

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروع و نگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متایج وقت مساوات شروع و نگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کٹواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بکھراؤ حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کٹواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کٹواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۳	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	وٹزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۵	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۵۷	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۹	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۵۹	آمنشائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۳۶۰	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۶۳	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۳	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۳۷۳	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۷۳	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۷۶	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۸۱	ہیت بیری	۱۰.۲
۳۸۱	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۳	ہندی ہیت	۱۰.۲.۲
۳۸۸	اہارو نوو یو ہم اثر	۱۰.۲.۳
۳۹۷	بکھراؤ	۱۱
۳۹۷	تعارف	۱۱.۱
۳۹۷	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۴۰۱	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۴۰۲	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۲	اصول و ضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۵	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۰۸	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۱۱	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۱۱	مساوات شرودنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۵	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۱۹	تسل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۳	پس نوشت	۱۲
۴۲۴	آمنشائن پوڈ لسیو روزن تضاد	۱۲.۱
۴۲۵	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۰	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۳۱	شرودنگر کی ملی	۱۲.۴
۴۳۲	کوانٹائی زینو تضاد	۱۲.۵
۴۳۵	جوابات	
۴۳۷	خطی الجبرا	۱
۴۳۷	سمتیات	۱.۱
۴۳۷	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۳۸	قتالب	۳.۱

۴۳۸	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۸	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۸	هر مشی تباولے	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹائی سکونیات^۱ کہا جاسکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت: $V(r, t) = V(r)$ ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شرودنگر:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جاسکتا ہے، جہاں $\psi(r)$ غیر تابع مساوات شرودنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نسائی جزو ضربی $(e^{iEt/\hbar})$ ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبیعی مقدار $|\Psi|^2$ کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی پھلانگ**^۲ کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (کوانٹائی حرکت)^۳ متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

quantum statics^۱
quantum jumps^۲
quantum dynamics^۳

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی احراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی، H^0 ، کے امتیازی حالات:

$$(9.1) \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.3) \quad \Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات ψ_a اور ψ_b مقام و فضاء کی تفاعلات، یا چپکار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے فرض ہے، لہذا جب میں $\Psi(t)$ لکھتا ہوں، میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر جزو اپنی خصوصی قوت نمائی جزو ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$(9.4) \quad \Psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ ”حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال“ $|c_a|^2$ ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے۔ یقیناً، تفاعل Ψ کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب، $H'(t)$ ، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ نام کرتے ہیں، لہذا تفاعل موج $\Psi(t)$ کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے۔

$$(9.6) \quad \Psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

(میں قوت نسائی حبز و ضربوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔) ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال ψ_a ($c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$ ہو، تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں تحویل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالب کرتے ہیں کہ $\Psi(t)$ تابع وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرے۔

$$(9.7) \quad H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad H = H^0 + H'(t)$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ = i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right. \\ \left. + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_bt/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(9.8) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right]$$

تفعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم \dot{c}_a کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$(9.9) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle$$

دھیان رہے کہ H' ہر مثنیٰ ہے، لہذا $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہوگا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(9.10) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b - E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے \dot{c}_b الگ کیا جاسکتا ہے:

$$c_a \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle e^{-iE_a t / \hbar} + c_b \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle e^{-iE_b t / \hbar} = i \hbar \dot{c}_b e^{-iE_b t / \hbar}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.11) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} [c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{i(E_b - E_a)t / \hbar}]$$

مسوات ۹.۱۰ اور مسوات ۹.۱۱ مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کا تعین کرتے ہیں؛ یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی (تابع وقت) مسوات شرودنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری متابلی ارکان صفر ہوں گے:

$$(9.12) \quad H'_{aa} = H'_{bb} = 0$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مسوات سادہ روپ:

$$(9.13) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(9.14) \quad \omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

(میں $E_b \geq E_a$ فرض کرتا ہوں، لہذا $\omega_0 \geq 0$ ہوگا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان $E = E(t) \mathbf{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $n = 1$ اور چارگن انخطاطی پہلا بیجان حالات $n = 2$ کے سچ اضطراب $H' = eEz$ کے H' کے چاروں متابلی ارکان H'_{ij} کا حساب لگائیں۔ یہ بھی دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے $H'_{ii} = 0$ ہوگا۔ تبصرہ محور z کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروئے کار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لہذا زیادہ بلند بیجان حالات میں منتقلی کو نظر انداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مسوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام حائل ψ_a اور کسی ψ_b کے سچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہوگا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا نازک ہے یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانیہ کے لیے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں

فرض کریں کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر منقطع کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی مندرجہ ذیل نتائج کی معقول تشریح ممکن ہوگی۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کی شکل و صورت وقت کے لحاظ سے δ تقاضا ہے

$$H' = U\delta(t)$$

جہاں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ ہے اور $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$ لیں۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں تب $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کیا ہوں گے اور کیا $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہوگا۔ انتقال ہونے کا احتمال $t \rightarrow \infty$ کے لیے $P_{a \rightarrow b}$ کیا ہوگا۔ اشارہ: آپ ڈیٹا تقاضا کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha| / \hbar)$$

۹.۱.۲ تاجع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا تاہم کم H' کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یک بعد دیگرہ تخمین سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں رہے گا۔

رتبہ صفر:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

میں تخمین کے رتبہ کو زیر، بالا میں قوسین میں لکھتے ہوں۔

ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پُر کر کے رتبہ اول تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ اول:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1; \quad \frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پُر کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ دوم:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \Rightarrow c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا $c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t)$ - دھیان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتی جزو بھی پایا جاتا ہے دور تہی تصحیح صرف تکمیلی حصہ ہوگا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے n ویں رتی تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $n + 1$ ویں رتبہ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں H' کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اول تصحیح میں H' کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے دور تہی تصحیح میں H' کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں مسئلہ $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے بالکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہوگا۔ ہاں H' کی طاقت 1 تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2$ ایک کے برابر ہے اور رتبہ اول تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جاسکتی ہے زیادہ بلند رتی تخمین کے لیے بھی ایسا ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ہو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ H' کی طاقت ایک تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$

(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جاسکتا ہے درج ذیل لیکر

$$(9.19) \quad d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(9.20) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

جہاں درج ذیل ہے

$$(9.21) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

یوں H' کے ساتھ اضافی جزو ضرب $e^{i\phi}$ منسلک ہونے کے علاوہ d_a اور d_b کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اول نظریہ اضطراب سے جزو (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ اپنے جواب کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں مغز پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0) = a, c_b(0) = b$ کے لیے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بالکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائنسہ اضطراب

فرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائنسہ ہو

$$(9.22) \quad H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t)$$

تب درج ذیل ہوگا

$$(9.23) \quad H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t)$$

جہاں V_{ab} درج ذیل ہے

$$(9.24) \quad V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری و تالی ارکان صفر ہوتے ہیں لہذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اول تک متغیرات تلاش کریں گے لہذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اول تک درج ذیل ہوگا مساوات 9.17

$$(9.25) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{iV_{ba}}{2\hbar} \int_0^t \left[e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'} \right] dt' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right] \end{aligned}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ انتہائی تعدد ω_0 کے بہت متضرب جبری تعدد ω پر توجہ رکھنے سے چوکور قوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

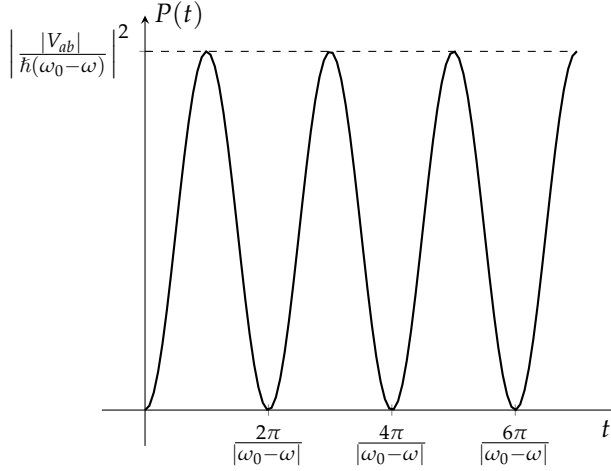
$$(9.26) \quad \omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر انتقال کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہوگا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.27) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0 - \omega} \left[e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2} \right] \\ &= -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \end{aligned}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کرے کالم t پر حال ψ_b میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا جس کو انتقالی احتمال کہتے ہیں

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



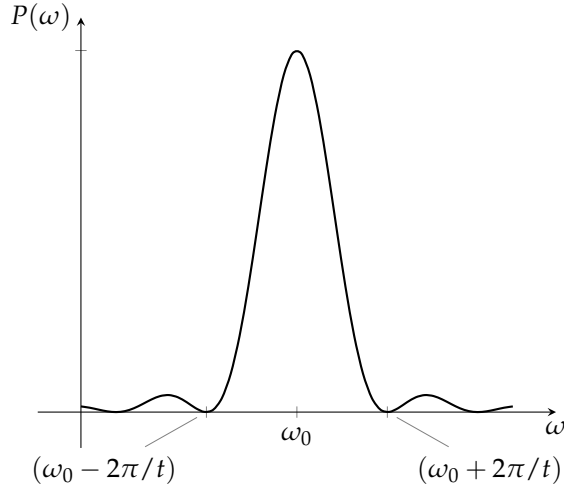
شکل ۹.۱: سائنس اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحلیلی احتمال (مساوات 28.9)۔

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائنس ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2 / \hbar^2 (\omega_0 - \omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جولا زمی طور پر ایک (1) سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہو گا۔ واپس صفر کو گرتا ہے۔ لحاظ $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$ جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہیں پر ذرہ لازماً غچلی حال میں ہو گا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصہ کے لیے چالو نہ کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ وقت $\pi / |\omega_0 - \omega|$ پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی امید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقالی نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں ہے بلکہ بالکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہو گا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہو گا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقالی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب جبری تعدد و فرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a \rightarrow b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی $(|V_{ab} t / 2\hbar|)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi / t$ ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے۔ لہذا ہم بہت کم t کے لیے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بالکل ٹھیک ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے ایک تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t} / 2$ سے جبکہ دوسرا $e^{-i\omega t} / 2$ سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$(9.29) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$



شکل ۹.۲: تجویلی احتمال بالقابل متحرک تعدد (مساوات 28.9)۔

ہیملٹنی متالب کو ہر مشی بنانے کی حنا طر موخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم $c_a(t)$ کے لیے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو منتخب کرتے ہیں۔ اس کو گھومتی موج تخمین کہتے ہیں جناب راہی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیئے بغیر بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ کے لیے گھومتی موج تخمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو راہی تعدد

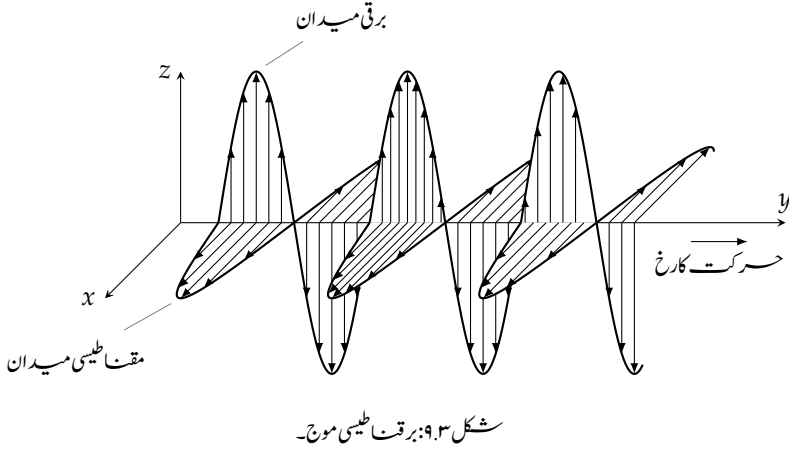
$$(9.30) \quad \omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}| / \hbar)^2}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتہائی احتمال $P_{a \rightarrow b}(t)$ تعین کر کے دکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہوگا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں $P_{a \rightarrow b}(t)$ عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہوگا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور V پر یہ کیا پابندی عائد کرتی ہے۔

(د) نظام پہلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟



۹.۲ اشعاعی احسراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقی و مغناطیسی امواج

ایک برقی و مغناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خنرد امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم متعام ارتعاشی برقی اور مغناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی جزو کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طول موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائنسہ ارتعاشی برقی میدان

$$(۹.۳۱) \quad E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

کے زیر اثر ہوگا۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور z رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔

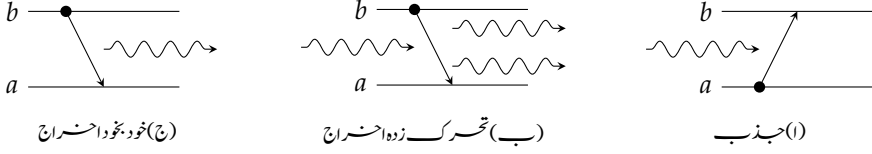
$$(۹.۳۲) \quad H' = -qE_0 z \cos(\omega t)$$

ظاہر ہے درج ذیل ہوگا

$$(۹.۳۳) \quad H'_{ba} = -pE_0 \cos(\omega t), \text{ where } p \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle$$

عمومی طور پر ψ متغیر z کا جفت یا طاق تفاعل ہوگا یہ ہماری اس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ H' کے وترقی متابلی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہوگا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۳۴) \quad V_{ba} = -pE_0$$



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحریق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیری حالت ϕ_a میں پایا جاتا ہو پرتقظیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حالت ϕ_b میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left(\frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک نوریہ جذب کیا (شکل ۹.۴-ا)۔ جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ نوریہ درحقیقت کوانشائی برقی حرکیات برقناطیسی میدان کی کوانشائی نظریہ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حالت $c_a(0) = 0, c_b(0) = 1$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بالکل وہی ہوں گے البتہ اس بار $P_{b \rightarrow a} = |C_a(t)|^2$ حاصل ہوگا جو نیچے درج ذیل سطح میں منتقل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.36)$$

چونکہ ہم $a \leftrightarrow b$ کو آپس میں بدل رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے لہذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا جزو چختے ہیں جس کے نصب نما میں $-\omega_0 + \omega$ پایا جاتا ہے باقی حاب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حالت میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حالت میں منتقل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حالت سے بالائی حالت منتقلی کا ہے اس عمل کو تحریق زدہ احسراج کہتے ہیں، جس کی پیشگوئی آئنسٹائن نے تھی۔

تحریق زدہ احسراج کی صورت میں برقناطیسی میدان توانائی $\hbar\omega_0$ جوہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریہ ایک اصل جس نے تحریق پیدا کیا اور ایک تحریق کی بنا پر پیدا ہوا نکلے (شکل

۹.۴-ب۔ اگر ایک بوتل میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی نوریہ دو نوریہ پیدا کرے گا اور یہ دو نوریہ خود چپا پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں امضائش ممکن ہوگی تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے نوریہ خارج ہوں گے لیسز اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دھیان رہے کہ لیسز عمل کے لیے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو آبادی الٹا کہتے ہیں چونکہ انجذاب ہس کی بنا پر ایک نوریہ کم ہوتا ہے تحسرقی امضارج جو ایک پیدا کرتا ہے بل متابل ہوں گے لہذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے امضائش پیدا نہیں ہوگی۔

انجذاب اور تحسرقی امضارج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود باخود امضارج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان کی عدم موجودگی میں جو امضارج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک نوریہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی ذریعہ زمین میں پہنچتا ہے پسلی نظرمیں یہ سمجھ نہیں آتی کہ خود باخود امضارج کیوں کر ہوگا۔ ایک ساکن حال اگرچہ ہیجان جوہر کو کی ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمین حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کوانٹائی برقی حرکیات میں زمین حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمین حال میں بھی غیر صفر توانائی $\hbar\omega/2$ کا حامل ہوگا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقناطیسی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطی امضارج خود باخود امضارج کا سبب بنتی ہے۔ اگر جڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام امضارج تحسرقی امضارج ہوگی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہوگا کہ آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی امضارجی عمل کے بالکل الٹ ہے جہاں تمام امضارج خود باخود ہوتا ہے اور تحسرقی امضارج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کوانٹائی برقی حرکیات۔ اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجذاب تحسرقی امضارج اور خود باخود امضارج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود امضارج کی وجہ زمین حال برقناطیسی میدان کا اضطراب پیش نہیں کیا تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود امضارج کا حساب کرنے کا محباز بناتی ہے جس سے ہیجان جوہر کی حالت کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جاسکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتعاع کی برقناطیسی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

۹.۲.۳ غیر اتعاعی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیظہ ہوگا۔

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (9.34)$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست مستاسب ہے۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.38)$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر یک رنگی موج کے لیے درست ہوگا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بری تعددی پٹی کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں $\rho(\omega) d\omega \rightarrow u$ ہوگا جہاں $\rho(\omega) d\omega$ تعددی سعت $d\omega$ میں کشافیت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل عمل کاروپ اختیار کرے گا

$$(9.39) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

کنگھی قوسین میں جزو کی چوٹی ω_0 پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲) جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہوگا لہذا ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے مکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(9.40) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

متغیرات تبدیل کر کے $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$ لکھ کر مکمل کے حدود کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر چونکہ باہر مکمل صفر ہی ہے اور قطعی مکمل کو حدود سے دیکھ کر

$$(9.41) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(9.42) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

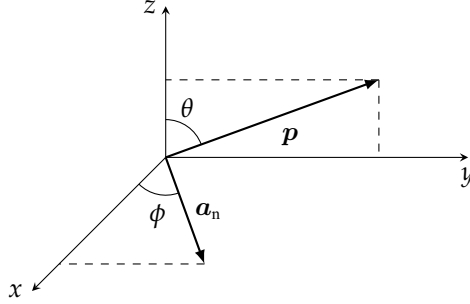
اس بار تحویلی احتمال وقت t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس غیر اتعاع کی تعدد کی وسعت پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بالخصوص تحویلی شرح $(R \equiv dP/dt)$ ایک مستقل ہوگا:

$$(9.43) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0)$$

اب تک ہم مندرجہ کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تنظیم شدہ ہے۔ لیکن ہم اس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکنہ تنظیم پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں $|p|^2$ کی جگہ $|p \cdot a_n|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہوگی جہاں مساوات 9.33 کو عموماً دیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$(9.44) \quad p \equiv q \langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اور اوسط تمام تنظیم اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|p \cdot a_n|^2$ کی اوسط زنی۔

اوسط درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ کر دی محدد منتخب کر کے حرکت کے رخ کو z محور پر رکھیں (تاکہ تقطیب xy سطح میں ہو) اور متقل p سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔

$$(۹.۴۵) \quad a_n = \cos \phi i + \sin \phi j$$

تب

$$|p \cdot a_n|_{ave}^2 = \frac{1}{4\pi} \int |p|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۴۶) \quad |p \cdot a_n|_{ave}^2 = \frac{|p|^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{3} |p|^2$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر تقطیبی، غیر اتعاع کی شعاع کے زیر اثر حال b سے حال a میں تحرقی احسراج کا تحویلی شرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۴۷) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیار اثر کا متالی رکن p ہوگا (ادوات 9.44 اور $E_b - E_a$) / \hbar پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہوگی۔

۹.۳ خود باخود احسراج

۹.۳.۱ آئنشٹائن A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالائی حال ψ_b میں N_b جو ہر پائے جاتے ہوں۔ خود با خود احسراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو $N_b A$ ذرات خود باخود احسراج کے عمل سے چوڑیں

گے۔ جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحسرقی اخراج کی تحویلی شرح برقناتیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہوگا $B_{ab}\rho(\omega_0)$ ۔ یوں بالائی حال کو تحسرقی اخراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات چوڑیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہوگا۔

$$(9.48) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی اور $dN_b/dt = 0$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.49) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درجہ حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولشزمان حیزوضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راست متناسب ہوگا لہذا

$$(9.50) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$(9.51) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کاسیہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(9.52) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ان دونوں ریاضی فستروں کا موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$(9.53) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا

$$(9.54) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

مساوات 9.53 اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحسرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجذاب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحسرقی اخراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر

مساوات 9.54 ہے جو ہمیں تحریقی انحرابی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود بخود انحرابی شرح A دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2 \quad (9.55)$$

لہذا خود بخود انحرابی شرح درج ذیل ہوگا

$$A = \frac{\omega_0^3|p|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \quad (9.56)$$

سوال ۹.۸: نیچے رخ تحویل میں خود بخود انحرابی شرح اور حراری تحریقی انحرابی شرح وہ تحریقی انحرابی شرح جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں معتدل ہوگا۔ دکھائیں کہ رہائی درجہ حرارت $T = 300 \text{ K}$ پر $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت کم تعددوں پر حراری تحریقی انحرابی غالب ہوگا جبکہ $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود بخود انحرابی غالب ہوگا۔ دکھائی دینے والی روشنی کے لیے کون غالب ہوگا؟

سوال ۹.۹: برقیاتی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود بخود انحرابی اشارہ درحقیقت تحریقی انحرابی مساوات 9.47 ہوگا۔ لہذا آئنسٹائن عددی A اور B جانے بغیر آپ خود بخود انحرابی شرح مساوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہوگی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک نور یہ پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہوگا۔

(الف) مساوات 5.111 کی جگہ $d_k = N_{\omega}$ پر کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا ورنہ کل حسابی توانائی لامتناہی ہوگی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات 9.47 استعمال کر کے خود بخود انحرابی شرح حاصل کریں۔ مساوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحریقی انحرابی کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحریقی انحرابی کہ نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بالخصوص وقتی دورانیہ dt میں جوہروں میں تعداد کی کمی $A dt$ ہوگی۔

$$dN_b = -AN_b dt \quad (9.57)$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیے جاسکتے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \quad (9.58)$$

ظاہر ہے کہ ہیجانِ حال میں تعدادِ فوت نمائی طور پر کم ہوگی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۵۹) \quad \tau = \frac{1}{A}$$

جسے اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ ہوگی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علامتیت کے بنا پر ایسا کیا گیا تھرقی اخراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر متابلِ روض سطح سے قطع نظر حال $\psi_a \rightarrow \psi_b$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی ψ_b کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات $(\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots)$ میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$(۹.۶۰) \quad \tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود بخود اخراج تنزل کی بنا پر حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$p = q \langle n|x|n'\rangle i$$

آپ نے سوال 3.33 میں x کے متالابی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

جہاں مرتعش کی متدرج تعداد ω ہے۔ مجھے تھرقی اخراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم اخراج کی بات کر رہے ہیں لہذا n' لازمی طور پر n سے نیچے ہوگا۔ ہماری اس مقصد کی عرض سے تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۱) \quad p = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} i$$

بظاہر تحویل سیزھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور اخراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$(۹.۶۲) \quad \omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n - n')\omega = \omega$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر اخراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۳) \quad A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

اور n ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہوگا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \quad (9.۶۴)$$

چونکہ ہر ایک اختراعی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لہذا اختراعی طاقت $A\hbar\omega$ ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا n ویں حال میں مرتعش کی توانائی $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \quad (9.۶۵)$$

ابتدائی توانائی E کا کوانٹائی مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اختراعی طاقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مربع بار q کا اختراعی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.۶۶)$$

ہارمونی مرتعش $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ جس کا جھٹ x_0 ہوگا میں مربع $a = -x_0\omega^2 \cos(\omega t)$ ہوگا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2 x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E \quad (9.۶۷)$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی اختراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد ($\hbar \rightarrow 0$) میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش طاقتی اختراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تھوہل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے پیچرشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں $n = 2$ حالات کے لیے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$, $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$ وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے متالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر نکلات صفر کے برابر ہوں گے لہذا حساب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔

جواب: سوائے ψ_{200} جولا مستثنیٰ ہے باقی تمام کے لیے 1.60×10^{-9} سیکنڈ ہوگا۔

۹.۳.۳ قواعد انتخاب

شرح خود با خود احسراج درج ذیل روپ کے متالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال 9.11 حل کیا ہوا اگر نہیں کیا اسی وقت پہلے اس کو حل کریں تو آپ نے دیکھا ہوگا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں۔ کیا بہتر ہوتا اگر ہم پہلے سے جان سکتے کہ کون سے نکلات صفر دیں گے تاکہ ہم اپنا قیمتی وقت غیر ضروری نکلات حل کرنے میں صرف نہ کرتے۔ فرض کریں ہم ہائیڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کا ہیملٹن کر وی تشکیلی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹائی اعداد n, l اور m سے ظاہر کر سکتے ہیں اور متالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n' l' m' | r | n l m \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت تبدیلی رشتوں اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہر مشی پن مل کر اس مقدار پر طاقتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

انتخابی قواعد برائے m اور m' :

ہم پہلے x, y اور z کے ساتھ L_z کے مقاب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب 4 میں حاصل کیا گیا مساوات 4.122 دیکھیں۔

$$(9.18) \quad [L_z, x] = i\hbar y, [L_z, y] = -i\hbar x, [L_z, z] = 0$$

ان میں سے تیسرے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n' l' m' | [L_z, z] | n l m \rangle = \langle n' l' m' | L_z z - z L_z | n l m \rangle \\ &= \langle n' l' m' | [(m' \hbar) z - z (m \hbar)] | n l m \rangle = (m' - m) \hbar \langle n' l' m' | z | n l m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.19) \quad m' = m \text{ یا } m' = m \pm 1 \text{ یا } \langle n' l' m' | z | n l m \rangle = 0$$

لہذا مساوی $m' = m$ کی صورت میں z کے متالابی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔
ساتھ ہی x کے ساتھ L_z کا مقبب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L_z, x] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z x - x L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.۷۰) \quad (m' - m)\langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i\langle n'l'm' | y | nlm \rangle$$

یوں آپ y کے متالابی ارکان کو مطابقتی x کے متالابی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی y کے متالابی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں y کے ساتھ L_z کا مقبب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L_z, y] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z y - y L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.۷۱) \quad (m' - m)\langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

بالخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m' - m)^2 \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i(m' - m)\langle n'l'm' | y | nlm \rangle = \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.۷۲) \quad \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad (m' - m)^2 = 1, \text{ یا پھر}$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں m کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$(9.۷۳) \quad \Delta m = \pm 1 \text{ یا } 0$$

اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہوگا نوریہ چکر ایک کا حاصل ہے لہذا اس کے m کی قیمت 0، 1 یا -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے جاتا ہے جو ہر اتنا کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے l اور l' :

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کے کہا گیا۔

$$(9.۷۴) \quad [L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2 (rL^2 + L^2 r)$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقاب کو $|nlm\rangle$ اور $\langle n'l'm'|$ کے پچھلیٹ کر انتخابی متاخذہ اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
 \langle n'l'm'| [L^2, [L^2, r]] |nlm\rangle &= 2\hbar^2 \langle n'l'm'| (rL^2 + L^2) |nlm\rangle \\
 &= 2\hbar^4 [l(l+1) + l'(l'+1)] \langle n'l'm'| r |nlm\rangle = \langle n'l'm'| (L^2 [L^2, r] - [L^2, r] L^2) |nlm\rangle \\
 &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm'| [L^2, r] |nlm\rangle \\
 &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm'| (L^2 r - rL^2) |nlm\rangle \\
 &= \hbar^4 [l'(l'+1) - l(l+1)]^2 \langle n'l'm'| r |nlm\rangle
 \end{aligned}
 \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = [l'(l'+1) - l(l+1)]^2$$

$$\langle n'l'm'| r |nlm\rangle = 0 \text{ یا پھر}$$

لیکن

$$[l'(l'+1) - l(l+1)] = (l' + l + 1)(l' - l)$$

اور

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = (l' + l + 1)^2 + (l' - l)^2 - 1$$

کی بنا پر مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

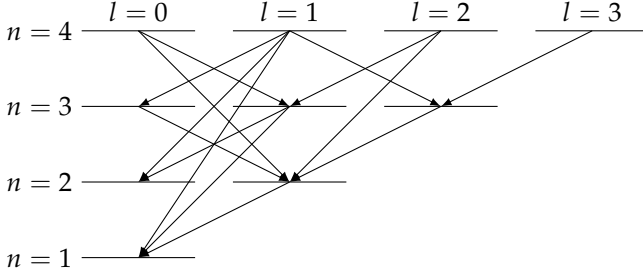
$$[(l' + l + 1)^2 - 1][(l' - l)^2 - 1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا اجزہ ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اس صورت جب $l' = l = 0$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھٹکارا حاصل کیا گیا ہے لہذا یہ شرط $l' = l \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں l کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta l = \pm 1 \text{ کوئی عبور واقع نہیں ہوگا جب تک} \tag{۹.۷۸}$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر ایک کا حاصل ہے لہذا زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد $l' = l + 1$ یا $l' = l - 1$ کی اجازت دیں گے۔ برقی جفت کثی انحراج کے لیے زاویائی معیار حرکت کی بقا درمیانی صورت کی اجازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود با خود انحراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے لیے ابتدائی چار



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجزائی تنزل۔

ہر سطحوں کے لیے اجزائی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ $2S$ حال ψ_{200} اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لہذا یہ تنزل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عمر صحت مثلاً $2P$ حالات ψ_{210}, ψ_{211} اور ψ_{21-1} سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصاداً کی بنا پر یا منوعہ تحویل کی بنا پر سوال 9.21 یا متعدد ذریعہ کے احسار کے بنا پر تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال 9.۱۲: مساوات 9.74 میں دی گئی مقبولی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور $r.L = r.(r \times p) = 0$ کو استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$

z سے r تک عمومیت دینا حقیر سا کام ہے۔

سوال 9.۱۳: دکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0$ ہوگا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کمی ختم ہوگی۔

سوال 9.۱۴: ہائیڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کی برقی جفت کتبہ تحویل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کوئی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |nlm\rangle \rightarrow |n'l'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عمر صحت کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہوگا لہذا اس ترتیب میں ہر مرتبہ صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عمر صحت حاصل ہوگا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویل شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

$$(9.49) \quad H_0 \psi_n = E_n \psi_n, \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تاج وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(9.80) \quad H = H_0 + H'(t)$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیری صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(9.81) \quad \psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t / \hbar}$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(9.82) \quad c_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t / \hbar}$$

جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے

$$(9.83) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

(ب) اگر نظام حال ψ_N میں آغاز کریں تب دکھائیں کہ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$(9.84) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(9.85) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t' / \hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

(ج) مندرجہ کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منقطع کرنے کے علاوہ H' مستقل ہے۔ حال N سے حال M ($M \neq N$) میں تحویل کے احتمال کو t کا قف عمل لکھیں۔ جواب:

$$(9.86) \quad 4 \left| H'_{MN} \right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t / 2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

(د) مندرجہ کریں H' وقت کا سائن متناقص $H' = V \cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضہ مندرجہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(9.87) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

(د) مندرجہ کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتساع کی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیے تحریقی احراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال 9.1۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اول تک سوال 9.15 (ج) اور (د) کے لیے تلاش کریں۔ معمولی زنی شرط

$$(9.88) \quad \sum_m |c_m(t)|^2 = 1$$

کی تصدیق کر کے تضاد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ مندرجہ کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $|c_N(t)|^2$ یا $1 - \sum_{m \neq N} |c_m(t)|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال 9.1۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ N ویں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ پہنچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہوگی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہوگا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دکھائیں کہ تقاعص موج کی حیطہ زاویائی دور تبدیل ہوگا لیکن تحویل نہیں ہوگی۔ تقاعص $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیطہ، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل t کے t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 9.1۸: ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرانی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 < E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہوائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرقی احسراج، تحسرقی انجذاب اور خود با خود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ خود با خود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0 \mathbf{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت γ ہولار سر تعدد $\omega_0 = \gamma B_0$ مشال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf} [\cos(\omega t) \mathbf{i} - \sin(\omega t) \mathbf{j}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$(۹.۸۹) \quad B = B_{rf} \cos(\omega t) \mathbf{i} - B_{rf} \sin(\omega t) \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k}$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیلٹنی ماتلب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$(۹.۹۰) \quad \dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b)$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۹.۹۱) \quad \omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تعلق تلاش کریں۔

$$P(t) = \{ \Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2] \} \sin^2(\omega' t/2) \quad \text{جواب:}$$

(و) منحنی گمک

$$(۹.۹۲) \quad P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرق تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترمیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لہذا ہم تجرباتی طور گمگم کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمگم تجربہ میں نور یہ کا g جزو ضربی ایک ٹلا کے ساکن میدان اور ایک مائیکروٹلا جیٹ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمگم کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ مخفی گمگم کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں مندرج کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فصائی تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$(9.93) \quad E(r, t) = E_0 \cos(k.r - \omega t)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r < 1$ ، $k.r \sim r/\lambda < 1$ ، لہذا $|k| = 2\pi/\lambda$ ہوگا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ مندرج کریں ہم رتبہ اول درستگی۔

$$(9.94) \quad E(r, t) = E_0 [\cos(\omega t) + (k.r) \sin(\omega t)]$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ اجبازتی برقی جفت کتب تخیلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی چسکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تخیلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تخیل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تخیلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تخیلات کی خود بخود اخراجی شرح حاصل کریں اس کی تنظیم اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہوگا۔ جواب:

$$(9.95) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (a_n.r) (k.r) | b \rangle|^2$$

(ب) دکھائیں کہ ایک بُدی سر تعش کے لیے ممنوعہ تخیلات سطح n سے سطح $n - 2$ میں ہوگی اور تخیلی شرح جس کی اوسط قیمت a_n اور k پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$(9.96) \quad R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد نور یہ کا تعدد ہے نہ کہ سر تعش کا تعدد۔ اجبازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کی نسبت تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ تخیل بھی $1S \rightarrow 2S$ کی اجبازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیے بھی درست ہوگا غالب تنزل دو نور یہ اخراج کی بنا پر ہوگا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا سو اواں حصہ ہوگا۔

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ n, l سے n', l' میں تخیل کے لیے ہائیڈروجن کا خود بخود اخراجی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$(9.97) \quad \frac{e^2 \omega^3 I^2}{3 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l + 1 \text{ جب} \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l - 1 \text{ جب} \end{cases}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$(9.98) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr$$

جوہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m-1, m, m+1$ کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l + 1$ صورت کے لیے $|nlm\rangle$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر ضرورت الہی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل متدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1 | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1 | r | nlm \rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l - 1$ کے لیے بھی کریں۔

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
حالات، 133
اجزائی
قیمتیں، 33
ارتعاش
نیوٹرینو، 127
استمراری، 105
استمراری مساوات، 194
استمراریہ، 138
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول تغیریت، 299
اصول عدم یقینیت، 116
اضافیتی تصحیح، 272
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
الیکٹران
کلاسیکی رداس، 175
الیکٹران نیوٹرینو، 127
امتیازی تقابلی عمل، 103
امتیازی فتر، 103
امتیازی فتر مساوات، 103
انتشاری
رشتہ، 67
انخطاطی، 90، 104
انخطاطی دباؤ، 228
اندرونی ضرب، 98
انوکاس
شرح، 78
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
برقی حرکیات
کوانٹائی، 278
بقا
توانائی، 39
بقا احتمال، 194
بلا واسطہ مکمل، 313
بندشی توانائی، 156
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
variables
separation of, 25
variance, 9
variational principle, 299
vectors, 97
velocity
group, 66
phase, 66
virial theorem, 132
three-dimensional, 194
wag the tail, 56
wave
incident, 77
packet, 62
reflected, 77
transmitted, 77
wave function, 2
wave vector, 224
wavelength, 18
white dwarf, 252
Wien displacement law, 250
WKB, 321
Yukawa potential, 316
Zeeman effect, 283
zero-crossing, 34

- بوسن، 208
 بوہر
 رداس، 156
 کلیہ، 155
 بوہر مقناطیس، 284
 بیریان، 191
 میل
 کروی تقا عمل، 148
 بے لچک پھسکی، 173
 پازیشٹرانیم، 207، 291
 پاشن ویک اثر، 285
 پالی اصول مناعت، 208
 پالی متالب چکر، 177
 پایان، 191
 پیال، 234
 پس پردہ، 219
 پلانک
 کلیہ، 162
 پسیداکار
 فضا میں انتقال کا، 136
 وقت میں انتقال، 136
 پسیداکار
 تقا عمل، 60
 گھومتا، 200
 تجدیدی عرصہ، 89
 تجربہ
 شرٹن و گرلاخ، 184
 ترتیبی پیمائشیں، 131
 ترسیل
 شرح، 78
 تسل
 بالمر، 162
 پاشن، 162
 ٹیلر، 42
 طاقتی، 43
 فوریئر، 35
 لیمان، 162
 تشاکلیت
 ضرورت، 209
 تشکیل، 237
 تعداد مکین، 237
 تعیین حال، 103
 تغیریت، 9
 تقا عمل
 ڈیٹا، 72
 تقا عمل موج، 2
 تقا علیہ، 128
 تکمل
 ڈھانچائی، 312
 توانی
 کلیہ، 55
 توانائی
 احبابتی، 29
 توقعاتی
 قیمت، 7
 شنائی عددی سر، 239
 حبرو ڈارون، 280
 جسم مقیاس، 229
 جفت، 34
 تقا عمل، 31
 جفت قطب معیار اثر
 مقناطیسی، 181
 جوہری مدار چوں
 خطی جوڑ ترکیب، 311
 جی حبرو ضربی، 278
 چکر، 173، 174
 مخالف میدان، 175
 ہم میدان، 175
 چکر چکر رابطہ، 290
 چکر کار، 175
 چکر و مدار باہم عمل، 279
 چکر و مدار رابطہ، 272
 چندر شیکھر حد، 253
 چوزاویہ تشکل، 298
 حال
 بھراؤ، 70

- 66، دوری سستی
 66، گروہی سستی
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،
 194، رواحتمال،
 روڈریگیس
 142، کلیہ
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،
 زاویائی معیار حرکت
 170، بقب
 174، خنلقی
 174، غیر خنلقی
 283، زیسان اثر،
 ساکن
 27، حالایت
 243، تخمین
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،
 32، سرحدی شراط،
 72، 79، سرنک زنی،
 252، سفید بونا،
 15، سگرا،
 220، سلور،
 128، سمتاویہ،
 97، سمتیات،
 224، سمتیہ موج،
 سوچ
 4، انکاری،
 3، تقلید پسند،
 3، حقیقت پسند،
 23، سوڈیم،
 188، سہ تا،
 250، سیاہ جسمی طیف،
 سیزھی
 46، عاملین،
 80، سیزھی تفسا عمل،
 296، شمارک اثر،
 27، غیر تابع وقت،
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،
 156، 34، زمینی،
 70، مقید،
 34، ہچکان،
 236، حرارتی توازن،
 حرکت
 202، سائیکلوثران،
 97، خطی الجبر،
 97، خطی تبدلہ،
 28، خطی جوڑ،
 3، خفیہ متغیرات،
 235، 219، خول،
 254، درجبات آزادی،
 236، درجہ حرارت،
 234، درز،
 290، درز توانائی،
 61، دلیل،
 96، 56، دم ہلانا،
 219، دوری جدول،
 ڈیراک
 128، علامتیت،
 229، کنگھی،
 108، معیاری عمودیت،
 ڈیلٹا
 35، کرونیگر،
 297، ڈیوٹریم،
 297، ڈیوٹیران،
 ذرہ
 21، غیر مستحکم،
 رو
 21، احتمال،
 146، ردای مساوات،
 162، رڈبرگ،
 162، کلیہ،
 رشتہ
 295، پترنک،
 295، کرامرس،
 رفتار

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اسمتی، 145
 مقنطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرافتی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گریویشن، 163
 گیما تفاعل، 249
- لاپلائی، 138
 لارمر تردد، 184
 لاگنج
 شریک کشیررکتی، 158
 کشیررکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لیٹان، 175
 لتصیم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسنڈو سطحیں، 202
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284
 لورینتز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیب انتقال، 272
- ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم
 تفاعل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کردی، 139
 مخالف بیٹا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تفاعلات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز جزو، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وٹنمن و بلن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناسٹائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فضا تفاعل موج، 113، 195
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100، 35
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپیلا فٹا عدہ، 221
کاشیہ فٹا عدہ، 221
کادو سرافٹا عدہ، 221
ہار مونی
سر نقش، 32
ہار مونی سر نقش
تین البعدی، 193
ہائیڈروجن
میونی، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فضا، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی تسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلدیت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتطبی معیار اثر
بے ضابطہ، 278
مکمل، 35، 100
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزد ہیلیم، 217
نظر اب اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیو من
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ ط، 70