کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۱

بکھراو

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو

فرض کریں کسی مرکز بکھراو پر ایک ذرے کی آمد ہوتی ہے (مثلاً، پروٹان ایک بھاری مرکزہ پر داغا جاتا ہے)۔ یہ توانائی E اور **ٹکراو مقدار معلوم**[۱] b کے ساتھ آکر، **زاویہ بکھراو**[۲] θ پر اُبھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ (میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسّمتی تشاکلی ہے، یوں خط حرکت[۳] مستوی میں پایا جائے گا، اور ساتھ ہی فرض کرتا ہوں کہ نشانہ بھاری ہے، لہٰذا تصادم کی بنا پر اس کی اچھال نظر انداز کی جا سکتی ہے۔) کلاسیکی نظریہ بکھراو کا بنیادی مسئلہ یہ ہو گا: ٹکراو مقدار معلوم جانتے ہوئے، زاویہ بکھراو کا حساب کریں۔ یقیناً، عام طور پر، ٹکراو مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو، زاویہ بکھراو اتنا بڑا ہو گا۔

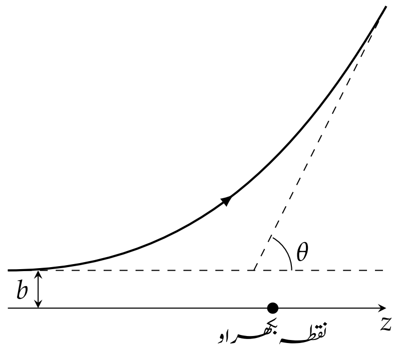
مثال ۱۱.۱: **سخت کرہ بکھراو۔** فرض کریں رداس R کا ایک سخت بھاری گیند ہدف، جبکہ ہوائی بندوق کا چھرا (جس کو ہم نقطی تصور کرتے ہیں) آمدی ذرہ ہے، جو لچکیلا ٹپا کھا کر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراو مقدار معلوم $b = R\sin\alpha$ اور زاویہ بکھراو $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۱}$$

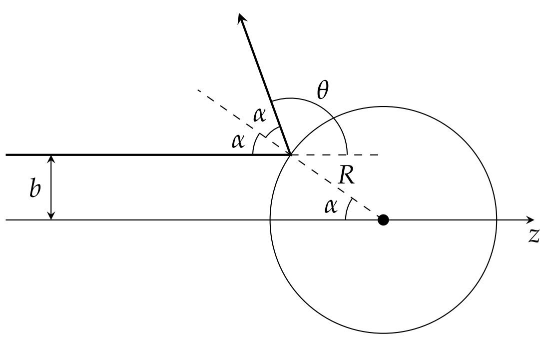
ظاہراً درج ذیل ہو گا۔

---

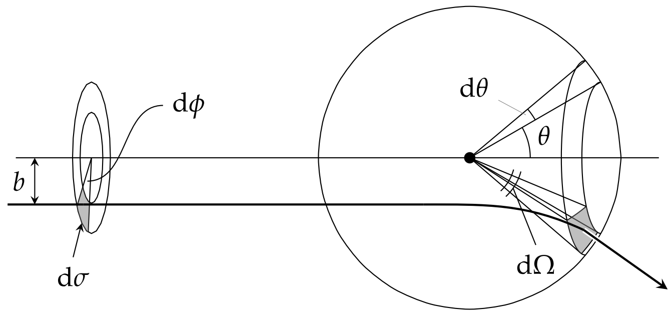
[۱] impact parameter
[۲] scattering angle
[۳] trajectory



شکل ۱.۱۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراو، جس میں ٹکراو مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراو θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۲.۱۱: سخت کرہ سے لچکدار بکھراو۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ $d\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

$$\theta = \begin{cases} 2\cos^{-1}(b/R), & b \le R \\ 0, & b \ge R \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

$\square$

عمومی طور پر، لامتناہی چھوٹے قطعہ، جس کا رقبہ عمودی تراش $d\sigma$ ہو، میں آمدی ذرات، مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ جتنا $d\sigma$ بڑا ہو، اتنا $d\Omega$ بڑا ہو گا؛ ان کے تناسبی جزو ضربی $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$ کو **تفریقی (بکھراو) عمودی تراش**[۴] کہتے ہیں۔[۵] یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$d\sigma = D(\theta)\, d\Omega \tag{۱۱.۳}$$

ٹکراو مقدار معلوم اور سمتی زاویہ ϕ کی صورت میں $d\sigma = b\, db\, d\phi$ اور $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ ہیں، لہٰذا

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{۱۱.۴}$$

ہو گا۔ (عمومی طور پر θ مقدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تفاعل ہو گا، لہٰذا یہ تفرق حقیقتاً منفی ہو گا؛ اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔)

مثال ۱۱.۲: **سخت کرہ کے بکھراو کی مثال جاری رکھتے ہیں۔** سخت کرہ بکھراو (مثال ۱۱.۱) کی صورت میں

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۵}$$

---

[۴] differential (scattering) cross-section

[۵] یہ ناقص زبان ہے: D تفرقی نہیں ہے، اور نہ ہی یہ عمودی تراش ہے۔

لہٰذا

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{۱۱.۶}$$

ہو گا۔ اس مثال میں تفرقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے، جو ایک غیر معمولی بات ہے۔ □

تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا تکمل:

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۷}$$

کل عمودی تراش[۶] ہو گا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہے جس کو ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر، سخت کرہ بکھراو کی صورت میں

$$\sigma = (R^2/4)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2 \tag{۱۱.۸}$$

ہو گا، جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے: یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے؛ اس رقبہ کے اندر آمدی چھرے ہدف کو مار پائیں گے، جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات "نرم" اہداف (جیسا مرکزہ کا کولمب میدان) کے لئے بھی کار آمد ہے، جن میں صرف نشانے پر "لگنا یا نہ لگنا" کے علاوہ بھی بات کی جائے گی۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت (**یا تابندگی**[۷]) کی ایک شعاع ہو۔

$$\mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد} \tag{۱۱.۹}$$

فی اکائی وقت، رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات (اور یوں ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرنے والے ذرات) کی تعداد $\mathrm{d}N = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$ ہو گی، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{۱۱.۱۰}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتی ہے جنہیں تجربہ گاہ میں با آسانی ناپا جا سکتا ہے، لہٰذا اس کو عموماً تفرقی عمودی تراش کی تعریف لی جاتی ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرے ذرات کاشف تک پہنچتے ہوں، ہم اکائی وقت میں کشف کیے گئے ذرات کی گنتی کو $\mathrm{d}\Omega$ سے تقسیم کر کے، آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول زنی کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: **ردرفورڈ بکھراو۔**[۸] بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ بھاری ساکن ذرے سے، جس کا بار q_2 ہو، بکھرتا ہے۔

[۶] total cross-section
[۷] luminosity
[۸] Rutherford scattering

ا. ٹکراو مقدار معلوم اور زاویہ بکھراو کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

جواب: $b = (q_1 q_2/8\pi\epsilon_0 E)\cot(\theta/2)$

ب. تفریقی بکھراو عمودی تراش تعین کریں۔ جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۱۱}$$

ج. دکھائیں کہ ردرفورڈ بکھراو کا کل عمودی تراش لامتناہی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $1/r$ مخفیہ کی "لامتناہی وسعت" ہے؛ آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراو

بکھراو کے کوانٹائی نظریے میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ z رخ حرکت کرتی ہوئی آمدی مستوی موج، $\psi(z) = Ae^{ikz}$، کا مخفیہ بکھر سے سامنا ہوتا ہے، جس کے نتیجے میں ایک رخصتی کروی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۴)۔[۹] یعنی، ہم مساوات شروڈنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \qquad \text{بڑے } r \text{ کے لئے} \tag{۱۱.۱۲}$$

(احتمال کے بقا کی خاطر $|\psi|^2$ کے اس حصے کو لازماً $1/r^2$ سے تبدیل ہونا ہوگا، لہٰذا کروی موج میں جزو ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے)۔ **عدد موج**[۱۰] k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح رشتہ:

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۱۱.۱۳}$$

ہوگا۔ یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے؛ زیادہ عمومی صورت میں، رخصتی کروی موج کا حیطہ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہو سکتا ہے۔

ہمیں **حیطہ بکھراو**[۱۱] $f(\theta)$ کا تعین کرنا ہوگا؛ یہ رخ θ میں بکھراو کا احتمال دیتا ہے، لہٰذا اس کا تعلق تفریقی عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً، رفتار v پر چلتے ہوئے آمدی ذرے کا لامتناہی چھوٹے رقبہ $d\sigma$ میں سے وقت dt

---

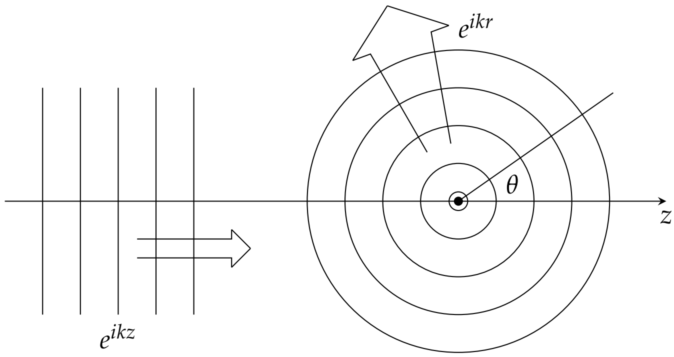
[۹] فی الحال، یہاں کوئی خاص کوانٹائی میکانیات نہیں ہے؛ ہم درحقیقت، کلاسیکی ذرات کی بجائے امواج کے بکھراو کی بات کر رہے ہیں، اور آپ شکل ۱۱.۴ کو پانی کے امواج کا پتھر کے ساتھ ٹکراو تصور کر سکتے ہیں، یا (چونکہ، ہم تین بُعدی بکھراو میں دلچسپی رکھتے ہیں، لہٰذا بہتر یہ ہوگا کہ انہیں) ایک گیند سے صوتی امواج کا بکھراو تصور کریں۔ ایسی صورت میں ہم تفاعل موج کو حقیقی روپ:

$$A[\cos(kz) + f(\theta)\cos(kr+\delta)/r]$$

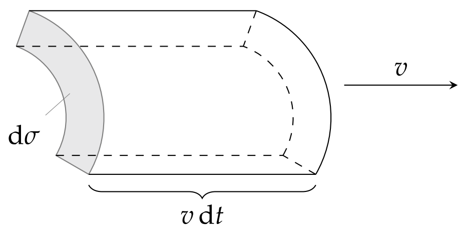
میں لکھتے ہیں اور θ رخ بکھرتے صوتی موج کے حیطے کو $f(\theta)$ ظاہر کرتا ہے۔

[۱۰] wave number

[۱۱] scattering amplitude



شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراو؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروی موج پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۱.۵: وقت $\mathrm{d}t$ کے دوران رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم $\mathrm{d}V = (\mathrm{d}\sigma)(v\,\mathrm{d}t)$ ہے۔

میں گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں)

$$dP = \left|\psi_{\text{آمدی}}\right|^2 dV = |A|^2 \, (v \, dt) \, d\sigma$$

ہو گا۔ لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں اس ذرے کے بکھراو کا احتمال:

$$dP = \left|\psi_{\text{بکھرا}}\right|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v \, dt) r^2 \, d\Omega$$

بھی یہی ہو گا، لہٰذا $d\sigma = \left|f\right|^2 d\Omega$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{۱۱.۱۴}$$

ظاہر ہے کہ، تفریقی عمودی تراش (جس میں تجربیت پسند دلچسپی رکھتا ہے) حیطہ بکھراو (جو مساوات شروڈنگر کے حل سے حاصل ہو گا) کے مطلق مربع کے برابر ہو گا۔ آنے والے حصوں میں ہم حیطہ بکھراو کے حساب کے دو تراکیب: **جزوی موج تجزیہ** اور **بارن تخمین** پر غور کریں گے۔

سوال ۱۱.۲: یک بُعدی اور دو ابعادی بکھراو کے لئے مساوات ۱۱.۱۲ کے مماثل تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب ۴ میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لئے مساوات شروڈنگر قابل علیحدگی حلوں:

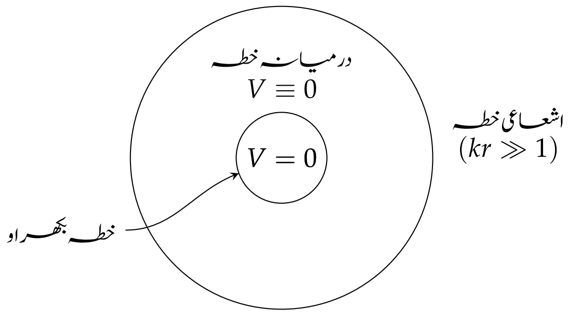
$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \tag{۱۱.۱۵}$$

کا حامل ہو گا، جہاں Y_ℓ^m کروی ہارمونی (مساوات ۴.۳۲) ہے اور $u(r) = rR(r)$ رداسی مساوات (مساوات ۴.۳۷):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] u = Eu \tag{۱۱.۱۶}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ بہت بڑے r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے، اور مرکز گریز حصہ قابل نظر انداز ہو گا، لہٰذا

$$\frac{d^2u}{dr^2} \approx -k^2 u$$



شکل ۱۱.۶: مقامی مخفیہ سے بکھراو؛ خطہ بکھراو، درمیانہ خطہ، اور اشعاعی خطہ۔

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا عمومی حل

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

ہے؛ پہلا جزو رخصتی کروی موج کو اور دوسرا جزو آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ ظاہر ہے کہ بکھرے موج کے لئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑے r کی صورت میں

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

ہو گا، جیسے ہم گزشتہ حصہ میں (طبیعی بنیادوں پر) اخذ کر چکے (مساوات ۱۱.۱۲)۔

یہ بہت بڑے r کے لئے تھا (یا یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ $kr >> 1$ کے لئے تھا؛ بصریات میں اسے **خطہ اشعاعی**[۱۲] کہیں گے)۔ یک بُعدی نظریہ بکھراو کی طرح، ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ "مقامی" ہے، جس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ کسی متناہی بکھراو خطہ کے باہر مخفیہ تقریباً صفر ہو گا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانہ خطہ میں (جہاں V کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے لیکن مرکز گریز جزو کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا)،[۱۳] ردادی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u = -k^2 u \tag{۱۱.۱۷}$$

جس کا عمومی حل (مساوات ۴.۴۵) کروی بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ:

$$u(r) = Arj_\ell(kr) + Brn_\ell(kr) \tag{۱۱.۱۸}$$

---

[۱۲] radiation zone

[۱۳] یہاں سے آگے تبصرہ کولمب مخفیہ کے لئے درست نہیں، چونکہ $r \to \infty$ کرنے سے $1/r^2$ کے لحاظ سے $1/r$ صفر تک زیادہ آہستہ پہنچتا ہے، اور مرکز گریز جزو اس خطہ میں غالب نہیں ہو گا۔ اس نقطہ نظر سے کولمب مخفیہ مقامی نہیں ہے، اور جزوی موج تجزیہ قابل اطلاق نہیں ہو گا۔

ہو گا۔ لیکن نہ ہی j_ℓ (جو سائن تفاعل کی طرح ہے) اور نہ ہی n_ℓ (جو متمم کوسائن کی طرح ہے) رخصتی (یا آمدی) موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} کے مماثل خطی جوڑ درکار ہوں گے؛ انہیں **کروی ہینکل تفاعلات**[۱۴]:

$$h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x) \tag{۱۱.۱۹}$$

کہتے ہیں۔ جدول ۱.۱۱ میں چند ابتدائی کروی ہینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑے r کی صورت میں،

جدول ۱.۱۱: کروی ہینکل تفاعلات $h_\ell^{(1)}(x)$ اور $h_\ell^{(2)}(x)$

$h_0^{(1)} = -i\dfrac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i\dfrac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left(-\dfrac{i}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left(\dfrac{i}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left(-\dfrac{3i}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{i}{x}\right)e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left(\dfrac{3i}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{i}{x}\right)e^{-ix}$
$\left.\begin{aligned} h_\ell^{(1)} &\to \tfrac{1}{x}(-i)^{\ell+1}e^{ix} \\ h_2^{(2)} &\to \tfrac{1}{x}(i)^{\ell+1}e^{-ix} \end{aligned}\right\} x \gg 1$	

$h_\ell^{(1)}(kr)$ (جسے "ہینکل تفاعل کی پہلی قسم" کہتے ہیں) e^{ikr}/r کی طرح سے تبدیل ہوتا ہے، جبکہ $h_\ell^{(2)}(kr)$ (ہینکل تفاعل کی دوسری قسم) e^{-ikr}/r سے تبدیل ہو گا۔ یوں، رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروی ہینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہو گی۔

$$R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr) \tag{۱۱.۲۰}$$

اس طرح خطہ بکھراو کے باہر (جہاں $V(r) = 0$ ہو گا) ٹھیک ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left\{e^{ikz} + \sum_{\ell,m} C_{\ell,m}h_\ell^{(1)}(kr)Y_\ell^m(\theta,\phi)\right\} \tag{۱۱.۲۱}$$

اس کا پہلا جزو آمدی مستوی موج ہے، جبکہ مجموعہ (جس کے عددی سر $C_{\ell,m}$ ہیں) موج بکھراو کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ، ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروی تشاکلی ہے، لہٰذا تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا۔[۱۵] یوں صرف وہ اجزاء

[۱۴] spherical Hankel functions

[۱۵] چونکہ آمدی موج z رخ کا تعین کرتی ہے جو کروی تشاکل خراب کرتی ہے، لہٰذا تابعیت θ کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتی۔ تاہم سمتی تشاکل برقرار رہتا ہے؛ آمدی مستوی موج میں تابعیت ϕ نہیں پائی جاتی، اور بکھراو کے عمل میں ایسی کوئی خاصیت نہیں جو رخصتی موج میں تابعیت ϕ پیدا کرے۔

باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو (یاد رہے، $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$)۔ اب مساوات ۴.۲۷ اور مساوات ۴.۳۲ سے درج ذیل ہو گا

$$Y_\ell^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta) \tag{11.22}$$

جہاں ℓ ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو P_ℓ ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر $C_{\ell,0} \equiv i^{\ell+1}k\sqrt{4\pi(2\ell+1)}a_\ell$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف نو کی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\psi(r,\theta) = A\left\{e^{ikz} + k\sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1}(2\ell+1)a_\ell h_\ell^{(1)}(kr)P_\ell(\cos\theta)\right\} \tag{11.23}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامتیت کیوں بہتر ہے؛ a_ℓ کو ℓ واں **جزوی موج حیطہ**[16] کہتے ہیں۔

اب بہت بڑے r کے لئے ہینکل تفاعل $(-i)^{\ell+1}e^{ikr}/kr$ صورت اختیار کرتا ہے (جدول ۱۱.۱)، لہٰذا

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{(ikr)}}{r}\right\} \tag{11.24}$$

ہو گا، جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے۔

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)a_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{11.25}$$

یہ مساوات ۱۱.۱۲ میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی زیادہ پختہ تصدیق کرتا ہے، اور ہمیں جزوی موج حیطوں (a_ℓ) کی صورت میں حیطہ بکھراو، $f(\theta)$، حاصل کرنے کے قابل بناتا ہے۔ تفریقی عمودی تراش:

$$D(\theta) = \left|f(\theta)\right|^2 = \sum_\ell\sum_{\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)a_\ell^* a_{\ell'}P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta) \tag{11.26}$$

ہو گا، اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)|a_\ell|^2 \tag{11.27}$$

(زاویائی تکمل کو حل کرنے کے لئے میں نے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی عمودیت مساوات ۴.۳۴ استعمال کی۔)

[16] partial wave amplitude

۱۱.۲.۲ لائحہ عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے جزوی موج حیطوں a_ℓ کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراو موج کے لئے کروی محدد جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدد استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہو گا۔

یقیناً $V = 0$ کے لئے مساوات شروڈنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\sum_{\ell,m}\left[A_{\ell,m}j_\ell(kr)+B_{\ell,m}n_\ell(kr)\right]Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

یوں بالخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبدا پر e^{ikz} متناہی ہے لہٰذا نیومن تفاعلات کی اجازت نہیں ہو گی $r = 0$ پر $n_\ell(kr)$ بے قابو بڑھتے ہیں اور چونکہ $z = r\cos\theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں صریحاً پھیلاو کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$e^{ikz}=\sum_{\ell=0}^{\infty}i^\ell(2l+1)j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,\theta)=A\sum_{\ell=0}^{\infty}i^\ell(2\ell+1)\left[j_\ell(kr)+ika_\ell h_\ell^{(1)}(kr)\right]P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۹}$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹائی سخت کرہ بکھراو۔ درج ذیل فرض کریں

$$V(r)=\begin{cases}\infty, & r\le a \text{ کے لئے}\\ 0, & r>a \text{ کے لئے}\end{cases} \tag{۱۱.۳۰}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہو گا

$$\psi(a,\theta)=0 \tag{۱۱.۳۱}$$

یوں تمام θ کے لئے

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}i^\ell(2\ell+1)\left[j_\ell(ka)+ika_\ell h_\ell^{(1)(ka)}\right]P_\ell(\cos\theta)=0 \tag{۱۱.۳۲}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$a_\ell = i\frac{j_\ell(ka)}{kh_\ell^(1)(ka)} \tag{۱۱.۳۳}$$

بالخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left|\frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)}\right|^2 \tag{۱۱.۳۴}$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جا سکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراو $ka \ll 1$ کی تحدیدی صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لئے $n_\ell(z)$ کی مقدار $j_\ell(z)$ سے بہت زیادہ ہو گی لہٰذا

$$\begin{aligned}\frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} &= \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z)+in_\ell(z)} \approx -i\frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)}\\ &\approx -i\frac{2^\ell l! z^\ell/(2\ell+1)!}{-(2\ell)!z^{-\ell-1}/2^\ell\ell!} = \frac{i}{2\ell+1}\left[\frac{2^\ell\ell!}{(2\ell)!}\right]^2 z^{2\ell+1}\end{aligned} \tag{۱۱.۳۵}$$

اور درج ذیل ہو گا

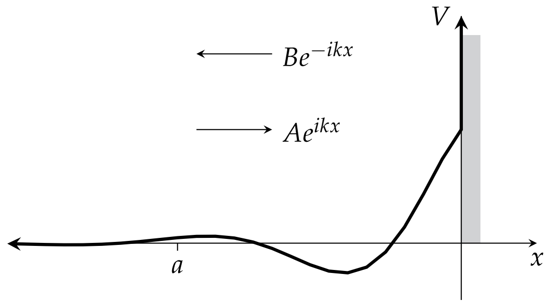
$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}\left[\frac{2^\ell\ell!}{(2\ell)!}\right]^4(ka)^{4\ell+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لہٰذا بلند طاقتیں قابلِ نظرانداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $\ell = 0$ جزو بکھراو میں غالب ہو گا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لئے تفریقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہو گا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراو کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \tag{۱۱.۳۶}$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراو عمودی تراش کی قیمت ہندسی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراو کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہو گا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُوپر سے گزرتے ہیں نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیژانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ ℓ کی مختلف قیمتوں والے عددی سر لازماً صفر ہوں گے۔



شکل ۱۱.۷: مقامی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامتناہی دیوار پائی جاتی ہے، سے یک بُعدی بکھراو۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha\delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراو کی صورت پر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تفریقی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لہٰذا صرف $\ell = 0$ جزو خاطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $\ell \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

جواب: $\sigma = 4\pi a^2\beta^2/(1+\beta)^2$

۱۱.۳ پیتقلات حیط

پہلے نصف لکیر $0 < x$ پر مقامی مخفیہ $V(x)$ سے یک بُعدی بکھراو کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر اینٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۷}$$

مکمل طور پر منعکس ہو گا

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۸}$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا پر منعکس موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہو گا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہوتب چونکہ مبدا پر

آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہو گا

$$\psi_0(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad (V(x) = 0) \tag{۱۱.۳۹}$$

لہٰذا $B = -A$ ہو گا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}\right) \qquad (V(x) \neq 0) \tag{۱۱.۴۰}$$

نظریہ بکھراو کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لئے k لہٰذا توانائی $E = \hbar^2k^2/2m$ کی صورت میں یتقل حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراو $(0 < x < -a)$ میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مسلط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ B کی بجائے یتقل حیطہ کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیطہ تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں $m \neq 0$ والا کوئی جزو نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت $(\ell = 0, 1, 2, \dots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لہٰذا ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی ℓ سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بالکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہو گا لہٰذا ℓ ویں جزوی موج درج ذیل ہو گی مساوات 11.28

$$\psi_0^{(\ell)} = Ai^\ell(2\ell+1)j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۱.۴۱}$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$j_\ell(x) = \frac{1}{2}\left[h^{(1)}(x) + h_\ell^{(2)}(x)\right] \approx \frac{1}{2x}\left[(-i)^{\ell+1}e^{ix} + i^{\ell+1}e^{-ix}\right] \quad (x \gg 1) \tag{۱۱.۴۲}$$

لہٰذا بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\psi_0^{(\ell)} \approx A\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right]P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۱.۴۳}$$

چونکہ قوسین میں دوسرا جزو آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراو متعارف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہو گا۔ پہلا جزو رخصتی موج ہے جو یتقل حیطہ δ_ℓ لیتا ہے

$$\psi^{(1)} \approx A\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right]P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r) \neq 0) \tag{۱۱.۴۴}$$

آپ e^{ikz} میں $h_\ell^{(2)}$ جزو کی بنا پر اس کو کروی مرتکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_\ell$ یتنقل حیط پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_\ell^{(1)}$ حصے کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر اُبھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں a_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو یتنقل حیط δ_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متقاربی روپ

$$\psi^{(1)} \approx A\left\{\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{ikr}-(-1)^\ell e^{-ikr}\right]+\frac{(2\ell+1)}{r}a_\ell e^{ikr}\right\}P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۵}$$

کا δ_ℓ کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$a_\ell=\frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_\ell}-1\right)=\frac{1}{k}e^{i\delta_\ell}\sin(\delta_\ell) \tag{۱۱.۴۶}$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin(\delta_\ell)P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۷}$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$\sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2(\delta_\ell) \tag{۱۱.۴۸}$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے یتنقلات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے یتنقلی حیط زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_ℓ جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_ℓ استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x)=\begin{cases}0, & (x<-a).\\ -V_0, & (-a\le z\le 0).\\ \infty, & (x>0).\end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika}\left[\frac{k-ik'\cot(k'a)}{k+ik'\cot(k'a)}\right]e^{-ikx},\qquad \text{جہاں}\; k'=\sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیطہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $V_0 \gg E$ کے لئے یتقلات حیطہ δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراو کے لئے جزوی موج حیطہ انتقال δ_ℓ کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $\ell = 0$ جزوی موج انتقال حیطہ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \to \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1}\left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta\sin^2(ka)}\right], \qquad \text{جہاں}\ \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ

غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi + V\psi = E\psi \tag{۱۱.۴۹}$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{۱۱.۵۰}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ \text{اور}\ Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi \tag{۱۱.۵۱}$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلم ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جزو Q خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لئے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \tag{۱۱.۵۲}$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک تکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0) Q(r_0) \, d^3 r_0 \tag{۱۱.۵۳}$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int \left[(\nabla^2 + k^2) G(r - r_0)\right] Q(r_0) \, d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0) Q(r_0) \, d^3 r_0 = Q(r)\end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لئے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریئر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is\cdot r} g(s) \, d^3 s \tag{۱۱.۵۴}$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2) G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left[(\nabla^2 + k^2) e^{is\cdot r}\right] g(s) \, d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$\nabla^2 e^{is\cdot r} = -s^2 e^{is\cdot r} \tag{۱۱.۵۵}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

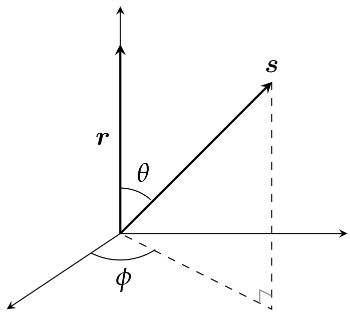
$$\delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \, d^3 s \tag{۱۱.۵۶}$$

لہٰذا مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is\cdot r} g(s) \, d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \, d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \tag{۱۱.۵۷}$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدد برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا تکمل۔

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کر کے درج ذیل ملتا ہے

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{(k^2-s^2)}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{s} \tag{۱۱.۵۸}$$

اب $\boldsymbol{s}$ تکمل کے نقطہ نظر سے $\boldsymbol{r}$ غیر متغیر ہے ہم کروی محدد (s,θ,ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ $\boldsymbol{r}$ قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r} = sr\cos\theta$ ہو گا متغیر ϕ کا تکمل 2π ہو گا جبکہ θ تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} e^{isr\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\left.\frac{e^{isr\cos\theta}}{isr}\right|_0^{\pi} = \frac{2\sin(sr)}{sr} \tag{۱۱.۵۹}$$

یوں درج ذیل ہو گا

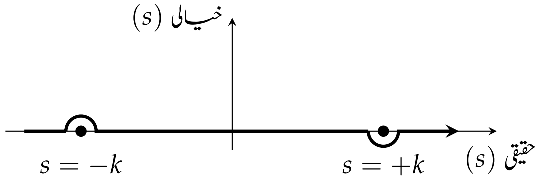
$$G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)}\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s \tag{۱۱.۶۰}$$

باقی تکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r}(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{۱۱.۶۱}$$

اگر z_0 خط ارتقاہ کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ تکمل

$$\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{۱۱.۶۲}$$



شکل ۱۱.۹: ارتفاعی تکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہو گا۔

شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتفاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

استعمال کرتے ہوئے ان تکملات کی قیمت تلاش کی جا سکتی ہے دیگر صورت تکمل صفر ہو گا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے کے کے ساتھ ساتھ تکمل لیا جا رہا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہو گا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہو گا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا کہ یہ تمام قابلِ قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک تکمل کے لئے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہو گا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ تکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ تکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جزو ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس تکمل کے لئے ہم بالا نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ا)۔ اب خط ارتفاع صرف $s=+k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$I_1=\oint\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\frac{1}{s-k}\,\mathrm{d}s=2\pi i\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\Bigg|_{s=k}=i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۳}$$

تکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جزو بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جزو ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہی (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتفا $s=-k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لہٰذا اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہو گا

$$I_2=-\oint\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\frac{1}{s+k}\,\mathrm{d}s=-2\pi i\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\Bigg|_{s=-k}=-i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۴}$$

ماخوذ:

$$G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r}\left[\left(i\pi e^{ikr}\right) - \left(-i\pi e^{ikr}\right)\right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{۱۱.۶۵}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کریں سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس ہلم ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0 \tag{۱۱.۶۶}$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے قریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۶۷}$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0 \tag{۱۱.۶۸}$$

مساوات 11.67 مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لئے مساوات شروڈنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراو مسائل کے لئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$ ۔

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لئے مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ E منفی ہے لہٰذا $k = i\kappa$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہوگا۔

۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مقامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطے کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراو میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراو سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لئے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لہٰذا

$$|r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right) \tag{۱۱.۶۹}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$|r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0 \tag{۱۱.۷۰}$$

ہم

$$k \equiv k\hat{r} \tag{۱۱.۷۱}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۱.۷۲}$$

ہوگا۔ لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۱.۷۳}$$

نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نما میں ہمیں دوسرا جزو بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نما میں دوسرے جزو کو پھیلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جزو کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

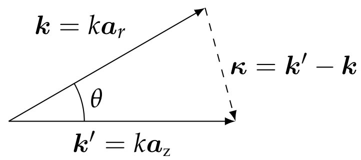
$$\psi_0(r) = Ae^{ikz} \tag{۱۱.۷۴}$$

یوں بڑی r کے لئے درج ذیل ہوگا

$$\psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۵}$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراو پڑھ سکتے ہیں

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۶}$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراو رخ ہے۔

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروئے کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ قابلِ ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہو گا

$$\psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik'\cdot r_0} \tag{11.77}$$

جہاں تکمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$k' \equiv k\hat{z} \tag{11.78}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہو گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k'-k)\cdot r_0}V(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{11.79}$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ موخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خطہ بکھراو پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراو کے لئے قوت نمائی جزو ضربی بنیادی طور پر مستقل ہو گا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\int V(r)\,\mathrm{d}^3 r, \qquad \text{کم توانائی} \tag{11.80}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا امید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہو گی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراو درج ذیل مخفیہ لیں

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \le a \;\text{اگر} \\ 0, & r > a \;\text{اگر} \end{cases} \tag{11.81}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا۔

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}V_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{11.82}$$

تفرقی عمودی تراش

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f\right|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۳}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۴}$$

□

ایک کروی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \tag{۱۱.۸۵}$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos\theta_0 \tag{۱۱.۸۶}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos\theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin\theta_0 \, \mathrm{d}r_0 \, \mathrm{d}\theta_0 \, \mathrm{d}\phi_0 \tag{۱۱.۸۷}$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیر نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty rV(r) \sin(\kappa r) \, \mathrm{d}r \qquad \text{کروی تشاکل} \tag{۱۱.۸۸}$$

f کی زاویائی تابعیت κ میں سموئی گئی ہے شکل ۱۱.۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\kappa = 2k \sin(\theta/2) \tag{۱۱.۸۹}$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراو۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کا روپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۱۱.۹۰}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(\kappa r)\,\mathrm{d}r = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2+\kappa^2)} \tag{۱۱.۹۱}$$

آپ کو سوال 11.11 میں اس تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔ □

مثال ۱۱.۶: ردر فورڈ بکھراو۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراو درج ذیل ہوگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2} \tag{۱۱.۹۲}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{۱۱.۹۳}$$

اس کا مربع ہمیں تفرقی عمودی تراش دیگا

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۹۴}$$

جو ٹھیک کلیہ ردر فورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کلاسیکی میکانیات، تخمین بارن اور کوانٹائی نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردر فورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے نرم کرہ بکھراو کا حیطہ بکھراو بارن تخمین سے حاصل کریں دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں تکمل کی قیمت تلاش کر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

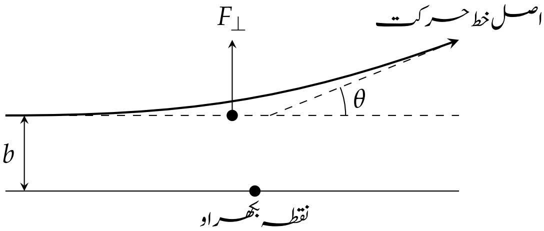
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراو کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراو میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لکیر پر ہی چلے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$I = \int F_\perp \, \mathrm{d}t \tag{۱۱.۹۵}$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہو گی اور یوں زاویہ بکھراو درج ذیل ہو گا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \tag{۱۱.۹۶}$$

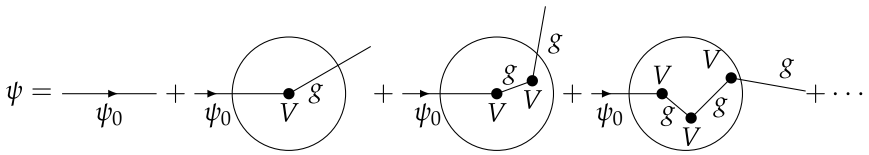
اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبی کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبی تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ در حقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبی تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۹۷}$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{۱۱.۹۸}$$



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظیری مفہوم۔

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے جزو ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراو ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جا سکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \tag{11.99}$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے تکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \tag{11.100}$$

اس عمل کو بار بار دوہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہو گا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \tag{11.101}$$

ہر تکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جزو کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبی تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبی ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہو گا رتبی اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹائی میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جزو ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردر فورڈ بکھراو کے لئے θ کو ٹکراو مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دکھائیں کہ مناسب حدوں کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی فقرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراو کے لئے حیطہ بکھراو تلاش کریں۔

جواب: $-(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1-(4mV_0a^2/5\hbar^2)]$

سوال ۱۱.۱۶: یک بُعدی مساوات شروڈنگر کے لئے تفاعل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مماثل تکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|}V(x_0)\psi(x_0)\,\mathrm{d}x_0 \tag{۱۱.۱۰۲}$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدا پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر یک بُعدی بکھراو کے لئے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx}V(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \tag{۱۱.۱۰۳}$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل مساوات 2.114 اور ایک متناہی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراو کے لئے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو یک بُعدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ حیطہ بکھراو کے خیالی جزو اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} Im(f(0)) \tag{۱۱.۱۰۴}$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \tag{۱۱.۱۰۵}$$

جوابات

فرهنگ