کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو **کوانٹائی سکونیات**[1] کہا جا سکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت: $V(\boldsymbol{r},t) = V(\boldsymbol{r})$ ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شروڈنگر:

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جا سکتا ہے، جہاں $\psi(\boldsymbol{r})$ غیر تابع مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نمائی جزو ضربی $(e^{iEt/\hbar})$ ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبعی مقدار $|\Psi|^2$ کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہٰذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑ سے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی چھلانگ**[2] کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (**کوانٹائی حرکیات**[3]) متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

---

[1] quantum statics
[2] quantum jumps
[3] quantum dynamics

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک حل معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی اخراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی، H^0، کے امتیازی حالات:

$$H^0\psi_b = E_b\psi_b, \qquad \text{اور} \qquad H^0\psi_a = E_a\psi_a \tag{۹.۱}$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$\langle\psi_a|\psi_b\rangle = \delta_{ab} \tag{۹.۲}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(0) = c_a\psi_a + c_b\psi_b \tag{۹.۳}$$

اس سے فرق نہیں پڑتا کہ تفاعلات ψ_a اور ψ_b مقام و فضائی تفاعلات، یا چکر کار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے، لہٰذا جب میں $\Psi(t)$ لکھتا ہوں، میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر جزو اپنی خصوصی قوت نمائی جزو ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$\Psi(t) = c_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \tag{۹.۴}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ "حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_a|^2$" ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے۔ یقیناً، تفاعل Ψ کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1 \tag{۹.۵}$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب، $H'(t)$، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ قائم کرتے ہیں، لہٰذا تفاعل موج $\Psi(t)$ کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہو گا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے۔

$$\Psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b(t)\psi_b e^{-E_bt/\hbar} \tag{۹.۶}$$

(میں قوت نمائی جزو ضربیوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کے تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔)
ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال ψ_a ($c_a(0) = 1$، $c_b(0) = 0$) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0$، $c_b(t_1) = 1$ ہوں، تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں تحویل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالبہ کرتے ہیں کہ $\Psi(t)$ تابع وقت مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرے۔

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad H = H^0 + H'(t) \tag{۹.۷}$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ = i\hbar\Big[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \\ + c_a\psi_a\left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right)e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b\left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right)e^{-iE_bt/\hbar}\Big] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہٰذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar}\right] \tag{۹.۸}$$

تفاعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم $\dot{c}_a$ کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle \tag{۹.۹}$$

دھیان رہے کہ H' ہرمشی ہے، لہٰذا $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہو گا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}\left[c_aH'_{aa} + c_bH'_{ab}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۰}$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے $\dot{c}_b$ الگ کیا جا سکتا ہے:

$$c_a \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle e^{-iE_b t/\hbar} = i\hbar \dot{c}_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{i(E_b - E_a)t/\hbar} \right] \tag{۹.۱۱}$$

مساوات ۹.۱۰ اور مساوات ۹.۱۱ مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کا تعین کرتے ہیں؛ یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی (تابع وقت) مساوات شروڈنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے:

$$H'_{aa} = H'_{bb} = 0 \tag{۹.۱۲}$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ:

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \qquad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a \tag{۹.۱۳}$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} \tag{۹.۱۴}$$

(میں $E_b \geq E_a$ فرض کرتا ہوں، لہٰذا $\omega_0 \geq 0$ ہو گا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان $E = E(t)\boldsymbol{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $n = 1$ اور چار گنا انحطاطی پہلا ہیجان حالات $n = 2$ کے بیچ اضطراب $H' = eEz$ کے چاروں قالبی ارکان H'_{ij} کا حساب لگائیں۔ یہ بھی دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے $H'_{ii} = 0$ ہو گا۔ تبصرہ محور z کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروئے کار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک تکمل حل کرنا ہو گا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لہٰذا زیادہ بلند ہیجان حالات میں منتقلی کو نظرانداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام خالص ψ_a اور کسی ψ_b کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کے غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہو گا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا نازک ہے یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانیہ کے لیے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں

فرض کریں کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر منقطع کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی فرق نہیں پڑے گا تاہم نتائج کی معقول تشریح ممکن ہو گی۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کی شکل وصورت وقت کے لحاظ سے δ تفاعل ہے

$$H' = U\delta(t)$$

جہاں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ ہے اور $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$ لیں۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں تب $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کیا ہوں گے اور کیا $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہو گا۔ انتقال ہونے کا احتمال $t \to \infty$ کے لیے $P_{a\to b}$ کیا ہو گا۔ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

جواب: $P_{a\to b} = \sin^2(|\alpha| / \hbar)$

۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا تاہم کم H' کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یک بعد دیگر تخمین سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال

$$c_a(0) = 1, \qquad c_b(0) = 0 \tag{۹.۱۵}$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں رہے گا۔

رتبہ صفر:

$$c_a^{(0)}(t) = 1, \qquad c_b^{(0)}(t) = 0 \tag{۹.۱۶}$$

میں تخمین کے رتبہ کو زیر، بالا میں قوسین میں لکھتا ہوں۔

ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پُر کر کے رتبہ اول تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ اول:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1;\\ \frac{\mathrm{d}c_b^{(1)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۷}$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پُر کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ دوم:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(2)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t H'ba(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' \Rightarrow\\ c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t H'_{ab}(t')e^{-i\omega_0 t'}\left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'')e^{i\omega_0 t''}\,\mathrm{d}t''\right]\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۸}$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا ($c_b^{(2)}(t) = c_b^{(1)}(t)$)۔ دھیان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبی جزو بھی پایا جاتا ہے دور تبی تصحیح صرف تکملی حصہ ہو گا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے n ویں رتبی تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $n + 1$ ویں رتبہ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں H' کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اول تصحیح میں H' کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے دور تبی تصحیح میں H' کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں خلل $1 \neq \left|c_a^{(1)}(t)\right|^2 + \left|c_b^{(1)}(t)\right|^2$ سے صاف ظاہر ہے بالکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہو گا۔ ہاں H' کی طاقت 1 تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2 + \left|c_b^{(1)}(t)\right|^2$ ایک کے برابر ہے اور رتبہ اول تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جا سکتی ہے زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیے بھی ایسا ہو گا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ہو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ H' کی طاقت ایک تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2 + \left|c_b^{(1)}(t)\right|^2 = 1$۔

(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جا سکتا ہے درج ذیل لیکر

$$\mathrm{d}_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{aa}(t')\,\mathrm{d}t'} c_a, \qquad \mathrm{d}_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{bb}(t')\,\mathrm{d}t'} c_b \tag{۹.۱۹}$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا

$$\dot{\mathrm{d}}_a = -\frac{i}{\hbar}e^{i\phi}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_b; \qquad \dot{\mathrm{d}}_b = -\frac{i}{\hbar}e^{-i\phi}H'_{ba}e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_a \tag{۹.۲۰}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')]\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۲۱}$$

یوں H' کے ساتھ اضافی جزو ضرب $e^{i\phi}$ منسلک ہونے کے علاوہ d_a اور d_b کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اول نظریہ اضطراب سے جزو (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ اپنے جواب کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں فرق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0) = a, c_b(0) = b$ کے لیے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بالکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائن نما اضطراب

فرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائن نما ہو

$$H'(r,t) = V(r)\cos(\omega t) \tag{۹.۲۲}$$

تب درج ذیل ہو گا

$$H'_{ab} = V_{ab}\cos(\omega t) \tag{۹.۲۳}$$

جہاں V_{ab} درج ذیل ہے

$$V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle \tag{۹.۲۴}$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری قالبی ارکان صفر ہوتے ہیں لہٰذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اول تک متغیرات تلاش کریں گے لہٰذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اول تک درج ذیل ہو گا مساوات 9.17

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar}V_{ba}\int_0^t \cos(\omega t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' = -\frac{iV_{ba}}{2\hbar}\int_0^t \left[e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'}\right]\mathrm{d}t' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right] \end{aligned} \tag{۹.۲۵}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہو گا۔ انتقالی تعدد ω_0 کے بہت قریب جبری تعدد ω پر توجہ رکھنے سے چوکور قوسین میں دوسرا جزو غالب ہو گا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

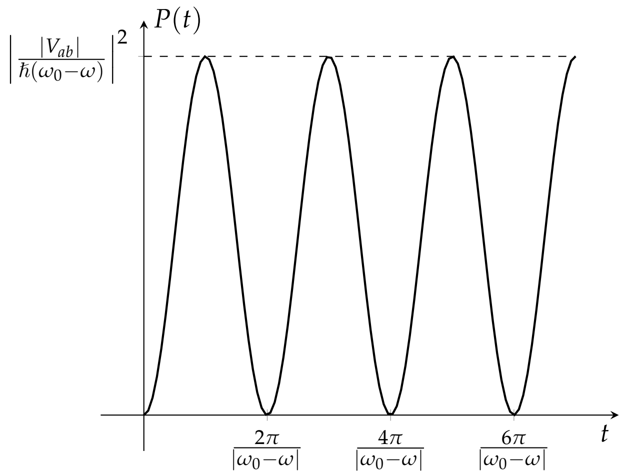
$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega| \tag{۹.۲۶}$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر انتقال کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0-\omega}\left[e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2}\right] \\ &= -i\frac{V_{ba}}{\hbar}\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{\omega_0-\omega}e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \end{aligned} \tag{۹.۲۷}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کرے کا لمحہ t پر حال ψ_b میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا جس کو انتقالی احتمال کہتے ہیں

$$P_{a\to b}(t) = \left|c_b(t)\right|^2 \cong \frac{\left|V_{ab}^2\right|}{\hbar^2}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۲۸}$$



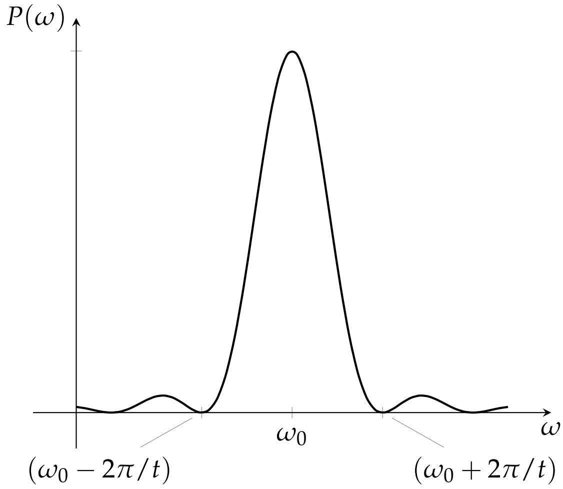
شکل ۹.۱: سائن نما اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات 28.9)۔

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائن نما ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2/\hbar^2(\omega_0-\omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جو لازمی طور پر ایک (1) سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہوگا یہ واپس صفر کو گرتا ہے۔ لحات $t_n = 2n\pi/|\omega_0-\omega|$ جہاں $n = 1, 2, 3, \ldots$ ہیں پر ذرہ لازماً نچلی حال میں ہوگا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے چالو نہ کریں۔ بہتر ہوگا کہ آپ وقت $\pi/|\omega_0-\omega|$ پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی امید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقال نظریہ اضطراب کی پیدا کرادہ مصنوعی خاصیت نہیں ہے بلکہ بالکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہوگا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقال کی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہوگا جب جبری تعدد قدرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a\to b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی $(|V_{ab}t/2\hbar|)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi/t$ ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے۔ لہٰذا ہم بہت کم t کے لیے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بالکل ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t}/2$ سے جبکہ دوسرا $e^{-i\omega t}/2$ سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2}e^{-i\omega t}, \qquad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2}e^{i\omega t} \tag{۹.۲۹}$$



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالمقابل متحرک تعدد (مساوات 9.28)۔

ہیملٹنی قالب کو ہرمشی بنانے کی خاطر موخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم $c_a(t)$ کے لیے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو منتخب کرتے ہیں۔ اس کو گھومتی موج تخمین کہتے ہیں جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیئے بغیر بالکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ کے لیے گھومتی موج تخمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رابی تعدد

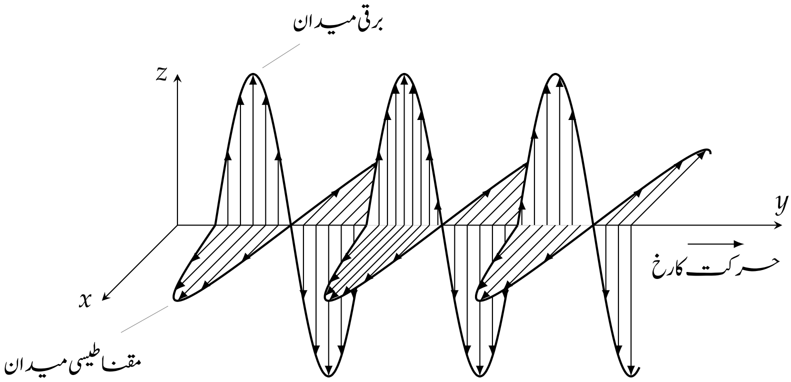
$$\omega_r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + (|V_{ab}|/\hbar)^2} \tag{۹.۳۰}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتقالی احتمال $P_{a\to b}(t)$ تعین کر کے دکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہو گا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں $P_{a\to b}(t)$ عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہو گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور V پر یہ کیا پابندی عائد کرتی ہے۔

(د) نظام پہلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟



شکل ۹.۳: برقناطیسی موج۔

۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خرد امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم قائمہ ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہو گا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی جزو کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طول موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فضائی تغیر کو نظرانداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائن نما ارتعاشی برقی میدان

$$E = E_0 \cos(\omega t)\,\boldsymbol{k} \tag{۹.۳۱}$$

کے زیر اثر ہو گا۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور z رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔

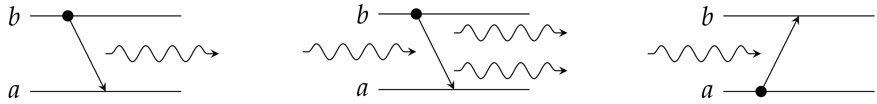
$$H' = -qE_0 z \cos(\omega t) \tag{۹.۳۲}$$

ظاہر ہے درج ذیل ہو گا

$$H'_{ba} = -pE_0 \cos(\omega t).\text{where} p \equiv q\langle\phi_b|z|\,\phi_a\rangle \tag{۹.۳۳}$$

عمومی طور پر ψ متغیر z کا جفت یا طاق تفاعل ہو گا یہ ہماری اُس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ H' کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اُسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہو گا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہو گا۔

$$V_{ba} = -pE_0 \tag{۹.۳۴}$$



(ج) خود بخود اخراج　(ب) تحرک زدہ اخراج　(ا) جذب

شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود با خود اخراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیریں حال ψ_a میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حال ψ_b میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a\to b}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۵}$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک نوریہ جذب کیا (شکل ۹.۴-ا)۔ جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ نوریہ در حقیقت کوانٹائی برقی حرکیات برقناطیسی میدان کی کوانٹائی نظریہ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اُس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حال $(c_a(0) = 0, c_b(0) = 1)$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بالکل وہی ہوں گے البتہ اس بار $P_{b\to a} = \left|C_a(t)\right|^2$ حاصل ہو گا جو نیچے رخ زیریں سطح میں منتقل کا احتمال ہو گا۔

$$P_{b\to a}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۶}$$

چونکہ ہم $b \leftrightarrow a$ کو آپس میں بدل رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے لہٰذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا جزو چنتے ہیں جس کے نصب نما میں $\omega + -\omega_0$ پایا جاتا ہے باقی حساب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حال میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں منتقل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہو گا جو زیریں حال سے بالائی حال منتقلی کا ہے اس عمل کو تحرق زدہ اخراج کہتے ہیں، جس کی پیشگوئی آئنسٹائن نے تھی۔

تحرق زدہ اخراج کی صورت میں برقناطیسی میدان توانائی $\hbar\omega_0$ جوہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریے ایک اصل جس نے تحرق پیدا کیا اور ایک تحرق کی بنا پر پیدا باہر نکلے (شکل

۹.۴-ب)۔ اگر ایک بوتل میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی نوریہ دو نوریہ پیدا کرے گا اور یہ دو نوریہ خود چار پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں افزائش ممکن ہو گی تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے نوریہ خارج ہوں گے لیزر اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دھیان رہے کہ لیزر عمل کے لیے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو آبادی الٹنا کہتے ہیں چونکہ انجذاب جس کی بنا پر ایک نوریہ کم ہوتا ہے تحرقی اخراج جو ایک پیدا کرتا ہے بل مقابل ہوں گے لہٰذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے افزائش پیدا نہیں ہو گی۔

انجذاب اور تحرقی اخراج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود باخود اخراج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان کی عدم موجودگی میں جو اخراج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک نوریہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی ذریعہ زمینی حال میں پہنچتا ہے پہلی نظر میں یہ سمجھ نہیں آتی کہ خود باخود اخراج کیوں کر ہو گا۔ ایک ساکن حال اگرچہ ہیجان جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کوانٹائی برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی $\hbar\omega/2$ کا حامل ہو گا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقناطیسی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطی اخراج خود باخود اخراج کا سبب بنتی ہے۔ اگر جڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام اخراج تحرقی اخراج ہو گی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہو گا کہ آیا آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی اخراجی عمل کے بالکل اُلٹ ہے جہاں تمام اخراج خود باخود ہوتا ہے اور تحرقی اخراج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کوانٹائی برقی حرکیات اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجذاب تحرقی اخراج اور خود باخود اخراج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود اخراج کی وجہ زمینی حال برقناطیسی میدان کا اضطراب پیش نہیں کی تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود اخراج کا حساب کرنے کا مجاز بناتی ہے جس سے ہیجان جوہری حال کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جا سکتے ہے۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتفاقی برقناطیسی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہو گی۔

۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیطہ ہو گا۔

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{۹.۳۷}$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$P_{b\to a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \, \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \tag{۹.۳۸}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر یک رنگی موج کے لیے درست ہوگا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بری تعددی پٹی کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں $u \to \rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ہوگا جہاں $\rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ تعددی سعت $\mathrm{d}\omega$ میں کثافت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل تکمل کا روپ اختیار کرے گا

$$P_{b\to a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2}\left|p\right|^2 \int_0^{\infty} \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}\,\mathrm{d}\omega \tag{۹.۳۹}$$

کنگھی قوسین میں جزو کی چوٹی ω_0 پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲) جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہوگا لہٰذا ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے تکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{2\left|p\right|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}\,\mathrm{d}\omega \tag{۹.۴۰}$$

متغیرات تبدیل کرکے $x \equiv (\omega_0-\omega)t/2$ لکھ کر تکمل کے حدود کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر چونکہ باہر تکمل صفر ہی ہے اور قطعی تکمل کو جدول سے دیکھ کر

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \tag{۹.۴۱}$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{\pi\left|p\right|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t \tag{۹.۴۲}$$

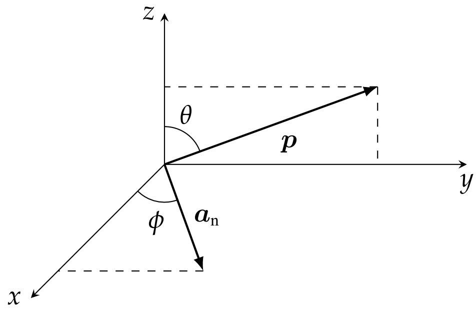
اس بار تحویلی احتمال وقت t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس غیر اتساعی کی تعدد کی وسعت پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بالخصوص تحویلی شرح $(R \equiv \mathrm{d}P/\mathrm{d}t)$ ایک مستقل ہوگا:

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2}\left|p\right|^2 \rho(\omega_0) \tag{۹.۴۳}$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تقطیب شدہ ہے۔ لیکن ہم اُس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکنہ تقطیب پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں $\left|p\right|^2$ کی جگہ $\left|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}\right|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہوگی جہاں مساوات 9.33 کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\boldsymbol{p} \equiv q\langle\psi_b|\boldsymbol{r}|\psi_a\rangle \tag{۹.۴۴}$$

اور اوسط تمام تقطیب اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2$ کی اوسط زنی۔

اوسط درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ کروی محدد منتخب کر کے حرکت کے رخ کو z محور پر رکھیں (تاکہ تقطیب xy سطح میں ہو) اور مستقل $\boldsymbol{p}$ سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔

$$\boldsymbol{a}_\text{n} = \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \tag{۹.۴۵}$$

تب

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2_{ave} = \frac{1}{4\pi}\int |\boldsymbol{p}|^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2_{ave} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}|\boldsymbol{p}|^2 \tag{۹.۴۶}$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر تقطیبی، غیر اتساع کی شعاع کے زیرِ اثر حال b سے حال a میں تحریقی اخراج کا تحویلی شرح درج ذیل ہو گا۔

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۷}$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیار اثر کا قالبی رکن p ہو گا مساوات 9.44 اور $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$ پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہو گی۔

۹.۳ خود با خود اخراج

۹.۳.۱ آئنسٹائن A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالائی حال ψ_b میں N_b جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود با خود اخراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو N_bA ذرات خود با خود اخراج کے عمل سے چھوڑیں

گے۔ جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحرقی اخراج کی تحویلی شرح برقناطیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہوگا $B_{ab}\rho(\omega_0)$۔ یوں بالائی حال کو تحرقی اخراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات چھوڑیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۸}$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی اور $\mathrm{d}N_b/\mathrm{d}t = 0$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۴۹}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درجہ حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولٹزمان جز وضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راست متناسب ہوگا لہٰذا

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T} \tag{۹.۵۰}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T}B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۵۱}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{۹.۵۲}$$

ان دونوں ریاضی فقروں کا موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$B_{ab} = B_{ba} \tag{۹.۵۳}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا

$$A = \frac{\omega_0^3\hbar}{\pi^2 c^3}B_{ba} \tag{۹.۵۴}$$

مساوات 9.53 اُس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجذاب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنشٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرقی اخراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر

مساوات 9.54 ہے جو ہمیں تحریقی اخراجی شرح $\left(B_{ba}\rho(\omega_0)\right)$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود باخود اخراجی شرح A دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2 \tag{۹.۵۵}$$

لہٰذا خود باخود اخراجی شرح درج ذیل ہو گا

$$A = \frac{\omega_0^3|p|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{۹.۵۶}$$

سوال ۹.۸: نیچے رخ تحویل میں خود باخود اخراج اور حراری تحریقی اخراج وہ تحریقی اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں مقابلہ ہو گا۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $T = 300\,\mathrm{K}$ پر $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت کم تعدد وں پر حراری تحریقی اخراج غالب ہو گا جبکہ $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود باخود اخراج غالب ہو گا۔ دکھائی دینے والی روشنی کے لیے کونسا غالب ہو گا؟

سوال ۹.۹: برقناطیسی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود اخراجی اشارہ در حقیقت تحریقی اخراج مساوات 9.47 ہو گا۔ لہٰذا آئنسٹائن عددی سر A اور B جانے بغیر آپ خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہو گی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک نوریہ پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہو گا۔

(الف) مساوات 5.111 کی جگہ $N_\omega = d_k$ پُر کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہو گا ورنہ کل خلائی توانائی لامتناہی ہو گی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات 9.47 استعمال کر کے خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحریقی اخراج کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحریقی اخراج کہ نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بالخصوص وقتی دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں جوہروں میں تعداد کی کمی $A\,\mathrm{d}t$ ہو گی۔

$$\mathrm{d}N_b = -AN_b\,\mathrm{d}t \tag{۹.۵۷}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیے جا رہے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \tag{۹.۵۸}$$

ظاہر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد قوت نمائی طور پر کم ہو گی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{1}{A} \tag{۹.۵۹}$$

جسے اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ ہو گی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علامتیت کے بنا پر ایسا کیا گیا تحرقی اخراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر قابل رصوض سطح سے قطع نظر حال $\psi_b \to \psi_a$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی ψ_b کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات $(\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \ldots)$ میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots} \tag{۹.٦۰}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود باخود اخراج تنزل کی بنا پر حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\langle n|x|\,n'\rangle \boldsymbol{i}$$

آپ نے سوال 3.33 میں x کے قابلی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|\,n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n.n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n'.n-1})$$

جہاں مرتعش کی قدرتی تعدد ω ہے۔ مجھے تحرقی اخراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم اخراج کی بات کر رہے ہیں لہٰذا n' لازمی طور پر n سے نیچے ہو گا۔ ہماری اس مقصد کی غرض سے تب درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}\delta_{n'.n-1}\boldsymbol{i} \tag{۹.٦۱}$$

بظاہر تحویل سیڑھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور اخراجی نور یہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E_n'}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega \tag{۹.٦۲}$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر اخراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہو گا۔

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \tag{۹.٦۳}$$

اور n ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہو گا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \tag{۹.۶۴}$$

چونکہ ہر ایک اخراجی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لہٰذا اخراجی طاقت $A\hbar\omega$ ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(n\hbar\omega)$$

یا n ویں حال میں مرتعش کی توانائی $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \tag{۹.۶۵}$$

ابتدائی توانائی E کا کوانٹائی مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اخراجی طقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار q کا اخراجی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{۹.۶۶}$$

ہارمونی مرتعش $(x(t) = x_0\cos(\omega t)$ جس کا حیطہ x_0 ہو گا میں مسرع $(a = -x_0\omega^2\cos(\omega t)$ ہو گا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2x_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2x_0^2$ ہے لہٰذا $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہو گا۔ جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}E \tag{۹.۶۷}$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی اخراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد $(\hbar \rightarrow 0)$ میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش طاقتی اخراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحویل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں $n=2$ حالات کے لیے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو $\langle\psi_{100}|x|\psi_{200}\rangle, \langle\psi_{100}|y|\psi_{211}\rangle$ وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے قالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi$ اور $z=r\cos\theta$ ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر تکملات صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا احاطہ شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔

جواب: سوائے ψ_{200} جو لامتناہی ہے باقی تمام کے لیے 1.60×10^{-9} سیکنڈ ہو گا۔

۹.۳.۳ قواعد انتخاب

شرح خود باخود اخراج درج ذیل روپ کے قالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle\psi_b|r|\psi_a\rangle$$

اگر آپ نے سوال 9.11 حل کیا ہو اگر نہیں کیا اسی وقت پہلے اس کو حل کریں تو آپ نے دیکھا ہو گا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں۔ کیا بہتر ہوتا اگر ہم پہلے سے جان سکتے کہ کون سے تکملات صفر دیں گے تاکہ ہم اپنا قیمتی وقت غیر ضروری تکملات حل کرنے میں صرف نہ کرتے۔ فرض کریں ہم ہائیڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کا ہیملٹنی کروی تشاکلی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹائی اعداد n, l اور m سے ظاہر کر سکتے ہیں اور قالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n'l'm'|r|nlm\rangle$$

زاویائی معیاری حرکت تبادلی رشتوں اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہرمشی پن مل کر اس مقدار پر طاقتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

انتخابی قواعد برائے m اور m':

ہم پہلے x, y اور z کے ساتھ L_z کے مقلب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب 4 میں حاصل کیا گیا مساوات 4.122 دیکھیں۔

$$[L_z, x]=i\hbar y, [L_z, y]=-i\hbar x, [L_z, z]=0 \tag{۹.۶۸}$$

ان میں سے تیسرے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}0&=\langle n'l'm'\big|[L_z,z]\big|nlm\rangle=\langle n'l'm'|L_z z-zL_z|nlm\rangle\\&=\langle n'l'm'\Big|[(m'\hbar)z-z(m\hbar)]\Big|nlm\rangle=(m'-m)\hbar\langle n'l'm'|z|nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$\text{یا } m'=m \text{ یا پھر } \langle n'l'm'|z|nlm\rangle=0 \tag{۹.۶۹}$$

لہٰذا ماسوائے $m' = m$ کی صورت میں z کے قابلی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔
ساتھ ہی x کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\big|[L_z,x]\big|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'\big|(L_z x - xL_z)\big|\,nlm\rangle\\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle \tag{9.70}$$

یوں آپ y کے قابلی ارکان کو مطابقتی x کے قابلی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی y کے قابلی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں y کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\big|[L_z,y]\big|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'\big|(L_z y - yL_z)\big|\,nlm\rangle\\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle \tag{9.71}$$

بالخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m'-m)^2\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$(m'-m)^2 = 1,\ \text{یا پھر}\ \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = 0\ \text{یا} \tag{9.72}$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں m کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$\Delta m = \pm 1\ \text{یا}\ 0\ \text{کوئی عبور واقع نہیں ہو گا جب تک} \tag{9.73}$$

اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہو گا نوریہ چکر ایک کا حامل ہے لہٰذا اس کے m کی قیمت $1, 0$ یا -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے جاتا ہے جوہر اتنا کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے l اور l':

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبیت رشتہ اخذ کرنے کو کہا گیا۔

$$[L^2,[L^2,r]] = 2\hbar^2(rL^2 + L^2 r) \tag{9.74}$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقلب کو $\langle n'l'm'|$ اور $|nlm\rangle$ کے بیچ لپیٹ کر انتخابی فائدہ اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
\langle n'l'm'\Big|[L^2,[l^2,r]]\Big|nlm\rangle &= 2\hbar^2\langle n'l'm'\Big|(rL^2+L^2)\Big|nlm\rangle \\
&= 2\hbar^4[l(l+1)+l'(l'+1)]\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = \langle n'l'm'\Big|(L^2[L^2,r]-[L^2,r] \\
&= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|[L^2,r]\Big|nlm\rangle \\
&= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|(L^2r-rL^2)\Big|nlm\rangle
\end{aligned}$$

$$= \hbar^4[l'(l'+1)-l(l+1)]^2\langle n'l'm'|r|nlm\rangle \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ

یا $$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = [l'(l'+1)-l(l+1)]^2$$

یا پھر $$\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0 \tag{۹.۷۶}$$

لیکن

$$[l'(l'+1)-l(l+1)] = (l'+l+1)(l'-l)$$

اور

$$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = (l'+l+1)^2+(l'-l)^2-1$$

کی بنا پر مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

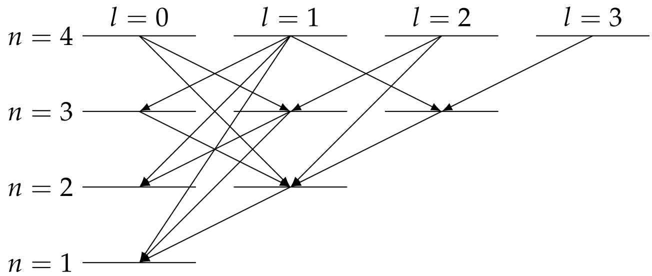
$$[(l'+l+1)^2-1][(l'-l)^2-1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اُس صورت جب $l' = l = 0$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھٹکارا حاصل کیا گیا ہے لہٰذا یہ شرط $l' = l \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں l کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{کوئی عبور واقع نہیں ہو گا جب تک } \Delta l = \pm 1 \tag{۹.۷۸}$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر ایک کا حامل ہے لہٰذا زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد $l' = l$، $l' = l+1$ یا $l' = l-1$ کی اجازت دیں گے۔ برقی جفت قطبی اخراج کے لیے زاویائی معیار حرکت کی بقا درمیانی صورت کی اجازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود اخراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہو گی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد نہ ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے لیے ابتدائی چار



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجازتی تنزل۔

جو ہر سطحوں کے لیے اجازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ $2S$ حال ψ_{200} اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لہٰذا یہ تنزل پذیر نہیں ہو گا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عرصہ حیات $2P$ حالات مثلاً ψ_{210}، ψ_{211} اور ψ_{21-1} سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصادماً کی بنا پر یا ممنوعہ تحویل کی بنا پر سوال 9.21 یا متعدد نوریہ کے اخراج کے بنا پر تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات 9.74 میں دی گئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور $r.L = r.(r \times p) = 0$ کو استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2 z)$$

z سے r تک عمومیت دینا حقیر سا کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0$ ہو گا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کمی ختم ہو گی۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جفت کتب تحویل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \to |nlm\rangle \to |n'l'm'\rangle \to \cdots \to |100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عرصہ حیات کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہو گا لہٰذا اس ترتیب میں ہر مرتبہ صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عرصہ حیات حاصل ہو گا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویلی شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} \tag{۹.۷۹}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H = H_0 + H'(t) \tag{۹.۸۰}$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیمی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\psi(t) = \sum c_n(t)\psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۹.۸۱}$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا

$$c_m = -\frac{i}{\hbar}\sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} \tag{۹.۸۲}$$

جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے

$$H'_{mn} \equiv \langle\psi_m\middle|H'\middle|\psi_n\rangle \tag{۹.۸۳}$$

(ب) اگر نظام حال ψ_N میں آغاز کریں تب دکھائیں کہ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{NN}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۸۴}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mN}(t')e^{i(E_m-E_N)t'/\hbar}\,\mathrm{d}t' \quad (m \neq N) \tag{۹.۸۵}$$

(ج) فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منقطع کرنے کے علاوہ H' مستقل ہے۔ حال N سے حال $M(M \neq N)$ میں تحویل کے احتمال کو t کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$4\left|H'_{MN}\right|^2 \frac{\sin^2[(E_N-E_M)t/2\hbar]}{(E_N-E_M)^2} \tag{۹.۸٦}$$

(د) فرض کریں H' وقت کا سائن نما تفاعل $H' = V\cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$P_{N\to M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2} \tag{۹.۸۷}$$

(و) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتساع کی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیے تحرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اول تک سوال 9.15(ج) اور (د) کے لیے تلاش کریں۔ معمول زنی شرط

$$\sum_m \left|c_m(t)\right|^2 = 1 \tag{۹.۸۸}$$

کی تصدیق کر کے تضاد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $\left|c_N(t)\right|^2$ یا $1 - \sum_{m\neq N}\left|c_m(t)\right|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہو گا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ N ویں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہو گی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہو گا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دکھائیں کہ تفاعل موج کی حیطہ زاویائی دور تبدیل ہو گا لیکن تحویل نہیں ہو گی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیطہ، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اُس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل نہ کہ t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کمیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 << E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \le x \le a/2 \quad \text{جب} \\ 0 & a/2 < x \le a \quad \text{جب} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرقی اخراج، تحرقی انجذاب اور خود باخود اخراج دیکھ چکے ہیں۔ خود باخود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0\boldsymbol{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت γ ہو لارمر تعدد $\omega_0 = \gamma B_0$ مثال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf}[\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - \sin(\omega t)\boldsymbol{j}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B = B_{rf}\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - B_{rf}\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + B_0\boldsymbol{k} \tag{۹.۸۹}$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیملٹنی قالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$\dot{a} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t}b + \omega_0 a\right): \quad \dot{b} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t}a - \omega_0 b\right) \tag{۹.۹۰}$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{a_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[a_0(\omega_0 - \omega) + b_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{i\omega t/2}$$
$$b(t) = \left\{b_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[b_0(\omega - \omega_0) + a_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۱}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تفاعل تلاش کریں۔

جواب: $P(t) = \{\Omega^2/[(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\}\sin^2(\omega' t/2)$

(و) منحنی گمک

$$P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۲}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرق تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لہٰذا اہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں نوریہ کا g جزو ضربی ایک ٹسلا کے ساکن میدان اور ایک مائیکرو ٹسلا حیطہ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہو گا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں فرض کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہو گا

$$E(r,t) = E_0 \cos(k.r - \omega t) \tag{۹.۹۳}$$

اگر جوہر کا مرکز مبدا پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r << 1$ $(|k| = 2\pi/\lambda$, لہٰذا $k.r \sim r/\lambda << 1)$ ہو گا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اول درستگی۔

$$E(r,t) = E_0[\cos(\omega t) + (k.r)\sin(\omega t)] \tag{۹.۹۴}$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ اجازتی برقی جفت کتب تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی جا چکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تحویل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود با خود اخراجی شرح حاصل کریں اس کی تقطیب اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہو گا۔ جواب:

$$R_{b\to a} = \frac{q^2\omega^5}{\pi\epsilon_0\hbar c^5}|\langle a|(\boldsymbol{a}_{\text{n}}.r)(\boldsymbol{k}.r)|b\rangle|^2 \tag{۹.۹۵}$$

(ب) دکھائیں کہ ایک بُعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ تحویلات سطح n سے سطح $n-2$ میں ہو گی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت $\boldsymbol{a}_{\text{n}}$ اور $\boldsymbol{k}$ پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہو گا۔

$$R = \frac{\hbar q^2\omega^3 n(n-1)}{15\pi\epsilon_0 m^2 c^5} \tag{۹.۹۶}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد نوریہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ اجازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کی نسبت تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی $2S \to 1S$ کی اجازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیے بھی درست ہو گا غالب تنزل دو نوریہ اخراج کی بنا پر ہو گا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دسواں حصہ ہو گا۔

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ n, l سے n', l' میں تحویل کے لیے ہائیڈروجن کا خود با خود اخراجی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{e^2\omega^3 I^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l+1 \text{ جب} \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l-1 \text{ جب} \end{cases} \tag{۹.۹۷}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r)\,\mathrm{d}r \tag{۹.۹۸}$$

جو ہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m' = m+1, m,$ یا $m-1$ کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l+1$ صورت کے لیے $\langle nlm|$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر صفر قالبی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1|r|\, nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m|r|\, nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1|r|\, nlm\rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l-1$ کے لیے بھی کریں۔

جوابات

فرہنگ