح برقناطیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہوگا  $B_{ab}\rho(\omega_0)$  یوں بالائی حال کو تحسرقی احسراج کی بنا اکائی وقت میں  $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$  ذرات چوڑیں گے۔ اسی طرح انجربانی ریٹ  $\rho(\omega_0)$  کا راست متناسب ہے جسے ہم  $B_{ab}\rho(\omega_0)$  کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں  $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$  ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہوگا۔

$$(9.38) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی اور  $dN_b/dt = 0$  ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.39) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درج حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولسٹزمان جسٹرنی  $\exp(-E/k_B T)$  کے راست متناسب ہوگا لحاظ

$$(9.40) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$(9.41) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(9.42) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ان دونوں ریاضی جملوں کو موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$(9.43) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا

$$(9.44) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

مسوات 9.53 اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تشرقی انحراف کی تحویلی شرح وہی ہے جو انحراف کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تشرقی انحراف ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر مسوات 9.54 ہے جو ہمیں تشرقی انحرافی شرح  $(B_{ba}(\omega_0))$  جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود بخود انحرافی شرح  $A$  دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مسوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.55) \quad B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2$$

لاحظہ خود بخود انحرافی شرح درج ذیل ہوگا

$$(9.56) \quad A = \frac{\omega_0^3 |p|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

سوال 9.۸: نیچے رختخویل میں خود بخود انحراف اور حراری تشرقی انحراف وہ تشرقی انحراف جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں معتدل ہوگا۔ دیکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت  $T = 300 \text{ K}$  پر  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت کم تعددوں پر حراری تشرقی انحراف غالب ہوگا جبکہ  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت زیادہ تعدد پر خود بخود انحراف غالب ہوگا۔ دیکھائی دینے والی روشنی کے لیے کون غالب ہوگا؟

سوال 9.۹: برقن طیفی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی  $\rho_0(\omega)$  جانتے ہوئے خود بخود انحرافی اشارہ درحقیقت تشرقی انحراف مسوات 9.47 لفظ آئنسٹائن عددی سر  $A$  اور  $B$  جانے بغیر آپ خود بخود انحرافی شرح مسوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر چہ ایسا کرنے کے لیے کو انٹیم برقی حرقیات بروہ کارلانی ہوگی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک فونان پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہوگا۔

(الف) مسوات 5.111 کی جگہ  $d_k = N\omega$  پُر کر کے  $\rho_0(\omega)$  حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا ورنہ کل حسائی توانائی لامتناہی ہوگی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مسوات 9.47 استعمال کر کے خود بخود انحرافی شرح حاصل کریں۔ مسوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

## ۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مسوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تشرقی انحراف کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تشرقی انحراف کہ نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بلخصوص وقتی دورانیہ  $dt$  میں جوہروں میں تعداد کی کمی  $Adt$  ہوگی۔

$$(9.57) \quad dN_b = -AN_b dt$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مسزید نے جو ہر ہیجان انگیز نہیں کیئے حبار ہے ہیں۔ اس کو  $N_b(t)$  کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۹.۵۸) \quad N_b(t) = N_b(0)e^{-At}$$

ظاہر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد قوت نمائی طور پر کم ہوگی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۵۹) \quad \tau = \frac{1}{A}$$

جی اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں  $N_b(t)$  کی قیمت آغازی قیمت کی  $1/e \approx 0.368$  ہوگی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علاقیت کے بنا ایسا کیا گیا تخریقی انحراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر قابل رصوض سطح سے قطع نظر حال  $\psi_a \rightarrow \psi_b$  تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی  $\psi_b$  کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات ( $\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots$ ) میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$(۹.۶۰) \quad \tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک سپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار  $q$  محور  $x$  پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال  $|n\rangle$  مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود بخود انحراج تنزل کی بنا حال  $|n'\rangle$  پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$p = q \langle n|x|n'\rangle \hat{i}$$

آپ نے سوال 3.33 میں  $x$  کے فالتبی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

جہاں مرتعش کی قدرتی تعدد  $\omega$  ہے۔ مجھے تخریقی انحراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم انحراج کی بات کر رہے ہیں لحاظ  $n'$  لاطمی طور پر  $n$  سے نیچے ہوگا۔ ہماری اس مقصد کی عرض سے تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۱) \quad p = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} \hat{i}$$

بظاہر تحویل سیز بھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور انحراجی فونان کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$(۹.۶۲) \quad \omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر احسراج کرتا ہے۔ تجویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (9.63)$$

اور  $n$  ویں ساکن حال کا عمر ص حیات درج ذیل ہوگا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \quad (9.64)$$

چونکہ ہر ایک احسراجی فوٹان  $\hbar\omega$  توانائی ساتھ لے جاتا ہے لہذا احسراجی طاقت  $A\hbar\omega$  ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا  $n$  ویں حال میں مرتعش کی توانائی  $\hbar\omega (n + 1/2)$   $E$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \quad (9.65)$$

ابتدائی توانائی  $E$  کا کو انٹیم مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط احسراجی طاقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار  $q$  کا احسراجی طاقت کلیہ لار مسر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.66)$$

ہارمونی مرتعش  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  جس کا جیلہ  $x_0$  ہوگا میں مسرع  $a = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t)$  ہوگا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی  $x_0^2 m \omega^2 (1/2) = E$  ہے لہذا  $x_0^2 = 2E / m \omega^2$  ہوگا۔ جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E \quad (9.67)$$

توانائی  $E$  کا کلاسیکی مرتعش اوسط اتنی طاقتی احسراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد ( $\hbar \rightarrow 0$ ) میں کلاسیکی اور کوانٹم کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹم کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر  $E = \hbar\omega(1/2)$  ہو تب مرتعش طاقتی احسراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجیان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحویل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائڈروجن کے چاروں  $n = 2$  حالات کے لیے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو  $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$ ,  $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$  وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے متالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ  $\phi = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $y = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $x = r \sin \theta \cos \phi$  اور  $z = r \cos \theta$  ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر نکلمات صفر کے برابر ہوں گے لحاظ حساب شروع کرنے سے پہلے یقیناً پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔

جواب: سوائے  $\psi_{200}$  جو لامتناہی ہے باقی تمام کے لیے  $1.60 \times 10^{-9}$  سیکنڈز ہوگا۔

### ۹.۳.۳ قواعد انتخاب

شرع خود باخود احسراج درج ذیل روپ کے متالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال 9.11 حل کیا ہوا اگر نہیں کیا اسی وقت پہلے اس کو حل کریں تو آپ نے دیکھا ہوگا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں۔ کیا بہتر ہوتا اگر ہم پہلے سے جان سکتے کہ کون سے نکلمات صفر دیں گے تاکہ ہم اپنا قیمتی وقت غیر ضروری نکلمات حل کرنے میں صرف نہ کرتے۔ فرض کریں ہم ہائڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کا ہیملٹنی کروئی تشاکلی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹم اعداد  $n, l$  اور  $m$  سے ظاہر کر سکتے ہیں اور متالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n' l' m' | r | n l m \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت تبدیلی رشتوں اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہر مشینیں مل کر اس مقدار پر طاقتور مابندیاں عائد کرتے ہیں۔

انتخابی قواعد برائے  $m$  اور  $m'$ :

ہم پہلے  $x, y$  اور  $z$  کے ساتھ  $L_z$  کے مقاب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب 4 میں حاصل کیا گیا مساوات 4.122 دیکھیں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, [L_z, y] = -i\hbar x, [L_z, z] = 0 \quad (9.۶۸)$$

ان میں سے تیسرے درجہ ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n'l'm' | [L_z, z] | nlm \rangle = \langle n'l'm' | L_z z - z L_z | nlm \rangle \\ &= \langle n'l'm' | [(m'\hbar)z - z(m\hbar)] | nlm \rangle = (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | z | nlm \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ

$$(۹.۶۹) \quad m' = m \text{ یا } \langle n'l'm' | z | nlm \rangle = 0$$

لحاظ ماسوائے  $m' = m$  کی صورت میں  $z$  کے متالبی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔

ساتھ ہی  $x$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابلہ درجہ ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} \langle n'l'm' | [L_z, x] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z x - x L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ

$$(۹.۷۰) \quad (m' - m) \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i \langle n'l'm' | y | nlm \rangle$$

یوں آپ  $y$  کے متالبی ارکان کو مطابقتی  $x$  کے متالبی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی  $y$  کے متالبی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

آخر میں  $y$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابلہ درجہ ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle n'l'm' | [L_z, y] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z y - y L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ

$$(۹.۷۱) \quad (m' - m) \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

بخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m' - m)^2 \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i(m' - m) \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

لحاظ درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۹.۷۲) \quad (m' - m)^2 = 1 \text{ یا } \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = 0$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں  $m$  کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$(۹.۷۳) \quad \Delta m = \pm 1 \text{ یا } 0 \text{ تک ہوگا جب تک } 0 \text{ یا } 1$$

اس نے یہ سب کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہوگا فوٹان چکر ایک کا حاصل ہے لحاظ اس کے  $m$  کی قیمت 0، 1، -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی بقا کے تحت فوٹان جو کچھ لے جاتا ہے جو ہر اتن کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے  $l$  اور  $l'$ :

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کے لیے کہ گیا۔

$$(9.44) \quad [L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2(rL^2 + L^2r)$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقلب کو  $\langle n'l'm' | nlm \rangle$  کے پیچ لپیٹ کر انتخابی متاندہ اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \langle n'l'm' | [L^2, [L^2, r]] | nlm \rangle &= 2\hbar^2 \langle n'l'm' | (rL^2 + L^2r) | nlm \rangle \\ &= 2\hbar^4 [l(l+1) + l'(l'+1)] \langle n'l'm' | r | nlm \rangle = \langle n'l'm' | (L^2[L^2, r] - [L^2, r]L^2) | nlm \rangle \\ &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | [L^2, r] | nlm \rangle \\ &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | (L^2r - rL^2) | nlm \rangle \end{aligned}$$

$$(9.45) \quad = \hbar^4 [l'(l'+1) - l(l+1)]^2 \langle n'l'm' | r | nlm \rangle$$

ماخوذ

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = [l'(l'+1) - l(l+1)]^2$$

$$(9.46) \quad \langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0$$

لیکن

$$[l'(l'+1) - l(l+1)] = (l' + l + 1)(l' - l)$$

اور

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = (l' + l + 1)^2 + (l' - l)^2 - 1$$

کی بنسبت 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.47) \quad [(l' + l + 1)^2 - 1][(l' - l)^2 - 1] = 0$$

ان میں پہلا جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اس صورت جب  $l' = l = 0$  ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھکارہ حاصل کیا گیا ہے لحاظ یہ شرط  $l' = l \pm 1$  کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں  $l$  کے لیے انتخابی متاندہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.48) \quad \Delta l = \pm 1$$

کوئی عبور واقع نہیں ہوگا جب تک  $\Delta l = \pm 1$

اگرچہ اس نتیجہ کو اغند کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ فوٹان چکر ایک کا حاصل ہے لحاظ زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد  $l' = l + 1$ ,  $l' = l$  یا  $l' = l - 1$  کی اجازت دیں گے۔ برقی جھٹ کتنی احسراج کے لیے زاویائی معیار حرکت کی بقا درمیانی صورت کی اجازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود احسراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد نہ ممکن بناتے ہیں شکل 9.6 میں ہائڈروجن کے لیے ابتدائی چار بوہر سطحوں کے لیے اجزائی تحویلات دیکھائے گئے ہیں۔ دیہان رہے کہ 2S حال  $\psi_{200}$  اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ  $l = 1$  کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لحاظ یہ متظل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عرصہ حیات مثلاً 2P حالات  $\psi_{210}$ ,  $\psi_{211}$  اور  $\psi_{21-1}$  سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصاداً کی بنیاداً ممنوعہ تحویل کی بنیاداً 9.21 یا متعدد فوٹان کے احسراج کے بنا تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات 9.74 میں دیگئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور  $r.L = r.(r \times p) = 0$  استعمال کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$

z سے r تک عمومیت دینا آسان کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دیکھائیں کہ  $l' = l = 0$  کی صورت میں  $\langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0$  ہوگا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کمی ختم ہوگی۔

سوال ۹.۱۴: ہائڈروجن کے  $n = 3, l = 0, m = 0$  حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جھٹ کتب تحویل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |nlm\rangle \rightarrow |n'l'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عرصہ حیات کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال  $|300\rangle$  میں نہیں ہوگا لحاظ اس ترتیب میں ہر بار صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عرصہ حیات حاصل ہوگا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویلی شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔



## مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

$$(9.49) \quad H_0 \psi_n = E_n \psi_n, \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب تشکیل دیں۔ لمحہ  $t = 0$  پر ہم اس اضطراب  $H'(t)$  چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(9.80) \quad H = H_0 + H'(t)$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیری صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(9.81) \quad \psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t / \hbar}$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(9.82) \quad c_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t / \hbar}$$

جہاں  $H'_{mn}$  درج ذیل ہے

$$(9.83) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

(ب) اگر نظام حال  $\psi_N$  میں آغاز کریں تب دیکھائیں کہ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$(9.84) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(9.85) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t' / \hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

(ج) فرض کریں لمحہ  $t = 0$  پر چالو اور بعد میں لمحہ  $t$  پر منتقل کرنے کے علاوہ  $H'$  مستقل ہے۔ حال  $N$  سے حال  $M$  ( $M \neq N$ ) میں تحویل کے احتمال کو  $t$  کا تقاضا لکھیں۔ جواب:

$$(9.86) \quad 4 \left| H'_{MN} \right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t / 2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

(د) فرض کریں  $H'$  وقت کا سائنس تقاضا  $H' = V \cos(\omega t)$  ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دیکھائیں کہ صرف توانائی  $E_M = E_N \pm \hbar\omega$  کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور انکا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(9.87) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t / 2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

(د) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتسکی برقت طبعی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دیکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیے تحریقی احسراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر  $c_m(t)$  کو رتبہ اول تک سوال 9.15 (ج) اور (د) کے لیے تلاش کریں۔ معمولی شرط

$$\sum_m |c_m(t)|^2 = 1 \quad (9.88)$$

کی تصدیق کر کے تزاؤ اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال  $\psi_N$  میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا  $|c_N(t)|^2$  یا  $|c_m(t)|^2$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چکور کنواں کہ  $N$  ویں حال میں وقت  $t = 0$  پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنواں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنواں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہوگی  $V_0(t)$  جہاں  $V_0(0) = V_0(T) = 0$  ہوگا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے  $c_m(t)$  کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دیکھائیں کہ تفاعل موج کی حیثیت سے تبدیلی دور تبدیلی ہوگا لیکن تحویل نہیں ہوگی۔ تفاعل  $V_0(t)$  کی صورت میں تبدیلی حیثیت، تبدیلی زاویائی دور  $\psi(T)$  تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب  $x$  میں منتقل تاکہ  $t$  میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ یہ صرف لامتناہی چکور کنواں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چکور کنواں کی زمینی حال میں کیمیت  $m$  کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ  $t = 0$  پر ایک اینٹ اس کنواں میں گرانی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں  $V_0 < E_1$  ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت  $T$  کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ  $E_2$  ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحریقی احسراج، تحریقی انجذاب اور خود بخود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ خود بخود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان  $B_0 \hat{k}$  میں  $1/2$  چکر کا ایک ذرہ جس کی ممکن مقناطیسی نسبت  $\gamma$  ہولار مرتعد  $\omega_0 = \gamma B_0$  مثال 4.3 سے استنباطی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی

ریڈیائی تعدد میدان  $B_{rf}[\cos(\omega t)\hat{i} - \sin(\omega t)\hat{j}]$  چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

(۹.۸۹)

$$B = B_{rf} \cos(\omega t)\hat{i} - B_{rf} \sin(\omega t)\hat{j} + B_0\hat{k}$$

(الف) اس نظام کے لیے  $2 \times 2$  ہیلٹی متالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت  $t$  پر  $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$  چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دیکھائیں۔

(۹.۹۰)

$$\dot{a} = \frac{i}{2}(\Omega e^{i\omega t}b + \omega_0 a) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2}(\Omega e^{i\omega t}a - \omega_0 b)$$

جہاں  $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$  کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں  $a_0$  اور  $b_0$  کی صورت میں  $a(t)$  اور  $b(t)$  کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0\Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0\Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

(۹.۹۱)

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی  $a_0 = 1, b_0 = 0$  سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تعلق تلاش کریں۔

$$P(t) = \{\Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\} \sin^2(\omega' t/2) \quad \text{جواب:}$$

(و) منحنی گمک

(۹.۹۲)

$$P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو غیر متغیر  $\omega_0$  اور  $\Omega$  کی صورت میں متحرق تعدد  $\omega$  کی تفاعل کے طور پر ترمیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ  $\omega = \omega_0$  پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی  $\Delta\omega$  تلاش کریں۔

(ه) چونکہ  $\omega_0 = \gamma B_0$  ہے لحاظ ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں فونان کا  $\omega$  حبز و ضربی ایک ٹیلا کے ساکن میدان اور

ایک مائکروٹیلیلا جیٹ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ مخفی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں مندرجہ کی بات کی جو بروشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فصائی تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$(9.93) \quad E(r, t) = E_0 \cos(k.r - \omega t)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء پر ہو تب متعلقہ حجم پر  $k.r < 1$  اور  $k.r \sim r/\lambda < 1$ ، لحاظ  $|k| = 2\pi/\lambda$  ہوگا جس کی بناء ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ مندرجہ کریں ہم رتبہ اول درستی۔

$$(9.94) \quad E(r, t) = E_0 [\cos(\omega t) + (k.r) \sin(\omega t)]$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ احبازتی برقی جفت کتبہ تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی چسکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتبہ اور برقی چو کتبہ تحویل کہتے ہیں  $k.r$  کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد کتبہ معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود باخود احسراجی شرح حاصل کریں اس کی تکثیر اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہوگا۔ جواب:

$$(9.95) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (\hat{n}.r) (\hat{k}.r) | b \rangle|^2$$

(ب) دیکھائیں کہ ایک بعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ تحویلات سطح  $n$  سے سطح  $n-1$  میں ہوگی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت  $\hbar$  اور  $\hat{k}$  پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$(9.96) \quad R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5}$$

تبصرہ: یہاں  $\omega$  سے مراد فونان کا تعدد ہے تاکہ مرتعش کا تعدد احبازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کا مضبوط تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دیکھائیں کہ ہائڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی  $1S \rightarrow 2S$  کی احبازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتبہ کے لیے بھی درست ہوگا غالباً تنزل دو فونان احسراجی کی بنا ہوگا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا سو اسی حصہ ہوگا۔

سوال ۹.۲۲: دیکھائیں کہ  $n, l$  سے  $n', l'$  میں تحویل کے لیے ہائڈروجن کا خود باخود احسراجی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$(9.97) \quad \frac{e^2 \omega^3 I^2}{3 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l+1 \text{ جب} \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l-1 \text{ جب} \end{cases}$$

جہاں  $I$  درج ذیل ہے۔

$$(9.98) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr$$

جوہر  $m$  کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انجیائی قواعد  $m-1$  یا  $m, m+1$  کے تحت  $m'$  حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دیہان رہے کہ جواب  $m$  پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے  $l' = l + 1$  صورت کے لیے  $|nlm\rangle$  اور  $|n'l'm'\rangle$  کے بیچ  $x, y$  اور  $z$  کے تمام غیر ضرورت الی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1 | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1 | r | nlm \rangle|^2$$

یہی کچھ  $l' = l - 1$  کے لیے بھی کریں۔



## باب ۱۰

# حرارت ناگزرتخمین

### ۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزرت

#### ۱۰.۱.۱ حرارت ناگزرت عمل

فرض کریں ایک کامل لٹکن انتصابی ستہ میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے اگر آپ اس لٹکن کو جھٹکے ہلائیں تو یہ امپرائٹری کے ساتھ دائری صورت میں حرکت کرنے لگے گا لیکن اگر آپ بغیر جھٹکے کے لٹکن کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کریں شکل 1.10 تب لٹکن اسی سطح یا اس کے متوازی سطح میں شائستگی اور روانی سے اسی جیلہ کے ساتھ جلیھولت رہے گا بیرونی حالات کی بہت آہستہ آہستہ تبدیلی ہی حرارت نہ گزرت عمل کی پہچان ہے دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف امتیازی وقتوں کی بات کی جارتی ہے نظام کی حرکت جو یہاں لٹکن کی ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا کو ظاہر کرنے والا اندرونی وقت  $T_i$  اور نظام میں نمایاں تبدیلی مثلاً لرزتے ہوئے چپو ترا پر نصب لٹکن کی صورت میں چپو ترے کی لرزش کا دوری عرصہ کو ظاہر کرنے والا بیرونی وقت  $T_e$  حرارت ناگزرت عمل میں  $T_e \gg T_i$  ہوگا حرارت نہ گزرت عمل کے تجزیہ کا بنیادی حکمت عملی یہ ہوگا کہ پہلے بیرونی عوامل مقام معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں بہت آہستہ آہستہ وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے مثال کے طور پر مقررہ لمبائی  $L$  کی لٹکن کا کلاسیکی دوری عرصہ  $2\pi\sqrt{L/g}$  ہوگا اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو تب دوری عرصہ بظاہر  $2\pi\sqrt{L(t)/g}$  ہوگا حصہ 3.7 میں ہائیڈروجن سالہ پر تبصرہ کے دوران ایک زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی ہم نے آغاز میں مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے ان کے بچ فاصلہ  $R$  کی صورت میں الیکٹرون کی حرکت کے لئے حل کیا نظام کی زمینی حال توانائی کو  $R$  کے تقاضا کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کی ان حنائے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا سوال 10.7 طبیعت سالہ میں اس ترکیب کو جس میں ساکن مرکزہ سے آغاز کرتے ہوئے الیکٹرونی تقاضاات موج کا حساب کر کے ان سے نسبتاً سست رفتار مرکزہ کی مقامات اور

حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارن واپنر یا نیمر تخمین کہتے ہیں حرارت نہ گزرتخمین کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے مندرجہ کریں ہیمیلٹنی ابتدائی روپ  $H^i$  سے بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ  $H^f$  تک پہنچتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزرتخمین ہے کہ اگر ذرا ابتدائی طور پر  $H^i$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہوں تب یہ زیر مساوات شروع و نگر  $H^f$  کی  $n$  وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا میں یہاں مندرج کرتا ہوں کہ  $H^i$  سے  $H^f$  تک تحویل کے دوران طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے یہ حالات کی ترتیب کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا امتیازی تقاضات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا مثال کے طور پر ہم لامتناہی چپ کو رکنا میں ایک ذرا کو زمینی حال میں تیار کرتے ہیں شکل 2.10 (الف)

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ آہستہ مقام  $2a$  پر منتقل کیا جاتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزرتخمین کے تحت ماسوائے حیز و ضربی بیت کے یہ ذرہ تو وسیع شدہ کنواں کے زمینی حال میں منتقل ہوگا شکل 2.10 (ب)

$$(۱۰.۲) \quad \psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

دھیان رہے کہ نظریہ اضطراب کی طرح ہم ہیمیلٹنی میں ایک چھوٹی تبدیلی کی بات نہیں کر رہے ہیں یہاں تبدیلی بہت بڑی ہے فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی بہت آہستہ آہستہ رونما ہو یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے نظام سے توانائی حاصل کرے گا جیسا کہ گاڑی کی انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے اس کے برعکس کنواں کی اچانک وسط کی صورت میں حال  $\psi^i(x)$  ہی رہتا ہے شکل 2.10 (ج) جو نئے ہیمیلٹنی کے امتیازی حالات کا ایک پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا سوال 38.2 یہاں توانائی کی بقا ہوگی کم از کم اس کی توقعاتی قیمت کی ضرور ہوگی جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے حلا میں گیس کی آزادانہ پھیلاؤ سے کوئی کام نہیں ہوتا سوال ۱۰.۱: ایک لامتناہی چپ کو رکنا جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار  $v$  سے حرکت کرتے ہوئے کنواں کو وسیع بناتا ہے کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳) \quad \Phi_n(x, t) \cong \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at) / \hbar \omega}$$

جہاں  $E_n^i \equiv a + vt$  کنواں کی لمبائی چوڑائی اور چوڑائی  $a$  کے اصل کنواں کی  $n$  ویں اجزائی توانائی  $n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  ہے عمومی حل ان  $\Phi$  کا ایک خطی جوڑ:

$$(۱۰.۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t)$$

ہوگا جہاں عددی سر  $c_n$  وقت  $t$  کے تابع نہیں ہوں گے

۱. دیکھیں آیا تابع وقت شروع و نگر مساوات بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات 3.10 مطمئن کرتی ہے



ب۔ فرض کریں اصل کنواں کی زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ( $t = 0$ ) کرتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz \quad (10.5)$$

جہاں  $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$  کنواں کی پھیلنے کی رفتار کی ایک بے بودی پیمائش ہے بد قسمتی سے اس مکمل کی قیمت کو بنیادی تفاسلات کی صورت میں حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے

ج۔ فرض کریں ہم کنواں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنا چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں یوں بیرونی وقت  $2a$  ہوگا  $w(T_e) =$  ابتدائی زمینی حال کے تابع وقت نمائی جزو ضربی کا دورانیہ اندرونی وقت ہوگا وقت  $T_e$  اور  $T_i$  تعین کر کے دیکھائے کہ حرکت نہ گزر صورت حال سے مراد  $1 \ll \alpha$  ہوگا جس کے تحت مکمل کے دائرہ کار پر  $e^{-iaz^2} \cong 1$  ہوگا اس کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کے عددی سروں  $c_n$  تعین کریں حال  $\Psi(x, t)$  تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرارت نہ گزر کے مطابق ہے

د۔ دکھائیں گے  $\Psi(x, t)$  میں جزو بیئت کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_1(t') dt' \quad (10.6)$$

جہاں لمحہ  $t$  پر لمحاتی امتیازی قدر  $E_n(t) \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$  ہوگا اس نتیجہ پر تبصرہ کریں

## ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت

مسئلہ حرارت نہ گزر بظاہر معقول نظر آتا ہے اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں ایک ذرہ جو  $n$  وی امتیازی حال  $\psi_n$  میں آغاز کریں

$$H\psi_n = E_n\psi_n \quad (10.7)$$

وہ ڈوری جزو ضربی اپنانے کے علاوہ اسی  $n$  وی امتیازی حال میں رہتا ہے

$$\Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (10.8)$$

اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہوں تب امتیازی تفاسلات اور امتیازی افتدار بھی تابع وقت ہوں گے

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \quad (10.9)$$

لیکن اب بھی کسی ایک مخصوص لمحہ پر یہ معیار عمودی سلسلہ

$$(۱۰.۱۰) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

تین گے جو مکمل ہے لہذا تابع وقت شروع و نگر مساوات

$$(۱۰.۱۱) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t) \Psi(t)$$

کے عمومی حل کو ان کا خطی مجموعہ

$$(۱۰.۱۲) \quad \Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(۱۰.۱۳) \quad \theta_n(t) \approx -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_n(t') dt'$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے  $E_n$  کی صورت میں معیاری دوری جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے میں اس کو ہمیشہ کی طرح عددی سر  $c_n(t)$  میں عزم کر سکتا ہوں لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے طبعیت وقت کے اس حصہ کو سر یہی لکھن آموزوں ہوگا مساوات 12.10 کو مساوات 11.10 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۱۰.۱۴) \quad i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \theta_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n}$$

جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نکتے سے ظاہر کیا گیا ہے مساوات 9.10 اور 13.10 کی بنا آخری دو اجزاء کٹ جاتے ہیں لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے

$$(۱۰.۱۵) \quad \sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n}$$

اس کا  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر لمحاتی امتیازی تفاسلات کی معیار ہمدیت مساوات 10.10 بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یا درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۱۶) \quad \dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \dot{\psi}_m | \psi_n \rangle e^{\theta_n - \theta_m}$$

اب مساوات 9.10 کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H}\psi_n + H\dot{\psi}_n = \dot{E}_n\psi_n + E_n\dot{\psi}_n$$

اور یہاں بھی  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر درج ذیل ہوگا

$$(10.17) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

ہم  $H$  کے ہر مشی ہونے سے فائدہ اٹھاتے ہوئے  $\langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$  لکھتے ہیں یہ  $n \neq m$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(10.18) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انخطاطی ہے مساوات 18.10 کو مساوات 16.10 میں پر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(10.19) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$

یہ بالکل ٹھیک نتیجہ ہے اب حرارت ناگزیر تخمین کی باری آتی ہے فرض کریں  $\dot{H}$  نہایت چھوٹا ہے تب دوسرا جزو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(10.20) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle$$

ہوگا جس کا حل

$$(10.21) \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)}$$

ہے جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.22) \quad \gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \rangle dt'$$

بالخصوص اگر ذرا  $n$  وی امتیازی حال یعنی  $n \neq m$  کیلئے  $c_n(0) = 1$  اور  $c_m(0) = 0$  ہوئے آغاز کرے تب مساوات 12.10

$$(10.23) \quad \Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

ہوگا لہذا کئی پستی جزو ضربیاں حاصل کرنے کے علاوہ یہ ذرا اچانک ہیملٹنی کی  $n$  وی امتیازی حال میں ہی رہے گا

مثال ۱۰.۱: فرض کریں ایک مقناطیسی میدان میں نکتہ پر کیمیت  $m$  اور بار  $e$  کا ایک الیکٹرون ساکن پایا جاتا ہے اس مقناطیسی میدان کی مقدار  $B_0$  ایک مستقل ہے جبکہ اس کا رخ  $z$  محور کے گرد ایک مستقل زاویائی

۳.۱۰ سٹی رفتار  $\omega$  سے ایک مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے محور  $z$  کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ  $\alpha$  ہے شکل

$$(۱۰.۲۴) \quad B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}]$$

اس کا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۲۵) \quad H(t) = \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar\beta_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z]$$

$$= \frac{\hbar\omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

جہاں  $\omega_0$  درج ذیل ہیں

$$(۱۰.۲۶) \quad \omega_1 \equiv \frac{e\beta_0}{m}$$

ہیملٹنی  $H(t)$  کے معمول شدہ امتیازی چکر کار  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  درج ذیل ہیں۔

$$(۱۰.۲۷) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(۱۰.۲۸) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو  $B(t)$  کے لحاظاتی رخ کے ساتھ ہماچکر اور خلاف چکر کو غلبہ کرتے ہیں سوال 30.4 دیکھیں ان کے مطابقتی امتیازی امتداد درج ذیل ہونگے

$$(۱۰.۲۹) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega_1}{2}$$

فرض کریں  $B(0)$  کے ہمراہ الیکٹران حمیدان صورت سے آغاز کرتا ہے

$$(۱۰.۳۰) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

تابع وقت شروع مگر مساوات کا بلکل ٹھیک حل درج ذیل ہوگا سوال 2.10

$$(۱۰.۳۱) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں  $\lambda$  درج ذیل

$$(۱۰.۳۲) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$

جسے  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  کا قطبی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۳۳) \quad \chi(t) = \left[ \cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ + i \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ  $B$  کے موجودہ رخ کے لحاظ سے خلاف میدان کو تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳۴) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ  $T_e \gg T_i$  کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار استیمازی وقت  $T_e$  ہے جو موجودہ صورت میں  $1/\omega$  ہوگا اور تفاعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار استیمازی وقت  $T_i$  ہوگا جو موجودہ صورت میں  $1/\omega_1$  ہوگا اور  $\hbar/(E_+ - E_- = 1/\omega_1)$  ہوگا جو حرارت نہ گزر تخمین سے مراد  $\omega \ll \omega_1$  ہوگا غیر مضطرب تفاعلات موج کے دور کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے حرارت نہ گزر صورت  $\lambda \cong \omega_1$  میں درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳۵) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوگھاتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ پر  $B$  کہ رخ ہو اس کے برعکس  $\omega \gg \omega_1$  کی صورت میں  $\lambda \cong \omega$  ہوگا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے پچھپایاں کھائے گا شکل 4.10 □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کیجئے گا کہ مساوات 25.10 کی ہیملٹنی کیلئے مساوات 31.10 تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتی ہے ساتھ ہی مساوات 33.10 کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ عددی سروں کے مجموعہ ایک ہوگا جو معمولی زنی کی شرط ہے

## ۱۰.۲ ہیٹ بیری

### ۱۰.۲.۱ گر گئی عمل

آئے حصہ 1.1.10 میں مستعمل کامل ہے رگڑھ لیکن جس کے چپ بوترا کو ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاتا ہوں پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے حرارت نہ گزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا میں نے دھاوا کیا ہوتا ہے کہ جب تک چپ بوترا کی حرکت اتنی لشکن کے دوری عرصہ کے لحاظ سے اتنی آہستہ ہو کہ لشکن کی نمایاں حرکت کے دوران لشکن بہت ساری ارتعاش کرتا ہوں یہ اسی مستوی میں یا اس کے متوازی مستوی میں اسی جیلہ اور اسی تعدد کے ساتھ جھومتا رہے گا لیکن اگر میں اس کامل لشکن کو شمالی قطب پر لے جا کر مثلاً

صوبائی شہر کے رخ جھولا دوں شکل 5.10 فی الحال تصور کریں کے دنیا گھوم نہیں رہی ہے میں اس کو بہت آہستہ آہستہ یعنی حرارت نہ گزر طریقہ سے صوبائی سے گزرتے خط طول بلند پر چلتے ہوئے عرضی خط استوا تک پہنچتا ہوں یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے گا میں اس کو عرضی خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں لسنک ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے آخر میں میں اس نئی خط طول بلند پر چلتے ہوئے چبوترا کو شمالی قطب منتقل کرتا ہوں آپ دیکھ سکتے ہیں کے لسنک اسی مستوی میں اب نہیں جھولے گا جہاں سے اس نے آغاز کیا یقیناً نئی مستوی اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ  $\Theta$  پایا جاتا ہے جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے دو خط طول بلند کے بیچ زاویہ  $\Theta$  ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جس راہ پر میں چبوترا اٹھا کر چلتا راہ راہ زمین کے مرکز پر ٹھوس زاویہ  $\Omega$  بنتی ہے یہ راہ شمالی نصف کرہ کا  $\Theta/2\pi$  حصہ گھیرتی ہے لہذا اس کا رقبہ  $\Omega R^2 = 4\pi R^2 (\Theta/2\pi) (1/2) = A$  ہوگا جہاں  $R$  زمین کا رداس ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \quad (10.32)$$

جو اس نتیجہ کو نہایت عمدگی کے ساتھ پیش کرتا ہے اور جو راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں ہے شکل 6.10 کرہ کی سطح پر ایک بند راہ پر چلتے ہوئے حرارت نہ گزر منتقلی کی ایک مثال فوکلٹ لسنک ہے جہاں چبوترا کو اٹھا کر چلنے کی بجائے زمین کے گھومنے کو یہ کام سونپا جاتا ہے خط عرض بلد  $\theta_0$  درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے شکل 7.10

$$\Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi (-\cos \theta)_0^{\theta_0} = 2\pi (1 - \cos \theta_0) \quad (10.33)$$

زمین کے لحاظ سے جو اس دوران  $2\pi$  زاویہ گھوم چکا ہوگا فوکلٹ لسنک کی روزانہ استقبالی حرکت  $2\pi \cos \theta_0$  ہوگی اس نتیجہ کو عموماً گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کولیولس کو تو کی اثر سے حاصل کیا جاتا ہے لیکن یہاں یہ حوالہ جو مشرے مفہوم پیش کرتا ہے ایسا نظام جو بند راہ پر چلنے کے واپس ابتدائی نکتہ پہنچ کر اپنی ابتدائی حال میں نہیں لوٹتا غیر ہماقواند نظام کہلاتا ہے یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد حرکت دینا ہو اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھیں غیر ہماقواند نظام ہر جگہ پائے جاتے ہیں ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجینئر ہماقواند اعلیٰ ہے ہر ایک پیرا کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا وغیرہ وغیرہ اگلے حصہ میں میں غیر ہماقواند اعمالوں کی کو انٹرمیکانیات پر غور کروں گا ہم نے دیکھنا ہوگا کہ ہیملٹنی کے مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرارت نہ گزر پیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا

## ۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ 2.1.10 میں دکھایا کہ ایک ذرا جو  $H(0)$  کے  $n$  وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہو حرارت نہ گزر حالات میں تابع وقت ہیئت جزو ضربی کے علاوہ  $H(t)$  کی  $n$  وی امتیازی حال میں ہوگا بالخصوص اس کا تقابل موج مساوات 23.10 درج ذیل ہوگا

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') \, dt' \quad (10.39)$$

حرکتی ہیٹ ہے جو تابع وقت تفاعل  $E_n$  کی صورت کے لیے حیز و ضربی  $e^{-iE_n t/\hbar}$  کو عمومیت دیتا ہے اور درج ذیل ہندی ہیٹ کہلاتا ہے

$$(۱۰.۴۰) \quad \gamma_n(t) \equiv \int_0^t \langle \psi_n(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle dt'$$

چونکہ اب ہیملٹنی میں کوئی ایسا مقدار معلوم  $R(t)$  پایا جاتا ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا  $\psi_n(t)$  وقت  $t$  کا تابع ہوگا سوال 1.10 میں پھیلے ہوئے چکور کواں کی چوڑائی  $R(t)$  ہوگی یوں درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۱) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۲) \quad \gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} dR$$

جہاں  $R_i$  اور  $R_f$  مقدار معلوم  $R_t$  کے بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی بالخصوص اگر کچھ دیر  $T$  بعد ہیملٹنی واپس اپنی ابتدائی روپ اختیار کرے تب  $R_f = R_i$  لہذا  $\gamma_n(T) = 0$  ہوگا جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں ہے میں نے مساوات 4.10 میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہے فرض کریں  $N$  عدد مقدار معلوم  $R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$  تبدیل ہوتے ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۳) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{dR}{dt}$$

جہاں  $R \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$  ہے اور  $\nabla_R$  ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۴) \quad \gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot dR$$

اور اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنی اصل روپ اختیار کرتا ہوں تب کل ہندی ہیٹ تبدیلی درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۴۵) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot dR$$

یہ مقدار معلوم فضا میں ایک بند راہ پر لکیری تکمیل ہے جو عموماً غیر صفر ہوگا مساوات 4.10 کو پہلی مرتبہ 984 میں میکا کل بیری نے حاصل کیا اور یوں  $\gamma_n(T)$  ہیٹ بیری کہلاتا ہے دھیان رہے ہیں کہ جب تک تبدیلی اتنی آہستہ ہو کہ قیاس حرارت ناگزیر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں  $\gamma_n(T)$  کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے تاکہ راہ پر چلنے کی رفتار پر اس کے برعکس مجموعی حرکتی ہیٹ

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کا تابع ہوگا

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کاہیت کچھ بھی ہو سکتا ہے اور طبعی مقداروں میں جہاں  $|\Psi|^2$  پایا جاتا ہے ہیت جزو ضرب کر کے جاتا ہے اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال ہتا کہ ہندی ہیت کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے آخر  $\psi_n(t)$  کاہیت بھی اختیاری ہے یہ جناب بیری کی دور اندیشی ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو کسی بند دائرے پر لے جاتے ہوئے واپس اپنی اصل روپ میں لانے سے ابتدائی اور اختتامی ہیت کے بیچ فاصلہ غیر اختیاری ہوگا جسے حقیقتاً نا کا جاسکتا ہے مثال کے طور پر ذراعیت جو تمام حال  $\Psi$  میں ہوں کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے صرف ایک حصے کو حرارت نہ گزرتبیل ہوتے مخفیایے گزارا جاتا ہے دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹا کرنے سے مجموعی تفاعل موج درج ذیل روپ کا حاصل ہوگا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \quad (10.46)$$

جہاں سیدھی پہنچتی شعاع کا تفاعل موج  $\Psi_0$  ہے اور متغیر  $H$  کی بنا شعاع کا اضافی ہیت  $\Gamma$  ہے جس کا کچھ حصہ ہر کی اور کچھ حصہ ہندی ہوگا اس صورت میں درج ذیل ہوگا

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4}|\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma})(1 + e^{-i\Gamma}) \quad (10.47)$$

$$= \frac{1}{2}|\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2) \quad (10.48)$$

یوں تعمیلی مداخلت اور تباہ کن مداخلت نکات جہاں  $\Gamma$  کی قیمت  $\pi$  کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی کو دیکھ کر ہم  $\Gamma$  کی پیش کر سکتے ہیں بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ ہتا کہ زیادہ بڑی ہر کی ہیت کی موجودگی میں ہندی ہیت نظر نہیں آئے گی لیکن انہیں علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے تین آبادی مقدار معلوم فضا  $R = (R_1, R_2, R_3)$  کی صورت میں کلیاں بیری مساوات 45.10 سستی مخفیہ  $A$  کی صورت میں مقناطیسی ہسڈ کہ کلیہ کا یاد دلاتی ہے سطح  $S$  جس کی سرحد مخفی  $C$  ہوئے درج ذیل ہسڈ گزرتا ہے شکل 8.10

$$\Phi \equiv \int_S B \cdot da \quad (10.49)$$

مقناطیسی میدان کو سستی مخفیہ کی روپ میں  $(B = \nabla \times A)$  لکھ کر مسئلہ سٹوکس کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr \quad (10.50)$$

یوں مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے مقناطیسی میدان کے ہسڈ

$$“B” = i\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \quad (10.51)$$

کوہیت بیری تصور کیا جاسکتا ہے دوسرے لفظوں میں تین آبادی صورت میں ہیت بیری کو ایک سطحی مکمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da \quad (10.52)$$



مقناطیسی مٹائٹ کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے تاہم ہماری استعمال کے نقطہ نظر سے مساوات 51.10 محض  $\gamma_n(T)$  کو لکھنے کا دوسرا انداز ہے

سوال ۱۰.۳:

۱. لامتناہی چکور کنواں کی چوڑائی  $w_1$  سے بھڑکر  $w_2$  ہونے کی صورت میں مساوات 42.10 استعمال کرتے ہوئے ہندی تبدیلی ہیٹ تلاش کریں

ب. اگر وسعت مستقل شرح  $(dw/dt = v)$  سے بڑھے تب ہر کی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگا

ج. اب اگر چوڑائی کم ہو واپس  $w_1$  ہو جاتی ہے تب اس ایک تیرے کا ہیٹ بیر کیا ہوگا

سوال ۱۰.۴: ڈیٹک تفاعل کنواں مساوات 114.2 واحد ایک مقید حال مساوات 129.2 کا حاصل ہے  $\alpha$  آہستہ آہستہ  $\alpha_1$  سے بڑھ کر  $\alpha_2$  ہوتا ہے ہندی تبدیلی ہیٹ کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح  $da/dt = c$  سے رونما ہو تب ہر کی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی  $\psi_n(t)$  کی صورت میں ہندی ہیٹ صفر ہوگا سوال 3.10 اور 4.10 اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن متانونی طور پر بالکل جائز جزو ضربی ہیٹ منسلک کریں  $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$  جہاں  $\Phi_n(R)$  ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقیناً آپ غیر صفر ہندی ہیٹ حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات 23.10 میں پر کرنے سے کیا ہوگا اور بسند راہ پر صفر حاصل ہوگا سبق غیر صفر ہیٹ بیر کی حنا طر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی اور دو ایسا ہیملٹنی درکار ہوگا جو غیر صفر مخلوط امتیازی تفاعلات دیتا ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیٹ بیر کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مبداء پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال 1.10 میں کیا گیا اور جس میں محور  $z$  کے ساتھ ایک اٹل زاویہ  $\alpha$  بناتے ہوئے  $B(t)$  ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے حرارت نہ گزر صورت  $\omega \ll \omega_1$  میں

$$(10.53) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا لہذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$(10.54) \quad \chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ i \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left( \frac{\omega_1 t}{2} \right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

دوسرے جزو کو  $0 \rightarrow \omega/\omega_1$  کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل

ہوگا ہر کی ہیئت درج ذیل ہے

$$(۱۰.۵۵) \quad \theta + (t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E + (t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$

جہاں مساوات 29.10 سے  $E_+ = \hbar\omega_1/2$  ہوگا لہذا ہیئت درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma + (t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پیرا کے لیے  $T = 2\pi/\omega$  ہوگا لہذا ہیئت بیری درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۷) \quad \gamma + (T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس  $B_0$  کی کراں کہ سطح ہر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے شکل 9.10 میدان  $B(t)$  کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا سوال 30.4 دیکھیں

$$(۱۰.۵۸) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں  $B$  کے دونوں کردی مہدد  $\theta$  اور  $\pi$  وقت کے تقاعلات ہیں کردی مہدد میں ڈھلواں درج ذیل ہوگا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$(۱۰.۵۹) \quad \nabla \chi_+ = \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$(۱۰.۶۰) \quad = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\phi}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۶۱)$$

$$\langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{2r} \left[ -\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \hat{\phi} \right]$$

$$(۱۰.۶۲) \quad = i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} p \hbar i$$

مساوات 51.10 کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی

$$(۱۰.۶۳) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \hat{r} = \frac{i}{2r^2} \hat{r}$$

یوں مساوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۶۴) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{a}$$

کمل مترہ کی سطح پر اس رقبے پر ایسا جائے گا جس کو  $B$  کی چھوٹی ایک پیرامیس گرتا ہوا ہذا  $r^2 d\Omega \hat{r} = d\mathbf{a}$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۶۵) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega$$

جہاں مبدہ پر ٹھوس زاویا  $\Omega$  ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلار گز لٹکن کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرارت نہ گزر طریقے سے لے جانے سے کل ہندسی تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویا کی منفی بادا ہوگا مساوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مساوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مساوات 62.10 کا مماثل حاصل کریں جواب  $-\Omega$  ایک ذرہ جس کا چکر  $s$  ہو کے لیے نتیجہ  $-s\Omega$

۱۰.۲.۳ اہارونو پوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ  $\varphi$  اور  $A$  بلاواسطہ نا قابل پیمائش ہیں

$$(۱۰.۶۶) \quad E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$

میکسول مساوات اور متاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیہ کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ تفصیل دینے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیات کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$(۱۰.۶۷) \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A + \nabla \Lambda$$

جہاں  $\Lambda$  مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کامیڈانوں پر کوئی اثر نہیں ہوگا کو انٹیمیکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو  $\varphi$  اور  $A$  کی صورت میں ناکہ  $E$  اور  $B$  کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$(۱۰.۶۸) \quad H = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\varphi$$

بہر حال زیر ماب تبادله یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبے عرصہ کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں  $E$  اور  $B$  صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقی یا طبعی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سکتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرات کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہوگا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو بوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیئت بسیری کے ساتھ پیش کروں گا مندرجہ کریں ایک ذرا کو رد اس  $b$  کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رد اس  $a < b$  کا ایک لمب لچھایا جاتا ہے جس میں ایک سستی برقی رد  $I$  ہے شکل 10.10 بہت لمب لچھائی کی صورت میں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سستی مخفیہ غیر صفر ہوگا قیاسنا موزوں ماب شرط  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(10.19) \quad \mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (r > a)$$

جہاں  $\Phi = \pi a^2 B$  لچھے سے گزرتا ہو مقناطیسی بہاؤ ہوگا ساتھ ہی لچھا از خود غیر باردار ہے لہذا غیر سستی مخفیہ  $\varphi$  صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(10.20) \quad H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla]$$

اب تفاسل موج صرف زاویہ انت  $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$  پر منحصر ہے لہذا  $\nabla \rightarrow (p\hbar i/b)(d/d\phi)$  ہوگا اور مساوات شرودنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$(10.21) \quad \frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left( \frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i\frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$(10.22) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon \psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$(10.23) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2 E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہوں گے

$$(10.24) \quad \psi = A e^{i\lambda\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.25) \quad \lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

نقطہ  $\phi = 2\pi$  پر  $\psi(\phi)$  کی استمرار کی بنا  $\lambda$  عدد صحیح

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n \quad (10.46)$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.47)$$

لچھا دائرے پر ذرا کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت  $n$  جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرا کو ظاہر کرتا ہے  $q$  مثبت لیتے ہوئے منفی  $n$  کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرا کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ احبازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرا پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک ذرا ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں  $B$  ہے لہذا  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  ہوگا تاہم  $\mathbf{A}$  از خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ  $\mathbf{A}$  ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیا کے لئے عمومیت دی جاسکتی ہے مخفی توانائی  $V$  جس میں برقی حصہ  $q\psi$  شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی شروڈنگر مساوات

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10.48)$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

$$\Psi = e^{ig} \Psi' \quad (10.49)$$

جہاں  $g(\mathbf{r})$  درج ذیل ہے

$$g(\mathbf{r}) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (10.50)$$

اور  $I$  کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہوگی جب پورا خطہ میں  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  ہو ورنہ لکیری مکمل  $I$  سے  $\mathbf{r}$  تک راہ پر منحصر ہوگا اور یوں  $\mathbf{r}$  کا تعلق عمل نہیں ہوگا  $\Psi'$  کی صورت میں  $\Psi$  کا ڈولان درج ذیل ہوگا

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i\nabla g) \Psi' + e^{\nabla \Psi'}$$

لیکن  $\nabla g = (q/\hbar) \mathbf{A}$  کے برابر ہے لہذا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi' \quad (10.51)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi' \quad (10.52)$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی  $e^{ig}$  کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \quad (10.83)$$

بظاہر  $\Psi'$  بغیر  $A$  شروع و ذکر مساوات کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سستی منجیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا معمول بات ہو گئی ہمیں صرف ہستی جزو ضربی  $e^{ig}$  ساتھ منسلک کرنا ہوگا عمر انوار یوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے شکل 11.10 ان شعاعوں کو لمبے لچھے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں  $B = 0$  ہوتا ہے  $A$  جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہوگا اور دونوں اطراف  $V$  کی قیمت ایک دوسرے جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہستی منفرق پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{r}\hat{\phi}\right) \cdot (r\hat{\phi} d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (10.84)$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہوگی جو لمبے لچھے میں  $A$  کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہستی منفرق اس مقنطیسی ہوائ کے راست متناسب ہوگا جس سے ان کی راہ گیرتے ہیں

$$\text{ہستی منفرق} = \frac{q\Phi}{\hbar} \quad (10.85)$$

اس ہستی منتقل سے متبادل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کرچکے ہیں اہارنوبوہم اثر کو ہندی ہیئت کی ایک مثال تصور کی جاسکتی ہے فرض کریں مخفیہ  $V(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  ایک بار دار ذرا کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پسند ہوتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لچھے سے باہر نقطہ  $\mathbf{R}$  پر ہے شکل 12.10 ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پیراڈینگ لہذا  $\mathbf{R}$  وقت کا تقابل عمل ہوگا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تقاضات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right\} \psi_n = E_n \psi_n \quad (10.86)$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں ہم

$$\psi_n = e^{ig} \psi'_n \quad (10.87)$$

لیتے ہیں جہاں درج ذیل ہوگا

$$g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (10.88)$$

اور  $\psi'$  اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب  $\mathbf{A} \rightarrow 0$  ہو

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \psi' = E_n \psi'_n \quad (10.89)$$

آپ نے دیکھا کہ  $\psi'_n$  ہٹاؤ  $\mathbf{r} - \mathbf{R}$  کا تعلق ہے نہ کہ  $\psi_n$  کی طرح علیحدہ علیحدہ  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{R}$  کا تعلق ہے۔ آئیے اب اس ڈب کو لمبے لمبے کے گرد ایک سپرادیٹے ہیں یہاں اس عمل کا حرارت نہ گزر ہونے کے بھی ضرورت نہیں ہے ہیٹ بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار  $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$  کی قیمت درکار ہوگی درج ذیل کی بنا

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} (10.90) \quad \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{ig} \left[ -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 r \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 r \end{aligned}$$

بغیر زبردنوشت  $\nabla$  کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  کے تعلق پر عمل کے دوران  $\nabla_R = -\nabla$  لیا یہاں آخری مکمل ہیملٹنی  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$  کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضربے  $i/\hbar$  ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہوگا یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.91) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(10.92) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو اہارونو و بوم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو و بوم اثر ہیٹ کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو و بوم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جاسکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے  $\mathbf{A}$  از خود متاثر نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا ایسا پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گنچ غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چکور کنواں وقفہ  $0 \leq x \leq a$  کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنواں کے وسط کے مقررہ آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t) \delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں  $f(t)$  آہستہ آہستہ صفر سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزرنے کے تحت یہ ذرا ارتقائی ہیملٹین کے زمینی حال میں ہی رہے گا

۱. وقت  $t \rightarrow \infty$  پر زمینی حال کا خاکہ بنائیں اس اشارہ: یہ اس لامتناہی چکور کنواں کا زمینی حال ہوگا جس میں  $a/2 + \epsilon$  پر نا قابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرا بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصہ میں رہنے کا پابند ہوگا

ب. وقت  $t$  پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T [\cos z - \cos(z\delta)]$$

$$\text{جہاں } k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar \text{ اور } \delta \equiv 2\epsilon/a \quad T \equiv m a f(t)/\hbar^2 \quad z \equiv ka$$

ج. اب  $\delta = 0$  لیتے ہوئے  $z$  کے لیے ترمیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ  $T$  کی قیمت 0 ہت  $\infty$  ہونے سے  $z$  کی قیمت  $\pi$  ہت  $2\pi$  ہوگی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب  $\delta = 0.01$  لیتے ہوئے  $T = 0, 1, 5, 20, 100$  اور 1000 کے لیے  $z$  اعدادی طریقے سے حاصل کریں

ه. کنواں کے دائیں نصف حصہ میں ذراہ پائے جانے کا احتمال بطور  $z$  اور  $\delta$  کا تفاعل تلاش کریں جواب  $P_r = [1/(1 + (I_+/I_-))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$  جہاں  $I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))]$  ہوگا جب (د) میں دیے گئے  $T$  کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و.  $T$  اور  $\delta$  کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترمیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذراہ کنواں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بودی ہارمونی مرتعش کیت  $m$  تعدد  $\omega$  پر  $f(t) = m\omega^2 f(t)$  جہاں  $f(t)$  کوئی مخصوص تفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے  $m\omega^2$  کو صریحاً لکھا ہے یوں  $f(t)$  کا بعد فاصلہ ہوگا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۹۳) \quad H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - m \omega^2 x f(t)$$

فرض کریں وقت  $t = 0$  پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہذا  $0 \leq t$  پر  $f(t) = 0$  ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کو انٹرمیکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے

۱. اگر مرتعش مبداء پر اس کن حال  $\dot{x}_c(0) = x_c(0) = 0$  سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہوگا جواب

$$(۱۰.۹۴) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش  $n$  دی حال  $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$  جہاں  $\psi_n(x)$  مساوات 61.2 دی جاتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت شرودنجر مساوات کے حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۹۵) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} \left[ -\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega t + m \dot{x}_c \left(x - \frac{x_c}{2}\right) + \frac{m \omega^2}{2} \int_0^t f(t') x_c(t') x_c(t') dt' \right]}$$



ج. دکھائے کہ  $H(t)$  کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار درج ذیل ہونگے

$$(۱۰.۹۶) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 f^2$$

د. دکھائیں کہ حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی معتام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے  $x_c(t) \cong f(t)$  سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرارت نہ گزر تفاعل  $f$  کہ وقت تفارق پر کیا پسندی عائد کرتی ہے اشارہ  $\sin[\omega(t - t')]$  کو  $\cos[\omega(t - t')]$   $(1/\omega)(d/dt')$  لکھ کر مکمل مل تھص استعمال کریں

ه. اس مثال کے لیے مسئلہ حرارت نہ گزر کی تصدیق حبزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$(۱۰.۹۷) \quad \Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$$

تصدیق کیجئے گا کہ ہر کی ہیئت کارو پ درست ہے مساوات 39.10 کیا پسندی ہیئت آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرارت نہ گزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر  $c_m(t)$  کے حرارت نہ گزر تسلسل کا پہلا حبزو قصور کیا جاسکتا ہے فرض کریں نظام  $n$  وی حال سے آغاز کرتا ہے حرارت نہ گزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت پسندی ہیئت حبزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ  $n$  وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرارت نہ گزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$(۱۰.۹۸) \quad c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt'$$

اس سے ہم متریب حرارت نہ گزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی حناطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری سر نقش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کہ متریب حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطوں جن کے لیے درج ذیل ہوگا میں تحویل ممکن ہوگی

$$c_{n+1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

یقیناً حویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے



## باب ۱۱

### بکھراؤ

#### ۱۱.۱ تعارف

##### ۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر دغا جاتا ہے یہ توانائی  $E$  اور ٹکراؤ مقدار معلوم  $b$  کے ساتھ آکر کسی زاویائے بکھراؤ  $\theta$  پر اُبھرتا ہے شکل 11.1 دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لیے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استی ثنائی ہے یوں خط حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لحاظ تصدائی بناس کی حرکت اُچھلنے کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم کو جاننے ہوئے زاویائے بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سخت کرہ کا بکھراؤ۔ فرض کریں ہدف رداس  $R$  کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی صندوق کا ایک چہرہ ہے جو لچھیلی ٹپکی کھاکر مڑتا ہے شکل 11.2۔ زاویہ  $\alpha$  کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم  $b = R \sin \alpha$  اور زاویہ بکھراؤ  $\theta = \pi - 2\alpha$  ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.1) \quad b = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

نفاہری طور پر درج ذیل ہوگا

$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش  $d\sigma$  میں آمدی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھریں گے شکل 11.3۔ بڑی  $d\sigma$  کی صورت میں  $d\Omega$  بھی بڑا ہوگا تناسبی جزبہ ضربی  $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$  کو تفسیری بکھراؤ عمودی تراش کہتے ہیں

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

نکراؤ مقدار معلوم اور راستی زاویہ  $\phi$  کی صورت میں  $d\sigma = b db d\phi$  اور  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  ہوں گے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

چونکہ عمومی طور پر  $\theta$  مقدار معلوم  $b$  کا گھٹتا ہوا تناسب ہوگا لہذا یہ تفرق در حقیقت منفی ہوگا اسی لیے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال 11.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال جاری رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ مثال 11.1 کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.6) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left( \frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□ اس مثال میں تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر  $D(\theta)$  کا مکمل ہوگا

$$(11.7) \quad \sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہوگا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.8) \quad \sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً مرکزہ کا کولمب میدان کے لیے بھی کارآمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہوگا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{time unit per area unit per particle incident of number} \quad (11.9)$$

فی اکائی وقت رقبہ  $d\sigma$  میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھراؤ والے ذرات کی تعداد  $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$  ہوگی لحاظ درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega} \quad (11.10)$$

چونکہ یہ صرف ان معتدلوں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جا سکتا ہو لحاظ اس کو عموماً تفسیری عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو  $d\Omega$  سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: رد فورڈ بکھراؤ۔ بار  $q_1$  اور حرکی توانائی  $E$  کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار  $q_2$  ہو سے بکھرتا ہے۔

(الف) ٹکراؤ معتدلوں کا زاویہ بکھراؤ کے پچر شدہ اغیز کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2) \quad \text{جواب:}$$

(ب) تفسیری عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[ \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.11)$$

(ج) دیکھائیں کہ رد فورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہوگا۔ ہم کہتے ہیں  $1/r$  مخفی لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کو لمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

## ۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹم نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج  $Ae^{ikz}$   $\psi(z)$  جو محور  $z$  رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراؤ مخفی سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے شکل 11.4 یعنی ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لیے} \quad (11.12)$$

کروی موج میں جبرضربی  $1/r$  پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے حناطر  $|\psi|^2$  کا یہ حصہ  $1/r^2$  کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ عدد موج  $k$  کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہوگا

$$(11.13) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف استی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروی موج کا جیٹ  $f$  متغیرات  $\phi$  اور  $\theta$  کا تابع ہوگا۔

ہمیں جیٹ بکھراؤ  $f(\theta)$  تعین کران ہوگا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ  $\theta$  میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً استی رفتار  $v$  پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت  $dt$  میں لامستناہی چھوٹی رقبہ  $d\sigma$  میں سے گزرنے کا احتمال شکل 11.5 دیکھیں درج ذیل ہوگا

$$dP = |\psi_{\text{آمدی}}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں اس ذرہ کے بکھراؤ کا احتمال

$$dP = |\psi_{\text{بکھرا}}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا لحاظ  $d\sigma = |f|^2 d\Omega$  اور درج ذیل ہوں گے

$$(11.14) \quad D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

ظاہر ہے کہ تفسیری عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے جیٹ بکھراؤ جو مساوات 11.12 کے حل سے حاصل ہوگا کی مطابقت مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم جیٹ بکھراؤ کی حساب کے دو تراکیب جبرضوی موج تجربہ اور بارن تخمینہ پر غور کریں گے۔

سوال 11.2: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لیے مساوات 11.12 کے مشاثل تیار کریں۔

## 11.2 جبرضوی موج تجربہ

### 11.2.1 اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ  $V(r)$  کے لیے مساوات شرودنگر متابل علیحدگی حلوں

$$(11.15) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

۴.37 کا حاصل ہوگا جہاں  $Y_l^m$  کرودی ہارمونک مساوات 4.32 ہے اور  $rR(r) = u(r)$  رادی مساوات مساوات

$$(11.14) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

کو متعین کرتا ہے بہت بڑی  $r$  کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ متابل نظر ادا ہوگا۔ لٹاف درج ذیل لکھا سکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جزر خستی کرودی موج کو اور دوسرا جزر آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیے ہم  $D = 0$  چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی  $r$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے اغیز کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی  $r$  کے لیے ہوتا ہے کہنا زیادہ درست ہوگا کہ  $1 \gg kr$  کے لیے ہوتا ہے بصریات میں خط اشاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی متناہی بکھراؤ خطہ کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا شکل 11.6۔ درمیانی خطہ میں جہاں  $V$  کو رد کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز جز کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا رادی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(11.14) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کرودی بیل تفاعلات کا خطی جوڑ ہوگا

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B r n_l(kr)$$

لیکن نہ ہی  $j_l$  جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی  $n_l$  جو متمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں  $e^{ikr}$  اور  $e^{-ikr}$  طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کرودی بیل تفاعلات کہتے ہیں

$$(11.19) \quad h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + i n_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - i n_l(x)$$

جدول ۱۱.۱: کروئی سینکل تفاعلات  $h_l^{(1)}(x)$  اور  $h_l^{(2)}(x)$

$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$ $h_1^{(2)} = \left( \frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$ $h_2^{(2)} = \left( \frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$	$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$ $h_1^{(1)} = \left( -\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$ $h_2^{(1)} = \left( -\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$
$\left. \begin{aligned} h_l^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{l+1} e^{ix} \\ h_l^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{l+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1$	

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروئی سینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑی  $r$  کی صورت میں  $h_l^{(1)}(kr)$  جسے سینکل تفاعلات کا پہلا قسم کہتے ہیں  $e^{ikr}/r$  کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ  $h_l^{(2)}(kr)$  سینکل تفاعلات کی دوسری قسم  $e^{-ikr}/r$  کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ یوں رخصتی امواج کے لیے ہمیں کروئی سینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہوگی:

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_l^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطے بکھراؤ کے باہر جہاں  $V(r) = 0$  ہوگا بالکل ٹھیک تفاعلات عمل موج درجہ ذیل ہوگا

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جز آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر  $C_{l,m}$  ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشاکلی ہے لحاظ تفاعلات موج  $\phi$  کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں  $m = 0$  ہو یا درجہ  $Y_l^m \sim e^{im\phi}$  اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درجہ ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

جہاں  $l$  ویں لیوینڈر کشیرر کنی کو  $P_l$  کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر  $a_l$   $i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)}$   $C_{l,0}$  لکھ کر عددی سروں کی تشریف یوں کی جاتی ہے:

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علاقیت کیوں بہتر ہے  $a_l$  کو  $l$  واں جیلہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی  $r$  کی صورت میں سینکل تفاعلات عمل  $(-i)^{l+1} e^{ikr}/kr$  جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا لحاظ درجہ ذیل ہوگا

$$(11.24) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$



جہاں  $f(\theta)$  درج ذیل ہے

$$(11.25) \quad f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta)$$

یہ مساوات 11.12 میں مسبق پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھتا ہے کہ جزوی موج حیطوں  $a_l$  کی صورت میں حیطہ بکھراؤ  $f(\theta)$  کس طرح حاصل ہوگا تقریبی عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.26) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta)$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.27) \quad \sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2$$

زاویائی کھل کو حل کرنے کے لیے میں نے لیڈنڈرکشیہ رکنوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

## ۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لیے جزوی موج حیطوں  $a_l$  کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں  $V(r)$  غیر صفر ہے میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیے کروئی محدود جبکہ آمدی موج کے لیے کارتیسی محدود استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تقاضا عمل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً  $V = 0$  کے لیے مساوات شرودنگر کو  $e^{ikz}$  متعین کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ  $V = 0$  کے لیے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{l,m} [A_{l,m} j_l(kr) + B_{l,m} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یوں بالخصوص  $e^{ikz}$  کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبدہ پر  $e^{ikz}$  متناہی ہے لحاظ نہ من تقاضا مساوات کی اجازت نہیں ہوگی  $r = 0$  پر  $n_l(kr)$  بے متابوڑ ہتے ہیں اور چونکہ  $z = r \cos \theta$  میں کوئی  $\phi$  نہیں پایا جاتا ہے لحاظ صرف  $m = 0$  اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروئی امواج کی صورت میں سریم پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطے میں تعامل موج کو صرف  $r$  اور  $\theta$  کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[ j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \theta)$$

مثال ۱۱.۳: کو انٹیم سخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل فرض کریں

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \text{ کے لیے} \\ 0, & r > a \text{ کے لیے} \end{cases}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

یوں تمام  $\theta$  کے لیے

$$(11.32) \quad \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[ j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)}(ka) \right] P_l(\cos \theta) = 0$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$(11.33) \quad a_l = i \frac{j_l(ka)}{kh_l^{(1)}(ka)}$$

بخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کھجاسکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ  $ka \ll 1$  کی تحدید صورت پر غور کریں  $k = 2\pi/\lambda$  کی بنیاد کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی  $z$  کے لیے  $n_l(z)$  کی مقدار  $j_l(z)$  سے بہت زیادہ ہوگی لحاظ

$$\frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z) + in_l(z)} \approx -i \frac{j_l(z)}{n_l(z)}$$

$$(11.35) \quad \approx -i \frac{2^l l! z^l / (2l+1)!}{-(2l)! z^{-l-1} / 2^l l!} = \frac{i}{2l+1} \left[ \frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^2 z^{2l+1}$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[ \frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم  $ka \ll 1$  فرض کر رہے ہیں لہذا بلخند قسب متابل نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں  $l = 0$  جبز بکھراؤ میں غالب ہوگا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کا تابع نہیں ہوگا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \quad (11.36)$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت جو میزائی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت  $\sigma$  کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہوگا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُپر سے گزرتے ہیں ناکہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا پچھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیٹانڈر کشیرر کئی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ  $l$  کی مختلف قیمتوں والے عددی سرلاظما صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروئی ڈیلٹا فنکشن عمل خول:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں جہاں  $\alpha$  اور  $a$  مستقل ہیں۔ حیط بکھراؤ  $f(\theta)$  تفسیری عمودی تراش  $D(\theta)$  اور کل عمودی تراش  $\sigma$  کا حساب کریں۔ ان میں  $ka \ll 1$  فرض کریں لہذا صرف  $l = 0$  جبز حیط حہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی حیطر آغاز سے ہی  $l \neq 0$  والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں  $a_0$  تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بعدی مقدار  $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$  کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2 \quad \text{جواب:}$$

### ۱۱.۳ منتقلات حیط

پہلے نصف لکیر  $x < 0$  پر مکائی مخفی  $V(x)$  سے یک بعدی بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کرتے ہیں شکل 11.7 میں  $x = 0$  پر اینٹون کی ایک دیوار کشٹری کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = A e^{ikx} \quad (x < -a) \quad (11.37)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگا

$$(11.38) \quad \psi_r(x) = Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

باہم عمل خطے  $(-a < x < 0)$  میں جو کچھ بھی ہوا احتمال کی بقا کی بنا منعقد موج کا حیطہ لائچما آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے  $x = 0$  پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدہ پر آمدی موج منعکس کلی تقاعس موج صفر ہوگا

$$(11.39) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لحاظ  $B = -A$  ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں  $x < -a$  کے لیے تقاعس موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.40) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیے  $k$  لحاظ توانائی  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  کی صورت میں مستقل حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراؤ  $(-a < x < 0)$  میں مساوات زرد ونگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مطا کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ  $B$  کی بجائے مستقل حیطہ کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیطہ تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج  $(Ae^{ikz})$  کا  $z$  رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں  $m \neq 0$  والا کوئی جبر نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت  $(l = 0, 1, 2, \dots)$  کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظ ہر ایک جبزوی موج جسے کسی ایک خصوصی  $l$  سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں  $\psi_0 = Ae^{ikz}$  ہوگا لحاظ  $l$  ویں جبزوی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$(11.41) \quad \psi_0^{(l)} = A i^l (2l + 1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(11.42) \quad j_l(x) = \frac{1}{2} [h^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)] \approx \frac{1}{2x} [(-i)^{l+1} e^{ix} + i^{l+1} e^{-ix}] \quad (x \gg 1)$$

لحاظ بڑی  $r$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.43) \quad \psi_0^{(l)} \approx A \frac{(2l + 1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

چپ کو کوسین میں دوسرا جز آمدی کروئی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرے نے یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جز رخصتی موج ہے جو مستقل حیط  $\delta_l$  لیتا ہے

$$(11.۴۴) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[ e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

آپ  $e^{ikz}$  میں  $h_l^{(2)}$  جز کی بنا اس کو کروئی سریمکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں  $2\delta_l$  مستقل حیط پایا جاتا ہے اور جو  $e^{ikz}$  میں  $h_l^{(1)}$  حصے کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروئی موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تناسب عمل حیطوں  $a_l$  کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو مستقل حیط  $\delta_l$  کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرورت کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی  $r$  کی صورت میں متقارب رویہ

$$(11.۴۵) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[ e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right] + \frac{(2l+1)}{r} a_l e^{ikr} \right\} P_l(\cos \theta)$$

کا  $\delta_l$  کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.۴۶) \quad a_l = \frac{1}{2ik} \left( e^{2i\delta_l} - 1 \right) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$(11.۴۷) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$(11.۴۸) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے انتشارات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے۔ مستقل حیط زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار  $a_l$  جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد  $\delta_l$  استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  اور توانائی  $E$  ہو درج ذیل مخفیہ پر بانیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج  $Ae^{ikx}$  جہاں  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔  
جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[ \frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad \text{جہاں } k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا جیٹ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں  $E \ll V_0$  کے لیے منتقلات جیٹ  $\delta$  مساوات 11.40 تلاش کریں۔  
جواب:  $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لیے جزوی موج جیٹی انتقال  $\delta_l$  کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیپٹا تفسر عمل خول سوال 11.4 سے  $S$  موج  $l = 0$  جزوی موج انتقال جیٹ  $\delta_0(k)$  تلاش کریں۔  
ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ  $r \rightarrow \infty$  پر ردائی تفسر عمل موج  $u(r)$  صفر کو پہنچے گا۔  
جواب:

$$-\cot^{-1} \left[ \cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \text{جہاں } \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

## ۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلمہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جز  $Q$  از خود  $\psi$  کا تابع ہے۔

معرض کریں ہم ایک تفاعل  $G(r)$  دریافت کرپائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لیے مساوات ہولٹز کو متعین کرتا ہو

$$(11.52) \quad (\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r)$$

ایسی صورت میں ہم  $\psi$  کو بطور ایک مکمل لکھ سکتے ہیں

$$(11.53) \quad \psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شرٹوڈنگر مساوات کو متعین کرتا ہے

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)] Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل  $G(r)$  کو مساوات ہولٹز کا تفاعلی گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعلی گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام  $G(r)$  کے لیے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$(11.54) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

ہوگا تاہم

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$(11.56) \quad \delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

لحاظ مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2)e^{is \cdot r} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پھر کچ کے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.58) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب  $s$  مکمل کے نقطہ نظر سے  $r$  غیر متغیر ہے ہم  $r$  کی مدد  $(s, \theta, \phi)$  کو یوں چنتے ہیں کہ  $r$  قطبی محور پر پایا جاتا ہو شکل 11.8۔ یوں  $s \cdot r = sr \cos \theta$  ہوگا  $\phi$  کا مکمل  $2\pi$  ہوگا جبکہ  $\theta$  مکمل درج ذیل ہوگا

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.60) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds$$

باقی مکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مدد دگاتا ہے

$$(11.61) \quad \begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2) \end{aligned}$$

اگر  $z_0$  خط ارتقاء کے اندر پایا جاتا ہو تب کوئی کلیہ مکمل

$$(11.62) \quad \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے دیگر صورت مکمل صفر ہوگا۔ یہاں حقیقی محور جو  $\pm k$  پر قطبی نادر نکات کے بلکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرتا ہوگا میں  $-k$  پر بلائی جانب سے  $+k$  پر زیریں جانب سے گزروں گا شکل 11.9۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تغا عمل گرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھ آؤں گا کہ یہ تمام بات بل مقبول ہوں گے۔



مسوات 11.61 میں ہر ایک مکمل کے لیے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ مکمل  $I_1$  کی صورت میں اگر  $s$  کا خیالی جزی بہت بڑا اور مثبت ہو تب جزی ضربی  $e^{isr}$  صفر کو پہنچے گا اس مکمل کے لیے ہم بالانصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (الف)۔ اب خط ارتقا صرف  $s = +k$  پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.۶۳) \quad I_1 = \oint \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

مکمل  $I_2$  کی صورت میں جب  $s$  کا خیالی جزی بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جزی ضربی  $e^{-isr}$  صفر کو پہنچتا ہے لحاظ ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقا  $s = -k$  پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لحاظ اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$(11.۶۴) \quad I_2 = - \oint \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.۶۵) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[ (i\pi e^{ikr}) - (-i\pi e^{ikr}) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیسے کہ سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم  $G(r)$  کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل  $G_0(r)$  جمع کر سکتے ہیں جو مقبض ہلم ہولٹز مساوات کو متعین کرتا ہو

$$(11.۶۶) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو  $(G + G_0)$  بھی متعین کرتا ہے۔ اس ایسا م کی وجہ قطبین کے متعرب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا ہے ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل  $G_0(r)$  کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.۶۷) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں  $\psi_0$  آزاد ذرہ مساوات شرودنگر کو متعین کرتا ہے

$$(11.۶۸) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

مسوات 11.67 شرودنگر مساوات کی تکلی روپ ہے جو زیادہ معروضی تصرفی روپ کی مکمل طور پر معدل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکلی کی علامت کے اندر  $\psi$  پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ تکلی حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکلی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بلخصوص بکھراؤ مسائل کے لیے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پڑ کر کے دیکھیں کہ یہ اسے متعین کرتا ہے۔ اشارہ:  $-\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$

سوال ۱۱.۹: دیکھائیں کہ  $V$  اور  $E$  کی مناسب قیمتوں کے لیے مساوات شرودنگر کی تکلی روپ کو ہائڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 متعین کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ  $E$  مٹی ہے لحاظ  $ik = k$  ہوگا جہاں  $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$  ہوگا۔

## ۱۱.۴.۲ بارن تخمینہ اول

منرض کریں  $r_0 = 0$  پر  $V(r_0)$  مکانی مخفیہ ہے یعنی کسی مستثنائی خطے کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہونگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر  $\psi(r)$  جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی تکلی میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیے  $|r| \gg |r_0|$  ہوگا لحاظ

$$(11.۶۹) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۰) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.۷۱) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.۷۲) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۳) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نمائیں ہم زیادہ بڑی تخمین  $r \cong |r - r_0|$  دے سکتے ہیں قوت نمائیں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نمائیں دوسرے جز کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار  $(r_0/r)$  کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراؤ کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$(11.43) \quad \psi_0(r) = Ae^{ikz}$$

یوں بڑی  $r$  کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(11.45) \quad \psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم خطہ بکھراؤ پڑھ سکتے ہیں

$$(11.46) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین باروہ کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ و متابل ذکر تبدیل نہیں کرتا وہ ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(11.47) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik' \cdot r_0}$$

جہاں کمل کے اندر  $k'$  درج ذیل ہے

$$(11.48) \quad k' \equiv k\hat{z}$$

مخفیہ  $V$  صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاسل موج ہوتا ہے بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k' - k) \cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$

ہو سکتا ہے کہ آپ  $k'$  اور  $k$  کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار  $k$  ہے تاہم اول الذکر کارخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ معاصر الذکر کارخ کا شنف کے رخ ہے شکل 11.11 دیکھیں۔ اس عمل میں  $\hbar(k - k')$  منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بلخصوص خطہ بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراؤ کے لیے قوت نمائی جز ضربی بنیادی طر پر مستقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں  $r$  کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا ایک کی حباتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.81) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں  $\theta$  اور  $\phi$  کا غیر تابع جیٹہ مکھراؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.82) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفسیریاتی عمودی تراش

$$(11.83) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.84) \quad \sigma \cong 4\pi \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

ایک کروئی تشاکلی مخفیہ  $V(r) = V(r)$  کے لیے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمینہ بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.85) \quad \kappa \equiv k' - k$$

$r_0$  مکمل کے قطبی محور کو  $\kappa$  پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.86) \quad (k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.87) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

متغیر  $\phi_0$  کے لحاظ سے مکمل  $2\pi$  دیا اور  $\theta_0$  مکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں  $r$  کے زیر نوشت کو س لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$(11.88) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروئی تشاکل}$$

$f$  کی زویائی تابعت  $\kappa$  میں سمونی گئی ہے شکل 11.11 کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.89) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کارو پ درج ذیل ہے جہاں  $\beta$  اور  $\mu$  مستقل ہیں

$$(11.90) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$(11.91) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)}$$

□

آپ کو سوال 11.11 میں یہ نکل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۶: ردورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں  $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$  اور  $\mu = 0$  پر کرنے سے مخفیہ کولب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa^2}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.93) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}$$

اس کا مربع ہمیں تفریقی عمودی تراش دیگا

$$(11.94) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

جو ٹھیک کلیہ ردورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولب مخفیہ کے لیے کالسی میکانیات تخمین بارن اور کو انٹیم نظریہ میدان تمام ایک دوسرے جیسے نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔

□

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لیے نرم کرہ بکھراؤ کا حیطہ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں مکمل کی قیمت تلا کر کے دائیں ہاتھ ریاضی منکرہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یو کاوا محفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تراش کریں۔ اپنے جواب کو  $E$  کا قنفاعل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل استفام سوال 11.4 کے محفیہ کے لیے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں  $f(\theta, D(\theta))$  اور  $\sigma$  کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیے  $f(\theta)$  کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

### ۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو متقتل عررضی ضرب کا حساب کرنے کے لیے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لیکر پر ہی چلے جاتا ہے شکل 11.12 ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_{\perp} dt \quad (11.95)$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو متقتل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں  $p$  آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \quad (11.96)$$

اے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبہ اول کہہ سکتے ہیں۔ اسی طرح صفر رتبہ اول تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ در حقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ اول تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مسرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی مکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0 \quad (11.97)$$

جہاں  $\psi_0$  آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (11.98)$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیے  $2m/\hbar^2$  شامل کیا ہے اور  $V$  مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \quad (11.99)$$

معرض کریں ہم  $\psi$  کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے مکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \quad (11.100)$$

اس عمل کو بار بار دہرانے سے ہمیں  $\psi$  کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \quad (11.101)$$

ہر مکمل میں آمدی تفاعل موج  $\psi_0$  کے علاوہ  $gV$  کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبہ تصحیح کس طرح پیدا کی جائے گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل 11.13 میں پیش کیا گیا ہے۔ ضرورتی  $\psi$  پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبہ اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبہ میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ حمل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹم میکانیات کی فیمنن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فیمنن میں جز ضربی راس  $V$  اور اشاعت کار  $g$  کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۳: تخمین ضرب میں رد فورڈ بکھراؤ کے لیے  $\theta$  کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دیکھیں کہ مناسب حدود کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی منکرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لیے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

سوال ۱۱.۱۶: ایک بُدی مساوات شروڈنگر کے لیے تفاعل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مشاغلہ کملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0 \quad (11.102)$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدہ پربغیر اینٹنوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ  $-\infty < x < \infty$  پر یک بُعدی بکھراؤ کے لیے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمینہ بن تیار کریں۔ یعنی  $\psi_0(x_0) \cong \psi(x_0)$  تصور کرتے ہوئے  $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$  منتخب کر کے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ انوکھی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left( \frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2 \quad (11.103)$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا فنکشن مساوات 2.114 اور ایک مستناہی چکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لیے تفصیلی عددی سر  $(T = 1 - R)$  کو یک بُعدی تخمینہ بن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ ہیٹھ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے پچر رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0)) \quad (11.104)$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \quad (11.105)$$



## باب ۱۲

### پس نوشت

اب چونکہ میں توقع کرتا ہوں آپ کو انٹرمیکانیات کو سمجھتے ہیں ہم حصہ 1.2 میں کیا گیا سوال دوبارہ اٹھاتے ہیں کو انٹرمیکانیات کے نتائج سے کیا مطلب اغیز کرنا چاہیے مسئلہ کا جڑ تفاعل موج کے ساتھ وابستہ شماریاتی مفہوم کی عدم تعینیت ہے۔ تفاعل  $\psi$  یا کو انٹرمیکانیات کا حال کہنا بہتر ہوگا جو مثال کے طور پر چسپکار ہو سکتا ہے صرف ممکنہ نتائج کی شماریاتی تقسیم مہیا کرتا ہے اور کسی بھی پیمائش کا نتیجہ یکتا طور پر تعین نہیں کرتا اس سے ایک اہم سوال کھڑا ہوتا ہے کیا پیمائش سے قبل نظام یہ مخصوص خاصیت حقیقتاً رکھتا تھا جسے حقیقت پسند نقطہ نظر کہتے ہیں یا پیمائش کے عامل نے اس خاصیت کو جسم دیا جو تا فعل موج کی شماریاتی پابندی کو مطمئن کرتا ہے۔ تقلید پسند نقطہ نظر یا ہم اس سوال کو ان بنیادوں پر رد کرتے ہیں کہ یہ سوال ایک فرضی سوال ہے انکاری نقطہ نظر۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے کو انٹرمیکانیات ایک نامکمل نظریہ ہے چونکہ کو انٹرمیکانیات کی تمام فرضیہ کردہ معلومات یعنی اس کا تفاعل موج جانتے ہوئے آپ خواص تعین نہیں کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں کو انٹرمیکانیات سے باہر کوئی اور معلومات ہوگی جس کو  $\psi$  کے ساتھ ملا کر طبعی حقائق کو مکمل طور پر بیان کرنا ممکن ہوگا۔

تقلید پسند نقطہ نظر اس سے بھی زیادہ سنگین سوالات کھڑے کرتا ہے چونکہ اگر پیمائشی عمل نظام کو ایک خاصیت اختیار کرنے پر مجبور کرتا ہو تب پیمائش ایک عجیب عمل ہوگا ساتھ ہی یہ جانتے ہوئے کہ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی نتیجہ دیتی ہے ہمیں ماننا ہوگا کہ پیمائشی عمل تفاعل موج کو یوں مٹا کر تا ہے جو موادات شروڈنگر کی تجویز کردہ ارتعاش کے برعکس ہے۔

ان سب کی روشنی میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نسل در نسل ماہر طبیعیات انکاری سوچ کے پیچھے پن لینے پر مجبور کیوں ہوئے اور اپنے شاگردوں کو نصیحت کرتے رہے کہ نظریہ کے تصوراتی بنیادوں پر غور و فکر کر کے اپنا وقت ضائع نہ کریں۔

## ۱۲.۱ آئنسٹائن پوڈولسکی روزن تضاد

سن 1935 میں آئنسٹائن پوڈولسکی اور روزن نے مل کر آئنسٹائن پوڈولسکی اور روزن تضاد پیش کیا جس کا مقصد حتمیاً نظریاتی بنیادوں پر یہ ثابت کرنا تھا کہ صرف حقیقت پسندانہ نقطہ نظر درست ہو سکتا ہے۔ میں اس تضاد کی ایک سادہ روپ جو داؤد بام نے پیش کی پر تبصرہ کرتا ہوں۔ تادیلی پائے میزان کی ایک الیکٹران اور ایک پرنٹون میں تحلیل پر غور کریں

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$$

سکن پائون کی صورت میں الیکٹران اور پروٹان ایک دوسرے کے مخالف رخ جائیں گے شکل 12.1۔ اب چونکہ پائون کا چکر صفر ہے لحاظہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کے تحت یہ الیکٹران اور پوزیٹران یکتا تنظیم میں ہوں گے

$$(12.1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + -\downarrow\uparrow)$$

اگر دیکھا جائے کہ الیکٹران ہم میدان ہے تب پوزیٹران لازماً مخالف میدان ہوگا اور اسی طرح اگر الیکٹران مخالف میدان پایا جائے تب پوزیٹران ہم میدان ہوگا۔ کوانٹم میکانیات آپ کو یہ بتانے سے قاصر ہے کہ کس پائون تجویل میں آپ کو کونسی صورت حال ملے گی تاہم کوانٹم میکانیات یہ ضرور بتا سکتی ہے کہ ان پیمائش کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق ہوگا اور اوسطاً نصف وقت ایک قسم اور نصف وقت دوسری قسم کی جوڑیاں پیدا ہوں گے۔ اب فرض کریں ہم ان الیکٹران اور پوزیٹران کو ایک عملی تجربہ کے لیے دس میٹر تک جانے دیں یا اصولاً دس نوری سال تک جانے دیں اور اس کے بعد الیکٹران کے چکر کی پیمائش کریں۔ فرض کریں آپ کو ہم میدان ملتا ہے۔ آپ فوراً حیران پائیں گے کہ بیس میٹر یا بیس نوری سال دور کوئی دوسرا شخص پوزیٹران کو مخالف میدان پائے گا۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے اس میں کوئی حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ انکی پیدائش کے وقت سے ہی الیکٹران حقیقتاً ہم میدان اور پوزیٹران مخالف میدان تھے ہاں کوانٹم میکانیات ان کے بارے میں جاننے سے قاصر تھا۔ تاہم تقلید پسند نقطہ نظر کے تحت پیمائش سے قبل دونوں ذرات نہ ہم میدان اور نہ ہی مخالف میدان تھے الیکٹران پر پیمائش تفاعل موج کو منحرف کرتی ہے جو فوراً بیس میٹر یا بیس نوری سال دور پوزیٹران کو مخالف میدان بناتا ہے۔ آئنسٹائن پوڈولسکی اور روزن اس قسم کے دور عمل کرنے والے عوامل میں یقین نہیں رکھتے تھے۔ یوں انہوں نے تقلید پسند نقطہ نظر کو نافذ بل مقبول مقرر دیا چاہے کوانٹم میکانیات حبانہ ہو یا نہ حبانہ ہو الیکٹران اور پوزیٹران لازماً کسی مخصوص چکر کے حامل تھے۔

ان کی دلیل اس بنیادی مفروضہ پر کھڑی ہے کہ کوئی جی اثر روشنی کی رفتار سے تیز سفر نہیں کر سکتا ہے۔ ہم اسے اصول مقامیت کہتے ہیں۔ آپ کو شبہ ہو سکتا ہے کہ تفاعل موج کی انہدام کی خبر کسی مستناہی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہے۔ تاہم ایسی صورت میں زاویائی معیار حرکت کی بقا متعین نہیں ہوگی چونکہ پوزیٹران تک انہدام کی خبر پہنچنے سے پہلے اگر ہم اس کے چکر کی پیمائش تو ہمیں دونوں اقسام کے چکر چپا چپا س فیصد احتمال سے

حاصل ہوں گے۔ آپ کا نظریہ جو بھی کہے تجربہ بات کے تحت دونوں کے چکر ہر صورت ایک دوسرے کے مخالف ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے تفاسل موج کا انہدام ایک دم ہوتا ہے۔

سوال ۱۲.۱: یولیدہ حالات۔ یولیدہ حالات کی ایک کلاسیکی مثال یکتا چکر تنظیم مساوات 12.1 ہے۔ اس دو ذرہ حال کو دو یک ذری حالات کا مجموعہ نہیں لکھا جاسکتا ہے لحاظ جس کے بارے میں بات کرتے ہوئے کسی ایک ذرے کے علیحدہ حال کی بات نہیں کی جاسکتی ہے۔ آپ گمان کر سکتے ہیں کہ شاید ہماری علالت کی بنا ہے اور عین ممکن ہے کہ یک ذرہ حالات کا کوئی خطی جوڑ اس نظام کو کھول سکے درج ذیل مسئلے کا ثبوت پیش کریں۔

دو سطحی ایک نظام  $|\psi_a\rangle$  اور  $|\psi_b\rangle$  پر غور کریں جہاں  $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$  ہو۔ مثلاً  $|\psi_a\rangle$  ہم میدان اور  $|\psi_b\rangle$  حنائف میدان کو ظاہر کر سکتا ہے۔ دو ذری حال

$$\alpha |\phi_a(1)\rangle |\phi_b(2)\rangle + \beta |\phi_b(1)\rangle |\phi_a(2)\rangle$$

جہاں  $\alpha \neq 0$  اور  $\beta \neq 0$  ہیں کو کسی بھی یک ذری حالات  $|\psi_r\rangle$  اور  $|\psi_s\rangle$  کا حاصل ضرب

$$|\psi_r(1)\rangle |\psi_s(2)\rangle$$

نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

اشارہ:  $|\psi_s\rangle$  اور  $|\psi_r\rangle$  کو  $|\psi_a\rangle$  اور  $|\psi_b\rangle$  کے خطی جوڑ لکھیں۔

## ۱۲.۲ مسئلہ بل

آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن کا کوانٹم میکینیات کی درستگی پر کوئی شق نہیں تھا البتہ انکا دعوہ کے طبعی حقیقت کو بیان کرنے کے لیے یہ ایک مکمل نظریہ ہے کسی بھی نظام کا حال پوری طرح جاننے کی خاطر  $\psi$  کے ساتھ ساتھ ایک اور مقدار  $\lambda$  درکار ہوگی۔ چونکہ فعل حال ہم نہیں جاننے کہ  $\lambda$  کو کس طرح ناپا یا احباب کے ذریعہ معلوم کیا جائے۔ لحاظ ہم اسے درپردہ متغیر کہتے ہیں۔ تاریخی طور پر کئی درپردہ متغیر نظریات پیش کئے گئے جو پیچیدہ ہونے کے ساتھ ساتھ نامعقول ثابت ہوئے بہر حال سن 1964 تک اس پر کام کرنے کی وجہ نظر آتی تھی تاہم اس سال جناب بل نے ثابت کیا کہ درپردہ متغیر نظریہ اور کوانٹم میکینیات ساتھ ساتھ نہیں چل سکتے ہیں۔

بل نے آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن بوہم تجربہ کو عمومی بنانے کی بات کی الیکٹران اور پوزیٹرون کا کشف کو ایک ہی رخ رکھنے کی بجائے بل نے انہیں علیحدہ علیحدہ زاویوں پر رکھنے کی اجازت دی۔ پہلا کشف اکائی سمتیہ  $a$  کے رخ الیکٹران چکر کا حزن ناپت ہے جبکہ دوسرا  $b$  کے رخ پوزیٹرون کے چکر کا حصہ ناپت ہے شکل 12.2۔ ہم اپنی آسانی کے لیے چکر کو  $\hbar/2$  کی اکائیوں میں ناپتے ہیں یوں کشف کے رخ ہم میدان کی قیمت  $+1$  اور حنائف میدان کی قیمت  $-1$  ناپی جائے گی۔ کئی  $\pi^0$  تنزل کے نتائج درج ذیل جدول میں پیش کئے گئے نتائج کی طرح ہو سکتے ہیں۔ کشف کے رخوں کی کسی ایک جوڑی کے لیے بل نے چکر کے حاصل ضرب کی اوسط قیمت تلاش کی جسے ہم  $P(a, b)$  لکھتے ہیں۔ متوازی کاشفوں کی صورت میں  $a = b$  ہوگا جو ہمیں اصل آئنسٹائن، پوڈولسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے نتائج دیگالی صورت

الیکٹران	پوزیٹرون	ضرب
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
-1	-1	+1
-1	-1	-1
⋮	⋮	⋮

میں ایک ہم میدان اور دوسرا مخالف میدان ہوگا لحاظ ان کا حاصل ضرب ہر صورت  $-1$  ہوگا اور یوں اوسط کی قیمت بھی یہی ہوگی

$$(۱۲.۲) \quad P(a, a) = -1$$

اسی طرح اگر کاشف زد متوازی ہوں تب  $b = -a$  اور ہر حاصل ضرب  $+1$  لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۳) \quad P(a, -a) = +1$$

اختیاری سمت بندی کے لیے کو انٹیمیکانیات درج ذیل پیش گوئی کرتی ہے

$$(۱۲.۴) \quad P(a, b) = -a \cdot b$$

سوال 4.50 دیکھیں۔ بل نے دریافت کیا کہ یہ نتیجہ کسی بھی درپردہ متغیر نظریہ کا ہم ابھگ نہیں ہو سکتا ہے۔

اس کا دلیل حیرت کن حد تک سادہ ہے فرض کریں الیکٹران پوزیٹرون نظام کے مکمل حال کو کوئی درپردہ متغیر یا متغیرات  $\lambda$  ظاہر کرتا ہے۔ ایک پائیون تنزل سے دوسرے پائیون تنزل تک  $\lambda$  کی تبدیلی کو نہ ہم سمجھتے اور نہ ہی متاثر کرتے ہیں۔ ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ الیکٹران کی پیمائش پر پوزیٹرون کاشف کی سمت بندی  $b$  کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے یا درجے کہ تجربہ کرنے والا الیکٹران کی پیمائش کے بعد پوزیٹرون کاشف کا رخ منتخب کر سکتا ہے۔ ایسی صورت میں چونکہ پوزیٹرون کاشف کا رخ منتخب کرنے سے پہلے ہی الیکٹران کی پیمائش کی جا چکی ہوگی لحاظ اس پر بھی کی سمت کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا ہے۔ یہ اصول معیت کا مفروضہ ہے یوں الیکٹران کی پیمائش کوئی تفاعل  $A(a, \lambda)$  اور پوزیٹرون کی پیمائش کوئی دوسرا تفاعل  $B(b, \lambda)$  دیگا۔ ان تفاعلات کی قیمتیں صرف  $\pm 1$  ہو سکتی ہیں

$$(۱۲.۵) \quad A(a, \lambda) = \pm 1; \quad B(b, \lambda) = \pm 1$$

جب کاشف متوازی ہوں تب تمام  $\lambda$  کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۶) \quad A(a, \lambda) = -B(a, \lambda)$$

اب پیمائشوں کی حاصل ضرب کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی جہاں  $\rho(\lambda)$  درپردہ متغیر کی کثافت احتمال ہے

$$(۱۲.۷) \quad P(a, b) = \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda$$

کسی بھی کشافیت کا احتمال کے لیے یہ غیر منفی ہوگا اور معمولی شرط  $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$  کو متعین کرے گا تاہم اس کے علاوہ ہم  $\rho(\lambda)$  کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کرتے ہیں درپردہ متغیر کے مختلف نظریات  $\rho$  کے لیے کافی مختلف تفاسیر پیش کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.6 کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $B$  کو خارج کر سکتے ہیں۔

$$(12.8) \quad P(a, b) = - \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda$$

اگر  $c$  کوئی تیسرا اکائی سمتیہ ہوت بدرج ذیل ہوگا

$$(12.9) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [A(a, \lambda) A(b, \lambda) - A(a, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

اور چونکہ  $[A(b, \lambda)]^2 = 1$  ہے لحاظ بدرج ذیل ہوگا

$$(12.10) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda$$

تاہم مساوات 12.5 کے تحت  $+1 \leq [A(a, \lambda) A(b, \lambda)] \leq -1$  مزید  $\rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] \geq 0$  لحاظ

$$(12.11) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

یا مختصر ادرج ذیل ہوگا

$$(12.12) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$

یہ مشہور بل عدم مساوات ہے۔ مساوات 12.5 اور 12.6 کے علاوہ کوئی شرط عائد نہیں کی گئی ہے ہم نے درپردہ متغیرات کی تعداد یا خاصیت یا تقسیم  $\rho$  کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کیا لحاظ یہ عدم مساوات ہر مقامی درپردہ متغیر نظریہ کے لیے کارآمد ہوگا۔

لیکن ہم بہت آسانی سے دیکھا سکتے ہیں کہ کوانٹم میکانیات کی پیشاگوئی مساوات 12.4 اور بل عدم مساوات ہم اہن نہیں ہیں۔ فرض کریں تینوں اکائی سمتیہ ایک مستوی میں پائے جاتے ہوں اور  $a$  اور  $b$  کے ساتھ  $c$  کا زاویہ  $45^\circ$  ہو شکل 12.3 ایسی صورت میں کوانٹم میکانیات کہتی ہے کہ

$$P(a, b) = 0, \quad P(a, c) = P(b, c) = -0.707$$

جبکہ بل عدم مساوات کہتی ہے کہ

$$0.707 \not\leq 1 - 0.707 = 0.293$$

جب ایک دوسرے کے غیر ہم اینگ نتائج ہیں یوں بل کی ترمیم سے آئنسٹائن، پڈولسکی اور روزن تضاد ایک ایسی بات ثابت کرتا ہے جو اس کے مصنفین تصور بھی نہیں کر سکتے تھے۔ اگر وہ درست ہوں تب نہ صرف کوانٹم میکانیات

مکمل ہے بلکہ یہ مکمل طور پر غلط ہے اس کے برعکس اگر کو انٹرمیکانیٹک درستی ہے تب کوئی درپردہ متغیر نظریہ ہمیں اس غیر مکامیت سے نجات نہیں دو سکتی جسے آئنسٹائن مضائقہ خیز سمجھتا تھا۔ مزید اب ہم بہت سادی تجربہ سے اس مسئلے کو دفن کئے ہیں۔

بل عدم مساوات کو پرکھنے کے لیے ساٹھ اور ستر کی دہائیوں میں کئی تجربات سرانجام دئے گئے جن میں ایپیکٹ، گریٹر اور روہر کا کام قابل فخر ہے ہمیں یہاں انکے تجربہ کی تفصیل سے دلچسپی نہیں ہے۔ انہوں نے پائونڈ تیزل کی بجائے دو فوٹان جوہری استعمال کیا یہ خدشہ دور کرنے کے لیے کہ الیکٹران کاشف کی سمت بندی کو کسی طرح پوزیٹرون کاشف حبان پائے گا فوٹان کی راواگی کے بعد دونوں کی سمت بندی کی گئی۔ نتائج کو انٹرمیکانیٹک کی پیش گوئی کی عین مطابق تھے اور بل عدم مساوات کے غیر ہم آہنگ تھے۔

ستم ظریفی کی بات ہے کہ کو انٹرمیکانیٹک کی تجرباتی تصدیق نے سائنسی برادری کو ہلا کر رکھ دیا۔ لیکن اس کی وجہ حقیقت پسند سوچ کا غلط ثابت ہونا نہیں تھا عموماً سائنسدان کب کے اس حقیقت کو مان چکے تھے اور جو ابھی بھی مانتے تھے انکے لیے غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات کا راستہ ابھی کھلا ہے چونکہ مثلاً اطلاق ان پر نہیں ہوتا ہے۔ اصل عدم مساوات کا تھکا کہ قدرت از خود بنیادی طور پر غیر مکامی ہے۔ تفاسل موج کی فوراً انہدام کی صورت میں غیر مکامیت یا متشائل ذرات کے لیے ضرورت تشاکلیت ہمیشہ تقلید پسند نظریہ کی خاصیت رہی ہے۔ تاہم ایپیکٹ کے تجربہ سے قبل امید کی جا سکتی تھی کہ کو انٹرمیکامیت کسی طرح فائدہ و ضوابط کی غیر طبعی پیداوار تھی جس کے متقابل کشف اثرات نہیں ہو سکتے ہیں اس امید کو بھول جائیں ہمیں فاصلہ پر یکدم عمل کے تصور کو دوبارہ دیکھنا ہوگا۔

ماہر طبیعیات روشنی سے زیادہ تیز رفتار اثر و سوچ کو کیوں برداشت نہیں کر سکتے ہیں؟ آخر کئی چیزیں روشنی سے زیادہ تیز رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ ایک موم بتی کے سامنے چلتے ہوئے کیڑے کا سامنے دیوار پر سارے کی رفتار دیوار تک فاصلے کے راست مستجاب ہوگی اصولاً آپ اس فاصلہ کو اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ سایہ کی رفتار روشنی سے زیادہ ہو شکل 12.4۔ تاہم دیوار پر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک سایہ کوئی توانائی منتقل کر سکتا ہے اور نہ ہی کوئی خبر پہنچ سکتا ہے۔ نقطہ X پر ایک شخص ایسا کوئی عمل نہیں کر سکتا جو یہاں سے گزرتے ہوئے سارے کے ذریعہ نقطہ Y پر اثر انداز ہو۔

اس کے برعکس روشنی سے زیادہ تیز حرکت کرنے والے سبھی اثر و سوچ کے ناقابل قبول مضمرات ہو سکتے ہیں۔ خصوصی نظریہ اضافت میں ایسے جمودی چوکھٹ پائے جاتے ہیں جن میں اس طرح کا اشارہ وقت میں پیچھے جا کے گالیعی سبب سے پہلے اثر رونما ہوگا جس سے ناقابل قبول منتقلی مسائل کھڑے ہوتے ہیں۔ مثلاً آپ اپنے نوزادہ دادا کو قتل کر سکتے ہیں۔ جو ظاہر ہے ایک بری بات ہے۔ اب سوال یہ کھڑا ہوتا ہے کہ آیا روشنی سے تیز اثرات جن کی پیش گوئی کو انٹرمیکانیٹک کرتی ہے اور جو ایپیکٹ کے تجربہ میں کشف ہتے ہیں ان معانوں میں سببی ہے یا یہ سارے کی حرکت کی طرح غیر حقیقی ہے جن پر فلسفیانہ اعتراضات نہیں لگائے جا سکتے ہیں۔

آئیں تجربہ بل پر غور کریں کریں۔ کیا الیکٹران کی پیمائش کا پوزیٹرون کی پیمائش پر اثر ہوگا یقیناً ایسا ہوتا ہے ورنہ ہم مواد کے بیچ باہم رشتہ کی وضاحت پیش کرنے سارے متاصر ہوں گے۔ لیکن کیا الیکٹران کی پیمائش پوزیٹرون کی کسی مخصوص نتیجہ کا سبب ہے؟ الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائش کے ذریعہ پوزیٹرون کاشف پر بیٹھے شخص کو اشارہ نہیں بھیج سکتا ہے چونکہ یہ اپنی پیمائش کے نتیجہ کو متاثر نہیں کرتا یہ الیکٹران کو ہم میدان ہونے پر

مجبور نہیں کر سکتا ہے جیسا نقطہ  $X$  پر کیڑا کے سارے پر وہ شخص اثر انداز نہیں ہو سکتا، ہاں الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص فیصلہ کر سکتا ہے کہ وہ پیمائش کرے یا نہ کرے تاہم پوزیٹرون کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائشی نتائج کو دیکھ کر یہ نہیں بتا سکتا کہ الیکٹران پر پیمائش کی گئی یا نہیں دونوں کاشف کے نتائج پر علیحدہ علیحدہ غور کرنے سے مکمل بلا واسطہ مواد دیکھنے کو ملتا ہے۔ صرف دونوں مواد کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں ان کے بیچ باہم رشتہ نظر آتا ہے کسی دوسرے جمودی چوکھٹ میں الیکٹران کی پیمائش سے قبل پوزیٹرون کی پیمائش کی جائے گی لیکن اس کے باوجود اس سے کوئی منتفی تضاد پیدا نہیں ہوتا۔ دیکھا گیا باہم رشتہ اس پر منحصر نہیں کہ ہم کہیں الیکٹران کی پیمائش پوزیٹرون کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے یا پوزیٹرون کی پیمائش الیکٹران کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے۔ یہ ایک نہایت نازک اور خوبصورت اثر ہے جو بلا واسطہ مواد کے بیچ باہم رشتہ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

یوں ہمیں مختلف قسم کے اثرات کی بات کرنی ہوگی سبھی قسم جو وصول کنندہ کی کسی طبعی خاصیت میں حقیقی تبدیلیاں پیدا کرتا ہو جنہیں صرف ذیلی نظام پر تجرباتی پیمائش سے کشف کیا جاسکتا ہو اور آسمانی قسم جو توانائی یا معلومات کی ترسیل نہیں کرتا اور جس کے لیے واحد ثبوت دو علیحدہ ذیلی نظاموں کے مواد کے بیچ باہم رشتہ ہے۔ اس باہم رشتہ کو کسی بھی طرح کسی ایک ذیلی نظام میں تجربات کے نتائج کو دیکھ کر کشف نہیں کیا جاسکتا ہے۔ سبھی اثرات روشنی کی رفتار سے تیز حرکت نہیں کر سکتے ہیں جبکہ آسمانی اثرات پر ایسی کوئی پابندی عائد نہیں۔ تضاد عمل فوج کی انہدام سے وابستہ اثرات مخز الذکر قسم کی ہے جس کا روشنی سے تیز سفر کا تاحیران کن ضرور ہو سکتا ہے لیکن تباہ کن نہیں ہے۔

### ۱۲.۳ مسئلہ کلیہ

کو انٹرمیٹ پیمائش عموماً تباہ کن ہوتے ہیں یعنی یہ پیمائش کردہ نظام کے حال کو تبدیل کرتا ہے۔ یہی تجربہ گاہ میں اصول عدم یقینیت کو یقینی بناتا ہے ہم کیوں اصل حال کی کئی متضاد نقل و نقل کلیہ بن کر اصل نظام کو چھوئے بغیر ان کی پیمائش نہیں کرتے ایسا کرنا ممکن نہیں ہے۔ اگر آپ کلیہ بنانے والا ایسا آلا بنا پائیں تو کو انٹرمیکانیات کو خداحافظ کہنا ہوگا۔

مثال کے طور پر آئنسٹائن، پوڈولسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے ذریعہ روشنی سے تیز رفتار پر خبر بھیجنے ممکن ہوگا مندرجہ کرین پوزیٹرون کاشف چلانے والا شخص ہاں یا نہیں کی خبر ترسیل کرتا ہے۔ خبر ہاں ہونے کی صورت میں بھیجنے والا پوزیٹرون کا  $S_z$  ناپتا ہے یہ جاننے کی ضرورت نہیں کہ پیمائشی نتیجہ کیا ہے صرف اتنا جاننا ضروری ہے کہ پیمائش کی گئی ہے یوں الیکٹران کسی غیر مبہم حال  $\uparrow$  یا  $\downarrow$  میں ہوگا جس کا جاننا غیر اہم ہے۔ خبر وصول کرنے والا حبلہ ی سے الیکٹران کی دس لاکھ کلیہ تیار کر کے ہر ایک کی  $S_z$  ناپتا ہے اگر تمام کا ایک ہی جواب ہو تو جواب یہ جاننا ضروری نہیں ہم یقین سے کہہ سکیں گے کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی لحاظ خبر ہاں ہوگی۔ اس کے برعکس اگر نصف الیکٹران ہم میدان اور نصف خلاف میدان ہوں تب یقیناً الیکٹران کی پیمائش نہیں کی گئی اور خبر نہیں ہوگا۔

لیکن سن 1982ء وورٹز، زورک اور ڈانگس نے ثابت کیا کہ ایسا مشین تیار نہیں کیا جاسکتا ہے جو کو انٹرمیٹ متضاد ذرات پیدا کرتا ہو ہم چاہیں گے کہ یہ مشین حال  $|\psi\rangle$  میں ایک ذرہ جس کا نقل و نقل بنا مقصود ہو اور حال  $|X\rangle$  |

میں ایک اضافی ذرہ لی کر حال  $|\psi\rangle$  میں دو ذرات اصل اور نقل دیتا ہو

$$(۱۲.۱۳) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle$$

معرض کریں ہم ایسا مشین بنانے میں کامیاب ہوتے ہیں جو حال  $|\psi_1\rangle$  کا کلمہ تیار کرتا ہو

$$(۱۲.۱۴) \quad |\psi_1\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle$$

اور  $|\psi_2\rangle$  پر بھی کام کرنے کے متبادل ہو

$$(۱۲.۱۵) \quad |\psi_2\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle$$

مثال کے طور پر اگر ذرہ ایک الیکٹران ہو تب  $|\psi_1\rangle$  اور  $|\psi_2\rangle$  ہم میدان اور خلاف میدان ہو سکتے ہیں۔ یہاں تک کوئی مسئلہ پیدا نہیں ہوتا یہ دیکھنا ہوگا کہ ان کا خطی جوڑ  $|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle$  کی صورت میں کیا ہوگا؟ ظاہر ہے ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۱۶) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow \alpha |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle$$

جو ہم نہیں چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل چاہتے ہیں

$$(۱۲.۱۷) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle = [\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle][\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle] \\ = \alpha^2 |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta^2 |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle + \alpha\beta[|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle]$$

آپ ہم میدان الیکٹران اور خلاف میدان الیکٹران کے کلمہ بنانے کی مشین بنا سکتے ہیں لیکن وہ کسی بھی اہم خطی جوڑ کی صورت میں ناکامی کا شکار ہوگا یہ بالکل ایسا ہوگا جیسا نقل بنانے کی مشین اگلی لکیریوں اور انتہائی لکیریوں کی نقل خوش اصولی سے کرتا ہو لیکن وتری لکیریوں کو مکمل طور پر بگاڑتا ہو۔

## ۱۲.۴ شرودنگر کی مٹی

کوانٹم میکانیات میں پیمائش کا عمل ایک شرارتی کردار ادا کرتا ہے جس میں عدم تعینیت غیر مکامرتتفاعل موج کا انہدام اور باقی تمام تصوراتی مشکلات رونما ہتی ہیں۔ پیمائش کی غیر موجودگی میں مساوات شرودنگر کے تحت تفاعل موج متبادل تعین طریقہ سے ارتقا کرتا ہے اور کوانٹم میکانیات کسی بھی سادہ نظریہ میدان کی طرح نظر آتا ہے جو کلاسیکی برقی حرکیات سے بہت سادہ ہوگا چونکہ دو میدان E اور B کی بجائے اس میں واحد ایک غیر سمتی  $\psi$  پایا جاتا ہے۔ یہ پیمائش کا عمل ہی ہے جو کوانٹم میکانیات میں عجیب و غریب کردار ادا کرتے ہوئے اس کو سمجھ سے باہر خواص سے نوازتا ہے۔ یہ پیمائش حقیقت میں ہے کیا؟ اسے گہرے طبعی عوامل سے کیا مفسر دینا ہے اور ہم کس طرح حبان سکتے ہیں کہ پیمائش کی گئی ہے؟

شعورنگر نے اپنے مشہور تصدیقی کے مفروضہ نے اس بنیادی سوال کو ہمیشہ کیا۔



ایک بلی کو فولاد کے ایک بند ڈبے میں بند کیا جاتا ہے اس ڈبے میں ایک گنگر گنت کار اور کسی تاب کار مادہ کی اتنی چھوٹی مقدار رکھی جاتی ہے جس کا ایک گھنٹہ میں صرف ایک جوہر کے تحلیل ہونے کا امکان ہوتا ہے یہ بھی ممکن ہے کہ کوئی جوہر تحلیل نہ ہو تحلیل کی صورت میں گنت کار اس ڈبے میں ایک زہریلی گیس چھوڑتا ہے۔ ایک گھنٹہ گزرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ تحلیل نہ ہونے کی صورت میں یہ بلی زندہ ہوگی۔ پہلی تحلیل اس کو زہر سے مار دیتی۔ اس مکمل نظام کا تفاعل موج اس حقیقت کو ظاہر کرنے کے لیے زندہ اور مردہ بلی کے برابر حصوں پر مشتمل ہوگا۔

ایک گھنٹہ کے بعد بلی کا تفاعل موج درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{زندہ}} + \psi_{\text{مردہ}}) \quad (12.18)$$

یہ بلی نہ تو زندہ اور نہ ہی مردہ ہے بلکہ پیمائش سے پہلے یہ ان دونوں کا ایک خطی جوڑ ہوگا یہاں کھڑکی سے اندر دیکھ کر بلی کا حال جاننے کو پیمائش تصور کیا جائے گا۔ آپ کا دیکھنے کا عمل بلی کو زندہ یا مردہ ہونے پر مجبور کرتا ہے ایسی صورت میں اگر بلی مردہ پائی جائے تو یقیناً اس کے زہدار آپ ہی ہیں چونکہ آپ نے کھڑکی سے دیکھ کر اسے قتل کیا۔

شرودنگر اس تمام کو ایک بکواس سے زیادہ نہیں سمجھتا تھا اور میرے خیال سے زیادہ تر ماہر طبیعیات ان کے ساتھ متفق ہیں۔ کلا بین اجسام کا دو مختلف حالات کی ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہونے کا تصور بے معنی ہے۔ ایک الیکٹران تو ہم میدان اور خلاف میدان کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہو سکتا ہے لیکن ایک بلی زندہ اور مردہ حالات کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں نہیں ہو سکتی ہے۔ اس کو کو انٹرمیکانیات کی تقلید پسند تشریح کے ساتھ کس طرح ہم اب تک بنایا جاسکتا ہے۔

شماریاتی مفہوم کے لحاظ سے مقبول ترین جواب یہ ہے کہ گنت کار کی گنتی پیمائش ہوگی ناکہ کھڑکی میں سے انسانی مشاہدہ پیمائش سے مراد وہ عمل ہے جو کلا بین نظام پر اثر انداز ہو جو یہاں گنت کار ہے۔ پیمائش کا عمل اس لحاظ پر رونما ہوگا جب حشر بین نظام جسے کو انٹرمیکانیات کے قوانین بیان کرتا ہے کلا بین نظام جسے کلاسیکی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں کے ساتھ اس طرح باہم عمل کرے جس سے دائمی تبدیلی رونما ہو۔ کلا بین نظام از خود منفرد حالات کی ایک خطی جوڑ کا مکین نہیں ہو سکتا ہے۔

## ۱۲.۵ کو انٹرمیڈیٹ تصاد

اس عجیب قصہ کی اہم ترین خاصیت تفاعل موج کا انہدام ہے۔ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش سے اسی نتیجہ کے حصول کی خاطر حلاوت نظریاتی بنیادوں پر اسے متعارف کیا گیا تھا یقیناً اس دور رس اصول موضوعہ کے قابل مشاہدہ اثرات بھی ہوں گے۔ مراد اور سردشان نے سن 1977 میں تفاعل موج کی انہدام کا ایک ڈرامائی تجرباتی مظاہرہ تجویز کیا جسے انہوں نے کو انٹرمیڈیٹ کا نام دیا۔ ان کا تصور یہ تھا کہ ایک غیر مستحکم نظام مثلاً ہیجان حال میں ایک جوہر کو بار بار پیمائشی عمل سے گزارا جائے۔ ہر ایک مشاہدہ تفاعل

موج کو منہدم کر کے گھٹری کو دوبارہ صفر سے چالو کرے گا اور یوں زیریں حال میں متوقع انتقال کو غیر معائنہ مدد تک روکا جاسکتا ہے۔

فرض کریں ایک نظام ہیجان حال  $\psi_2$  سے آغاز کرتا ہے اور زمینی حال  $\psi_1$  میں منتقلی کے لیے اس کا قدرتی عرصہ حیات  $\tau$  ہے۔ عام طور پر  $\tau$  سے کافی کم وقتوں کے لیے انتقالی احتمال وقت  $t$  کا راست متناسب ہوگا مساوات 9.42 دیکھیں چونکہ انتقالی شرح  $1/\tau$  ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{t}{\tau} \quad (12.19)$$

وقت  $t$  پر پیمائش کرنے کی صورت میں بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau} \quad (12.20)$$

درج کریں ہم دیکھتے ہیں کہ نظام بالائی حال میں ہی ہے ایسی صورت میں تفعل موج واپس  $\psi_2$  پر منحصر ہوگا اور پورا عمل ایک بار نئے سرے سے دوبارہ شروع ہوگا۔ اگر ہم وقت  $2t$  پر دوسری پیمائش کریں تب بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \approx 1 - \frac{2t}{\tau} \quad (12.21)$$

جو وہی ہے جو اس صورت ہوتا اگر ہم پہلی پیمائش کرتے ہی نہیں سادہ سوچ کے تحت ایسا ہی ہونا چاہیے تھا۔ اگر ایسا ہی ہوتا تب نظام کا بار بار مشاہدہ کرنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا اور سنی کو انہم زینو اثر پیدا ہوتا تاہم بہت قلیل وقت کی صورت میں انتقالی احتمال وقت  $t$  کے بجائے  $t^2$  کا راست متناسب ہوگا 9.39 دیکھیں

$$P_{2 \rightarrow 1} = \alpha t^2 \quad (12.22)$$

ایسی صورت میں دو پیمائشوں کے بعد بھی نظام کا بالائی حال میں ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$\left(1 - \alpha t^2\right)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2 \quad (12.23)$$

جبکہ پہلی پیمائش نہ کرنے کی صورت میں اب احتمال درج ذیل ہوتا

$$1 - \alpha(2t)^2 \approx 1 - 4\alpha t^2 \quad (12.24)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقت  $t$  گزرنے کے بعد نظام کے مشاہدہ کی بنیادیں حال میں منتقلی کا احتمال کم ہوا ہے۔

یقیناً  $t = 0$  سے لیکر  $t = T$  تک  $n$  برابر وقف  $T/n, 2T/n, 3T/n, \dots, T$  پر نظام کا مشاہدہ کرنے کی وجہ سے اس دورانیہ کے آخر میں بھی نظام بالائی حال میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$\left(1 - \alpha(T/n)^2\right)^n \approx 1 - \frac{\alpha}{n} T^2 \quad (12.25)$$

جو  $\infty \rightarrow n$  کی حد میں 1 تک پہنچتا ہے ایک غیر مستحکم نظام جس کا مسلسل مشاہدہ کیا جائے کبھی بھی تحویل نہیں ہوگا بعض مصنفین اس مانعہ سے اتفاق نہیں کرتے اور ان کے نزدیک یہ تفاعل موج کے انہدام غیر درست ہونے کا ثبوت ہے۔ تاہم ان کے مدلائل مشاہدہ کے مفہوم کی عنایت تشریح پر مبنی ہے اگر بلا حائل خانہ میں ایک ذرہ کی راہ کو مسلسل مشاہدہ کرادے دیا جائے تب یہ بالکل درست ہوں گے چونکہ ایسی ذرات یقیناً تحویل ہوتے ہیں اور ان کا عرصہ حیات پر کاشف کا متاثری پیشائش اثر نہیں پایا جاتا ہے تاہم ایسا ذرہ خانہ کے اندر جوہروں کے ساتھ حادثات باہم عمل کرتا ہے جبکہ کو انٹیم زیٹو اثر کے لیے ضروری ہے کہ ایک بعد دیگر پیشائشوں کے بیچ وقفہ اتنا کم ہو کہ نظام کو  $t^2$  خطہ میں پکڑا جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ خود بخود انتقال کی صورت میں یہ تجربہ عملاً ممکن نہیں ہے۔ تاہم پیدا کردہ انتقال کی صورت میں نتائج کا نظریاتی پیش گوئی کے ساتھ مکمل اتفاق پایا جاتا ہے۔ بد قسمتی سے یہ تجربہ تفاعل موج کی انہدام کا ختمی ثبوت پیش نہیں کر سکتا ہے اس مشاہدہ کے دیگر وجوہات بھی دے جا سکتے ہیں۔

میں نے اس کتاب میں ایک ہم آہنگ اور بلا تضاد کہانی پیش کرنے کی کوشش کی ہے تفاعل موج  $\psi$  کسی ذرہ یا نظام کے حال کو ظاہر کرتا ہے۔ عمومی طور پر ای کذرہ کسی مخصوص حرکی خاصیت مثلاً مقام معیار حرکت توانائی زاویائی معیار حرکت وغیرہ کا حامل نہیں ہوتا اس وقت تک جب پیشائشی عمل مداخلت نہ کرے کسی ایک تجربہ میں حاصل ایک مخصوص قیمت کا احتمال  $\psi$  کی شماراتی مفہوم تعین کرتا ہے۔ پیشائشی عمل سے تفاعل موج منہدم ہوتا ہے جس کی بنا فوراً دوسری پیشائش لائٹماؤ ہی نتیجہ دیتی۔ اگرچہ دیگر تشریحات مثلاً غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات متعدد کائنات کا تصور بلا تضاد تاریخیں سگرہ نمونے وغیرہ بھی پائے جاتے ہیں لیکن میں یقین کرتا ہوں کہ یہ سب سے سادہ ہے جس سے عموماً ماہر طبیعیات اتفاق کرتے ہیں۔ یہ ہر تجربہ سے کامیابی سے ابھرتا ہے تاہم یہ کہانی کا اختتام نہیں ہے ہمیں پیشائشی عمل کے بارے میں اور انہدام کے طریقے کار کے بارے میں بہت کچھ جاننا ہے عین ممکن ہے کہ آنے والے نسلیں زیادہ پیچیدہ نظریہ جانتے ہوئے سوچتے ہوں کہ ہم اتنا سادہ کیسے ہو سکتے تھے۔



جوابات



ضمیمہ ۱

خطی الجبر ۱

۱.۱ سمتیات

۲.۱ اندرونی ضرب

۳.۱ قلاب

۴.۱ تبدیلی اساس

۵.۱ امتیازی تقاعلات اور امتیازی افتدار

۶.۱ ہر مشی تبادله





# فهرست

54relation,	allowed
energy	26energies,
22allowed,	51 argument,
31conservation,	Bessel
13ensemble,	99function,spherical
expectation	107energy,binding
6value,	Bohr
formula	106radius,
16Broglie,De	106formula,Bohr
Fourier	25conditions,boundary
52transform,inverse	98term,centrifugal
52transform,	83states,coherent
Frobenius	4collapses,
45method,	commutation
function	36relation,canonical
59delta,Dirac	90relations,canonical
generalized	36commutator,
59distribution,	28complete,
59function,	77continuous,
generating	90continuum,
50function,	coordinates
generator	91spherical,
86space,intranslation	3interpretation,Copenhagen
86time,intranslation	75degenerate,
Gram-Schmidt	delta
79process,orthogonalization	28Kronecker,
21Hamiltonian,	Dirac
harmonic	80orthonormality,
25oscillator,	77discrete,
	dispersion

- 3realist,
- 12potential,
- 97effective,
- probability
- 8density,
- quantum
- 105number,principle
- numberquantum
- 96azimuthal,
- 96magnetic,
- 99numbers,quantum
- 97equation,radial
- recursion
- 46formula,
- reflection
- 64coefficient,
- 73time,revival
- Rodrigues
- 49formula,
- 94formula,Rodrigues
- Rydberg
- 113constant,
- 113formula,
- Schrodinger
- 20time-independent,
- 1align,Schrodinger
- series
- 113Balmer,
- 28Fourier,
- 113Lyman,
- 113Paschen,
- 35power,
- 34Taylor,
- spherical
- 96harmonics,
- 11square-integrable,
- 7deviation,standard
- state
- 58bound,
- 113Helium,
- Hermitian
- 40conjugate,
- 3variables,hidden
- 2indeterminacy,
- ladder
- 38operators,
- Laguerre
- 108polynomial,associated
- 108polynomial,
- 90Laplacian,
- law
- 34Hooke,
- Legendre
- 94associated,
- linear
- 22combination,
- 113Lithium,
- 6mean,
- 6median,
- 14momentum,
- Neumann
- 99function,spherical
- 27node,
- 10normalization,
- 14operator,
- 38lowering,
- 38raising,
- 27orthogonal,
- 28orthonormal,
- Planck's
- 113formula,
- polynomial
- 48Hermite,
- position
- 3agnostic,
- 3orthodox,

- اتاقی  
حالات، 83  
اجزائی  
توانائیاں، 26  
استمراری، 77  
استمراریہ، 90  
اصول  
عدم یقینیت، 16  
انتشاری  
رشتہ، 54  
انخطاطی، 75  
انعکاس  
شرح، 64  
اوسط، 6
- بقا  
توانائی، 31  
بندشی توانائی، 107  
بوہر  
رداس، 106  
کلیہ، 106  
بیل  
کروی تقاعس، 99
- پلانک  
کلیہ، 113  
پیداکار  
فضا میں انتقال کا، 86  
وقت میں انتقال، 86  
پیداکار  
تقاعس، 50
- تبادلہ  
باضابطہ رشتہ، 36  
باضابطہ رشتہ، 90  
تبادلہ کار، 36  
تجدیدی عرصہ، 73  
ترسیل  
شرح، 64
- تسل  
بالہ، 113  
پاشن، 113
- 27excited,  
107,27ground,  
58scattering,  
statistical  
2interpretation,  
66function,step  
theorem  
28Dirichlet's,  
15Ehrenfest,  
52Plancherel,  
112transition,  
transmission  
64coefficient,  
65,58tunneling,  
58points,turning  
16principle,uncertainty  
variables  
19of,separation  
7variance,  
velocity  
54group,  
54phase,  
wave  
64incident,  
52packet,  
64reflected,  
64transmitted,  
1function,wave  
16wavelength,

- ساکن  
حالات، 21  
سرحدی شرائط، 25  
سرنگ زنی، 58، 65  
سگرا، 13  
سوچ  
انکاری، 3  
تقلید پسند، 3  
حقیقت پسند، 3  
سیڑھی  
عاملین، 38  
سیڑھی تفاعل، 66  
شروڈنگر  
غیر تابع وقت، 20  
شروڈنگر تصویر کشی، 86  
شروڈنگر مساوات، 1  
شماریاتی مفہوم، 2  
طول موج، 16، 113  
عامل  
تقلیل، 38  
رفت، 38  
عبور، 112  
عدم تعین، 2  
عدم یقینیت اصول، 16  
عندرو، 27  
علیحدگی متغیرات، 19  
عمودی، 27  
معیاری، 28  
غیر مسلسل، 77  
منرو وینوس  
ترکیب، 45  
فوریسر  
الٹ بدل، 52  
بدل، 52  
قابل تکامل مربع، 11  
قانون
- ٹیلر، 34  
طامتی، 35  
فوریسر، 28  
لیمان، 113  
تغییریت، 7  
تفاعیل  
ڈیلٹا، 59  
تفاعیل موج، 1  
توالی  
کلیہ، 46  
توانائی  
اجزائی، 22  
توقعاتی  
قیمت، 6  
جفت  
تفاعیل، 24  
حال  
بکھراؤ، 58  
زمینی، 27، 107  
مقید، 58  
ہیجان، 27  
خطی جوڑ، 22  
خفیہ متغیرات، 3  
دلیل، 51  
ڈیراک  
معیاری عمودیت، 80  
ڈیلٹا  
کرونیگر، 28  
رداسی مساوات، 97  
رڈبرگ، 113  
کلیہ، 113  
رفتار  
دوری سستی، 54  
گروہی سستی، 54  
روڈریگیس  
کلیہ، 94

- ۳۴، ہا
- کثافت
- ۸، احتال
- کثیر رکنی
- ۴۸، ہرمانٹ
- کروی
- ۹۶، ہارمونیات
- کلیہ
- ۱۶، ڈی پروگ
- ۴۹، روڈریگیس
- کوانٹم
- ۱۰۵، صدر عدد
- ۹۹، کوانٹائی اعداد
- کوانٹائی عدد
- ۹۶، استی
- ۹۶، مقناطیسی
- ۳، کوپن ہیگن مفہوم
- گرام شمہ
- ۷۹، ترکیب عمودیت
- ۴، گر کر
- ۹۰، لاپلاسی
- لاگ
- ۱۰۸، شریک کثیر رکنی
- ۱۰۸، کثیر رکنی
- ۱۱۳، تقسیم
- لیوڈنڈر
- ۹۴، شریک
- متعمم
- ۵۹، تقا عمل
- ۵۹، تقسیم
- محمد
- ۹۱، کروی
- ۱۲، مخفیہ
- ۹۷، موثر
- مربعش
- ۲۵، ہارمونی
- ۹۸، مرکز گریز جبزو
- مسئلہ
- ۱۵، اہر نفٹ
- ۵۲، پلانشرال
- ۲۸، ڈرٹلہ
- ۱۰، معمول زنی
- ۱۴، معیار حرکت
- ۲۸، معیار عمودی
- ۷، معیاری انحراف
- ۲۸، مکمل
- موج
- ۶۴، آمدی
- ۶۴، ترسیلی
- ۶۴، منعکس
- ۵۲، موجی اکھ
- نیومن
- ۹۹، کروی تقا عمل
- ۵۸، واپسی نقاط
- ۶، وسطانیہ
- ہارمونی
- ۲۵، مربعش
- ۴۰، جوڑی دار
- ۸۶، ہیزنبرگ تصویر کشی
- ۱۱۳، ہیلیم
- ۲۱، ہیملٹنی