

کوانٹم میکینکات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۷/دسمبر ۲۰۲۱

عنوان

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل تغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری تغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنای چپکور کنواں
۴۱	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۳	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	ڈیلٹا تفاسل محفہ
۶۹	۲.۵.۱	مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۱	۲.۵.۲	ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	مستثنای چپکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	ہلیرٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۲
۱۰۵	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۷	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار پاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۴	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۳	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۳	متناثر ذرات	۵
۲۰۳	دو ذراتی نظام	۵.۱
۲۰۵	بوزان اور فرمیون	۵.۱.۱
۲۰۸	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۲	جوہر	۵.۲
۲۱۲	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۴	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۱۸	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۱۸	آزاد الیکٹرون گیس	۵.۳.۱
۲۲۳	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۲۹	کو انظم شمار پاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۰	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۲	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۳۵	زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم	۵.۴.۳
۲۳۸	α اور β کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۱	سیاحسی طیف	۵.۴.۵
۲۴۷	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۴۷	غیر اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۴۷	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۴۹	اول رتبہ نظریہ	۶.۱.۲
۲۵۳	دوم رتبہ توانائیاں	۶.۱.۳
۲۵۴	اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۵۴	دو پڑتا اخطا	۶.۲.۱
۲۵۸	بلند رتبہ اخطا	۶.۲.۲
۲۶۳	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۶۴	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۶۷	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۷۲	زیمان اثر	۶.۴
۲۷۲	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۷۵	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۷۶	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۷۸	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۸۹	تغیری اصول	۷
۲۸۹	نظریہ	۷.۱
۲۹۳	ہیلمیوم کا زمینی حال	۷.۲
۲۹۹	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۰۹	ونزل و کرامرز و برلوان تخمین	۸
۳۱۰	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۱۵	سرنگرنی	۸.۲
۳۱۸	کلیات پیوند	۸.۳
۳۳۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۳۲	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۳۲	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۳۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۳۷	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۴۰	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۴۰	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۴۱	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۴۲	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۴۴	۹.۳	خود با خود احسراج
۳۴۴	۹.۳.۱	آمنشائن A اور B عددی سر
۳۴۶	۹.۳.۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات
۳۴۹	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۵۹	۱۰	حرارت ناگزیر تھمین
۳۵۹	۱۰.۱	مسئلہ حرارت ناگزیر
۳۵۹	۱۰.۱.۱	حرارت ناگزیر عمل
۳۶۲	۱۰.۱.۲	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت
۳۶۷	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۶۷	۱۰.۲.۱	گر گئی عمل
۳۶۹	۱۰.۲.۲	ہندی ہیت
۳۷۴	۱۰.۲.۳	اہارو نوو یوہم اثر
۳۸۳	۱۱	بھراو
۳۸۳	۱۱.۱	تعارف
۳۸۳	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بھراو
۳۸۷	۱۱.۱.۲	کوانٹم نظریہ بھراو
۳۸۸	۱۱.۲	جزوی موج تجزیہ
۳۸۸	۱۱.۲.۱	اصول وضوابط
۳۹۱	۱۱.۲.۲	لا یا عمل
۳۹۴	۱۱.۳	یتقلات حیط
۳۹۷	۱۱.۴	بارن تھمین
۳۹۷	۱۱.۴.۱	مسادات شروڈنگر کی عملی روپ
۴۰۱	۱۱.۴.۲	بارن تھمین اول
۴۰۶	۱۱.۴.۳	تسل بارن
۴۰۹	۱۲	پس نوشت
۴۱۰	۱۲.۱	آمنشائن پوڈلکیو وزن تضاد
۴۱۱	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۱۶	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۴۱۷	۱۲.۴	شروڈنگر کی لمبی
۴۱۸	۱۲.۵	کوانٹم زینو تضاد
۴۲۱		جوابات
۴۲۳	۱	خطی الجبرا
۴۲۳	۱.۱	سمتیات
۴۲۳	۲.۱	اندرونی ضرب

۴۲۳	۳.۱	فتالب
۴۲۳	۴.۱	تبدیلی اساس
۴۲۳	۵.۱	امتیازی تفاسلات اور امتیازی اقتدار
۴۲۳	۶.۱	هر مشی تبادلے

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع یا آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شرودنگر

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی اعمال H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر اور ج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھا کلاسیکی مثال مشابہہ اور اعمال میں مشرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں اعمال پر ”ٹوپی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عاملین پر ”ٹوپی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

خفی تو انائی V اور تفاعل موج Ψ اب $(x, y, z) = \mathbf{r}$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 \mathbf{r} = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کو پوری فصا پر لینا ہوگا۔ اگر خفی تو انائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فصائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقامت c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

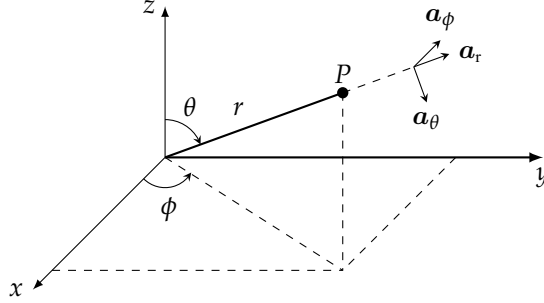
سوال ۴.۱:

۱. عاملین \mathbf{r} اور \mathbf{p} کے تمام باضابطہ مقلبیہ رشتے: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔



شکل ۴.۱: کروئی محدود: رداس r ، قطبی زاویہ θ ، اور سمتی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگا۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x \sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفی صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں کروئی محدود (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل ۴.۱)۔ کروئی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کر وہی محدود میں تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے؛

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیجئے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔^۶

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارٹیزی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی سرحدی کونواں (یا ڈب) میں ایک ذرہ:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

^۶ ایسا کرنے سے ہم عموماً یہ نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازم عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

۱. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انخطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انخطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین البادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انخطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۳.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۳.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2 \theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانے ہوں۔ یہ کلاسیکی حرکتیاتی مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$(۳.۱۹) \quad Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا متغیر ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا متغیر ہے، لہذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$(۳.۲۰) \quad \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(۳.۲۱) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$(۳.۲۲) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

یہاں بھی ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔
انتباہ: اب صرف m دو مختلف چیزوں، کیمت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$ ، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخسرا الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جبزو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم Θ میں منضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محلی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہذا برقی حرکیات میں اسمتی تقاعسل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نسائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کو انٹیم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نسائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط^۸ مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

مادات θ

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (۴.۲۵)$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = AP_l^m(\cos \theta) \quad (۴.۲۶)$$

جہاں P_l^m شریک لیونڈر تفاعل^۹ ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x) \quad (۴.۲۷)$$

اور l ویں لیونڈر کشیرر کنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے^{۱۰} جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس^{۱۱}

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (۴.۲۸)$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیونڈر کشیرر کنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام ہی ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

^۸ یہ نظر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال شذافیت $(|\Phi|^2)$ ایک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

^۹ associated Legendre function
^{۱۰} دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہوگا۔
^{۱۱} Rodrigues formula

جدول ۴.۱: چند ابتدائی لیڈانڈرکشیہ رکنیاں $P_l(x)$ ۔ (i) تقابلی روپ، (ب) تریات۔



$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (i)$$

درج l کثیررکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہوگی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (ب) ہمیں $P_l^m(\cos \theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$ ہوتا ہے لہذا $P_l^m(\cos \theta)$ ہر صورت $\cos \theta$ کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق m کی صورت میں $\sin \theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos \theta$ کے چند شریک لیڈانڈرکشیہ علاقے پیش کیے گئے ہیں۔

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت $P_l^m = 0$ ہوگا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفسر قی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفسر قی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے فت ابڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنیہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محمد میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹنڈر تفاسعات $P_l^m(\cos \theta)$: (۱) تفاسلی روپ، (ب) ترسیات برائے $r = P_l^m(\cos \theta)$ (ان ترسیات میں r آپ کو θ رخ تفاسلی کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیے۔)



لہذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاسعات r^2 کو r کے ہارمونیاں ^{۱۳} کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، m کی ہارمونیاں عمودی ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

^{۱۲} معمول زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علاقیت کے نتیجہ ہم آہنگی کی منظر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}$ ہوگا۔

^{۱۳} spherical harmonics

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\ Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\ Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \end{aligned}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر l کو **آئٹھ** کوٹائی عدد^{۱۴} جب کہ m کو **مقناطیسی** کوٹائی عدد^{۱۵} کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۲۹ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_2^1 اور Y_0^0 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔ سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (دو) نامتابل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حیرانی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ تفکیک دیں۔ (آپ P_3^2 کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تفکیک دینا ہوگا) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیوڈانڈرکٹیررکینوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left(\frac{2}{2l+1}\right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: مکمل بالخصوص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشابہی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$(۴.۳۵) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1)R$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$(۴.۳۶) \quad u(r) \equiv rR(r)$$

لہذا $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ، $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ، $R = u/r$ درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

اس کو رداسی مساوات^{۱۶} کہتے ہیں۔ اچھو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بعدی شرودنجر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ^{۱۸} درج ذیل ہے

$$(۴.۳۸) \quad V_{\text{مؤثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو^{۱۹} کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبداسے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۳۹) \quad \int_0^\infty |u|^2 dr = 1$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامستناہی کروئی کنواں پر غور کریں۔

$$(۴.۴۰) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

^{۱۶} radial equation

^{۱۷} یہاں m کیت کو ظاہر کرتی ہے، رداسی مساوات میں طیجرگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

^{۱۸} effective potential

^{۱۹} centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$(۴.۴۱) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۲) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مطبق کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \rightarrow 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے متابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہذا $ka = n\pi$ ہوگا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$(۴.۴۳) \quad E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو $1/\sqrt{4\pi}$) $Y_0^0(\theta, \phi)$ کی بنا غیر اہم ہے (کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۴) \quad \psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو انتائی اعداد n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:

$\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی، E_{nl} ، صرف n اور l پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$(۴.۴۵) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B r n_l(kr).$$

^{۲۰} درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے متابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستثنائی ہو: مساوات ۴.۴۱ میں r^2 کی بجائے $1/r$ $R(r)$ معمول پر لانے کے متابل ہے۔
quantum numbers^{۲۱}

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$ ؛ چھوٹی x کے لئے مقترابی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا کروی بیسل تفاعل^{۲۲} ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا کروی نیومن تفاعل^{۲۳} ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$(۴.۴۶) \quad j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

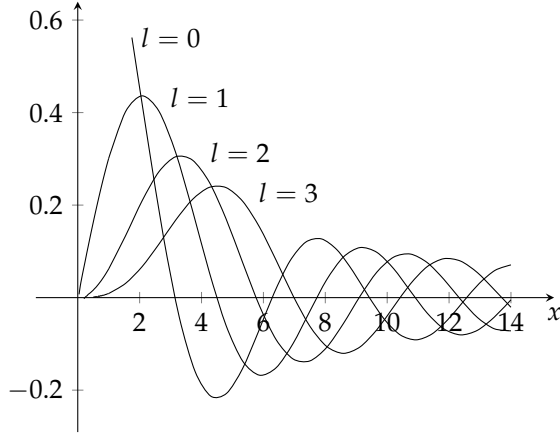
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

^{۲۲}spherical Bessel function
^{۲۳}spherical Neumann function



شکل ۳.۲: ابتدائی چار کروی بیسل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدأ پر بیسل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدأ پر نیومن تفاعلات بے فتابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۷) \quad R(r) = A j_l(kr)$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۳.۴۸) \quad j_l(ka) = 0$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہوگا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۳.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے واصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{nl}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$(۳.۵۰) \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$(۳.۵۱) \quad \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمولی ذنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l + 1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح $(2l + 1)$ گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروئی نیومن تعاضلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $1 \ll x$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ ہوتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کنواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں احبازاتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو مستناہی کروئی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ متانوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۴.۵۲) \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب محفہ، مساوات ۴.۵۲، $E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو ایلیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موحصر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس کے بعد ہم حالات کی مفت رابی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \rightarrow \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ($\rho \rightarrow \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس $\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛^{۲۴} لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی روپ کو چھپانے کی خاطر نیا قیاس عمل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[(l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

^{۲۴} دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۶۱) \quad \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0$$

آخر میں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$ ، کو ρ کا متقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۶۲) \quad v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j$$

ہمیں عددی سر (c_0, c_1, c_2, \dots وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزود تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”مندرجہ اشاریہ“ j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ $-1 = j$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزودر $(j+1)$ اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم مندرجہ بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کاروپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔^{۲۵}

آئے j کی بڑی قیمت۔ (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابق ہوں گے جہاں بلند طاقستیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔^{۲۶}

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$(۴.۶۴) \quad c_j = \frac{2^j}{j!} c_0$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۶۵) \quad u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے فتابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت مساوی غیر پسندیدہ متغیراتی روسیہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیراتی حل بھی رد اسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

^{۲۵} آپ پوچھ سکتے ہیں: طامتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر کیوں لاگو نہیں کی گئی؟ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متغیراتی روسیہ کو کیوں (حبز و ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ حبز و ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا حبز و ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس حبز و ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالتا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

^{۲۶} آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - 2(l+1)$ اور نسب نامہ میں $2l+2$ رد کرنے کی طرح $1+j$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا تھا۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، j بندیز، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j+1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد^{۲۷}

$$n \equiv j+1 \quad (۴.۶۷)$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احباباتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر^{۲۸} ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913ء میں، ناقتیل استعمال کا اس کی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924ء میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

principal quantum number^{۲۷}
Bohr formula^{۲۸}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

رواں بولہر^{۲۹} کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n - l - 1$ = بندہ j کا کشیدہ رکتی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ تواری دے گا (اور پورے تقاضا عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حال^{۳۱} (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہوگا؛ طبعی مستقامت کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ توانائی^{۳۲} (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ معتد ار جوہر کو باردارہ بنائے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۶ کے تحت $l = 0$ لہذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ تواری پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

^{۲۹} Bohr radius

^{۳۰} کردار اس بولہر کو رواقی طور پر زیر نوشت کے ساتھ کھساجا تا ہے: a_0 تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

^{۳۱} ground state

^{۳۲} binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی بھی توانائی ہوگی۔ کلیہً توانی (مساوات ۴.۷۶) کے لئے $l = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہذا $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad (۴.۸۲)$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاؤ عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہً توانی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \quad (۴.۸۳)$$

ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکن قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۴.۸۴)$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکن قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہوگی (مساوات ۴.۲۹)؛ لہذا E_n سطح توانائی کی کل انخطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (۴.۸۵)$$

کشیر رکتی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہً توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (۴.۸۶)$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_{q-p}^p(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

ایک شریک لاگنچ کشیر رکنی^{۳۳} ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

q ویں لاگنچ کشیر رکنی^{۳۴} ہے۔^{۳۵} (جدول ۴.۵) میں چند ابتدائی لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تقاعسل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تقاعسلات موج درجہ

^{۳۳} associated Laguerre polynomial

^{۳۴} Laguerre polynomial

^{۳۵} دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

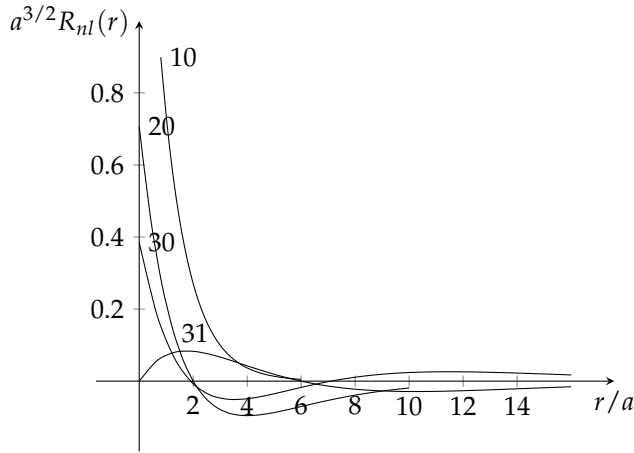
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تقاسمات $R_{nl}(r)$ کی تریسٹات۔

ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولم توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیاں کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں H کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگتھ کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو کوئی نیا نکل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہو گا، اور از مسینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2, l = 1, m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x, y اور z کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin \theta \cos \phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپ کو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + dr$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2, l = 1, m = 1$ اور $n = 2, l = 1, m = -1$ کے درج ذیل خطی مجموعے سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(r, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طیفی فوٹان کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔^{۳۷} عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کوانٹم چھلانگ“ کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے منفرق

$$E_{\gamma} = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

اب کلیہ پلانک^{۳۸} کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

^{۳۷} فطراً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

Planck's formula^{۳۸}

^{۳۹} فوٹان درحقیقت برقی طیفی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکینکس متبادل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظر سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ طول موج $\lambda = c/v$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جس

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل^{۴۰} کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ^{۴۱} ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو تدرت کے بنیادی منتقات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ($n_f = 1$) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کا **لیمائز تسلسل**^{۴۲} کہتے ہیں۔ پہلی ہجبان حال ($n_f = 2$) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**^{۴۳} کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، **پاشن تسلسل**^{۴۴} دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ احسن راجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپ کو پہلے مختلف ہجبان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلاء پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم^{۴۵} میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ^{۴۶} تھیم میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقی طیفی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ محفہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \rightarrow Ze^2$ ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجرباتی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کیت m جبکہ سورج کی کیت M لیں)۔

ب. اس نظام کا ”رداس بوہر“ a_B کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

Rydberg constant^{۴۰}

Rydberg formula^{۴۱}

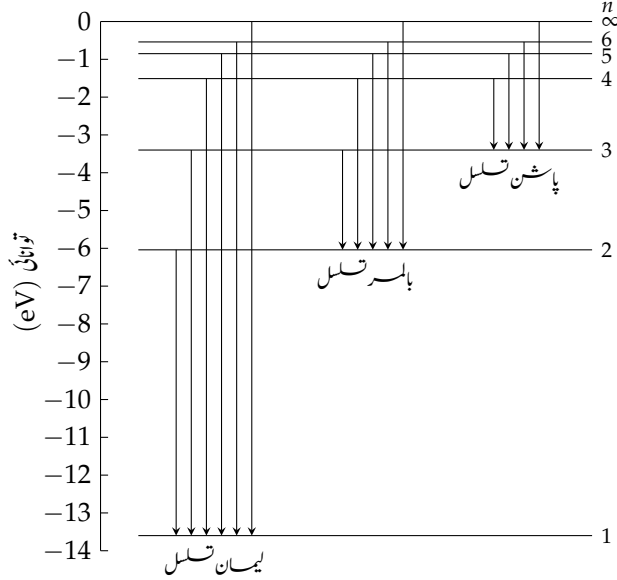
Lyman series^{۴۲}

Balmer series^{۴۳}

Paschen series^{۴۴}

Helium^{۴۵}

Lithium^{۴۶}



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوں توانائیاں اور تھوئیاں۔

ج. تجاذبی گلیہ بھر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n - 1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احساراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔ حصارفونان (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹاؤن) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کو انٹیم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مدارچی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی معتداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کو انٹیم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدأ کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$(۴.۹۵) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۹۶) \quad L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$, $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$, $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونک سرکش کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی افتدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبتی تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔^{۴۸}

$$(۴.۹۷) \quad [L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ = [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

باضابطہ مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x , y اور p_y , z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چپکری اول بدل $(x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلبتی رشتے^{۴۹} ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ L_x , L_y اور L_z غیر ہم آہنگ و قابل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

^{۴۸} کوانٹم میکانیات میں تمام عاملین و تانوں جبریتی تقسیم: $(B + C) = AB + AC$ (صفحہ ۱۷۷ پر حاشیہ ۳۳ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ ہوگا۔
fundamental commutation relations^{۴۹}

یا

$$(۳.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$(۳.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

عامل L_x کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

(مقابلہ کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہوگا

$$(۳.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۰۳) \quad [L^2, \mathbf{L}] = 0$$

اس طرح \mathbf{L} کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہوگا اور ہم L^2 کا (مثلاً) L_z کے ساتھ ایک وقت امتیازی حالات

$$(۳.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(۳.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

L_z کے ساتھ مقاب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

الہذا

$$(۳.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہوگا۔

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (۴.۱۰۷)$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_{\pm}(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f) \quad (۴.۱۰۸)$$

لہذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_{\pm}f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہوگا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)f + L_{\pm}L_zf = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad (۴.۱۰۹)$$

لہذا نئے امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے L_z کا $L_{\pm}f$ امتیازی تفاعل ہوگا۔ ہم L_+ کو **عالمی رفعت**^{۵۰} کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو \hbar بڑھاتا ہے جبکہ L_- **عالمی تقلیل**^{۵۱} کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو \hbar کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے، جس کا ہر پائے متر ہی پائے سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے \hbar کی ایک اکائی دور ہوگا (شکل ۴.۶)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچے گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت^{۵۲} ہے۔ لازماً سیڑھی کا ایسا ”بالا ترین پائے“ f_t ، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن^{۵۳} کرے گا۔

$$L_+f_t = 0 \quad (۴.۱۱۰)$$

فرض کریں اس بالا ترین پائے پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو (حرف ” l “ کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

$$L_zf_t = \hbar lf_t; \quad L^2f_t = \lambda f_t \quad (۴.۱۱۱)$$

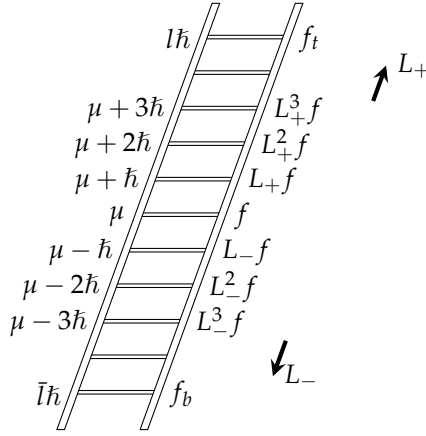
اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

raising operator^{۵۰}

lowering operator^{۵۱}

^{۵۲}بناطیل طور پر $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ ہوگا، لیکن $\langle L^2 \rangle = \langle f|L^2f \rangle = \langle L_xf|L_xf \rangle \geq 0$ ہے (اور L_y کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا) لہذا $\lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہوگا۔
^{۵۳}درحقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ L_+f_t معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے؛ اس کا معیار ضرر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔
سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۴.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی ”سیڑھی“۔

یاد دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm}L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی متدرج کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی متدرج دیتی ہے۔
ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ f_b بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

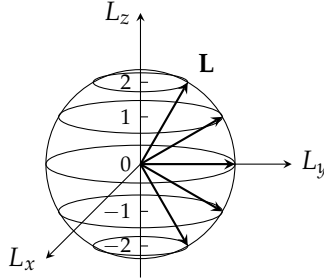
$$(۴.۱۱۴) \quad L_- f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر L_z کا امتیازی متدرج $\hbar \bar{l}$ ہو:

$$(۴.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

معادلات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$



شکل ۷. زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مسوات ۴.۱۱۳ اور مسوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$ ہوگا لہذا $\bar{l} = l + 1$ ہوگا (جو بے معنی ہے، چونکہ خپلاترین پاسب، بالاترین پاسب سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہوگا۔

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی امتداد $m\hbar$ ہونگے، جہاں m (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت N عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-l$ تا $+l$ ہوگی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ یعنی $l = N/2$ ہوگا، لہذا l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد l اور m کرتے ہیں:

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی سیڑھی کے $2l + 1$ پائے ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیسرے نشان ٹمکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں \hbar کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l + 1)}$ ہوگی جو (یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے) جبکہ ان کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں $0, -1, -2$ ، $1, 2$ ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کار داس)، z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑا ہے! $l = 0$ کی ”حقیر“ صورت میں، عموماً $\sqrt{l(l + 1)} > l$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار

حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ ”کیا میں z محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟“ اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی z محدود L کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ L کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کام تمام اور معیار حرکت بیک وقت تعین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر L_z کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب L_x اور L_y ہم نہیں جانتے سکتے ہیں شکل ۴.۷ میں سمتیہ گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی اپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y غیر تعین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی ترائیبا استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، L^2 اور L_z کے امتیازی امدار تعین کیے۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا۔ میں کانٹے کی بات $Y_l^m = f_l^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات وہی کروئی ہارمونیاں ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف l اور m استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروئی ہارمونیاں کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی امدار کے ہر مشی عملین (L^2 اور L_z) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad (۴.۱۲۰)$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ L_{\pm} اور L_{\mp} ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہیں (چونکہ L_x اور L_y قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \quad (۴.۱۲۱)$$

دیکھیے گائے سیدھی کی بلند ترین اور ٹھپے ترین پایہ پر کیا ہوگا (جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

۱. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات ۴.۱۰ سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل مطالب حاصل کریں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0 \quad (۴.۱۲۲)$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. معتالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$) تلاش کریں۔

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہمیلٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل L کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں H ، L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفی $V(r)$ میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت L کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt}\langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہرنفٹ کا مشعل گھومتا تعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی کے لیے $d\langle L \rangle/dt = 0$ ہوگا۔ (یہ زاویائی معیار حرکت کے بقا ۴.۵۴ کا کوانٹم میکانی روپ ہے۔)

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا۔ $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[r(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) \frac{\partial}{\partial r} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) = 0$ ، $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$ ، اور $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_\theta$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات a_θ اور a_ϕ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$(۳.۱۲۵) \quad a_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k}$$

$$(۳.۱۲۶) \quad a_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا کلاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$(۳.۱۲۷) \quad L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۸) \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۹) \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ہمیں عامل رزنت اور عامل تقطیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

تہا $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$ ہوتا ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۰) \quad L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

بالخصوص (سوال ۳.۲۱-۱) درج ذیل

$$(۳.۱۳۱) \quad L_+ L_- = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

لہذا (سوال ۳.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۲) \quad L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

ہم اب $f_l^m(\theta, \phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ L^2 کا امتیازی قف عمل ہے، جس کا امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے۔

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

یہ ٹھیک ”زاویائی مساوات“ (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی مقدار $m\hbar$ ہوگا:

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو انتہائی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروئی ہارمونیات $Y_l^m(\theta, \phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروئی ہارمونیات ہوں گے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انہی تین مقبولی عاملین H اور L^2 کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۴.۱۳۳)$$

ہم مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات ۴.۱۴ کو مختصر اُدرج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہونیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، l کی (اور لہذا m کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: پرکھی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ سوال ۴.۲۲:

ا. حاب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_l^l$ کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جنزور-اکا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$ ہوگا، $L_z Y_l^l(\theta, \phi)$ کی قیمت معمولی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلا واسطہ مکمل کے ذریعے معمولی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجہ کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۲ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عاسل رفت کا $Y_2^2(\theta, \phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے، کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

۱. دکھائیں کہ اس بے لچکے پھرکے^{۵۵} کی احبازنی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب۔ اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی؟

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مدار^{۵۶} ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم پھرکے^{۵۷} ($\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$) کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی ہنا زمین کا مدار چمی زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی ہنا اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ مشرق محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی ”مداری“ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ \mathbf{S} کے برابر ہوگا۔ کوانٹم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی مشرق پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی ہنا مدار چمی زاویائی معیار حرکت (جسے کروئی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو مقام کے متغیرات r ، θ اور ϕ سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانندہ ہے (لہذا اے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مشابہت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطہ ذرا ہے، لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدار چمی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات بیرونی^{۵۸} زاویائی معیار حرکت \mathbf{L} کے ساتھ ساتھ اندرونی^{۵۹} زاویائی معیار حرکت \mathbf{S} بھی رکھتے ہیں۔

rigid rotor^{۵۵}
orbital^{۵۶}
spin^{۵۷}
extrinsic^{۵۸}
intrinsic^{۵۹}

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو، ہمدارچی زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبت رشتوں^{۶۰} سے شروع کرتے ہیں۔

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (۴.۱۳۴)$$

یوں (پہلے کی طرح) S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات^{۶۱}

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \quad (۴.۱۳۵)$$

اور

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle \quad (۴.۱۳۶)$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات (θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں) لہذا یہ کروہی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنیاد s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتوں

$$(۴.۱۳۷)$$

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص اور ثابت تبدیلی قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) چکر^{۶۲} کہتے ہیں: π میزون کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1؛ ذیلتا کا چکر $3/2$ ؛ گریویشن کا چکر 2؛ وغیرہ وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹران کا مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حاصل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہوگا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہوگا، جس کی بنیاد نظریہ چکر نسبتاً دادہ ہے۔^{۶۳}

^{۶۰} ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ مداری زاویائی معیار حرکت کے مسائل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ تفصیل انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماؤ کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقبولی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکر کی، مداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ مداری شامل ہوں گے۔
^{۶۱} چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے ”دایاں گوشہ“ ($| \rangle$) استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے Y_l^m کو $|lm\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہذا میں S_z کے امتیازی متدر کے لئے m استعمال کروں گا، جیسا میں نے L_z کے لئے بھی کیا (بعض مضغین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں m_l اور m_s لکھتے ہیں)۔
^{۶۲} spin

^{۶۳} یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے $1/2$ چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ چھپیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی بلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ 2×2 متالاب اور 2 رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مضغین کوانٹم میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی دگائی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

سوال ۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنسٹائن کلب $E = mc^2$ سے کلاسیکی الیکٹران رداس r_c حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب ”خط استوا“ پر کسی نقطے کی رفتار (ms^{-1} میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (درحقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید عنطرا دیتا ہے۔)

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک ^{۲۵} اور تمام لیپٹان ^{۲۶} کیلئے $\frac{1}{2} = s$ ہوگا لہذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید $1/2$ چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف ”دو“ امتیازی تغسلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر \uparrow) ہے جو ہم میدان چکر ^{۲۷} کا راجہ جاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو مخالف میدان چکر ^{۲۸} (\downarrow) کہلاتا ہے۔ انہیں کواس سمتیات لیتے ہوئے $1/2$ چکر ذرے کے عمومی حال کو دور کئی قتالاب قطار (یا چکر کار ^{۲۹}) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

classical electron radius ^{۲۴}
quarks ^{۲۵}
leptons ^{۲۶}
spin up ^{۲۷}
spin down ^{۲۸}
spinor ^{۲۹}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ساتھ ہی، عاملین چکر 2×2 متالاب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم S^2 کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالاب

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا $c = \frac{3}{4} \hbar^2$ اور $e = 0$ ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4} \hbar^2$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۴) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ S_z, S_y, S_x تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ $S = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالجے چکر ہیں۔ دھیان رکھیں کہ S_x, S_y, S_z اور S^2 تمام ہر مشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس S_+ اور S_- غیر ہر مشی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ یقیناً S_z کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر})$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیشانہش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا (یعنی چکر کار لازمًا معمول شدہ ہوگا)۔^{۱۱}

$$(۴.۱۵۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیشانہش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتانچ اور ان کے انفسراوی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں S_x کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

^{۱۱}Pauli spin matrices

ان لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہئے ہیں کہ اگر S_z کی پیشانہش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہوگا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۳۹ دیکھیں۔)

لہذا $\beta = \pm \alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S_x کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشق متالاب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مسادات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a+b|^2/2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a-b|^2/2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہذا S_z کیلئے $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ جبکہ $-\hbar/2$ کے حصول کا

احتمال $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ ہوگا۔ اتفاقی طور پر S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک مندرجہ ذیل تجربے سے گزارش کروں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ مندرجہ ذیل ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ”اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا z جزو کیا ہے؟“، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $\hbar/2 +$ ہے؛ چونکہ S_z کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ”اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو کیا ہوگا؟“، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $\hbar/2 +$ یا $\hbar/2 -$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ”حقیقت پسند“ ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: ”کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟“ نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو ψ_+ ہے۔ ”تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟“ اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر S_x اور S_z کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا x جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ مندرجہ ذیل وہ $\hbar/2 +$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھے) ”اس ذرے کی S_x قیمت ٹھیک $\hbar/2 +$ ہے۔“ جی آپ درست فرما رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔“ ظاہر ہے، آپ بال کی کمال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بسا؟ میں اب S_x اور S_z دونوں کو حبانہ ہوں۔ ”جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں جبکہ S_z کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔“ لیکن S_x کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون حباب نہ ہو۔ ”اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔“ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ $\hbar/2 -$ حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: ”اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک معنام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے“، ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تقریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب $1/2$ چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹم میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

۱. تصدیق کیجیے گا کہ چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابلیت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

ب. دکھائیں کہ پالی چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۸) وتاعدہ ضرب

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۳)$$

کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں، اور ϵ_{jkl} علامت لوپس و پچوینا^{۲۲} ہے، جس کی قیمت $123 = jkl$ یا 231 یا 312 کی صورت میں $+1$ جبکہ $132 = jkl$ یا 213 یا 321 کی صورت میں -1 اور دیگر صورت 0 ہوگی۔

سوال ۴.۲۷: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

۱. معمولی ذنی مستقل A تعین کریں۔

ب. S_x, S_y اور S_z کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. ”عدم یقینیت“ $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں σ سے مراد معیار انحراف ہے تاکہ پالی وتالب!)۔

د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکر دار ترتیبی مرتب اجتماعات جہاں L کی جگہ S ہوگا) کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle, \langle S_x^2 \rangle, \langle S_y^2 \rangle, \langle S_z^2 \rangle$ اور $\langle S_z^2 \rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ $\langle S^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle$ ہے۔

سوال ۴.۲۹:

۱. S_y کے امتیازی افتدار اور امتیازی چکر کار تلاش کریں۔

ب. عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ a اور b غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!

ج. S_y^2 کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ a_r کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا متالب S_r تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$a_r = \sin \theta \cos \phi i + \sin \theta \sin \phi j + \cos \theta k \quad (۴.۱۵۴)$$

متالب S_r کے امتیازی افتد اور (معمول شدہ) امتیازی چکر کار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad (۴.۱۵۵)$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری حبز و ضرب، مثلاً $e^{i\phi}$ ، سے ضرب دے سکتے ہو لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چکر ایک (1) ہے کے لیے چکری متالب (S_x ، S_y اور S_z) تیار کریں۔ اشارہ: S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے؟ ہر (ان) حال پر S_+ ، S_z اور S_- کا عمل تعین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چکر کاٹا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر μ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت S کا راست متناسب ہوگا:

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۶)$$

جہاں تناسبی متقل γ مسکن مقناطیسی نسبت^۴ کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت سروڈ $\mu \times B$ عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت سروڈ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۷)$$

^۴magnetic dipole moment
^۵gyromagnetic ratio

^۴ہا سیکسی طور پر ایک جسم، جس میں بار q اور کیت m کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت $q/2m$ ہوگی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریے میں ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کا سیکسی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی ہے۔ ($\gamma = -e/m$)

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

لہذا مقناطیسی میدان B میں، ایک مفتام پر ساکن μ_B باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۵۸)$$

مثال ۴.۳: لارمر استقبالی حرکت: فرض کریں z رخ یکساں مقناطیسی میدان

$$B = B_0 k \quad (۴.۱۵۹)$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ متالابی روپ میں ہیمیلٹنی (مسوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۰)$$

ہیمیلٹنی H کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو S_z کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۱)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیمیلٹنی غیر متابع وقت ہے لہذا تابع وقت شرودنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi \quad (۴.۱۶۲)$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

^۶ اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکت کی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہوگی، اور مزید اس کو قوت لورنز ($q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) کا بھی سامنا ہوگا، جس کو چنی توانائی تفاعل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے، لہذا اس کو (اب تک متعارف) شرودنگر مساوات میں نسب نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (حوالہ ۴.۵۹)، تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن دیگر صورت ساکن ہے۔

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہوگا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \quad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۳)$$

آئیں S کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۴)$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۵)$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۶)$$

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۸) محور z کے ساتھ $\langle \mathbf{S} \rangle$ مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد^{۷۸}

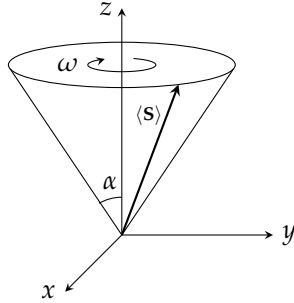
$$\omega = \gamma B_0 \quad (۴.۱۶۷)$$

سے استنباطی حرکت^{۷۹} کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہر نفٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle \mathbf{S} \rangle$ اراقت پائے گا۔ بہرحال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سابق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

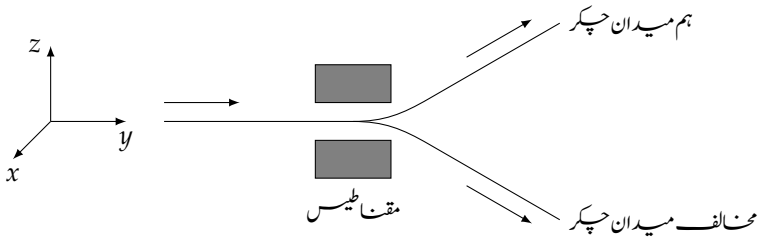
^{۷۸} یہاں a اور b کو حقیقی فرض کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو t کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔

^{۷۹} Larmor frequency

^{۷۹} کلاسیکی صورت میں صرغ توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقنطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استنباطی حرکت کرتا ہے۔



شکل ۴.۸: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle S \rangle$ کی استقبالی حرکت۔



شکل ۴.۹: شرٹن و گرلاخ آلہ۔

مثال ۴.۴: تجربہ شرٹن و گرلاخ: ^{۸۰} ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت سرورڈ بلکہ قوت: ^{۸۱}

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۶۸)$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بسند چپکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تبدیلی ^{۸۲} جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان:

$$B(x, y, z) = -\alpha x i + (B_0 + \alpha z) k \quad (۴.۱۶۹)$$

کے خطے سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹)، جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف z حبزوں سے غرض ہے، لیکن بد قسمتی

^{۸۰} Stern-Gerlach experiment

^{۸۱} توانائی (مساوات ۳.۱۵۷) کی منفی دھلوں کے برابر قوت F ہوگی۔

^{۸۲} ہم تبدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت لورنزی بنی شعاع کے جھکنے سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تاکہ ہم معنای موجی اکٹھے تفصیل دے کر حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عملاً، شرٹن و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہوگا۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقی طیفی قانون $\nabla \cdot B = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا۔ ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگی۔

$$F = \gamma\alpha(-S_x i + S_z k)$$

تاہم B_0 کے گرد لار مسر استقبالی حرکت کی بنا، S_x تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اوسط قیمت دے گا، لہذا z رخ حالص قوت درج ذیل ہوگی

$$F_z = \gamma\alpha S_z \quad (۴.۱۷۰)$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ S_z کو انشادہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کو انشادہ کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مدار چکی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہوگا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی۔)

اب بالکل آخری قدم تک۔ دلیل حالصت کا اسیکی ہت جبکہ کو انٹرمیکانیات میں ”قوت“ کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوڑنے کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوڑنے میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت T (جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۱)$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں B کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت۔)

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۲)$$

ہوگا لہذا ($t \geq T$ کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$(۴.۱۷۳) \quad \chi(t) = \left(a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z}$$

ان دونوں اجزاء کا اب z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مساوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان حبزوکا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۷۴) \quad p_z = \frac{\alpha\gamma T \hbar}{2}$$

اور یہ مثبت z رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان حبزوکا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی z رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی۔ (چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہذا مساوات ۴.۱۷۴ پہلے حاصل کردہ نتیجہ (مساوات ۴.۱۷۰) کے مطابق ہے۔)

کوانٹم میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گریلاخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جاسکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غصیر تنظیم شدہ شعاع کو شٹرن و گریلاخ مقناطیس سے گزار کر اجنبی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z حبزوکا جانا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گریلاخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

۱. وقت t پر چمکری زاویائی معیار حرکت کی x رخ حبزوکا پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

۱. اس نظام کا ہیملٹنی متالب تیار کریں۔

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹران ہم میدان حال (یعنی $\chi_+^{(x)} = \chi(0)$) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تاجع وقت ہے، لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تاجع وقت شروع ونگر مساوات (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج. S_x کی پیمائش سے $\hbar/2$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب:

$$\sin^2 \left(\frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم درکار میدان (B_0) کتنا ہوگا؟

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال^{۸۳} میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوں گی:^{۸۴}

$$(۴.۱۷۵) \quad \uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$$

جہاں پہلا تیسر کا نشان (یعنی بیاں تیسر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیسر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$(۴.۱۷۶) \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک، S_z کا امتیازی حال ہوگا: ان کے z اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقے سے جمع ہوتے ہیں:

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar(m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

^{۸۳} میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ تا تو مدار چلی زاویائی معیار حرکت ہو اور تا ہی ہمیں اس کے بارے میں فکر مند ہونے کی ضرورت ہو۔

^{۸۴} یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہوگا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہوگا۔

دیکھیں۔ یاد رہے $S^{(1)}$ صرف χ_1 پر عمل کرتا ہے اور $S^{(2)}$ صرف χ_2 پر عمل کرتا ہے۔ یہ علاقیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپن کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہوگا:

$$\uparrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\uparrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے: m کو چاہیے کہ $-s$ تا $+s$ عدد صحیح قدرتوں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ $s = 1$ ہے لیکن یہاں ایک ”اضافی“ حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات (sm) علامتی روپ میں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۷۷) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (سہ تا)}$$

(تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ ادیکھیں۔) اسی بنا اے سے $s = 0$ ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو $s = 0$ کا حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۷۸) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (یک تا)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے صفر حاصل ہوگا (سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔)

یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک (1) یا صفر (0) ہوگا، جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا وہ سہ تا یا ایک تا تنظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ سہ تا حالات، S^2 کے امتیازی

سمتیات ہیں جن کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہے، اور یک تاحالات، S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قدر صفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۷۹) \quad S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}$$

ساوات ۴.۱۷۵ اور مساوات ۴.۱۷۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} (2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$(۴.۱۸۰) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} |10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۱) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2 \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4} |00\rangle$$

ہو گئے۔

ساوات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور مساوات ۴.۱۷۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$(۴.۱۸۲) \quad S^2 |10\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\right) |10\rangle = 2\hbar^2 |10\rangle$$

ہے لہذا $|10\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہوگا؛ اور

$$(۴.۱۸۳) \quad S^2 |00\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right) |00\rangle = 0$$

ہے لہذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر 0 ہوگا۔ (میں آپ کے لئے سوال ۴.۳۳-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہوگی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ موزوں امتیازی قدر کے، S^2 کے امتیازی تفاعلات ہیں۔)

ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر 1 چکر اور 0 چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکر s کیا حاصل ہونگے؟^{۸۹} اس کا جواب^{۹۰} ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک؛ اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک، نیچے آتے ہوئے ہر چکر:

$$s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2| \quad (۴.۱۸۴)$$

حاصل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، زیادہ سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہو گا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صنف بند ہوں، اور کم سے کم اس صورت ہو گا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صنف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ 2 چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو $7/2$ ، $5/2$ ، $3/2$ ، یا $1/2$ کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تنظیم پر منحصر ہو گا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال ψ_{nlm} کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا حلال زاویائی معیار حرکت (چکر جمع مدارچی) $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ ہو گا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l + 1$ ، l ، یا $l - 1$ ہو گا (جس l کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہو گا کہ آیا کہ الیکٹران از خود $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ تنظیم رکھتا ہے)۔

(چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہذا) مجموعی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s ہو اور z جزو m ہو، مرکب حالات $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \quad (۴.۱۸۵)$$

ہو گا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامت $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ ، $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ استعمال کیا ہے)۔ مستقلال $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$ کو **کلیش و گورڈن عدد** سر^{۸۸} کہتے ہیں۔ جدول ۴.۸ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر 2×1 جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈب میں (2 چکر اور 1 چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3، اور z جزو 0 ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش (1/5 احتمال کے ساتھ) \hbar یا (3/5 احتمال کے ساتھ) 0 یا (1/5 احتمال کے ساتھ) $-\hbar$ قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ 1 ہے۔ (کلیش و گورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے مرکبوں کا مجموعہ 1 ہو گا۔)

^{۸۹} میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یادوں) مدارچی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم حرف l استعمال کرتے)۔

^{۹۰} ثبوت کے لئے آپ کو اصل نصاب دیکھنا ہو گا۔

^{۸۸} Clebsch-Gordon coefficients

ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |sm\rangle \quad (۴.۱۸۶)$$

بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سب دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}} |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور 1 چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لیے $m_2 = 0$ ہے (m لازماً $1/2$ ہوگا) اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ $(3/5)$ احتمال کے ساتھ $5/2$ یا $(1/15)$ احتمال کے ساتھ $3/2$ یا $(1/3)$ احتمال کے ساتھ $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا (کلیش و گورڈن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ 1 ہوگا)۔

یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ عملی گروپ نظریہ^{۸۹} کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ $\sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$ حاصل ہوگا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں $|00\rangle$ پر S_{\pm} کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ 0 حاصل ہوگا۔

ج. دکھائی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے) S^2 کے موزوں امتیازی فتروں والے امتیازی تفاعلات ہیں۔

سوال ۴.۳۵: کووارکے^{۹۰} کا چکر $1/2$ ہے۔ تین کووارکے مل کر ایک **ہیریون**^{۹۱} تشکیل دیتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کووارکے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کووارک اور ایک ضد کووارک) مل کر ایک **میزون**^{۹۲} تشکیل دیتے ہیں (مثلاً **پالیون**^{۹۳} یا **کالیون**^{۹۴})۔ فرض کریں یہ کووارکے زمینی حال میں ہیں (لہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا)۔

ا. ہیریون کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

ب. میزون کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

group theory^{۸۹}
quark^{۹۰}
baryon^{۹۱}
meson^{۹۲}
pion^{۹۳}
kion^{۹۴}

جدول ۴.۸: کلیش و گورڈن عددی سر۔ درحقیقت ہر عددی سر در، جذر کی علامت کے اندر ہوگا اور منفی عددی سر کی صورت میں منفی کی علامت جذر کے باہر ہوگی۔ یوں $-1/3$ سے مراد $-\sqrt{1/3}$ ہوگا۔

$j_1 \times j_2$	J	M	\dots
m_1	m_2	M	\dots
m_1	m_2	عددی سر	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$2 \times 1/2$	$3/2 \times 1/2$	$1/2 \times 1/2$	$3/2 \times 1$	2×1	$1 \times 1/2$	$3/2 \times 1$	2×1	1×1
$\begin{bmatrix} 5/2 & & & & & & & & \\ 2 & 1/2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & -1/2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1/2 & 4/5 & -1/5 & & & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/5 & 4/5 & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & 1 & & & & & & \\ & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & & & & \\ & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & & & & \\ & & -1/2 & -1/2 & 1 & & & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 & & & & & & & \\ 3/2 & 3/2 & & & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & 1 & -1/2 & 2/5 & 3/5 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 3/5 & -2/5 & -1/2 & -1/2 & & \\ & -1 & 1/2 & 2/5 & -3/5 & -3/2 & -3/2 & & \end{bmatrix}$

ا. چکر 1 کا ایک ساکن ذرہ اور چکر 2 کا ایک ساکن ذرہ اس تنظیم میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3، اور z جب \hbar ہے۔ چکر 2 ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال ψ_{510} میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۳.۷: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں (جہاں $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ ہوگا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیّت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(\mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)}) \quad (۴.۱۸۷)$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیش وگورڈن عددی سرہی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ مقلوبی ہوگا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

باب ۴ کے لئے اضافی سوالات

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے تین ابعادی ہارمونی مرتعش^{۹۵} پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (۴.۱۸۸)$$

ا. کارٹیزی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بعدی مرتعش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، احبازتی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۸۹)$$

ب. E_n کی انخطائیت $d(n)$ تعین کریں۔

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ میں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی مرتعش مخفیہ کروئی تشاکلی ہے لہذا اس کی مساوات شعرونگر کو کارٹیزی محدد کے علاوہ کروئی محدد میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے۔ طمستقی تسلل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ردا۱ مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے احبازتی توانائیاں تعین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

۱. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل تین ابعادی مسئلہ وریل^{۹۶} ثابت کریں۔

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۰)$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۱)$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونک سرعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۲)$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۴۱ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی رواج^{۹۷} کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۳)$$

۱. دکھائے کہ \mathbf{J} استمراری مساوات^{۹۸}:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۴)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مقامی بقا احتمال^{۹۹} کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاؤ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3 r \quad (۴.۱۹۵)$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ میں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا۔

ب. حال $m = 1$ ، $l = 1$ ، $n = 2$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے \mathbf{J} تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

^{۹۶} three-dimensional virial theorem

^{۹۷} probability current

^{۹۸} continuity equation

^{۹۹} conservation of probability

ج. اگر ہم کمیت کے بہاد کو mJ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$L = m \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3 r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تاجز وقت) معیار حرکت فضا تفاعل موج** کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۴.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3 r \quad (۴.۱۹۶)$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حرکت کی فضا تفاعل عمل موج تلاش کریں۔ اشارہ: کردی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو \mathbf{p} کے رخ رکھیں اور θ کا مکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۷)$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ $\phi(\mathbf{p})$ معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے $\psi(\mathbf{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اپنے جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ دریل (مساوات ۴.۱۹۱) کا بلا تصادم ہے۔

سوال ۴.۴۳:

ا. حال $m = 1, l = 2, n = 3$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل عمل موج (ψ) تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف r, θ, ϕ اور a (رداس بوجہ) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر (ρ, z, v, Y) یا تفاعل (c_0, A) وغیرہ) یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں π اور 2 ، وغیرہ استعمال کیے جاسکتے ہیں)۔

ب. r, θ, ϕ کے لحاظ سے موزوں کمالات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ s کی کس سعت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب مستثنای ہوگا؟

سوال ۴.۴۴:

ا. حال $m = 3, l = 3, n = 4$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل عمل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو کردی محدود r, θ اور ϕ کا تفاعل لکھیں۔

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ (غیر حقیقی کمالات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ج. اس حال میں ایک جوہر کے متبادل مشاہدہ $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انحصار ہی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۴۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تغاغل موج (مساوات ۴.۸۰) تک درست ہے اور مرکزہ کاردار اس b لپیٹے ہوئے بالکل ٹھیک ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ کم سے کم رتبہ جزوی: $P \approx (4/3)(b/a)^3$ ہوگا۔ دکھائیں کہ $b \ll a$ کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہوگی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہوگا لہذا $P \approx (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$ لیا جاسکتا ہے۔ تصدیق کیجیے کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا۔

د. $b \approx 10^{-15} \text{ m}$ اور $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ لیتے ہوئے P کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴۶:

ا. کلیہ تواری (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں ردائی تغاغل موج درجہ ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ عمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں۔

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں ”عدم یقینیت“ $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہوگی۔ دھیان رہے کہ n بڑھانے سے r میں نسبتی پھیلاؤ گھٹتا ہے (یوں n کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آتا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پر چپانے جاسکتے ہیں)۔ ردائی تغاغل امواج کا خاکہ، n کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۷: ہم مکافہ طیفی خطوط: کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے

صدر کوانٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوگی۔

سوال ۴.۴۸: متبادل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں۔

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

- ب. حال ψ_{nlm} میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں۔
 ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔
 سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ا. χ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل A تعین کریں۔
 ب. اس الیکٹران کے S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انحصار ادی احتمال کیا ہوگا؟ S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
 ج. اس الیکٹران کے S_x کی پیمائش کی بجائے تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر قیمت کا انحصار ادی احتمال کیا ہوگا؟ S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
 د. اس الیکٹران کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انحصار ادی احتمال کیا ہوگا؟ S_y کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
 سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات یکت تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_a کے رخ ذرہ ۱ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_a^{(1)}$ ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_b کے رخ ذرہ ۲ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_b^{(2)}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں a_a اور a_b کے بیچ زاویہ θ ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۹۸)$$

سوال ۴.۵۱:

- ا. کلیش گورڈن عددی سرکو، $s_1 = 1/2$ اور s_2 کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے S^2 کا امتیازی حال $|sm\rangle$ ہو۔

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |s_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |s_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

- مسواوات ۴.۱۷۹ تا مسواوات ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جانتے سے متاصر ہوں کہ (مثلاً) $S_x^{(2)}$ حال $|s_2 m_2\rangle$ کو کیا کرتا ہے، تب مسواوات ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مسواوات ۴.۱۴۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; \quad B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۸ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چپکر کے ذرے کے لیے مناسب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چپکر سوال 31.4 میں ایک چپکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چپکر کے فتالوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چپکر کے لیے چپکری مناسب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہوگا۔

سوال ۴.۵۴: کروئی ہارمونیات کے لیے،؟؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی مائوخل کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر

مسئلہ 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیج انڈر تفاعل کے تفرک کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_l^{m+1} - m x P_l^m \quad (۴.۱۹۹)$$

سوال ۵۵.۴: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضا کی حالت کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21} (\sqrt{1/3} Y_1^0 \chi + \sqrt{2/3} Y_1^1 \chi -)$$

ا. مدار چکی زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) حیز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع کمپوزٹ (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار z کے (S_z) حیز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت کو $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ لیں۔

ه. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگا؟

ح. آپ چکر کے z حیز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۵۶.۴:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) \equiv e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا L_z / \hbar کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\mathbf{L} \cdot \hat{n} / \hbar$ ہوگا جو \hat{n} کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی $e^{i(\mathbf{L} \cdot \hat{n} \varphi / \hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\mathbf{S} \cdot \hat{n} / \hbar$ ہوگا بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\sigma \cdot \hat{n}) \varphi / 2} \chi \quad (۴.۲۰۰)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

باب ۴. تین ابعادی کو انٹرمیکانیات

ب. محور $x - axis$ کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہمہ میدان (χ_+) کو حائل میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور $y - axis$ کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا متالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہوگا؟

د. محور $z - axis$ کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں

$$e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۱)$$

سوال ۴.۵: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (مسوات 99.4) امتیازی اقدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی احبازت دیتے ہیں۔ جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو حائل کرتا ہوگا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل ایسے ہیں جس کا بود لبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس a بوہر درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو $q's$ اور $p's$ مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی سرعش جس کی کیت $m = \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega = 1$ ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی H کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی سرعش کے ہیملٹنی کی امتیازی اقدار $(n + 1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ہوگا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازماً عدد ہوں گے۔

سوال ۵۸.۴: عمومی حال مساوات 139.4 می 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $|\langle S_z \rangle| \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$ میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہوگی b حالف حقیقی یا حالف خیالی ہو۔

سوال ۵۹.۴: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا بار q ہو اور جو مقناطیسی میدان E اور B میں سمتی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینسز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۲)$$

اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تلف عمل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (۴.۲۰۳)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \quad (۴.۲۰۴)$$

جہاں A سمتی مخفی قوت $B = \nabla \times A$ اور ϕ غیر سمتی مخفی قوت $(E = -\nabla \phi - \partial A / \partial t)$ ہیں لہذا شرودنگر مساوات میں باضابطہ متبادل $(p \rightarrow ((\hbar/i) \nabla))$ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\phi \right] \psi \quad (۴.۲۰۵)$$

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (p - qA) \rangle \quad (۴.۲۰۶)$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle r \rangle / dt$ کو $\langle v \rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle v \rangle}{dt} = q\langle E \rangle + \frac{q}{2m} \langle (p \times B - B \times p) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (A \times B) \rangle \quad (۴.۲۰۷)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں E اور B میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle v \rangle}{dt} = q(E + \langle v \rangle \times B), \quad (۴.۲۰۸)$$

اس طرح $\langle v \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینسز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

سوال ۴.۶۰: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقل ہیں

$$A = \frac{B_0}{2}(xj - yi)$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیٹ m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$(۴.۲۰۹) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں $qB_0/m = \omega_1$ اور $\sqrt{2qKm}\omega_1 = \omega_2$ ہوگا۔ تبصرہ: $K = 0$ کی صورت میں یہ سائیکوٹران حرکت کا کوانٹم مشاغل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ احبازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۶۱: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوتہ A اور φ یکساں طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں، طبی مقداریں میدان E اور B ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوتہ

$$(۴.۲۱۰) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں مقام اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان φ اور A دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گنج تبادله کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوتہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا نظریہ گنج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$(۴.۲۱۱) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi$$

شرودنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گنج تبادله مخفی قوتہ φ' اور A لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

جوابات

فهرست

- ensemble, 15
- expectation
 - value, 7
- formula
 - De Broglie, 18
- Fourier
 - inverse transform, 62
 - transform, 62
- Frobenius
 - method, 53
- function
 - Dirac delta, 71
- generalized
 - distribution, 71
 - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 59
- generator
 - translation in space, 135
 - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
 - oscillator, 32
- Hermitian
 - conjugate, 48
- hermitian, 101
 - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
 - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
 - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
 - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
 - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 66
- energy
 - allowed, 28
 - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
 - neutrino, 127
- particle
 - unstable, 21
- polynomial
 - Hermite, 57
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- potential, 14
 - reflectionless, 92
- probability
 - density, 10
- probability current, 21
- probable
 - most, 7
- recursion
 - formula, 54
- reflection
 - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
 - formula, 59
- scattering
 - matrix, 93
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
 - Fourier, 35
 - power, 42
 - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - conjugate, 102
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
 - operators, 45
- law
 - Hooke, 41
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
 - S, 93
 - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- operator, 17
 - lowering, 45
 - projection, 128
 - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

variables
 separation of, 25
 variance, 9
 vectors, 97
 velocity
 group, 64
 phase, 64
 virial theorem, 132
 wag the tail, 55
 wave
 incident, 76
 packet, 61
 reflected, 76
 transmitted, 76
 wave function, 2
 wavelength, 18

 outer, 23
 spectrum, 104
 square-integrable, 13
 square-integrable functions, 98
 standard deviation, 9
 state
 bound, 69
 excited, 33
 ground, 33
 scattering, 69
 statistical
 interpretation, 2
 step function, 79
 theorem
 Dirichlet's, 35
 Ehrenfest, 18
 Plancherel, 62
 transformations
 linear, 97
 transmission
 coefficient, 77
 tunneling, 69, 78
 turning points, 69
 uncertainty principle, 19, 116
 energy-time, 119

- اتاقی
حالات، 133
اجبازی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹریو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینی، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انخطاطی، 104، 89
اندرونی ضرب، 98
انعکاس
شرح، 77
اوسط، 7
براء، 127
بقا
توانائی، 38
پیدا کار
تفاعل، 59
پیدا کار
فصل میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136
تجدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسل
ٹیلر، 41
طامتی، 42
فوریسر، 35
تعیین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2
- توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجبازی، 28
توقعات
قیمت، 7
جفت، 33
تفاعل، 30
حال
بکھراؤ، 69
زمینی، 33
مقید، 69
پہچان، 33
خطی الجبرا، 97
خطی تبدلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 60
دم بلانا، 95، 55
ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیگر، 34
ذره
غیر مستحکم، 21
رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85
ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

- فصل
 بیرونی، 23
 دہری، 128
 فورسٹر
 الٹ بدل، 62
 بدل، 62
 وٹائل مشاہدہ
 غیر ہم آہنگ، 116
 وٹالہ
 بچھراو، 93
 ترسیل، 94
 وٹالہ ارکان، 125
 وٹالون
 ہک، 41
 قوالب، 98
 کٹ، 127
 کشافیت
 احتمال، 10
 کشیر رکنی
 ہرمانٹ، 57
 کلیہ
 ڈی پروگلی، 18
 روڈریگیس، 59
 کوپن، ہیگن مفہوم، 4
 گرام شمد
 ترکیب عودیت، 106
 متعمم
 تنف عمل، 71
 تقسیم، 71
 متعمم شماریاتی مفہوم، 111
 محتمل
 سب سے زیادہ، 7
 مخفیہ، 14
 بلا العکاس، 92
 مربع منکامل، 13
 مربع منکامل تنف اعمال، 98
- سرنگ زنی، 69، 78
 سگرا، 15
 سمتیات، 97
 سوچ
 انکاری، 4
 تقلید پسند، 3
 حقیقت پسند، 3
 سوڈیم، 23
 سیڑھی
 عاملین، 45
 سیڑھی تنف عمل، 79
 شروڈنگر
 غیر تاج وقت، 27
 شروڈنگر مساوات، 2
 شروڈنگر نقطہ نظر، 136
 شریک عمل، 102
 شماریاتی مفہوم، 2
 شوارز عدم مساوات، 99
 طاق، 33
 طول موج، 18
 طیف، 104
 طیفی تحلیل، 130
 عامل، 17
 تحلیل، 128
 تقلیل، 45
 رفعت، 45
 عدم تعین، 2
 عدم یقینیت
 توانائی و وقت، 119
 عدم یقینیت اصول، 19
 عقدہ، 34
 علیحدگی متغیرات، 25
 عودی، 100، 34
 معیاری، 34
 غیر مسلسل، 105
 فہرست
 ترکیب، 53

- ہارمونئی
 ہارمونئی، 32
 ہر مشی، 101
 جوڑی دار، 48، 102
 خلاف، 130
 منحرف، 130
 ہلبرٹ فنکشن، 99
 ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
 ہیملٹنی، 27
 یک طاقتی، 129
- سر قش
 ہارمونئی، 32
 مسئلہ
 اجر نقش، 18
 پلانشرال، 62
 ڈرشلے، 35
 مسئلہ وریل، 132
 معمول زنی، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 16
 معیار حرکتی فنکشن عمل موج، 113
 معیار عمودی، 34
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100
 مقلوب، 43
 مقلبت
 باضابطہ رشتہ، 44
 مقلوب، 43
 مکمل، 34، 100
 منہدم، 4، 111
 موج
 آمدی، 76
 ترسیلی، 76
 منعکس، 76
 موجی اکٹھ، 61
 میون نیوٹرینو، 127
 واپسی نقطہ، 69
 وسطانیہ، 7