

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمولی زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متنازع وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستثنائی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	مستعمل شماریاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا مجموعی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شماریاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	.....	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	.....	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	.....	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	.....	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	.....	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	.....	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	.....	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	.....	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	.....	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	.....	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	.....	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	.....	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	.....	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	.....	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	.....	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	.....	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	.....	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	.....	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	.....	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	.....	تغیری اصول	۷
۲۹۹	.....	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	.....	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	.....	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	.....	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	.....	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	.....	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	.....	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	.....	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	.....	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	.....	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	.....	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	.....	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	.....	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	.....	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن عددی سر A اور B . . . . .	۹.۳.۱
۳۶۲	بجبان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ سرناگزرتخمین . . . . .	۱۰.۱
۳۷۵	سرناگزرتخمین عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ سرناگزرتخمین کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۸۳	بیت بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۸۳	گرگئی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندسی بیت . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۹۱	اہارونو پوہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۴۰۱	بکھراؤ	۱۱
۴۰۱	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۴۰۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۴۰۵	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۴۰۶	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۴۰۶	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۴۰۹	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۱۲	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۱۵	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۱۵	مساوات شروڈنگر کی عملی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۱۹	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۲۳	تسلل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۲۷	پس نوشت	۱۲
۴۲۸	آمنشائن پوڈلکیوروزن تصاد . . . . .	۱۲.۱
۴۲۹	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۳۳	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۳۵	شروڈنگر کی ملی . . . . .	۱۲.۴
۴۳۶	کوانٹائی زینو تصاد . . . . .	۱۲.۵
۴۳۹	جوابات	
۴۴۱	خطی الجبرا	۱
۴۴۱	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۴۱	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۴۲	فتالب . . . . .	۳.۱

۴۴۲	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۲	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۴۲	هر مشی تبادلے	۶.۱

۴۴۳ فئرہنگ





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۱۰

# حرناگزرتخمین

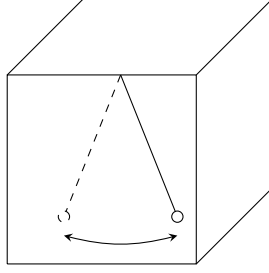
### ۱۰.۱ مسئلہ حرناگزرت

#### ۱۰.۱.۱ حرناگزرت عمل

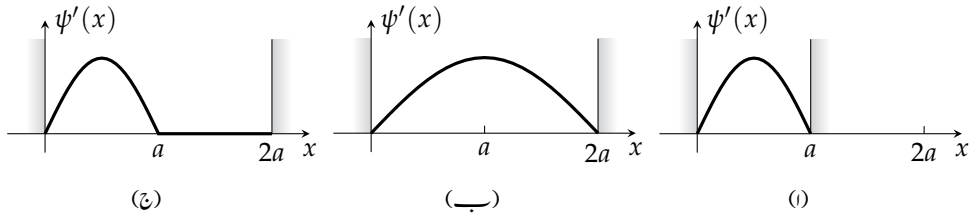
فرض کریں ایک کامل روتاص انتصابی سطح میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے۔ اگر آپ اس روتاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ امنرا تفسری کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا، لیکن اگر آپ بغیر جھٹکا دیے روتاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسرے مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تو یہ اسی سطح (یا اس کی متوازی سطح) میں سٹنگی اور روانی سے، اسی جیٹ کے ساتھ تھلوتار ہے گا۔ بیرونی کیفیت کی بہت آہستہ تبدیلی ہی حرناگزرت عمل کی پہچان ہے۔ دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف وقتوں کی بات کی جارتی ہے: نظام کی اپنی حرکت (جو یہاں روتاص کے ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا) کو ظاہر کرنے والا ”اندرونی“ وقت  $T_i$ ، اور نظام کی معتادیر معلوم میں نمایاں تبدیلی (مثلاً، لرزتے ہوئے چپوترے پر نصب روتاص کی صورت میں چپوترے کی لرزش کا دوری عرصہ) کو ظاہر کرنے والا ”بیرونی“ وقت  $T_e$ ۔ حرناگزرت عمل میں  $T_e \gg T_i$  ہوگا۔

حرناگزرت عمل کے تجزیے کی بنیادی حکمت عملی یہ ہے کہ پہلے بیرونی معتادیر معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے، اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں (بہت آہستہ) وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، مقررہ لمبائی  $L$  کے روتاص کا کلاسیکی دوری عرصہ  $2\pi\sqrt{L/g}$  ہوگا؛ اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو، تو دوری عرصہ بظاہر  $2\pi\sqrt{L(t)/g}$  ہوگا۔ ہائیڈروجن سالہ (حصہ ۳.۷) پر تبصرہ کے دوران زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی۔ ہم نے مسراکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے آغاز کیا، اور ان کے بیچ فاصلہ  $R$  کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا۔ نظام کی زمینی حال توانائی کو  $R$  کے تقاطع کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد، ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کے انحناسے مسراکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا (سوال ۷.۱۰)۔ طبعیات سالہ میں اس ترکیب کو (جس میں ساکن

adiabatic<sup>1</sup>



شکل ۱۰.۱: حرانگز رنن: اگر ڈبل کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تو رفتاں اسی جیٹہ کے ساتھ ابتدائی سطح کی متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: (ا) لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تو ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تو ذرہ لمحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

مراکزہ سے آغاز کرتے ہوئے، الیکٹران تناسلات موج کا حساب کر کے، ان سے نسبتاً رفتاں مراکزہ کے مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو باران واپن ہائیر تھین<sup>۲</sup> کہتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں، حرانگز تھین<sup>۳</sup> کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ  $H^i$  سے بہت آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ  $H^f$  تک پہنچتی ہے۔ مسئلہ حرانگز<sup>۴</sup> کہتا ہے کہ اگر ذرہ ابتدائی طور پر  $H^i$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہو، تو (زیر مساوات شرودنگر) یہ  $H^f$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا۔ (میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ  $H^i$  سے  $H^f$  تک تھیل کے دوران، طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے، لہذا حالات کی ترتیب میں کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا؛ امتیازی تناسلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے، لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔)

مشال کے طور پر، ہم لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کو زمینی حال:

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-۱)۔ اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ مقام  $2a$  پر منتقل کیا جاتا ہے؛ مسئلہ حرانگز کے تحت (ماسوائے پستی جزو ضربی کے) یہ ذرہ تو سبج شدہ کنویں کے زمینی حال:

$$(۱۰.۲) \quad \psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔ دھیان رہے کہ ہم ہیملٹنی میں چھوٹی تبدیلی (نظریہ اضطراب کی طرح) کی بات نہیں کر رہے ہیں؛ ہاں تبدیلی بہت بڑی ہے۔ فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی آہستہ رونما ہو۔ یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی؛ جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے، نظام سے توانائی حاصل کرے گا، جیسا کہ گاڑی کے انجن کے شافلر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے۔ اس کے برعکس، کنویں کی اچانک وسعت کی صورت میں حال  $\psi^i(x)$  ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج)، جو نئی ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا (سوال ۲.۳۸)۔ یہاں توانائی (کم از کم، اس کی توقعاتی قیمت) کی بقا ہوگی؛ جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے حلاء میں گیس کی آزادانہ پھیالنے سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱۰.۱: ایک لامستثنائی چوکور کنواں، جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار  $v$  سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتی ہے، کو ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے۔ اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳) \quad \Phi_n(x, t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/2\hbar\omega}$$

جہاں  $w(t) \equiv a + vt$  کنویں کی (لحقیقی) چوڑائی اور  $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$  (چوڑائی  $a$ ) کے اصل کنویں کی  $n$  ویں احبازنی توانائی ہے۔ عمومی حل ان  $\Phi$  کا خطی جوڑ:

$$(۱۰.۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t)$$

ہوگا، جہاں عددی سر  $c_n$  وقت  $t$  کے تابع نہیں ہوں گے۔

۱. دیکھیں آیا تابع وقت مساوات شرودنگر بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات ۱۰.۳ مطمئن کرتی ہے۔

ب. فرض کریں اصل کنویں کے زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ( $t = 0$ ) کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ توسیعی عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۵) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz$$

جہاں  $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$  کنویں کے پھیلنے کی رفتار کی بے بعدی پیمائش ہے۔ (بدقسمتی سے اس نکل کی قیمت بنیادی تقاضات کی صورت میں حاصل نہیں کی جاسکتی۔)

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنی چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں، یوں ”بیرونی“ وقت  $w(T_e) = 2a$  ہوگا۔ (ابتدائی) زمینی حال کے تابع وقت قوت ناجز و ضربی کا دوری عرصہ، ”اندرونی“ وقت ہوگا۔ وقت  $T_e$  اور  $T_i$  کا تعین کر کے، دکھائیں کہ حرانگزرتھمین سے مراد  $1 \ll \alpha$  ہوگا، لہذا نکل کے دائرہ کار پر  $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$  ہوگا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے توسیعی عددی سر  $c_n$  کا تعین کریں۔ حال  $\Psi(x, t)$  تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرانگزرتھمین کے مطابق ہے۔

د. دکھائیں کہ  $\Psi(x, t)$  میں پیتی جبز و ضربی کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(10.6) \quad \theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_1(t') dt'$$

جہاں لمحہ  $t$  پر لمبائی امتیازی قدر  $n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$   $E_n(t) \equiv$  ہوگا۔ اس نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

### ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرانگزرتھمین کا ثبوت

مسئلہ حرانگزرتھمین معقول نظر آتا ہے، اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے، تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔ غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں، ایک ذرہ جو  $n$  وی امتیازی حال،  $\psi_n$ ، میں آغاز کرتا ہے،

$$(10.7) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

پیتی جبز و ضربی اپنانے کے علاوہ اسی  $n$  وی امتیازی حال:

$$(10.8) \quad \Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

میں رہتا ہے۔ اگر ہیمیلٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو، تب امتیازی تقاضات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے:

$$(10.9) \quad H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$$

لیکن اب بھی (کسی ایک مخصوص لمحہ پر) یہ معیاری عمودی سلسلہ:

$$(10.10) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

دیں گے، اور یہ مکمل ہیں، لہذا تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$(10.11) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t)\Psi(t)$$

دہمیں معتام (یا چکر، وغیرہ) کا ذکر نہیں کروں گا، چونکہ اس دلیل میں تاہیت وقت کی بات کی جبار ہی ہے۔

کے عمومی حل کو ان کا خطی جوڑ:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)} \quad (10.12)$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.13)$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے  $E_n$  کی صورت میں ”معیاری“ پستی جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے۔ (ہمیشہ کی طرح میں اس کو عددی سر  $c_n(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں، لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے، لہذا تابعیت وقت کے اس حصے کو صریحاً لکھنا موزوں ہوگا۔)

مساوات ۱۰.۱۲ کو مساوات ۱۰.۱۱ میں پر کرنے سے

$$i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \dot{\theta}_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n} \quad (10.14)$$

حاصل ہوگا (جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ مساوات ۱۰.۹ اور مساوات ۱۰.۱۳ کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے۔

$$\sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \quad (10.15)$$

اس کا  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر، لحاظ امتیازی تفاسلات کی معیاری عمودیت (مساوات ۱۰.۱۰) بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یادرج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)} \quad (10.16)$$

اب مساوات ۱۰.۹ کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H} \psi_n + H \dot{\psi}_n = \dot{E}_n \psi_n + E_n \dot{\psi}_n$$

اور یوں (دوبارہ  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle \quad (10.17)$$

ہم  $H$  کے ہر مشی پن سے مندرجہ اٹھاتے ہوئے  $\langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle$  لکھتے ہیں، یوں  $n \neq m$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۸) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

(یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انخطاطی ہیں) مساوات ۱۰.۱۸ کو مساوات ۱۰.۱۶ میں پُر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا۔

$$(۱۰.۱۹) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$

یہ ٹھیک ٹھیک نتیجہ ہے۔ اب سرناگزرتخمین کی باری آتی ہے: فرض کریں  $H$  نہایت چھوٹا ہے، اور دوسرے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے<sup>۶</sup>

$$(۱۰.۲۰) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle$$

ہوگا، جس کا حل

$$(۱۰.۲۱) \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)}$$

ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔<sup>۷</sup>

$$(۱۰.۲۲) \quad \gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \right| \psi_m(t') \right\rangle dt'$$

بالخصوص، اگر ذرہ  $n$  وی امتیازی حال (یعنی  $n \neq m$  کیلئے  $c_m(0) = 0$  اور  $c_n(0) = 1$ ) سے آغاز کرے، تب (مساوات ۱۰.۱۲)

$$(۱۰.۲۳) \quad \Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

ہوگا، لہذا (چندیتی جزو ضربی حاصل کرنے کے علاوہ) یہ ذرہ (ارتقائی ہیملٹنی کے)  $n$  وی امتیازی حال میں ہی رہے گا۔

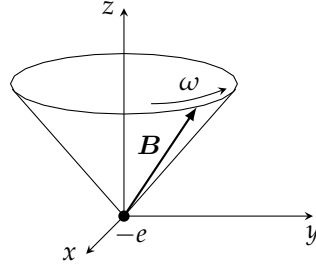
مثال ۱۰.۱: فرض کریں مقناطیسی میدان میں مبداء پر (کمیت  $m$  اور بار  $-e$ ) کا ساکن الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی میدان کی مقدار ( $B_0$ ) مستقل ہے، جبکہ اس کا رخ  $z$  محور کے گرد، مقررہ زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  کے ساتھ، مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے۔ محور  $z$  کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ  $\alpha$  ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$(۱۰.۲۴) \quad B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}]$$

<sup>۶</sup> اس قدم کی پختہ وجہ تلاش کرنا اتنا آسان نہیں۔

<sup>۷</sup> چونکہ  $\psi_m$  کی معمولی زنی سین  $= 0$  (حقیقی  $\langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle = 2 \langle \dot{\psi}_m | \psi_m \rangle = 0$ ) حاصل ہے لہذا  $\gamma$  حقیقی ہوگا۔





شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے مخروطی راہ چلاتا ہے (مسادات ۱۰.۲۴)۔

اس کی ہیملٹنی (مسادات ۱۰.۱۵۸) درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar B_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z] \\
 (10.25) \quad &= \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

جہاں  $\omega_1$  درج ذیل ہے۔

$$(10.26) \quad \omega_1 \equiv \frac{eB_0}{m}$$

ہیملٹنی  $H(t)$  کے معمول شدہ امتیازی چکرکار  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  درج ذیل ہیں

$$(10.27) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(10.28) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو  $B(t)$  کے لمحاتی رخ کے ساتھ، بالستریب، ہم چکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں (سوال ۳.۳۰ دیکھیں)۔ ان کی مطابقتی امتیازی افتدار درج ذیل ہوں گی۔

$$(10.29) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

فرض کریں  $B(0)$  کی ہم راہ، الیکٹران ہم چکر:

$$(10.30) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

صورت سے آغاز کرتا ہے۔<sup>۸</sup> تاہم وقت مساوات شرودنگر کا ٹھیک ٹھیک حل درج ذیل ہوگا (سوال ۱۰.۲)

$$(۱۰.۳۱) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \sin(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں  $\lambda$  درج ذیل ہے۔

$$(۱۰.۳۲) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$

اس حل کو  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰.۳۳) \quad \chi(t) = \left[ \cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) + i \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ ( $B$  کے موجودہ رخ کے لحاظ سے) حنائی چکر تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۳۴) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

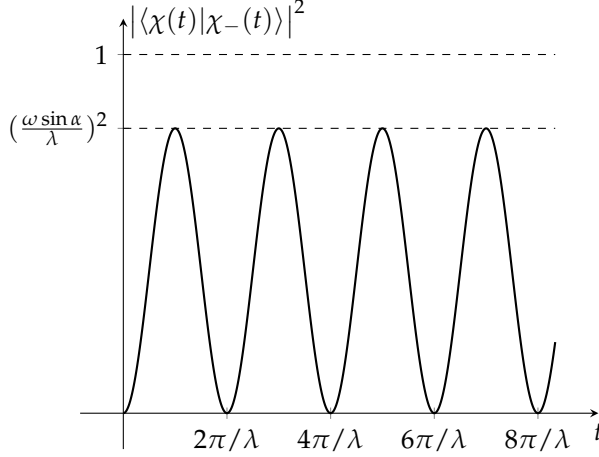
مسئلہ حرانگزرتنمین کے  $T_e \gg T_i$  کی تحدیدی صورت میں تحویل احتمال صفر کو پہنچے گا، جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت  $T_e$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $1/\omega$  ہوگا)، اور تقابل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت  $T_i$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $\hbar/(E_+ - E_-) = 1/\omega_1$  ہوگا)۔ یوں حرانگزرتنمین سے مراد  $\omega \ll \omega_1$  ہے؛ (غیر مضطرب) تقابلات موج کی ہیئت کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے۔ حرانگزرتنمین میں  $\lambda \cong \omega_1$  لہذا

$$(۱۰.۳۵) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

ہوگا، جیسا ہم پہلے سے ذکر کر چکے۔ مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ  $B$  کے ہم رخ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس  $\omega \gg \omega_1$  کی صورت میں  $\lambda \cong \omega$  ہوگا اور نظام ہم میدان اور حنائی میدان صورتوں کے بیچ ٹپکپاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کریں کہ مساوات ۱۰.۲۵ کی ہیملٹنی کیلئے مساوات ۱۰.۳۱ تاہم وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتی ہے۔ ساتھ ہی مساوات ۱۰.۳۳ کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ، معمول زنی شرط کے عین مطابق، عددی سروں کے سرہموں کا مجموعہ 1 ہوگا۔

<sup>۸</sup> یہ بنیادی طور پر سوال ۹.۲۰ ہی ہے، البتہ یہاں الیکٹران  $B$  کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے، جبکہ سوال ۹.۲۰-د میں یہ  $z$  محور کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: غیر حیرانگر طریق ( $\omega \gg \omega_1$ ) میں تحلیلی احتمال (مساوات ۱۰.۳۳)۔

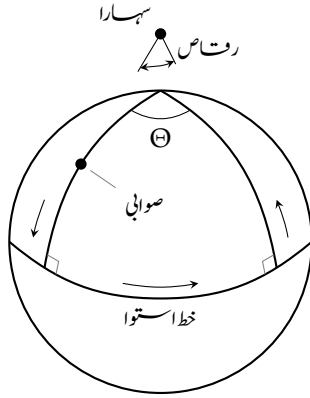
## ۱۰.۲ ہیئت گیری

### ۱۰.۲.۱ گرگنی عمل

آئیں حصہ ۱۰.۱ کے کلاسیکی نمونہ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جس میں ایک ایسے کامل بے رگڑ رفاص، جس کے سہارا کو ایک معتم سے دوسرے اور دوسرے سے تیسرے معتم منتقل کیا جاتا ہو، استعمال کرتے ہوئے حیرانگر عمل کا تصور اخذ کیا گیا۔ میں نے دعویٰ کیا تھا کہ جب تک سہارا کی حرکت رفاص کے دوری عرصے سے بہت آہستہ ہو (تاکہ سہارا کی نمایاں حرکت کے دوران رفاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہو)، یہ اسی مستوی (یا اس کے متوازی مستوی) میں اسی حیطے (اور اسی تعداد) کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

اگر میں اس کامل رفاص کو شمالی قطب پر لے جا کر، مثلاً صوابی شہر کے رخ، جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) تو کیا ہوگا؟ فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے۔ میں اس کو بہت آہستہ (یعنی حیرانگر طریق سے) صوابی سے گزرتے خط طول بلد پر چلتے ہوئے، خط استوا تک پہنچتا ہوں۔ یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے رہا ہوگا۔ میں اس کو خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں (رفاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے)۔ آخر میں نئے خط طول بلند پر چلتے ہوئے، میں رفاص کو واپس شمالی قطب منتقل کرتا ہوں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رفاص اب اسی مستوی میں نہیں جھولے گا جس سے اس نے آغاز کیا تھا؛ یقیناً، نئے اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ  $\Theta$  پایا جاتا ہے، جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے خط طول بلند کے بیچ زاویہ  $\Theta$  ہے۔

جس راہ پر میں رفاص کو اٹھا کر چلتا رہا، وہ راہ (زمین کے مرکز پر) ٹھوس زاویہ  $\Omega$ ، بناتی ہے اور  $\Theta$  اسی ( $\Omega$ ) کے



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر روتاص کی حرانگزر منتقلی۔

برابر ہے۔ یہ راہ شمالی نصف کرہ کا  $\Theta/2\pi$  حصہ گھیرتی ہے، لہذا اس کا رقبہ

$$A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$$

ہوگا (جہاں  $R$  زمین کا رداس ہے)؛ یوں

$$(۱۰.۳۶) \quad \Theta = A/R^2 \equiv \Omega$$

ہوگا جو اس نتیجے کو نہایت عمدہ انداز میں پیش کرتا ہے، چونکہ یہ راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں (شکل ۱۰.۶)۔<sup>۱۰</sup>

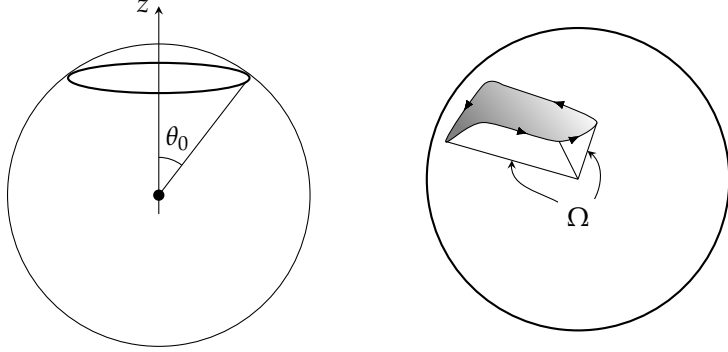
کرہ کی سطح پر بند راہ پر چلتے ہوئے حرانگزر منتقلی کی ایک مثال 'فوق رتاص' ہے، جہاں رتاص کو اٹھا کر چلنے کا کام مجھے نہیں بلکہ زمین کے گھومنے کو سونپا جاتا ہے۔ خط عرض بلد  $\theta_0$  درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$(۱۰.۳۷) \quad \Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos \theta)|_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

زمین کے لحاظ سے (جو اس دوران  $2\pi$  زاویہ گھوم چکی ہوگی) فوق رتاص کی روزانہ استقبالی حرکت  $2\pi \cos \theta_0$  ہوگی؛ اس نتیجہ کو، عموماً، گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس<sup>۱۲</sup> قوتوں کے اثر سے حاصل کیا جاتا ہے، لیکن یہاں یہ حالہ تائیدی مفہوم کا حاصل ہے۔

<sup>۱۰</sup> آپ چاہیں تو اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔ اس راہ کو زمین کے گرد دائری لکیریوں کے چھوٹے چھوٹے حصوں کا مجموعہ تصور کریں۔ رتاص ہر ایسی لکیر کے ساتھ مستقل زاویہ بنائے گا لہذا احتیاطاً زاویائی انحراف کا قسطن کر دی کشیر الاضلاع کے راس زاویوں کے مجموعہ کے ساتھ ہو گا۔

<sup>۱۱</sup> Foucault pendulum  
<sup>۱۲</sup> Coriolis



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ  $\Omega$  بناتی شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقوت اس کی راہ۔

ایسا نظام جو بند راہ پر چلتے ہوئے واپس ابتدائی نقطہ پہنچ کر اپنے ابتدائی حال کو نہیں لوٹا کر گئے<sup>۱۳</sup> کہلاتا ہے۔ (یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد ”حرکت دینا“ ہو؛ اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھیں۔) گر گئی نظام جگہ جگہ پائے جاتے ہیں؛ ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن گر گئی ہے: ہر ایک پھیرے کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی، یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا، وغیرہ۔ اس تصور کا اطلاق، چھوٹے ریٹالڈ عدد<sup>۱۴</sup> پر سیال میں، حبر ٹوموں کی حرکت پر بھی کیا گیا ہے۔ اگلے حصے میں میں گر گئی حرانگزر عمل کی کوانٹائی میکانیات پر غور کروں گا۔ ہم نے دیکھا ہوگا کہ ہیملٹنی کی مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرانگزر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا۔

## ۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ ۱۰.۱.۲ میں دکھایا کہ ایک ذرہ جو  $H(0)$  کے  $n$  وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہے، حرانگزر صورت میں، تابع وقت<sup>۱۵</sup> ہیئت جزو ضربی کے علاوہ،  $H(t)$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں رہتا ہے۔ بالخصوص، اس کا تعلق عمل موج (مساوات ۱۰.۲۳):

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

ہوگا، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.39)$$

حرکے ہیئت<sup>۱۵</sup> ہے (جو وقت کے تغا عمل  $E_n$  کی صورت میں، جب ضروری  $e^{-iE_n t/\hbar}$  کو عموماً دیتی ہے)، اور درج ذیل ہندسہ ہیئت<sup>۱۶</sup> کہلاتی ہے۔

$$(۱۰.۴۰) \quad \gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt'$$

چونکہ ہیملٹنی میں کوئی ایسی مقدار معلوم  $R(t)$  پائی جاتی ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے، لہذا  $\psi_n(t)$  وقت  $t$  کا تابع ہوگا۔ (سوال ۱۰.۱ میں  $R(t)$ ، پھیلتے ہوئے چوکور کنویں کی، چوڑائی ہوگی۔) یوں

$$(۱۰.۴۱) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$

لہذا

$$(۱۰.۴۲) \quad \gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle dR$$

ہوگا، جہاں  $R_i$  اور  $R_f$  مقدار معلوم  $R_t$  کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی۔ بالخصوص، اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا ابتدائی روپ اختیار کرے تب  $R_f = R_i$  لہذا  $\gamma_n(T) = 0$  ہوگا، جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں!

میں نے مساوات ۱۰.۴۱ میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو۔ اب فرض کریں  $N$  عدد مقدار معلوم  $R_1(t)$ ،  $R_2(t)$ ،  $\dots$ ،  $R_N(t)$  تبدیل ہوتے ہوں؛ تب درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۳) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

جہاں  $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$  ہے اور  $\nabla_R$  ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے۔ اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۴) \quad \gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

اور اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا اصل روپ اختیار کرتا ہو تب حالص ہندسی پستی تبدیل درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۴۵) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں بند راہ پر کلیری مکمل ہے، جو عموماً غیر صفر ہوگا۔ مساوات ۱۰.۴۵ کو پہلی مرتبہ 1984 میں<sup>۱۷</sup> میکائل سیری نے حاصل کیا اور یوں  $\gamma_n(T)$  ہیئت<sup>۱۸</sup> کہلاتی ہے۔ دھیان رہے کہ

<sup>۱۵</sup> dynamic phase

<sup>۱۶</sup> geometric phase

<sup>۱۷</sup> اخیرت کی بات ہے کہ 60 سال تک یہ حقیقت کسی کو نظر نہیں آئی۔

<sup>۱۸</sup> Berry's phase

(جب تک حرکت اتنی آہستہ ہو کہ حرانگز کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں)  $\gamma_n(T)$  کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نہ کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر۔ اس کے برعکس، مجموعی حرکی ہیٹ

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کے تابع ہوگی۔

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کی ہیٹ اختیاری ہے؛ طبیعی مقصداروں میں  $|\Psi|^2$  پایا جاتا ہے، لہذا ہیٹ جزو ضربی کٹ جاتا ہے۔ اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندی ہیٹ کی کوئی طبیعی اہمیت نہیں؛ آخر  $\psi_n(t)$  کی ہیٹ بھی تو اختیاری ہے۔ یہ سیری کی دوراندیشی تھی کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو ہندی دائرے پر پھیرا دے کر واپس اپنے اصل روپ میں لانے سے ابتدا اور اختتام کے بیچ زائد ہیٹ غیر اختیاری ہوگی، جس کی پیمائش بھی کی جاسکتی ہے۔

مشال کے طور پر، ذرات (تمام حال  $\Psi$  میں) کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے، صرف ایک حصے کو حرانگز تبدیل ہوتے مخفی سے گزارا جاتا ہے۔ دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے درج ذیل روپ کا مجموعی تفاعل موج حاصل ہوگا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \quad (10.41)$$

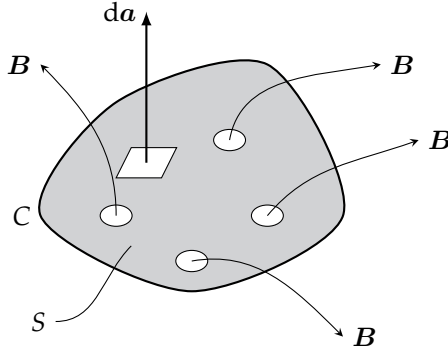
جہاں  $\Psi_0$  ”سیدھی پہنچی“ شعاع کا تفاعل موج اور  $\Gamma$  تغیر پذیر  $H$  کی بنا پر شعاع کی زائد ہیٹ ہے (جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ ہندی ہوگا)۔ اس صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \frac{1}{4} |\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma}) (1 + e^{-i\Gamma}) \\ &= \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2) \end{aligned} \quad (10.42)$$

یوں تعمیری اور تباہ کن مداخلت کے نقاط (جہاں  $\Gamma$  کی قیمت  $\pi$  کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی) سے  $\Gamma$  کی پیمائش کی جاسکتی ہے (سیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی حرکی ہیٹ کی موجودگی میں ہندی ہیٹ نظر نہیں آئے گی، لیکن انہیں علیحدہ علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے)۔

تین ابعادی مقدار معلوم نفنا،  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ ، میں کلیہ سیری (ساوات ۱۰.۴۵) سستی مخفیہ  $\mathbf{A}$  کی صورت میں مقناطیسی بہاؤ<sup>۱۹</sup> کے کلیہ کا یاد دلاتا ہے۔ سطح  $S$  جس کی سرحد مخفیہ  $C$  ہو سے درج ذیل بہاؤ گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (10.48)$$



شکل ۱۰.۸: بند مخفی C کے پچ سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہاؤ۔

مقناطیسی میدان کو مستقیم خفیہ کے روپ  $(B = \nabla \times A)$  میں لکھ کر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(10.49) \quad \Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr$$

یوں ہیئت بیری کو مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے ”مقناطیسی میدان“ کا ”بہاؤ“

$$(10.50) \quad “B” = i \nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$$

تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کو دوسری طرف سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے: تین ابعادی صورت میں ہیئت بیری کو سطحی مکمل:

$$(10.51) \quad \gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مقناطیسی ممانٹ کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری مقاصد کے نقطہ نظر سے مساوات ۱۰.۵۱ محض  $\gamma_n(T)$  لکھنے کا دوسرا انداز ہے۔

سوال ۱۰.۳:

۱. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی  $w_1$  سے بڑھ کر  $w_2$  ہوتی ہے؛ مساوات ۱۰.۴۲ سے کنویں کی ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں۔ نتیجے پر تبصرہ کریں۔

ب. اگر وسعت مستقل شرح  $(dw/dt = v)$  سے ہو، تب حرکی تبدیلی ہیئت کیا ہوگی؟

ج. چوڑائی کم ہو کر واپس  $w_1$  ہو جاتی ہے؛ اس پورے پھیرے کی ہیئت بیری کیا ہوگی؟



سوال ۱۰.۴: ڈیٹا تغا عمل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) واحد ایک مقید حال (مساوات ۲.۱۲۹) کا حاصل ہے۔  $\alpha$  آہستہ آہستہ  $\alpha_1$  سے بڑھ کر  $\alpha_2$  ہوتا ہے؛ ہندی تبدیلی ہیٹ کا حساب لگائیں۔ اگر تبدیلی مستقل شرح  $(d\alpha/dt = c)$  سے رونما ہوتا ہے تب حرکت کی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگی؟

سوال ۱۰.۵: دکھائیں کہ حقیقی  $\psi_n(t)$  کی صورت میں ہندی ہیٹ صفر ہوگی۔ (سوال ۱۰.۳ اور سوال ۱۰.۴ اس کی مثالیں ہیں۔) امتیازی تغا عملات موج کے ساتھ غیر ضروری (لیکن متاؤنی طور پر بالکل جائز) حبزو ضربی ہیٹ منسلک کریں:  $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$  جہاں  $\Phi_n(R)$  اختیاری (حقیقی) تغا عمل ہے۔ یقیناً، آپ غیر صفر ہندی ہیٹ حاصل کریں گے، تاہم دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات ۱۰.۲۳ میں پڑ کرنے سے کیا ہوگا۔ اور بند راہ پر اس سے صفر حاصل ہوتا ہے۔ سبق: غیر صفر ہیٹ بیری کی خاطر (الف) آپ کو ہیملٹنی میں ایک سے زائد تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی، اور (ب) ایسی ہیملٹنی درکار ہوگی جو غیر مہمل مخلوط امتیازی تغا عملات دیتی ہو۔

مثال ۱۰.۲: ہیٹ بیری کی کلاسیکی مثال مستقل مقدار کے مقناطیسی میدان، جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو، میں مبدا پر الیکٹران ہے۔ پہلے اس مخصوص صورت (جس کا تجزیہ مثال ۱۰.۱ میں کیا گیا) پر غور کرتے ہیں جس میں محور  $z$  کے ساتھ مقررہ زاویہ  $\alpha$  پر رہتے ہوئے، متقل زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے،  $B(t)$  استقبالی حرکت کرتا ہے۔ (میدان  $B$  ہم راہ ”ہم میدان“ الیکٹران کے لئے) مساوات ۱۰.۲۳ اٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے۔ حرانگزر طریق،  $\omega \ll \omega_1$ ، میں

$$(۱۰.۵۲) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا، لہذا مساوات ۱۰.۲۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۱۰.۵۳) \quad \chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) + i \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left( \frac{\omega_1 t}{2} \right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

دوسرے حبزو کو  $\omega/\omega_1 \rightarrow 0$  کی صورت میں رد کرتے ہوئے حرانگزر روپ کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا (مساوات ۱۰.۲۳)۔ حرکت کی ہیٹ درج ذیل ہے

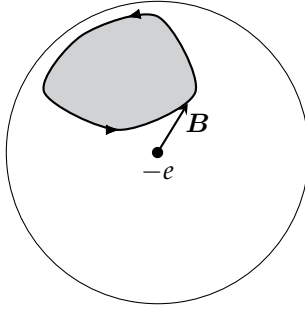
$$(۱۰.۵۴) \quad \theta_+(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_+(t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$

(جہاں مساوات ۱۰.۲۹ سے  $E_+ = \hbar\omega_1/2$  ہوگا)، لہذا ہندی ہیٹ درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۵) \quad \gamma_+(t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پھیرے کے لیے  $T = 2\pi/\omega$  ہوگا، لہذا ہیٹ بیری درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma_+(T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ جھاڑتا ہے۔

اب زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں، جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک  $B_0$  =  $r$  کرہ کی سطح پر اختیاری بند راہ جھاڑتی ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان  $B(t)$  کی ہم راہ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا (سوال ۳۰.۴ دیکھیں)

$$(۱۰.۵۷) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں  $B$  کے کروی محدد  $\theta$  اور  $\pi$  اب وقت کے تفاعلات ہیں۔ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا، جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۱۰.۵۸) \quad \begin{aligned} \nabla \chi_+ &= \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۵۹) \quad \begin{aligned} \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle &= \frac{1}{2r} \left[ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

مساوات ۱۰.۵۸ کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی۔

$$(۱۰.۶۰) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \mathbf{a}_r = \frac{i}{2r^2} \mathbf{a}_r$$

یوں مساوات ۱۰.۵۱ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۶۱) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{a}$$

مکمل کرہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو  $B$  کی نوک ایک پھیرے میں جھاڑتی ہے، لہذا  
اور  $d\mathbf{a} = r^2 d\Omega \mathbf{a}_r$

$$(۱۰.۶۲) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega$$

ہوگا، جہاں مبدا پر ٹھوس زاویہ  $\Omega$  ہے۔ یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے، جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلے کا یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا (یعنی زمین کی سطح پر بند راہ پر بارگزر فاصلے کی منتقلی)۔ اس نتیجے کے تحت، کسی اختیاری بند راہ پر، مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حیرانگیز پھیرا دینے سے، حنا لسن (ہندسی) تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کے جھاڑنے کے ٹھوس زاویہ کی منفی آدھی ہوگی۔ مساوات ۱۰.۳۷ کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مخصوص نتیجہ (مساوات ۱۰.۵۶) کے مطابق ہے، جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے تھا۔ □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر 1 ہو کے لئے مساوات ۱۰.۶۲ کا مکمل حاصل کریں۔ جواب:  $-\Omega$  (ایک ذرہ جس کا چکر  $s$  ہو کے لیے نتیجہ  $-s\Omega$  ہوگا۔)

### ۱۰.۲.۳ اہارونو بولہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبیعی متداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ  $\varphi$  اور  $\mathbf{A}$  بلا واسطہ نامتناہل پیمائش ہیں

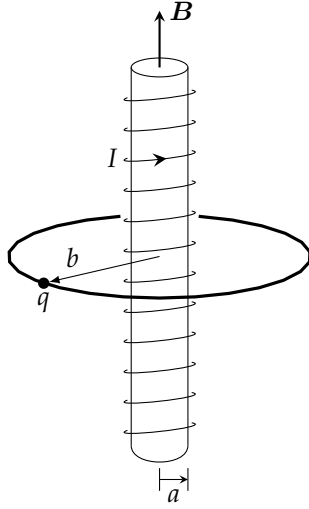
$$(۱۰.۶۳) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

میکسول مساوات اور متعادلہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیہ کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ مرتب کرنے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیہ کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$(۱۰.۶۴) \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

جہاں  $\Lambda$  معتام اور وقت کا کوئی بھی تقاضا ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کامیڈانوں پر کوئی اثر نہیں ہوگا کوانٹائی میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو  $\varphi$  اور  $\mathbf{A}$  کی صورت میں نہ کہ  $\mathbf{E}$  اور  $\mathbf{B}$  کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$(۱۰.۶۵) \quad H = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi$$



شکل ۱۰.۱: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمبا بیچچاں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

بہر حال زیر ماب تبادله یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں  $E$  اور  $B$  صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقی مقناطیس اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959ء میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سکتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرہ کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہوگا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو بوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق بینت سیری کے ساتھ پیش کروں گا۔

معرض کریں ایک ذرہ کو رداس  $b$  کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس  $a < b$  کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو  $I$  ہے (شکل ۱۰.۱) بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا یقیناً موزوں ماب شرط  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi, \quad (r > a) \quad (10.22)$$

جہاں  $\Phi = \pi a^2 B$  لچھے سے گزرتا ہو مقناطیسی بہا ہوگا ساتھ ہی لچھا خود غیر باردار ہے لہذا غیر سمتی مخفیہ  $\varphi$  صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla] \quad (10.23)$$

اب قنائل موج صرف زاویہ ائمت  $\phi(\theta) = \pi/2, r = b$  پر منحصر ہے لہذا  $\nabla \rightarrow$

( $\hbar i/b$ )( $d/d\phi$ ) شرڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$(10.18) \quad \frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left( \frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$(10.19) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon\psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$(10.20) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$(10.21) \quad \psi = Ae^{i\lambda\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.22) \quad \lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

نقطہ  $\phi = 2\pi$  پر  $\psi(\phi)$  کی استمرار کی بنا پر  $\lambda$  عدد صحیح

$$(10.23) \quad \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(10.24) \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لچھا دائرے پر ذرہ کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 بہت  $n$  جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کو ظاہر کرتا ہے  $q$  مثبت لیٹے ہوئے منفی  $n$  کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرہ کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ احبازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرہ پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک ذرہ ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں  $B$  ہے لہذا  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  ہوگا تاہم  $\mathbf{A}$  خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ  $\mathbf{A}$  ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیہ کے لئے عمومیّت دی جاسکتی ہے مخفی توانائی  $V$  جس میں برقی حصہ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی مساوات شرڈنگر

$$(10.25) \quad \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

$$\Psi = e^{ig} \Psi' \quad (10.46)$$

جہاں  $g(r)$  درج ذیل ہے

$$g(r) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_1^r \mathbf{A}(r') \cdot d\mathbf{r}' \quad (10.47)$$

اور  $r$  کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہوگی جب پورا خط مسیں  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  ہو ورنہ لکیری عمل  $r$  سے تک راہ پر منحصر ہوگا اور یوں  $r$  کا تعلق عمل نہیں ہوگا  $\Psi'$  کی صورت مسیں  $\Psi$  کا ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i \nabla g) \Psi' + e^{\nabla \Psi'}$$

لیکن  $\nabla g = (q/\hbar) \mathbf{A}$  کے برابر ہے لہذا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi' \quad (10.48)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi' \quad (10.49)$$

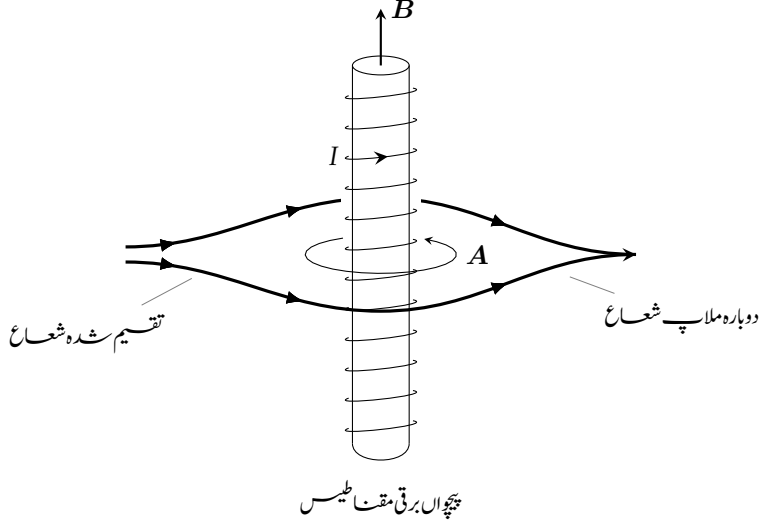
اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی  $e^{ig}$  کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' + V \Psi' = i \hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (10.50)$$

بظاہر  $\Psi'$  بغیر  $\mathbf{A}$  مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا حقیر سا کام ہوگا: ہمیں صرف یقینی جزو ضربی  $e^{ig}$  ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔

عہرائو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں ایسکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لمبے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱) ان شعاعوں کو لمبے لمبے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں  $B = 0$  ہوتا ہے  $\mathbf{A}$  جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہوگا اور دونوں اطراف  $V$  کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے اختیاتی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں یقینی منحنی پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left( \frac{1}{r} a_\phi \right) \cdot (r a_\phi d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (10.51)$$



شکل ۱۰.۱۱: اہارنو و بوہم اثر: ایکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پتچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہوگی جو لمبے لمبے میں  $A$  کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ پتتی مشرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہوگا جس سے ان کی راہ گھیرتے ہیں

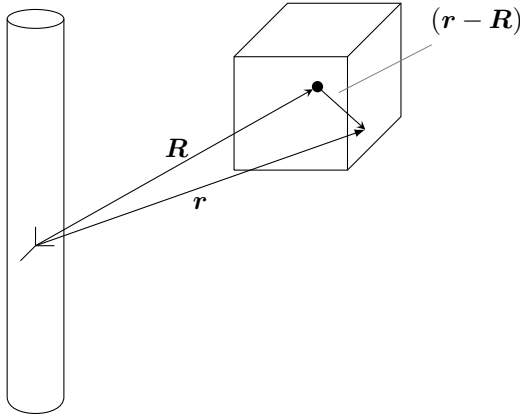
$$(۱۰.۸۲) \quad \text{پتتی مشرق} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

اس پتتی منتقل سے متاثر پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کرچکے ہیں اہارنو و بوہم اثر کو ہندسی ہیٹ کی ایک مثال تصور کی جاسکتی ہے فرض کریں مخفیہ  $V(r - R)$  ایک باردار ذرہ کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لمبے سے باہر نقطہ  $R$  پر ہے؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لمبے کے گرد ایک پھیلا دیں گے لہذا  $R$  وقت کا تقاضا ہوگا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$(۱۰.۸۳) \quad \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - qA(r) \right]^2 + V(r - R) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں ہم

$$(۱۰.۸۴) \quad \psi_n = e^{ig} \psi'_n$$



شکل ۱۰.۱۲: مخفیہ  $V(r - R)$  ایک ذرہ کو ڈبہ میں مقید کیے ہوئے ہے۔

لیتے ہے جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.85) \quad g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d(\mathbf{r}')$$

اور  $\psi'$  اسی امتیازی متدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب  $\mathbf{A} \rightarrow 0$  ہو

$$(10.86) \quad \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \psi' = E_n \psi'_n$$

آپ نے دیکھا کہ  $\psi'_n$  ہذا  $\mathbf{r} - \mathbf{R}$  کا تعلق ہے نہ کہ  $\psi_n$  کی طرح علیحدہ علیحدہ  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{R}$  کا تعلق ہے۔ آئیے اب اس ڈبہ کو لمبے لمبے کے گرد ایک پھیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حرانگزر ہونے کے بھی ضرورت نہیں ہے۔ بیسٹ سیری تفسیر کرنے کی خاطر ہمیں مقدار  $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$  کی قیمت درکار ہوگی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(10.87) \quad \begin{aligned} \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{ig} \left[ -i\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 r \\ &= -i\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 r \end{aligned}$$

بغیر زبردنوشت  $\nabla$  کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  کے تعلق پر عمل کے دوران  $\nabla_R = -\nabla$  لیا یہاں آخری مکمل ہیملٹنی  $-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V$  کے امتیازی حال میں معیار



حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب  $i/\hbar$  ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$(10.88) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} A(R)$$

اس کو کلیہ بیرئری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہو گا

$$(10.89) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint A(R) \cdot dR = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times A) \cdot da = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو ہارونو و بوم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ ہارونو و بوم اثر نہی ہیٹ کی ایک خصوصی صورت ہے ہارونو و بوم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جاسکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے  $A$  خود متاثر نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا ایسا دیا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گنج متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں وقفہ  $0 \leq x \leq a$  کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t)\delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں  $f(t)$  آہستہ آہستہ صفر سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے مسئلہ حرانگزر کے تحت یہ ذرہ ارتقائی ہیملٹین کے زمینی حال میں ہی رہے گا

ا. وقت  $t \rightarrow \infty$  پر زمینی حال کا حاکم بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہو گا جس میں  $a/2 + \epsilon$  پر متاثر بل گزر کا وٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرہ بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصہ میں رہنے کا پابند ہو گا

ب. وقت  $t$  پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

$$\text{جہاں } k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar \text{ اور } \delta \equiv 2\epsilon/a \quad T \equiv maf(t)/\hbar^2 \quad z \equiv ka$$

ج. اب  $\delta = 0$  لیتے ہوئے  $z$  کے لیے ترمیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ  $T$  کی قیمت 0 ہٹا  $\infty$  ہونے سے  $z$  کی قیمت  $\pi$  ہٹا  $2\pi$  ہوگی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب  $\delta = 0.01$  لیتے ہوئے  $T = 0, 1, 5, 20, 100$  اور 1000 کے لیے  $z$  اعدادی طریقے سے حاصل کریں

۹۔ کنویں کے دائیں نصف حصہ میں ذراہ پائے جانے کا احتمال بطور  $z$  اور  $\delta$  کا تفاعل تلاش کریں جو اب  $P_r = [1 + (I_+ / I_-)]^{-1}$  جہاں  $I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$  ہوگا جبکہ (د) میں دیے گئے  $T$  کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و۔  $T$  اور  $\delta$  کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترسیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بعدی ہارمونی مرتعش کیت  $m$  تعدد  $\omega$  پر  $F(t) = m\omega^2 f(t)$  جہاں  $f(t)$  کوئی مخصوص تفاعل ہے کاجبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے  $m\omega^2$  کو صریحا لکھا ہے یوں  $f(t)$  کا بعد منسلک ہوگا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$(10.90) \quad H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t)$$

فرض کریں وقت  $t = 0$  پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہذا  $0 \leq t$  پر  $f(t) = 0$  ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹائی میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے

۱۔ اگر مرتعش مبداء ساکن حال  $\dot{x}_c(0) = x_c(0) = 0$  سے آغاز کریں تب مرتعش کلاسیکی مقام کیا ہوگا جواب

$$(10.91) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب۔ متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش  $n$  وی حال  $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$  جہاں  $\psi_n(x)$  مساوات 61.2 دیتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت مساوات شرودنگر کے حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.92) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} \left[ -\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega t + m \dot{x}_c \left(x - \frac{x_c}{2}\right) + \frac{m\omega^2}{2} \int_0^t f(t') x_c(t') x_c(t') dt' \right]}$$

ج۔ دکھائے کہ  $H(t)$  کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار درج ذیل ہوں گے

$$(10.93) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m\omega^2 f^2$$

د۔ دکھائیں کہ حرانگزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے  $x_c(t) \cong f(t)$  سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرانگزر تفاعل  $f$  کہ وقت تفرق پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ  $\sin[\omega(t - t')]$  کو  $(1/\omega)(d/dt') \cos[\omega(t - t')]$  لکھ کر مکمل بالخصوص استعمال کریں

۱۰.۲ اس مثال کے لیے مسئلہ حرانگزر کی تصدیق جزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$\Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \quad (10.93)$$

تصدیق کریں کہ حرکی ہیٹ کاروپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندی ہیٹ آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرانگزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر  $c_m(t)$  کے حرانگزر تسلسل کا پہلا جزو تصور کیا جاسکتا ہے مندرجہ ذیل نظام  $n$  وی حال سے آغاز کرتا ہے حرانگزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندی ہیٹ جزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ  $n$  وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

۱. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرانگزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt' \quad (10.95)$$

اس سے ہم متریب حرانگزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری سر نقش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کہ متریب حرانگزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہوگا میں تحویل ممکن ہوگی

$$c_{n+1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

یقیناً تحویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory



- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقابلی عمل، 103  
امتیازی فتر، 103  
امتیازی فتر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطاطی، 90، 104  
انخطاطی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34

- بوسن، 208  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقناطیس، 284  
 بیریان، 191  
 میل  
 کروی تقا عمل، 148  
 بے لچک پھسکی، 173  
 پازیشٹرانیم، 207، 291  
 پاشن ویک اثر، 285  
 پالی اصول مناعت، 208  
 پالی متالب چکر، 177  
 پایان، 191  
 پیال، 234  
 پس پردہ، 219  
 پلانک  
 کلیہ، 162  
 پسیداکار  
 فضا میں انتقال کا، 136  
 وقت میں انتقال، 136  
 پسیداکار  
 تقا عمل، 60  
 گھومتا، 200  
 تجدیدی عرصہ، 89  
 تجربہ  
 شرٹن و گرلاخ، 184  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 78  
 تسل  
 بالمر، 162  
 پاشن، 162  
 ٹیلر، 42  
 طاقتی، 43  
 فوریئر، 35  
 لیمان، 162  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 209  
 تشکیل، 237  
 تعداد مکین، 237  
 تعیین حال، 103  
 تغیریت، 9  
 تقا عمل  
 ڈیٹا، 72  
 تقا عمل موج، 2  
 تقا علیہ، 128  
 تکمل  
 ڈھانچائی، 312  
 توانی  
 کلیہ، 55  
 توانائی  
 احبابتی، 29  
 توقعاتی  
 قیوت، 7  
 شنائی عددی سر، 239  
 حبرو ڈارون، 280  
 جسم مقیاس، 229  
 جفت، 34  
 تقا عمل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقناطیسی، 181  
 جوہری مدار چوں  
 خطی جوڑ ترکیب، 311  
 جی حبرو ضربی، 278  
 چکر، 173، 174  
 مخالف میدان، 175  
 ہم میدان، 175  
 چکر چکر رابطہ، 290  
 چکر کار، 175  
 چکر و مدار باہم عمل، 279  
 چکر و مدار رابطہ، 272  
 چندر شیکھر حد، 253  
 چوزاویہ تشکل، 298  
 حال  
 بھراؤ، 70

- 66، دوری سستی  
 66، گروہی سستی  
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،  
 194، رواحتال،  
 روڈریگیس  
 142، کلیہ  
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،  
 زاویائی معیار حرکت  
 170، بقب  
 174، خناتی  
 174، غیر خناتی  
 283، زیسان اثر،  
 ساکن  
 27، حالیت،  
 243، سٹر لنگ تخمین،  
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،  
 32، سرحدی شراط،  
 72، 79، سرنک زنی،  
 252، سفید بونا،  
 15، سگرا،  
 220، سلور،  
 128، سمتاویہ،  
 97، سمتیات،  
 224، سمتیہ موج،  
 سوچ  
 4، انکاری،  
 3، تقلید پسند،  
 3، حقیقت پسند،  
 23، سوڈیم،  
 188، سہ تا،  
 250، سیاہ جسمی طیف،  
 سیزھی  
 46، عاملین،  
 80، سیزھی تفسا عمل،  
 296، شمارک اثر،  
 27، غیر تابع وقت،  
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،  
 156، 34، زمینی،  
 70، مقید،  
 34، ہچکان،  
 236، حراری توازن،  
 حرکت  
 202، سائیکلوثران،  
 97، خطی الجبرا،  
 97، خطی تبدلہ،  
 28، خطی جوڑ،  
 3، خفیہ متغیرات،  
 219، 235، خول،  
 254، درجبات آزادی،  
 236، درجہ حرارت،  
 234، درز،  
 290، درز توانائی،  
 61، دلیل،  
 96، 56، دم ہلانا،  
 219، دوری جدول،  
 ڈیراک  
 128، علامتیت،  
 229، کنگھی،  
 108، معیاری عمودیت،  
 ڈیلٹا  
 35، کرونیگر،  
 297، ڈیوٹریم،  
 297، ڈیوٹیران،  
 ذرہ  
 21، غیر مستحکم،  
 رو  
 21، احتمال،  
 146، ردای مساوات،  
 162، رڈبرگ،  
 162، کلیہ،  
 رشتہ  
 295، پترنک،  
 295، کرامرس،  
 رفتار

- فـنـر و نوس  
ترکیب، 54  
فـنـس  
بیرونی، 23  
دوہری، 128  
فورینسر  
الٹ بدل، 63  
بدل، 63
- فـنـس  
غیر ہم آہنگ، 116  
فـنـس  
بچھراو، 93، 94  
ترسیل، 95  
فـنـس اراکان، 125  
فـنـس  
کب، 42  
فـنـس مین، 298  
قواعد بن، 220  
قوالب، 98  
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245  
کایان، 191  
کشافت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکشی  
ہرمانڈ، 58  
کرائنگ و پینی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کبھی تشکل، 298  
کلیہ  
ڈی پروگلی، 19  
روڈریگیس، 60  
پولر، 30  
کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
کیٹ  
تختیف شدہ، 206  
کوارک، 191
- شریک عامل، 103  
شریک گرفتگی بندہ، 214  
شارپائی مفہوم، 2  
شوارز  
عدم مساوات، 437  
شوارز عدم مساوات، 99  
صفر ممتام انقطاع، 34
- طاق، 34  
طامس استقبالی حرکت، 279  
طول موج، 18، 162  
طیف، 104  
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17  
تخلیل، 129  
تقلیل، 166، 46  
رفع، 166، 46  
مبادلہ، 209  
عبور، 161  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عقدہ، 34  
علائیت  
تفعلیہ و سمتاویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی مستقل، 26  
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105  
غیر موصل، 235
- فـنـری  
توانائی، 227  
درجہ حرارت، 228  
سطح، 227  
فـنـر میان، 208  
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانٹائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرفتتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گروپویشن، 163  
 گیہا تقاعیل، 249
- لاپلائی، 138  
 لارمر تعدد، 184  
 لاگت  
 شریک کشیر رکتی، 158  
 کشیر رکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لیٹان، 175  
 لتیم، 162  
 لکراج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284  
 لورینتز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈ انڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272
- ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم  
 تقاعیل، 72  
 تقسیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کر دی، 139  
 مخالف بیٹا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تقاعلات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروع و ڈنگر، 2  
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وٹنمن و لہن، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناسٹائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فضا تقاعیل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250  
وسطانیہ، 7  
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپلافتا عدد، 221  
کاتیرا فتا عدد، 221  
کادوسرا فتا عدد، 221  
ہارمونی  
مر نقش، 32  
ہارمونی مر نقش  
تین البعادی، 193  
ہائیڈروجن  
میونی، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی تسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلبت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
مکمل، 35، 100  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصول، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزدہیلیم، 217  
نظر بے اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصول، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیومن  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ، 70