کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کیے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۸

ونزل و کرامرز و برلوان تخمین

ونزل، کرامرز، برلوان ترکیب سے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر کی یک بُعدی تخمینی حل حاصل کیے جا سکتے ہیں اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفرقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شروڈنگر کی رداسی حصے پر کیا جا سکتا ہے۔ یہ بالخصوص مکید حال توانائیوں اور مخفیہ رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں مفید ثابت ہوتا ہے۔ اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ای کذرہ جس کی توانائی E ہو ایک ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ $V(x)$ ایک مستقل ہو۔ تفاعل موج $E > V$ کی صورت میں درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \qquad k \equiv \sqrt{2m(E-V)}/\hbar \text{ جہاں}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لیے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لیے منفی علامت استعمال ہو گا یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے جس کا طولِ موج $\lambda = 2\pi/k$ اٹل ہے اور اس کا حیطہ A غیر تغیر ہے۔ اب فرض کریں کہ $V(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ λ کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہے تاکہ کئی مکمل طول امواج پر مخفیہ کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ψ عملاً سائن نما ہو گا تاہم اس کا طولِ موج اور حیطہ x کے ساتھ ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی بنیاد ہے۔ درحقیقت یہ x پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے تیز ارتعاشات جنہیں طولِ موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی ترمیم کرتا ہو۔

اسی طرح $E < V$ جہاں V ایک مستقل ہے کی صورت میں ψ قوت نمائی ہو گا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm\kappa x}, \qquad \kappa \equiv \sqrt{2m(V-E)}/\hbar \text{ جہاں}$$

اور اگر $V(x)$ ایک مستقل نہ ہو بلکہ $1/\kappa$ کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو تب حل عملاً قوت نمائی ہوں گے البتہ A اور κ اب x کے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتے تفاعلات ہوں گے۔ یہ نظریہ کلاسیکی نقطہ واپسی جہاں

$V \approx E$ ہو کی قریبی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہو گا چونکہ یہاں λ یا $1/\kappa$ لامتناہی تک بڑھتا ہے اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ $V(x)$ آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے اس تخمین میں نقاط واپسی سے نمٹنا دشوار ترین ہو گا اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \tag{۸.۱}$$

جہاں

$$p(x)\equiv\sqrt{2m[E-V(x)]} \tag{۸.۲}$$

اس ذرے کے معیارِ حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے جس کی کل توانائی E اور مخفی توانائی $V(x)$ ہو۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ $E > V(x)$ ہے لحاظہ $V(x)$ حقیقی ہو گا اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں کلاسیکی طور پر ذرہ x کے ساتھ پر رہنے کا پابند ہو گا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر ψ ایک مخلوط تفاعل ہو گا جس کو حیطہ $A(x)$ اور حیطہ $\phi(x)$ جہاں دونوں حقیقی ہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x)=A(x)e^{i\phi(x)} \tag{۸.۳}$$

ہم x کے لحاظ سے تفرق کو قوت نمائی میں چھوٹی لکیر سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں

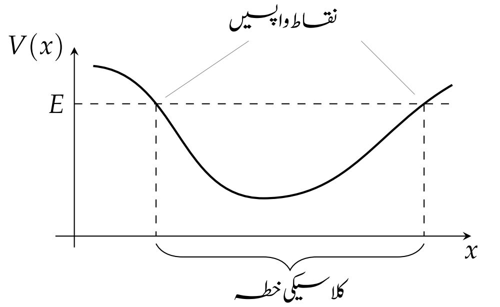
$$\frac{d\psi}{dx}=(A'+iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=[A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2]e^{i\phi} \tag{۸.۴}$$

اس کو مساوات 8.1 میں پُر کرتے ہیں

$$A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A \tag{۸.۵}$$



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خطہ میں مقید ہو گا جہاں $E \geq V(x)$ ہو۔

دونوں ہاتھ کی حقیقی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات حاصل ہو گی جبکہ دونوں ہاتھ کے خیالی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسرا حقیقی مساوات حاصل ہو گا

$$A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A, \qquad \text{یا} \qquad A'' = A\left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}\right] \tag{۸.۶}$$

اور

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0, \qquad \text{یا} \qquad \left(A^2\phi'\right)' = 0 \tag{۸.۷}$$

مساوات 8.6 اور 8.7 ہر لحاظ سے اصل مساوات شروڈنگر کے معادل ہیں ان میں سے دوسرے کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے

$$A^2\phi' = C^2, \qquad \text{یا} \qquad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}} \tag{۸.۸}$$

جہاں C ایک حقیقی مستقل ہو گا۔ ان میں سے پہلی مساوات 8.6 کو عموماً حل کرنا ممکن نہیں ہو گا یہی ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ حیطہ A بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے لحاظہ جزو A'' قابلِ نظر انداز ہو گا۔ بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(\phi')^2$ اور $p^2/\hbar^2$ دونوں سے A''/A بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم مساوات 8.6 کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}, \qquad \text{یا} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{p}{\hbar}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\phi(x) = \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{۸.۹}$$

میں فل حال اسکو ایک غیر قطعی تکمل لکھتا ہوں کسی بھی مستقل کو C میں زن کیا جا سکتا ہے جس کے تحت یہ مخلوط ہو سکتا ہے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) \, \mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۰}$$

اور تخمینی عمومی حل انکا خطی جوڑ ہوگا جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$\left|\psi(x)\right|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)} \tag{۸.۱۱}$$

جس کے تحت نقطہ x پر ذرہ پایا جانے کا احتمال اس نقطہ پر ذرے کے کلاسیکی معیارِ حرکت لحاظ سمتی رفتار کا بالعکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں چونکہ جس مکام پر ذرہ کی رفتار تیز ہو وہاں اسے پانے کا احتمال کم سے کم ہوگا۔ در حقیقت بعض اوقات تفرقی مساوات میں جزو A'' کو نظر انداز کرنے کی بجائے اس نیم کلاسیکی مشاہدہ سے آغاز کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ مواخر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے لیکن اوّل الذکر بہتر عقلی وجہ پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: **دو انتصابی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔** فرض کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ غیر ہموار ہو (شکل ۸.۲)۔

$$V(x) = \begin{cases} \text{کچھ مخصوص تفاعل}, & 0 < x < a \text{ اگر}, \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۱۲}$$

کنویں کے اندر ہر جگہ $E > V(x)$ فرض کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

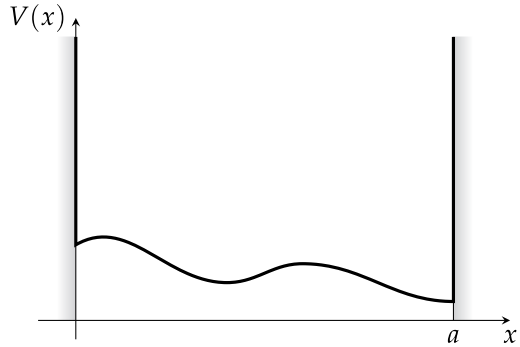
$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}\right]$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin\phi(x) + C_2 \cos\phi(x)] \tag{۸.۱۳}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') \, \mathrm{d}x' \tag{۸.۱۴}$$



شکل ۸.۲: ایسا لامتناہی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں ہم تکمل کی زیریں حد اپنی مرضی کا منتخب کر سکتے ہیں یہاں یہی کیا گیا۔ اب $x = 0$ پر $\psi(x)$ لازماً صفر ہو گا لحاظہ چونکہ $\psi(0) = 0$ ہے $C_2 = 0$ ہو گا۔ ساتھ ہی $x = a$ پر بھی $\psi(x)$ صفر ہو گا لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\phi(a) = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{۸.۱۵}$$

ماخوذ

$$\boxed{\int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar} \tag{۸.۱۶}$$

کوانٹازنی کی درج بالا شرط تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے۔

مثلاً اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو $V(x) = 0$ تب $p(x) = \sqrt{2mE}$ ایک مستقل ہو گا اور مساوات 8.16 کے تحت $pa = n\pi\hbar$ یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

جو لامتناہی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرانا کلیہ ہے مساوات 2.27۔ یہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ہمیں بلکل ٹھیک ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے چونکہ اصل تفاعل موج کا حیطہ مستقل ہے لحاظہ A'' کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا۔ □

سوال ۸.۱: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی اجزاتی توانائیاں E_n تلاش

کریں جس کی آدھی تہہ میں V_0 بلندی کی سیڑھی پائی جاتی ہو شکل 6.3

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \text{ اگر} \\ 0, & a/2 < x < a \text{ اگر} \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو V_0 اور $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$ کی صورت میں لکھیں جہاں بغیر سیڑھی لامتناہی چوکور کنویں کے n ویں اجازتی توانائی E_n^0 ہے۔ فرض کریں $E_1^0 > V_0$ تاہم یہ فرض نہ کریں کہ $E_n \gg V_0$ ہو گا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال 6.1 میں رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹی V_0 جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہو گا یا بہت بڑی n جہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کارآمد ہو گی کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل، کرامرز، برلوان کلیہ مساوات 8.10 کو $\hbar$ کی طاقتی توسیع سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ آزاد ذرہ کی تفاعل موج $\psi = A\exp(\pm ipx/\hbar)$ سے حوصلہ افزائی حاصل کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں $f(x)$ کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ دیہان رہے کہ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے لحاظہ ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے۔

(الف) اس کو مساوات 8.1 روپ کی مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $\hbar$ کی طاقتی تسلسل کی صورت

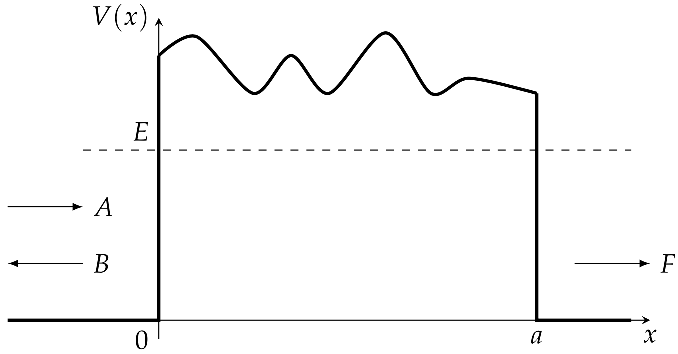
$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر $\hbar$ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

(ج) انہیں $f_0(x)$ اور $f_1(x)$ کے لیے حل کر کے دکھائیں کہ $\hbar$ کی اوّل رتبہ تک آپ مساوات 8.10 دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عددی کی لوگ دم کی تعریف $\ln(-z) = \ln(z) + in\pi$ ہے جہاں n ایک طاق عدد صحیح ہو گا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں تب دونوں اطراف کو قوت نما میں منتقل کر کے دیکھیں۔



شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کے مستطیلی رکاوٹ سے بکھراو۔

۸.۲ سرنگزنی

اب تک میں $E > V$ فرض کرتا رہا ہوں لحاظہ $V(x)$ حقیقی تھا۔ میں غیر کلاسیکی خطہ $E < V$ کے لیئے بھی بلکل اسے طرح مطابقتی نتیجہ لکھ سکتا ہوں جو عین مساوات 8.10 ہوگا تاہم اب $p(x)$ تخیلی ہوگا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm\frac{1}{\hbar}\int |p(x)|\,\mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۷}$$

ایک مثال کے طور پر ایک مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموارہ (شکل ۸.۳) سے بکھراو کا مسئلہ پر غور کریں۔ درکاوٹ کے بائیں جانب $x < 0$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \tag{۸.۱۸}$$

جہاں A آمدی حیطہ اور B منعکس حیطہ ہے جبکہ $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے حصہ 2.5 دیکھیں۔ دکاوٹ کے دائیں جانب $x > a$

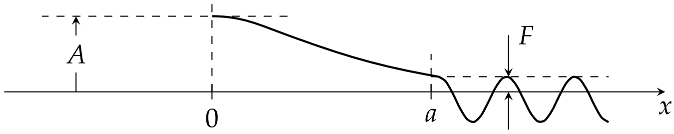
$$\psi(x) = Fe^{ikx}; \tag{۸.۱۹}$$

F ترسیلی حیطہ جبکہ ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \tag{۸.۲۰}$$

سرنگزنی خطہ $0 \leq x \leq a$ میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درج ذیل دیگی

$$\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,\mathrm{d}x'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,\mathrm{d}x'}. \tag{۸.۲۱}$$



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بکھراو کے تفاعل موج کی کیفی ساخت۔

اگر رکاوٹ بہت بلند یا اور بہت چوڑا ہو یعنی جب سرنگزنی کا احتمال بہت کم ہو قوت نمائی بڑھتے جزو کا عددی سر C لازماً چھوٹا ہو گا در حقیقت لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہو گا اور تفاعل موج کچھ شکل ۸.۴ کے نقش پر ہو گی۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوتِ نمائی میں کل کمی

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'}.$$

آمدی اور ترسیلی امواج کے اظافی حیطے تعین کرتا ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\boxed{T \cong e^{-2\gamma}, \text{جہاں}\ \gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x)\right| \mathrm{d}x}. \tag{۸.۲۲}$$

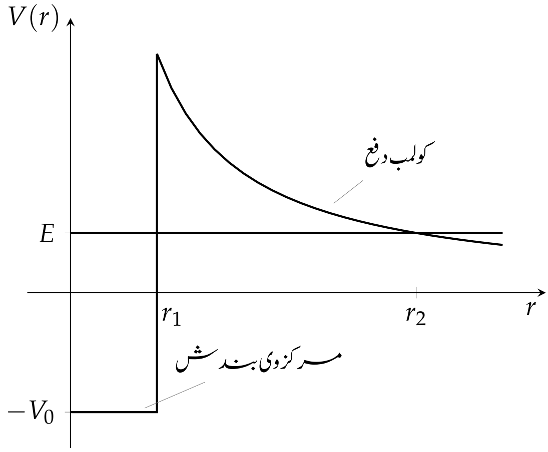
مثال ۸.۲: **ایلفا تحلیل کا نظریہ گامو۔** سن 1928 میں جارج گامو نے مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے ایلفا تحلیل کی پہلی کامیاب وجہ پیش کی ایلفا تحلیل سے مراد چند مخصوص تابکار مرکزہ سے ایلفا ذرہ جو دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے کا اخراج ہے۔ چونکہ ایلفا ذرہ مثبت بار $2e$ کا حامل ہے لحاظہ جیسے ہی یہ مرکزہ سے اتنا دور ہو جاتا ہے کہ یہ مرکزی بندشی قوت سے فرار کر سکے مرکزہ کے باقی حصہ کا بار Ze اس کو برقی قوتِ دفع سے دور جانے پر مجبور کرے گا۔ تاہم اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہو گا جو یورینیم کی صورت میں خارجی ایلفا ذرہ کی توانائی سے دوگنے سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر شکل ۸.۵ کے مخفیہ سے ظاہر کیا جس نے مرکزہ کے رداس r_1 وصت تک مرکزی قوتِ کشش کو متناہی چوکور کنواں سے ظاہر کیا گیا جس کو کولومب قوتِ دفع کی دم کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ گامو نے کوانٹائی سرنگزنی کو ایلفا ذرہ کی فرار کی وجہ کرار دیا یوں پہلی بار کوانٹائی میکانیات کا اطلاق مرکزوی طبعیات پر کیا گیا۔

اگر خارجی ایلفا ذرے کی توانائی E ہو تب بیرونی واپسی نقطہ r_2 درج ذیل تعین کرے گا

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r_2} = E. \tag{۸.۲۳}$$

ظاہر ہے مساوات 8.22 میں قوت نما γ درج ذیل ہو گا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} - E\right)}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\frac{r_2}{r} - 1}\,\mathrm{d}r.$$



شکل ۸.۵: تابکار مرکزی میں الفاذرہ کی مخفی توانائی کا گامو نمونہ۔

اس تکمل میں $r \equiv r_2 \sin^2 u$ پُر کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[r_2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)}\right]. \tag{۸.۲۴}$$

عام طور پر $r_2 \gg r_1$ ہو گا لحاظہ ہم چھوٹے زاویوں کے تخمین $\sin\epsilon \cong \epsilon$ استعمال کرکے نتیجہ کی سادہ روپ حاصل کرتے ہیں

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[\frac{\pi}{2}r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\right] = K_1\frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}. \tag{۸.۲۵}$$

جہاں

$$K_1 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980\,\mathrm{MeV}^{1/2}, \tag{۸.۲۶}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$K_2 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/2}\frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485\,\mathrm{fm}^{-1/2}. \tag{۸.۲۷}$$

ایک عمومی مرکزہ کی جسامت تقریباً ایک $\mathrm{fm}\ 10^{-15}\,\mathrm{m}$ ہوتی ہے۔

اگر ہم مرکزہ کے اندر ایلفا ذرہ کو محسور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار v ہے تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً $2r_1/v$ ہوگا لحاظہ تصادم کا تعدد $v/2r_1$ ہوگا۔ ہر تصادم پر فرار ہونے کا احتمال $e^{-2\gamma}$ ہے لحاظہ اکائی وقت میں اخراج کا احتمال $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$ ہوگا اور یوں ولدہ مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا

$$\tau = \frac{2r_1}{v}e^{2\gamma}. \tag{۸.۲۸}$$

بد قسمتی سے ہم v نہیں جانتے ہیں لیکن اس سے زیادہ فرق نہیں پڑتا ہے چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوتِ نمائی جزِ ضربی پچیس رتبی مقدار تک تبدیل ہوتا ہے جس کے سامنے v کی تبدیلی قابلِ نظر انداز ہے۔ بالخصوص عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو $1/\sqrt{E}$ کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط شکل 8.6 حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 8.25 اور 8.28 کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک متناہی چوکور رکاوٹ جس کی انچائی $V_0 > E$ اور چوڑائی $2a$ ہو سے ایک ایسا ذرہ جس کی توانائی E ہو کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ بلکل ٹھیک نتیجہ سوال 2.33 کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۴: مساوات 8.25 اور 8.28 استعمال کرتے ہوئے U^{238} اور Po^{212} کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً مستقل ہوتی ہے لحاظہ $(r_1)^3$ اور A پروٹان اور نیوٹرانوں کی تعدادوں کا مجموعہ تقریباً برابر ہوں گے۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے

$$r_1 \cong (1.07\,\text{fm})A^{1/3}. \tag{۸.۲۹}$$

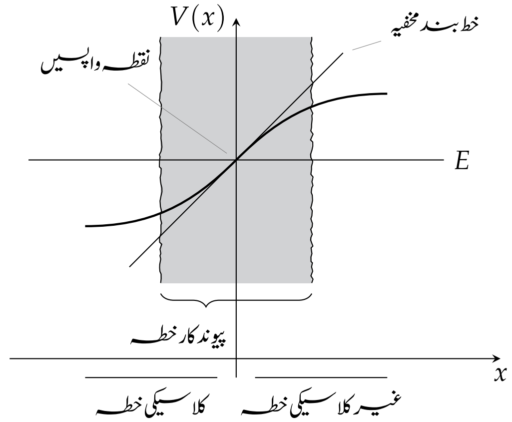
خارج شدہ ایلفا ذرہ کی توانائی کلیہ آئنسٹائن $E = mc^2$ سے اخذ کیا جا سکتا ہے

$$E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2. \tag{۸.۳۰}$$

جہاں m_p ولدہ مرکزہ کی کمیت m_d بیٹی مرکزہ کی کمیت اور m_α ایلفا ذرہ یعنی He^4 مرکزہ کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مرکزہ کیا ہوگا یاد رکھیں کہ ایلفا ذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لیکر فرار ہوتا ہے لحاظہ Z سے دو منفی کریں اور A سے چار منفی کریں گے۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی انصر تعین کریں۔ سمتی رفتار v کی اندازاً قیمت $E = (1/2)m_\alpha v^2$ سے حاصل کریں یہ مرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتا ہے لحاظہ v کی قیمت اصل سے زیادہ دیگا تاہم اس مرحلہ پر ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی اناصر کی تجربہ سے حاصل عرصہ حیات بالترتیب 6×10^9 سال اور 0.5 µs ہے۔

۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و فکر میں میں فرض کرتا رہا کہ مخفی کنواں یا رکاوٹ کی دیواریں انتصابی تھیں جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ در حقیقت ہمارے بنیادی نتائج مساوات 8.16 اور 8.22



شکل ۸.۶: دائیں ہاتھ نقطہ واپسی کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

اس صورت بھی کافی حد تک درست ہوں گے جب کناروں کی ڈھلان اتنی زیادہ نہ ہو یقیناً نظریہ گامو میں ایسی ہی صورت پر انکا اطلاق کیا گیا۔ بہر حال ہم نقطہ واپسی $E = V$ جہاں کلاسیکی اور غیر کلاسیکی خطے ایک دوسرے کے ساتھ جڑتے ہیں اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ناقابلِ استعمال ہوتی ہے پر تفاعل موج کا قریبی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مکید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) کو دیکھتا ہوں، آپ مسئلہ بکھراو (سوال 8.10) حل کر سکتے ہیں۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم محور کو یوں رکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپسی $x = 0$ پر واقع ہو (شکل ۸.۶)۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین میں درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Be^{\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & \text{اگر}\ x < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} De^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x \left|p(x')\right|\,\mathrm{d}x'}, & \text{اگر}\ x > 0. \end{cases} \tag{۸.۳۱}$$

یہ فرض کرتے ہوئے تمام $x > 0$ E سے $V(x)$ بڑا ہو گا ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمائی کو خارج کر سکتے ہیں چونکہ $x \to \infty$ کرنے سے یہ بے قابو بڑھتا ہے۔ ہمارا کام ان دو حالوں کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے تاہم یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا پیش آتا ہے۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نے نقطہ واپسی جہاں $p(x) \to 0$ ہو گا ψ کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تفاعل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا ہے اور جیسا کہ ہمارا گمان تھا ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نقطہ واپسی کی پڑوس میں ناقابلِ استعمال ہوتا ہے لیکن اجازتی توانائیوں کو نکات واپسی پر سرحدی شرائط تعین کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا پیوند کار تفاعل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپسی کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تفاعل موج ψ_p صرف مبدہ کی پڑوس میں چاہیئے لہٰذا ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر

$$V(x) \cong E + V'(0)x, \tag{۸.۳۲}$$

سے تخمین کر کے اس خطی V کے لیئے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x]\psi_p = E\psi_p,$$

یا

$$\frac{d^2\psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x\psi_p, \tag{۸.۳۳}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2}V'(0)\right]^{1/3}. \tag{۸.۳۴}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان α کو غیر تابع متغیر میں زن کر سکتے ہیں

$$z \equiv \alpha x, \tag{۸.۳۵}$$

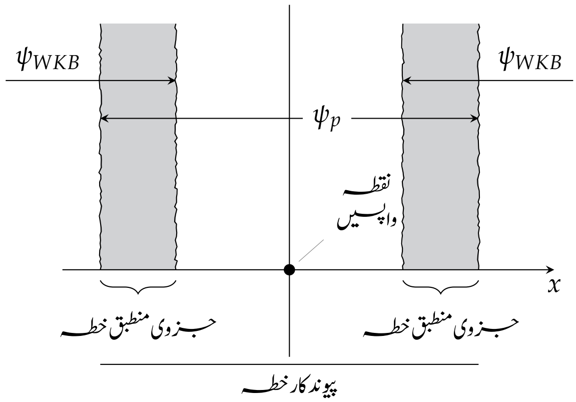
لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\frac{d^2\psi_p}{dz^2} = z\psi_p. \tag{۸.۳۶}$$

یہ مساوات ایری ہے جس کے حل تفاعلات ایر کہلاتے ہیں چونکہ مساوات ایری دو رتبی تفرقی مساوات ہیں لہٰذا دو خطی غیر تابع ایری تفاعلات $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ پائے جاتے ہیں۔ ان کا تعلق

جدول ۸.۱: ایری تفاعلات کے چند خواص

تفرقی مساوات:	$\frac{d^2y}{dz^2} = zy$
حل:	ایری تفاعلات کے خطی مجموعہ $Ai(z)$ اور $Bi(z)$
تکملی روپ:	$Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$ $Bi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{s^3}{3}+s} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right)\right] ds$



شکل ۸.۷: پیوندکار خطہ اور دو منطبق خطے۔

رتبہ $1/3$ کے بیسل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیئے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوندکار تفاعل موج $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ کا خطی جوڑ

$$\psi_p(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x). \tag{۸.۳۷}$$

ہوگا۔ جہاں a اور b مناسب مستقلات ہیں۔

اب ψ_p مبدہ کی پڑوس میں تخمینی تفاعل موج ہے ہم نے مبدہ کے دونوں اطراف قریبی مشترکہ خطہ میں ψ_p کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کے ساتھ ہم پلو بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ دونوں اطراف کے مشترک خطے نقطہ واپسی کے اتنی قریب ہیں کہ خطی مخفیہ ψ_p کافی حد تک درست ہوگا لحاظہ ψ_p اصل تفاعل موج کا بہترین تخمین ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی فاصلہ پر ہیں کہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جا سکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کارآمد ہوگا لحاظہ مساوات 8.34 کی لاتمیت میں درج ذیل ہوگا

$$p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}. \tag{۸.۳۸}$$

بالخصوص مشترکہ خطہ دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x \left|p(x')\right| \mathrm{d}x' \cong \hbar\alpha^{3/2}\int_0^x \sqrt{x'}\,\mathrm{d}x' = \frac{2}{3}\hbar(\alpha x)^{3/2},$$

لحاظہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۳۹}$$

بڑی z کی صورت میں ایری تفاعلات کی متقاربی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خطہ دو میں پیوند کار تفعال موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۴۰}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \qquad \text{اور} \qquad b = 0. \tag{۸.۴۱}$$

ہم یہی کچھ مشترکہ خطہ ایک کے لیئے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 ہمیں $p(x)$ دیگا تاہم اس بار x منفی ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x' \cong \frac{2}{3}\hbar(-\alpha x)^{3/2} \tag{۸.۴۲}$$

اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}} \left[B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \tag{۸.۴۳}$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی z کے لیئے ایری تفاعل کی متقارب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں $b = 0$ لیا گیا ہو درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}}} \right]. \end{aligned} \tag{۸.۴۴}$$

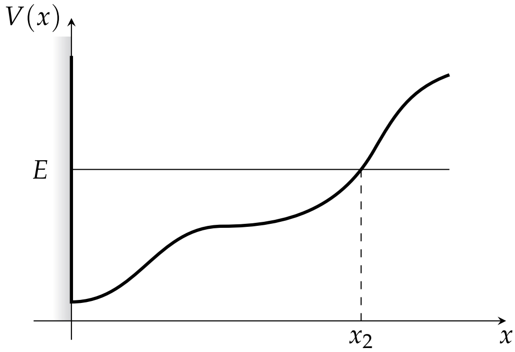
مشترکہ خطہ ایک میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \qquad \text{اور} \qquad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

جس میں a کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$B = -ie^{i\pi/4} D, \qquad \text{اور} \qquad C = ie^{-i\pi/4} D. \tag{۸.۴۵}$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش



شکل ۸.۸: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولزنی مستقل D کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبدہ سے اختیاری نقطہ x_2 منتقل کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & x < x_2 \text{اگر}; \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} |p(x')|\,\mathrm{d}x'\right], & x > x_2 \text{اگر}. \end{cases} \tag{۸.۴۶}$$

مثال ۸.۳: **ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔** فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی $x = 0$ پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں $\psi(0) = 0$ ہو گا لحاظہ مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} = n\pi, \qquad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یا درج ذیل ہو گا۔

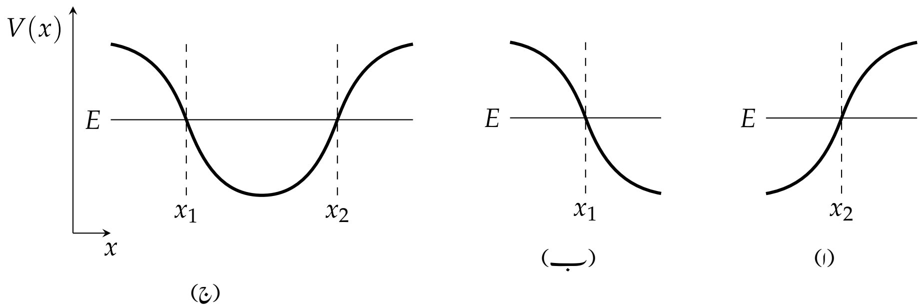
$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar \tag{۸.۴۷}$$

مثلاً نصف ہارمونی مرتعش

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x > 0 \text{اگر}, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۴۸}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2x^2]} = m\omega\sqrt{x_2^2 - x^2}.$$



شکل ۸.۹: بالائی جانب ڈھلوان اور نیچے جانب ڈھلون نقطہ واپسی۔

ہوگا۔ جہاں درج ذیل نوطہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

لحاظہ

$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹازنی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right)\hbar\omega. \tag{۸.۴۹}$$

اس مخصوص صورت میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین در حقیقت ٹھیک ٹھیک احبازتی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □

مثال ۸.۴: **بغیر انتصابی دیواروں کا مخفیہ کنواں۔** اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-ا) ہوتی ہے مساوات 8.46 ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی (شکل ۸.۹-ب) پر انہی وجوہات کو بروہ کارلاتے ہوئے درج ذیل ہوگا سوال 8.9

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1} \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'\right], & x < x_1 \text{اگر}; \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & x > x_1 \text{اگر}. \end{cases} \tag{۸.۵۰}$$

بالخصوص مخفیہ کنویں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ $(x_1 < x < x_2)$ میں تفاعل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\theta_2(x), \qquad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4},$$ جہاں

لکھا جا سکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin\theta_1(x), \qquad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50۔ ظاہر ہے کہ $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ جہاں}} \tag{۸.۵۱}$$

یہ کوانٹازنی شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنویں کی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے دیہان رہے دو انتصابی دیواروں کے لیئے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتصابی دیوار کے لیئے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اُس عدد ($0, 1/4$ یا $1/2$) کا فرق ہے جو n سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین بڑی n کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لحاظہ یہ فرق صرف دیکھاوے کی حد تک ہے بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر کیئے بغیر ایک سادہ تکمل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینی اجازتی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔ تفاعل موج خود کہیں نہیں نظر آتا ہے۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل لچک کے ساتھ اُچھلتا ہوا کمیت m کی گیند کے کلاسیکی مسئلے کا مماثل کوانٹائی میکانی مسئلے پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہو گی اس کو زمین سے بلندی x تفاعل لکھیں؟ منفی x کی صورت میں مخفیہ لامتناہی ہو گا چونکہ گیند وہاں کبھی نہیں جا سکتا۔

(ب) اس مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ایری تفاعل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی z کے لیئے $Bi(z)$ بے قابو بڑھتا ہے لحاظہ اس کو رد کرنا ہو گا۔ تفاعل $\psi(x)$ کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ اور $m = 0.100\,\mathrm{kg}$ لیکر حاصل کریں۔

(د) اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی eV میں کتنی ہو گی؟ اوسطاً یہ الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اشارہ: مسئلہ ویریل سے $\langle x \rangle$ تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی تھپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

(الف) اجازتی توانائیاں E_n کو m, g اور $\hbar$ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5(ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بلکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کوانٹائی عدد n کتنا بڑا ہونا ہو گا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جس کی زاویائی تعدد ω ہو کی n ویں ساکن حال میں کمیت m کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی x_2 تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی (d) تک پہنچنا ہو گا کہ خطی مخفیہ مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی x_2 ہو خلل 1% تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2+d)-V_{lin}(x_2+d)}{V(x_2)}=0.01,$$

تب d کیا ہو گا؟

(ج) جب تک $5 \geq z$ ہو $Ai(z)$ کا متقارب روپ 1% تک درست ہو گا۔ جزو (ب) میں حاصل کردہ d کے لیئے n کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تا کہ $\alpha d \geq 5$ ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی n کے لیئے ایسا مستر کہ خطہ موجود ہو گا جس میں خطی مخفیہ 1% تک کارآمد ہو گا اور بڑی z روپ کا ایری تفاعل بھی 1% تک درست ہو گا۔

سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ واپسی کے لیئے پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات 8.50 صفر کی تصدیق کریں۔

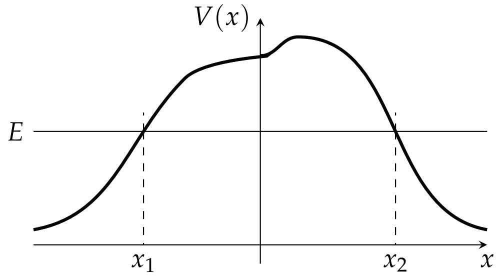
سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۰) سے بکھراو کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج لکھ کر آغاز کریں۔

$$\psi(x)\cong\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Ae^{\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}p(x')\,\mathrm{d}x'}+Be^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x<x_1);\\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}\left[Ce^{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}+De^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}\right], & (x_1<x<x_2);\\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Fe^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_2}^{x}p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x>x_2).\end{cases} \tag{۸.۵۲}$$

مستقل C کو صفر تصور نہ کریں۔ سرنگزنی احتمال $T=|F|^2/|A|^2$ کا حساب کر کے دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہو گا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ

$$V(x)=\alpha|x|^{\nu},$$



شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

جہاں v ایک مثبت عدد ہے کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو $v = 2$ جانچیں۔ جواب:

$$E_n = \alpha\left[(n-1/2)\hbar\sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v}+1\right)}\right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)} \tag{۸.۵۳}$$

سوال ۸.۱۲: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کر کے سوال 2.51 کی مخفیہ کے لیے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجے کا ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $-[(9/8)-(1/\sqrt{2})]\hbar^2a^2/m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشاکلی مخفیہ کے لیے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو $l = 0$ کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا

$$\int_0^{r_0} p(r)\,\mathrm{d}r = (n-1/4)\pi\hbar, \tag{۸.۵۴}$$

جہاں r_0 نقطہ واپسی ہے یعنی ہم $r = 0$ کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگردمی مخفیہ

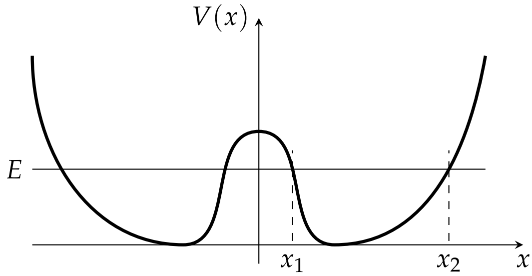
$$V(r) = V_0\ln(r/a)$$

کی اجازتی توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں جہاں V_0 اور a مستقلات ہیں۔ صرف $l = 0$ کی صورت پر غور کریں دیکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کمیت پر نہیں ہوگا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1}-E_n = V_0\ln\left(\frac{n+3/4}{n-1/4}\right).$$

سوال ۸.۱۴: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی درج ذیل روپ

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r)\,\mathrm{d}r = (n-1/2)\pi\hbar \tag{۸.۵۵}$$



شکل ۸.۱۱: تشاکلی دوہرا کنواں؛ سوال 15.8۔

استعمال کر کے ہائڈروجن کی مکید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ معصر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز جزو شامل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل تکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2. \tag{۸.۵۶}$$

آپ دیکھیں گے کہ $n \gg l$ اور $n \gg 1/2$ کی صورت میں آپ کو بوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$E_{nl} \cong \frac{-13.6\,\mathrm{eV}}{[n-(1/2)+\sqrt{l(l+1)}]^2}. \tag{۸.۵۷}$$

سوال ۸.۱۵: تشاکلی دوہرا کنویں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم $E < V(0)$ والی مکید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خطہ (i) $x > x_2$، (ii) $x_1 < x < x_2$ اور (iii) $0 < x < x_1$ کے لیے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج لکھیں۔ نقطہ x_1 اور x_2 پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں x_2 کے لیے ایسا کیا گیا ہے آپ کو x_1 کے لیے کرنا ہو گا درج ذیل دیکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x}\left|p(x')\right|\mathrm{d}x'\right], & (i)\\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}}\sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2}p(x')\,\mathrm{d}x'+\frac{\pi}{4}\right], & (ii)\\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\left[2\cos\theta e^{\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}\left|p(x')\right|\mathrm{d}x'}+\sin\theta e^{-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}\left|p(x')\right|\mathrm{d}x'}\right], & (iii)\end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\theta \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{۸.۵۸}$$

(ب) چونکہ $V(x)$ تشاکلی ہے لحاظہ ہمیں صرف جفت $(+)$ اور طاق $(-)$ تفاعلات موج پر غور کرنا ہو گا۔ اوّل الذکر صورت میں $\psi'(0) = 0$ ہو گا جبکہ مؤخر الذکر صورت میں $\psi(0) = 0$ ہو گا۔ دیکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹازنی شرط حاصل ہوتی ہے

$$\tan\theta = \pm 2e^{\phi}. \tag{۸.۵۹}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\phi \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{-x_1}^{x_1} \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'. \tag{۸.۶۰}$$

مساوات 8.59 تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ x_1 اور x_2 میں E کی قیمت داخل ہوتی ہے لحاظہ θ اور ϕ دونوں E کے تفاعلات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلند یا/اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں ϕ بڑا ہو گا لحاظہ e^{ϕ} انتہائی بڑا ہو گا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.59 کے تحت θ کی قیمتیں π کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ جہاں $|\epsilon| \ll 1$ ہے لکھ کر دیکھائیں کہ کوانٹازنی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp \frac{1}{2}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۱}$$

(د) فرض کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکافی ہے

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2, & x < 0, \text{ اگر} \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2, & x > 0, \text{ اگر} \end{cases} \tag{۸.۶۲}$$

اس مخفیہ کو ترسیم کر کے θ مساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دیکھائیں

$$E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۳}$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ ناقابلِ گزر ہو $\phi \to \infty$ تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ دوہری انحطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنویں میں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ متناہی رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنوں کے بیچ رابطہ ممکن ہو گا لحاظہ انحطاط ختم ہو گا۔ جفت حالات (ψ_n^+) کی توانائی معمولی کم اور طاق تفاعلات (ψ_n^-) کی توانائی معمولی زیادہ ہو گی۔

(و) فرض کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیاں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دیکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنویں سے دوسرہ اور دوسرے سے واپس پہلا کنویں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$\tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}. \tag{۸.۶۴}$$

(ه) متغیر ϕ کی قیمت جزو (د) میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لیئے تلاش کریں اور دیکھائیں جب $E \ll V(0)$ ہو تب $\phi \sim m\omega a^2/\hbar$ ہو گا۔

سوال ۸.۱۶: **سٹارک اثر میں سرنگزنی۔** بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جوہر سے سرنگزنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربہ میں ایسا ہو گا؟ ہم ایک سادہ ترین یک بُعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری متناہی چوکور کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنویں کی تہہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہو گی یہاں فرض کریں $V_0 \gg \hbar^2/ma^2$ ہے۔ اشارہ: یہ $2a$ چوڑائی کی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب $H' = -\alpha x$ متعارف کریں بیرونی برقی میدان $E = -E_{ext}\boldsymbol{i}$ میں $\alpha = eE_{ext}$ ہو گا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے $(\alpha a \ll \hbar^2/ma^2)$۔ کل مخفیہ کا خاکہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت x رخ سرنگزنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگزنی جز ضرب γ مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو فرار ہونے کے لیئے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب: $\gamma = \sqrt{8mV_0^3}/3\alpha\hbar, \tau = (8ma^2/\pi\hbar)e^{2\gamma}$۔

(د) معقول اعداد $V_0 = 20\,\text{eV}$ بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت $a = 10^{-10}\,\text{m}$ عمومی جوہر کا رداس $E_{\text{بیرونی}} = 7 \times 10^6\,\text{V/m}$ تجربہ گاہ میں مضبوط میدان e اور m الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ τ کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کوانٹائی سرنگزنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود بخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت m رداس R اور قد h کا نلکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی مکام $(h/2)$ سے بلندی کو x سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی mgx ہو گی اور بوتل اُس صورت گرے گی جب x کی قیمت فاصل قیمت $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$ تک پہنچے۔ سرنگزنی احتمال مساوات 8.22 کو $E = 0$ کے لیئے حاصل کریں۔ حراری توانائی $((1/2)mv^2 = (1/2)k_BT)$ لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

جوابات