

کوانٹم میکانیٹ

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
۱	۱ تفاسل موج
۱	۱.۱ شر و ڈنگر مساوات
۲	۱.۲ شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳ احتمال
۵	۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲ استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴ معمول زنی
۱۵	۱.۵ معیار حرکت
۱۸	۱.۶ اصول عدم یقینیت
۲۵	۲ غیر متابع وقت شر و ڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱ ساکن حالات
۳۱	۲.۲ لامتناہی چوکور کٹواں
۴۲	۲.۳ ہارمونی سر نقش
۴۴	۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴ آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵ ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات
۷۲	۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاسل کٹواں
۸۱	۲.۶ مستثنائی چوکور کٹواں
۹۷	۳ قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱ ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲ قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱ ہر مٹی عالمین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار پائی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۳	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذراتی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوزان اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۰	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۵	کو انظم شمار پائی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۱	زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۲	α اور β کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۸	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۳	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۳	غیر اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۳	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۵	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۵۹	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۰	اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۰	دوپڑتا اخطا	۶.۲.۱
۲۶۳	بلند رتی اخطا	۶.۲.۲
۲۶۹	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۰	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۳	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۷۸	زیان اثر	۶.۴
۲۷۸	کمزور میدان زیان اثر	۶.۴.۱
۲۸۱	طاقتور میدان زیان اثر	۶.۴.۲
۲۸۲	درمیانی طاقت میدان زیان اثر	۶.۴.۳
۲۸۳	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۹۵	تغیری اصول	۷
۲۹۵	نظریہ	۷.۱
۳۰۰	ہیلیم کا زینینی حال	۷.۲
۳۰۵	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۱۵	ونزل و کرامرز و برلوان تخمین	۸
۳۱۶	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۱	سرنگرنی	۸.۲
۳۲۲	کلیات پیوند	۸.۳
۳۳۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۳۸	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۳۸	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۴۳	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۴۶	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۴۶	برقن طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۴۷	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۴۸	غیر اتالی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۰	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۵۰	آمنطائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۳۵۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۵۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۶۵	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۳۶۵	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۶۵	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۶۸	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۷۳	ہیت بیری	۱۰.۲
۳۷۳	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۷۵	ہندی ہیت	۱۰.۲.۲
۳۸۰	اہارو نوو پو ہم اثر	۱۰.۲.۳
۳۸۹	بکھراؤ	۱۱
۳۸۹	تعارف	۱۱.۱
۳۸۹	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۳۹۳	کوانٹم نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۳۹۴	حبزوی موج تجزیہ	۱۱.۲
۳۹۴	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۳۹۷	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۰۰	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۰۳	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۰۳	مسادات شروڈنگر کی تکمیلی روپ	۱۱.۴.۱
۴۰۷	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۱۲	شسل بارن	۱۱.۴.۳
۴۱۵	پس نوشت	۱۲
۴۱۶	آمنطائن پوڈ لکیو روزن تضاد	۱۲.۱
۴۱۷	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۲۲	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۲۳	شروڈنگر کی ہلی	۱۲.۴
۴۲۴	کوانٹم زینو تضاد	۱۲.۵
۴۲۷	جوابات	
۴۲۹	خطی الجبرا	۱
۴۲۹	سمتیات	۱.۱
۴۲۹	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۲۹	قتالب	۳.۱

۴۲۹	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۲۹	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۲۹	هر مشی تبالے	۶.۱

۴۳۱ فئرہنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

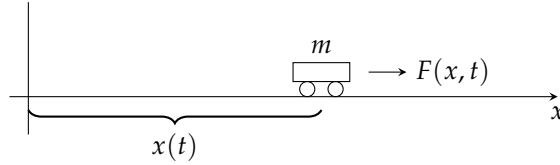
28 اکتوبر 2011ء

باب ۱

تفہم عمل موج

۱.۱ شرودنگر مساوات

فرض کریں محور x پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت m ہو، پر قوت $F(x, t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت t پر متعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کا اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں، متعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے متعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو محلی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) ابتدائی معلومات، جو عموماً $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے ذریعہ ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بُعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کا تذکرہ نہیں کر رہے ہیں۔ نیز، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ($v \ll c$) تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کے تفاعل موج^۲، جس کی علامت $\Psi(x, t)$ ہے، کو شرودنگر مساوات^۳:

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کر کے حاصل کرتے ہیں جہاں i منفی ایک (-1) کا جذر اور \hbar پلانک متقل، بلکہ اصل پلانک متقل تقسیم 2π ہوگا۔

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مشاغل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات (عموماً $\Psi(x, 0)$) استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x, t)$ کا تعین کرتی ہے، جیسے کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے وعدہ نیوٹن $x(t)$ متعین کرتا ہے۔

۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جاننے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں؟ ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج (جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے) فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے t پر یہ x کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کا شماریاتی مفہوم^۴ پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے t پر نقطہ x پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ ہوگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ^۵ درج ذیل ہے۔

$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{محتمل} & \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} \\ \text{محتمل} & \text{لحہ } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ} \end{cases}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبے کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ A پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ B پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا پر اس نظریے سے ذرے کے بارے میں تمام متاثرہ حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جاننے کے باوجود ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا معتمد یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاثر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کی صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم

wave function^۲
Schrodinger align^۳
statistical interpretation^۴

تفاعل موج خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ (جہاں Ψ^* تفاعل موج Ψ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غنیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔



شکل ۱.۲: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ a اور b کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ A کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہوگا جبکہ B کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہوگا۔

میکانیات میں عدم تعین^۱ کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتا ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹم میکانی نظریے میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام C پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہوگا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹم عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقات فکریہ کے بارے میں علم حاصل ہوگا۔

(1) حقیقتے پسند^۲ سوچ: ذرہ مقام C پر ہوتا ہے۔ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹم میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہوگی کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ C پر ہی ہوتا اور کوانٹم میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے قاصر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعینیت فطرتاً نہیں پائی جاتی بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے مطابق کسی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں ہوتا۔ یوں Ψ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات^۳ کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند^۴ سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں ہوتا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ ایک مقام پر ”ظاہر ہو جائے“ (ہمیں اس بارے میں سوال کرنے کی اجازت نہیں کہ ذرہ مقام C کو کیوں منتخب کرتا ہے)۔

¹ indeterminacy

^۲ ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی حائل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ C کے قریب پایا گیا۔

^۳ realist

^۴ hidden variables

^۵ orthodox

مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل ڈالتا ہے بلکہ یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرے کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے ہیں۔ ”یہ تصور جو کپینر ہیگنر مفہوم“ کہلاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہرین طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ تصور درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھا عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصے کے بحث مباحثوں کے بعد بھی واضح نہیں۔

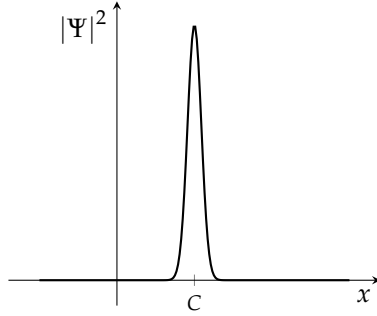
(3) انکاری^{۱۱} سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حال نہیں بتا پاتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964ء تک تینوں طبیعات فکر کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرے کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربے پر قابل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو عنایت ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی عملی فکر اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جان بل کی دلیل سمجھ میں آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربہ بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں^{۱۲}۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطے پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عہد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتا ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کے عائد کردہ شماراتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرے پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربے میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے جیسا کہ شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم^{۱۳} کر کے اس کو سوزن بننے پر مجبور کرتا ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروع و نگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گا لہذا دوسری پیمائش جلد کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دو بہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں: پہلے میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروع و نگر مساوات کے تحت

^{۱۱} Copenhagen interpretation
^{۱۲} agnostic

^{۱۳} یہ نکتہ کہ زیادہ مشالی ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں باب ۱۲ میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معامی خفیہ متغیر نظریات اور دیگر بناوٹیں مثلاً متعدد دنیاؤں^{۱۴} جیسے تشریح موجود ہیں جن کی تینوں سوچوں کے ساتھ مطابقت نہیں ہے۔ بہر حال، فی الحال بہتر ہے کہ ہم کو ان نظریے کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کے مسائل پر فکریں۔
^{۱۴} collapses



شکل ۱.۳: تفسیر عمل موج کا انہدام: اس لمحے کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

ارتقاپاتا ہے، اور دوسرا جس میں پیمائش Ψ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر منہدم کرتی ہے^{۱۵}۔

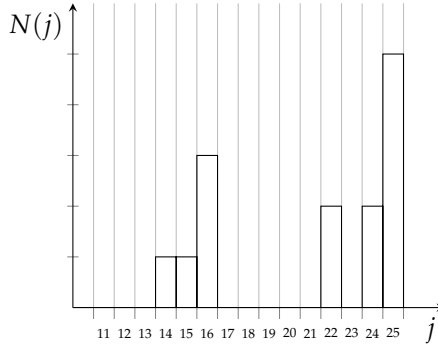
۱.۳. احتمال

۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیات کی شریاتی تشریح کی جاتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہوں گی جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ مندرجہ ذیل میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک شخص،
- 15 سال عمر کا ایک شخص،
- 16 سال عمر کے تین اشخاص،
- 22 سال عمر کے دو اشخاص،
- 24 سال عمر کے دو اشخاص،
- 25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔

^{۱۵} کوانٹم میکانیات میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور حیران کن ہے کہ انسان سوچ میں پڑ جاتا ہے کہ پیمائش درحقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خوردبینی (کوانٹائی) نظریہ اور کلاسیکی (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسے بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسے ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مدہوش "مشاہدہ کار" کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسے وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس کٹھن مسئلہ پر دوبارہ باب ۱۲ میں بات کروں گا: ابھی کے لئے ہم سادہ سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنسدان تجربہ گاہ میں فیٹا، گھسڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ ترسیم کی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تب درج ذیل ہوگا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ $N(17)$ ، مثال کے طور پر، صفر ہوگا۔ کسرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ $N = 14$ ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال ۱ اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تب $P(14) = 1/14$ ، $P(15) = 1/14$ ، $P(16) = 3/14$ ، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$

دھیان رہے کی چودہ یا پندرہ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہوگا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2 کوئی عمر سب سے زیادہ ^{۱۶} ممکن ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا j وہی j ہوگا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 وسطانیہ ^{۱۷} عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ j کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی اوسط ^{۱۸} عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر j کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

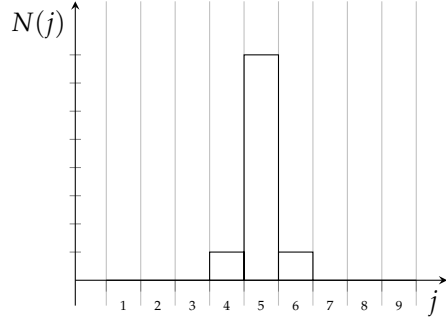
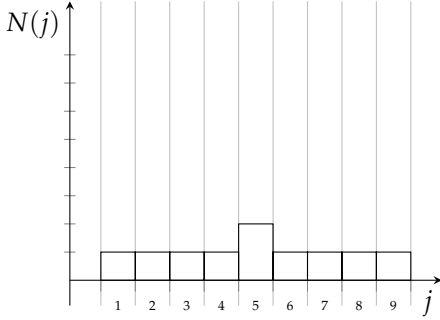
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو توقعاتی قیمت ^{۱۹} کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہوگا؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $225 = 15^2$ ، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $256 = 16^2$ حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

^{۱۶} most probable
^{۱۷} median
^{۱۸} mean
^{۱۹} expectation value



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل تریات میں ایک جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر j کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j \rangle^2$ کے برابر نہیں ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہو تب $\langle x^2 \rangle = 5$ جبکہ $\langle x \rangle^2 = 4$ ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورتوں میں واضح مندرجہ بالا پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند ترین قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے متعرب نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہوگی جبکہ دھاتی علامتہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتبہ میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاؤ، عددی صورت میں درکار ہوگا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا مندرجہ

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام Δj کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j \rangle$ مستقل ہے لہذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ Δj کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن Δj کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا

مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے خبات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیر^{۲۰} کہتے ہیں جبکہ تغیریت کا جذر σ کو معیار^{۲۱} انحراف^{۲۱} کہتے ہیں۔ روایتی طور پر σ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد پھیلاؤ کی پیمائش مانا جاتا ہے۔
ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں σ اس پلے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے منفرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپ یاد ہو گا میں نے ذکر کیا $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں σ^2 غیر منفی ہو گا لہذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاؤ نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

۱.۳.۲ استمراری تغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل تغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلک ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے امیراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہذا Δ عدد صحیح تھا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک ۱۶ سال ۴ گھنٹہ، ۲۷ منٹ اور ۳.۳۷۵۲۴ سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا ۱۶ اور ۱۷ سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر ۱۶ سال اور ۱۶ سال جمع دو دونوں

^{۲۰} variance
^{۲۱} standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگن ہو گا۔ (ما سوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچ پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس واقعہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیداوار کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} \text{بلا منصوبہ منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ کا کثافت احتمال^{۲۲} کہلاتا ہے۔ مستثنای وقفہ a تا b کے بیچ x پایا جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا عمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

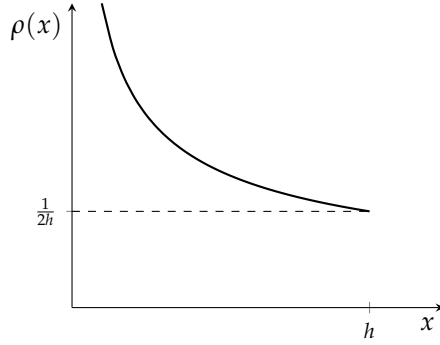
مثال ۱: ایک چٹان جس کی اونچائی h ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچے جاتے ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا وقتی اوسط کیا ہوگا؟^{۲۳}

حل: پتھر ساکن حال سے بہت درج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے متریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہوگا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ t پر فاصلہ x درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

^{۲۲}probability density

^{۲۳}ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہوگا کہ میں مستثنای نمونہ (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر ”اصلی“ اوسط میں منفرق نہیں کر پارہا ہوں۔ یہ ایک تجربہ کرنے والے کے لئے مصیبت پیدا کر سکتی ہے، خاص کر جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے عنبر ض ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تمثیل ہے۔



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سستی رفتار $\frac{dx}{dt} = gt$ ہوگی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہوگا۔ وقفہ dt میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{dt}{T}$ ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت dx میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال خود لامتناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی ρ کا تکمیل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہوگا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

۱. اوسط کا مربع $\langle i^2 \rangle$ اور مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر j کے لیے Δj دریافت کریں اور مساوات ۱۱.۱۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو ۱۱ اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلاواسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ x پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں A ، a اور λ مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے A کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط $\langle x^2 \rangle$ اور معیاری انحراف σ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

۱.۴ معمول زنی

ہم تعامل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ t پر ایک ذرے کا نقطہ x پر پائے جانے کی کثافت احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت $|\Psi|^2$ کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.20)$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تعامل موج کو مساوات شرودنگر تعین کرتی ہے اور Ψ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہوگا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x, t)$ حل ہو تب $A\Psi(x, t)$ بھی حل ہوگا، جہاں A کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمولی زنی^{۲۴} کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمولی پر لایا گیا ہے۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمولی پر لانے کے قابل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شرودنگر مساوات کے مربع میکانک^{۲۵} حل ہونگے۔^{۲۶}

یہاں رک کر ذرا غور کریں! مندرجہ بالا $t = 0$ پر میں ایک تفاعل موج کو معمولی پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ Ψ ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمولی شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمولی پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں A وقت t کا تابع تفاعل ہو گا کہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ شرودنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمولی شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماراتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کو انٹیم نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہذا اہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف t کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے پہلے فترہ میں کل تفرق $\frac{d}{dt}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل t اور x دونوں کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق $\partial/\partial t$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi| = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V\Psi$$

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا محلول جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$(1.24) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V\Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

normalization^{۲۴}
square-integrable^{۲۵}

تساہر ہے کہ $|x| \rightarrow \infty$ کی صورت میں $\Psi(x, t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمولی زنی صرف محلول عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا ہیئت غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مسوات ۱.۲۱ میں مکمل کی قیمت اب صریح معلوم کی جاسکتی ہے:

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے مقابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \rightarrow \pm\infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ صفر ۷ کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر متاثر) مستقل ہوگا؛ لمحہ $t = 0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔ سوال ۱.۴: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں A ، a اور b مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں (یعنی a اور b کی صورت میں A تلاش کریں)۔

ب. متغیر x کے لحاظ سے $\Psi(x, 0)$ ترسیم کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ a کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $a = b$ اور $b = 2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں A ، λ اور ω مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا مخفیہ $V^{۲۸}$ ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں۔

۷ ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی گھمبیر مثالیں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں؛ اور لامتناہی تفاعل موج ہر صورت صفر کو پہنچتی ہیں۔
^{۲۸} potential

ب. متغیرات x اور x^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر x کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر x کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x \rangle + \sigma)$ اور $(\langle x \rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے x کی ”پھیل“ کو σ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہوگی۔ اس سمت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

۱.۵ معیار حرکت

حال Ψ میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.28) \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x |\Psi|^2 dx$ حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعین ہے) تعامل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں $\langle x \rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہوگی جو یکساں حال Ψ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال Ψ میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی سکرین^{۲۹} کو ایک ہی حال Ψ میں لاکر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x \rangle$ ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیش کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال Ψ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متریب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیٹا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا منطقی ترسیم تقریباً $|\Psi|^2$ دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x \rangle$ ہوگی۔ (چونکہ ہم مستثنائی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کیا جاسکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متریب حاصل ہوں گے۔) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سکرپ کے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔ چونکہ Ψ وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ $\langle x \rangle$ تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل^{۳۰} لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.29) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

^{۲۹}ensemble

^{۳۰}چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں محل کے حد نہیں لکھ رہا ہوں۔

تکمل بالخصص^۱ کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۰) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا پر رد کیا کہ (\pm) لامتناہی پر Ψ کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ تکمل بالخصص لاگو کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۱) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ x کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے تاکہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم Ψ جاننے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہوگا۔

$$(۱.۳۲) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

مساوات ۱.۳۱ میں Ψ سے بلاواسطہ $\langle v \rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت^۲ $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۳) \quad \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx$$

میں $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$(۱.۳۴) \quad \langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx$$

$$(۱.۳۵) \quad \langle p \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

^۱تغاغل ضرب کے تحت

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + f g \Big|_a^b$$

یوں تکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جزو سے تغاغل اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت منفی علامت اور اضافی سرحدی جزو کی صورت میں آپ کو ادا کرنی ہوگی۔

^۲momentum

کوانٹم میکانیات میں مقام کو عامل x ”ظاہر“ کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ”ظاہر“ کرتا ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بچ لکھ کر عمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر مقداروں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر p کی جگہ $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ پر کر کے حاصل عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بچ لپیٹ کر درج ذیل عمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi dx \quad (1.36)$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx \quad (1.37)$$

حال Ψ میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکت کی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۴ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب یوہر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز ہے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر عمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو x کے اوپر سے گزار کر، یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$ ہوگا؟

سوال ۱.۷: $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$ کا حساب کریں۔ جواب:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \quad (1.38)$$

operator^{۳۳}

۳۳ ایک ”عامل“ آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تعادل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہوگا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ x سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ x کے لحاظ سے تفرق لیں (اور نتیجہ کو $-i\hbar$ سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات $(d/dt, d^2/dt^2, \partial/\partial x, \partial^2/\partial x^2)$ وغیرہ (یا ضرب کار i, x^2 ، وغیرہ) اور یا ان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ ابہر لفظ ۲۵ کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو x اور t کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو $e^{-iVt/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟

۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے متاصر ہو گئے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج ۳۶ پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھٹکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے متاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام ہتانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج حنا صحت سے متبادل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہوگا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم قابل تعین ہوگا۔ فورسز تحزب کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کئی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے Ψ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ذرے کے

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.39)$$

پیش ۳۸ کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاؤ معیار حرکت میں پھیلاؤ کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہوگا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

Ehrenfest's theorem^{۳۵}

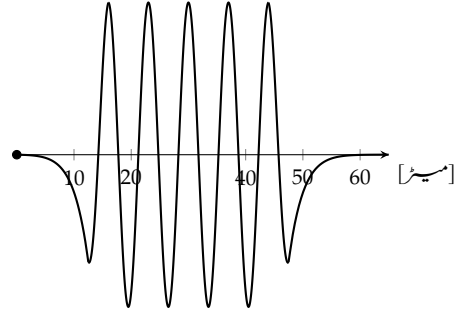
wavelength^{۳۶}

De Broglie formula^{۳۷}

۳۸ میں اس کا ثبوت جملہ پیش کردہ بعض مضغین کلیہ ذی پروگنی کو ایک مسئلہ کے عامل $\frac{\hbar}{i} \partial / \partial x$ سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے دھیان ہٹاتی ہے۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصہ معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھا خاصہ معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.20)$$

جہاں σ_x اور σ_p بالترتیب x اور p کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت^{۳۹} ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”پھیلاؤ“ سے مراد یہ ہے کہ یکاں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو (Ψ کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں متضاد نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو (Ψ کو ایک لمبی سائنس موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نہ ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۲۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں σ_x اور σ_p کی جسامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ Ψ کو ایک لمبی بلدار لکیر بن کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو، σ_x اور σ_p کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

^{۳۹} uncertainty principle

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل A تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے Ψ شرور ونگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. x ، x^2 ، p اور p^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. σ_x اور σ_p کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل π کے ہندسی پھیلاؤ کے اولین ۲۵ ہندسوں (3, 1, 4, 1, 5, 9, 0, 0, 0) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیماس کی حنراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے

کلزاکر 0 اور π زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہوگا؟ اشارہ: زاویہ θ اور $(\theta + d\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $\rho(\theta) d\theta$ ہوگا۔

متغیر θ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں ρ صفر ہوگا۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہوگا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle \theta \rangle$ ، $\langle \theta^2 \rangle$ اور σ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle \sin \theta \rangle$ ، $\langle \cos \theta \rangle$ اور $\langle \cos^2 \theta \rangle$ تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے x

محد (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱. $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟ x کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا $+2r$ ترسیم کریں جہاں r سوئی کی لمبائی

ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ: x اور $(x + dx)$ کے بیچ ψ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x) dx$ ہے۔

آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں θ کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ $d\theta$ کا مطابقتی dx کیا ہوگا؟

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو (ج) سے کس طرح

حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ L رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر L لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ t پر ($a < x < b$) کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ہے۔ $J(x, t)$ کی اکائی کیا ہوگی؟ تبصرہ: چونکہ J آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ x پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے لہذا J کو رو احتمال^{۴۰} کہتے ہیں۔ اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب خط کے ایک سر میں احتمال کے آمد خط کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہوگا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال ρ کیا ہوگا؟ (یہ زیادہ مسزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک غیر مستحکم ذرہ^{۴۱} کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا ”عمر حیات“ τ ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (مکمل طور پر) وقت نہائی گئے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = e^{-t/\tau}$$

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۴ میں ہم نے کچھ بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی V ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں V کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں V_0 حقیقی مخفی توانائی اور Γ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

۱. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P$$

^{۴۰}probability current
^{۴۱}unstable particle

ب. $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات Γ کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شرودنگر کے کسی بھی دو عدد (معمول پر لانے کے متبادل) حل Ψ_1 ، Ψ_2 کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. معمول ذنی مستقل A تلاش کریں۔

ب. لمحہ $t = 0$ پر x کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر p کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو $P = m d\langle x \rangle / dt$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د. x^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ه. p^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و. $x(\sigma_x)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز. $p(\sigma_p)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹم میکانیات اس وقت کارآمد ہوگی جب ذرے کا ڈی بروگلی طول موج (h/p) نظام کی جسامت (d) سے زیادہ ہو۔ درجہ T (کیلون) پر حرارتی توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکت توانائی درج ذیل ہوگی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_b T$$

جہاں k_b بولٹزمن مستقل ہے لہذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹم میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہوگا۔

۱. ٹھوس اجسام: فاصلہ حبال ٹھوس اجسام میں تقریباً $d = 0.3 \text{ nm}$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران ۳۲ کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مسرکڑہ کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ (سوڈیم ۳۳ کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کو انٹرمیکانی ہوں گے جبکہ جوہری مسرکڑہ (تقریباً) کبھی بھی کو انٹرمیکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مانع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا) ماسوائے 4 K سے کم درجہ حرارت پر موجود ہیلیم ۴ کے لئے۔

ب. گیس: میکانی دباؤ P پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون ($PV = Nk_B T$) استعمال کر کے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب: $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5} P^{2/5}$ ؛ ظاہر ہے ہم m کو چھوٹے سے چھوٹا اور P کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیس کو کو انٹرمیکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباؤ پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا بیرونی فضاء ۴ میں (جہاں درجہ حرارت 3 K اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً 1 cm ہے) ہائیڈروجن کو انٹرمیکانی ہوگا؟

^{۳۲} ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مسرکڑہ سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کارڈاس ہوگا۔ اس کے برعکس، بیرون ترین الیکٹران کبھی نہیں جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے فاصلہ حبال کو موزوں فاصلہ لیا جاسکتا ہے۔ یہ مسئلہ بیرونی الیکٹران کے لئے ہے۔

^{۳۳} sodium
^۴ helium
^{۴۵} outer space

باب ۲

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف متغیروں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفیہ^۱ $V(x, t)$ کی لئے شرودنگر مساوات:

$$(۲.۱) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ V وقت t کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں شرودنگر مساوات کو علیحدگی^۲ کے طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے، جو ماہرین طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب:

$$(۲.۲) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں ψ صرف x اور φ صرف t کا تفاعل ہے۔ بظاہر، شرودنگر مساوات کے کسی حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست نظر نہیں آتا ہے، تاہم حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً مایا جاتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے

^۱ بار بار ”مخفی تو انائی تفاعل“ کہنا ان کو تھکا دیتا ہے، لہذا لوگ V کو صرف ”مخفیہ“ چکارتے ہیں، اگرچہ ایسا کرنے سے برقی مخفیہ کے ساتھ عملی پیدا ہو سکتی ہے جو دراصل فی اکائی بار مخفی تو انائی ہوتی ہے۔
separation of variables^۲

حاصل شدہ حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ متابِل علیحدگی حلوں کیلئے

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \varphi$$

ہوگا جو سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar \psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi + V \psi \varphi$$

دونوں اطراف کو $\varphi \psi$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(۲.۳) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V$$

اب بایاں تفاعل صرف t کا تابع ہے جبکہ دایاں تفاعل صرف x کا تابع^۳ ہے۔ یاد رہے اگر V خود x اور t دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہوگا۔ صرف t تبدیل ہونے سے دایاں تفاعل کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں اور دایاں تفاعل لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں، لہذا t تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ اسی طرح صرف x تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا x تبدیل کرنے سے دایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل^۴ کہتے ہیں جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۳ کو

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E$$

$$(۲.۴) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad \text{یا}$$

اور

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V = E$$

$$(۲.۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi \quad \text{یا}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دو سادہ تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کر دیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے:

^۳ دھیان رہے کہ اگر V خود x کے ساتھ ساتھ t کا بھی تفاعل ہو تا تب ایسا ممکن نہ ہوتا۔
separation constant

دونوں اطراف کو dt سے ضرب دیتے ہوئے اس کا مکمل لیں۔ یوں عمومی حل $Ce^{-iEt/\hbar}$ حاصل ہوگا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب $\psi\phi$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا ہم مستقل C کو ψ میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶) \quad \phi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو غیر تابع وقتے شرودنگر مساوات^۵ کہتے ہیں۔ مخفی توانائی V کو پوری طرح جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ مخفی توانائیوں کیلئے غیر تابع وقتے شرودنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات میں ایسی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تابع وقتے شرودنگر مساوات کے زیادہ تر حل $\psi(x)\phi(t)$ کی صورت میں نہیں لکھے جاسکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہوگا۔

(1) یہ ساکن حالات^۱ ہیں۔ اگرچہ تفاعل موج خود:

$$(۲.۷) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

وقت t کا تابع ہے لیکن کثافت احتمال:

$$(۲.۸) \quad |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^*e^{+iEt/\hbar}\psi e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x)|^2$$

وقت کا تابع نہیں ہے؛ تابعیت وقت مساوات میں سے ختم ہو جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب کرنے میں ہوگا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کر لے گی۔

$$(۲.۹) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^* Q \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

ہر توقعاتی قیمت وقت میں مستقل ہوگی؛ ہم $\phi(t)$ کو نکال کر Ψ کی جگہ ψ استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات ψ کو ہی تفاعل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسائل پیدا ہو سکتے ہیں۔ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تفاعل موج ہر صورت میں تابع وقت ہوگا۔ بالخصوص $\langle x \rangle$ مستقل ہوگا، لہذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت) $\langle p \rangle = 0$ ہوگا۔ ساکن حال میں کبھی کبھی کچھ نہیں ہوتا۔

(2) یہ غیر مبہم کل توانائی سے متعلق حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حرکی جمع مخفی) کو

^۵time-independent Schrodinger align
stationary states^۱

^۱معمول پر لانے کے متبادل حل کے لئے لازم ہے کہ E حقیقی ہو (موال ۲.۱-۲ او یکمیں)۔

ہیملٹن^۸ کہتے ہیں جس کو H سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(۲.۱۰) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

اس کا مطابقتی ہیملٹنی عامل، ضابطے کے تحت p کو $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$ سے تبدیل کر کے $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$ ، درج ذیل^۹ حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۱) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

یوں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کر لے گی

$$(۲.۱۲) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۳) \quad \langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi dx = E \int |\psi|^2 dx = E \int |\Psi|^2 dx = E$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Ψ کی معمول زنی، ψ کی معمول زنی کے مترادف ہے۔ مزید

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E(\hat{H}\psi) = E^2 \psi$$

کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = E^2 \int |\psi|^2 dx = E^2$$

یوں H کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۴) \quad \sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0$$

یاد رہے کہ $\sigma = 0$ کی صورت میں نمونہ کے تمام ارکان کی قیمت ایک جہتی ہوگی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہو گا)۔ نتیجتاً متابل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً قیمت E دے گی۔ (اسی بنا پر ہم نے علیحدگی مستقل کو E سے ظاہر کیا تھا۔)

(3) عمومی حل متابل علیحدگی حلوں کا نچلے جوڑا^{۱۰} ہوگا۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، غیر تابع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ دے گی جہاں ہر

^۸ Hamiltonian

^۹ جہاں علاوہ فنی پیدا ہونے کی گنجائش ہو وہاں میں عامل پر ٹوپی^(۸) کا نشان ڈال کر اس کو اس تغیر پذیر متغیر سے علیحدہ رکھوں گا جس کو یہ ظاہر کرتا ہو۔

^{۱۰} linear combination

ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل (E_1, E_2, E_3, \dots) منسلک ہو گا لہذا ہر اجازتی توانائی کا ایک منفرد تقابل موج پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}, \quad \Psi_2(x, t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \dots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تابع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلول کا ہر خطی جوڑ^{۱۲} خود ایک حل ہوتا ہے۔ ایک مرتبہ متبادل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$(۲.۱۵) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

حقیقتاً تابع وقت شرودنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل (c_1, c_2, \dots) تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط پوری کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کرتے ہیں۔ باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک مرتبہ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں بہت کچھ کہا جا چکا ہے۔ میں ان کو مختصراً اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ میں آپ کے سامنے ایک عمومی مسئلہ رکھتا ہوں: آپ کو (غیر تابع وقت) مخفیہ $V(x)$ اور ابتدائی تقابل موج $\Psi(x, 0)$ دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام t کیلئے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تابع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلا قدم^{۱۳} یہ ہو گا کہ آپ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلول کا سلسلہ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی (E_1, E_2, E_3, \dots) ہو گی۔ تقابل $\Psi(x, 0)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ان حلول کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$(۲.۱۶) \quad \Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

allowed energy^{۱۱}

^{۱۲}تقاربات $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ ، وغیرہ کے خطی جوڑے مساوی درج ذیل روپ کا فائدہ ہے جہاں c_1 ، c_2 ، وغیرہ کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتے ہیں۔

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \dots$$

^{۱۳}بعض اوقات آپ تابع وقت شرودنگر مساوات کو بغیر علیحدگی متغیرات حل کر لیتے ہیں (سوال ۳۹ اور سوال ۲.۵۰ دیکھیں)۔ تاہم ایسی صورتیں بہت کمپائی جاتی ہیں۔

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت میں مستقل c_1, c_2, c_3, \dots دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج $\Psi(x, t)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ہر حبزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت $e^{-iE_n t/\hbar}$ چسپاں کریں گے۔

$$(۲.۱۷) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t)$$

چونکہ متابل علیحدگی حل

$$(۲.۱۸) \quad \Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تابع وقت ہوں گی لہذا اب خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۷) یہ خاصیت نہیں رکھتا؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیوں کے ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر $|\Psi|^2$ کا حساب کرتے ہوئے قوت نہائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتے۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ کے ابتدائی حال کو دو ساکن حالات کے خطی جوڑے ظاہر کیا گیا ہے:

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کہ مستقل c_n اور حالات $\psi_n(x)$ حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت t کیلئے تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟ کثافت احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔
حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

جہاں E_1 اور E_2 بالترتیب تفاعل ψ_1 اور ψ_2 کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں $|\Psi|^2$ درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= (c_1 \psi_1 e^{iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{iE_2 t/\hbar}) (c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}) \\ &= c_1^2 \psi_1^2 + c_2^2 \psi_2^2 + 2c_1 c_2 \psi_1 \psi_2 \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar] \end{aligned}$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ پولر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استعمال کیا۔) ظاہر ہے کہ کثافت احتمال زاویائی تعدد $(\frac{E_2 - E_1}{\hbar})$ کے ساتھ سائن نار تفاعل پذیر ہے لہذا یہ ہرگز ساکن حال نہیں ہوگا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعل کے خطی جوڑنے یہ حرکت پیدا کی ہے۔
□

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

۱. قابل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل E لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۷ میں E کو $E_0 + i\Gamma$ لکھ کر (جہاں E اور Γ حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام t کے لئے مساوات ۱۱.۲۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب Γ صفر ہو۔

ب. غیر تاجع وقت تفاعل موج $\psi(x)$ ہر موقع پر حقیقی لیاجہاں ہے (جبکہ تفاعل موج $\Psi(x, t)$ لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تاجع شرودنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، لیکن حالات کا (اتنی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی ψ ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ $(\psi + \psi^*)$ اور $i(\psi - \psi^*)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر $V(x)$ جفتے تفاعل^{۱۵} یعنی $V(x) = V(-x)$ تب $\psi(x)$ کو ہمیشہ جفت یا طاق لیاجہاں سکتا ہے۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب $\psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ $\psi(x) \pm \psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایاجہاں سکتا ہو، E کی قیمت لازماً $V(x)$ کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مشاغل کیا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

دکھائیں کہ ستر $E < V$ کی صورت میں ψ اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک جیسی ہوں گی؛ اب دیسل پیش کریں کہ ایسا تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوگا۔

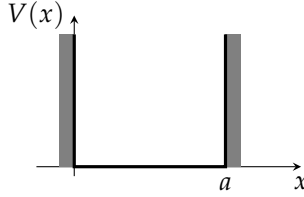
۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں

فرض کریں

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \quad (۲.۱۹)$$

(شکل ۲.۱)۔ اس مخفیہ میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی $x = 0$ اور $x = a$ پر، جہاں ایک لامتناہی قوت اس کو مضرار ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ کنویں میں بے رگڑ راستے پر چلتا ہوا جسم ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا ہے؛ دیوار کے ساتھ ٹکراؤ مکمل لچکدار ہے۔ (اگرچہ یہ ایک فرضی مخفیہ ہے لیکن آپ اس کو اہمیت دیں۔ باوجود اس کے کہ یہ انتہائی سادہ نظر آتا ہے، یہ بہت ساری معلومات فراہم کرتا ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

^{۱۵} even function



شکل ۲.۱: لامستثنائی چوکور کنواں مخفیہ (مساوات ۲.۱۹)

کنویں سے باہر $\psi(x) = 0$ ہوگا (لہذا ایساں ذرے کے پائے جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنویں کے اندر، جہاں $V = 0$ ہے، غیر تابع وقت شرودنجر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کر لے گی۔

$$(۲.۲۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

یعنی

$$(۲.۲۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے $E \geq 0$ فرض کرتا ہوں۔ ہم سوال ۲.۲ سے جان چکے ہیں کہ $E < 0$ سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کا سیکی سادہ ہارمونک مرتفع^{۱۶} کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۲۲) \quad \psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقالات کو مسئلہ کے سرحدی شرائط^{۱۷} متعین کرتے ہیں۔ $\psi(x)$ کے لئے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامستثنائی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہوگا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور $V = \infty$ کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کبھی ہوئی بات مان لیں۔) تفاعل $\psi(x)$ کے استمراری شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۲۳) \quad \psi(0) = \psi(a) = 0$$

تاکہ کنویں کے باہر اور کنویں کے اندر حل ایک ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں A اور B کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

^{۱۶} simple harmonic oscillator
^{۱۷} boundary conditions

ہے لہذا $B = 0$ پس

$$\psi(x) = A \sin kx \quad (۲.۲۴)$$

ہوگا۔ یوں $\psi(a) = A \sin ka$ کے تحت $A = 0$ (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل $\psi(x) = 0$ ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا $\sin ka = 0$ ہوگا، جس کا نتیجہ درج ذیل ہوگا۔

$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (۲.۲۵)$$

اب بھی $k = 0$ دیتا ہے جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ کی بنا پر k کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہذا ہم منفی کی علامت کو A میں منہم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۲.۲۶)$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ $x = a$ پر سرحدی شرط عائد کرنے سے مستقل A کے بجائے مستقل k متعین ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں E کی اجبازتی قیمتیں:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (۲.۲۷)$$

حاصل ہو جائیں گی۔ کلاسیکی صورت کے برعکس لامستثنائی چوکور کنویں میں کوانٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص اجازت^{۱۸} قیمتوں^{۱۹} میں سے ہونا ہوگا۔ مستقل A کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ψ کو معمول پر لانا ہوگا:

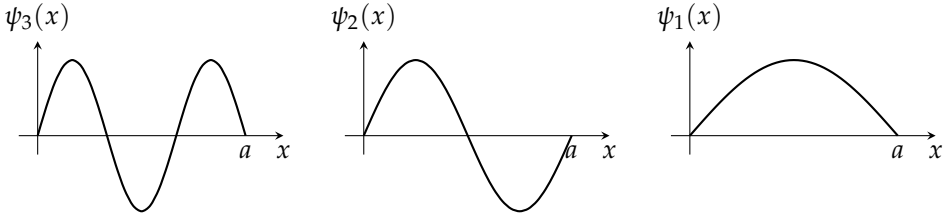
$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \implies \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

یہ صرف A کی مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر $A = \sqrt{2/a}$ منتخب کرنا بہتر ہوگا (کیونکہ A کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنویں کے اندر شرودنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (۲.۲۸)$$

جیسا کہ وعدہ تھا (ہر مثبت عدد صحیح n کے عوض ایک حل دے کر) غیر متابع وقت شرودنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامستثنائی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ یہ

^{۱۸} allowed
^{۱۹} دھیان رہے کہ غیر متابع وقت شرودنگر مساوات کو حل کرتے ہوئے سرحدی شرائط عائد کرنے سے اجبازتی توانائیوں کی کوانٹائی شرط محض تکنیکی وجوہات کی بنا پر ابھرتا ہے۔



شکل ۲.۲: لامستناہی چوکور کنویں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

ایک دھانگے، جس کی لمبائی a ہو، پر بننے والی ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل ψ_1 جو زمین ^{۲۰} حالت کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں n^2 کے براہ راست بڑھتی ہیں **مباح** حالات ^{۲۱} کہلاتے ہیں۔ تفاعلات $\psi_n(x)$ چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری **جفتے** اور **طاقے** ہیں۔ ψ_1 جفت ہے، ψ_2 طاق ہے، ψ_3 جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔ ^{۲۲}

ب. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے **عقدوں** ^{۲۳} (صفر مقام **انقطاع**) ^{۲۴} کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہوگا۔ (چونکہ سروں پر پائے جانے والے صفر کو نہیں گن جاتا ہے لہذا) ψ_1 میں کوئی عقدہ نہیں ہے، ψ_2 میں ایک ہے، ψ_3 میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

ج. یہ تمام تفاعل درج ذیل معنوں میں **عام عمودیت** ^{۲۵} ہیں جہاں $m \neq n$ ہے۔

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0 \quad (۲.۲۹)$$

^{۲۰} ground state

^{۲۱} excited states

^{۲۲} اس تشکیلی کو زیادہ وضاحت سے پیش کرنے کی خاطر بعض مضنین کنویں کے مرکز کو مبدا پر رکھتے ہیں (یوں کنواں $-a$ تا $+a$ رکھا جاتا ہے)۔ تب جفت تفاعلات کو سائن جبکہ طاق تفاعلات کو سین ہوں گے۔ سوال ۲.۳۶ دیکھیں۔

^{۲۳} nodes

^{۲۴} zero-crossing

^{۲۵} orthogonal

ثبوت:-

$$\begin{aligned}
\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right] dx \\
&= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right\} \Big|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right\} = 0
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $m = n$ کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہوگی؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں نافذ بل قبول ہوگی؟) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل اس نکل کی قیمت 1 کر دے گا۔ درحقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فترے میں سمویا جاسکتا ہے:^{۲۶}

$$(۲.۳۰) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

جہاں δ_{mn} کرونیکر ڈیلٹا^{۲۷} کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(۲.۳۱) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام) ψ معیار عمود^{۲۸} ہیں۔

د. یہ مکمل^{۲۹} ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تفاعل $f(x)$ کو ان کے خطی جوڑے بنایا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۳۲) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میں تفاعلات $\sin \frac{n\pi x}{a}$ کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اگر آپ اعلیٰ علم الاحصاء سے واقف

ہیں تو آپ پہچان سکتے ہیں کہ مساوات ۲.۳۲ اور کچھ نہیں بلکہ $f(x)$ کا فوریر تسلسل^{۳۰} ہے۔ یہ حقیقت، کہ ہر

تفاعل کو فوریر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جاسکتا ہے، بعض اوقات مسئلہ ڈرشلے^{۳۱} کہلاتا ہے۔^{۳۲}

^{۲۶} یہاں تمام ψ حقیقی ہیں لہذا ψ_m پر * ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقبل کی ضرورتوں کا لحاظ کرتے ہوئے ایسا کرنا ایک اچھی عادت

ہے۔

^{۲۷} Kronecker delta

^{۲۸} orthonormal

^{۲۹} complete

^{۳۰} Fourier series

^{۳۱} Dirichlet's theorem

^{۳۲} تفاعل $f(x)$ میں مستثنائی تعداد کے عدم استمرار پائے جاسکتے ہیں۔

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

کسی بھی دیے گئے تفاعل $f(x)$ کے لئے عددی سرون c_n کو $\{\psi_n\}$ کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو $\psi_m(x)$ سے ضرب دے کر مکمل لیں۔

$$(۲.۳۳) \quad \int \psi_m(x)^* f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

(کرونیکر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دے گا مساوائے اس جزو کو جس کے لئے $n = m$ ہو۔) یوں تفاعل $f(x)$ کے پھیلاؤ کے n ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہوگا۔^{۳۳}

$$(۲.۳۴) \quad c_n = \int \psi_n(x)^* f(x) dx$$

درج بالا چار خواص انتہائی کارآمد ہیں جن کی افادیت صرف لامتناہی چوکور کنواں تک محدود نہیں ہیں۔ پہلی خاصیت ہر اس صورت میں کارآمد ہوگی جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسری خاصیت مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عالمگیر خاصیت ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ عمومیت ان تمام مخفیہ کے لئے برقرار رہتی ہے جو ہمیں درپیش ہو سکتے ہیں لیکن اس بات کا ثبوت کافی لمب اور پیچیدہ ہے؛ مجھے خدشہ ہے کہ زیادہ تر ماہرین طبیعیات عام طور پر عمومییت فرض کر لیتے ہیں اور امید رکھتے ہیں کہ ایسا ہی ہوگا۔

لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۳۵) \quad \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

میں نے دعویٰ کیا تھا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔

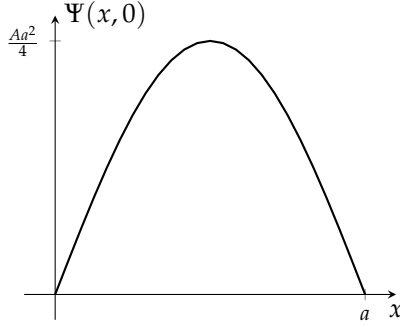
$$(۲.۳۶) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہوگا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج $\psi(x, 0)$ پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر c_n

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

درکار ہوں گے۔ تفاعلات ψ کی مکملیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشل کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر $\psi(x, 0)$ کو ہر صورت میں اس طریقے سے لکھ سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا پر c_n کو

^{۳۳} آپ یہاں فکلی تغیر کے لئے m یا n یا کوئی تیسرا حرف استعمال کر سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کیا جائے)، اور ہاں یاد رہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

فوریسریسل سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x, 0) dx \quad (2.34)$$

دی گئی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاؤ کے عددی سروں c_n کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں ڈال کر $\Psi(x, t)$ حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج معلوم ہو جائے تو ہم دلچسپی کی کسی بھی حرکت کی مقدار کا حساب، باب امیں مستعمل تراکیب استعمال کرتے ہوئے، کر سکتے ہیں۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہوگی؛ صرف ψ کی تفاعل شکل اور احبازتی توانائیوں کی مساوات مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامستناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جس میں A ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

کنویں سے باہر $\psi = 0$ ہے۔ $\Psi(x, t)$ معلوم کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^2(a - x)^2 dx = |A|^2 \frac{a^5}{30}$$

A متعین کرتے ہیں۔

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مساوات ۲.۳۷ کے تحت n واں عددی سر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left\{ a \left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right. \\
 &\quad \left. - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right\} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[-\frac{a^3}{n\pi} \cos(n\pi) + a^3 \frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3} \cos(n\pi) + a^3 \frac{2}{(n\pi)^3} \cos(0) \right] \\
 &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3} [\cos(0) - \cos(n\pi)] \\
 &= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

یوں تقابل عمل موج درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

سر سری طور پر ہم کہتے ہیں کہ c_n ، ”تقابل عمل Ψ میں ψ_n کی مقدار” کو ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ n ویں ساکن حال میں ایک ذرے کے پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے جو درست نہیں، چونکہ ذرہ حال Ψ میں ہے تاکہ حال ψ_n میں، ویسے بھی، تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرے کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی قابل مشاہدہ مقدار کی پیمائش کرتے ہیں، جس کا نتیجہ ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا کہ آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیمائش سے E_n قیمت حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ (کوئی بھی پیمائش، ”احزاتی“ قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت دے گی، اسی لئے انہیں احزاتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہونا چاہیے،

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \quad (۲.۳۸)$$

جس کا ثبوت Ψ کی عمود زنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام c_n غیر تابع وقت ہیں لہذا میں $t = 0$ پر اس کا ثبوت پیش کرتا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے تشویش ہو تو آپ باآسانی اس ثبوت کی تعیم کسی بھی t کے لئے کر سکتے ہیں۔)

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \right)^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

(یہاں بھی m پر مجموعہ میں کرونیٹر ڈیلٹا جزو $m = n$ کو چننا ہے۔)

مزید یہ کہ توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً

$$(۲.۳۹) \quad \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n$$

ہوگی جس کی بلا واسطہ تصدیق کی جاسکتی ہے: غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱۲) کہتی ہے کہ

$$(۲.۴۰) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

لہذا

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left(\sum c_m \psi_m \right)^* H \left(\sum c_n \psi_n \right) dx \\ &= \sum \sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum |c_n|^2 E_n \end{aligned}$$

ہوگا۔ دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابع وقت ہوگا اور یوں H کی توقعاتی قیمت حتمی غیر تابع وقت ہوگی۔ کوانٹم میکانیات میں یہ بتا توانائی کا ظہور ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تف عمل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال ψ_1 (شکل ۲.۲) کے ساتھ متربی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $|c_1|^2$ غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 = 0.998555 \dots$$

باقی تمام عددی سرسمل کرد درج ذیل منقذ دیتے ہیں۔^{۳۵}

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

اس مشال میں توانائی کی توقعاتی قیمت

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3 \pi^3} \right)^2 \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{480 \hbar^2}{\pi^4 ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5 \hbar^2}{ma^2}$$

ہوگی جو کہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ کے بہت قریب، مگر بھجان \square حالتوں کی شمولیت کی بنا پر تھوڑی زیادہ ہے۔

سوال ۲.۳: یہ دکھائیں کہ لامستثنائی چوکور کنویں کے لئے $E = 0$ یا $E < 0$ کی صورت میں غیر تانج وقت شرودنگر مساوات کا کوئی بھی متابل مقبول حل نہیں پایا جاتا۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے، لیکن اس مرتبہ شرودنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط کو پورا نہیں کر سکتے۔)

سوال ۲.۴: لامستثنائی چوکور کنویں کے n ویں ساکن حال کیلئے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ ، σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول غیر یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونساں غیر یقینیت کی حد کے قریب ترین ہوگا؟

سوال ۲.۵: لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج، پہلے دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔ (یعنی A تلاش کریں۔ آپ ψ_1 اور ψ_2 کی معیاری عمودیت کا فائدہ اٹھاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ $t = 0$ پر Ψ کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا؛ اگر آپ کو شک ہو تو جزو-ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ مومنٹل ذکر کو وقت کے ساکن تفاعل عمل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا ہے۔ نتائج کی تسهیل کے لئے $\omega \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ لیں۔

^{۳۵} آپ درج ذیل تسلسل کسی ریاضی کی کتاب سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{56} + \dots = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{34} + \frac{1}{54} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

ج. $\langle x \rangle$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت میں ارتعاش پذیر ہے۔ اس ارتعاش کا زاویائی تعدد کتنا ہوگا؟ ارتعاش کا محیط کیا ہوگا؟ (اگر محیط $\frac{a}{2}$ سے زیادہ نکل آئے تو آپ سیدھا قید خانے چلے جائیں۔)

د. $\langle p \rangle$ تلاش کریں (اور اس پر زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ه. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش کی جائے تو کون کون سی قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہوگا؟ H کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ E_1 اور E_2 کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگرچہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی طبیعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (کیونکہ یہ کسی بھی متبادل پیمائش مقدار کا حامل کرتے ہوئے منسوخ ہو جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ہم سوال ۲.۵ میں ψ_1 اور ψ_2 کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کر دیتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

یہاں ϕ کوئی مستقل ہے۔ $\Psi(x, t)$ ، $|\Psi(x, t)|^2$ اور $\langle x \rangle$ تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص $\phi = \pi$ اور $\phi = \pi/2$ کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامستثنای چوکور کنوئیں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔^{۳۶}

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کا خانہ کھینچیں اور مستقل A کی قیمت تعیین کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ E_1 ہونے کا احتمال کتنا ہوگا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ابتدا ($t = 0$) میں لامستثنای چوکور کنوئیں (چوڑائی a) کے نصف بائیں حصے میں پایا جاتا ہے جہاں ہر نقطے پر اس کے ہونے کا امکان ایک جیسا ہے۔

ا. اس کا ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے۔ اسے معمول پر لانا مست بھولیں۔)

ب. توانائی کی پیمائش کے نتیجے میں $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ ملنے کا احتمال کیا ہوگا؟

^{۳۶} اصولی طور پر ابتدائی تفاعل موج کی شکل پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی، جب تک کہ وہ معمول پر لانے کے متبادل رہے۔ بالخصوص، ضروری نہیں کہ $\Psi(x, 0)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہو؛ بلکہ تفاعل کا خود استمراری ہونا بھی ضروری نہیں ہے۔ تاہم، اگر آپ $\langle H \rangle$ کی قیمت کو $\int \Psi(x, 0)^* H \Psi(x, 0) dx$ سے معلوم کرنا چاہیں گے تو آپ کو تکنیکی مشکلات کا سامن کرنا پڑے گا، اس لئے کہ $\Psi(x, 0)$ کا دوم تفرق بد معین ہے۔ سوال ۲.۹ میں ایسا کرنا اس لئے ممکن ہوا کہ عدم استمرار آخری سروں پر پائے گئے جہاں تفاعل خود صفر ہے۔ سوال ۲.۷ کی طرح کے مسائل کو حل کرنا آپ سوال ۲.۸ میں دیکھیں گے۔

باب ۲. غنیر تابع وقت شرودنجر مساوات

سوال ۲.۹: لمحہ $t = 0$ پر مثال ۲.۲ کے تعامل موج کیلئے H کی توقعاتی قیمت ”پرانے دقیقہ نویسی طریقہ“:

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$$

سے حاصل کریں۔ مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔
توجہ کریں: کیونکہ H غنیر تابع وقت ہے لہذا $t = 0$ لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

۲.۳ ہارمونی مرتعش

کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک پل دار اسپرنگ جس کا مقیاس پلک k ہو اور کمیت m پر مشتمل ہوتا ہے۔
کمیت کی حرکت قانون ہکے^{۳۷}

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

کے تحت ہوگی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

ہوگا جہاں

$$(۲.۴۱) \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

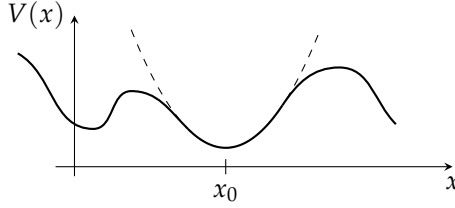
$$(۲.۴۲) \quad V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

ہوگی جس کی ترمیم قطع مکانی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی مرتعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور
متانون ہک اس سے بہت پہلے غنیر کارآمد ہو چکا ہوگا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفی، معتمدی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں
تخمین قطع مکانی ہوگا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی $V(x)$ کے کم سے کم نقطہ x_0 کے لحاظ سے $V(x)$ کو ٹیلر تسلسل^{۳۸} کے لحاظ
سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

^{۳۷}Hooke's law
^{۳۸}Taylor series



شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے معنای کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکانی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

اس سے $V(x_0)$ منفی کر کے (ہم $V(x)$ سے کوئی بھی مستقل بغیر خط و منکر منفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہوگا) اور یہ جاننے ہوئے کہ $V'(x_0) = 0$ ہوگا (چونکہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلندی پر ارکان رد کرتے ہوئے (جو $(x - x_0)$ کی قیمت کم ہونے کی صورت میں متبل نظر انداز ہو گئے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

جو نقطہ x_0 پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس پک $k = V''(x_0)$ ہو۔^{۳۹} یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا پر سادہ ہارمونی سر تقش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا محیط کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوگا۔
کو انٹرمیکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$(۲.۴۳) \quad V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

کے لیے شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس پک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$(۲.۴۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو ”طقت کے بل بوتے پر“ **سلسلہ** کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولم مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **عالمی** سیر **سیر** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی

^{۳۹} چونکہ ہم مندرجہ کر رہے ہیں کہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے لہذا $V''(x_0) \geq 0$ ہوگا۔ صرف اس نایاب صورت میں ارتعاش تخمیناً طور پر بھی سادہ ہارمونی نہیں ہوگا جب $V''(x_0) = 0$ ہو۔
power series

باب ۲. غیر تاجع وقت شروع و نگر مساوات

واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور حل جلدی دیتا) ^{۴۱} ہے۔ اگر آپ طبعی تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپ کو یہ ترکیب سیکھنی ہوگی۔

۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتد کرتے ہیں

$$(۲.۴۵) \quad \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2] \psi = E\psi$$

جہاں $p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہم ملٹنی

$$(۲.۴۶) \quad H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$$

کو کو اجزاء ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عدد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ p اور x عاملین ہیں اور عاملین عموماً مقلوب ^{۴۲} نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ xp سے مراد px نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل مقداروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$(۲.۴۷) \quad a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp ip + m\omega x)$$

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب $a_- a_+$ کیا ہوگا؟

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega (xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو $(xp - px)$ پایا جاتا ہے جس کو ہم x اور p کا مقلوب ^{۴۳} کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیدائش ہے۔ عمومی طور پر عامل A اور عامل B کا مقلوب (جسے چوکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴۸) \quad [A, B] \equiv AB - BA$$

^{۴۱} یہی ترکیب زاویائی معیار حرکت کے نظریہ (باب ۴) میں مستعمل ہیں اور انہیں عموماً دیتے ہوئے عمدہ تشاکل کو انہم میکانیات کے مخفی کی وسیع جماعت کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

^{۴۲} commute
^{۴۳} commutator

اس علاقیت کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴۹) \quad a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar} [x, p]$$

ہمیں x اور عددی p کا مقلب دریافت کرنا ہوگا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہوگا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل $f(x)$ عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آخر میں اس پر کھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۰) \quad [x, p]f(x) = \left[x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = -i\hbar f(x)$$

پر کھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۱) \quad [x, p] = i\hbar$$

یہ خوب صورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے باضابطہ مقلبتیہ رشتہ^{۴۴} کہلاتا^{۴۵} ہے۔
اسے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$(۲.۵۲) \quad a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2}$$

یا

$$(۲.۵۳) \quad H = \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right)$$

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیمیلٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا اور دائیں ہاتھ اضافی $-\frac{1}{2}$ ہوگا۔ یاد رہے گاہاں a_+ اور a_- کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ a_+ کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۵۴) \quad a_+ a_- = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۵) \quad [a_-, a_+] = 1$$

^{۴۴}canonical commutation relation

^{۴۵}گہری نظر سے دیکھا جائے تو کوانٹم میکانیات کے تمام ظلمات کا دار و مدار اس حقیقت پر ہے کہ مقام اور معیار حرکت آپس میں مقلوب نہیں ہیں۔ بعض مضغین باضابطہ مقلبتیہ رشتہ کو مسلمہ لیتے ہوئے $p = (\hbar/i) d/dx$ اخذ کرتے ہیں۔

یوں ہیملٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۶) \quad H = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

ہارمونی مرتعش کی شرودنگر مساوات a_{\pm} کو a_{\pm} کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۷) \quad \hbar\omega \left(a_{\pm} a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) = E\psi$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ یا تو بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو اور یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی E کی شرودنگر مساوات کو ψ مطمئن کرتا ہو ($H\psi = E\psi$) تب توانائی $(E + \hbar\omega)$ کی شرودنگر مساوات کو $a_+\psi$ مطمئن کرے گا: $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$ ثبوت:

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega (a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+) \psi \\ &= \hbar\omega a_+ (a_- a_+ + \frac{1}{2}) \psi = a_+ \left[\hbar\omega (a_+ a_- + 1 + \frac{1}{2}) \psi \right] \\ &= a_+ (H + \hbar\omega) \psi = a_+ (E + \hbar\omega) \psi = (E + \hbar\omega) (a_+\psi) \end{aligned}$$

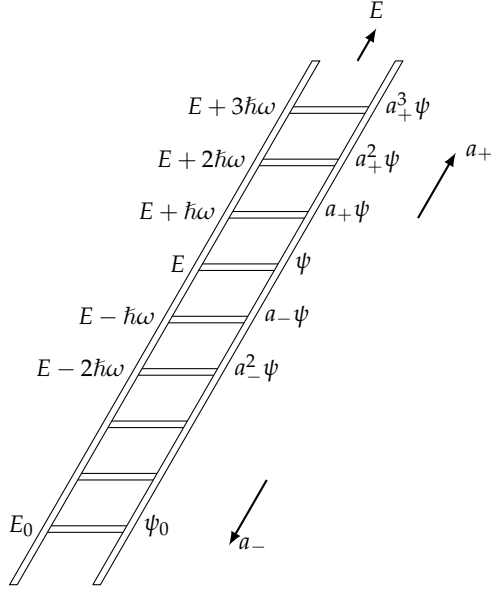
(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے $a_- a_+$ کی جگہ $a_+ a_- + 1$ استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ a_+ اور a_- کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے، a_{\pm} اور کسی بھی مستقل، مثلاً \hbar ، اور ω ، E کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ منقلوب ہو گا۔) اسی طرح حل $a_-\psi$ کی توانائی $(E - \hbar\omega)$ ہو گی۔

$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) (a_-\psi) = \hbar\omega a_- (a_+ a_- - \frac{1}{2}) \psi \\ &= a_- \left[\hbar\omega (a_- a_+ - 1 - \frac{1}{2}) \psi \right] = a_- (H - \hbar\omega) \psi = a_- (E - \hbar\omega) \psi \\ &= (E - \hbar\omega) (a_-\psi) \end{aligned}$$

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جاننے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ چونکہ a_{\pm} کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہذا انہیں ہم **عاملین** سیدھے پکارتے ہیں: a_+ **عامل رفع**^{۴۸} اور a_- **عامل تقلیل**^{۴۹} ہے۔ حالات کی ”سیدھی“ کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

^{۴۸} میں بار بار ”غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات“ کہہ کر تھک گیا ہوں لہذا جہاں مستن سے واضح ہو کہ میں کس قسم کی مساوات کی بات کر رہا ہوں، میں اس کو ”شرودنگر مساوات“ پکاردوں گا۔

^{۴۷} ladder operators
^{۴۸} raising operator
^{۴۹} lowering operator



شکل ۲.۵: ہارمونی سر تعش کے حالات کی ”سیڑھی“۔

ذرا کیے اعمال تفصیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہوگا جس کی توانائی صفر سے کم ہوگی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے۔) نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہوگی۔ ایسا کیوں کر ہوگا؟ ہم جانتے ہیں کہ $a_-\psi$ شرودنگر مساوات کا ایک نیا حل ہوگا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جاسکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے قابل بھی ہوگا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مربع مکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہوگا: سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ (ψ_0 جس کو ہم ψ_0 کہتے ہیں) پر درج ذیل ہوگا۔

(۲.۵۸)

$$a_-\psi_0 = 0$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\psi_0(x)$ تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0$$

لکھی جاسکتی ہے جسے با آسانی حل کیا جاسکتا ہے:

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \Rightarrow \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

(C مستقل ہے۔) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ہم اس کو ہمیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}$$

لہذا $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۹) \quad \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شرودنجر مساوات میں پر کر کے $\hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$ حاصل کرتے ہیں اور یہ جانتے ہوئے کہ $a_-\psi_0 = 0$ ہوگا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۰) \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

سیڑھی کے نچلے پایہ (جو کو انٹم مرتعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ جہاں ہر قدم پر توانائی میں $\hbar\omega$ کا اضافہ ہوگا۔

$$(۲.۶۱) \quad \psi_n(x) = A_n(a_+)^n \psi_0(x), \quad E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

یہاں A_n مستقل معمول زنی ہے۔ یوں ψ_0 پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی مرتعش کے تمام امکان حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسا کیے بغیر ہم تمام احبازاتی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

مثال ۲.۴: ہارمونی مرتعش کا پہلا ہیجان حال تلاش کریں۔

۵۰ ہارمونی مرتعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے بہت کر، حالات کی شمار $n = 1$ کی بجائے $n = 0$ سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۱ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔ اذہیان رہے کہ ہم اس ترکیب سے (معمول پر لانے کے متبادل) تمام حل حاصل کرتے ہیں۔ اب اگر کسی وجہ کی بنا پر دیگر حل بھی پائے جاتے تب ہم عامل رفعت اور عامل تقطیل استعمال کرتے ہوئے دوسری سیڑھی حاصل کر سکتے ہیں، تاہم اس سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ کو مساوات ۲.۵۸ مطابقت کرنا ہوگا، جس سے ہم لازماً مساوات ۲.۵۹ تک پہنچتے ہیں۔ یوں نچلے پایہ ایک جیسے ہوں گے لہذا دونوں سیڑھیاں درحقیقت یکساں ہوں گی۔

حل: ہم مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ (2.62) \quad &= A_1 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

ہم اس کو قلم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2 dx = |A_1|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} dx = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $A_1 = 1$ ہوگا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے ψ_5 حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے یہ جان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محنت چلتا ہوگا لہذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جاننے ہیں کہ $a \pm \psi_n$ اور $\psi_{n\pm 1}$ ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$(2.63) \quad a_+ \psi_n = c_n \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = d_n \psi_{n-1}$$

تناسبی مستقل c_n اور d_n کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی قفاعات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (ظاہر ہے کہ نکلمات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کو لازمًا صفر پہنچنا ہوگا۔)

$$(2.64) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp}f)^* g dx$$

(خطی الجبر کی زبان میں $a \mp$ اور $a \pm$ ایک دوسرے کے ہر مشق جوڑیہ دار^{۵۲} ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left(\mp \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) g dx$$

تکمل بالخصص کے ذریعے $\int f^* \left(\frac{dg}{dx} \right) dx$ سے $\int \left(\frac{df}{dx} \right)^* g dx$ حاصل ہوگا (جہاں $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا پر سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہذا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\pm \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) f \right]^* g dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp}f)^* g dx\end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_{\pm} \psi_n)^* (a_{\pm} \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} a_{\pm} \psi_n)^* \psi_n dx$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$(۲.۶۵) \quad a_{+} a_{-} \psi_n = n \psi_n, \quad a_{-} a_{+} \psi_n = (n+1) \psi_n$$

ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (a_{+} \psi_n)^* (a_{+} \psi_n) dx &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 dx = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (a_{-} \psi_n)^* (a_{-} \psi_n) dx &= |d_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 dx = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \end{aligned}$$

چونکہ ψ_n اور $\psi_{n\pm 1}$ معمول شدہ ہیں، لہذا $|c_n|^2 = n+1$ اور $|d_n|^2 = n$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۶) \quad a_{+} \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a_{-} \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_{+} \psi_0, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{+} \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{+})^2 \psi_0, \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} a_{+} \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a_{+})^3 \psi_0, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_{+} \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (a_{+})^4 \psi_0, \end{aligned}$$

دیگر تفصیلات بھی اسی طرح حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۷) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_{+})^n \psi_0$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ ہوگا۔ (بالخصوص $A_1 = 1$ ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لامستثنائی چوکور کنویں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$(۲.۶۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دو بار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے a_+ اور بعد میں a_- اپنی جگہ سے ہلا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* (a_+ a_-) \psi_n dx &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx\end{aligned}$$

جب تک $m = n$ نہ ہو $\int \psi_m^* \psi_n dx$ لازماً صفر ہو گا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم $\psi(x, 0)$ کو کن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عمودی سر مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی سر تعش کے n ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔
حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx$$

اس قسم کے کلمات جن میں x یا p کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات x اور p کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعہ اور تقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$(۲.۶۹) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \quad p = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a_+ - a_-)$$

اس مثال میں ہم x^2 میں دو بچے رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} \int \psi_n^* [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2] \psi_n dx$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے) $(a_+)^2 \psi_n$ تفاعل ψ_{n+2} کو ظاہر کرتا ہے جو ψ_n کو عمودی ہے۔ یہی کچھ $(a_-)^2 \psi_n$ کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے جو ψ_{n-2} کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کر کے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} (n + n + 1) = \frac{1}{2} \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

جیسا آپ نے دیکھا مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حشر کی توانائی ہے)۔
 جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی مرتعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔ □

سوال ۲.۱۰:

۱. $\psi_2(x)$ تیار کریں۔

ب. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کا حشر کہ کھینچیں۔

ج. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کی عمودیت کی تصدیق مکمل لے کر صریح کریں۔ اشارہ: تقاضات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔

سوال ۲.۱۱:

۱. حالات ψ_0 (مساوات ۲.۵۹) اور ψ_1 (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح کمالات لے کر $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی مرتعش کے مسائل میں متغیر $\sqrt{m\omega/\hbar}x \equiv \xi$ اور متقل $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حشر کی توانائی $\langle T \rangle$ اور اوسط مخفی توانائی $\langle V \rangle$ کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپ کو نیچے مکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی مرتعش کے n ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی مرتعش مخفی قوہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

۱. A تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تیار کریں۔

ج. $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں $\psi_1(x)$ کی بجائے $\psi_2(x)$ دیے تب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تقاضا عمل موج کے لیے مسئلہ ابھر نہیں (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد ω پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس پلک 4 گنا ہو جاتا ہے لہذا $\omega' = 2\omega$ ہوگا جبکہ ابتدائی تقاضا عمل موج تبدیل نہیں ہوگا (یقیناً ہیملٹنی

تبدیل ہونے کے بنا پر Ψ اب مختلف انداز سے ارتقا پائے گا۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی $\hbar\omega/2$ قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ $\hbar\omega$ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

۲.۳.۲ تخلیلی ترکیب

ہم اب پارمونی سر نقش کی شرودنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi \quad (۲.۴۰)$$

اور اس توسل کی ترکیب سے بلا واسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (۲.۴۱)$$

شرودنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K) \psi \quad (۲.۴۲)$$

جہاں K توانائی ہے جس کی اکائی $\frac{1}{2} \hbar\omega$ ہے۔

$$K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (۲.۴۳)$$

ہم نے مساوات ۲.۴۲ کو حل کرنا ہوگا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں K اور (E) کی ”اجبازتی“ قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔ ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں ξ کی قیمت (یعنی x کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں ξ^2 کی قیمت K کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگی لہذا مساوات ۲.۴۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi \quad (۲.۴۴)$$

جس کا تخمینہ حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$\psi(\xi) \approx A e^{-\xi^2/2} + B e^{+\xi^2/2} \quad (۲.۴۵)$$

اس میں B کا جبزو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے (چونکہ $\infty \rightarrow |x|$ کرنے سے اس کی قیمت بے متابو بڑھتی ہے)۔ طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل متناوب صورت کا ہوگا۔

$$\psi(\xi) \rightarrow () e^{-\xi^2/2} \quad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے}) \quad (۲.۴۶)$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوتِ ساحہ کو ”چھینا“ چاہیے،

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/2} \quad (۲.۷۷)$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے، $h(\xi)$ ، اس کی صورت $\psi(\xi)$ سے سادہ ہو۔^{۵۳} ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفروقات

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \left(\frac{dh}{d\xi} - \xi h\right)e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h\right)e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہذا شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0 \quad (۲.۷۸)$$

ہم ترکیبے فروبنیوس^{۵۴} استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل ξ کے طاقی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi^j \quad (۲.۷۹)$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفروقات

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j\xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3\xi + 3 \cdot 4a_4\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j]\xi^j = 0 \quad (۲.۸۰)$$

^{۵۳} اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمینے سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفروقی مساوات کے طاقی تسلسل حل میں متغیر ξ کی جگہ ξ^2 کا چھیننا معمولاً پسلاؤ نام ہوتا ہے۔

^{۵۴} Frobenius method

ط متقی تسل پھیلاو کے یکتائی کی بنا پر جی کے ہر طاقت کا عددی سر صفر ہوگا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۸۱) \quad a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

یہ کلیہ **توالی** ۵۵ مشرودنگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو a_0 سے ابتداء کرتے ہوئے تمام ہفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12} a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24} a_0, \dots$$

اور a_1 سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6} a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20} a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120} a_1, \dots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۲.۸۲) \quad h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi)$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

متغیر جی کا ہفت تفاعل ہے جو خود a_0 پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

طاق تفاعل ہے جو a_1 پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات a_0 اور a_1 کی صورت میں جی تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے متاثر نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ j کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توالی (تخمین) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$$

جس کا تخمینی حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

ہوگا جہاں C ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی j کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2}$$

اور اب اگر h کی قیمت e^{ξ^2} کے لحاظ سے بڑھے تب ψ (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں) $e^{\xi^2/2}$ (مساوات ۲.۷۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متغیراتی روپ^{۵۶} ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے متبادل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طمقی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر j کی ایک ایسی بلند ترین قیمت، n پائی جائے گی جو $a_{n+2} = 0$ دیتی ہو (یوں جفت h تسلسل یا طمقی h تسلسل اختتام پذیر ہوگا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہوگا؛ جفت n کی صورت میں $a_1 = 0$ ہوگا جبکہ طمقی n کی صورت میں $a_0 = 0$ ہو گا)۔ یوں متبادل مقبول طمقی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = 2n + 1$$

جہاں n کوئی غیر منفی عدد صحیح ہوگا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۷۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

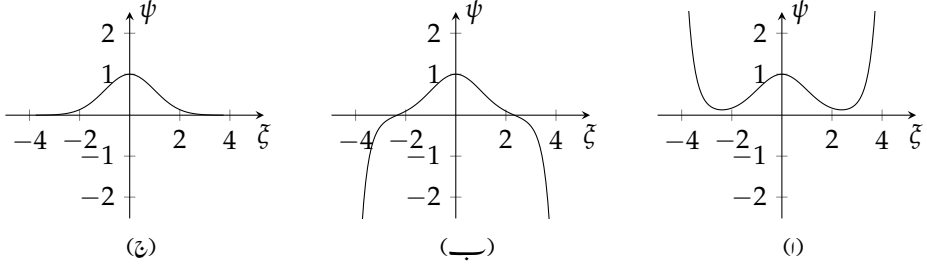
$$(۲.۸۳) \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹائزیشن شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹائزیشن، شرودنجر مساوات کے طمقی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً E کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۷۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر E کے لیے اس کے دو خطی غیر متابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی x پر، بے قیامت قوت منافی بڑھتے ہیں جس کی بنا پر یہ معمول پر لانے کے متبادل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر مندرجہ کریں ہم E کی کسی ایک احبازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً $0.49 \hbar \omega$) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-۱)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب E کی قیمت کسی ایک احبازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً $0.51 \hbar \omega$) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم^{۵۷} دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-۲)۔ اگر ہم اس معتد امر معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے متبادل حل دے گی (شکل ۲.۶-۳)۔

کلیہ توانائی K کی احبازتی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۸۴) \quad a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

^{۵۶} یہ حیرت کی بات نہیں کہ مساوات ۲.۸۱ میں بدحوہ حل بھی شامل ہے۔ یہ کلیہ توانائی ہر لحاظ سے شرودنجر مساوات کا معادل ہے لہذا اس میں لازماً وہ دونوں متغیراتی حل شامل ہوں گے جنہیں ہم نے مساوات ۲.۷۵ میں حاصل کیا۔
^{۵۷} ہم اس کو دم بلانے (wag the tail) کی ترکیب کہہ سکتے ہیں۔ جب بھی دم بٹے، آپ حبان حنائیں کہ آپ احبازتی توانائی پر سے گزرے ہیں۔



شکل ۲.۶: شرودنگر مساوات کی (ا) $E = 0.49\hbar\omega$ ، (ب) $E = 0.51\hbar\omega$ اور (ج) $E = \hbar\omega$ صورت میں حل۔

اگر $n = 0$ ہو تب تسلسل میں ایک جزوی پایا جائے گا (ہمیں $a_1 = 0$ لینا ہوگا تاکہ طبق h خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۳ میں $j = 0$ سے $a_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم $n = 1$ کے لیے $a_0 = 0$ لیں گے، اور مساوات ۲.۸۳ میں $j = 1$ سے $a_3 = 0$ حاصل ہوگا، لہذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہوگا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم $n = 2$ کے لیے $j = 0$ لے کر $a_2 = -2a_0$ اور $j = 2$ لے کر $a_4 = 0$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا)۔ عمومی طور پر $h_n(\xi)$ متغیر ξ کا n درجی کشیر رکھتی ہوگا، جو جفت عدد صحیح n کی صورت میں

۵۸ دھیان رہے کہ n کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں a_j کا ایک منسرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمانٹ کشیر کنیاں $H_n(\xi)$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned}$$

جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح n کی صورت میں طاق طاقتوں کا کشیر کنی ہوگا۔ جزو ضربی a_0 اور a_1 کے علاوہ یہ عین ہرمانٹ کشیر رکھنے^{۵۹} $H_n(\xi)$ ہیں۔ جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جزو ضربیوں منتخب کیا جاتا ہے کہ ξ کے بلند تر طاقت کا عددی سر 2^n ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی سر نقش کے معمول شدہ^{۶۱} ساکن حالات درج ذیل ہوں گے

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (۲.۸۵)$$

جو (تقریباً) مساوات ۲.۶ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

سوال ۲.۱۵: ہارمونی سر نقش کے زمینی حال میں کلاسیکی احبازتی خطے کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین با معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک سر نقش کی توانائی $E = (1/2)ka^2 = (1/2)m\omega^2 a^2$ ہوگی جہاں a جیلہ ہے۔ یوں توانائی E کے سر نقش کا ”کلاسیکی احبازتی خطہ“ $\sqrt{2E/m\omega^2} -$ تا $\sqrt{2E/m\omega^2} +$ ہوگا۔ مکمل کی قیمت ”عمومی تقسیم“ یا ”تفعل حلل“ کی جدول سے دیکھیں۔

سوال ۲.۱۶: کلیہ توانائی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے $H_5(\xi)$ اور $H_6(\xi)$ تلاش کریں۔ مجموعی متقل تعین کرنے کی حنا طر ξ کے بلند تر طاقت کا عددی سر روایت کے تحت 2^n لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہم ہرمانٹ کشیر کنی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

۱. کلیہ روڈر یگیٹ^{۶۲} درج ذیل کہتا ہے۔

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (۲.۸۶)$$

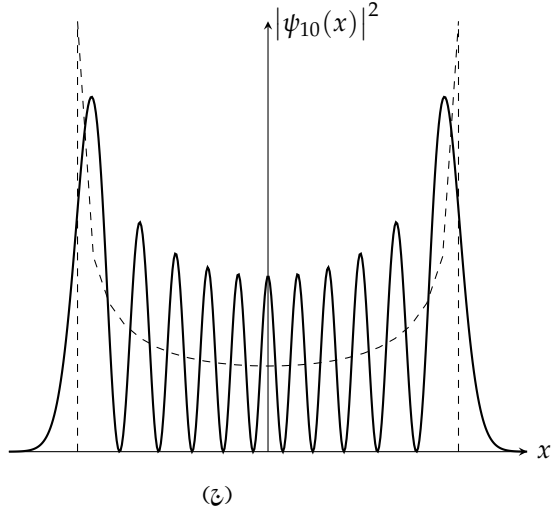
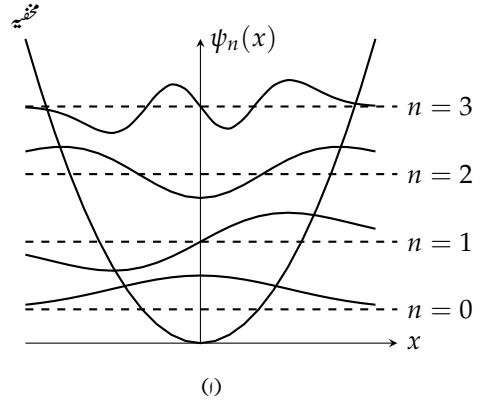
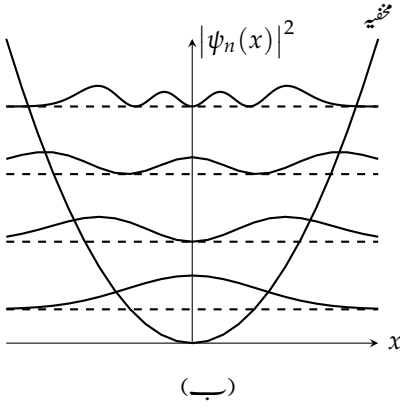
اس کو استعمال کر کے H_3 اور H_4 اخذ کریں۔

Hermite polynomials^{۵۹}

^{۶۰} ہرمانٹ کشیر کنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

^{۶۱} میں یہاں معمولی متقلات حاصل نہیں کروں گا۔

Rodrigues formula^{۶۲}



شکل ۲: پارمونی سر تعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

ب. درج ذیل کلیہ توانی گزشتہ دو ہر مائنٹ کشیرر کنیوں کی صورت میں H_{n+1} دیتا ہے۔

$$(۲.۸۷) \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$$

اس کو جب $n=0$ کے نتائج کے ساتھ استعمال کر کے H_5 اور H_6 تلاش کریں۔

ج. اگر آپ n رتبی کشیرر کنی کا تفرق لیں تو آپکو $n-1$ رتبی کشیرر کنی حاصل ہوگی۔ ہر مائنٹ کشیرر کنیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۸۸) \quad \frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi)$$

جس کی تصدیق ہر مائنٹ کشیرر کنی H_5 اور H_6 کے لئے کریں۔

د. پیدا کار تعلق $e^{-z^2+2z\xi} = 0$ کا n پر n والے تفرق $H_n(\xi)$ ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تعلق کے نیلر پھیلاؤ میں یہ $z^n/n!$ کا عددی سر ہوگا۔

$$(۲.۸۹) \quad e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi)$$

اس کو استعمال کر کے H_0 ، H_1 اور H_2 دوبارہ اخذ کریں۔

۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے پر جگہ $V(x) = 0$ ہوگا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہونی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل مستی رفتار ہوگی، لیکن کوانٹم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات ذیل

$$(۲.۹۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

یا ذیل ہے۔

$$(۲.۹۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

یہاں تک یہ لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوت صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نہا (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہوگی۔

$$(۲.۹۲) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

generating function^{۳۴}

لامتناہی چوکور کنویں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو k (اور یوں E) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تابعیت وقت $e^{-iEt/\hbar}$ جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) = Ae^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x + \frac{\hbar k}{2m}t)} \quad (۲.۹۳)$$

ایسا کوئی بھی تفاعل جو x اور t متغیرات کی مخصوص جوڑ $(x \pm vt)$ کا تابع ہو (جہاں v مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو v رفتار سے $\mp x$ رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تفاعل کے دلیل^{۳۳} کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہوگا کہ درج ذیل ہو۔

$$x = \mp vt + \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x \pm vt = \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (یعنی ہی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں منفرق صرف k کی علامت کا ہے لہذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} \quad (۲.۹۴)$$

جہاں k کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$k \equiv \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases} \quad (۲.۹۵)$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے ”ساکن حالات“ حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج $\lambda = 2\pi/|k|$ ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$p = \hbar k \quad (۲.۹۶)$$

ان امواج کی رفتار (یعنی t کا عددی سر تقسیم x کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}} \quad (۲.۹۷)$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی E ہو (جو حتمی حرکت کی ہوگی چونکہ $V = 0$ ہے) کی کلاسیکی رفتار $E = (1/2)mv^2$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}} \quad (۲.۹۸)$$

ظاہری طور پر کوانٹم میکانی تفاعل موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاعل موج معمول پر لانے کے متاثر نہیں ہے۔

$$(۲.۹۹) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2 (\infty)$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں متاثر علیحدگی حل طبعی طور پر متاثر قبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جاسکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کاہرگز یہ مطلب نہیں کہ متاثر علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی متاثر علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ n پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر k کے لحاظ سے مکمل ہوگا)۔

$$(۲.۱۰۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

(بم) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ کو اپنی آسانی کیلئے مکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر c_n کی جگہ یہاں $\phi(k)$ (بم $1/\sqrt{2\pi}$) کردار ادا کرتا ہے۔ اب اس تفاعل موج کو (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جاسکتا ہے۔ تاہم اس میں k کی قیمتوں کی سعت پائی جائے گی، لہذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائے گی۔ ہم اس کو موجی اکٹھے^{۶۵} کہتے ہیں۔^{۶۶}

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں $\Psi(x, 0)$ مندرہم کر کے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$(۲.۱۰۱) \quad \Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

پر پورا اترتا ہوا $\psi(k)$ کیسے تعین کیا جائے؟ یہ فوراً سر تجزیہ کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب مسئلہ پلانشرل^{۶۷} ہے۔

$$(۲.۱۰۲) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

^{۶۵} wave packet

^{۶۶} سائن نمبر امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے متاثر نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنا پر معنام بندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

^{۶۷} Plancherel's theorem

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰، دیکھیں)۔ $F(k)$ کو $f(x)$ کا فوریر بدل^{۶۸} کہا جاتا ہے جبکہ $f(x)$ کو $F(k)$ کا الٹے فوریر بدل^{۶۹} کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نمائی علامت کا فرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، احبازتی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: مکمل کاموجود^{۷۰} ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقاصد کے لئے، تفاعل $\Psi(x, 0)$ پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کو انٹیم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں $\phi(k)$ درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx \quad (۲.۱۰۳)$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ $-a \leq x \leq a$ میں رہنے کا پابند ہو کو وقت $t = 0$ پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔ $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔
حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^a dx = 2a |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

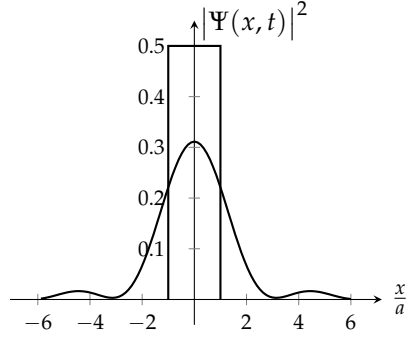
اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے $\psi(k)$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

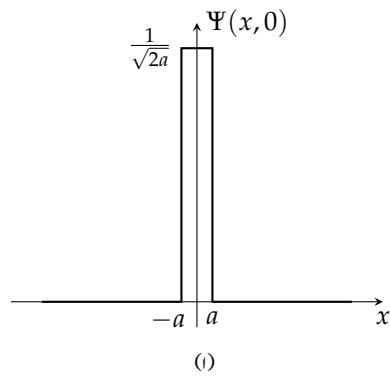
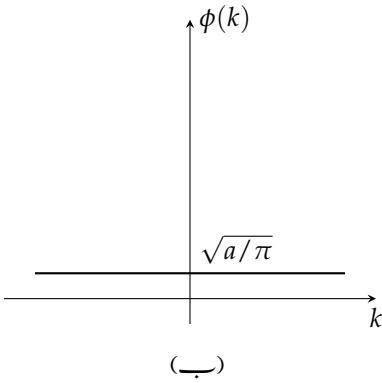
آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk \quad (۲.۱۰۴)$$

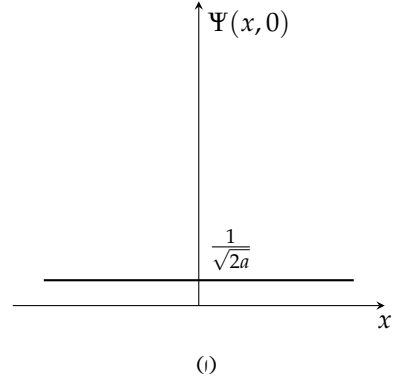
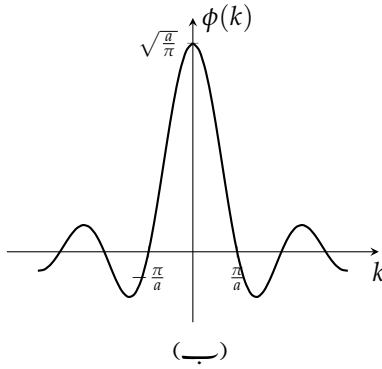
بد قسمتی سے اس مکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقت پائی جاتی ہیں جن کے لئے $\Psi(x, t)$ کا مکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریح حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)



شکل ۲.۸: تناسب $|\Psi(x, t)|^2$ کی لمحہ $t = 0$ پر مستطیل اور $t = ma^2/\hbar$ پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۴)۔



شکل ۲.۹: چھوٹے a کے لئے مثال ۲.۶ (ا) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم؛ (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم۔



شکل ۲.۱۰: بڑی a کے لئے (i) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم، (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر a کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تعادل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹-۱)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمیناً $\sin ka \approx ka$ لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

جو k کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا پر افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاؤ کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہذا k ، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا پھیلاؤ لازماً زیادہ ہوگا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی a) کی صورت میں مقام کا پھیلاؤ زیادہ ہوگا (شکل ۲.۱۰) لہذا درج ذیل ہوگا۔

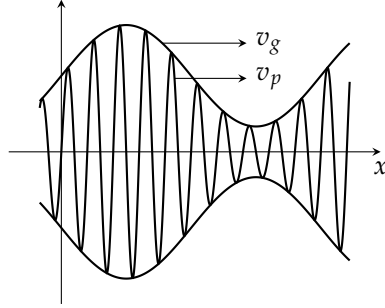
$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ka}{ka}$$

اب $\sin z/z$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر $z = \pm\pi/a$ (جو یہاں $k = \pm\pi/a$ کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی a کیلئے $k = 0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰-۱)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل $\Psi_k(x, t)$ ، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ نظر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً

Fourier transform^{۲۸}
inverse Fourier transform^{۲۹}

مختلف عمل $f(x)$ پر عمائد لازم اور کافی پابندی یہ ہے کہ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ مستثنای ہو۔ (ایسی صورت میں $\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$ بھی مستثنای ہوگا، اور حقیقتاً ان دونوں کمالات کی قیمتیں ایک جتنی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ ”عنائف“ گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ Ψ_k طبیعی طور پر متبادل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تعامل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سمونی سمتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصور کچھ یوں ہے: سائن متفاعلات کا خطی میل جس کے حیظ کو ϕ ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہوگا؛ یہ ”عنائف“ میں ڈھالکے ہوئے ”لہروں“ پر مشتمل ہوگا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو دوری سمتی رفتار v_p کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ عنائف کی رفتار، جس کو گروہی سمتی رفتار v_g کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہوگی۔ عنائف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہوگی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھالگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہوگی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہوگا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا حیظ بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا حیظ گھٹ کر منفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہوگا کہ کوانٹم میکانیات میں آزاد ذرے کے تعامل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہوگی۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

(یہاں $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$ ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے انتشاری رشتہ $\omega = \omega(k)$ کا متغیر k کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہوگا) ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیوت k_0 پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا k بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار

phase velocity^۱
group velocity^۲
dispersion relation^۳

سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنا پر یہ موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔ چونکہ k_0 سے دور مکمل و متابل نظر انداز ہے لہذا ہم تقاضا $\omega(k)$ کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلانے کا صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega'_0(k - k_0)$$

جہاں نقطہ k_0 پر k کے لحاظ سے ω کا تفرق ω'_0 ہے۔

(مکمل کے وسط کو k_0 پر منتقل کرنے کے عرض سے) ہم متغیر k کی جگہ متغیر $s = k - k_0$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0 + s)x - (\omega_0 + \omega'_0 s)t]} ds$$

وقت $t = 0$ پر

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)x} ds$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega'_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)(x - \omega'_0 t)} ds$$

ماسوائے x کو $(x - \omega'_0 t)$ منتقل کرنے کے یہ $\Psi(x, 0)$ میں پایا جانے والا مکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۰۵) \quad \Psi(x, t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} \Psi(x - \omega'_0 t, 0)$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں $|\Psi|^2$ کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوگا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار ω'_0 سے حرکت کرے گا:

$$(۲.۱۰۶) \quad v_{گروپی} = \frac{d\omega}{dk}$$

(جس کی قیمت کا حساب $k = k_0$ پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(۲.۱۰۷) \quad v_{دوری} = \frac{\omega}{k}$$

یہاں $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$ یعنی $\omega/k = (\hbar k / 2m)$ ہے جبکہ $d\omega/dk = \hbar k/m$ دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروپی سمتی رفتار ناکہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$(۲.۱۰۸) \quad v_{کلاسیکی} = v_{دوری} = 2v_{گروپی}$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر x کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$ اور $[C \cos kx + D \sin kx]$ ہیں۔ مستقلات C اور D کو مستقلات A اور B کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقلات A اور B کو مستقلات C اور D کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کوانٹم میکانیٹ میں جب $V = 0$ ہو، قوت نہائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ \sin اور \cos ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامتناہی چوکور کنویں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال J تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے باواکار کیا ہوگا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ متناہی وقفہ کے فوریئر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامتناہی تک بڑھاتے گئے۔
۱. مسئلہ ڈرشلے کہتا ہے کہ وقفہ $[-a, +a]$ پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو فوریئر تسلسل کے پھیلاوے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

a_n اور b_n کی صورت میں c_n کیا ہوگا؟

ب. فوریئر تسلسل کے عددی سروں کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} dx$$

ج. n اور c_n کی جگہ نئے متغیرات $k = (n\pi/a)$ اور $k = (\frac{n\pi}{a})$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جبزو-۱ اور جبزو-۲ درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx,$$

جہاں ایک n سے اگلی n تک k میں تبدیلی Δk ہے۔

د. حد $a \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ: $F(k)$ کی صورت میں $f(x)$ اور $f(x)$ کی صورت میں $F(k)$ کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوں گی۔ اس کے باوجود حد $a \rightarrow \infty$ کی صورت میں ان دونوں کی ساخت مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-a|x|}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\phi(k)$ تلاش کریں۔

ج. $\Psi(x, t)$ کو مکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں a بہت بڑا ہو، اور جہاں a بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: گاؤس موج اکٹھا ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں (a حقیقی اور مثبت ہے)۔

۱. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔ اشارہ: ”مربع مکمل کرتے ہوئے“ درج ذیل روپ کے تحمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

مان لیں $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$ ۔ یوں $y^2 - (b^2/4a) = (ax^2 + bx)$ ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج. $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar at/m)^2}}$$

وقت $t = 0$ پر $|\Psi|^2$ کا حاکم (بظور x کا تفاعل) بتائیں۔ کسی بڑے t پر دوبارہ خاکہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $|\Psi|^2$ کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$: اور احتمالات σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ جبزوی جواب:

$$\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$$

ہ. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کارآمد ہے؟ کس لمحہ t پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

۲.۵ ڈیلیٹف عمل مخفیہ

۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات

ہم غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامستثنائی چوکر کونواں اور ہارمونی سر تقش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اعشاریہ n کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر k کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تاجع وقت شرودنگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو گا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ (n پر لیا گیا) مجموعہ ہو گا، جبکہ دوسرے میں یہ (k پر) نکل ہو گا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تاجع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر $V(x)$ ذرے کی کل توانائی E سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-۱) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنویں میں ”پھنسا“ رہے گا؛ یہ **والپیٹ نقاط**^{۴۴} کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنویں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے مقید **حالت**^{۴۵} کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر E ایک (یا دونوں) جانب $V(x)$ سے تجاوز کرے تب، لامستثنائی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامستثنائی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-۲ ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **بکھراو حالت**^{۴۶} کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی سر تقش)؛ بعض صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پہاڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔

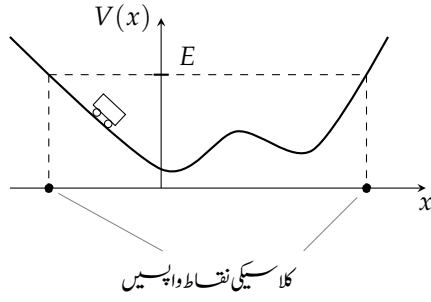
شرودنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ مندرجہ اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں **سرنگے زنی**^{۴۷} (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی مستثنائی مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہذا مخفیہ کی قیمت صرف لامستثنائی پر اہم ہو گی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$(۲.۱۰۹) \quad \begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases}$$

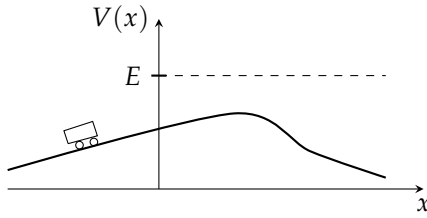
”روزمرہ زندگی“ میں لامستثنائی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں ملبہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$(۲.۱۱۰) \quad \begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases}$$

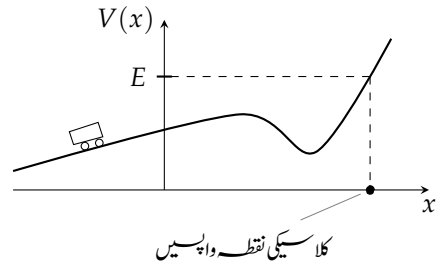
turning points^{۴۴}
bound state^{۴۵}
scattering state^{۴۶}
tunneling^{۴۷}



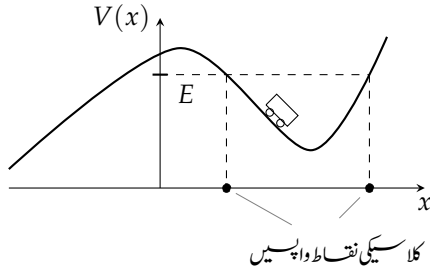
(i)



(ج)

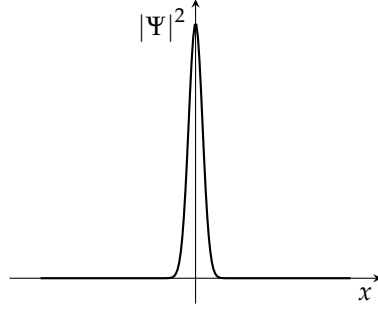


(ب)



(د)

شکل ۲.۱۲: (i) مقید حال، (ب، ج) بھراو حالات، (د) کلا سیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بھراو حال۔



شکل ۲.۱۳: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل (مساوات ۲.۱۱۱)

چونکہ $x \rightarrow \pm\infty$ پر لامتناہی چو کور کنویں اور ہارمونی سرعش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہذا یہ صرف بکھرا ہوا حال^{۷۸} پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں

مبداء پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا تفاعل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل ۱۳.۲) ڈیلٹا تفاعل^{۷۹} کہلاتا ہے۔

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (۲.۱۱۱)$$

نقطہ $x = 0$ پر یہ تفاعل متناہی نہیں ہے لہذا تکنیکی طور پر اس کو تفاعل کہنا غلط ہوگا (ریاضی دان اسے متعمم تفاعل^{۸۰} یا متعمم تقسیم^{۸۱} کہتے ہیں)۔ تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت ہر ایک ڈیلٹا تفاعل ہوگا) آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\delta(x - a)$ نقطہ a پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تفاعل ہوگا۔ چونکہ $\delta(x - a)$ اور ایک سادہ تفاعل $f(x)$ کا حاصل ضرب نقطہ a کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوگا لہذا $\delta(x - a)$ کو $f(x)$ سے ضرب دینا، اسے $f(a)$

^{۷۸} آپ کو یہاں پر روشنی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے $E > V$ درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھرا ہوا حال، جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہوگا۔ اگر آپ اسے مطمئن نہیں ہیں تب $E \leq 0$ کے لئے شرودنگر مساوات کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

^{۷۹} Dirac delta function

^{۸۰} generalized function

^{۸۱} generalized distribution

^{۸۲} ڈیلٹا تفاعل کو ایسے مستطیل (یا مثلث) کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے جس کی چوڑائی بتدریج کم اور قد بتدریج بڑھتا ہو۔

سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$(۲.۱۱۲) \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ڈیلٹا انتفاعی عمل کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$(۲.۱۱۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = f(a)$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ a پر انتفاعی عمل $f(x)$ کی قیمت ”اٹھاتا“ ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ ہو، صرف اینٹنٹوری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ a شامل ہو لہذا $a - \epsilon$ تا $a + \epsilon$ تکمل لینا کافی ہوگا جہاں $\epsilon > 0$ ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں α ایک مثبت مستقل ہے۔^{۸۳}

$$(۲.۱۱۴) \quad V(x) = -\alpha\delta(x)$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامتناہی چوکور کنویں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانی پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا انتفاعی عمل کنویں کے لیے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۲.۱۱۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi$$

جو مقید حالات ($E < 0$) اور بکھراو حالات ($E > 0$) دونوں پیدا کرتی ہے۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ $x < 0$ میں $V(x) = 0$ ہوگا لہذا

$$(۲.۱۱۶) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = k^2\psi$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں k درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے E منفی ہوگا لہذا k حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$(۲.۱۱۷) \quad k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

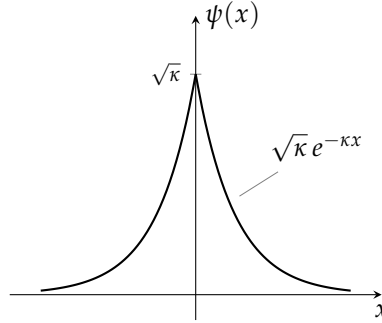
مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$(۲.۱۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

ہوگا جہاں $x \rightarrow -\infty$ پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا ہمیں $A = 0$ منتخب کرنا ہوگا:

$$(۲.۱۱۹) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad (x < 0)$$

^{۸۳} ڈیلٹا انتفاعی عمل کی اکائی ایک بٹ السبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہذا α کا بُعد توانائی ضرب السبائی ہوگا۔



شکل ۲.۱۴: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

خط $x > 0$ میں بھی $V(x)$ صفر ہے اور عمومی حل $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا؛ اب $x \rightarrow +\infty$ پر دوسرا جزو لامستثنائی کی طرف بڑھتا ہے لہذا $G = 0$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل ایسا جائے گا۔

$$(۲.۱۲۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad (x > 0)$$

ہمیں نقطہ $x = 0$ پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک ساتھ جوڑنا ہوگا۔ میں ψ کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

$$(۲.۱۲۱) \quad \begin{cases} 1. & \psi \text{ لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{d\psi}{dx} \text{ استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفیہ لامستثنائی ہو} \end{cases}$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت $F = B$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۲) \quad \psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases}$$

تفاعل $\psi(x)$ کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا مستثنائی چوکر کنویں کی طرح) جوڑ پر مخفیہ لامستثنائی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ $x = 0$ پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلٹا تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر ψ کے تفرق میں عدم استمراری بھی ڈیلٹا تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$(۲.۱۲۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx$$

پہلا مکمل درحقیقت دونوں آخری انتظام پر $\frac{d\psi}{dx}$ کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری مکمل اس پٹی کا رقبہ ہوگا، جس کا متدست نائی، اور $0 \rightarrow \epsilon$ کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہذا یہ مکمل صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۴) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{+\epsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہوگا لہذا $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوگا۔ لیکن جب سرح پر $V(x)$ لامتناہی ہو تب یہ دلیل متاثر قبول نہیں ہوگی۔ بالخصوص $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$(۲.۱۲۵) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

یہاں درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x > 0) \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x < 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d\psi}{dx}\Big|_{+} = -Bk \\ \frac{d\psi}{dx}\Big|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہذا $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$ ساتھ ہی $\psi(0) = B$ ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$(۲.۱۲۶) \quad k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$(۲.۱۲۷) \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

آخر میں ψ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے بہت حقیقی جذر کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۸) \quad B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلٹا فنکشن، کی ”زور“ α کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$(۲.۱۲۹) \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

ہم $E > 0$ کی صورت میں بکھراؤ حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شرودنجر مساوات $x < 0$ کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۳۰) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۱۳۱) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

جہاں کوئی بھی جزو بے فتا ہو نہیں بڑھتا ہے لہذا انہیں رد نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $x > 0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi(x)$ کے استمراری کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۳) \quad F + G = A + B$$

تصرفات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), & (x > 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & (x < 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$

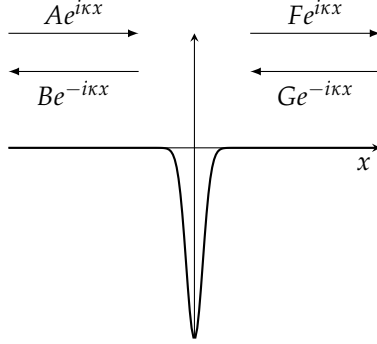
لہذا $\Delta(d\psi/dx) = ik(F - G - A + B)$ ہوگا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = (A + B)$ ہوگا لہذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$(۲.۱۳۴) \quad ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$$

یا مختصراً:

$$(۲.۱۳۵) \quad F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات A ، B ، C اور D بلکہ k شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہوگا۔ بہتر ہوگا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی



شکل ۲.۱۵: ڈیٹا تفاعل کنویں سے بکھراؤ۔

طبیعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ e^{ikx} (کے ساتھ تابع وقت جزو ضربی $e^{-iEt/\hbar}$ منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا تفاعل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح e^{-ikx} بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں متقل A بائیں سے آمدی موج کا جیٹ ہے، B بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا جیٹ ہے، F (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا جیٹ جبکہ H دائیں سے آمدی موج کا جیٹ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراؤ کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا جیٹ صفر ہو گا:

$$G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراؤ} \quad (۲.۱۳۶)$$

آمدی موج کا جیٹ A ، منعکس موج کا جیٹ B جبکہ ترسیل موج کا جیٹ F ہو گا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو B اور F کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$B = \frac{i\beta}{1 - i\beta} A, \quad F = \frac{1}{1 - i\beta} A \quad (۲.۱۳۷)$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراؤ کا مطالعہ کرنا چاہیں تب $A = 0$ ہو گا: G آمدی جیٹ، F منعکس جیٹ، اور B ترسیلی جیٹ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال $|\psi|^2$ ہوتا ہے لہذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی احتمال درج ذیل ہو گا

incident wave^{۸۶}
reflected wave^{۸۵}
transmitted wave^{۸۷}

اے معمول پر لانے کے متبادل تفاعل نہیں ہے لہذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہو گا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیرا گراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

$$(۲.۱۳۸) \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

جہاں R کو شرح انعکاس^{۸۸} کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو R آپ کو بتائے گا کہ ٹکرائے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہو گا جسے شرح ترسیل^{۸۹} کہتے ہیں۔

$$(۲.۱۳۹) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \beta^2}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہو گا۔

$$(۲.۱۴۰) \quad R + T = 1$$

دھیان رہے کہ R اور T متغیر β کے اور لہذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵) کے تفاعل ہوں گے۔

$$(۲.۱۴۱) \quad R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}}$$

توانائی جتنی زیادہ ہو، ترسیل کا احتمال اتنا ہی زیادہ ہو گا (جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے)۔

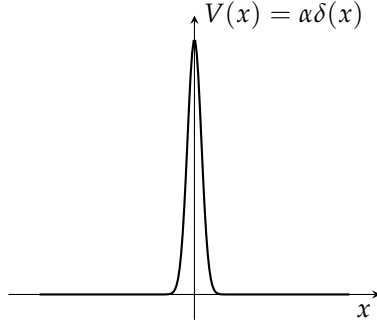
یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے تاہم ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ ہمسرا موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم ہم اس مسئلے کا حل جانتے ہیں۔ جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا، ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہو گئے جو معمول پر لائے جانے کے قابل ہوں۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھ ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کرنا بہتر ہو گا۔^{۹۰} چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جا سکتا ہے لہذا R اور T کو (بالترتیب) E کے متغیر ذرات کی تخمینی شرح انعکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم لب لباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بکھر کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور، ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مساوات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں) ψ ایک محلول، غیر تابع وقت، ساکن تفاعل ہے جو (مستقل جیل کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقنناتی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انعکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے، حقیقتاً حقیر تابعیت وقت کے تفاعل موج کے خطی جوڑ لے کر ایک (حرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے (سوال ۲.۴۳)

^{۸۸} reflection coefficient

^{۸۹} transmission coefficient

^{۹۰} توانوں اور راکٹوں سے موجی اکٹھ کے بکھراؤ کے عددی مطالعہ دلچسپ معلومات مندرجہ ذیل پر ہیں۔



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا فنکشن رکاوٹ۔

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا فنکشن رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف α کی علامت تبدیل کرنی ہوگی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انکاس اور شرح ترسیل جو α^2 پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنویں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ بھی لامتناہی مدت کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقت کلاسیکی مسائل بکھراؤ غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E > V$ بند $T = 0$ اور $R = 1$ ہوگا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا؛ اگر $E < V$ بند $T = 0$ اور $R = 1$ ہوگا اور ذرہ پہاڑی پروں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بکھراؤ زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E < V$ بند بھی ایک ذرے کا مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہوگا۔ اس مظہر کو **سرنگ زنی**^۹ کہتے ہیں جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کا سبب بنا ہے۔ اس کے برعکس $E > V$ کی صورت میں بھی ذرے کے انکاس کا احتمال غیر صفر ہوگا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کودیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹم میکانیات آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵) دیکھیے (۹)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل کمالات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$۱. \int_{-3}^{+1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \delta(x + 2) dx$$

$$ب. \int_0^{\infty} [\cos(3x) + 2] \delta(x - \pi) dx$$

$$ج. \int_{-1}^{+1} e^{|x|+3} \delta(x - 2) dx$$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا فنکشنات زیر علامت مکمل رہتے ہیں اور دو فکٹرے $D_1(x)$ اور $D_2(x)$ جو ڈیلٹا فنکشنات پر

مجبوری ہیں صرف درج صورت میں برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx$$

جہاں $f(x)$ کوئی بھی سادہ تفاعل ہو سکتا ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$(۲.۱۴۲) \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$$

جہاں c ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی c کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. سیرہ تفاعل^{۹۲} $\theta(x)$ درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم $\theta(0)$ کی تعریف $\frac{1}{2}$ کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ $d\theta/dx = \delta(x)$ ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ ψ کے تفرق کا $x = 0$ پر عدم استمراریا واجباً ہے لہذا $\langle p^2 \rangle$ کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴ ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

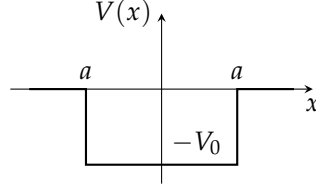
سوال ۲.۲۶: تفاعل $\delta(x)$ کا فورسٹر تبادل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۲.۱۴۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

تبصرہ: اس کلیہ دیکھ کر ایک عزت مندریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگرچہ $x = 0$ کے لئے یہ عمل لامتناہی ہے اور $x \neq 0$ کی صورت میں چونکہ مکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوند کاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم $-L$ تا $+L$ تکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو، $L \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے متناہی تکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع مکالمیت) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا تفاعل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۳ پر مربع مکالمیت کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲۷: درج ذیل جسٹراں ڈیلٹا تفاعل مخفیہ پر غور کریں جہاں α اور a مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$



شکل ۲.۱۷: مستنہی چوکور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵)۔

۱. اس مخفیہ کاخنا کہ کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟ $\alpha = \hbar^2 / ma$ اور $\alpha = \hbar^2 / 4ma$ کیلئے احبازتی توانائیاں تلاش کریں اور تناسلات موج کاخنا کہ کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: حبزواں ڈیلٹا تناسل کے مخفیہ (سوال ۲.۲۷) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

۲.۶ مستنہی چوکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر مستنہی چوکور کنویں کا مخفیہ

$$(۲.۱۴۵) \quad V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

لیتے ہیں جہاں V_0 ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۲.۱۷)۔ ڈیلٹا تناسل کنویں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں $E < 0$ ہوگا) کے ساتھ ساتھ بکھراؤ حالات (جہاں $E > 0$ ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خط $x < -a$ میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۴۶) \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل $\Psi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}$ ہے لیکن $x \rightarrow -\infty$ کے صورت میں اس کا پہلا حبزولے و تا بڑھتا ہے لہذا (ہمیشہ طرح؛ مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر و تا بل مقبول

حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۷) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad x < -a$$

خط $-a < x < a$ میں جہاں $V(x) = -V_0$ ہے شرودنجر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -V_0 \psi$$

جہاں l درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۸) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے E منفی ہے تاہم $E > V$ کی بنا پر (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو $-V_0$ سے بڑا ہونا ہو گا؛ لہذا l بھی حقیقی اور مثبت ہو گا۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا^{۹۳}

$$(۲.۱۴۹) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), \quad -a < x < a$$

جہاں C اور D اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خط $x > a$ جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے؛ عمومی حل $\psi(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہو گا تاہم $x \rightarrow \infty$ کی صورت میں دوسرا جزو بے فتا ہو پڑھتا ہے لہذا متبادل قبول حل درج ذیل ہو گا۔

$$(۲.۱۵۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad x > a$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے: ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ نقاط $-a$ اور $+a$ پر استمراری ہیں۔ یہ جاننے ہوئے کہ دیگیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت۔ یا طاق ہوں گے (سوال ۲.۱ ج۔) اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً $+a$) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ $\psi(-x) = \pm \psi(x)$ ہے لہذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہو گا۔ میں جفت حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔ \cos جفت ہے (جبکہ \sin طاق ہے) لہذا اس میں درج ذیل روپ کے حلول کی تلاش میں ہوں۔

$$(۲.۱۵۱) \quad \psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

نقطہ $x = a$ پر $\psi(x)$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$(۲.۱۵۲) \quad Fe^{-ka} = D \cos(la)$$

^{۹۳} آپ جانتے ہیں تو عمومی حل کو قوت نمائی روپ $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$ میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی وہی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشکیلی مخفیہ کی بنا پر ہم جانتے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور \sin اور \cos کا استعمال اس حقیقت کو بااد واسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔

جبکہ $\frac{d\psi}{dx}$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے۔

$$-\kappa F e^{-\kappa a} = -l D \sin(la) \quad (۲.۱۵۳)$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\kappa = l \tan(la) \quad (۲.۱۵۴)$$

چونکہ κ اور l دونوں E کے تفاعل میں لہذا اس کلیہ سے احبازتی توانائیاں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ احبازتی توانائی E کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad (۲.۱۵۵)$$

مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت $2mV_0/\hbar^2 = (\kappa^2 + l^2)$ ہوگا لہذا $\sqrt{z_0^2 - z^2}$ کا κa ہوگا اور مساوات ۲.۱۵۴ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (۲.۱۵۶)$$

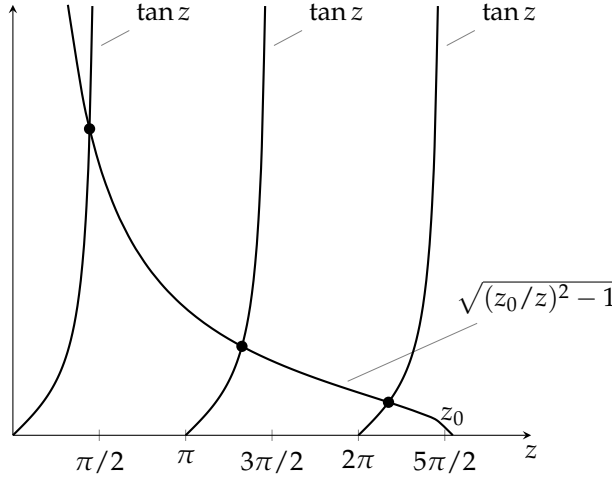
یہ z (لہذا E) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر z_0 ہے (جو کنویں کی ”جامت“ کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقہ سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جاسکتا یا $\tan z$ اور $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۱۸)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. پھڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی z_0 کی صورت میں طاق n کے لئے نقاط تقاطع $z_n = n\pi/2$ سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} \quad (۲.۱۵۷)$$

اب $E + V_0$ کنویں کی تہ سے زیادہ توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں $2a$ چوڑائی کے لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ n یہاں طاق ہے لہذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہوگی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفاعل موج سے حاصل ہوگی)۔ یوں $V_0 \rightarrow \infty$ کرنے سے مستثنائی چوکور کنواں سے لامستثنائی چوکور کنواں حاصل ہوگا؛ تاہم کسی بھی مستثنائی V_0 کی صورت میں مقید حالات کی تعداد مستثنائی ہوگی۔

ب. کم گہرا، کم پھڑا کنواں۔ جیسے جیسے z_0 کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ آخر کار $(z_0 < \pi/2)$ کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا (صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی ”کمزور“ کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔



شکل ۲.۱۸: تریسی حل برائے مساوات ۲.۱۵۶ جہاں $z_0 = 8$ لیا گیا ہے (جفت حالات)۔

اگر آپ ψ (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراؤ حالات ($E > 0$) کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ بائیں ہاتھ جہاں $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۵۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۹) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

کنویں کے اندر جہاں $V(x) = -V_0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۰) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad (-a < x < a)$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۱) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

دائیں جانب، جہاں ہم منسوخ کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی، درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

یہاں آمدی حیطہ A ، انعکاسی حیطہ B اور ترسیلی حیطہ F ہے۔^{۹۳}

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ $-a$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۳) \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

نقطہ $-a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۴) \quad ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

نقطہ $+a$ پر $\psi(x)$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۵) \quad C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika}$$

اور $+a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$(۲.۱۶۶) \quad l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika}$$

ہم ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے C اور D حارج کر کے باقی دو کو B اور F کے لئے حل کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے)۔

$$(۲.۱۶۷) \quad B = i \frac{\sin(2la)}{2kl} (l^2 - k^2) F$$

$$(۲.۱۶۸) \quad F = \frac{e^{-2ika} A}{\cos(2la) - i \frac{(k^2 + l^2)}{2kl} \sin(2la)}$$

شرح ترسیل $T = |F|^2 / |A|^2$ کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

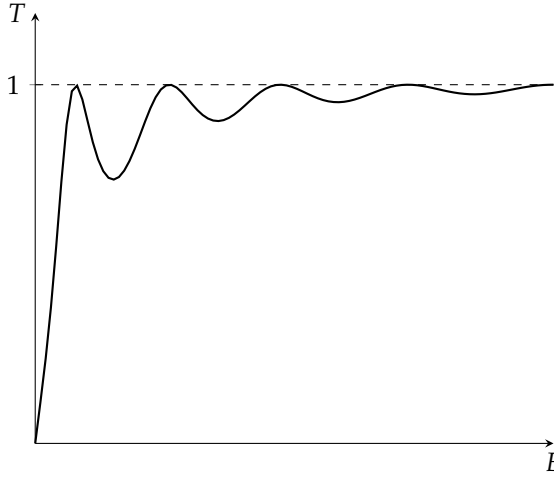
$$(۲.۱۶۹) \quad T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right)$$

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں n عدد صحیح ہے

$$(۲.۱۷۰) \quad \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi$$

وہاں $T = 1$ (اور کنواں ”مکمل شفاف“) ہوگا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۷۱) \quad E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$



شکل ۲.۱۹: ترسیلی مستقل بطور توانائی کا تفاعل (مساوات ۲.۱۶۹)۔

جو عین لامتناہی چوکور کنویں کی احبازتی توانائیاں ہیں۔ شکل ۲.۱۹ میں توانائی کے لحاظ سے T ترسیم کیا گیا ہے۔^{۹۵}

سوال ۲.۲۹: مستنای چوکور کنویں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ احبازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیبی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا $\psi(x)$ معمول پر لا کر مستقل D اور F تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور متد لامتناہی تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کو اس (مساوات ۲.۱۱۴) لامتناہی گہرا ہونے کے باوجود $0 \rightarrow z_0$ کی بنا پر ایک ”مختفیہ“ ڈیلٹا تفاعل مختفیہ کو مستنای چوکور کنویں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تختیفہ مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے C اور D کو F کی صورت

^{۹۴} مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفاعلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بھراؤ میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تکیلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حسرت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نہائی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔

^{۹۵} اس حیرت کن مظہر کا مشاہدہ تجربہ گاہ میں بطور مرآور وٹوٹنڈا اثر (Ramsauer-Townsend effect) کیا گیا ہے۔

میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i\frac{k}{l} \cos(la)]e^{ika}F; \quad D = [\cos(la) - i\frac{k}{l} \sin(la)]e^{ika}F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیلی رکاوٹ (جسے خطہ $-a < x < a$ میں $V(x) = +V_0 > 0$ سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعیین کریں۔ تین صورتوں $E = V_0$ ، $E < V_0$ اور $E > V_0$ کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تقابل موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) حبزوی جواب: $E < V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔^{۹۱}

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیزھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس $E < V_0$ صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس $E > V_0$ صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہوگی لہذا شرح ترسیل $|F|^2 / |A|^2$ نہیں ہوگی (جہاں A آمدی جیٹ اور F ترسیلی جیٹ ہے)۔ دکھائیں کہ $E > V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (۲.۱۷۲)$$

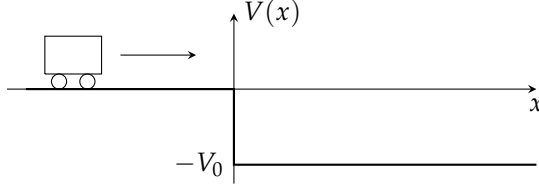
اشارہ: آپ اے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رد (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ $E < V_0$ کی صورت میں T کیا ہوگا؟

د. صورت $E > V_0$ کے لئے سیزھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے $T + R = 1$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور حرکی توانائی $E > 0$ ہو مخفیہ کی ایک اچانک گہرائی (شکل ۲.۲۰) کی طرف بڑھتا ہے۔

ا. صورت $E = V_0/3$ میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳۳ کی طرح ہے، بس یہاں سیزھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

^{۹۱} یہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔



شکل ۲.۲۰: عمودی چٹان سے بکھراؤ (سوال ۲.۳۵)۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکرا کر واپس لوٹنے کا احتمال جزو-۱ کے نتیجہ سے بہت کم ہوگا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل ۲.۲۰ میں جیسے ہی گاڑی نقطہ $x = 0$ پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی عدم استقرار کے ساتھ گر کر $-V_0$ ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئی گاڑی کے لیے درست ہوگا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کی محسوس کرتا ہے۔ باہر $V = 0$ جبکہ مرکزہ کے اندر $V = -12 \text{ MeV}$ ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ اشتقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی 4 MeV ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا اشتقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ نے جزو-۱ میں انکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ $T = 1 - R$ استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبداء $-a < x < +a$ کے بیچ لامتناہی چوکور کنویں کے اندر $V(x) = 0$ اور اس کے باہر $V(x) = \infty$ ہے۔ غنیر تابع وقت شرودنگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری ψ (مساوات ۲.۲۸) میں $(x+a)/2 \rightarrow x$ پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام ψ حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنویں کی چوڑائی $2a$ ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاصل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل A اور $\Psi(x, t)$ تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے $\langle x \rangle$ کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: $\sin^n \theta$ اور $\cos^n \theta$ کو تخفیف کے بعد $\sin(m\theta)$ اور $\cos(m\theta)$ کے خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ہوگا۔

سوال ۲.۳۸: کیت m کا ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔

اچانک کنویں کا دیاں دیوار a سے $2a$ منتقل ہوتا ہے جس سے کنویں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لحاقی طور پر اس عمل سے تقاسم موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

ا. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہوگا؟

ج. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامستثنائی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

ا. دکھائیں کہ لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرہ کا تقاسم موج کو انشائی تجبیدی عرصہ $T = 4ma^2 / \pi \hbar^2$ کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$ ہوتا ہے۔

ب. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی E ہو کا کلاسیکی تجبیدی عرصہ کیا ہوگا؟

ج. کس توانائی کیلئے یہ تجبیدی عرصہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟^{۹۸}

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل مخفی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2 / ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

ا. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہوگی؟

ب. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنویں کے باہر ($x > a$) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنویں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنویں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ہارمونی سرقتش کی مخفی (مادات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے جہاں A کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ا. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

^{۹۷} revival time

^{۹۸} یہ غور طلب تضاد ہے کہ کلاسیکی اور کو انشائی تجبیدی عرصوں کا ہر ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور کو انشائی تجبیدی عرصہ توانائی پر منحصر بھی نہیں ہے۔)

ب. مستقبل کے لمحہ T پر تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\Psi(x, T) = B \left(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

جہاں B کوئی مستقل ہے۔ لمحہ T کی کم سے کم ممکن قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی سرعش کی احبازی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا سپرنگ جس کو کھینچا تو جاسکتا ہے لیکن دبایا نہیں جاسکتا ہے) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح معنوماری کرنی ہوگی جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہوگی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۴۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2} e^{ilx}$$

جہاں l ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبداء پر لامستثنائی چوکور کواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تفاعل عمل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کریں۔

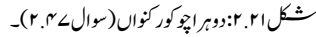
$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ احبازی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترمیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تفاعل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تفاعل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں $0 \rightarrow a$ اور $a \rightarrow \infty$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے منفرد^{۹۹} حل جن کی توانائی E ایک جیسی ہو کو **انخطاطی**^{۱۰۰} کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انخطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انخطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ محض ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: ایک بعدی مقید انخطاطی حال نہیں پائے جاتے ہیں۔^{۱۰۱}

^{۹۹} ایسے دو حل جن میں صرف جبزو ضربی کا مشرق پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتب معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جبزو ϕ کا مشرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جاسکتا ہے۔ یہاں ”منفرد“ سے مراد ”خطی طور پر غیر تاجع“ ہے۔
degenerate^{۱۰۰}

^{۱۰۱} عجیب! ہم باب ۳ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انخطاط عام پائی جاتی ہیں۔ مندرجہ کریں کہ مخفی علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے سچے نقطہ میں $V = \infty$ ہو۔ مثلاً دو تنہا لامستثنائی کنویں مقید انخطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنویں میں پایا جائے گا۔



ج۔ دو جوہری سالہ میں الیگنڈران ٲر اثر انداز مٹنی توانائی کا تاریکی دوری نمونہ دوہرا کنواں ٲیش کش کرنا ہے (سرگزروں کی قوم کشش کو دو کنوین ظاہر کرتی ہیں)۔ اگر سرگزروں سے آزادی سے سرگزرت کر سکتے ہوں تب یہ کم سے کم توانائی تفصیل اختیار کریں گے۔ جزو۔ (ب) میں حاصل نتیج کے تحت کیا الیگنڈران ان سرگزروں کو ایک

دوسرے کے متضرب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور رہنے پر مجبور کرے گا۔ (اگرچہ دوسرے کڑوں کے بیچ قوت دفع بھی پایا جاتا ہے تاہم اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔)

سوال ۲.۳۸: آپ نے مساوات ۲.۳۹ کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال ۲.۷۲ میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں حاشیہ میں آپ کو میں نے آگاہ کیا کہ اس کو $\langle H \rangle = \int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$ کے پرانے طریقے سے حاصل نہ کریں چونکہ $\psi(x, 0)$ کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ مکمل بالخصوص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈیراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھے مسائل حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ فراہم کرتا ہے۔

ا. آپ سوال ۲.۷۲ میں $\psi(x, 0)$ کا پہلا تفرق حاصل کر کے اس کو سیدھی تفاعل $\theta(x - a/2)$ کی صورت میں لکھیں جسے مساوات ۲.۱۴۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ (آخری سروں کی منکر نہ کریں، صرف اندرونی خطہ $0 < x < a$ کے لیے لکھیں۔)

ب. ابتدائی موجی تفاعل $\psi(x, 0)$ کے دوہرا تفرق کو سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

ج. مکمل $\int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$ کو حل کر کے اس کی قیمت حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ پہلے حاصل کر چکے ہیں۔

سوال ۲.۴۹:

ا. دکھائیں کہ ہارمونی سر تفرق کی مخفی توانائی (مساوات ۲.۴۳) کے لئے

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{a^2}{2} (1 + e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t} \right)}$$

تاجع وقت شرودنگر مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں a ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔^{۱۰۲}

ب. $|\psi(x, t)|^2$ تلاش کریں اور موجی اکٹھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

ج. $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کا حساب لگائیں اور دیکھیں آیا مسئلہ ابرفٹ (مساوات ۱.۳۸) پر یہ پورا اترتے ہیں۔

سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کنویں پر غور کریں

$$V(x, t) = -\alpha \delta(x - vt)$$

جہاں کنویں کی (غیر تغیر) سمتی رفتار کو v ظاہر کرتا ہے۔

ا. دکھائیں کہ تاجع وقت شرودنگر مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i[(E+(1/2)mv^2)t - mvx]/\hbar}$$

^{۱۰۲} تاجع وقت شرودنگر مساوات کے ٹیکہ-بند روپ میں حل کی یہ ایک نایاب مثال ہے۔

جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ساکن ڈیلٹا تفاعل کے مقید حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو شروڈنگر مساوات میں پر کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔ سوال ۲.۲۴-ب کا انتخاب استعمال کریں۔

ب۔ اس حال میں ہیمیلٹن کی توقعاتی قیمت تلاش کر کے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۵۱: درج ذیل مخفیہ پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax)$$

جہاں a ایک مثبت مستقل ہے۔

۱. اس مخفیہ کو ترسیم کریں۔

ب۔ تصدیق کریں کہ اس مخفیہ کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A \operatorname{sech}(ax)$$

اور اس کی توانائی تلاش کریں۔ ψ_0 کو معمول پر لا کر اس کی ترسیم کا حاکم بنائیں۔

ج۔ دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کسی بھی (مثبت) توانائی E کے لیے شروڈنگر مساوات کو حل کرتا ہے (جہاں ہمیشہ کی طرح $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے)۔

$$\psi_k(x) = A \left(\frac{ik - a \tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}$$

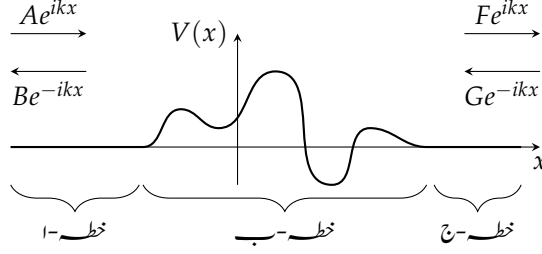
چونکہ $z \rightarrow -\infty$ سے $z \rightarrow -1$ $\tanh z$ ہوگا لہذا x کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\psi_k(x) \approx Ae^{ikx} \quad \text{بڑی منفی } x \text{ کے لیے}$$

جو e^{-ikx} کی عدم موجودگی کی بنا، بائیں سے آمد ایک موج کو ظاہر کرتا ہے جس میں کوئی انعکاسی موج نہیں پائی جاتی ہے۔ x کی بڑی مثبت قیمتوں کے لیے $\psi_k(x)$ کی متناوبی روپ کیا ہوگی؟ اس مخفیہ کے لیے R اور T کیا ہوں گے؟ تبصرہ: یہ بلا انعکاس مخفیہ^{۱۰۳} کی ایک بہت مشہور مثال ہے؛ ہر ذرہ، اس سے قطع نظر کہ اس کی توانائی کتنی ہے، اس مخفیہ سے سیدھا گزرتا ہے۔

سوال ۲.۵۲: قالبے بکھراؤ۔^{۱۰۴} امتحانی مخفیہ کے لیے بکھراؤ کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے (مشکل ۲.۲۲)۔ بائیں ہاتھ خطہ-۱ میں $V(x) = 0$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{جہاں} \quad (۲.۱۴۳)$$



شکل ۲.۲۲: معتمی اختیاری مخفیہ (جو خط-۲ کے علاوہ $V(x) = 0$ ہے) سے بکھراؤ (سوال ۲.۵۲)۔

دائیں ہاتھ خط-۳ میں بھی $V(x) = 0$ ہے لہذا یہاں درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۷۴) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

ان دونوں کے بیچ خط-۲ میں مخفیہ جانے بغیر میں آپ کو ψ کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا، تاہم چونکہ شرودنگر مساوات خطی اور دور تہی تفرقی ہے لہذا اس کا عمومی حل لازماً درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Cf(x) + Dg(x)$$

جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو خطی غیر تانبہ مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد سرحدی شرائط ہوں گے جن میں سے دو خط-۱ اور B کو جوڑیں گے اور باقی دو خط-۲ اور C کو استعمال کر کے D کو حنا رن کرتے ہوئے باقی دو کو حل کر کے A اور G کی صورت میں B اور F تلاش کیے جاسکتے ہیں:

$$B = S_{11}A + S_{12}G, \quad F = S_{21}A + S_{22}G$$

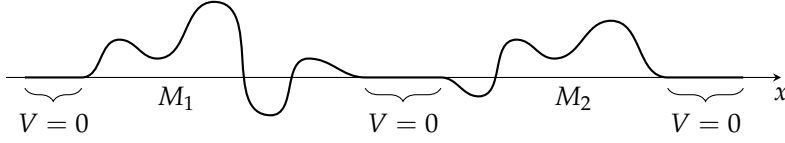
یہ چار عددی سر S_{ij} جو k (لہذا E) پر منحصر ہیں 2×2 متالب S دیتے ہیں جس کو قالب ^{۱۰۵} یا مختصر قالب S ^{۱۰۶} کہتے ہیں۔ متالب S آپ کو آمدی حیطوں (A اور G) کی صورت میں رخصتی حیطوں (B اور F) کی قیمت دیتا ہے:

$$(۲.۱۷۵) \quad \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

بائیں سے بکھراؤ کی صورت میں $G = 0$ ہوگا لہذا انعکاسی اور ترسیلی شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$(۲.۱۷۶) \quad R_I = \frac{|B|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{11}|^2, \quad T_I = \frac{|F|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{21}|^2$$

scattering matrix ^{۱۰۵}
S-matrix ^{۱۰۶}



شکل ۲.۲۳: دو تہا حصوں پر مبنی مخفیہ (سوال ۲.۵۳)۔

دائیں سے بکھراؤ کی صورت میں $A = 0$ ہو گا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۱۷۷) \quad R_r = \frac{|F|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{22}|^2, \quad T_r = \frac{|B|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{12}|^2$$

۱. ڈیلٹا تفاعل کنویں (مساوات ۲.۱۱۳) کے لیے بکھراؤ کا متالاب S تیار کریں۔

ب. لامستثنائی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۳۵) کے لیے متالاب S تیار کریں۔ اشارہ: مسئلہ کی تشاکلی پن بروئے کار لائیں۔ نئے کام کی ضرورت نہیں ہوگی۔

سوال ۲.۵۳: **قابلہ ترسیل**۔ ۴۔ متالاب S (سوال ۲.۵۲) آپ کو رخصتی حیطوں (B اور F) کو آمدی حیطوں (A اور G) کی صورت میں پیش کرتا ہے (مساوات ۲.۱۷۵)۔ بعض اوقات ترسیلی متالاب M کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفیہ کے دائیں جانب حیطوں (F اور G) کو بائیں جانب حیطوں (A اور B) کی صورت میں پیش کرتا ہے:

$$(۲.۱۷۸) \quad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

۱. متالاب S کے اجزاء کی صورت میں متالاب M کے چار اجزاء تلاش کریں۔ اسی طرح متالاب M کے چار اجزاء کی صورت میں متالاب S کے اجزاء تلاش کریں۔ مساوات ۲.۱۷۶ اور مساوات ۲.۱۷۷ میں دیے گئے R_r, T_r, R_l, T_l اور M کو متالاب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

ب. فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسا مخفیہ ہو جو دو تہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو (شکل ۲.۲۳)۔ دکھائیں کہ اس پورے نظام کا M متالاب ان دو حصوں کے انفرادی M متالاب کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$(۲.۱۷۹) \quad M = M_2 M_1$$

(ظاہر ہے کہ آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفیہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ یہی M متالاب کی اہمیت کا سبب ہے۔)

ج. نقطہ a پر (درج ذیل) واحد ایک ڈیلٹا تفاعل مخفیہ سے بکھراؤ کا M متالاب تلاش کریں۔

$$V(x) = -\alpha \delta(x - a)$$

د. جبزو-ب کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دوہرا ڈیلٹا تف عمل

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

کے لیے M متاثر تلاش کریں۔ اس مخفیہ کی ترسیمی شرح کیا ہوگی؟

سوال ۲.۵۴: دم ہلانے کی ترکیب سے ہارمونی سرعش کی زمینی حال توانائیوں کو پانچ معنی خیز ہندسوں تک تلاش کریں۔ یعنی K کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات ۲.۴ کو اعدادی طریقہ سے یوں حل کریں کہ \hbar کی بڑی قیمت کے لیے حاصل تف عمل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کرے۔ ماتھمیٹیکا میں درج ذیل پر کرنے سے ایسا ہوگا

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[u[x] /. \text{NDSolve}[u''[x] - (x^2 - K) * u[x] == 0, u[0] == 1, u'[0] == 0, \\ u[x], x, 10^{-8}, 10, \text{MaxSteps} \rightarrow 10\,000]], x, a, b, \text{PlotRange} \rightarrow c, d]$$

یہاں a, b ترسیم کی افقی سمت جبکہ c, d انتہائی سمت ہے (ابتدا $a = 0, b = 10, c =$ اور $d = 10$ سے کریں)۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا درست جواب $K = 1$ ہے لہذا آپ $K = 0.9$ سے شروع کر سکتے ہیں۔ تف عمل موج کی ”دم“ پر نظر رکھیں۔ اب $K = 1.1$ لیں، آپ دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف پلٹ جائے گی۔ ان دونوں کے بیچ کہیں درست حل موجود ہے۔ K کی قیمت کو درست قیمت کے دونوں اطراف متعرب سے متعرب لانے سے درست جواب حاصل ہوگا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ (سوال ۲.۵۴) استعمال کرتے ہوئے ہارمونی سرعش کے ہیجان حال توانائی کو پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیے آپ کو $u[0] = 0$ اور $u'[0] = 1$ لینا ہوگا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامتناہی چوکور کنویں کی اولین چار توانائیوں کی قیمتیں پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۲.۵۴ کی تفرقی مساوات میں درکار تبدیلیاں لائیں۔ اس بار آپ کو $u(1) = 0$ چاہتے ہیں۔

باب ۳

قواعد و ضوابط

۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کے ”ناگہاں“ خدوخال تھے (مثلاً ہارمونی سر تعش میں توانائی کی سطح میں جفت و ناصلے) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔ یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تناسل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تناسل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ متبادل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ تناسل موج، ریاضیاتی طور پر، تصوراتی سمتیائے ایک تعریفی شرائط پر پورے اترتے ہیں؛ جبکہ عاملین ان پر خطی متبادلہ کا عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی متدرج زبان خطی الجبرا^۳ ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ $\langle \alpha |$ کو N بُعدی فضا میں کسی مخصوص

^۱vectors

^۲linear transformations

^۳linear algebra

^۴آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے N عدد اجزاء $\{a_n\}$ سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔

$$(۳.۱) \quad |\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

دو سمتیات کا اندرونی ضرب^۵ $\langle\alpha|\beta\rangle$ (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسعت دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہوگا۔

$$(۳.۲) \quad \langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N$$

خطی تبدل^۶ T ، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) قوال^۷ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو تالیبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$(۳.۳) \quad |\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کو انٹرمیکانیات میں پائے جانے والے ”سمتیات“ درحقیقت (زیادہ تر) تفاعلات ہوتے ہیں جو لامستثنائی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں N اجزائی تالیبی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور مستثنائی ابعاد میں سمجھ آنے والی ٹھیک وضاحتیں، لامستثنائی ابعاد میں پریشان کن ثابت ہو سکتی ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ مساوات ۳.۲ کا مستثنائی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، البتہ، لامستثنائی مجموعہ یا مکمل، عدم سرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگی لہذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہوگی۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علاقیت سے آپ واقف ہوں گے، مگر حال ہوشیار رہنا بہتر ہوگا۔

متغیر x کے تمام تفاعلات مل کر سمتی فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکن طبعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل موج Ψ معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام مربع متکامل تفاعلات^۸

$$(۳.۴) \quad \text{ہو} \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{جہاں} \quad f(x)$$

inner product^۵
matrices^۶

ہمارے لئے حدود (a اور b) تقریباً ہر مرتبہ $\pm\infty$ ہوں گی، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہوگا۔
square-integrable functions^۸

مسئلہ (۱) اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۱.۳-۱ ادیکھیں)۔ ریاضی دان اسے $L_2(a, b)$ جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا^۹ کہتے ہیں۔ یوں کو انٹیمیکانیات میں

(۳.۵) **تفاعلات موج ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔**

دو تفاعلات کے اندرونی ضربے کی تعریف درج ذیل ہے جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ تفاعلات ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f(x) * g(x) dx$$

اگر f اور g دونوں مربع متکامل ہوں (یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کی اندرونی ضرب موجود ہوگی (مساوات ۳.۶ کا مکمل ایک متناہی عدد^{۱۱} پر مرکوز ہوگا)۔ ایسا شواہد عدم مساوات^{۱۲} کے درج ذیل عملی روپ^{۱۳} کے پیش نظر ہوگا۔

$$(۳.۷) \quad \left| \int_a^b f(x) * g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پوری اترتی ہے (سوال ۳.۱-ب)۔ بالخصوص درج ذیل مساوات میں ہم دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۳.۸) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید $f(x)$ کی اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$(۳.۹) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Hilbert space^۹

۱۰. تکنیکی طور پر، ہلبرٹ فضا سے مراد مکمل اندرونی ضرب فضا ہے، اور مربع متکامل تفاعلات کا ذخیرہ ہلبرٹ فضا کی قطعاً ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر متناہی ابعادی سمتی فضا ایک بے وقت ہلبرٹ فضا ہوگی۔ چونکہ L_2 کو انٹیمیکانیات کا اکھاڑا ہے لہذا ماہر طبیعیات اسی کو "ہلبرٹ فضا" کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ مکمل سے مراد یہ ہے کہ ہلبرٹ فضا کے کسی بھی تفاعل کی کوئی ترتیب جس تفاعل پر مرکوز ہو، وہ اسی فضا میں پایا جائے۔ اس میں کوئی "سوراخ" نہیں پایا جاتا، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پایا جاتا (اس کے برعکس، مثلاً، تمام کثیررکنیوں کی فضا میں اور تمام ناطق اعداد کے سلسلہ میں بقسماً سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا تفاعل کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ (ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعلات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

۱۱. باب ۳ میں بعض اوقات ہمیں محسوس ہوتا ہے کہ متبادل تفاعلات کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبرٹ فضا سے باہر لیتے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنی ہوگی۔ ابھی کے لئے میں فرض کرتا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔

Schwarz inequality^{۱۲}

۱۳. متناہی ابعادی سمتی فضا میں شواہد عدم مساوات $\langle \alpha|\beta \rangle \leq \langle \alpha|\alpha \rangle \langle \beta|\beta \rangle$ کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۲۲۹ پر سوال ۱.۱ دیکھیں)۔ تاہم یہ ثبوت فرض کرتا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہوگی؛ یہ صرف اس صورت^{۱۴} میں صفر ہوگی جب $f(x) = 0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت میں معمول^{۱۵} شدہ کہلاتا ہے جب اس کی اپنی ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک (1) کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت میں عمودی^{۱۶} ہوں گے جب ان کی اندرونی ضرب صفر (0) ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ $\{f_n\}$ اس صورت میں معیاری^{۱۷} عمودی^{۱۸} ہوگا جب تمام تفاعلات (درج ذیل دیکھیں) معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں۔

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۱۰)$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت میں مکمل^{۱۸} ہوگا جب (لمبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت (درج ذیل دیکھیں) میں لکھا جاسکے۔

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (۳.۱۱)$$

معیاری عمودی تفاعلات $\{f_n(x)\}$ کے عددی سر، فوریئر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$c_n = \langle f_n | f \rangle \quad (۳.۱۲)$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لا متناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات) (مساوات ۲.۲۸) وقفہ $(0, a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتفعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ یا مساوات ۲.۸۵) وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱:

ا. ظاہر کریں کہ تمام مربع متکا مسل تفاعلات کا سلسلہ مستحق فضا دے گا (صفحہ ۲۲۹ پر ضمیمہ ۱.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہوگا کہ دو مربع متکا مسل تفاعلات کا مجموعہ خود مربع متکا مسل تفاعل ہوگا۔ مساوات ۳.۱۳ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ مستحق فضا ہوگا؟

ب. ظاہر کریں کہ مساوات ۳.۶ کا مکمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ ۲.۱) کی تمام شرطیں پورا کرتا ہے۔

^{۱۴} ایسے تفاعل کے لئے کیا کہا جاسکتا ہے جو چند مخصوص تنہا نقاط کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوں؟ اگرچہ تفاعل معدوم نہیں ہے لیکن مکمل (مساوات ۳.۹) اب بھی معدوم ہوگا۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تو آپ کو ریاضی پر حنی چاہیے۔ طبیعت میں ایسے سمجھیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم لمبرٹ فضا میں ایسے دو تفاعلات، جن کے مربع مکمل برابر ہوں، کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر لمبرٹ فضا میں ترسیلات در حقیقت تفاعلات کی تعادل^{۱۹} جماعت^{۲۰} کو ظاہر کرتی ہیں۔

normalized^{۱۵}

orthogonal^{۱۶}

orthonormal^{۱۷}

complete^{۱۸}

سوال ۳.۲:

۱. وقفہ $(0, 1)$ کے بیچ، متغیر v کے کس خطہ پر، تعامل $x^v = f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟ فرض کر لیں کہ v حقیقی تاہم ضروری نہیں کہ مثبت ہو۔

ب. کیا $v = \frac{1}{2}$ کی مخصوص صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تعامل $xf(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تعامل $(\frac{d}{dx})f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

۳.۲ قابل مشاہدہ

۳.۲.۱ ہر مشی عاملین

قابل مشاہدہ $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب عملیات^۹:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle \quad (۳.۱۳)$$

کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ اب پیش کش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہوگا، لہذا بہت ساری پیش کشوں کی اوسط بھی حقیقی (درج ذیل دیکھیں) ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \quad (۳.۱۴)$$

لیکن اندرونی ضرب کا مخلوط جوڑ داری ترتیب کو الٹ دیتا ہے (مساوات ۳.۸) لہذا ہماری مساوات درج ذیل ہو جائے گی

$$\langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle^* \quad (۳.۱۵)$$

جو لازماً کسی بھی تعامل موج Ψ کے لئے درست ہوگی۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین میں درج ذیل اہم خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} | f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ کے لئے} \quad (۳.۱۶)$$

ایسے عاملین کو ہم ہر مشی^{۲۰} کہتے ہیں۔

^۹ یاد رہے کہ $\hat{p} = (\hbar/i) d/dx$ پر کر کے Q سے عامل \hat{Q} حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے فطری ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد a اور b اور تعامل f اور g کے لئے $a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x) = \hat{Q}[af(x) + bg(x)]$ ہوگا۔ یہ تمام تعاملات کی فضا پر خطی حسابہ (ضرب) قائم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر کے تعامل کو باہر کے تعامل میں لے جاتے ہیں (سوال ۳.۲-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آ سکتی ہے۔

^{۲۰} hermitian

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط عائد کی جاتی ہے۔

$$(۳.۱۷) \quad \langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے}$$

تاہم مختلف نظر آنے کے باوجود، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کی عین معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نکتہ یہ ہے کہ ہر مشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کو انٹیم میکانیات میں ہر مشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

$$(۳.۱۸) \quad \text{قابل مشاہدہ کو ہر مشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔}$$

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیار حرکت کا عامل ہر مشی ہے؟

$$(۳.۱۹) \quad \langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ مربع مکامل ہیں لہذا $\pm\infty$ پر ان دونوں کو صفر تک بانٹنا چاہیے^{۲۱} جس کی بنا پر مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مکمل بالخصوص سے پیدا منفی کی علامت کو i کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل d/dx (جس میں i نہیں پایا جاتا) غیر ہر مشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: ظاہر کریں کہ اگر ہلبرٹ فضا میں تمام تعامل h کے لیے $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle h | \hat{Q}h \rangle$ ہو تب تمام f اور g کے لیے $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$ ہوگا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہر مشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے $h = f + g$ اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہر مشی عاملین کا مجموعہ خود بھی ہر مشی ہوگا۔

ب. فرض کریں \hat{Q} ہر مشی ہے اور α ایک مخلوط عدد ہے۔ $\alpha \hat{Q}$ پر کیا شرائط عائد کرنے سے $\alpha \hat{Q}$ بھی ہر مشی ہوگا؟

ج. دو ہر مشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مشی ہوگا؟

د. دکھائیں کہ عامل مقام ($\hat{x} = x$) اور ہیمیلٹنی عامل ($\hat{H} = -(\hbar^2/2m) d^2/dx^2 + V(x)$) ہر مشی ہیں۔

^{۲۱} حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے گھمبیر تعاضلات پائے جاتے ہیں جو مربع مکامل ہونے کے باوجود لامتناہی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تعاضلات طبعیات میں نہیں پائے جاتے، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے تو ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کر دیتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ متناہی وقفے پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان دینا ہوگا کیونکہ $(-\infty, \infty)$ پر ہر مشی عامل، $(0, \infty)$ یا $(-\pi, \pi)$ پر غیر ہر مشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامتناہی چوکور کنویں کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تعاضلات موج لامتناہی لکیر پر پائے جاتے ہیں، جو کسی وجہ سے $(0, a)$ کے باہر صفر ہیں۔

سوال ۳.۵: عامل \hat{Q} کا ہر مشی جوڑی دار^{۲۲} یا شریکے عامل^{۲۳} \hat{Q}^+ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(۳.۲۰) \quad \langle f | \hat{Q} g \rangle = \langle \hat{Q}^+ f | g \rangle \quad (\text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے})$$

یوں ہر مشی عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر $(\hat{Q} = \hat{Q}^+)$ گا۔

۱. x, i اور d/dx کے ہر مشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی مرتعش کے عامل رفت a_+ (مساوات ۲.۴۷) کا ہر مشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^+ = \hat{R}^+\hat{Q}^+$ ہوگا۔

۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کے مندرجہ، جس میں تمام ψ ایک حال میں ہوں، پر قابل مشابہ Q کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کوانٹم میکانیات کی عدم تعیینیت^{۲۴}۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں Q کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم q کہہ لیں) دے؟ اس کو آپ قابل مشابہ Q کا تعیین حال^{۲۵} کہہ سکتے ہیں۔ (درحقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات، ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال Ψ_n میں ایک ذرے کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی ”اجازتی“ توانائی E_n دیگی۔)

تعیین حال میں Q کا معیاری انحراف صفر ہوگا جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۱) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \Psi | (\hat{Q} - q)^2 \Psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) \Psi | (\hat{Q} - q) \Psi \rangle = 0$$

(ا) اگر ہر پیمائش q دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی q ہوگی: $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ \hat{Q} ہر مشی ہے لہذا $\hat{Q} - q$ بھی ہر مشی عامل ہوگا؛ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے میں نے اندرونی ضرب کے ایک جزو ضربی $(\hat{Q} - q)$ کو بائیں منتقل کیا ہے۔ تاہم ایسا واحد تعاضل جس کی خود اپنے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو جاتی ہو، 0 ہے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۲) \quad \hat{Q}\Psi = q\Psi$$

یہ عامل \hat{Q} کی امتیازی قدر مساوات^{۲۶} ہے؛ \hat{Q} کا امتیازی تفاعل^{۲۷} Ψ اور مطابقتی امتیازی قدر^{۲۸} q ہے۔ یوں درج ذیل

hermitian conjugate^{۲۲}
adjoint^{۲۳}

ظاہر ہے، میں درست پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی غلطی کی بنا پر غلط پیمائش کی بات نہیں کی جا رہی ہے، جس کو انٹرمیکانیات سے نہیں جوا جاسکتا

determinate state^{۲۵}
eigenvalue equation^{۲۶}
eigenfunction^{۲۷}
eigenvalue^{۲۸}

ہوگا۔

(۳.۲۳) تعین حالات \hat{Q} کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔

ایسے حال پر Q کی پیمائش لازماً امتیازی متدر q دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی متدر ایک عدد ہے (نہ کہ عامل یا تفاعل)۔ امتیازی تفاعل کو کسی مستقل سے ضرب دینے سے امتیازی تفاعل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کی امتیازی متدر وہی ہوگی۔ صفر کو امتیازی تفاعل نہیں لیا جاسکتا؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تفاعلات میں شامل نہیں کرتے؛ ورنہ کسی بھی عامل \hat{Q} اور تمام q کے لیے $\hat{Q}0 = q0 = 0$ ہوگا جس کی بنا پر ہر عدد ایک امتیازی متدر ہوگا)۔ ہاں امتیازی متدر کے صفر ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا طیف^{۲۹} حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تابع امتیازی تفاعلات کی امتیازی متدر ایک جتنی ہوگی؛ ایسے طیف کو انخطاط^{۳۰} طیف کہا جاتا ہے۔

مشال کے طور پر، کل توانائی کے تعین حالات، ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے:

$$(۳.۲۴) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جو بالکل غیر تابع وقت شرودنگر مساوات ہے۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی متدر کے لیے صرف E اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف) ψ استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ $e^{-iEt/\hbar}$ چسپاں کر کے Ψ حاصل کیا جاسکتا ہے؛ جواب بھی H کا امتیازی تفاعل ہوگا)۔

مشال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں ϕ ، ہمیشہ کی طرح، دو البادی قطبی محدود کا متغیر ہے۔

$$(۳.۲۵) \quad \hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$$

(یہ عامل سوال ۲.۳۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا۔) کیا \hat{Q} ہر مثنیٰ ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم مستثنای وقفے $0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر تفاعلات $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں ϕ اور $\phi + 2\pi$ ایک ہی طبعی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۶) \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

تکمل بالخص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* \left(i \frac{dg}{d\phi} \right) d\phi = i f^* g \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i \left(\frac{df^*}{d\phi} \right) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لہذا \hat{Q} ہر مشی ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا پر سرحدی جزو خارج ہو جائے گا)۔
امتیازی متدر مساوات

$$(۳.۲۷) \quad i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi)$$

کامیابی حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۸) \quad f(\phi) = A e^{-iq\phi}$$

q کی ممکنہ قیمتوں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل پر رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$(۳.۲۹) \quad e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

□

اس عامل کا طیف تمام عدد صحیح پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر اخلاطی ہے۔

سوال ۳.۶: عامل $\hat{Q} = d^2 / d\phi^2$ پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور ϕ قطبی مد میں سمتی زاویہ ہے۔ کیا \hat{Q} ہر مشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتداری تلاش کریں۔ عامل \hat{Q} کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف اخلاطی ہے؟

۳.۳ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبی طور پر متابل مشاہدہ کے تعین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل^{۳۱} ہو (یعنی امتیازی افتداری الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبی طور پر متابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری^{۳۲} ہو (یعنی امتیازی افتداری ایک پوری وسعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل میں کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی افتداری ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے متابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا (مثلاً ہارمونی سرعش کی ہیملٹنی، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً مستثنائی چوکور کنویں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نہایت زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلق اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ درحقیقت یہ مستثنائی البادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیت)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مثنیٰ عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل کی دوا ہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی افتدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: مندرجہ کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی \hat{Q} کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی افتدار q ہو) اور

$$\langle f | \hat{Q}f \rangle = \langle \hat{Q}f | f \rangle$$

ہو (\hat{Q} ہر مثنیٰ ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہذا اس کو عمل سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (سات 6.3) لہذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم $\langle f | f \rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہوگا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرہ کی قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: انفرادی امتیازی افتدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ ساتھ مندرجہ کریں \hat{Q} ہر مثنیٰ ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے مندرجہ کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے)۔ اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f | g \rangle = 0$ ہوگا۔

□

^{۳۳} یہ وہ موقع ہے جہاں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چوکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تقش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ مفرد امتیازی افتدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاضلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی متابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انخطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک جیسے امتیازی افتدار رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی افتدار والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۳.۱-۳) اور ہم گرام شمد ترکیب عمودیت^{۳۳} (سوال A4) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انخطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاضلات مرتب دے سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (مشکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انخطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاضلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کو انٹرمیکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم مفروض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اس تفاضلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنای بعدی سمتی فضا میں ہر مشی متابل کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جاسکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کو انٹرمیکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہذا (ذیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسئلہ (بلکہ متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسئلہ: متابل مشاہدہ کے امتیازی تفاضلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاضل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔^{۳۵}

سوال ۳.۷:

ا. مفروض کریں کہ عامل \hat{Q} کے دو امتیازی تفاضلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی افتدار q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ خود \hat{Q} کا امتیازی تفاضل ہوگا اور اس کا امتیازی افتدار q ہوگا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^x$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل d^2/dx^2 کے امتیازی تفاضلات ہیں اور ان کا امتیازی افتدار ایک جیسا ہے۔ تفاضل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ مرتب کریں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاضلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہر مشی عامل کے امتیازی افتدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (مفرد امتیازی افتدار کے) امتیازی تفاضلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

^{۳۳}Gram-Schmidt orthogonalization process

^{۳۵}چند مخصوص صورتوں میں مکلیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرٹلے کے تحت، لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں متابل ثبوت پہلو کو مسئلہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

۳.۳.۲ استمراری طیف

ہر مثنیٰ عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۱ اور مسئلہ ۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی متدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع مکمل نہیں ہے، عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی افتدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۳۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$(۳.۳۲) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۳۳) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیٹر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک جیسا نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو ڈیراک معیاری عمودیت کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب مکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (مربع مکمل) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا

ہے۔

$$(۳.۳۴) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

پھیلاؤ عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہوگا) کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۵) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ پھیلاؤ (مساوات ۳.۳۴) درحقیقت ایک فورسٹر تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن فائین جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$(۳.۳۶) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اگلہ مرتبہ کر سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے متبادل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کی کاتعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ \hat{p} کا کوئی بھی امتیازی تفاعل بلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کتب (جن کے امتیازی اقتدار حقیقی ہوں گے) تشریحی ”مضافات“ میں رہتے ہیں اور یہ ہر معمول پر لانے کے متبادل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ بعد میں پتہ چلے گا)۔^{۳۷}

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقتدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی متدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۷) \quad x g_y(x) = y g_y(x)$$

^{۳۷} غیر حقیقی امتیازی اقتدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ ناصرف معمول پر لانے کے متبادل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے متناہز ہوتے ہیں۔ اس خط میں، جس کو میں ”مضافات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کاپٹ (مستثنیٰ) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ بلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا \hat{p} کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی اقتدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ بلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی حبز کو روک دیا گیا۔ (جب تک f بلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب \hat{p} کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی متدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی متدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل \hat{p} کا امتیازی متدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل \hat{p} کے امتیازی اقتدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خط سے باہر پائے جاتے ہیں جس میں \hat{p} ہر مشی ہو۔

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایک کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $x = y$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی و تدور کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تفاعلات مربع متکامل نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(۳.۳۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_y^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$(۳.۳۹) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۰) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(۳.۴۱) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۲) \quad c(y) = f(y)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہذا اس کے امتیازی امدار کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y ، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلسبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی امدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب مکمل ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی مرتعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (مستثنائی چوکور کنویں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۱۰: ۳. کیا لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

۳.۴. متمم شماراتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی متابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعیین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متمم شماراتی مفہوم^{۳۸} پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے متابل بناتی ہے۔ متمم شماراتی مفہوم اور شرودنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقاء کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انٹرمیکانیات کی بنیاد ہے۔

متمم شماراتی مفہوم: حال $\Psi(x, t)$ میں ایک ذرے کی ایک متابل مشاہدہ $Q(x, P)$ کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$ کی کوئی ایک امتیازی مقدار دے گی۔ اگر \hat{Q} کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی مقدار q_n کے حصول کا احتمال

$$(۳.۴۳) \quad |c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔}$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی مقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سمت dz میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$(۳.۴۴) \quad |c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔}$$

پیمائشی عمل کے بنا پر تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم^{۳۹} ہوتا ہے۔^{۴۰}

شماراتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک متابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جزلکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۴۵) \quad \Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x)$$

generalized statistical interpretation^{۳۸}
collapse^{۳۹}

^{۴۰} استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد و نواہ میں، پیمائشی آلہ کی حقیقت پر منحصر محدود سمت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو با آسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔^{۴۱}

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x) \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۶)$$

کئی طور پر "Ψ میں f_n کی مقدار" کو c_n ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش Q کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال Ψ میں "f_n کی مقدار" پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل عمل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت |c_n|² ہوگی۔ متعمد شمار یا قی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔^{۴۲}

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۷)$$

جو یقیناً تفاعل عمل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \quad (۳.۴۸)$$

اسی طرح تمام ممکنہ امتیازی اقدار کو انفرادی طور پر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے Q کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۴۹)$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle \quad (۳.۵۰)$$

^{۴۱} دھیان رہے کہ تابعیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں c_n(t) لکھنا چاہیے۔

^{۴۲} یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ "اس ذرے کا حال f_n میں پائے جانے کا احتمال |c_n|² ہے۔" یہ کہنا بالکل غلط ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال Ψ میں ہے۔ ہاں Q کی پیمائش سے قیمت q_n کے حصول کا احتمال |c_n|² ہوگا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفاعل عمل موج f_n پر منہدم کرتی ہے لہذا اہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال Ψ میں ہے، اس کا Q کی پیمائش کے بعد حال f_n میں ہونے کا احتمال |c_n|² ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جسے $\hat{Q}f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۵۱) \quad \langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n' n} \sum_n q_n |c_n|^2.$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آرہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں! اگرچہ یہ توپ سے چومارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال Ψ میں ایک ذرے کے لیے x کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی فتر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد y متغیر x کا امتیازی فتر ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل $\delta(x - y) = g_y(x)$ ہوگا۔ ظاہر اور ج ذیل ہوگا

$$(۳.۵۲) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سعت dy میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y, t)|^2$ ہوگا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۳) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم معتد ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج^۳ پکارا اور $\Phi(p, t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کا فورسٹر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فورسٹر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۵۴) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۵) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متعمم شماریاتی مفہوم کے تحت سعت dp میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۶) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ڈیلٹا تفاعل کنواں $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

حل: اس کا (مقامی فنکشن) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جس $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکی فنکشن تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۱۱: ہارمونی سرکش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فنکشن تفاعل موج $\Phi(p, t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے p کی پیمائش کا کلاسیکی سمت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصے کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”تفاعل خنل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$(۳.۵۷) \quad \langle x \rangle = \int \Phi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp.$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left(\frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فنکشن میں عامل متعام $i\hbar \partial/\partial p$ ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۸) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فنکشن میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فنکشن میں} \end{cases}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فنکشن کی بجائے معیار حرکی فنکشن میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا)۔

۳.۵. اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتوجہ رکھیں۔

۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ A کے لیے درج ذیل ہوگا (مساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ B کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۹) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

اب کسی بھی مخلوط عدد z کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۰) \quad |z|^2 = [(\text{حقیقی}(z))^2 + [(\text{خیالی}(z))^2] \geq [(\text{خیالی}(z))^2] = \left[\frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$$

یوں $z = \langle f | g \rangle$ لیتے ہوئے

$$(۳.۶۱) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن $\langle f | g \rangle$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} - \hat{A} \langle B \rangle - \hat{B} \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} \Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g|f\rangle = \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

لہذا

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle \hat{A}\hat{B}\rangle - \langle \hat{B}\hat{A}\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقابلہ ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (۳.۶۲)$$

یہ اصول عدم یقینیت^{۴۴} کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دوسری مشی عاملین کے مقابلہ میں بھی i کا جذبہ پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود i کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔^{۴۵}

مثال کے طور پر، فرض کریں مقام ($\hat{A} = x$) پہلا اور معیار حرکت ($\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$) دوسرا تابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کرچکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۳)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو تابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر متقابل ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگ تابل مشاہدہ^{۴۶} کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ تابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تقاضا عمل نہیں پائے

uncertainty principle^{۴۴}

^{۴۵} یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ دوسری مشی عاملین کا مقابلہ خود مخالف ہر مشی ($\hat{Q}^+ = -\hat{Q}$) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۶)۔

incompatible observables^{۴۶}

جباتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (مقلوب) متابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔^{۴۷}

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا z جزو باہمی ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی افتدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ معتام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا معتام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انٹم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماراتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا معتام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا معتام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریئر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن معتام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔^{۴۸} مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر متمثل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً متب ممکن ہوگا جب دونوں متابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۳:

۱. درج ذیل ممائل مقلوب ثابت کریں۔

$$(۳.۶۴) \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar nx^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۵) \quad [f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx}$$

^{۴۷} یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر متابلتوں کو بیک وقت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک جسمی میٹابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہر متابلتوں کو بیک وقت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۵.۱ دیکھیں۔
^{۴۸} جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) x کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود p کی قیمت کو متباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے نور یہ اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے متابل میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا معتام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

سوال ۳.۱۳: مقام ($A = x$) میں عدم یقینیت اور توانائی ($B = p^2/2m + V$) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر \hat{P} اور \hat{Q} کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $f = 0$ ہوگا۔

۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرعش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد ($\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$) کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۹ اور مساوات ۳.۶۰۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ Ψ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = c f(x)$ ، جہاں c کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۰ میں z کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 = \text{حقیقی}(z)$ ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle_{\text{حقیقی}} = (c \langle f|f \rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f \rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل c لازماً حوالہ خیالی ہوگا؛ جسے ہم ia لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$g(x) = ia f(x), \quad a \text{ حقیقی} \quad (۳.۶۶)$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = ia (x - \langle x \rangle) \Psi \quad (۳.۶۷)$$

جو متغیر x کے تفاعل Ψ کا تفسیقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = A e^{-a(x - \langle x \rangle)^2 / 2\hbar} e^{i \langle p \rangle x / \hbar} \quad (۳.۶۸)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ در حقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔^{۴۹}
سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۷ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ مستقلات ہیں۔

۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۹)$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے Δx (متغیر x کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۹ کی طرح کا توانائی و وقت اصول عدم یقینیت^{۵۰} درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۰)$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں x اور t (بلکہ ct) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں p اور E (بلکہ E/c) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۰ اور مساوات ۳.۶۹ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شرودنجر مساوات صریحاً غیر اضافتی ہے۔ یہ t اور x کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفریق مساوات t میں یک رتی جبکہ x میں دور رتی ہے)، اور مساوات ۳.۶۹ سے قطعاً مساوات ۳.۷۰ سرحد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متبادل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاسلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو Δt ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

^{۴۹} دھیان رہے کہ صرف Ψ کو x کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقلات“ a ، A ، $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتداعویٰ کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحہ پر تقابل عمل موج x کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحہ پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متابل مشاہدہ $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت کے تصرف کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{d}{dt}\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle \Psi | \hat{Q} \hat{H} \Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب \hat{H} ہر مشی ہے لہذا $\langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} \hat{Q} \Psi \rangle$ اور یوں اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۱) \quad \frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۱۷.۳ اور ۳۱.۳ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا، اسے کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقابلہ تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر \hat{H} اور \hat{Q} آپس میں متابل تبدیل ہوں، تب $\langle Q \rangle$ مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے Q بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ Q صریحاً t کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2i} \hbar \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \left(\frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۷۲) \quad \sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right|$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$(۳.۷۳) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d\langle Q \rangle / dt|}$$

اوقات کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$ ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حواسر ایک ایسے ہارمونی مسر نقش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقباسب پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجب حواسرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبےدار ہو جاتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۴)$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں Δt کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا Δt اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں Q کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص Δt اس متابل مشاہدہ Q پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک متابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی ΔE کی صورت میں تمام متابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک متابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکتا طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مادہ ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر a, b, ψ_1 اور ψ_2 حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$ ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً $\hbar/2 \geq$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$ ہوگا لیکن $E = p^2/2m$ ہے، لہذا $\Delta E = p\Delta p/m$ ہوگا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$



شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔

□

مثال ۳.۷: ذرہ Δ تقریباً 10^{-23} سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیفیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جس س کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232 \text{ MeV}/c^2$ پر اور چوڑائی تقریباً $120 \text{ MeV}/c^2$ ہوگی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی (mc^2) کیوں بعض اوقات 1232 سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی حائل کے بنا پر ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

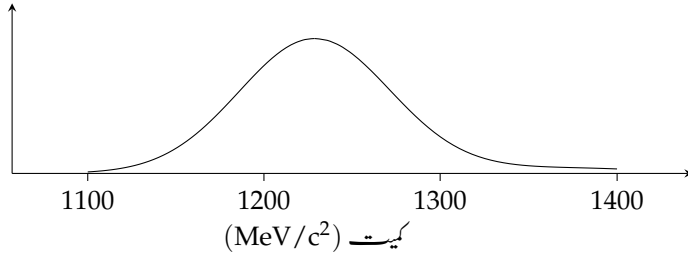
$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2} \text{ MeV} \right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$ ۔ یوں کیفیت میں پھیلاؤ اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت اجازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیفیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔^{۵۲} □

ان مثالوں میں ہم نے جزو Δt کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مراد طول موج تھا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مراد وہ دورانیہ تھا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں Δt اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا پر کوانٹم میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی ΔE ”ادھار“ لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar/(2\Delta E)$ کے اندر ”واپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب

^{۵۲} حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ 10^{-23} سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق ارات رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ مندرجہ کریں کہ Δ تقریباً ایک پروٹان (10^{-15} m) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً 10^{-23} سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ مندرجہ کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔



شکل ۳.۲: کیت Δ کی پیشکشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی حجاز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کو انٹرمیکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی عطا استعمال کے باوجود نتائج زیادہ عطا نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۷: درج ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷ کی اطلاق کریں۔

ا. $Q = 1$ ب. $Q = H$ ج. $Q = x$ د. $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تقاضا عمل موج اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۳ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

۳.۶ ڈیراک علامت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ **A** پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ x اور y محدد کا ایک کارٹیزی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ **A** کے



شکل ۳.۳: (ا) سمتیہ \mathbf{A} ، (ب) xy محددے لحاظ سے \mathbf{A} کے اجزاء، (ج) $x'y'$ محددے لحاظ سے \mathbf{A} کے اجزاء

اجزاء: $A_x = \hat{i} \cdot \mathbf{A}$ اور $A_y = \hat{j} \cdot \mathbf{A}$ وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارٹیزی نظام قائم کرے جس کے محدد x' اور y' ہوں، وہ سمتیہ \mathbf{A} کے اجزاء $A'_x = \hat{i}' \cdot \mathbf{A}$ اور $A'_y = \hat{j}' \cdot \mathbf{A}$ پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس $(\{\hat{i}, \hat{j}\})$ اور $(\{\hat{i}', \hat{j}'\})$ کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

بہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ $|\mathcal{H}(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو ”باہر بلبرٹ فضا“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفعل معام کی اساس میں $|\mathcal{H}\rangle$ کی پھیلاؤ کا عددی سر موجی تفعل عمل $\Psi(x, t)$ ہوگا:

$$\Psi(x, t) = \langle x | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.45)$$

(جہاں \hat{x} کے امتیازی تفعل عمل جس کی امتیازی قیمت x ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے) ^{۵۳} جبکہ معیار حرکت امتیازی تفعل عمل کی اساس میں $|\mathcal{H}\rangle$ کی پھیلاؤ، معام و معیار حرکت موجی تفعل عمل ہے: $\Phi(p, t)$

$$\Phi(p, t) = \langle p | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.46)$$

(جہاں \hat{p} کا امتیازی تفعل عمل جس کی امتیازی قیمت p ہے کو سمتیہ $|p\rangle$ ظاہر کرتا ہے)۔ ^{۵۴} ہم $|\mathcal{H}\rangle$ کے پھیلاؤ کو توانائی امتیازی تفعل عمل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر

^{۵۳} میں اس کو g_x (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس معام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھڑکا رہا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ بلبرٹ فضا کو، x پر، بطور مربع متکامل تفعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس معام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
^{۵۴} معامی فضا میں یہ $f_p(x)$ ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

رہے ہیں):

$$(۳.۷۷) \quad c_n(t) = \langle n | \mathcal{H}(t) \rangle$$

(جہاں n کے \hat{H} کے n ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $|n\rangle$ ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات ۳.۴۶- تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات Ψ اور Φ ، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$(۳.۷۸) \quad \begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x) \end{aligned}$$

(متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$(۳.۷۹) \quad |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

بالکل سمتیت کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$ ،^{۵۵} کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$(۳.۸۰) \quad \begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \\ |\beta\rangle &= \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے} \end{aligned}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبی اراکان**^{۵۶}

$$(۳.۸۱) \quad \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۳.۸۲) \quad \sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle$$

یا، سمتیہ $|e_m\rangle$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$(۳.۸۳) \quad \sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle$$

^{۵۵} میں مندرج کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں n استمراری ہوگا اور مجموعہ کی جگہ نکلاتے ہوں گے۔

^{۵۶} matrix elements

^{۵۷} یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”فالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامتناہی ہوگی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn} a_n \quad (۳.۸۴)$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متالپی ارکان معلومات فراہم کرتے ہیں۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہوگا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد متناہی عدد (N) ہوگا۔ سمیت $|\mathfrak{H}(t)\rangle$ ایسی صورت میں N ابعادی سٹی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، (N) اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عاملین $(N \times N)$ سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامتناہی آبادی سٹی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔^{۵۸}

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathfrak{H}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ہوگا جہاں} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہے۔}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مٹی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں g اور h حقیقی مستقل ہیں۔ اگر $(t = 0)$ پر یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت t پر اس کا حال کیا ہوگا؟

حل: (تابع وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathfrak{H}\rangle = H |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۵)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شرودنگر

$$H |\mathfrak{H}\rangle = E |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۶)$$

^{۵۸} یہاں ”مساوات“ کی نشان دہی سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علاقیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم H کی امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی افتدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں $(h+g)$ اور $(h-g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm \alpha$$

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{B}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{B}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{B}_{+}\rangle + |\mathcal{B}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_n t/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(h+g)t/\hbar} |\mathcal{B}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\mathcal{B}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \left[e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t=0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ الیکٹران نیوٹرینو^{۹۰}، اور $|2\rangle$ میون نیوٹرینو^{۹۱} کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں حثلاف وتر جزو (g) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میون نیوٹرینو^{۹۲} میں اور میون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

neutrino oscillations^{۹۰}
electron neutrino^{۹۰}
muon neutrino^{۹۱}

کوانٹم میکانیات میں اندرونی ضرب کو ڈیراک علامتیہ^{۶۲} سے ظاہر کیا جاتا ہے جو تکنونی تو سین، \langle اور \rangle ، اور افقی کلیئر $|$ پر مشتمل ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں تکنونی تو سین کو تو سین نہیں بلکہ عاملین تصور کریں۔ اندرونی ضرب $\langle \alpha | \beta \rangle$ کو دو حصوں $\langle \alpha$ اور $|\beta \rangle$ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں بالترتیب **تفعلیہ**^{۶۳} اور **سمتایہ**^{۶۴} کہتے ہیں۔ ان میں سے موحصر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفعلیہ عمل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہوگا۔ ایک عامل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک تفعلیہ کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔ (جیسا آپ دیکھیں گے کوانٹم میکانیات میں تفعلیہ کو ایک متالب اور سمتایہ کو سمتیہ کی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ڈیراک علامتیت کو **تفعلیہ و سمتایہ علامتیہ**^{۶۵} بھی کہتے ہیں۔ ایک تفعلیہ فضا میں تفعلیہ کو مکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f | = \int f^* [\dots] dx$$

جہاں چوکور تو سین $[\dots]$ میں وہ تفعلیہ عمل پر کیا جائے گا جو تفعلیہ کے دائیں ہاتھ سمتایہ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنائی العباد سمتیہ فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (۳.۸۷)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی تفعلیہ ایک سمتیہ صف

$$\langle \alpha | = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (۳.۸۸)$$

ہوگا۔ تمام تفعلیہ کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتیہ فضا حاصل ہوگا جس کو **دوہری فضا**^{۶۶} کہتے ہیں۔

تفعلیہ کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (۳.۸۹)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے ”ساتھ ساتھ“ پایا جاتا ہو:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle \alpha | \beta \rangle |\alpha\rangle;$$

^{۶۲} Dirac notation

^{۶۳} bra

^{۶۴} ket

^{۶۵} bra-ket notation

^{۶۶} dual space

ہم اس کو $|\alpha\rangle$ کے احاطہ کیے گئے ایک بعدی ذیلی فضا پر عامل \hat{P} ^{۶۷}تقلیل کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۹۰)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = 1 \quad (۳.۹۱)$$

(جو عامل مثال ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاؤ کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n | \alpha \rangle = |\alpha\rangle \quad (۳.۹۲)$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z') \quad (۳.۹۳)$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1 \quad (۳.۹۴)$$

مسائل ۳.۹۱ اور مساوات ۳.۹۴ کمپلیٹ کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین \hat{P} ^{۶۸}تقلیل یکے ^{۶۹}مافوق ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہوگا۔ \hat{P} کے امتیازی امتداد تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیہ کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ سمتاویہ $|\alpha\rangle$ اور سمتاویہ $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کو (دوہری اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle \alpha | \beta \rangle$ اور $\langle \beta | \alpha \rangle$ تلاش کریں اور $\langle \beta | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $|\beta\rangle \langle \alpha| \equiv \hat{A}$ کے نوار کان متالاب تلاش کر کے متالاب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مشی ہے؟

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

جہاں $|1\rangle, |2\rangle$ معیاری عمودی اساس اور E ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی امتداد اور $|1\rangle$ اور $|2\rangle$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ امتیازی تعامل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے \hat{H} کا فائلب H کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل \hat{Q} کے معیاری عمودی امتیازی تعاملات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ \hat{Q} کو اس کے طیفی تحلیل^{۹۹}

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچ جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: لیٹمانڈر کثیر رکنیال^{۱۰۰} وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تعاملات $1, x, x^2$ اور x^3 کو گرام و شمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال 4A. دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پچپان پائیں؛ (معیاری عمود زنی کے علاوہ) لیٹمانڈر کثیر رکنیاں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک خلاف ہر مشی^{۱۰۱} (یا منحرف ہر مشی^{۱۰۲}) عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

(۳.۹۵)

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$$

^{۹۹}spectral decomposition

^{۱۰۰}لیٹمانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کوئی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی جبز و ضربیوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تعاملات کے برابر ہوں؛ ہم اس بد قسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

^{۱۰۱}anti-hermitian

^{۱۰۲}skew-hermitian

۱. دکھائیں کہ خلاف ہر مشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشی عاملین کا مقابلہ خلاف ہر مشی ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشی عاملین کے مقابلہ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳.۲: ترتیب پیمائش: متبادل مشاہدہ A کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{A} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ψ_1 اور ψ_2 ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب a_1 اور a_2 ہیں، پائے جاتے ہیں۔ متبادل مشاہدہ B کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{B} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ϕ_1 اور ϕ_2 اور بالترتیب امتیازی اقدار b_1 اور b_2 ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

۱. متبادل مشاہدہ A کی پیمائش a_1 قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فورا) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب. اب اگر B کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. متبادل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ a_1 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳.۲۸: لامتناہی چوکور کنویں کے n دیں ساکن حال کی معیار حرکت و فضا تعامل موج $\Phi_n(p, t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p, t)|^2$ اور $|\Phi_2(p, t)|^2$ کو p کے تعامل کے طور پر ترسیم کریں (نقطہ $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p, t)$ کو استعمال کرتے ہوئے p^2 کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۳.۲۹ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۲۹: درج ذیل تعامل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں n کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگر چہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تعامل خالص ساکن ہوتا ہے (جس کا طول موج λ ہے) تاہم چونکہ یہ تعامل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سمت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فضا تعامل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x, 0)|^2$ اور $|\Phi(p, 0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صغروں کے بیچ) چوڑائیاں ω_x اور ω_p تعین کریں۔ دیکھیں کہ $n \rightarrow \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟ ω_x اور ω_p کو Δx اور Δp کی انداز قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ σ_p کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامن ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۳۰: درج ذیل مندرج کریں

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں۔

۱. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے A تعین کریں۔

ب. (لحہ $t = 0$ پر) $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ_x تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت و نصف تعامل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p, 0)$ استعمال کرتے ہوئے (لحہ $t = 0$ پر) $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ اور σ_p کا حساب کریں۔

۲. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: مسئلہ وریلڈ۔ درج ذیل مساوات ۳.۷ کی مدد سے دکھائیں

$$\frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \quad (۳.۹۶)$$

جہاں T حرکی توانائی ($H = T + V$) ہے۔ ساکن حال میں پایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \quad (۳.۹۷)$$

اس کو مسئلہ وریلڈ کہتے ہیں۔ ہارمونی سرعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau / \pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x, 0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x, t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کاغذ عمل موج $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2} [\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی چپاچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی سرعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالپی ارکان $\langle n|x|n' \rangle$ اور $\langle n|p|n' \rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالپی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستثنائی) متالپ \mathbf{X} اور \mathbf{P} مرتب کریں۔ دکھائیں کہ اساس میں $\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{X}^2$ وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جسزوی جواب:

$$\langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1}) \quad (۳.۹۸)$$

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک جتنے احتمال کے ساتھ، $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p \rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت کیا ہوگی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3 ہارمونی مرتعش کے اتناقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات $\psi_n(x) = |n\rangle$ ، مساوات ۲.۶۷ میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ پر ٹیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x \sigma_p = (2n + 1)\hbar/2$ ہوگا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں اتناقی حالات^{۷۵} کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل^{۷۶} کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی متدر α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مشال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ a_- کا ہر مشی جوڑی دار a_+ ہے۔ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہوگا۔

ب. σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتناقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاؤ

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$

ه. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

^{۷۵} coherent states

^{۷۶} عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

شامل کر کے دکھائیں کہ $\langle \alpha(t) |$ اب بھی $a -$ کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی قدر ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتناقی حال ہمیشہ اتناقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔
و. کیا زمینی حال $|n=0\rangle$ خود اتناقی حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہوگا۔

سوال ۳.۶: مبسوط اصول عدم یقینیت۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$ ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (3.99)$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$ ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۰ میں z کا حقیقی جزو $\text{Re}(z)$ جزو

لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۹ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول یہاں بے وقعت ہے؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیلٹنی درج ذیل متابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\psi(t)\rangle$ کیا ہوگا؟

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب۔ اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیسے ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل متالاب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متالاب مشاہدہ A اور B کو درج ذیل متالاب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں ω ، λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

۱۔ \mathbf{H} ، \mathbf{A} اور \mathbf{B} کے امتیازی اقدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب۔ یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔ لمحہ $t=0$ پر H ، A اور B کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج۔ لمحہ t پر $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیسے ہوگا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کی قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیسے ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

۱۔ ایک تفسیر $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں x_0 کوئی بھی مستقل منسلک ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا پر \hat{p}/\hbar کو فضا میں انتقال کا پیدا کار \hat{Q} کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نما کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب۔ اگر (تابع وقت) شرودنگر مساوات کو $\Psi(x, t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x, t)$$

(جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا پر $\hat{H}/\hbar -$ کو وقت میں انتقال کا پیدا کار \hat{Q} کہتے ہیں۔

ج۔ دکھائیں لمحہ $t + t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔^۹

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۱ حاصل کریں۔ اشارہ: $t_0 = \int dt$ میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

۱۔ ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شرودنگر مساوات کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:

$$(e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p, 0))$$

ب۔ متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p, 0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p, t)$ مرتب کریں۔ ساتھ ہی $|\Phi(p, t)|^2$ مرتب کریں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج۔ Φ پر مبنی موزوں کمالات حل کرتے ہوئے $\langle p \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د۔ دکھائیں $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2/2m + \langle H \rangle_0$ ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

^۹ generator of translation in space

^۸ generator of translation in time

^۹ بالخصوص 0 $t =$ لے کر، t_0 کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$$

ہوگا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں Q کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ \hat{Q} کو $\Psi(x, t)$ اور $\Psi(x, t)$ میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو تقبلاً عمل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$ کو $\Psi(x, 0)$ اور $\Psi(x, 0)$ میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موختر الذکر کو ہیبرنر نقطہ نظر کہتے ہیں۔

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع یا آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شرودنگر

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی اعمال H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر اور ج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھا کلاسیکی مثال مشابہہ اور اعمال میں مشرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں اعمال پر ”ٹوپی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عاملین پر ”ٹوپی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاسیا ہے۔

مختفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب (x, y, z) اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $d^3 r = dx dy dz$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $|\Psi(r, t)|^2 d^3 r$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 r = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کوپوری فنکشن پر لینا ہوگا۔ اگر مخفیہ وقت کے تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(r, t) = \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فنکشن تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\Psi(r, t) = \sum c_n \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقالات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(r, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیے تا ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

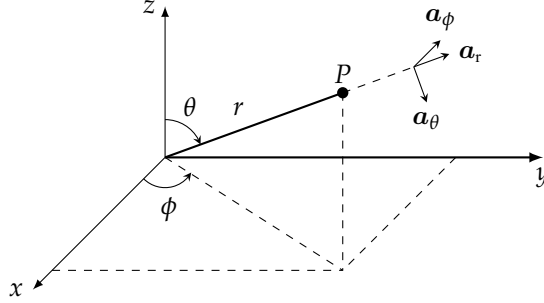
سوال ۴.۱:

۱. عاملین r اور p کے تمام باضابطہ مقلبتیہ رشتے^۴: $[x, p_x]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_z]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔



شکل ۴.۱: کروی محدود: رداس r ، قطبی زاویہ θ ، اور سمتی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ ابھر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگی۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات ۴.۱۱ تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x \sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں کروی محدود (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل ۴.۱)۔ کروی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کر وہی محدود میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔^۶

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی چوکور کوانٹا (یا ذب میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

^۶ ایسا کرنے سے ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازم عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

۱. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انخطائیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: ایک بعدی صورت میں انخطائی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال ۲.۴۵)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انخطائیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2 \theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو بچپائے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$(۴.۱۹) \quad Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا تعلق ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تعلق ہے، لہذا ہر جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$(۴.۲۰) \quad \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(۴.۲۱) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$(۴.۲۲) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

یہاں بھی ہم عمومیّت نہیں کھوئے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔
انتباہ: اب صرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$ ، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخسر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جب زو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم Θ میں منقسم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محفّیہ لازماً حقیقی ہوں گے لہذا برقی حرکیات میں سمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں لکھا جاتا ہے نہ کہ قوت نمائی صورت میں۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل ۴.۱ دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط^۸ عائد کی جاسکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے نقطوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

مساوات θ

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (۴.۲۵)$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = A P_l^m(\cos \theta) \quad (۴.۲۶)$$

جہاں P_l^m شریک لیجینڈر تقاطع^۹ ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x) \quad (۴.۲۷)$$

اور l وین لیجینڈر کشیرر کئی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے^{۱۰} جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس^{۱۱}:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (۴.۲۸)$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیجینڈر کشیرر کنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

^۸ یہ نظر سادہ شرط اتنی سادہ نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال شناخت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ ۴.۳ میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر عائد شرط حاصل کریں گے۔

^۹ associated Legendre function
^{۱۰} دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہوگا۔
^{۱۱} Rodrigues formula

جدول ۴.۱: چند ابتدائی لیڈانڈرکشیہ رکنیاں $P_l(x)$ ۔ (i) تقابلی روپ، (ب) تریات۔



$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (i)$$

درج l کثیررکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت یا طاق ہوگی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (ب) ہمیں $P_l^m(\cos \theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$ ہوتا ہے لہذا $P_l^m(\cos \theta)$ ہر صورت $\cos \theta$ کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق m کی صورت میں $\sin \theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos \theta$ کے چند شریک لیڈانڈرکشیہ علاقے پیش کیے گئے ہیں۔

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت $P_l^m = 0$ ہوگا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفسر قی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفسر قی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے، تاہم $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے متاثر ہوتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محمد میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹنڈر تفسعات $P_l^m(\cos \theta)$: (۱) تفسعلی روپ، (ب) ترسیات برائے $r = P_l^m(\cos \theta)$ (ان ترسیات میں r آپ کو θ رخ تفسعل کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیے۔)



لہذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفسعات Y_l^m کو Y_l^m کے ہارمونیاں کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ دھیان رہے کہ Y_l^m ہارمونیاں عمومی ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

۴.۵۴ سوال کو مستقل ۴.۵۳ میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علاقیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہوگا۔
spherical harmonics^{۱۲}

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\ Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\ Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \end{aligned}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر l کو انٹیلیجیٹ کو انٹیلیجیٹ عدد^{۱۴} جب کہ m کو مقناطیسی کو انٹیلیجیٹ عدد^{۱۵} کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۲۹ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_2^1 اور Y_0^0 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔ سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (دو) نامتابل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حشرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ مرتب کریں۔ (آپ P_3^2 کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے مرتب کرنا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹنڈر کشیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left(\frac{2}{2l+1}\right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: مکمل بالخصوص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشابہی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$(۴.۳۵) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1)R$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$(۴.۳۶) \quad u(r) \equiv rR(r)$$

لہذا $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ، $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ، $R = u/r$ درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

اس کو رداسی مساوات^{۱۶} کہتے ہیں۔ اچھو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بعدی شرودنجر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ^{۱۸} درج ذیل ہے

$$(۴.۳۸) \quad V_{\text{مثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو^{۱۹} کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبداسے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۳۹) \quad \int_0^\infty |u|^2 dr = 1$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامستناہی کروئی کنویں پر غور کریں۔

$$(۴.۴۰) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

^{۱۶} radial equation

^{۱۷} یہاں m کیت کو ظاہر کرتی ہے، رداسی مساوات میں طیجرگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

^{۱۸} effective potential

^{۱۹} centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنویں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنویں کے اندر ردائی مساوات درج ذیل ہے

$$(۴.۴۱) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۲) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مطابقت کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل ردائی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \rightarrow 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے متناہی بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہذا $ka = n\pi$ ہوگا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$(۴.۴۳) \quad E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنویں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو $Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ ہے لہذا اس کی شمولیت یہاں ایک تفسیر سا کام ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۴) \quad \psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو اٹھانے اعداد n, l, m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:

$\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی، E_{nl} ، صرف n اور l پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$(۴.۴۵) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B n_l(kr).$$

^{۲۰} درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے متناہی ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستناہی ہو: مساوات ۴.۴۱ میں r^2 کی ہنس پر مبادا $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے متناہی ہے۔
quantum numbers^{۲۱}

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$ ؛ چھوٹی x کے لئے مقترابی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا کروی بیسل تفاعل^{۲۲} ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا کروی نیومن تفاعل^{۲۳} ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$(۴.۴۶) \quad j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

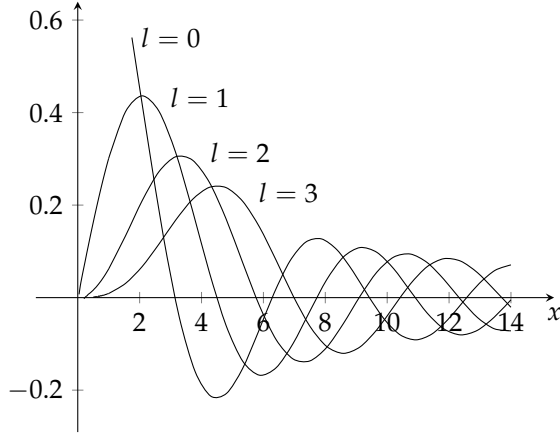
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

^{۲۲}spherical Bessel function
^{۲۳}spherical Neumann function



شکل ۳.۲: ابتدائی چار کروی بیل تناسلات۔

دھیان رہے کہ مبدأ پر بیل تناسلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدأ پر نیومن تناسلات بے فتابوڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$R(r) = A j_l(kr) \quad (۳.۴۷)$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$j_l(ka) = 0 \quad (۳.۴۸)$$

یعنی l رتبی کروی بیل تناسل کا (ka) ایک صفر ہوگا۔ اب بیل تناسلات ارتعاشی ہیں (شکل ۳.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے واصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$k = \frac{1}{a} \beta_{nl} \quad (۳.۴۹)$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیل تناسل کا n واں صفر ہوگا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2. \quad (۳.۵۰)$$

اور تناسلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (۳.۵۱)$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمولی ذریعے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l + 1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح $(2l + 1)$ گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروئی نیومن تعاضلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $1 \ll x$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ ہوتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کنویں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں احبازاتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \Rightarrow x = \tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو مستناہی کروئی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ متانوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۴.۵۲) \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب محفہ، مساوات ۴.۵۲، $E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس کے بعد ہم حالات کی مفت رابی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \rightarrow \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ($\rho \rightarrow \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس $\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛^{۲۴} لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی روپ کو چھپانے کی خاطر نیا قیاس عمل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[(l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

^{۲۴} دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۶۱) \quad \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0$$

آخر میں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$ ، کو ρ کا متقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۶۲) \quad v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j$$

ہمیں عددی سر (c_0, c_1, c_2, \dots وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزو تفریق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”مندرجہ اشاریہ“ j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ $-1 = j$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبز و ضربی $(j+1)$ اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم مندرجہ بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفریق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کاروپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔^{۲۵}

آئے j کی بڑی قیمت۔ (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابق ہوں گے جہاں بلند طاقستیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔^{۲۶}

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$(۴.۶۴) \quad c_j = \frac{2^j}{j!} c_0$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۶۵) \quad u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے فتابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت مساوی غیر پسندیدہ متغیراتی روسیہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیراتی حل بھی رد اسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

^{۲۵} آپ پوچھ سکتے ہیں: طامتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر کیوں لاگو نہیں کی گئی؟ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متغیراتی روسیہ کو کیوں (حبز و ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ حبز و ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا حبز و ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس حبز و ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالتا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

^{۲۶} آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - 2(l+1)$ اور نسب نما میں $2l+2$ رد کرنے کی طرح $1+j$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا تھا۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، j بندیز، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j+1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد^{۲۷}

$$n \equiv j+1 \quad (۴.۶۷)$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احباباتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر^{۲۸} ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913ء میں، ناقتیل استعمال کا اس کی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924ء میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

principal quantum number^{۲۷}
Bohr formula^{۲۸}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

رواں بولہر^{۲۹} کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n - l - 1$ = بندہ j کا کشیر رکھتا ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ تواری دے گا (اور پورے تقاضا عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حالت^{۳۱} (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $l = 0$ ہوگا؛ طبیعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ توانائی^{۳۲} (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۶ کے تحت $l = 0$ لہذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ تواری پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

^{۲۹} Bohr radius

^{۳۰} کردار اس بولہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ کھسکا جاتا ہے: a_0 تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا اس میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

^{۳۱} ground state

^{۳۲} binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی بھی توانائی ہوگی۔ کلیہً توانی (مساوات ۴.۷۶) کے لئے $l = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہذا $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad (۴.۸۲)$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاؤ عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہً توانی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \quad (۴.۸۳)$$

ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکن قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۴.۸۴)$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکن قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہوگی (مساوات ۴.۲۹)؛ لہذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (۴.۸۵)$$

کشیر رکتی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہً توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (۴.۸۶)$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_{q-p}^p(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

ایک شریک لاگنچ کشیر رکنی^{۳۳} ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

q ویں لاگنچ کشیر رکنی^{۳۴} ہے۔^{۳۵} (جدول ۴.۵) میں چند ابتدائی لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تقاعسل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تقاعسلات موج درجہ

^{۳۳} associated Laguerre polynomial

^{۳۴} Laguerre polynomial

^{۳۵} دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

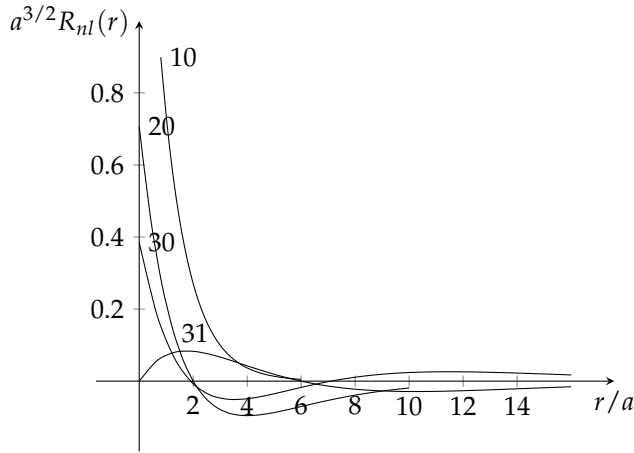
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تقاسمات $R_{nl}(r)$ کی تریسٹ۔

ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظمیں ہیں جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولم توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنویں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں H کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا پر ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاینگ کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو کوئی نیا مکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہو گا، اور از مسینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2, l = 1, m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x, y اور z کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin \theta \cos \phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپ کو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + dr$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2, l = 1, m = 1$ اور $n = 2, l = 1, m = -1$ کے درج ذیل خطی مجموعے سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(r, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تصویرت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی نوریہ کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔ ۳۷ عمل ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کو انٹیم چھلانگ“ کہتے ہیں) منتقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا پر ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (نوریہ) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_{\gamma} = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

اب کلیہ پلانک^{۳۸} کے تحت نوریہ کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

^{۳۸} transition فطرا، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

^{۳۹} Planck's formula نوریہ درحقیقت برقی طبعی اخراج کا ایک کو انٹیم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کو انٹیم میکینکات متبادل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر نوریہ کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ طول موج $\lambda = c/v$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل^{۴۰} کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ^{۴۱} ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقالات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ($n_f = 1$) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمانی کارلیما^{۴۲} تسلسل^{۴۳} کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ($n_f = 2$) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلسل^{۴۴} کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، پاشنہ تسلسل^{۴۵} دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ انہیں طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلاء پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجنی جوہر^{۴۵} Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم^{۴۶} میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ لیتیم^{۴۷} میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقی طیفی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \rightarrow Ze^2$ ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تبادلی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں)۔

ب. اس نظام کا ”رداس بوہر“ a_0 کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

^{۴۰}Rydberg constant

^{۴۱}Rydberg formula

^{۴۲}Lyman series

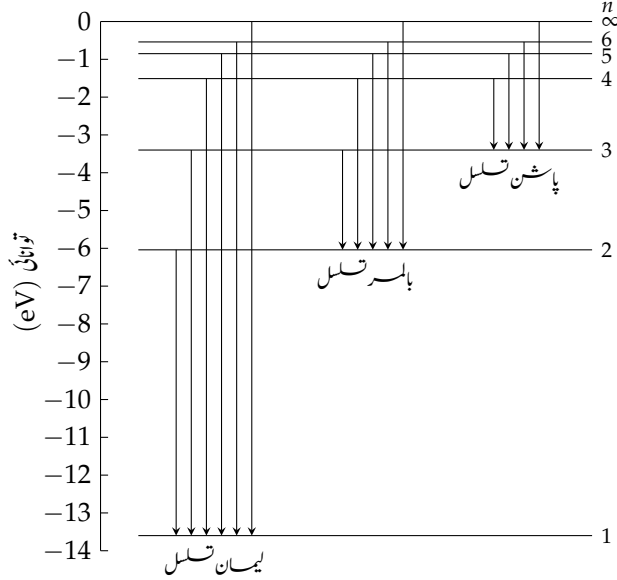
^{۴۳}Balmer series

^{۴۴}Paschen series

^{۴۵}hydrogenic atom

^{۴۶}Helium

^{۴۷}Lithium



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوں توانائیاں اور تویلیات۔

ج. تجاذبی گلیہ بھر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n - 1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔ حصار نورب (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹان) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کو انٹیم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مدارچی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی معتداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کو انٹیم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدأ کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$(۴.۹۵) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۹۶) \quad L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \rightarrow -i\hbar \partial / \partial x$ ، $p_y \rightarrow -i\hbar \partial / \partial y$ ، $p_z \rightarrow -i\hbar \partial / \partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونک مشین کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی افتدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبتی تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔^{۴۹}

$$(۴.۹۷) \quad [L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] \\ = [y p_z, z p_x] - [y p_z, x p_z] - [z p_y, z p_x] + [z p_y, x p_z]$$

باضابطہ مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = y p_x [p_z, z] + x p_y [z, p_z] = i\hbar (x p_y - y p_x) = i\hbar L_z$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل ($x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

جو زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبتی رشتے^{۵۰} ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ L_x اور L_y غیر ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۲۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

^{۴۹} کوانٹم میکانیات میں تمام عاملین و تانوں جبریتی تقسیم: $(B + C) = AB + AC$ پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۱۷۷ پر حاشیہ ۳۳ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ ہوگا۔
fundamental commutation relations^{۵۰}

یا

$$(۳.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$(۳.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

عامل L_x کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

(مقابلہ کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہوگا

$$(۳.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۰۳) \quad [L^2, \mathbf{L}] = 0$$

اس طرح \mathbf{L} کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہوگا اور ہم L^2 کا (مثلاً) L_z کے ساتھ ایک وقت امتیازی حالات

$$(۳.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(۳.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

L_z کے ساتھ مقاب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

الہذا

$$(۳.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہوگا۔

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (۴.۱۰۷)$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_{\pm}(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f) \quad (۴.۱۰۸)$$

لہذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_{\pm}f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہوگا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)f + L_{\pm}L_zf = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad (۴.۱۰۹)$$

لہذا نئے امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے L_z کا $L_{\pm}f$ امتیازی تفاعل ہوگا۔ ہم L_+ کو **عالمی** ^{۵۱} کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو \hbar بڑھاتا ہے جبکہ L_- **عالمی** ^{۵۲} کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو \hbar کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے، جس کا ہر پائے متر ہی پائے سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے \hbar کی ایک اکائی فاصلہ پر ہوگا (شکل ۴.۶)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اتارنے کی خاطر ہم عامل تقلیل ^{۵۲} لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچے گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت ^{۵۳} ہے۔ لازماً سیڑھی کا ایسا "بالا ترین پائے" f_t ، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن ^{۵۴} کرے گا۔

$$L_+f_t = 0 \quad (۴.۱۱۰)$$

فرض کریں اس بالا ترین پائے پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو (حرف "l" کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

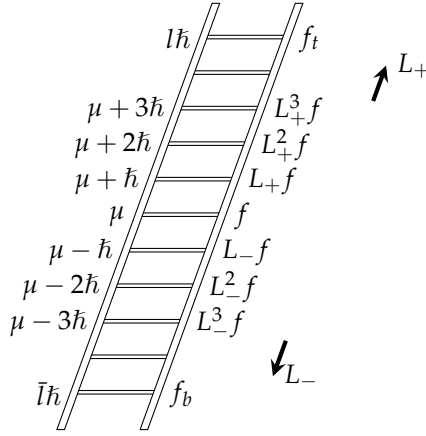
$$L_zf_t = \hbar lf_t; \quad L^2f_t = \lambda f_t \quad (۴.۱۱۱)$$

اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

raising operator^{۵۱}
lowering operator^{۵۲}

^{۵۳}بنا بنا طور پر $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ ہوگا، لیکن $\langle L^2 \rangle = \langle f|L^2f \rangle = \langle L_xf|L_xf \rangle \geq 0$ ہے (اور L_y کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا) لہذا $\lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہوگا۔
^{۵۴}در حقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ L_+f_t معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے؛ اس کا معیار عنصر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔
سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۴.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی ”سیڑھی“۔

یاد دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی متدرج کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی متدرج دیتی ہے۔
ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ f_b بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

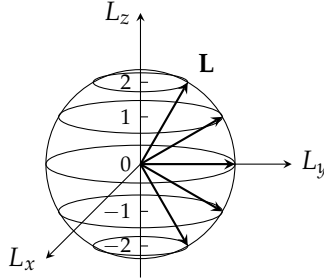
$$(۴.۱۱۴) \quad L_- f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر L_z کا امتیازی متدرج $\hbar \bar{l}$ ہو:

$$(۴.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

معادلات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$



شکل ۷. زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مساوات ۴.۱۱۳ اور مساوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$ ہوگا لہذا $\bar{l} = l + 1$ ہوگا (جو بے معنی ہے، چونکہ خپلا ترین پاسب، بالاترین پاسب سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہوگا۔

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی امتداد $m\hbar$ ہونگے، جہاں m (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت N عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-l$ تا $+l$ ہوگی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ یعنی $l = N/2$ ہوگا، لہذا l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد l اور m کرتے ہیں:

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی سیدھی کے $2l + 1$ پائے ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیسرے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں \hbar کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l + 1)}$ ہوگی جو (یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے) جبکہ ان کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں $0, -1, -2$ ، $1, 2$ ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کار داس)، z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑا ہے! $l = 0$ کی ”حقیر“ صورت میں، عموماً $\sqrt{l(l + 1)} > l$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار

حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ ”کیا میں z محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟“ اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی z محدود L کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ L کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کام تمام اور معیار حرکت بیک وقت تعین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر L_z کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب L_x اور L_y ہم نہیں جانتے سکتے ہیں شکل ۴.۷ میں سمتیہ گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی اپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y غیر تعین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی ترائیبا استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، L^2 اور L_z کے امتیازی افتدار تعین کیے۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا۔ میں کانٹے کی بات $Y_l^m = f_l^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات وہی کروئی ہارمونیاں ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف l اور m استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروئی ہارمونیاں کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی افتدار کے ہر مشی عملین (L^2 اور L_z) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$(۴.۱۲۰) \quad L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1}$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ L_{\pm} اور L_{\mp} ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہیں (چونکہ L_x اور L_y قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$(۴.۱۲۱) \quad A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}$$

دیکھیے گائے سیدھی کی بلند ترین اور ٹھپے ترین پایہ پر کیا ہوگا (جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

۱. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات ۴.۱۰ سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل مطالب حاصل کریں۔

$$(۴.۱۲۲) \quad [L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. معتالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$) تلاش کریں۔

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہمیلٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل L کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں H ، L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفی $V(r)$ میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت L کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt}\langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہرنتسٹ کام مثل گھومتا تعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی کے لیے $d\langle L \rangle/dt = 0$ ہوگا۔ (یہ زاویائی معیار حرکت کے بقا کا کوانٹم میکانی روپ ہے۔)

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا اب $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[r(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) \frac{\partial}{\partial r} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) = 0$ ، $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$ ، اور $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_\theta$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات a_θ اور a_ϕ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$(۳.۱۲۵) \quad a_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k}$$

$$(۳.۱۲۶) \quad a_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا کلاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$(۳.۱۲۷) \quad L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۸) \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۹) \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ہمیں عامل رزنت اور عامل تقطیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

تہا $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۰) \quad L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

بالخصوص (سوال ۳.۲۱-۱) درج ذیل

$$(۳.۱۳۱) \quad L_+ L_- = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

لہذا (سوال ۳.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۲) \quad L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

ہم اب $f_l^m(\theta, \phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ L^2 کا امتیازی قف عمل ہے، جس کا امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے۔

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

یہ ٹھیک ”زاویائی مساوات“ (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی مقدار $m\hbar$ ہوگا:

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو انتہائی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروئی ہارمونیات $Y_l^m(\theta, \phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروئی ہارمونیات ہوں گے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انہی تین مقبولی عاملین H اور L^2 کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۴.۱۳۳)$$

ہم مساوات ۴.۱۳۳ استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات ۴.۱۴ کو مختصر اُدرج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہونیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، l کی (اور لہذا m کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: پرکھی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ سوال ۴.۲۲:

ا. حاب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_l^l$ کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جزو-اکا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$ ہوگا، $L_z Y_l^l(\theta, \phi)$ کی قیمت معمول زنی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلا واسطہ مکمل کے ذریعے معمول زنی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجہ کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۲ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عاسل رفت کا $Y_2^2(\theta, \phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے، کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

ا. دکھائیں کہ اس بے لچکے پھر کی 56 کی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی؟

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکینیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مدار 54 ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم چکر 58 ($\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$) کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا پر زمین کا مدارچی زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنا پر اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ مندرجہ محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی ”مداری“ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ \mathbf{S} کے برابر ہوگا۔ کوانٹم میکینیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی مندرجہ پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنا پر مدارچی زاویائی معیار حرکت (جسے کروئی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو معتام کے متغیرات r اور ϕ سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطہ ذرا ہے، لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدارچی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات غیر غلق 59 زاویائی معیار حرکت \mathbf{L} کے ساتھ غلق 60 زاویائی معیار حرکت \mathbf{S} بھی رکھتے ہیں۔

rigid rotor⁵¹
orbital⁵²
spin⁵⁸
extrinsic⁵⁹
intrinsic⁶⁰

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو، ہمدارچی زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبت رشتوں^{۱۱} سے شروع کرتے ہیں۔

$$(۴.۱۳۴) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

یوں (پہلے کی طرح) S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات^{۱۲}

$$(۴.۱۳۵) \quad S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle$$

اور

$$(۴.۱۳۶) \quad S_{\pm}|sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات (θ, ϕ) کے تفاعل نہیں ہیں (لہذا یہ کروہی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنا پر ہم s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتوں

$$(۴.۱۳۷)$$

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص اور ثابت بل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) چکر^{۱۳} کہتے ہیں: π میزان کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1؛ ڈیٹاک کا چکر $3/2$ ؛ گریوٹان کا چکر 2؛ وغیرہ وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹران کا) ہمدارچی زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حاصل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہوگا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہوگا، جس کی بنا پر نظریہ چکر نسبتاً بدہ ہے۔^{۱۴}

^{۱۱} ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ ہمداری زاویائی معیار حرکت کے مسائل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ تفصیل انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماؤ کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقبولی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکر کی، ہمداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ ہمداری شامل ہوں گے۔

^{۱۲} چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے ”سمتاًویہ“ علاقیت استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے Y_l^m کو $|lm\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہذا میں S_z کے امتیازی قدر کے لئے m استعمال کروں گا، جیسا میں نے L_z کے لئے بھی کیا (بعض مصنفین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں m_l اور m_s لکھتے ہیں)۔

spin^{۱۳}

^{۱۳} یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے $1/2$ چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ پیچیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی بلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُعدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ 2×2 متالب اور 2 رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مصنفین کوانٹم میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی دگائی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنسٹائن کلب $E = mc^2$ سے کلاسیکی الیکٹران رداس r_c حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب ”خط استوا“ پر کسی نقطے کی رفتار (ms^{-1} میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (درحقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید عنطرا دیتا ہے۔)

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک ^{۶۶} اور تمام لپٹان ^{۶۷} کیلئے $\frac{1}{2}$ = s ہوگا لہذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف ”دو“ امتیازی تغسلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر \uparrow) ہے جو ہم میدان چکر ^{۶۸} کا راجحاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو مخالف میدان چکر ^{۶۹} (\downarrow) کہلاتا ہے۔ انہیں کواس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دور کئی قتالب قطار (یا چکر کار ^{۷۰}) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

classical electron radius ^{۶۵}
quarks ^{۶۶}
leptons ^{۶۷}
spin up ^{۶۸}
spin down ^{۶۹}
spinor ^{۷۰}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ساتھ ہی، عاملین چکر 2×2 متالاب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم S^2 کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالاب

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا $c = \frac{3}{4} \hbar^2$ اور $e = 0$ ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4} \hbar^2$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۴) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-,$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ S_z, S_y, S_x تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ $S = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالجے چکر^{۱۱} ہیں۔ دھیان رکھیں کہ S_x, S_y, S_z اور S^2 تمام ہر مشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس S_+ اور S_- غیر ہر مشی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ یقیناً S_z کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر})$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیشانہ $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا (یعنی چکر کار لازمًا معمول شدہ ہوگا)۔^{۱۲}

$$(۴.۱۵۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیشانہ کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتانچ اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں S_x کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

^{۱۱}Pauli spin matrices

^{۱۲}لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہئے ہیں کہ اگر S_z کی پیشانہ کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہوگا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۴۲ دیکھیں۔)

لہذا $\beta = \pm \alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S_x کے (معمول شدہ) امتیازی چکرکار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشق متالاب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکرکار χ (مسادات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a+b|^2/2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a-b|^2/2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکرکار ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہذا S_z کیلئے $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ جبکہ $-\hbar/2$ کے حصول کا

احتمال $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ ہوگا۔ اتفاقی طور پر S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک مندرجہ ذیل تجربے سے گزارتا ہوں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ مندرجہ ذیل ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ”اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا z جزو کیا ہے؟“، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $\hbar/2 +$ ہے؛ چونکہ S_z کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ”اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو کیا ہوگا؟“، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $\hbar/2 +$ یا $\hbar/2 -$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ”حقیقت پسند“ ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: ”کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟“ نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو ψ_+ ہے۔ ”تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟“ اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر S_x اور S_z کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا x جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ مندرجہ ذیل وہ $\hbar/2 +$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے) ”اس ذرے کی S_x قیمت ٹھیک $\hbar/2 +$ ہے۔“ جی آپ درست فرما رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔“ ظاہر ہے، آپ بال کی کمال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بسا؟ میں اب S_x اور S_z دونوں کو حبانہ ہوں۔ ”جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں جبکہ S_z کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔“ لیکن S_x کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون حنراب نہ ہو۔ ”اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔“ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ $\hbar/2 -$ حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: ”اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک معنام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے“، ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تقریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب $1/2$ چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹم میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

۱. تصدیق کیجیے گا کہ چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابلیت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

ب. دکھائیں کہ پالی چکری وتالب (مساوات ۴.۱۴۸) وتاعدہ ضرب

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۳)$$

کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں، اور ϵ_{jkl} علامت لوپس و پچوینا^۳ ہے، جس کی قیمت $123 = jkl$ یا 231 یا 312 کی صورت میں $+1$ جبکہ $132 = jkl$ یا 213 یا 321 کی صورت میں -1 اور دیگر صورت 0 ہوگی۔

سوال ۴.۲۷: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

۱. معمولی ذنی مستقل A تعین کریں۔

ب. S_x, S_y اور S_z کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. ”عدم یقینیت“ $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں σ سے مراد معیار انحراف ہے تاکہ پالی وتالب!)۔

د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکر دار ترتیبی مرتبہ اجتماعات جہاں L کی جگہ S ہوگا) کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle, \langle S_x^2 \rangle, \langle S_y^2 \rangle, \langle S_z^2 \rangle$ اور $\langle S_z^2 \rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ $\langle S^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle$ ہے۔

سوال ۴.۲۹:

۱. S_y کے امتیازی افتدار اور امتیازی چکر کار تلاش کریں۔

ب. عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ a اور b غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!

ج. S_y^2 کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ a_r کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا متالب S_r تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$a_r = \sin \theta \cos \phi i + \sin \theta \sin \phi j + \cos \theta k \quad (۴.۱۵۴)$$

متالب S_r کے امتیازی افتد اور (معمول شدہ) امتیازی چکر کار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad (۴.۱۵۵)$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری حبز و ضرب، مثلاً $e^{i\phi}$ ، سے ضرب دے سکتے ہو لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چکر ایک (1) ہے کے لیے چکری متالب (S_x ، S_y اور S_z) تیار کریں۔ اشارہ: S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے؟ ہر (ان) حال پر S_+ ، S_z اور S_- کا عمل تعین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چکر کاٹا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر μ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت S کا راست متناسب ہوگا:

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۶)$$

جہاں تناسبی متقل γ مسکن مقناطیسی نسبت^{۵۵} کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت سروڈ $\mu \times B$ عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت سروڈ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۷)$$

^{۵۴} magnetic dipole moment

^{۵۵} gyromagnetic ratio

^{۵۶} کلاسیکی طور پر ایک جسم، جس میں بار q اور کمیت m کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت $q/2m$ ہوگی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریے میں ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کلاسیکی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی ہے۔ ($\gamma = -e/m$)

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

لہذا مقناطیسی میدان B میں، ایک مفتام پر ساکن μ ، باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۵۸)$$

مثال ۴.۳: لارمر استقبالی حرکت: فرض کریں z رخ نیکیاں مقناطیسی میدان

$$B = B_0 k \quad (۴.۱۵۹)$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ متابلی روپ میں ہیمیلٹنی (مسوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۰)$$

ہیمیلٹنی H کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو S_z کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۱)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیمیلٹنی غیر متابع وقت ہے لہذا تابع وقت شرودنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi \quad (۴.۱۶۲)$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} a e^{i\gamma B_0 t/2} \\ b e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

μ اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکت کی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہوگی، اور مزید اس کو قوت لورنز ($q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) کا بھی سامنا ہوگا، جس کو چنی توانائی تفاعل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے، لہذا اس کو (اب تک متعارف) شرودنگر مساوات میں نسب نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (حوالہ ۴.۵۹)، تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن دیگر صورت ساکن ہے۔

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہوگا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \quad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں^۸ جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۳)$$

آئیں S کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۴)$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger S_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۵)$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger S_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۶)$$

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۸) محور z کے ساتھ $\langle S \rangle$ مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد^۹

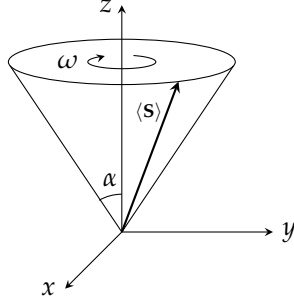
$$\omega = \gamma B_0 \quad (۴.۱۶۷)$$

سے استنباطی حرکت^{۱۰} کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہر نفٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle S \rangle$ اراقت پائے گا۔ بہرحال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سابق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

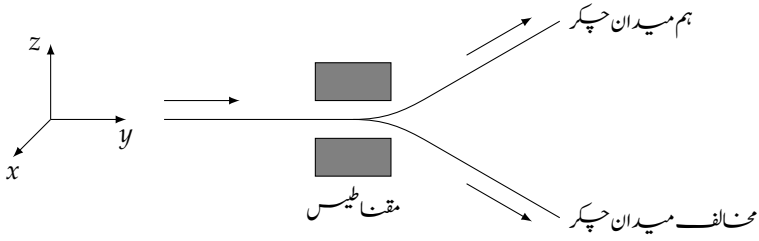
^۸ یہاں a اور b کو حقیقی فرض کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو t کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔

^۹ Larmor frequency

^{۱۰} کلاسیکی صورت میں صرغ توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقنطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استنباطی حرکت کرتا ہے۔



شکل ۴.۸: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle S \rangle$ کی استقبالی حرکت۔



شکل ۴.۹: شرٹن و گرلاخ آلہ۔

مثال ۴.۲: تجربہ شرٹن و گرلاخ: ^{۸۱} ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت سرورڈ بلکہ قوت: ^{۸۲}

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۶۸)$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بند چپکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تبدیلی ^{۸۳} جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان:

$$B(x, y, z) = -\alpha x i + (B_0 + \alpha z) k \quad (۴.۱۶۹)$$

کے خطے سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹)، جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف z حبزوں سے فرض ہے، لیکن بد قسمتی

^{۸۱} Stern-Gerlach experiment

^{۸۲} توانائی (مساوات ۳.۱۵۷) کی منفی دھلوں کے برابر قوت F ہوگی۔

^{۸۳} ہم تبدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت اور ذریعہ بنا پر شعاع کے ٹھکنے سے چپکارا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تاکہ ہم معتامی موٹی اکٹھے مسترب کر کے حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عملاً، شرٹن و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہوگا۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقی طیفی قانون $\nabla \cdot B = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا۔ ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگی۔

$$F = \gamma\alpha(-S_x i + S_z k)$$

تاہم B_0 کے گرد لار مسر استقبالی حرکت کی بنا، S_x تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اوسط قیمت دے گا، لہذا z رخ حالص قوت درج ذیل ہوگی

$$F_z = \gamma\alpha S_z \quad (۴.۱۷۰)$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ S_z کو انشادہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کو انشادہ کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مدار چکی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہوگا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی۔)

اب بالکل آخری قدم تک۔ دلیل حالصت کا اسیکی ہت جبکہ کو انٹرمیکانیات میں ”قوت“ کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوڑنے کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوڑنے میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت T (جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۱)$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں B کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت۔)

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۲)$$

ہوگا لہذا ($t \geq T$ کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$(۴.۱۷۳) \quad \chi(t) = \left(a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z}$$

ان دونوں اجزاء کا اب z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مسوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان حبزوکا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۷۴) \quad p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2}$$

اور یہ مثبت z رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان حبزوکا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی z رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی۔ (چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہذا مساوات ۴.۱۷۴ پہلے حاصل کردہ نتیجہ (مسوات ۴.۱۷۰) کے مطابق ہے۔)

کوانٹم میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گریلاخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جاسکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غصیر تنظیم شدہ شعاع کو شٹرن و گریلاخ مقناطیس سے گزار کر اجرائی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z حبزوکا جانا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گریلاخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

۱. وقت t پر چمکری زاویائی معیار حرکت کی x رخ حبزوکا پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

۱. اس نظام کا ہیملٹنی متالب تیار کریں۔

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹران ہم میدان حال (یعنی $\chi_+^{(x)} = \chi(0)$) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے، لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شروع و ختم مساوات (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج. S_x کی پیمائش سے $\hbar/2$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب:

$$\sin^2 \left(\frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم درکار میدان (B_0) کتنا ہوگا؟

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال^{۸۴} میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوں گی:^{۸۵}

$$(3.145) \quad \uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$$

جہاں پہلا تیسر کا نشان (یعنی بیاں تیسر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیسر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$(3.146) \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک، S_z کا امتیازی حال ہوگا: ان کے z اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقے سے جمع ہوتے ہیں:

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar(m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

^{۸۴} میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ تاؤمدارچی زاویائی معیار حرکت ہو اور تاہی ہمیں اس کے بارے میں فکر مند ہونے کی ضرورت نہ ہو۔

^{۸۵} یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہوگا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہوگا۔

دیکھیں۔ یاد رہے $S^{(1)}$ صرف χ_1 پر عمل کرتا ہے اور $S^{(2)}$ صرف χ_2 پر عمل کرتا ہے۔ یہ علاقیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہوگا:

$$\uparrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\uparrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\uparrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\downarrow: m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے: m کو چاہیے کہ $-s$ تا $+s$ عدد صحیح قدرتوں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ $s = 1$ ہے لیکن یہاں ایک ”اضافی“ حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات (sm) علامتی روپ میں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۷۷) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (سہ تا)}$$

(تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔) اسی بنا پر اسے سہ تا^{۸۶} ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو $s = 0$ کا حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۷۸) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (یک تا)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے مندرجہ حاصل ہوگا (سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔)

یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک (1) یا منصر (0) ہوگا، جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا وہ سہ تا یا ایک تا تنظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ سہ تا حالات، S^2 کے امتیازی

سمتیات ہیں جن کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہے، اور یک تاحالات، S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قدر صفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۷۹) \quad S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}$$

ساوات ۴.۱۷۵ اور مساوات ۴.۱۷۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} (2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$(۴.۱۸۰) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} |10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۱) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2 \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4} |00\rangle$$

ہو گئے۔

ساوات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور مساوات ۴.۱۷۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$(۴.۱۸۲) \quad S^2 |10\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\right) |10\rangle = 2\hbar^2 |10\rangle$$

ہے لہذا $|10\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہوگا؛ اور

$$(۴.۱۸۳) \quad S^2 |00\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right) |00\rangle = 0$$

ہے لہذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر 0 ہوگا۔ (میں آپ کے لئے سوال ۴.۳۳-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہوگی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ موزوں امتیازی قدر کے، S^2 کے امتیازی تفاعلات ہیں۔)

ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر 1 چکر اور 0 چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکر s کیا حاصل ہونگے؟^{۸۷} اس کا جواب^{۸۸} ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک؛ اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک، نیچے آتے ہوئے ہر چکر:

$$s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2| \quad (۴.۱۸۴)$$

حاصل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، زیادہ سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہو گا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صنف بند ہوں، اور کم سے کم اس صورت ہو گا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صنف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ 2 چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو $7/2$ ، $5/2$ ، $3/2$ ، یا $1/2$ کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تشکیل پر منحصر ہو گا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال ψ_{nlm} کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا خالص زاویائی معیار حرکت۔ (چکر جمع مدارچی) $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ ہو گا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l + 1$ ، l ، یا $l - 1$ ہو گا (جہاں l کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہو گا کہ آیا کہ الیکٹران خود $l + 1/2$ تشکیل یا $l - 1/2$ تشکیل میں ہے)۔

(چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہذا) مجموعی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s ہو اور z جزو m ہو، مرکب حالات $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \quad (۴.۱۸۵)$$

ہو گا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامت $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ استعمال کیا ہے)۔ مستقل $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$ کو **کلیش و گورڈن عدد** سر^{۸۹} کہتے ہیں۔ جدول ۴.۸ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر 2×1 جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈب میں (2 چکر اور 1 چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3، اور z جزو 0 ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش (1/5 احتمال کے ساتھ) \hbar یا (3/5 احتمال کے ساتھ) 0 یا (1/5 احتمال کے ساتھ) $-\hbar$ قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ 1 ہے۔ (کلیش و گورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے مرکبوں کا مجموعہ 1 ہو گا۔)

^{۸۷} میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یادوں) مدارچی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم حرف l استعمال کرتے)۔

^{۸۸} ثبوت کے لئے آپ کو اصل نصاب دیکھنا ہو گا۔

^{۸۹} Clebsch-Gordon coefficients

ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |sm\rangle \quad (۴.۱۸۶)$$

بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سب دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور 1 چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لیے $m_2 = 0$ ہے (m لازماً $1/2$ ہوگا) اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ ($3/5$ احتمال کے ساتھ) $5/2$ یا ($1/15$ احتمال کے ساتھ) $3/2$ یا ($1/3$ احتمال کے ساتھ) $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا (کلیش و گورڈن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ 1 ہوگا)۔

یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا ہوں کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ عملی گروپ نظریہ کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ $\sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$ حاصل ہوگا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں $|00\rangle$ پر S_{\pm} کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ 0 حاصل ہوگا۔

ج. دکھائی کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے) S^2 کے موزوں امتیازی قدر والے امتیازی تفاعلات ہیں۔

سوال ۴.۳۵: کووارک ^{۹۲} کا چکر $1/2$ ہے۔ تین کووارک کے مل کر ایک ^{۹۲} بیریا ^{۹۲} مرتب کرتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کووارک کے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کووارک اور ایک ضد کووارک) مل کر ایک ^{۹۳} میڈان ^{۹۳} مرتب کرتے ہیں (مثلاً ^{۹۳} پائون یا ^{۹۳} کایون ^{۹۵})۔ فرض کریں یہ کووارک کے زمینی حال میں ہیں (الہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا)۔

ا. بیریان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

ب. میڈان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

group theory^{۹۰}
quark^{۹۱}
baryon^{۹۲}
meson^{۹۳}
pion^{۹۴}
kion^{۹۵}

ا. چکر 1 کا ایک ساکن ذرہ اور چکر 2 کا ایک ساکن ذرہ اس تشکیل میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3، اور z جزو \hbar ہے۔ چکر 2 ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال ψ_{510} میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انحصار ادی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں (جہاں $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$ ہوگا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیّت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(S^{(1)} \times S^{(2)}) \quad (۴.۱۸۷)$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیش وگورڈن عددی سرہی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $S^{(1)} + S^{(2)}$ مقلوبی ہوگا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

باب ۴ کے لئے اضافی سوالات

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے تین ابعادی ہارمونی مرتعش^{۹۱} پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (۴.۱۸۸)$$

ا. کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بعدی مرتعش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، احبازی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۸۹)$$

ب. E_n کی اخطائیت $d(n)$ تعین کریں۔

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ میں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی مرتعش مخفیہ کروئی تشکیلی ہے لہذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدود کے علاوہ کروئی محدود میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے۔ طمستقی تسلل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ردا۱ مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے احبازی توانائیاں تعین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

۱. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل تین ابعادی مسئلہ وریل^{۹۷} ثابت کریں۔

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۰)$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۱)$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونک سر تعیش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۲)$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۴۱ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی رواج^{۹۸} کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۳)$$

۱. دکھائے کہ \mathbf{J} استمراری مساوات^{۹۹}:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۴)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مقامی بقا احتمال^{۱۰۰} کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاؤ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3 r \quad (۴.۱۹۵)$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ میں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا۔

ب. حال $m = 1$ ، $l = 1$ ، $n = 2$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے \mathbf{J} تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

^{۹۷} three-dimensional virial theorem

^{۹۸} probability current

^{۹۹} continuity equation

^{۱۰۰} conservation of probability

ج. اگر ہم کمیت کے بہاد کو mJ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$L = m \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3 r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تابع وقت) معیار حرکت فضا تفاعل موج^{۱۱} کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۴.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3 r \quad (۴.۱۹۶)$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حرکت کی فضا تفاعل عمل موج تلاش کریں۔ اشارہ: کردی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو \mathbf{p} کے رخ رکھیں اور θ کا مکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۷)$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ $\phi(\mathbf{p})$ معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے $\psi(\mathbf{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اپنے جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ دریل (مساوات ۴.۱۹۱) کا بلا تصادم ہے۔

سوال ۴.۴۳:

ا. حال $m = 1, l = 2, n = 3$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل عمل موج (ψ) تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف r, θ, ϕ اور a (رداس بوجہ) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر (ρ, z, v, Y) یا تفاعل (c_0, A) وغیرہ) یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں π اور e ، وغیرہ استعمال کیے جاسکتے ہیں)۔

ب. r, θ, ϕ کے لحاظ سے موزوں نکلمات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ s کی کس سعت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب مستثنیٰ ہوگا؟

سوال ۴.۴۴:

ا. حال $m = 3, l = 3, n = 4$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل عمل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو کردی محدود r, θ اور ϕ کا تفاعل لکھیں۔

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ (نکلمات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

^{۱۱} momentum space wave function

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ج. اس حال میں ایک جوہر کے متبادل مشاہدہ $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انحصار ہی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۴۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تغاغل موج (مساوات ۴.۸۰) تک درست ہے اور مرکزہ کاردار اس b لپیٹے ہوئے بالکل ٹھیک ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ کم سے کم رتبہ جزویاً: $P \approx (4/3)(b/a)^3$ ہوگا۔ دکھائیں کہ $b \ll a$ کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہوگی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہوگا لہذا $P \approx (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$ لیا جاسکتا ہے۔ تصدیق کیجیے گا کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا۔

د. $b \approx 10^{-15} \text{ m}$ اور $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ لیتے ہوئے P کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴۶:

ا. کلیہ تواری (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں ردائی تغاغل موج درجہ ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ عمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں۔

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں ”عدم یقینیت“ $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہوگی۔ دھیان رہے کہ n بڑھانے سے r میں نسبتی پھیلاؤ گھٹتا ہے (یوں n کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آتا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پر چپانے جاسکتے ہیں)۔ ردائی تغاغل امواج کا خاکہ، n کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۷: ہم مکافض طیفی خطوط: کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے

صدر کوانٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوگی۔

سوال ۴.۴۸: متبادل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں۔

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

- ب. حال ψ_{nlm} میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں۔
- ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔
- سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ا. χ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل A تعین کریں۔
- ب. اس الیکٹران کے S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
- ج. اس الیکٹران کے S_x کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟
- د. اس الیکٹران کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ S_y کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات یکساں تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_a کے رخ ذرہ ۱ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو $S_a^{(1)}$ ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ a_b کے رخ ذرہ ۲ کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو $S_b^{(2)}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں a_a اور a_b کے بیچ زاویہ θ ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۹۸)$$

سوال ۴.۵۱:

ا. کلیڈش گورڈن عددی سرکو، $s_1 = 1/2$ اور s_2 کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے S^2 کا امتیازی حال $|sm\rangle$ ہو۔

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |s_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |s_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات ۴.۱۷۹ تا مساوات ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاصر ہوں کہ (مثلاً) $S_x^{(2)}$ حال $|s_2 m_2\rangle$ کو کیا کرتا ہے، تب مساوات ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مساوات ۴.۱۷۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; \quad B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۸ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر ذرہ کے لیے متالاب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کے امتیازی افتدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مساوات ۴.۱۲۵ اور مساوات ۴.۱۲۷ میں $1/2$ چکر، سوال ۴.۳۱ میں 1 چکر، اور سوال ۴.۵۲ میں $3/2$ چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکر کی متالاب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j \equiv \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہے۔

سوال ۴.۵۴: کروی ہارمونیکس کے لیے معمول زنی ضربیہ درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ ۴.۱.۲ سے درج ذیل جاننے ہیں۔

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جزو B_l^m تعیین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات ۴.۳۲ میں کیا)۔ مساوات ۴.۱۲۰، مساوات ۴.۱۲۱ اور مساوات ۴.۱۳۰ استعمال کرتے ہوئے B_l^m کی صورت میں B_l^{m+1} کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخوذ کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$

تک حل کریں۔ آخر میں سوال ۴.۲۲ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کی قیمت تلاش کریں۔ شریک لیٹنڈر تفاعل کے تصرف کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m \quad (۴.۱۹۹)$$

سوال ۴.۵۵: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے۔

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi_-)$$

ا. مدارچی زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ مدارچی زاویائی معیار حرکت کے z حصہ (L_z) کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے z حصہ (S_z) کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ لیں۔

ه. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں۔ آپ کیا قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس کی r ، θ ، ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

ح. آپ چکر کا z حصہ اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں)۔ ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۶:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ٹیلر تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \phi) = e^{\frac{iL_z\phi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں ϕ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا پر L_z/\hbar کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار^{۱۰۲} کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۲۹ استعمال کریں اور سوال ۳.۳۹ سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$ ہوگا جو \mathbf{a}_n رخ گھومنے کا پیدا کار ہے، یعنی $e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n\phi/\hbar}$ محور \mathbf{a}_n کے گرد (دائیں ہاتھ سمت میں) زاویہ ϕ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$ ہوگا۔ بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_n)\phi/2} \chi \quad (۴.۲۰۰)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور x کے لحاظ سے 180° گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ، ہماری توقعات کے عین مطابق، ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے۔

ج. محور y کے لحاظ سے 90° گھومنے والا متالب تیار کریں اور (χ_+) پر اس کا اثر دیکھیں؟

د. محور z کے لحاظ سے 360° زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں۔

$$e^{i(\sigma \cdot a_n)\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(a_n \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۱)$$

سوال ۴.۵۷: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (مساوات ۴.۹۹) امتیازی اقدار کی (عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی اجازت دیتے ہیں، جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ خصوصی روپ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ پر ضرور کوئی اضافی شرط ملتا ہے جو نصف عددی قیمتوں کو حنا راج کرتی ہے۔ ہم مستقل a جس کا بُعد لمبائی ہو (مثلاً، ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر) لیتے ہوئے درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں۔

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y]$$

ا. تصدیق کیجیے کہ $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ ؛ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$ ہیں۔ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو تمام q اور p مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج. تصدیق کیجیے کہ ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کیت $m = \hbar/a^2$ اور تردد $\omega = 1$ ہو کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ ہوگا جہاں H ہیمیلٹنی ہیں۔

د. ہم جانتے ہیں ہارمونی مرتعش ہیمیلٹنی کے امتیازی اقدار $\hbar\omega(n + 1/2)$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ہوگا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیمیلٹنی کے روپ اور باضابطہ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا)۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازماً عدد صحیح ہوں گے۔

سوال ۴.۵۸: عمومی حال (مساوات ۴.۱۳۹) میں $1/2$ چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کے لئے شرط معلوم کریں (یعنی، فقرہ $|\langle S_z \rangle| \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$ میں مساوی (=) صورت تلاش کریں)۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر ہم a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں؛ تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت حاصل ہو گی جب b حالص حقیقی یا حالص خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۹: کلاسیکی حرکت میں ایک ذرہ، جس کا بار q ہو اور جو برقی میدان E اور مقناطیسی میدان B میں مستحق رفتار v کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جسے لورینز قوت کا قانون^{۱۰۳}:

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۲)$$

پیش کرتا ہے۔ اس قوت کو کسی بھی غیر مستحق مخفی توانائی تقا عمل کی ڈھلوان کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنجر اپنی اصلی روپ (مساوات ۱.۱) میں اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے۔ تاہم اس کا نفیس روپ:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (۴.۲۰۳)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتا ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگی

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (۴.۲۰۴)$$

جہاں \mathbf{A} مستحق مخفی ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) اور φ غیر مستحق مخفی ($E = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$) ہے، لہذا شرودنجر مساوات (باضابطہ متبادل $((\hbar/i)\nabla \rightarrow \mathbf{p})$ پر کر کے) درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi \quad (۴.۲۰۵)$$

۱. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \rangle \quad (۴.۲۰۶)$$

ب. ہمیشہ کی طرح (مساوات ۴.۳۲، دیکھیں) ہم $\frac{d\langle r \rangle}{dt}$ کو $\langle \mathbf{v} \rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q\langle E \rangle + \frac{q}{2m} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \rangle \quad (۴.۲۰۷)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں E اور B میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q(E + \langle \mathbf{v} \rangle \times B) \quad (۴.۲۰۸)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس طرح $\langle v \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین اورینٹز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی، جیسا ہم مسئلہ ہرنسٹ کے تحت توقع کر سکتے تھے۔

سوال ۴.۶۰: [پس منظر جاننے کے لیے سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] مندرجہ کریں

$$A = \frac{B_0}{2}(xj - yi) \quad \text{اور} \quad \varphi = Kz^2$$

ہیں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں۔

۱. میدان E اور B تلاش کریں۔

ب. ان میدان اس ذرہ کے امتیازی تفاعلات اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں جس کی قیمت m اور بار q ہو۔ جواب:

$$(۴.۲۰۹) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں $\omega_1 \equiv qB_0/m$ اور $\omega_2 \equiv \sqrt{2qKm}$ ہیں۔ تبصرہ: $K = 0$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹرون حرکت ہے^{۴۰} اکاؤنٹائی مشاں ہوگا؛ کلاسیکی سائیکلوٹرون تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہوگا۔ اجزائی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1$ لنڈو سطحیں^{۴۵} کہلاتی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: [پس منظر جاننے کی خاطر سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] کلاسیکی برقی حرکیات میں محض A اور φ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں؛ طبعی مقداریں میدان E اور B ہوں گے۔ ۱. دکھائیں کہ محض

$$(۴.۲۱۰) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں Λ مقام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان دیتے ہیں جو φ اور A دیتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱۰ ماپے تبادلہ^{۴۶} کہلاتی ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ ماپے غیر متغیر^{۴۷} ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفیہ کارکردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ ماپے غیر متغیر رہتا ہے یا نہیں۔ دکھائیں کہ ماپے تبادلہ محض φ' اور A لیتے ہوئے درج ذیل

$$(۴.۲۱۱) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات ۴.۲۰۵) کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف پیتی حیز و ضربی کا فرق

^{۴۰}cyclotron motion

^{۴۵}Landau Levels

^{۴۶}gauge transformation

^{۴۷}gauge invariant

پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبعی حال^{۱۰۸} کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ ماپ غیر متغیر ہوگا) مزید معلومات کے لیے حصہ ۱۰.۲.۳ سے رجوع کیجیے گا۔

^{۱۰۸} یعنی $\langle \mathbf{r} \rangle$ ، $d\langle \mathbf{r} \rangle / dt$ ، وغیرہ تبدیل نہیں ہوں گے۔ چونکہ Λ معتمد کا تابع ہے، $\langle \mathbf{p} \rangle$ (جس میں \mathbf{p} کو عامل $\nabla (\hbar/i)$ ظاہر کرتا ہے) تبدیل ہوگا، تاہم جیسا ہم نے مساوات ۴.۲۰۶ میں دیکھا، \mathbf{p} موجودہ سیاق و سباق میں میکانی معیار حرکت ($m\mathbf{v}$) کو ظاہر نہیں کرتا ہے (گراؤنجیاتیات میں اس کو باضابطہ معیار حرکت کہتے ہیں)۔

باب ۵

تمثیل ذرات

۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذروی کے لیے (نی الحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) $\psi(r, t)$ فضائی محدود، r ، اور وقت، t ، کا تعلق ہوگا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے محدود، (r_1) ، دوسرے ذرے کے محدود، (r_2) ، اور وقت کا تابع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے شر و ڈنگر مساوات

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا جہاں H مکمل نظام کا ہیملٹنی ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(r_1, r_2, t)$$

ذره 1 اور ذره 2 کے محدود کے لحاظ سے تعریفات کو ∇ کے زیر نوشت میں بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ذره 1 کا حجم $d^3 r_1$ اور ذره 2 کا حجم $d^3 r_2$ میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا:

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

جہاں شماریاتی مفہوم معمول کے مطابق کارآمد ہوگا۔ ظاہر ہے کہ ψ کو درج ذیل کے تحت معمول پر لانا ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفیہ کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ:

$$(۵.۶) \quad \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$

حاصل ہوگا جہاں فضائی تفاعل عمل موج (ψ) غیر تابع وقت شرودنگر مساوات:

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے جس میں E نظام کی کل توانائی ہے۔

سوال ۱: عام طور پر باہم عمل مخفیہ کا انحصار صرف دو ذرات کے بیچ متباعد $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات \mathbf{r}_1 اور \mathbf{r}_2 کی جگہ نئے متغیرات \mathbf{r} اور (مرکز کیت) $\mathbf{R} \equiv \frac{(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2}$ کے استعمال سے مساوات شرودنگر دو حصوں میں علیحدہ ہوگی۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \\ \nabla_1 &= \frac{\mu}{m_2} \nabla_R + \nabla_r, & \nabla_2 &= \frac{\mu}{m_1} \nabla_R - \nabla_r \end{aligned}$$

جہاں

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تخفیف شدہ کمیت ہے۔

ب. دکھائیں کہ (غیر تابع وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi$$

ج. متغیرات کو $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_R(\mathbf{R})\psi_r(\mathbf{r})$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_R ایک ذروی شرودنگر مساوات، جس میں کیت m کی بجائے کل کیت $(m_1 + m_2)$ ، مخفیہ صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R ہو، کو مطمئن کرتا ہے جبکہ ψ_r ایک ذروی شرودنگر مساوات، جس میں کیت m کی بجائے تخفیف شدہ کیت، مخفیہ $V(\mathbf{r})$ اور توانائی E_r ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ کل توانائی ان کا مجموعہ: $E = E_R + E_r$ ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کیت ایک آزاد ذرہ کی مانند حرکت کرتا ہے اور (ذرہ 1 کے لحاظ سے ذرہ 2 کی) نسبتی حرکت ایسی ہوگی جیسا مخفیہ V میں تخفیف شدہ کیت کا ایک ذروی کرتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں بالکل یہی تحلیل ہوگی جو دو جسمی مسئلہ کو معادل یک جسمی مسئلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں ہائیڈروجن کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم الیکٹران کی کیت کی جگہ تخفیف شدہ کیت استعمال کرتے ہیں (سوال ۵.۱)۔

ا. ہائیڈروجن کی بندشی توانائی (مساوات ۳.۷۷) جاننے کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے پیدا ہونے والی تبدیلی کا معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔

ب. ہائیڈروجن اور ڈیوٹیریم کے لیے سرخ بالمر لکیریوں ($n = 2 \rightarrow n = 3$) کے طول موج کے پچ فاصلہ (مشرق) تلاش کریں۔

ج. پازٹرونیم^۲ کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران رکھنے سے پازٹرونیم پیدا ہوگا۔ ضد الیکٹران کی کیت الیکٹران کی کیت کے برابر جبکہ اس کا بار الیکٹران کے بار کے مخالف ہے۔

د. فرض کریں آپ میونی^۳ ہائیڈروجن^۳ جس میں الیکٹران کی جگہ ایک میون ہوگا کی وجودیت کی تصدیق کرنا جانتے ہیں۔ میون کا بار الیکٹران کے بار کے برابر ہے، تاہم اس کی کیت الیکٹران سے 206.77 گنا زیادہ ہے۔ آپ لیمن α لکیر $n = 1 \rightarrow n = 2$ کے لیے کس طول موج پر نظر رکھیں گے؟

سوال ۵.۳: کلورین کے قدرتی دو ہم جاب Cl^{35} اور Cl^{37} پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCl کارلزشی طیف متغیرب متغیرب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا جن میں فاصلہ $\Delta\nu = 7.51 \times 10^{-4} \nu$ ہوگا جہاں ν حار جی نورب کا تعدد ہے۔ (اشارہ: اس کو ایک ہارمونی مرتعش تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ ہوگا جہاں μ تخفیف شدہ کیت۔ مساوات ۵.۸) ہے جبکہ دونوں ہم جاب k ایک جیسا تصور کریں۔

۵.۱.۱ یوزان اور فرمیان

فرض کریں ذرہ 1 (ایک ذروی حال) $\psi_a(r)$ اور ذرہ 2 حال $\psi_b(r)$ میں پائے جاتے ہیں۔ (یاد رہے، میں یہاں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں) ایسی صورت میں $\psi(r_1, r_2)$ سادہ حاصل ضرب ہوگا۔^۴

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \quad (۵.۹)$$

ہم یہاں فرض کر رہے ہیں ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچانا جاسکتا ہے؛ ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ 1 حال ψ_a اور ذرہ 2 حال ψ_b میں ہے بے معنی ہوگا؛ ہم صرف اتنا کہہ پاتے کہ ایک ذرہ حال ψ_a اور دوسرا ذرہ حال ψ_b میں پایا جاتا ہے، تاہم ہم نہیں جانتے کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ ایک بے

positronium^۲
muonic hydrogen^۳

در حقیقت، ضروری نہیں کہ ہر دو ذروی تصادف عمل موج دو ایک ذروی تصادفات موج کا حاصل ضرب ہو۔ ایسے حال جنہیں ہمبیتہ^۴ (entangled states) کہتے ہیں کو اس طرح دو حصوں میں علیحدہ نہیں کیا جاسکتا ہے۔ تاہم اگر ذرہ 1 حال a اور ذرہ 2 حال b میں ہوں، تب دو ذروی حال حاصل ضرب ہوگا۔ میں جانتا ہوں، آپ سوچ رہے ہیں: ”ذرہ 1 کیسے کسی حال میں اور ذرہ 2 کسی دوسرے حال میں نہیں ہوں گے؟“ اس کی کلاسیکی مثال ایک تاحکری تشاکل ہے (مساوات ۳.۱۷۸)؛ میں آپ کو اکیلے ذرہ 1 کا حال نہیں بتا سکتا ہوں، چونکہ یہ ذرہ 2 کے حال کے ساتھ ہمبیتہ ہے۔ اگر 2 کی پیمائش کی جائے اور نتیجہ ہم میدان چکر ہو تب 1 ہم میدان چکر اور 2 مخالف میدان چکر ہوگا۔

دو متماثلہ اعتراض ہوگا: اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دے کر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات میں صورتحال بنیادی طور پر مختلف ہے: آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں۔ حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل متماثل ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے قاصر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ ”یہ“ الیکٹران اور ”وہ“ الیکٹران کہنا کوانٹم میکانیات میں بے معنی ہیں؛ ہم صرف ”ایک“ الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔

ایسے ذرات کی موجودگی کو، جو اصولاً غیر ممیز ہوتے ہیں، کوانٹم میکانیات خوش اسلوبی سے سمجھتی ہے: ہم ایسا غیر مشروط تعامل موج تیار کرتے ہیں جو یہ بات نہیں کرتا کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ ایسا دو (ذیل) طریقوں سے کرنا ممکن ہے۔

$$(5.10) \quad \psi_{\pm}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے متماثل ذرات کا حاصل ہوگا: **بوزاں**^۵ جن کے لئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور **فرمیاں**^۶ جن کے لئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزاں کی مثالیں نور یہ اور میوزون ہیں جبکہ فرمیاں کی مثالیں پروٹان اور الیکٹران ہیں۔ ایسا ہے کہ

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزاں جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیاں ہوں گے۔} \end{array} \right.$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق (جیسا ہم دیکھیں گے فرمیاں اور بوزاں کی شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوتے ہیں) کو اضافی کوانٹم میکانیات میں ثابت کیا جاسکتا ہے؛ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔^۷

اس سے بالخصوص ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ دو متماثل فرمیاں (مثلاً دو الیکٹران) ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_{-}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_a(r_2) - \psi_a(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا پر کوئی تعامل موج^۸ نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ **پاولی اصول**^۹ مناعتی کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے، بلکہ یہ دو ذروی تعاملات موج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے، جس کا اطلاق تمام متماثل فرمیاں پر ہوگا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال ψ_a اور دوسرا حال ψ_b میں پایا جاتا ہے، تاہم اس مسئلہ کو زیادہ عمومی (اور زیادہ نفیس طریقے سے) وضع کیا جاسکتا ہے۔ ہم **عامل**^{۱۰}، P ،

bosons^۵fermions^۶^۷ اضافت کے اثرات یہاں پائے جاتا عجیب سی بات ہے۔

^۸ یاد رہے کہ میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے الجھن ہو (کیوں کہ بغیر چکر فرمیاں خود ایک تصادم ہے)، فرض کریں تمام الیکٹران کے چکر ایک جیسے ہیں۔ میں جلد چکر کو بھی شامل کروں گا۔

Pauli exclusion principle^۹exchange operator^{۱۰}

متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے۔

$$Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1) \quad (۵.۱۲)$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہوگا لہذا (تصدیق کیجیے گا کہ) P کے امتیازی امتداد ± 1 ہوں گے۔ اب اگر یہ دونوں ذرات متماثل ہوں، تب لازماً ہیملٹنی ان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتے گا: $m_1 = m_2$ اور $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ ۔ اس طرح P اور H ہم آہنگ متماثل مشاہدہ ہوں گے:

$$[P, H] = 0 \quad (۵.۱۳)$$

لہذا ہم دونوں کے بیک وقت امتیازی حالات کے تفادیلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ، مساوات شرودنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشاکلی (امتیازی فتر $+1$) یا غیر تشاکلی (امتیازی فتر -1) ہوں۔

$$\psi(r_1, r_2) = \pm \psi(r_2, r_1) \quad (۵.۱۴)$$

مزید، ایک نظام جو اس طرح کے حال سے آغاز کرے، اسی حال میں برقرار رہتا ہے۔ متماثل ذرات کا نیا تعداد (جس کو میں ضرورتاً ^{۱۱}تثاقلیتے^{۱۲} کہتا ہوں) کے تحت تفادیل موج کو مساوات ۵.۱۴ پر صرف پورا کرنے کی اجازت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو مطمئن کرتا ہو؛ یوزان کے لئے مثبت علامت اور فتر میان کے لئے منفی علامت ہوگا۔^{۱۳} یہ ایک عمومی فقرہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت مساوات ۵.۱۰ ہے۔

مثال ۵.۱: فرض کریں ایک لامتناہی چوکور کنویں (۲.۲) میں کیت m کے باہم غیر متعامل دو ذرات (جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں) پائے جاتے ہیں؛ آپکو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً ایسا کیسے کیا جاسکتا ہے! ایک ذروی حالات درج ذیل ہوں گے (جہاں اپنی سہولت کے لئے ہم $K \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ لیتے ہیں)۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

متماثل میز ذرات کی صورت میں، جب ذرہ ۱ حال n_1 میں اور ذرہ ۲ حال n_2 میں ہو، مرکب تفادیل موج سادہ حاصل ضرب:

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2) K.$$

^{۱۱}symmetrization requirement

^{۱۲}بعض اوقات اشارہ دیا جاتا ہے کہ P اور H کے باہمی متغولی ہونا ضرورت تشاکلیت (مساوات ۵.۱۴) کی پشت پر ہے۔ یہ بالکل غلط ہے؛ ہم دو متماثل میز ذرات (مثلاً ایک الیکٹران اور ایک ضد الیکٹران) کا ایسا نظام تصور کر سکتے ہیں جس کا ہیملٹنی تشاکلی ہو، جس کے باوجود تفادیل موج کا تشاکلی (یا غیر تشاکلی) ہونے کی ضرورت نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس متماثل ذرات کو لازماً تشاکلی یا غیر تشاکلی حالات کا مکمل ہونا ہوگا، اور یہ ایک نیا بنیادی تعداد ہے؛ جو شرودنگر مساوات اور شراریاتی مفہوم یعنی اہمیت کا حاصل ہے۔ اب، ایسا ضروری نہیں تھا کہ متماثل ذرات پائے جاتے؛ ایسا ہو سکتا تھا کہ ہر دو ذروں کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہو تا۔ کو انٹیمیکانیت متماثل ذرات کے امکان کی اجازت دیتی ہے، اور فتر سے جہاں نہیں دیا۔ (مجھے کوئی شکوہ نہیں ہے چونکہ اس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں!)

ہوگا۔ مثال کے طور پر زمینی حال:

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K;$$

ہوگا اور پہلا ہیجان حال دو چند انحطاطی:

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K, \\ \psi_{21} &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K; \end{aligned}$$

ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔ دونوں ذرات متماثل بوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا، تاہم پہلا ہیجان حال:

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

(جس کی توانائی اب بھی 5K ہوگی) غیر انحطاطی ہوگا۔ اور اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں، تب 2K توانائی کا کوئی بھی حال نہیں ہوگا؛ زمینی حال جس کی توانائی 5K ہوگی درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

□

سوال ۵.۴:

ا. اگر ψ_a اور ψ_b عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات ۵.۱۰ میں مستقل A کیا ہوگا؟

ب. اگر $\psi_a = \psi_b$ ہوں (اور یہ معمول شدہ ہوں) تب A کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف بوزان کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

ا. لامتناہی چوکور کنویں میں باہم غیر متماثل دو متماثل ذرات کا ہیملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال ۵.۱ میں دیا گیا فرمیان کا زمینی حال H کا مناسب امتیازی قدر والا امتیازی تقابلی عمل ہوگا۔

ب. مثال ۵.۱ میں دیے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو تقابلی عمل موج اور توانائیاں، تینوں صورتوں (قابل ممیز، متماثل بوزان، متماثل فرمیان) میں ہر ایک کے لئے حاصل کریں۔

۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشاکلیت کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہے، اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول

شدہ ہیں۔ اگر دونوں ذرات متماثل ممیز ہوں، اور ذرہ 1 حال ψ_a میں ہو تب ان کا مجموعی تفاعل موج

$$(۵.۱۵) \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

ہوگا؛ اگر یہ متمثل بوزان ہوں تب ان کا مرکب تفاعل موج (معمول زنی کے لئے سوال ۵.۲ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۶) \quad \psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

اور اگر یہ متمثل فرمیان ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۷) \quad \psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

آئیں ان ذرات کے بیچ فاصلہ علیحدگی کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔

$$(۵.۱۸) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

صورتے اول: قابل ممیز ذرات۔ مساوات ۵.۱۵ میں دیے گئے تفاعل موج کے لئے

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

(ایک ذروی حال ψ_a میں x^2 کی توقعاتی قیمت)،

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

ہوں گے۔ یوں اس صورت درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۹) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

(انتفاقی جواب ذرہ 1 حال ψ_b میں اور ذرہ 2 حال ψ_a میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔)

صورتے دوم: متماثل ذرات۔ مساوات ۵.۱۶ اور مساوات ۵.۱۷ کے قساعات موج کے لئے

$$\begin{aligned}\langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)\end{aligned}$$

اور بالکل اسی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

(ظاہر ہے $\langle x_1^2 \rangle = \langle x_2^2 \rangle$ ہوگا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے ہیں۔) تاہم

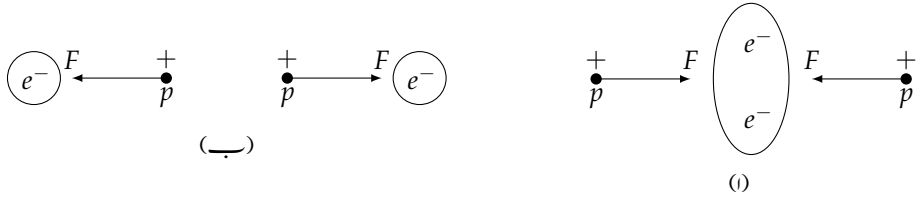
$$\begin{aligned}\langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2\end{aligned}$$

جہاں درج ذیل ہے ہوگا۔

$$(۵.۲۰) \quad \langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۲۱) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$



شکل ۵.۱: شریک گرمختی بندھ کی نقشہ کشی: (I) تشاکلی تفکیک قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکلی تفکیک قوت دفع پیدا کرتی ہے۔

ساوات ۵.۱۹ اور ساوات ۵.۲۱ کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مندرجہ صرف آخری جزو میں پایا جاتا ہے۔

$$(۵.۲۲) \quad \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm}}_{\text{متشکل}} = \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_d}_{\text{متماثل میسر}} \underbrace{\mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2}_{\text{مندرقت}}$$

متماثل میسر ذرات کے لحاظ سے متماثل بوزان (بالائی علامتیں) ایک دوسرے کے نسبتاً متریب جبکہ متماثل مندرمیان (زیریں علامتیں) ایک دوسرے سے نسبتاً دور ہوں گے (جہاں ذرات ایک جیسے دو حالات میں ہوں)۔ دھیان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعلات موج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں، $\langle x \rangle_{ab}$ مندر ہوگا (غیر مندر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ مندر ہو تب ساوات ۵.۲۰ میں مکمل کی قیمت مندر ہوگی)۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_a ظاہر کرتا ہو، جبکہ صوابی (میرے آبائی ضلع) میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_b ظاہر کرتا ہو، تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی مندرقت نہیں پڑے گا۔ یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعلات موج غیر منطبق ہوں کو آپ متماثل میسر تصور کرنے کا ڈھونگ رہا سکتے ہیں۔ (یقیناً اسی کی بنا پر ماہر طبیعیات اور کیمیا دان آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً کائنات میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ، ان کے تفاعلات موج کی عدم تشاکلیت کے ذریعہ، جڑا ہے اور اگر یہ واقعی اہمیت کا حامل ہوتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے!)

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتی ہے جب ان کے تفاعلات موج جزوی منطبق ہوں۔ ایسی صورت میں نظام کا رویہ کچھ یوں ہوگا جیسے متماثل بوزان کے ”توت کشش“ پائی جاتی ہو، جو انہیں متریب کھینچتی ہے، اور متماثل مندرمیان کے ”توت دفع“ پائی جاتی ہے، جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتے ہیں (یاد رہے کہ ہم فی الحال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں)۔ ہم اس کو قوت مبادلہ^{۱۳} کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک قوت نہیں ہے؛ کوئی بھی چیز ان ذرات کو دکھیل نہیں رہی ہے؛ یہ صرف ضرورت تشاکلیت کا ہندسی نتیجہ ہے۔ ساتھ ہی یہ کوانٹم میکانیکی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکانیات میں کوئی مثال نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثلاً، ہائیڈروجن سالہ (H₂) پر غور کریں۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، جوہری زمینی حال (ساوات ۴.۸۰) جس کا مرکز مرکزہ 1 پر واقع ہے، میں ایک الیکٹران اور جوہری زمین حال جس کا مرکز مرکزہ 2 پر واقع ہے، میں

^{۱۳} exchange force

ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہوگا۔ اگر الیکٹران بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت (یا "قوت مبادلہ"، اگر آپ اسے پسند کرتے ہیں) کو شش کرتی ہے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کرے (شکل ۵.۱-ا)، نتیجتاً منفی بار کا انبار دونوں پروٹان کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا ہے، جو شریکے گرتے بندھ^{۱۴} کا سبب بنتا۔^{۱۵} بد قسمتی سے الیکٹران در حقیقت مندرمیان ہیں نہ کہ بوزان جس کی بنا پر منفی بار اطراف پر انبار ہوگا (شکل ۵.۱-ب) جو سالہ کو ٹکڑے ٹکڑے کر دے گا!

ذرات کیسے گا! ہم چیکر کو نظر انداز کرتے رہے ہیں۔ الیکٹران کا مقامی تقاضا عمل موج اور چیکر دار (جو الیکٹران کے چیکر کی سمت بندی کو بیان کرتا ہے) مل کر اس کا (درج ذیل) مکمل حال دیں گے۔^{۱۶}

$$\psi(r)\chi(s) \quad (5.23)$$

دو الیکٹران کی حال مرتب کرتے ہوئے ہمیں مبادلہ کے لحاظ سے صرف فضائی جزو کو عدم تشاکلی نہیں بلکہ مکمل حال کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چیکر کی حالات (مساوات ۵.۱۷ اور مساوات ۵.۱۸) پر نظر کریں ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک تاملاپ خلاف تشاکلی ہے (لہذا اس کو تشاکلی فضائی تقاضا عمل کے ساتھ جوڑنا ہوگا) جبکہ تینوں سے تاحالات تشاکلی ہیں (لہذا انہیں خلاف تشاکلی فضائی تقاضا عمل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا)۔ ظاہر ہے کہ یوں یک تاحال بندھ پیدا کرے گا جبکہ سے تاحال خلاف بندھ ہوگا۔ یقیناً کیمیا دان ہمیں بتاتے ہیں کہ شریکے گرتے بندھ کے لئے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران ایک تاحال کے مکین ہوں اور ان کا کل چیکر صفر ہو۔^{۱۷}

سوال ۵.۶: لامتناہی چو کور کنوین میں دو غیر متماثل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کیت m ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال ψ_n (مساوات ۲.۲۸) اور دوسرا حال ψ_l ($l \neq n$) میں ہے۔ $\langle x_1 - x_2 \rangle^2$ کا حساب اس صورت لگائیں جب (الف) ذرات غیر متماثل ممیز ہوں، (ب) ذرات متماثل بوزان ہوں اور (ج) ذرات متماثل مندرمیان ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال ψ_a ، دوسرا حال ψ_b ، اور تیسرا حال ψ_c میں پایا جاتا ہے۔ حالات ψ_a ، ψ_b ، اور ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے (مساوات ۵.۱۵، ۵.۱۶، اور ۵.۱۷) تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) متماثل ممیز ذرات، (ب) متماثل بوزان اور (ج) متماثل مندرمیان کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہونا ہوگا، جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکلی تقاضا عمل موج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ ^{۱۸}مقطع سلیر تیار کریں جس کی پہلی صف $\psi_a(x_1)$ ، $\psi_b(x_1)$

covalent bond^{۱۹}

^{۱۵}امراکڑہ کے بیچ شراکتی الیکٹران جمع ہو کر جوہروں کو مشترک کھینچ کر شریکے گرتے بندھ پیدا کرتے ہیں۔ اس کے لئے دو عدد الیکٹران لازمی نہیں۔ ہم حصہ ۵.۳ میں صرف ایک الیکٹران پر مبنی شریکے گرتے بندھ دیکھیں گے۔

^{۱۶}چیکر اور مقام کے بیچ عدم ارتباط کی صورت میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ چیکر اور فضائی محدود میں حال کو علیحدہ کرنا ممکن ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ ہم میدان چیکر حاصل کرنے کا احتمال، ذرے کے مقام پر مختصر نہیں ہوگا۔ ارتباط کی موجودگی میں عمومی حال، سوال ۵.۵ کی طرز پر، خطی ملاپ $\psi_+(r)\chi_+ + \psi_-(r)\chi_-$ کا روپ اختیار کرے گا۔

^{۱۷}اے اعلیٰ میں ہم عموماً کہتے ہیں کہ الیکٹران ایک دوسرے کے مخالف صفت بندھ ہیں (ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان)۔ یہ ضرورت سے زیادہ سادہ صورت ہوگی چونکہ یہی کچھ $m = 0$ سے تاحال کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ درست فہم یہ ہوگا: "دو ایک تعلق میں ہیں۔"

Slater determinant^{۱۸}

، $\psi_c(x_1)$ ، وغیرہ ہوگی، اس کی دوسری صنف $\psi_a(x_2)$ ، $\psi_b(x_2)$ ، $\psi_c(x_2)$ ، وغیرہ ہوگی اور اسی طرح اس کے باقی صنف ہوں گے (یہ طریقہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہے)۔

۵.۲ جوہر

ایک معادل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو، ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کو (کمیت m اور بار e کے) Z الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔ اس نظام کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا۔^{۱۹}

$$(۵.۲۴) \quad H = \sum_{j=1}^Z \left\{ -\frac{h^2}{2m} \nabla_j^2 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Ze^2}{r_j} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}$$

قوسین میں بند جزو، مرکزہ کے برقی میدان میں j ویں الیکٹران کی حرکت کی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے؛ دوسرا مجموعہ (جو مساوی $k = j$ ، تمام j اور k پر لیا گیا ہے) الیکٹرانوں کی باہمی قوت دفع سے وابستہ مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے (جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دوبار گنا گیا ہے)۔ ہمیں تقاضا عمل موج $\psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$ کیلئے درج ذیل شروڈنگر مساوات:

$$(۵.۲۵) \quad H\psi = E\psi$$

حل کرنی ہوگی۔ البتہ الیکٹران متناثر فرمیان ہیں، لہذا، تمام حل متبادل قبول نہیں ہوں گے: صرف وہ حل متبادل قبول ہوں گے جن میں مکمل حال (مقام اور چکر):

$$(۵.۲۶) \quad \psi(r_1, r_2, \dots, r_Z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_Z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکلی ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے ہیں۔

بد قسمتی سے شروڈنگر مساوات کو مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیمیلٹنی کے لئے، مساوی سادہ ترین صورت $Z = 1$ (ہائیڈروجن)، ٹھیک حل نہیں کیا جاسکتا ہے (کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے)۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے ابواب میں غور کیا جائے گا: ابھی میں الیکٹران کی قوت دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کئی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ ۵.۲.۱ میں ہم ہیلیم کے زمینی حال اور ہیجان حالات پر غور کریں گے جبکہ حصہ ۵.۲.۲ میں ہم زیادہ بڑے جوہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

^{۱۹} مرکزہ کو ساکن تصور کیا گیا ہے۔ مرکزہ کی حرکت کو تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) کے ذریعہ شامل کرنا صرف دو جسی نظام کے لئے ممکن ہے؛ خوش قسمتی سے مرکزہ کی کمیت الیکٹران کی کمیت سے اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ درکار درستگی، ہائیڈروجن کے لئے بھی، متبادل نظر انداز ہوتی ہے (سوال ۵.۲-۱)۔ ادیکھیں، اور زیادہ بھاری جوہروں کے لئے یہ مزید کم ہوگی۔ مرکزہ کی مستحالی جسامت، اضافیتی درستگیاں اور الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی باہم عمل کے زیادہ دلچسپ اثرات پائے جاتے ہیں۔ ان پر آنے والے ابواب میں غور کیا جائے گا، تاہم یہ تمام ”خالص کولب“ جوہر، جسے مساوات ۵.۲۴ بیان کرتی ہے، میں انتہائی چھوٹی درستگیاں ہیں۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیمیلٹنی کے لیے آپ شرودنگر مساوات (مساوات ۵.۲۵) کا حل $(\psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_Z))$ حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تشاکلی تفاعل اور ایک مکمل خلاف تشاکلی تفاعل کس طرح بنائیں گے جو شرودنگر مساوات کو اسی توانائی کیے مطمئن کرتا ہو۔

۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے سادہ جوہر ہیلیم ($Z = 2$) ہے۔ اس کا ہیمیلٹنی

(۵.۲۷)

$$H = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} \right\} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|}$$

(ہر $2e$ مرکزہ کے) دو ہائیڈروجنی ہیمیلٹنی، ایک الیکٹران 1 اور ایک الیکٹران 2، کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دفع پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر متاثر علیحدگی ہوگی اور اس کے حلوں کو نصف بوہر داس (مساوات ۴.۷۲) اور چارگن بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) [دوبارہ سمجھنے کے لیے] کی صورت میں سوال ۴.۱۶ پر دوبارہ نظر ڈالیں] کے ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب:

(۵.۲۸)

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_{nlm}(r_1) \psi_{n'l'm'}(r_2)$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی جہاں $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$ ہوگا۔

(۵.۲۹)

$$E = 4(E_n + E_{n'})$$

بالخصوص زمینی حال

(۵.۳۰)

$$\psi_0(r_1, r_2) = \psi_{100}(r_1) \psi_{100}(r_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

ہوگا (مساوات ۴.۸۰ دیکھیں) اور اس کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

(۵.۳۱)

$$E_0 = 8(-13.6 \text{ eV}) = -109 \text{ eV}$$

چونکہ ψ_0 تشاکلی تفاعل ہے لہذا چپکری حال کو خلاف تشاکلی ہونا ہوگا اور یوں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاشکیل میں ہوگا، جس میں چپکری حال کے ”مخالف صفت بند“ ہوں گے۔ یقیناً حقیقت میں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاشکی ہے، تاہم اس کی تجرباتی حاصل توانائی -78.975 eV ہے جو مساوات ۵.۳۱ سے کافی مختلف ہے۔ یہ زیادہ حیرت کی بات نہیں ہے: ہم نے الیکٹران کی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی

مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار (مساوات ۵.۲۷ دیکھیں) ہے جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی کم ہو کر 109 eV کی بجائے 79 eV ہو جائے گی (سوال ۵.۱۱ دیکھیں)۔

ہیلیم کے ہیجان حالات:

$$\psi_{nlm}\psi_{100} \quad (5.32)$$

ہائیڈروجنی زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ہیجان حال میں دوسرے الیکٹران، پر مشتمل ہوگا۔ [دونوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں ڈالنے سے ایک الیکٹران فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے، جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر استمراریہ ($E > 0$) میں دھکیلتا ہے، اور یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہیلیم باردار یہ (He^+) حاصل ہوگا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں؛ سوال ۵.۹ دیکھیں] ہم ہمیشہ کی طرح تشاکلی اور خلاف تشاکلی ملاپ تیار کر سکتے ہیں (مساوات ۵.۱۰)؛ اول الذکر خلاف تشاکلی چکر تشکیل (یک تا) کے ساتھ جابے گا، جنہیں نزد ہیلیم^{۲۰} کہتے ہیں، جبکہ موخر الذکر کو تشاکلی چکر تشکیل (سہ تا) درکار ہوگی اور انہیں ہیلیم پر سٹے^{۲۱} کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً نزد ہیلیم ہوگا؛ جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ ۵.۱.۲ میں دریافت کیا، تشاکلی فصائی حال الیکٹرانوں کو متعرب لاتا ہے، جس کی بنا پر ہم توقع کرتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی باہم متعامل توانائی زیادہ ہوگی، اور یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ ہیلیم پرست کے لحاظ سے نزد ہیلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے (شکل ۵.۲ دیکھیں)۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہیلیم جوہر کے دونوں الیکٹران کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں؛ خارجی الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی؟

ب. ہیلیم باردار یہ He^+ کے طیف پر (مستداری) تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہیلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں (کیفی) تجزیہ کریں۔ (ا) اگر الیکٹران متقابل بوزان ہوتے، (ب) اگر الیکٹران متقابل ممیز ذرات ہوتے (لیکن ان کی کمیت اور بار ایک جیسے ہوں)۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے لہذا چکر کی تھیلیات یک تا اور سہ تا ہوں گے۔

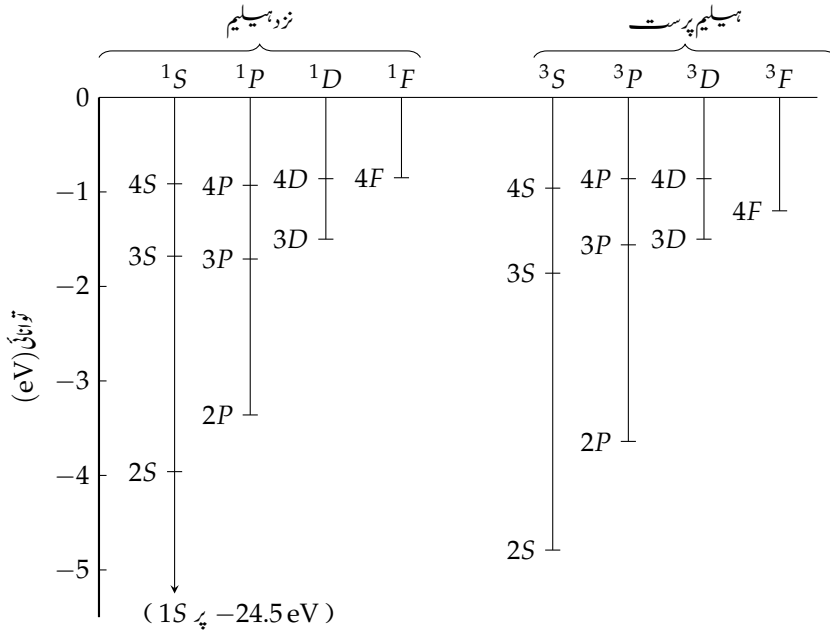
سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات ۵.۳۰ میں دیے گئے حال ψ_0 کیلئے $\langle (1/|r_1 - r_2|) \rangle$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کرودی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھیں تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}.$$

ہو۔ پہلے $d^3 r_2$ کا مکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے مکمل آسان ہے، بس مثبت جذر لینا یاد رکھیں۔ آپ کو r_2 مکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا؛ پہلا 0 سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$

parahelium^{۲۰}
orthohelium^{۲۱}



شکل ۵.۲: ہیلیم کی توانائیوں کے سطح (علاقیت کی وضاحت حصہ ۵.۲.۲ کی گئی ہے)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی توانائیاں مطابقتی ہیلیم پرست سے زیادہ ہیں۔ انتہائی پیچیدہ باردارہ ہیلیم کے زمینی حال $(\text{He}^+ : 4 \times (-13.6)\text{eV} = -54.4\text{eV})$ کے لحاظ سے ہیں؛ کسی بھی حال کی کل توانائی جاننے کی خاطر 54.4eV منفی کریں۔

ب۔ جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہیلیم کے زمینی حال میں الیکٹران کی باہمی متعادل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں اور اس کو E_0 (مساوات ۵.۳۱) کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمینہ حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینہ تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں، لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔)

۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹران کی تفصیل تقریباً اسی طرح جوڑ کر حاصل کیے جاتے ہیں۔ پہلی تخمینہ میں (انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے) ہار Z_e کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذروی ہائیڈروجنی حالات (n, l, m) ، جنہیں مدارچے^{۲۲} کہتے ہیں، کے انفرادی الیکٹران ممکن ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان (یا قابل تمیز ذرات) ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ میں گر جاتے اور یکساں اتنا دلچسپ نہ ہوتا۔ حقیقت میں الیکٹران متماثل فرمیان ہیں، جن پر پالی اصول منعیت لاگو ہوتا ہے، لہذا کسی ایک مدارچہ کے صرف دو الیکٹران ممکن ہو سکتے ہیں (ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان؛ بلکہ یہ کہنا زیادہ بہتر ہوگا، کہ یک تافکلیل حال میں)۔ کسی بھی n کی قیمت کے لئے n^2 ہائیڈروجنی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں (جن میں سے ہر ایک کی توانائی E_n ہوگی)، یوں $n = 1$ خول^{۲۳} میں دو الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی، $n = 2$ خول میں آٹھ، $n = 3$ میں اٹھارہ، اور n ویں خول میں $2n^2$ الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی۔ کیفی طور پر بات کرتے ہوئے دوری جدول^{۲۴} کے افقی صف، ہر ایک انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے (اگرچہ یہ پوری کہانی نہیں ہے؛ اگر ایسا ہوتا، انکی لمبائیاں 2، 8، 18، 32، 50، وغیرہ ہوتیں تاکہ 2، 8، 18، 32، 50، وغیرہ؛ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹران کا باہم دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے)۔

ہیلیم میں، $n = 1$ خول بھرا ہوگا، لہذا اگلے جوہر لتھیم ($Z = 3$) کو $n = 2$ خول میں ایک الیکٹران رکھنا ہوگا۔ اب $n = 2$ کے لئے $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے؛ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ (چونکہ جوہر توانائی n پر منحصر ہوتی ہے تاکہ l پر) لہذا الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک جیسی ہوگی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا پر الیکٹران کی توانائی دفع l کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیار حرکت الیکٹران کو بیرونی رخ دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا زیادہ مرکزہ سے دور ہوگا اتنا مرکزہ، اندرونی الیکٹرانوں کے زیادہ پھیلے ہوئے ہو کر اوچھل ہوگا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا ہار Z_e ”نظر“ آتا ہے جب کہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے e سے کچھ زیادہ بار نظر آتا ہے۔) یوں کسی بھی ایک خول میں کم سے کم توانائی کا حال (یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران) $l = 0$ ہوگا، اور بڑھتے l کے ساتھ توانائی بڑھے گی۔ اس طرح لتھیم میں تیسرا الیکٹران مدارچہ $(2, 0, 0)$ کا مکین ہوگا۔ اگلا جوہر (بیریلیم جس کا $Z = 4$ ہے) بھی اسی حال میں ہوگا (پس اس کا چکر ”الٹ رخ“ ہوگا) لیکن بوران ($Z = 5$)

orbitals^{۲۲}
shell^{۲۲}
periodic table^{۲۲}
screened^{۲۵}

کو $l = 1$ استعمال کرنا ہوگا۔

اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون ($Z = 10$) کو پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ خول مکمل بھرا ہوگا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ خول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ اس صف کے آغاز میں دو جوہر (سوڈیم اور گنیشیم) کا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد (سلور^{۲۶} سے آرگن تک) چھ ایسے جوہر ہیں جن کا $l = 1$ ہوگا۔ آرگن کے بعد ہم ”توقع“ کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہوگا؛ البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران کا مرکزہ کو پس پردہ کرنے کا اثر اشد اور پکڑتا ہے کہ اگلا خول بھی اس کے نظر ہو جاتا ہے (یعنی یہ خول بھی اوجھل ہو جاتا ہے) لہذا اپوناشیم ($Z = 19$) اور کلشیم ($Z = 20$)، $n = 3$ ، $l = 2$ کی بجائے $n = 4$ ، $l = 0$ منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دوبارہ نیچے اتر کر $n = 3$ اور $l = 2$ (اسکینڈیم تا جیست)، اور اس کے بعد $n = 4$ ، $l = 1$ (گیلیم تا کرپٹان) اٹھاتے ہیں، اور یہاں پہنچ کر ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف ($n = 5$) میں چھلانگ لگا کر بعد میں $n = 4$ خول کے $l = 2$ اور $l = 3$ بھرتے ہیں۔

یہاں جوہری حالات کے تسمیہ جس کو تمام کیمیادان اور ماہر طبیعیات استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہوگا۔ اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے طیف پیمائی کاروں کو معلوم ہوگی کہ $l = 0$ کو کیوں s کہتے ہیں، $l = 1$ کو p ، $l = 2$ کو d ، اور $l = 3$ کو f کہتے ہیں؛ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راہ پر آ گئے اور انہوں نے لاطینی حروف تہجی کے تحت (g, h, i, j اور k, l وغیرہ) نام دیے۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو nl کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں n (عدد) حال کو اور l (حرف) مدارچی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے؛ کو انم عدد m کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نسائیں حال کے ممین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تفصیل

$$(5s)^2 (2s)^2 (2p)^2 \quad (۵.۳۳)$$

کہتی ہے کہ مدار $(1, 0, 0)$ میں دو الیکٹران، مدار $(2, 0, 0)$ میں دو الیکٹران جبکہ مدار $(2, 1, 1)$ ، $(2, 1, 0)$ اور $(2, 1, -1)$ کے کسی ملاپ میں دو الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حل ہے۔

اس مثال میں دو الیکٹران ایسے ہیں جن کا مدارچی زاویائی معیار حرکت کو انشائی عدد ایک (1) ہے، لہذا کل مدارچی زاویائی معیار حرکت کو انشائی عدد L (چھوٹے l کی بجائے بڑا L جو انحصار دی ذرہ کی نہیں بلکہ کل کو ظاہر کرتا ہے) 2، 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ساتھ ہی، $(1s)$ کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یک تاحال بندھن میں ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا؛ یہی کچھ $(2s)$ کے دو الیکٹران کے لئے بھی ہوگا، لیکن $(2p)$ کے دو الیکٹران یا تو ایک تا نظام اور یا سہ تا نظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کو انشائی عدد S (کل کو ظاہر کرنے کے لئے یہاں بھی بڑا حرف استعمال ہوگا) 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ میزبان کل (مدارچی جمع چکر) J کی قیمت 3، 2، 1 یا 0 ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو قواعد ہنڈ^{۲۸} (سوال ۵.۱۳ دیکھیں) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل علامتی

aluminium^{۲۹}

۲۹ خول $n = 1$ کا نام K ، $n = 2$ کا نام L ، $n = 3$ کا نام M ، وغیرہ رکھے گئے۔ خولوں کے نام M سے شروع ہو کر لاطینی حروف تہجی کے ترتیب سے ہیں۔
Hund's Rules^{۲۸}

روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$L_J^{2S+1} \quad (۵.۳۴)$$

(جہاں S اور J اعداد جبکہ L (جو کل کوٹا ہر کرتا ہے) بڑا حرف ہوگا۔ کاربن کا زمینی حال 3P_0 ہے؛ اس کا کل چکر 1 ہے (جس کی بنا پر 3 لکھا گیا ہے)، کل مداریتی زاویائی معیار حرکت 1 ہے (لہذا P لکھا گیا ہے) اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے (لہذا 0 لکھا گیا ہے)۔ جدول ۱.۵ میں دوری جدول کے ابتدائی چار صف کے لئے انفرادی تھیلیات اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات ۵.۳۴ کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔^{۲۹}

سوال ۵.۱۲:

ا. دوری جدول کے ابتدائی دو صف (یون تک) کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں الیکٹران تھیلیات پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۱.۵ کے ساتھ کریں۔

ب. ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائسیٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳:

ا. ہض کا پہلا قاعدہ^{۳۰} کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسی ہونے کی صورت میں وہ حال جس کا کل چکر S زیادہ سے زیادہ ہو، کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ ہیلیم کے بچبان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔

ب. ہض کا دوسرا قاعدہ^{۳۱} کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو وہ حال جس کا زیادہ سے زیادہ کل مداریتی زاویائی معیار حرکت L ہو، کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ کاربن کے لئے $L = 2$ کیوں نہیں ہے؟ اشارہ یاد رہے کہ ”سیڑھی کا بالائی سر“ ($M_L = L$) تشاکلی ہے۔

ج. ہض کا تیسرا قاعدہ^{۳۲} کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول (n, l) نصف سے زیادہ بھرا نا ہو، تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L - S|$ ہوگا؛ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L + S$ کی توانائی کم سے کم ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۱۲۔ ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کریں۔

د. قواعد بن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ خلاف تشاکل مقام حال (اور خلاف تشاکل مقام حال کے ساتھ تشاکلی چکری حال) استعمال ہوگا، سوال ۵.۱۲۔ ب میں کاربن اور نائسیٹروجن میں درپیش مشکلات سے چھکارا حاصل کریں۔ اشارہ: کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر ”سیڑھی کے بالائی سر“ کو دیکھیں۔

سوال ۵.۱۴: (دوری جدول کے چھ صف میں عنصر 66) ڈسپروزیوم کا زمینی حال 5I_8 ہے۔ اس کے کل چکر، کل مدارچے، اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کے کوانٹائی اعداد کیا ہوں گے؟ ڈسپروزیوم کے الیکٹران تشکیل کا حنا کہ تجویز کریں۔

^{۲۹} کرپٹان، عنصر 36 کے بعد، صورت حال زیادہ پیچیدہ ہو جاتی ہے (حالات کے ترتیب میں مہین ساخت زیادہ بڑا کردار ادا کرنے لگتا ہے) لہذا یہ صف پر جگہ کی نہیں تھی جس کی وجہ سے جدول کو یہاں اختتام پذیر کیا گیا۔

^{۳۰} Hund's first rule

^{۳۱} Hund's second rule

^{۳۲} Hund's third rule

جدول ۱.۵: دوری جدول کے اولین چار قطاروں کے الیکٹران تشکیلات

تفصیل	عنصر	Z
$^2S_{1/2}$ (1s)	H	1
1S_0 (1s) ²	He	2
$^2S_{1/2}$ (He)(2s)	Li	3
1S_0 (He)(2s) ²	Be	4
$^2P_{1/2}$ (He)(2s) ² (2p)	B	5
3P_0 (He)(2s) ² (2p) ²	C	6
$^4S_{3/2}$ (He)(2s) ² (2p) ³	N	7
3P_2 (He)(2s) ² (2p) ⁴	O	8
$^2P_{3/2}$ (He)(2s) ² (2p) ⁵	F	9
1S_0 (He)(2s) ² (2p) ⁶	Ne	10
$^2S_{1/2}$ (Ne)(3s)	Na	11
1S_0 (Ne)(3s) ²	Mg	12
$^2P_{1/2}$ (Ne)(3s) ² (3p)	Al	13
3P_0 (Ne)(3s) ² (3p) ²	Si	14
$^4S_{3/2}$ (Ne)(3s) ² (3p) ³	P	15
3P_2 (Ne)(3s) ² (3p) ⁴	S	16
$^2P_{3/2}$ (Ne)(3s) ² (3p) ⁵	Cl	17
1S_0 (Ne)(3s) ² (3p) ⁶	Ar	18
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)	K	19
1S_0 (Ar)(4s) ²	Ca	20
$^2D_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d)	Sc	21
3F_2 (Ar)(4s) ² (3d) ²	Ti	22
$^4F_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ³	V	23
7S_3 (Ar)(4s)(3d) ⁵	Cr	24
$^6S_{5/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ⁵	Mn	25
5D_4 (Ar)(4s) ² (3d) ⁶	Fe	26
$^4F_{9/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ⁷	Co	27
3F_4 (Ar)(4s) ² (3d) ⁸	Ni	28
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)(3d) ¹⁰	Cu	29
1S_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰	Zn	30
$^2P_{1/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p)	Ga	31
3P_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ²	Ge	32
$^4S_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ³	As	33
3P_2 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁴	Se	34
$^2P_{3/2}$ (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁵	Br	35
1S_0 (Ar)(4s) ² (3d) ¹⁰ (4p) ⁶	Kr	36

۵.۳. ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گزشتہ ۳۳ الیکٹران میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص ”موروثی“ مرکزہ کے کولمب میدان سے آزاد، تمام قتلیمی حبال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم دو انتہائی سادہ نمونوں پر غور کریں گے: پہلا نمونہ سمرقند کا الیکٹران گیس نظر ہے جس میں (سرحد کے علاوہ) باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور ان الیکٹران کو (لامستہائی) چوکور کنویں کے تین ابعادی مثال کی طرح ڈبلے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے؛ اور دوسرا نمونہ نظریہ بلون ہے جو الیکٹران کے باہمی دفع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کی قوت کشش کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے۔ یہ نمونہ ٹھوس اجسام کی کوانٹائی نظریہ کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں، لیکن اس کے باوجود یہ ”جمود“ کے حصول میں پالی حصول مناعت کے گہرے کردار پر اور موصل، غیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتے ہیں۔

۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس

فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اضلاع l_x ، l_y اور l_z ہیں اور اس جسم کے اندر الیکٹران پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہوتی، ماسوائے نا قابل گزر دیواروں کے۔

$$(۵.۳۵) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

شرودنگر مساوات،

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi$$

کارتیزی محدود میں علیحدہ ہوتی ہے: $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ جہاں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z$$

اور $E = E_x + E_y + E_z$ ہوں گے۔ اب

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, \quad k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, \quad k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

لکھ کر درج ذیل عمومی حل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} X(x) &= A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x), & Y(y) &= A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y), \\ Z(z) &= A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z) \end{aligned}$$

سرحدی شرائط کے تحت $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$ لہذا $B_x = B_y = B_z = 0$ اور یوں $X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$

$$(۵.۳۶) \quad k_x l_x = n_x \pi, \quad k_y l_y = n_y \pi, \quad k_z l_z = n_z \pi$$

ہوں گے جہاں ہر n ایک مثبت عدد صحیح ہوگا۔

$$(۵.۳۷) \quad n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

(معمول شدہ) تناسبات موج:

$$(۵.۳۸) \quad \psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right)$$

ہوں گے اور احباب زنی توانائیاں:

$$(۵.۳۹) \quad E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

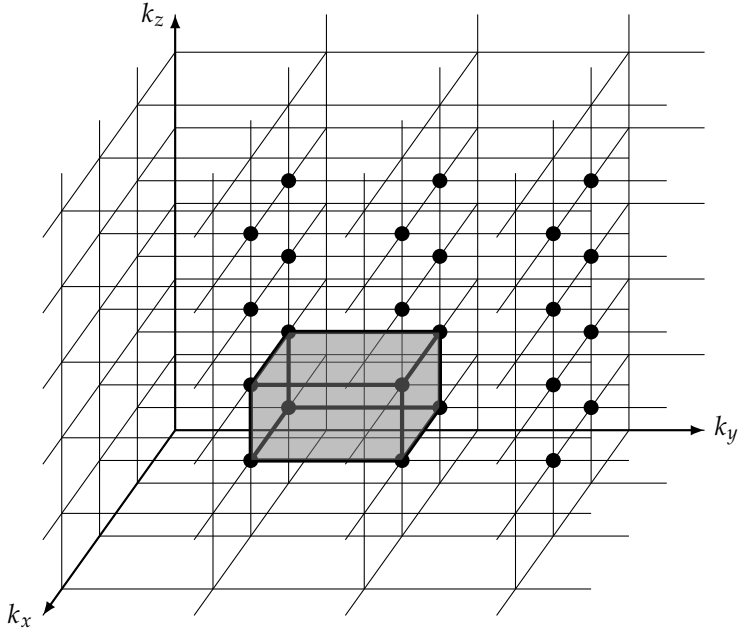
ہوں گی، جہاں سمتیہ موج $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مقدار k ہے۔

ایک تین ابعادی فضا جس کے محور k_x ، k_y ، k_z ہوں کا تصور کریں جس میں

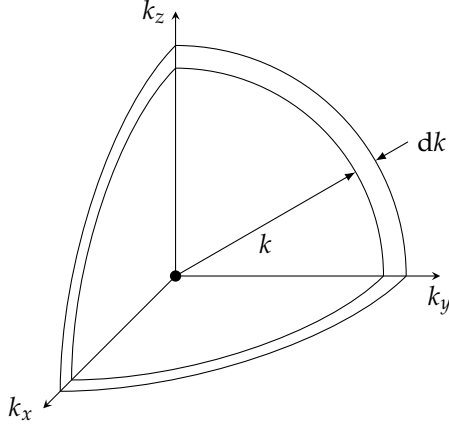
$$k_x = \frac{\pi}{l_x}, \frac{2\pi}{l_x}, \frac{3\pi}{l_x}, \dots$$

$$k_y = \frac{\pi}{l_y}, \frac{2\pi}{l_y}, \frac{3\pi}{l_y}, \dots$$

$$k_z = \frac{\pi}{l_z}, \frac{2\pi}{l_z}, \frac{3\pi}{l_z}, \dots$$



شکل ۵.۳: آزاد الیکٹران گیس۔ حال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک ”ڈبا“ کو سیاہ دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبے کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔



شکل ۵.۴: کروی پوست کا k فضا میں ایک نمونہ۔

پرسیدھی سطحیں پائے جاتی ہوں؛ اس فضا میں ہر انفرادی نقطہ تقاطع، منفرد ایک ذرا سا کن حال دیگا (شکل ۵.۳)۔ اس حال کا ہر خانہ، اور یوں ہر حال، k فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم $V \equiv l_x l_y l_z$ ہے۔

$$(۵.۴۰) \quad \frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں N جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے q آزاد الیکٹران دیتا ہو۔ (عملاً، کسی بھی کلاں بین جامت کے چیز کے لئے N کی قیمت بہت بڑی ہوگی، جس کی گنتی ایوگا درو عدد میں کی جائے گی؛ جبکہ q ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہوگا) اگر الیکٹران بوزان (یا متاشل ممیز ذرات) ہوتے تب وہ زمینی حال ψ_{111} میں سکونیت^{۳۵} اختیار کرتے۔ تاہم حقیقت میں الیکٹران متاشل مندرمیان ہیں جن پر پالی اصول مناعت کا اطلاق ہوتا ہے، لہذا کسی بھی حل کے صرف دو الیکٹران مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں یہ الیکٹران k فضا میں رداس k_F کے کرہ کا ایک نمونہ^{۳۶} بھرتے ہیں؛ اس رداس کو اس حقیقت سے تعین کیا جاسکتا ہے کہ الیکٹران کے ہر ایک جوڑے کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہوگا (مادات ۵.۴۰)۔

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

^{۳۵} میں یہاں فرض کر رہا ہوں کہ ایسا کوئی حراری یا دیگر اضطرار نہیں پایا جاتا جو ٹھوس جسم کو مجموعی زمینی حال سے اٹھاتا ہو۔ میں ”ٹھنڈے“ ٹھوس جسم کی بات کر رہا ہوں، اگرچہ جیسا آپ سوال ۵.۱۶-۵.۱۷ میں دیکھیں گے، ٹھوس اجسام، رہائشی درجہ حرارت سے بہت زیادہ درجہ حرارت پر بھی موجودہ نقطہ نظر سے ”ٹھنڈے“ ہوتے ہیں۔

^{۳۶} کیونکہ، N بہت بڑا عدد ہے لہذا ہمیں حال کے اصل دخی سطح اور کرہ کی اس ہموار سطح میں مندرق کرنے کی ضرورت نہیں جو اس کو تختیتاں ظاہر کرتا ہے۔

یوں

$$(۵.۴۱) \quad k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}}$$

ہوگا جہاں

$$(۵.۴۲) \quad \rho \equiv \frac{Nq}{V}$$

کثافت آزاد الیکٹرانز^{۴۷} (اکائی حجم میں آزاد الیکٹران کی تعداد) ہے۔

k فضا میں آباد حالات (جن میں الیکٹران بستے ہوں) اور غیر آباد حالات (جن میں الیکٹران نہیں بستے ہوں) کی سرحد کو فرمی سطح^{۴۸} کہتے ہیں (جس کی بنا پر زیر نوشت میں F لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقی توانائی کو فرمی توانائی^{۴۹} E_F کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴۳) \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے: ایک پوست جس کی موٹائی dk شکل ۵.۴ ہوگا جسم

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk$$

ہوگا، لہذا اس پوست میں الیکٹران حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{2[(1/2)\pi k^2 dk]}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (مادہ ۵.۳۹) ہے لہذا پوست کی توانائی

$$(۵.۴۴) \quad dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

اور کل توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$(۵.۴۵) \quad E_{\text{کل}} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-2/3}$$

free electron density^{۴۷}
Fermi surface^{۴۸}
Fermi energy^{۴۹}

کو انجم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا کہ گیس میں اندرونی حرارتی توانائی (U) کا ہوتا ہے۔ بالخصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبلے کے حجم میں dV کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کی رونما ہوگی

$$dE_{\text{کل}} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-5/3} dV = -\frac{2}{3} E_{\text{کل}} \frac{dV}{V}$$

جو سیرن پر کو انجم دباؤ P کا کیا ہوا کام ($dW = P dV$) ہو گا۔ ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{کل}}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} \rho^{5/3} \quad (۵.۴۶)$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس جسم اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا: ایک اندرونی کوانٹائی میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتا ہے جس کا الیکٹران کے باہمی دفع (جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں) یا حرارتی حرکت (جس کو ہم خارج کر چکے ہیں) کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے، بلکہ جو متمثل مندرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات **انحطاطی دباؤ**^{۴۰} کہتے ہیں اگرچہ ”منعستی دباؤ“ بہتر اصطلاح ہوگی۔^{۴۱}

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹران کی اوسط توانائی $\frac{E_{\text{کل}}}{Nq}$ کو مندری توانائی کی نسبت کی صورت میں لکھیں۔ جواب: $\frac{3}{5} E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبے کی کثافت 8.96 g cm^{-3} ہے جبکہ اس کا جوہری وزن 63.5 g mol^{-1} ہے۔

ا. مساوات ۵.۴۳ استعمال کر کے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی مندری توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹران دوازلت کی صورت میں لکھیں۔

ب. الیکٹران کی مطابقتی مستقیم رفتار کیا ہوگی؟ اشارہ: $\left(\frac{1}{2}\right)mv^2 = E_F$ لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹران کو غنیر اضافیتی تصور کرنا خطرے سے باہر ہوگا؟

ج. تانبہ کے لئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حرارتی توانائی ($k_B T$) جہاں k_B بولٹزمن مستقل اور T کیلون حرارت ہے، مندری توانائی کے برابر ہوگی؟ تبصرہ: اس کو **فرم** درجہ حرارت^{۴۲} کہتے ہیں۔ جب تک اصل درجہ حرارت مندری درجہ حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو ”ٹھنڈا“ تصور کیا جاسکتا ہے اور اس میں الیکٹران نچلے ترین متابل پہنچے حال میں ہوں گے۔ کیونکہ تانبہ 1356 K پر پگھلتا ہے لہذا ٹھوس تانبہ پر صورت ٹھنڈا ہوگا۔

د. الیکٹران گیس نمونہ میں تانبہ کے لئے انحطاطی دباؤ (مساوات ۵.۴۶) کا حساب لگائیں۔

degeneracy pressure^{۴۰}

^{۴۱} ہم نے مساوات ۵.۴۱، مساوات ۵.۴۳، مساوات ۵.۴۵، اور مساوات ۵.۴۶ لامتناہی مستطیل جسم کے لئے اخذ کیے، تاہم یہ کسی بھی شکل کے ہر اس جسم کے لئے درست ہیں جس میں ذرات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔

Fermi temperature^{۴۲}

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نسبتی اضافہ کے تناسب کو جیم مقیاس^{۳۳} کہتے ہیں۔

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

دیکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $B = \frac{5}{3}P$ ہوگا اور سوال ۵.۱۶- دکا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبے کے لئے جیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربے سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ ہے؛ مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں، کیونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ حیرانی کی بات ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم وناصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کاربڈ، نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل و صورت مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جس سے یک بُعدی ڈیراکے^{۳۴} کہتے ہیں اور جو ایک جتنے برابر وناصلوں پر نوکیلی ڈیٹا تقاضا ملات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۵)۔^{۳۵} لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت سادہ بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ a کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

(۵.۳۷)

$$V(x+a) = V(x)$$

مسئلہ بلوچ کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لئے مساوات شروڈنگر،

(۵.۳۸)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

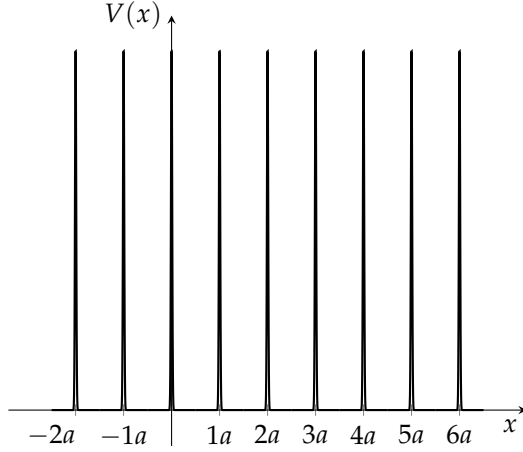
کے حل سے مراد وہ تقاضا عمل ایسا جاسکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

(۵.۳۹)

$$\psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x)$$

bulk modulus^{۳۳}
Dirac comb^{۳۴}

^{۳۵} ڈیٹا تقاضا عمل کو نیچے رخ رکھنا زیادہ ٹھیک ہوتا، جو مسراکزہ کے قوت کشش کو غلبہ کرتے، تاہم، ایسا کرنے سے مثبت توانائی حل کے ساتھ ساتھ منفی توانائی حل بھی حاصل ہوتے ہیں جس کی بنا پر حساب کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے (سوال ۵.۲۰ دیکھیں)۔ ہم یہاں مخفیہ کی دوریت کے اثرات میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ ایسا ہر کم معقول شکل منتخب کر کے مسئلے کا حل آسان ہوگا؛ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ مسراکزہ $\pm 3a/2$ ، $\pm a/2$ ، وغیرہ پائے جاتے ہیں۔



شکل ۵.۵: ذرات ایک کنگھی۔ مساوات 57.5

جہاں K ایک مستقل ہے۔ یہاں مستقل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو x کا تابع نہیں ہے اگرچہ یہ E کا تابع ہو سکتا ہے۔

ثبوتے: مان لیں D ایک ہٹا و عامل ہے:

$$(5.50) \quad Df(x) = f(x+a)$$

دوری مخفیہ مساوات 5.47 کی صورت میں D ہیملٹنی کا متقو بی ہوگا:

$$(5.51) \quad [D, H] = 0$$

لہذا ہم H کے ایسے امتیازی تفاعلات چن سکتے ہیں جو بیک وقت D کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں:

$$D\psi = \lambda\psi$$

$$(5.52) \quad \psi(x+a) = \lambda\psi(x)$$

یہاں λ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اگر یہ صفر ہو تب چونکہ مساوات 5.52 تمام x کے لئے مطمئن ہوگا لہذا ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ کسی بھی غیر مخلوط عدد کی طرح اس کو قوت نمائی روپ میں لکھا جاسکتا ہے:

$$(5.53) \quad \lambda = e^{iKa}$$

جہاں K ایک مستقل ہوگا۔

اس مقام پر مساوات 5.53 امتیازی قدر λ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ K حقیقی ہے اور یوں اگرچہ $\psi(x)$ خود غنیر دوری ہے $|\psi(x)|^2$ جو درج ذیل ہے۔

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (5.54)$$

دوری ہوگا جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔^{۴۶}

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی حقیقی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لئے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاں بین سطح کے متلم میں کئی ایوگا درو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور الیکٹران پر سطحی اثر متاثر نظر انداز ہوگا۔ ہم مسئلہ بلوخ پر پورا اترنے کی خاطر x کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کا سر بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد اس کے دم پر پایا جاتا ہو؛ باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط مسلط کرتے ہیں۔

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \quad (5.55)$$

یوں مساوات 5.49 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$e^{iNka}\psi(x) = \psi(x)$$

لہذا $1 = e^{iNka} = 2\pi n$ یا $Nka = 2\pi n$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.56)$$

یہاں K لازماً حقیقی ہوگا مسئلہ بلوخ کی افادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ مثلاً $(0 \leq x < a)$ کے وقفہ پر مسئلہ شروع کرنا ہوگا مساوات 5.49 کی بار بار اطلاق سے ہر جگہ کے حالات حاصل ہوں گے۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ درحقیقت نوکیلی ذیل انتفاعات ذیراک کنگھی پر مشتمل ہو:

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \quad (5.57)$$

شکل 5.5 میں آپ تصور کریں گے کہ محور x کو یوں دائروی شکل میں گھمایا گیا ہے کہ N نوکیلی تفاعیل درحقیقت نقطہ $x = -a$ پر پایا جاتا ہے۔ اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے لیکن یاد رہے ہمیں دوریت سے دلچسپی ہے۔ کلاسیکی طور پر دہراتا ہوا مستطیلی مخفیہ استعمال کیا گیا جواب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے خطہ $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہوگا لہذا

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi,$$

^{۴۶}یقیناً، آپ دلیل کو اسطے کر کے مساوات 5.5۴ سے آغاز کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ ثابت کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنا ممکن نہیں ہوگا، کیونکہ مساوات 5.۴۹ کے یقینی جبز درونی کو x کا تفاعل ہونے کی اجازت صرف مساوات 5.5۴ ہی ہے۔

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi,$$

ہوگا۔

جہاں ہمیشہ کہ طرح درج ذیل ہوگا

$$(۵.۵۸) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۵.۵۹) \quad \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), (0 < x < a).$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبادا کے بالکل بائیں ہاتھ پہلے جانب میں تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$(۵.۶۰) \quad \psi(x) = e^{-iKa} [A \sin k(x+a) + B \cos k(x+a)], (-a < x < 0).$$

نقطہ $x = 0$ پر ψ لازماً استمراری ہوگا لہذا

$$(۵.۶۱) \quad B = e^{-iKa} [A \sin(ka) + B \cos(ka)];$$

اس کے تفرق میں ڈیٹا تفاعل کی زور کے براہ راست متناسب عدم استمرار پائے جائے گی مساوات 2.125 جس میں α کی علامت الٹ ہوگی چونکہ یہاں کنویں کی بجائے نوکیلی تفاعل پایا جاتا ہے

$$(۵.۶۲) \quad kA - e^{-iKa} k [A \cos(ka) - B \sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} B$$

مساوات 5.61 کو $A \sin(ka)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۵.۶۳) \quad A \sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)] B$$

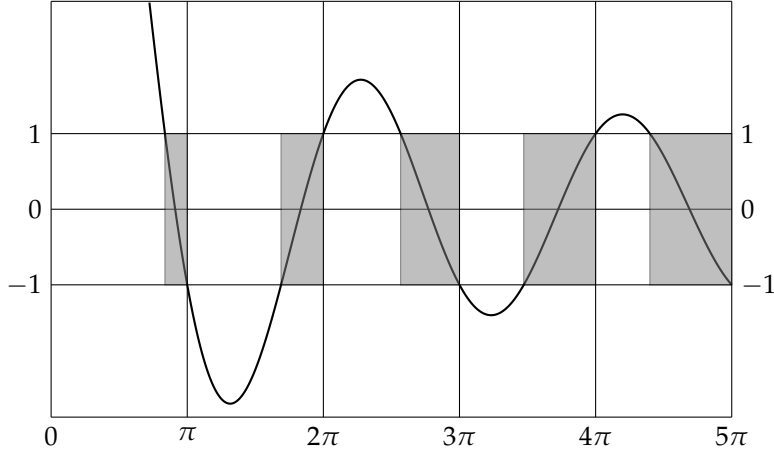
اس کو مساوات 5.62 میں پُر کرتے ہوئے اور k_B کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa} \cos(ka)] + e^{-iKa} \sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

حاصل ہوگا۔

جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے

$$(۵.۶۴) \quad \cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$



شکل ۵.۶: تناسل $f(z)$ (مساوات 66.5) کو $\beta = 10$ کے لئے ترسیم کر کے احبازاتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درج (جہاں $|f(z)| > 1$ ہوگا) پائے جاتے ہیں۔

یہ ایک بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرائنگ و پینی مخفیہ حاشیہ 18 یکمیں کے لئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہوگا لیکن جو خود و حلال ہم دیکھنے حبار ہے ہیں وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

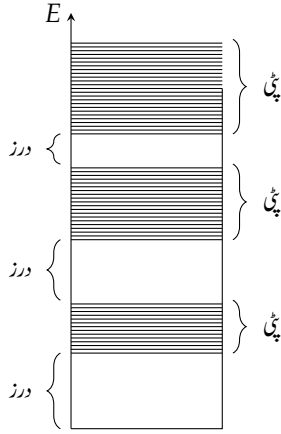
مساوات 5.64 کی ممکنات قیمتیں لہذا احبازاتی توانائیاں تعین کرتی ہیں۔ علامتیت کو سادہ بنانے کی نقطہ نظر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$(5.65) \quad z \equiv ka, \text{ and } \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

جس سے مساوات 5.64 کا دایاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(5.66) \quad f(z) \equiv \cos(z) + \beta \frac{\sin(z)}{z}$$

مستقل β بعدی ہے جو ذیلی تناسل کی زور کی ناپ ہے شکل ۵.۶ میں میں نے $\beta = 10$ کے لئے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ $f(z)$ ساتھ $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے اور چونکہ $|\cos(Ka)|$ کی قیمت کسی صورت ایک سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے لہذا ایسی خطوں میں مساوات 5.64 حاصل نہیں پایا جائے گا۔ یہ درج ممنوعہ توانائیوں کو ظاہر کرتی ہے؛ ان کے بیچ احبازاتی توانائیوں کی پٹیاں^۸ پائی جاتی ہیں مساوات 5.56 کے تحت $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہے لہذا n کوئی بھی عدد صحیح



شکل ۷.۵: دوری مخفیہ کی احبزاتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی احبزاتی ہوگی۔ آپ تصور میں شکل ۷.۶ پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے فاصلوں پر $+1 (n = 0)$ سے لے کر نیچے $-1 (n = \frac{N}{2})$ تک اور واپس تقریباً $+1 (n = N - 1)$ تک جہاں بلوغت جزو ضربی e^{iKa} دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لہذا n کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حاصل نہیں ہوگا لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ان لکیروں میں ہر ایک کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع ایک احبزاتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں N حالات پائے جاتے ہیں جو ایک دوسرے کے اتنے متعرب ہیں کہ کسی بھی نقطہ نظر سے انہیں ایک مسلسل خط تصور کیا جاسکتا ہے (شکل ۷.۵)۔

ہم نے ابھی تک اپنے مخفیہ میں ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں Nq الیکٹران ہوں گے جہاں ہر ایک جوہر q تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصول مناعت کے بنا پر صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل کریں گے اگر $q = 3$ ہو یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے وغیرہ وغیرہ۔ تین ابعاد میں اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں پٹٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے لیکن احبزاتی پٹیاں جن کے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں تب بھی ہوگا۔ دوری مخفیہ کی نشانی بھی پٹی ہے۔

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو ممنوع خط سے گزرتے ہوئے اگلی پٹی تک چھلانگ کے لئے ایک الیکٹران کو نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہوگی ایسا مادہ برقی طور پر غیر موصل^۹ ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری ہوئی نہیں ہے تب ایک الیکٹران کو بہت معمولی توانائی درکار ہوگی کہ وہ بیجان ہو سکے اس طرح کا مادہ عموماً موصل^{۱۰} ہوگا۔ ایک غیر موصل میں بڑے یا کم q کے چند جوہر کی ملاوٹ^{۱۱} سے اگلی بلند پٹی میں چند اضافی الیکٹران رکھ دیے جاتے

^۹insulator
^{۱۰}conductor
^{۱۱}dope

ہیں پہلے سے مکمل پڑ پٹی میں $\frac{1}{2}$ پیدا کیے جاتے ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے اور ایسے اشیاء نیم موصل کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً بہت اچھا موصل ہونا چاہئے ہوتا چونکہ انکے احبازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ فدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ مندرق صرف نظریہ پٹی کی مدد سے سمجھا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

(الف) مساوات 5.59 اور مساوات 5.63 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیٹا تقاضا عمل مخفیہ میں ایک ذرے کی تقاضا موج درج ذیل روپ میں لکھی جاسکتی ہے

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa} \sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

معمول زنی مستقل C تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(ب) البتہ پٹی کے بالائی سرپر جہاں $\pi/2$ کا عدد صحیح مضرب ہوگا شکل 5.6 (الف) سے $\psi(x) = 0$ حاصل ہوگا ایسی صورت میں درست تقاضا موج تلاش کریں دیکھیں گا کہ ہر ایک ڈیٹا تقاضا عمل پر ψ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی احبازتی پٹی کے نچلے نقطہ پر $\beta = 10$ کی صورت میں توانائی کی قیمت تین بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ $\frac{\alpha}{a} = 1 \text{ eV}$ ہوگا۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیٹا تقاضا سوزن کے بجائے ڈیٹا تقاضا عمل کنویں پر غور کر رہے ہیں یعنی مساوات 5.57 میں α کی علامت تبدیل کریں۔ ایسی صورت میں شکل 5.6 اور 5.7 کی طرح کے اشکال بنائیں۔ مثبت توانائی حلوں کے لئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے بس مساوات 5.66 میں موضوع تبدیلیاں لائیں لیکن منفی توانائی حلوں کے لئے آپ کو کام کرنا ہوگا اور انہیں ترمیم پر شامل کرنا مدت بھولے گا جواب $z -$ تک وسیع ہوگا۔ پہلی احبازتی پٹی میں اب کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دکھائیں کہ مساوات 5.64 میں حاصل زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہے۔ کن صورتوں میں ایسا نہیں ہے؟ اشارہ: $(N = 1, 2, 3, 4, \dots)$ لیتے ہوئے دیکھیں گا کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی کیا ممکن قیمتیں ہوں گی؟

۵.۴: کوانٹم شمارياتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم احبازتی توانائی تشکیل کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کے بنا پر بھجانی حالات ابھرنے شروع ہونگے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر T درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد N کے ذرات پائے جاتے

ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذروی جس کو بلا منصوب منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی E_j ؟ ہوگی دھیان رہے کہ اس احتمال کا کو انم عدم تعین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بالکل یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لئے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہوگی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہوگا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھ سکیں چاہے یہ متابل تعین ہو یا نہ ہوں۔

شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن^{۵۴} میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک جیسی کل توانائی E ہو ایک جتنا متمثل ہوگا۔ بلا واسطہ حراری حرکت کی بنا پر مستقل طور پر توانائی ایک ذروی سے دوسرا ذرہ ایک روپ حرکت کی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہوگی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقا توانائی کی بنا پر کل مقررہ ہوگا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی گاتار بنی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے متابل ہے درجہ حرارت^{۵۵} T حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کو انٹرمیکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لہذا یہ کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہوگا کہ یہ ذرات متابل ممیز، متمثل یوزان یا متمثل منرمیان ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لہذا میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کروں گا تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں حصہ 2.2 میں کمیت m کے صرف تین باہم غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہوگی مساوات 2.27 دیکھیں

$$(۵.۶۷) \quad E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

جہاں n_A ، n_B اور n_C مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ $E = 363 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)$ یعنی درج ذیل

$$(۵.۶۸) \quad n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363.$$

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیسرے ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہوگا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیسرہ اور ایک پانچ جو تین مرتب اجتماعات میں ہوگا ایک عدد انیس اور دو ایک یہاں بھی تین مرتب اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک ساٹھ اور ایک پانچ چھ مرتب اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں n_A ، n_B ، n_C درج ذیل

میں سے ایک ہوگا:

$$(11, 11, 11) \\ (13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13) \\ (1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1) \\ (5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5).$$

اگر یہ ذرات متبادل میسر ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کو انٹیم حال کو غلبہ کرے گا اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حراری توازن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کون ذرہ کس ایک ذروی حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال ψ_n کی تعداد N_n ۔ ہم اس ذرہ حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو تشکیل^{۵۷} کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال ψ_{11} میں ہوں تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \quad (5.۶۹)$$

یعنی $N_{11} = 3$ باقی تمام منفرد اگر دو حال ψ_{13} میں اور ایک ψ_5 میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots) \quad (5.۷۰)$$

یعنی $N_5 = 1, N_{13} = 2$ باقی تمام منفرد اگر دو ψ_1 میں ایک ψ_{19} میں تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \quad (5.۷۱)$$

یعنی $N_1 = 2, N_{19} = 1$ باقی تمام منفرد اگر ایک ذروی ψ_5 میں ایک ψ_7 میں اور ایک ψ_{17} میں تب تشکیل درج ذیل ہوگا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \quad (5.۷۲)$$

یعنی باقی تمام منفرد $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ان تمام میں آخری تشکیل زیادہ سے زیادہ محتمل ہوگی چونکہ اسکوچھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجبازی توانائی E_n حاصل کرنے کا احتمال P_n کیا ہوگا؟ توانائی E_1 صرف اس صورت حاصل ہوگا جب ذرہ تیسری تشکیل مساوات 5.71 میں ہوا اس تشکیل میں نظام ہونے کا اتفاق تیسرے میں سے تین ہے اور اس تشکیل میں E_1 کے حصول کا احتمال $\frac{2}{3}$ لہذا $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{3}{13}\right) = \frac{2}{13}$ آپ $P_1 - E_5$ کو تشکیل دو مساوات 5.70 تیسرے میں سے تین کا امکان جس کا احتمال $\frac{1}{3}$ یا تشکیل چار مساوات 5.72 تیسرے میں سے چھ امکان اور احتمال

باب ۵: متماثل ذرات

$\frac{1}{3}$ لہذا $\frac{3}{13} = (\frac{1}{3}) \times (\frac{6}{13}) + (\frac{3}{13}) \times (\frac{3}{13}) = P_5$ - آپ E_7 کو صرف چارے حاصل کر سکتے ہیں لہذا $\frac{2}{13} = (\frac{1}{3}) \times (\frac{6}{13}) = P_7$ - اسی طرح E_{11} صرف پہلی تشکیل سے مساوات 5.69 سے تیسرہ میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہوگا لہذا $P_{11} = (\frac{1}{13})$ ہوگا۔ اسی طرح تصدیق درج ذیل سے ہوگی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1.$$

یہ متماثل ممیز ذرات کے لئے ہوتا ہے۔ اس کی بجائے اگر ذرات متماثل منرمیان ہوتے اپنی آسانی کے لئے چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پر پہلی تین شکلیات جو دو یا اس سے بھی برا تین ذرات کے ایک ہی حال میں ڈالنے ہیں خارج امکان ہوں گے لہذا چوتھی تشکیل میں صرف ایک حال ہوگا سوال 5.22 الف دیکھیں۔ متماثل منرمیان کے لئے $\frac{1}{3} = P_5 = P_7 = P_{17}$ ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات متماثل بوزان ہوتے تب ضرورت خلاف تشاکلیت ہر تشکیل میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22 ب دیکھیں۔ لہذا $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{2}{3}) = P_1$ ، $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_5$ ، $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_7$ ، $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (1) = P_{11}$ ، $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{2}{3}) = P_{13}$ اور $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_{17}$ اور $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_{19}$ ہوتا۔ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح منحصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورت حال سے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہوگا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے۔ چونکہ N کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو متماثل ممیز ذرات کے لئے اس مثال میں $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شمار یا نقطہ نظر سے باقی تمام امکانات کو رد کیا جاسکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم درحقیقت انکی زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل میں تقسیم ہے۔ اگر یہ $N = 3$ کے لئے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم متماثل ممیز ذرات کے لئے $N = 3$ کی صورت میں اخذ کرتے $\frac{1}{3} = P_5 = P_7 = P_{17}$ میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عموماً میرٹ دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال ψ_5 میں ایک حال ψ_7 میں ایک اور حال ψ_{17} میں ایک متماثل تین منرمیان کا مکمل خلاف تشاکل تفعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

(ب) تین متماثل بوزان کے لئے مکمل تشاکل تفعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (۱) تینوں حال ψ_{11} میں ہوں، (ب) اگر دو ψ_1 اور ایک ψ_{19} میں ہو، (ج) اگر ایک حال ψ_5 ایک حال ψ_7 اور ایک حال ψ_{17} میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں ایک بُدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات ہیں جو حراری توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی $E = \left(\frac{9}{2}\right) \hbar \omega$ ہے۔

(الف) اگر یہ تمام ایک حسیبی کیفیت کے متبادل ممیز ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تخیلات ہوں گے اور ہر ایک کے لئے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تشکیل کیا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذروی بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پینانش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہوگا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیا ہوگی؟

(ب) یہی کچھ متماثل نمبر میان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج) یہی کچھ متماثل بوزان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیں اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرات توانائیاں E_1, E_2, E_3, \dots اخطاط d_1, d_2, d_3, \dots ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد d_n جن کی توانائیاں E_n ہیں فرض کریں ہم کیفیت m کے N ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تشکیل N_1, N_2, N_3, \dots میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں N_1 ذرات کی توانائی E_1 N_2 ذرات کی توانائی E_2 وغیرہ وغیرہ ہے سوال ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تشکیل کی مطابقتی کتنے منفرد حالات ہو گئے اس کا جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ اس بات پر منحصر ہوگا کہ آیا ذرات متبادل ممیز متماثل نمبر میان یا متماثل بوزان ہے لہذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات متبادل ممیز ہیں دستیاب N ذرات میں سے کتنے طریقوں سے N_1 کو منتخب کر کے پہلا ٹوکرا میں رکھا جاسکتا ہے جواب: شنائی عددی سر N_1 کو N میں سے منتخب کرتا ہے

$$(۵.۴۳) \quad \binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

پہلا ذرہ N مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے جس کے بعد $(N - 1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N - 1$ مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N - 1)(N - 2) \dots (N - N_1 + 1) = \frac{N!}{(N - N_1)!}$$

لیکن یہ N_1 ذرات کے $N_1!$ مختلف مرتبہ احتمالات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مادات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی ٹوکرا میں ان N_1 ذرات کو کتنی مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے چونکہ پہلے ٹوکرا میں d_1 حالات ہیں لہذا ہر ایک ذروی کو d_1 مختلف طریقوں

سے چنا جاسکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہونگے اس طرح ایک ٹوکرا جس میں d_1 منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی N میں سے N_1 ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہونگے

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!}$$

دوسرے ٹوکے میں صرف $(N - N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N - N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(5.44) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$$

$$(5.45) \quad = \frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N - N_1)!} \frac{(N - N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N - N_1 - N_2)!} \frac{(N - N_1 - N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N - N_1 - N_2 - N_3)!} \dots$$

$$(5.46) \quad = N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} d_3^{N_3} \dots}{N_1! N_2! N_3! \dots} = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

یہاں رک کر اس نتیجے کی تصدیق کیجیے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں متماثل منفرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی منفرق نہیں پڑتا کہ کون سا ذرا کس حال میں ہے ضرورت حنائف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص ایک ذروی حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک N ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذروی کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہذا N دیں ٹوکرا میں N_n بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(5.47) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر متماثل یوزان کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذروی حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک N ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذروی حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں N وی ٹوکے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم متماثل N_n ذرات کو d_n مختلف حنائوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر مرتب اجتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور حنائوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر $d_n = 5$ اور $N_n = 7$ کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذروی تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرا نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد N_n اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہیں جو ان نقطوں کو d_n گروہ میں حنا بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک جیسے ہیں اور ان کو $N_n!$ مختلف مرتبہ اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف مرتبہ اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں N وی ٹوکرا میں d_n ایک ذروی حالات کو N_n ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقہ ہونگے

$$(5.48) \quad \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n}$$

جس کی بنا پر ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(5.49) \quad Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ

سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 75.574.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجیے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو الگ ریاضی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتبہ اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ d ٹوکریوں میں N متشکل گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے زیر نوشت میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام N کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صریحاً $N = 1, N = 2, N = 3, N = 4$ کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل

حراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک جتنا ہوگا یوں زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل N_1, N_2, N_3, \dots وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تشکیل ہوگی جو

$$(5.80) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$$

اور

$$(5.81) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E$$

پر پورا اترے اور جس کی $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ، $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرائیج مضرب^{۵۸} کی ترکیب سے باآسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$(۵.۸۲) \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

متعارف کر کے اس کے تمام تصرفات کو عنصر کے برابر رکھتے ہیں

$$(۵.۸۳) \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0$$

موجودہ صورت میں Q کی بجائے Q کی لوگار تھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگار تھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہذا Q کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جانے کی لہذا اہم درج ذیل لیتے ہیں

$$(۵.۸۴) \quad G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

جہاں α اور β لگرائیج مضرب ہیں α اور β کے لحاظ سے تصرفات کو عنصر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں N_n کے لحاظ سے تفرق کو عنصر کے برابر رکھنا باقی ہے اگر ذرات قابل تمیز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دے گا لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۵.۸۵)$$

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

ہم مطابقتی تعداد ممکن N_n کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگ^{۵۹} تخمینہ

$$(۵.۸۶) \quad \ln(z!) \approx z \ln(z) - z \quad z \gg 1$$

بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۵.۸۷)$$

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n)] - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۵.۸۸) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

^{۵۸} Lagrange multiplier
^{۵۹} Stirling's approximation

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لیے حل کرتے ہوئے ہم متابل ممیز ذرات کی زیادہ سے زیادہ محتمل تعداد نکالیں حاصل کرتے ہیں

$$(۵.۸۹) \quad N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

اگر ذرات متماثل فرم میان ہوں تب Q کی قیمت مساوات 75.5 دیگی لہذا درج ذیل ہوگا

(۵.۹۰)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں ہم N_n کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $d_n \gg N_n$ بھی فرض کرتے ہیں لہذا سٹرلنگ تخمینہ دونوں اجزاء کے لیے متابل استعمال ہوگی ایسی صورت میں

(۵.۹۱)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n \right] +$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(۵.۹۲) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے N_n کے لیے حل کر کے ہم متابل فرم میان کی تعداد کمینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمتیں N_n حاصل کرتے ہیں

$$(۵.۹۳) \quad N_n = \frac{d_n^{-(\alpha + \beta E_n)}}{e}$$

آخر میں اگر ذرات متماثل بوسن ہوں تب Q کی قیمت مساوات 77.5 دیگی اور درج ذیل ہوگا

(۵.۹۴)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $1 \gg N_n$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمینہ استعمال کرتے ہوئے

(۵.۹۵)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{ (N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۵.۹۶) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو مضرب کے برابر رکھ کر N_n کے لئے حل کرتے ہوئے ہم متماثل بوزان کی تعداد کمینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$(۵.۹۷) \quad N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$$

منہر میان کی صورت میں استعمال کرتا تخمینہ کو استعمال کرتے ہوئے شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا سوال ۵.۲۶: ترجمیم $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر زیادہ سے زیادہ رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں لکراں مضرب کی ترکیب سے تلاش کریں اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہوگا

سوال ۵.۲۷:

۱. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمینہ میں فی صد خلل کتنا ہوگا

ب. خلل کو ایک فی صد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح z کی کم سے کم قیمت کیا ہوگی

۵.۴.۴ α اور β کے طبعی اہمیت

لکراں مضرب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے منسلک بالترتیب مقدار معلوم α اور β پائے گی ریاضیاتی طور پر تعداد مکین مساوات ۹1.5، 87.5، اور 95.5 کو واپس مسلط شرائط مساوات 78.5 اور 79.5 میں پر کرتے ہوئے تخمینہ کیا جاتا ہے البتہ کسی تخفیف کے لیے مجموعہ کے حصول میں ہمیں احبازتی توانائیاں (E_n) اور ان کی انحطاط (d_n) کا معلوم ہونا ضروری ہے میں سہ آبادی لامتناہی چوکور کنویں میں ایک جتنی کیفیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعادل ذرات کی کامل گلیز کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں اس سے ہم پر α اور α کی طبعی مفہوم عیاں ہوں گی

حصہ 1.3.5 میں ہم نے احبازتی توانائیاں اخذ کی مساوات 39.5

$$(۵.۹۸) \quad E_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

جہاں درج ذیل ہوتا

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z} \right)$$

ideal gas*

پہلے کی طرح یہاں بھی ہم مجموعہ کو مکمل میں بدلنے ہیں جہاں k ایک استمراری متغیر ہے اور جہاں k فضا کے π^3/V حجم میں ایک حال یا چکر s کی صورت میں $2s + 1$ حالات پائے جاتے ہیں مثنیٰ اول میں کروی خولوں کو اپنی ٹوکریاں تصور کرتے ہوئے شکل 4.5 انخطاط یعنی ہر ٹوکری میں حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی

$$d_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\pi^3/V} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad (۵.۹۹)$$

متابل مییز ذرات مساوات 87.5 کیلئے پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^2 dk = V e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \quad (۵.۱۰۰)$$

دوسری مسلط شرط مساوات 79.5 درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^4 dk = \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$

جس میں مساوات 98.5 سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E = \frac{3N}{2\beta} \quad (۵.۱۰۱)$$

اگر آپ مساوات 97.5 میں جزو چکر $2s + 1$ شامل کریں تو وہ اسی نقطہ پر حذف ہو جاتا ہے لہذا مساوات 99.5 تمام چکر کے لیے درست ہوگا مساوات 99.5 ہمیں درجہ حرارت T پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ کا یاد دلاتی ہے

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (۵.۱۰۲)$$

جہاں k_B بولٹزمن مستقل ہے یہ ہمیں β اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (۵.۱۰۳)$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین آبادی لامستناہی چو کور کنویں میں موجود مییز ذرات کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ مختلف اشیاء کے لئے جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں β کی قیمت ایک جیسی ہوگی یہ دلیل کی کتابوں میں دیا گیا ہے جس کو میں یہاں پیش نہیں کرتا میں

مساوات 101.5 کو T کی تعریف مان لیتا ہوں روایتی طور پر α جو مساوات 98.5 کی مخصوص صورت سے ظاہر ہے کہ T کا تعلق عمل ہے کی بجائے کیمیاوی پتہ^{۱۱}:

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \quad (5.104)$$

استعمال کر کے مساوات 91.5, 87.5 اور 95.5 کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی ϵ کے کسی ایک مخصوص یک ذرا حال میں ذرات کی بلند تر محتمل عدد دے کسی ایک توانائی کے حامل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حامل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے حناظر صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہوگا

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسول بولٹزمن تقسیم} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} & \text{فسرئی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} & \text{بوس و آئنسٹائن} \end{cases} \quad (5.105)$$

متبادل میسر ذرات پر میکسول بولٹزمن تقسیم^{۱۲}، متبادل فسر میاں پر فسرئی وڈیراک تقسیم^{۱۳} اور متبادل بوزاں پر بوس و آئنسٹائن تقسیم^{۱۴} کا اطلاق ہوگا فسرئی وڈیراک تقسیم T_0 پر خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتا ہے

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (5.106)$$

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہو گئے ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی پتہ^{۱۵} عین فسرئی وڈیراک ہوگی

$$\mu(0) = E_F \quad (5.107)$$

درج حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فسرئی وڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے شکل ۵.۸ ہم متبادل میسر ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت T پر کل توانائی مساوات 99.5 درج ذیل ہوگی

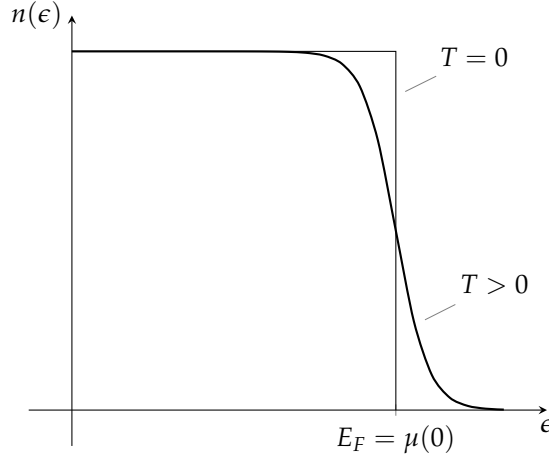
$$E = \frac{3}{2} N k_B T \quad (5.108)$$

^{۱۱} chemical potential

^{۱۲} Maxwell-Boltzmann distribution

^{۱۳} Fermi-Dirac distribution

^{۱۴} Bose-Einstein distribution



شکل ۵.۸: فیرمی وڈیراک تقسیم برائے $T = 0$ اور صفر سے کچھ زیادہ T کے لئے۔

جبکہ مساوات 98.5 کے تحت کیمیائی پتہ درج ذیل ہوگا۔

$$(5.109) \quad \mu(T) = k_B T \left[\ln \left(\frac{N}{V} \right) + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right) \right]$$

میں مساوات 87.5 کی بجائے مساوات 91.5 اور 95.5 استعمال کرتے ہوئے متناثر فیرمی ان اور متناثر بوزان کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا؛ پہلی مطابقتی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(5.110) \quad N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu / k_B T} \pm 1} dk$$

جہاں مثبت علامت فیرمی ان کو اور منفی علامت بوزان کو ظاہر کرتی ہے۔ دوسری مطابقتی مساوات 79.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(5.111) \quad E = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{k^4}{e^{(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu / k_B T} \pm 1} dk$$

ان میں سے پہلا $\mu(T)$ اور دوسرا $E(T)$ تعین کرتا ہے مثلاً موختر الذکر سے ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E / \partial T$ حاصل کرتے ہیں بد قسمتی سے ان نکلات کو بنیادی تفاسلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے چھوڑتا ہوں تاکہ آپ ان پر مزید غور کر سکیں سوال 28.5 اور 29.5 دیکھیں سوال

۵.۲۸: مطابق صفر درجہ حرارت پر متناثر مندرمیان کے لیے مساوات 108.5 اور 109.5 کے کمالات کی قیمتیں حاصل کریں اپنے نتائج کا موازنہ مساوات 43.5 اور 45.5 کے ساتھ کریں دھیان رہے کہ مساوات 108.5 اور 109.5 میں الیکٹرانوں کے لیے اضافی جزو ضربی دو (2) پایاجباتا ہے جو چکر انحطاط کو ظاہر کرتی ہے

سوال ۵.۲۹:

۱. بوزان کے لیے دکھائیں کہ کیمیادی مخفیہ ہر صورت میں کم سے کم احبازتی توانائی سے کم ہوگا اشارہ: $n(\epsilon)$ مخفی نہیں ہو سکتا ہے

ب. بالخصوص تمام T کے لیے کامل بوس گیس کے لیے $0 < \mu(T)$ ہوگا ایسی صورت میں N اور V کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کہ T کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا اشارہ: مخفی علامت لیتے ہوئے مساوات 108.5 پر نظر ڈالیں

ج. حرارت T کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحر ان پیدا ہوتا ہے جسے **بوس** انجماد^{۱۵} کہتے ہیں جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے مکمل کی قیمت $\mu = 0$ کے لیے حاصل کرتے ہوئے اس فاصل حرارت کسی کالکے اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا اس فاصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہذا غیر مسلسل مجموعہ مساوات 78.5 کی جگہ استمراری مکمل مساوات 108.5 کا استعمال بے معنی ہو جائے گا اشارہ:

$$(۵.۱۱۲) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$

جہاں Γ کو یولر کا گاما قاطع^{۱۶} اور ζ کو ریمانڈ زیتا قاطع^{۱۷} کہتے ہیں ان کی موضوع اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں
د. ہیلیم کے لیے حرارت فاصل تلاش کریں اس درجہ حرارت پر اس کی کثافت 0.15 g cm^{-3} ہوگی
تبصرہ، ہیلیم کی تجرباتی حاصل حرارت فاصل کی قیمت 2.17 K ہے

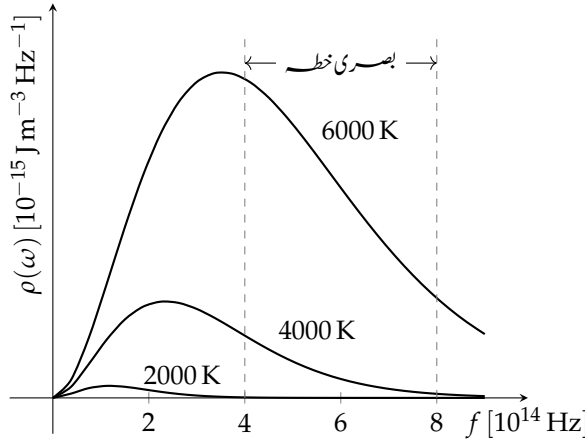
۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف

نوریہ برقناطیسی میدان کے کوانٹا ایک چکر کے متناثر بوزان ہوتے ہیں تاہم ان کی خاصیت یہ ہے کہ یہ بے کیت ذرات ہیں جس کی بنا پر یہ قدرتی طور پر اضافیتی ہیں ہم درج ذیل چار دعویٰ جو غیر اضافی کوانٹم میکانیات کا حصہ نہیں ہے کو قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں (1) نوریہ کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = h\nu = \hbar\omega$ دیتی ہے (2) عدد موج کے اور تعدد کا تعلق $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ہے جہاں c روشنی کی رفتار ہے (3) چکر کے صرف دو حالات ہو سکتے ہیں کوانٹم عدد m کی قیمت 1 یا مخفی 1 ہو سکتی ہے تاہم یہ صفر نہیں ہو سکتی ہے (4) نوریوں کی تعداد بقائی مقدار نہیں ہے درجہ حرارت بڑھانے سے فی حجم نوریوں کی تعداد بڑھتی ہے جزو 4 کی موجودگی میں پہلی مطابقتی مساوات 78.5 کا اطلاق یہاں نہیں ہوگا ہم مساوات

^{۱۵} Bose condensation

^{۱۶} gamma function

^{۱۷} Riemann zeta function



شکل ۵.۹: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات ۱۱۳.۵

82.5 اور اس کی سادگی باقی آنے والی مساواتوں میں $\alpha \rightarrow 0$ پر کر کے جبزو 4 کا اطلاق کر سکتے ہیں یوں نوریہ کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد ممکن مساوات 95.5 درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۱۳) \quad N_{\omega} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ایک ڈب جس کا حجم V ہو میں آزاد نوریوں کے لیے d_k کی قیمت مساوات 97.5 کو چکر جبزو 3 کی بنا پر دو سے ضرب دے کے حاصل ہوگا جس کو k جبزو 2 کی بجائے ω کی صورت میں لکھتے ہیں

$$(۵.۱۱۴) \quad d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^3 d\omega$$

یوں تعددی سعت $d\omega$ میں کثافت توانائی $N_{\omega} \hbar\omega / V$ کی قیمت $\rho(\omega) d\omega$ ہوگی جہاں $\rho\omega$ درج ذیل ہیں

$$(۵.۱۱۵) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

یہ سیاہ جسم طیف^{۶۸} کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو مقناطیسی میدان کی حرارت T پر توازن صورت میں فی اکائی حجم فی اکائی تعدد توانائی دیتی ہے اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل ۵.۹ میں ترسیم کیا گیا ہے سوال ۵.۳۰:

۱. مساوات 113.5 استعمال کرتے ہوئے طول موج ساتھ $d\lambda$ میں کثافت توانائی تعین کریں اشارہ:

$$\rho(\omega)d\omega = \bar{\rho}(\pi)d\lambda$$

ب. **وائے قانون ہٹاؤ**^{۱۹} اخذ کریں جوہ طول موج دیتا ہے جس پر سیاہ جسم کی کثافت توانائی کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی

$$\lambda_{\text{ہٹاؤ}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} mK}{T} \quad (۵.۱۱۶)$$

اشارہ: آپ کو کیکولیٹریا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ماورائی مساوات $5e^{-x} = (5 - x)$ حل کر کے اعدادی جواب تین یا معنی ہندسوں تک حاصل کرنا ہوگا

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسم احمران میں کل کثافت توانائی کا **سٹیفنز بولٹزمنز کلیہ**^{۲۰} اخذ کریں

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} Jm^{-3} K^{-3}) T^4 \quad (۵.۱۱۷)$$

اشارہ مساوات 110.5 کو استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں یا درجہ کہ $z(4) = \pi^4/90$

سوال ۵.۳۲: فرض کریں یک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ مساوات 43.2 میں دو غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کیت m ہے فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلی ہیجان حال میں پایا جاتا ہے درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں (الف) ذرات متبادل ممیز ہے (ب) یہ متناثر یوزان ہے (ج) یہ متناثر منرمیان ہے چکر کو نظر انداز کریں اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر حال میں تصور کریں

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہوں اور تین منفرد یک ذروی حالات $\psi_a(x)$ ، $\psi_b(x)$ ، اور $\psi_c(x)$ دستیاب ہوں ایک دونوں سے مختلف کتنے تین ذرہ حالات درج ذیل صورت میں تیار کیے جاسکتے ہیں (الف) اگر راست متبادل ممیز ہو (ب) اگر یہ متناثر یوزان ہو (ج) اگر یہ متناثر منرمیان ہوں ضروری نہیں کہ ذرات مختلف حالات میں ہوں متبادل ممیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے

سوال ۵.۳۴: دو آبادی لامتناہی چوکور کنویں میں غیر متعامل الیکٹرانوں کی منرمی توانائی کا حساب کریں فی اکائی رقبہ الیکٹرانوں کی تعداد σ لیں

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے جنہیں **سفید بولٹا**^{۲۱} کہتے ہیں کو تجب ذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباورکتی ہے مساوات 46.5 متقل کثافت فرض کرتے ہوئے ایسے جسم کا رداس R درج ذیل طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے

۱. کل الیکٹران توانائی مساوات 45.5 کو رداس مرکزہ پروٹان جمع نیوٹران N فی مرکزہ الیکٹران کی تعداد q اور الیکٹران کی کیت m کی صورت میں لکھیں

^{۱۹} Wien displacement law
^{۲۰} Stefan-Boltzmann formula
^{۲۱} white dwarf

ب. ایک کثافت کرہ کی تجبذی توانائی تلاش کریں اپنے جواب کو عالمگیر تجبذی مستقل G ، R ، N ، اور مرکزہ کی کمیت M کی صورت میں لکھیں آپ دیکھیں گے کہ تجبذی توانائی منفی ہوگی

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر حبزد (الف) اور حبزد (ب) کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2 N^{1/3}}$$

دھیان رہے کہ کمیت بڑھنے سے رداس گھٹ رہا ہے ماسوائے N کے تمام مستقلات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں حقیقت میں جوہری عدد بڑھتے ہوئے q کی قیمت معمولی سی کم ہوتی ہے لیکن ہمارے لئے یہی کافی ہے جواب: $R = 7.6 \times 10^5 N^{-1/3}$

د. ہماری سورج کے برابر کمیت کے سفید بونا کارڈاس کلو میٹروں میں حاصل کریں

ه. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ حبزد (د) میں سفید بونا کی منبری توانائی کو الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے موازنہ کریں آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے سوال 36.5 دیکھیے گا

سوال ۵.۳۶: ہم کا سیکی حرکی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$ پر کرتے ہوئے حصہ 1.3.5 کی آزاد الیکٹران گیس نظریہ کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $p = \hbar k$ ہوگا بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہوگا

ا. مساوات 44.5 میں $\hbar^2 k^2 / 2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فکترہ $\hbar ck$ پر کر کے E_{tot} کل حاصل کریں

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کے لئے سوال 35.5 کے حبزد (الف) اور (ب) کو دوبارہ حل کریں آپ دیکھیں گے کہ R کی قیمت سے قطع نظر کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائے جائے گی اگر کل توانائی مثبت ہو تب انخطاطی قوتیں تجبذی قوت سے تجبذ کرے گی جس کی بنا پر ستارہ پھولے گا اس کے برعکس اگر کل منفی ہو تب تجبذی قوتیں جیتی ہیں جس کی بنا پر ستارہ منہدم ہوگا مرکزویہ کی وہ فاصلے تعداد ہندسی معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تجبذی انہدام واقع ہوا اس کو چندریشی حد^{۲۷} کہتے ہیں جواب: 2.4×10^{57} مطابقتی ستارہ کی کمیت کیا ہوگی اپنے جواب کو سورج کی کمیت کے مضرب کے صورت میں لکھیں اس سے بھاری ستارے سفید بونا نہیں بناتے بلکہ مزید منہدم ہو کر اگر حالات درست ہوں تو نوائے ستارے^{۲۸} کو جنم دیتے ہیں

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر مخالف بیٹا تحلیل^{۲۹} $e^- + p^+ \rightarrow n + \bar{\nu}$ تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے جس کی بنا پر نیوٹرو نیوٹرون خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں آخر کار نیوٹران انخطاطی دباؤ انہدام کو روکتا ہے جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران انخطاطی قوتوں نے کیا سوال 35.5 دیکھیں ہماری سورج کے برابر کمیت کے نیوٹران ستارہ کارڈاس تلاش کریں ساتھ ہی نیوٹران منبری توانائی کا حساب کر کے ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جاسکتا ہے

^{۲۷} Chandrasekhar limit
^{۲۸} neutron star
^{۲۹} inverse beta decay

سوال ۵.۳:

۱. تین ابعادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ سوال 38.4 متماثل ممیز ذرات کا کیا وہی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں یہاں مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جاسکتی ہیں یا درجہ کہ لامتناہی چوکور کنویں کی مثال میں مکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا تھا ہندسہ تسلسلہ ۵۔

$$(5.118) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

حاصل ہوگا اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں جواب

$$(5.119) \quad E = \frac{3}{2} N \hbar \omega \left(\frac{1 + e^{-\hbar \omega / k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}} \right)$$

ب. تحدیدی حد $k_B T \ll \hbar \omega$ پر تبصرہ کریں

ج. مسئلہ مساویہ غائبہ بند کی روشنی میں کلاسیکی حد $k_B T \gg \hbar \omega$ پر تبصرہ کریں تین ابعادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے آزادی کے درجات ۵۔ کتنے ہوں گے

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

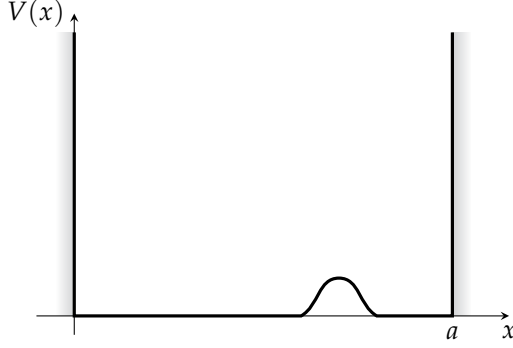
$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑ اڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نے امتیازی تقاضات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے:

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ نظریہ اضطراب کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم بہ قدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

جہاں H' اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی اور H اصل ہیمیلٹنی ہوگا اس کے بعد ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں n ویں امتیازی مقدار کی قیمت میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبہ تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots)[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

کمتر رتبہ λ^0 کی صورت میں اسے $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

و غیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر عمل لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم H^0 ہر مشی ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکر کنویں کی غیر مضطرب تقاربات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی تہ کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل ۶.۲ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں $H' = V_0$ ہوگا لہذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی

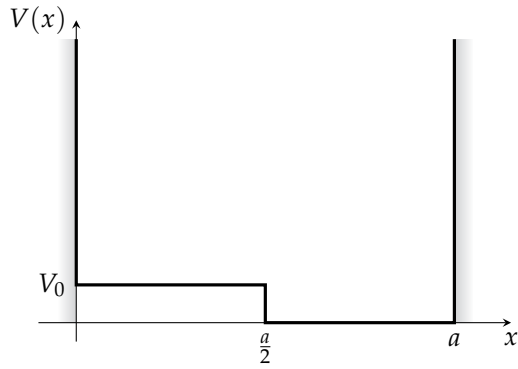
$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گے جی ہاں تمام کی تمام V_0 مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل ۶.۳ ہوگا۔

یہاں کوئی ی چیز لامتناہی چوکر کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا



شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مسوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبہ تصحیح دیتی ہے تفعل موج کے لئے اول رتبہ تصحیح حاصل کرنے کی عرض ہے ہم

مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \quad (۶.۱۰)$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے لہذا یہ ψ_n^1 میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہذا کسی بھی تفاعل کی طرح ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۱)$$

اگر ψ_n^1 / مساوات 10.6 کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب شرڈنگر مساوات مساوات 1.6 کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بائیں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر $l \neq n$ ہو تو درج ذیل ہوگا

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۲)$$

لہذا درج ذیل حاصل ہوگا

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۳)$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو نسب ناکوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہوتا) اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں

ایک جتنی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نما میں صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں اغلطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبہ نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبہ تصحیح E_n^1 مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ تفاعل موج کی اول رتبہ تصحیح ψ_n^1 مساوات 13.6 دیتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں δ تفاعلی موڑا ڈالتے ہیں

$$H' = \alpha \delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں α ایک مستقل ہے

ا. احبازی توانائیوں کی اول رتبہ تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت n کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہوگی

ب. زمینی حال کی تصحیح ψ_1^1 کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاؤ میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی احبازی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس پیک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$

ا. (الف) نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک قیمتیں حاصل کرے (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں

ب. اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبہ اضطراب کا حساب لگائیں یہاں H' کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے مکمل کی قیمت کے حصول کی نہ ضرورت اور نہ احبازت ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور a کنویں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

۱. پہلی متدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاسلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں

ب. اول رتبی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم ψ_n^0 اور دور رتبی مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کی ہر مشین کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ یہی 1 = $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$ ہوگا لہذا ہمارے پاس E_n^2 کا درج ذیل کلیہ رہ جائے گا

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle \quad (۶.۱۴)$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۵)$$

ہوگا جو دور رتبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاسل موج کی دوم رتبی تصحیح ψ_n^2 توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔ سوال ۶.۴:

باب ۶. غیر تاج وقت نظریہ اضطراب

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2) سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $2m(\alpha/\pi\hbar n)^2 -$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح E_n^2 سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ مندرجہ ذیل ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شرودنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ منفرد حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 کی توانائیاں ایک جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ $c_a^{(b)}$ مساوات 12.6 اور E_a^2 مساوات 15.6 بے فتابوڑہتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$ اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انحطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط

درج ذیل مندرجہ کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

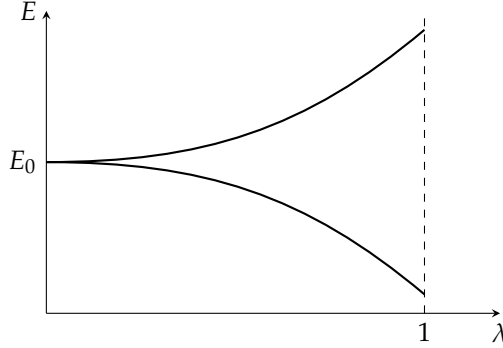
$$(۶.۱۲) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$(۶.۱۴) \quad \psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہوگا

$$(۶.۱۸) \quad H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$



شکل ۶.۲: انحطاط کا حتمی بذریعہ اضطراب۔

عام طور پر اضطراب (H') انحطاط کو ”توڑے“ یا ”منسوخ“ کرے گا جیسے جیسے ہم λ کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگا (شکل ۶.۲) مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند یعنی صفر کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں ہوگا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہوگا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات ۹.6 کا حباب نہیں کر سکتے ہیں

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات ۱۷.6 میں لکھتے ہیں جہاں α اور β متبادل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروع کر

$$H\psi = E\psi \quad (۶.۱۹)$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots \quad (۶.۲۰)$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات ۱۹.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح λ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H^0 \psi^0 + \lambda (H' \psi^0 + H^0 \psi^1) + \dots = E^0 \psi^0 + \lambda (E^1 \psi^0 + E^0 \psi^1) + \dots$$

اب $H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$ مساوات ۱۸.6 کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$H^0 \psi^1 + H' \psi^0 = E^0 \psi^1 + E^1 \psi^0 \quad (۶.۲۱)$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

باب ۶. غیر تابَع وقت نظریہ اضطراب

چونکہ H^0 ہر مشی ہے لہذا بائیں ہاتھ پہلا حبز و دائیں ہاتھ کے پہلے حبز کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$(۶.۲۲) \quad \alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۲۳) \quad W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b)$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$(۶.۲۴) \quad \alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام W معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان متالِب ہیں مساوات 24.6 کو W_{ab} سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے βW_{ab} کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۲۵) \quad \alpha [W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں E^1 کی مساوات دیگی

$$(۶.۲۶) \quad (E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ جانتے ہوئے $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۶.۲۷) \quad E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right]$$

یہ انخطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو حبز دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہوگا ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہوگا لہذا مساوات 22.6 کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات 24.6 کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہوگا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہوگا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انخطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے موزوں خطی جوڑتھے کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جہاں

پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہر مشی عامل ہے جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے اگر H^0 کے انخطاطی امتیازی تفاعلات ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب $W_{ab} = 0$ ہوگا لہذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں متبادل استعمال موزوں حالات ہوں گے
ثبوت: ہم مندرجہ کر چکے ہیں کہ $[A, H'] = 0$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | AH' \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A \psi_a^0 | H' \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' \nu \psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہذا $W_{ab} = 0$ ہوگا

سبق اگر آپ کا سامنا انخطاطی حالات سے ہوا ایسا ہر مشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو اپنے غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبہ نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عامل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہوگا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

جہاں α_{\pm} اور β_{\pm} کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

$$ا. \quad \psi_{\pm}^0 \text{ عمودی ہے } (\langle \psi_+^0 | \psi_-^0 \rangle = 0)$$

$$ب. \quad \langle \psi_+^0 | H' | \psi_-^0 \rangle = 0$$

$$ج. \quad \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E^1 \text{ کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے اپنے آپ پر بندیک بعدی خطہ جس کی لمبائی L ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۱. دکھائیں کہ ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $n = 0$ کے علاوہ تمام حالات دہرا انخطاطی ہے

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $a \ll L$ ہو یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں معمولی چھکاوٹ پیدا کرتا گویا تار کو یہاں سروڑا گیا ہوں مساوات ۱۲.۶ استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $a \ll L$ ہے لہذا عمل کی قیمت حاصل کرتے وقت مکمل کی حدود کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm \infty$ رکھیں

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات ۱۹.۶ استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہوگی

د. ایسا ہر مثنیٰ عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرانگظ پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جبز و ج میں استعمال کیے

۶.۲.۲ بلند رتبی انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جاسکتا ہے مساوات ۲۲.۶ اور ۲۴.۶ کو ہم دوبارہ متالبی روپ میں لکھتے ہیں

$$(19.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ E^1 W متالب کے امتیازی افتدار ہیں مساوات ۲۶.۶ اس متالب کی امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم n پڑتا انخطاط کی صورت میں $n \times n$ متالب

$$(19.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی اعداد تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تقاضات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو تالب W کو وتری بناتا ہو یہاں بھی ایک ایسا عامل A تلاش کر کے جو H' کا مقبولی ہو A اور H' کے بیک وقت امتیازی تقاضات استعمال کر کے ہم تالب W حاصل کریں گے جو از خود وتری ہو گا لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دو پڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مثال ۱.۲: تین آبادی لامتناہی کعبی کنویں سوال 2.4 پر غور کریں

$$(۱.۳۰) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(۱.۳۱) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

جہاں n_x ، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$(۱.۳۲) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

دھیان رہے کہ زمینی حال ψ_{111} غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$(۱.۳۳) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تیسرا انحطاطی ہیں

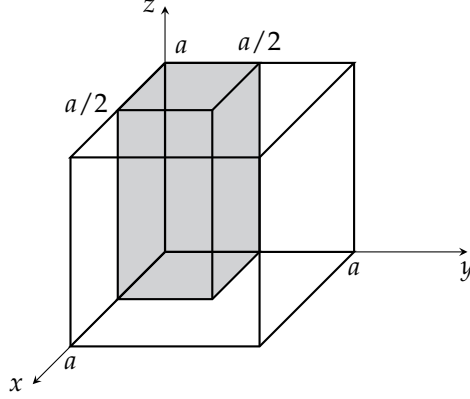
$$(۱.۳۴) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

جو ڈب کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتا ہے:

$$\begin{aligned}
 E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\
 &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\
 (۶.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0
 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں اخطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی پہلے قدم میں ہم متالب W تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلایل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned}
 W_{ab} &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\
 &\quad \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz
 \end{aligned}$$

تاہم z مکمل صفر ہوگا جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الفرض درج ذیل ہوگا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے

$$(۱.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

متالب \mathbf{W} بلکہ $4\mathbf{W}/V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ۵.۱ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کے امتیازی افتد درج ذیل ہوں گے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$

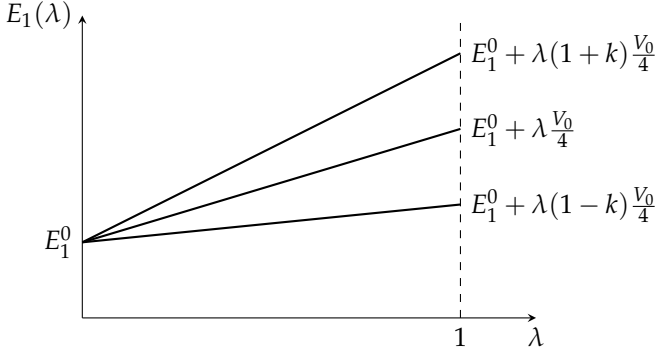
یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۱.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں E_1^0 مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی E_1^0 تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انخطاط ختم کرتا ہے (شکل ۱.۶ دیکھیں)۔ دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انخطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تیج مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی $V_0/4$ ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہوں گے

$$(۱.۴۰) \quad \psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$



شکل ۶.۶: انخطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

جہاں عددی سر (α, β اور γ) متالاب W کے امتیازی سمتیت ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0, \beta = \pm \gamma = 1/\sqrt{2}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں پی کی ہیں۔ ہوں موزوں حالات درج ذیل ہونگے

$$(۶.۴۱) \quad \psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں مساوات 30.6 میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلتا انتقاعی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہہ انخطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبہ تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں

فرض کریں متالہی روپ میں اس کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے اور ϵ کوئی چھوٹا عدد ($\epsilon \ll 1$) ہے۔

۱. غیر مضطرب ہیمیلٹنی ($\epsilon = 0$) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار لکھیں

ب. متالب \mathbf{H} کہ بالکل ٹھیک امتیازی افتدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبہ اور دوم رتبہ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی افتدار کی تخمینہ قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا جزو-۱ کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی افتدار کی اول رتبہ تصحیح کو انحطاطی نظریہ اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبہ تصحیح متالب W کے امتیازی افتدار ہوں گے میں نے دعویٰ کیا کہ یہ $n = 2$ صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چسل کر درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات 22.6 کے مسائل کا مفہوم متالب W کی امتیازی افتدار مساوات لیا جاسکتا ہے۔

۶.۳. ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جو ہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیمیلٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶.۴۲)$$

جوالیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولب مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیمیلٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے

جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر و مدار ربط، کی بنا پر پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت α^2 گن کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۴۳)$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی α گن چھوٹا لمب انتعال ہے جو بھر کی میدان کی کوانٹائزنی سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

۱. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی mc^2 کی صورت میں لکھیں

ب۔ ϵ_0 ، e ، \hbar اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حوالے بعد بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیٹ الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی منتقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نو بیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (۶.۴۴)$$

جس میں باضابطہ متبادل $\nabla^2 \rightarrow (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad (۶.۴۵)$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2 \quad (۶.۴۶)$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال عنصر بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے ہمیں

سستی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$(۶.۴۷) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 [1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

ہوگا جس کی بنا پر درج ذیل ہوگا

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حرکت کی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد (p/mc) کی طمست تسلل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۴۹) \quad \begin{aligned} T &= mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc} \right)^4 \cdots - 1 \right] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \cdots \end{aligned}$$

ہیملٹنی کی کم سے کم مرتبی اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3 c^2}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہوگی مساوات 9.6

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شرودنگر مساوات کہتی ہے

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے

$$e^2 / r - (1/4\pi\epsilon_0)$$

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال ψ_{nlm} مساوات 89.4 میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں a رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا اتنا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا مساوات 172.4 استعمال کرتے ہوئے a کو خارج کر کے باقی کو E_n مساوات 70.4 کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۵۷) \quad E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right]$$

نفاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n / mc^2 = 2 \times 10^{-5}$ گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انخطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات 51.6 یہاں اضطراب کردی تشاکلی ہے لہذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہوگا مزید کسی E_n کے حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی مقدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں l, n اور m موزوں کو انہم اعداد ہیں لہذا غیر انخطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست تھا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ دریل سوال 140.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات 55.6 ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال 43.4 میں حال ψ_{321} کے لیے r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر کام)، $s = -1$ مساوات 55.6، $s = -2$ مساوات 56.6 اور $s = -3$ مساوات 64.6 کے لیے کریں $s = -7$ کی صورت میں کیا ہوگا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: ایک بعدی ہارمونی سر تعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم رتبہ اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال 5.2 میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہر مشی ہے لیکن p^4 ہر مشی نہیں ہے ان حالات کے لئے ψ متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

مساوات 13.4 مکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle f | p^2 g \rangle = -4\pi\hbar^2 \left(r^2 f \frac{dg}{dr} - r^2 g \frac{df}{dr} \right) \Big|_0^\infty + \langle p^2 f | g \rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبداء کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}} e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں اور لکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا

$$\langle \psi_{n00} | p^4 \psi_{m00} \rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4} \frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4 \psi_{n00} | \psi_{m00} \rangle$$

۶.۳.۲ چپکرومدار ربط

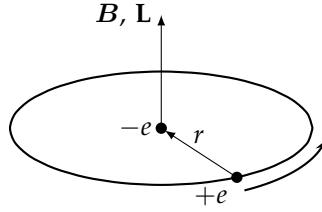
سرکڑہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوٹے میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چپکڑھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر μ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیمیلٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\mu \cdot B \quad (۶.۵۸)$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر μ درکار ہوگا

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو باپوٹ و سیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$



شکل ۷.۶: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

جس میں موثر $e/T = I$ ہے جہاں e پروٹان کے بار کو اور T دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوٹے میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ ہوگا مزید B اور L دونوں کارخ ایک جیسا ہوگا شکل ۷.۶ میں اوپر جانب لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} L \quad (۷.۵۹)$$

جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے

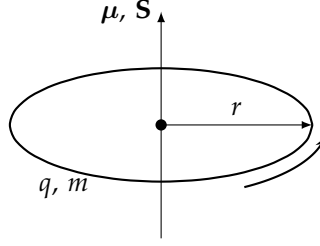
الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب ممکن مقناطیسی مثبت ہوگا جس کا سامنا ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار q جس کی لمبائی r اس کے چلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو پر غور کریں (شکل ۷.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلا کی کیت m ہو جو دوری معیار اثر mr^2 ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہوگا

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$

اس تشکیل کے لیے ظاہر ہے کہ ممکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہوگا دھیان رہے کہ یہ r اور T کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر μ اور S کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہوتا کہ بار اور کیت کا



شکل ۶.۸: ہائیڈروجن کا مہین جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

نسبت یکساں ہو ہر چھلے کا اور لہذا پوری جسم کا ممکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہوگا مسزید μ اور S کے رخ ایک جیسا یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہو گئے لہذا درج ذیل ہوگا

$$\mu = \left(\frac{q}{2m} \right) S$$

یہ حاصل کلاسیکی حساب ہے درحقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے

$$\mu_e = - \frac{e}{m} S \quad (۶.۶۰)$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L$$

اس حساب میں ایک مضرب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوٹ میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہذا یہ اسراع پذیر ہوگا اس حساب میں مجرب حرکیات تصحیح جسے طمس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے مقبول کیا جاسکتا ہے جو حساب میں جزو ضربی 1/2 شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L \quad (۶.۶۱)$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ ممکن مقناطیسی نسبت اور طمس استقبالی حرکت جزو ضربی جو انقفاآت ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبعی طور پر یہ الیکٹران کے لمحاتی ساکن چھوٹ میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹنے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت سرورڈ کی بدولت ہے۔

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

اب کو انٹرمیکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکرودائری ربط کی صورت میں L اور S کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہذا چکر اور دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ H'_{so} مقلوب ہو گا L^2 ، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

(۶.۶۲)

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

لہذا یہ مقداریں بقائی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ L^2 ، S^2 ، J^2 ، اور J_z کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

کی بنا پر

(۶.۶۳)

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

ہو گا لہذا $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ کے امتیازی اعداد درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6 (ج) دیکھیں درج ذیل ہے

(۶.۶۴)

$$\langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

لہذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{so}^1 = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2c^2} \frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہیں

(۶.۶۵)

$$E_{so}^1 = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)} \right\}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبیعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چکرودائری ربط ایک جتنا ترتیب (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کر کے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

(۶.۶۶)

$$E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left(3 - \frac{4n}{j+1/2} \right)$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ چھوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (۶.۶۷)$$

مہین ساخت l میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک n کیلئے l کی مختلف اجزائی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حاصل نہیں ہوگی تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری و چکر زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی امتداد m_l اور m_s اب موزوں کو انٹیم اعداد نہیں ہونگے۔ ان مقصداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کو انٹیم اعداد n, l, j ، اور m_j ہونگے سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقالب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[L \cdot S, L]$ ، (ب) $[L \cdot S, S]$ ، (ج) $[L \cdot S, J]$ ، (د) $[L \cdot S, L^2]$ ، (ه) $[L \cdot S, S^2]$ ، (و) $[L \cdot S, J^2]$ ؛ اشارہ: L اور S زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابلیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $l \pm 1/2 = j$ ہے ثبت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو متفریب متفریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہوگی اور ان کے بچ واصلہ کتنے ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے eV میں E_{fs}^1 تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا حنا کہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں نوریہ کی صورت میں توانائی کا احراج $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت ΔE کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں نوریہ تعدد میں تبدیل کر کے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بچ واصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بچ تعددی واصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بچ تعددی واصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $(???) = j$ سے $(???) = j$ ، 2، $(???) = j$ سے $(???) = j$ ، ... ہو گئے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بچ تعددی واصلہ $(???) \text{ Hz}$ ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بچ واصلہ $???$ Hz ہے ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافیت استعمال کیے بغیر ذراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\}$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $1 \ll \alpha$ ہے اس کو a^4 رتب تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

۶.۴. زمین اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان B_{ext} میں رکھنے سے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زمین اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_1 + \mu_2) \cdot B_{ext} \quad (۶.۶۸)$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m} \mathbf{S} \quad (۶.۶۹)$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1 = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (۶.۷۰)$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$H'_z = \frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot B_{ext} \quad (۶.۷۱)$$

زمین تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر $B_{int} \ll B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور H' کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے جبکہ $B_{int} \gg B_{ext}$ کی صورت میں زمین اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انخطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زمین میدان کتنا ہوگا

۶.۴.۱. کمزور میدان زمین اثر

اگر $B_{int} \ll B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہوگی اور موزوں کو انٹم اعداد l, m, j اور m_j ہونگے تاہم چکر و مدار ربط کی موجودگی میں \mathbf{L} اور \mathbf{S} علیحدہ علیحدہ یقینی نہیں ہونگے لہذا m_l اور m_s موزوں کو انٹم اعداد نہیں ہونگے رتب اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زمین تصحیح درج ذیل ہوگی

$$H'_Z = \langle nljm_j | H'_Z | nljm_j \rangle = \frac{e}{2m} B_{ext} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \quad (۶.۷۲)$$

اب $\mathbf{L} + 2\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$ ہوگا بد قسمتی سے ہمیں \mathbf{S} کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقے سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)۔ اس مقررہ سمتیہ کے گرد \mathbf{L} اور \mathbf{S} تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص \mathbf{J} پر \mathbf{S} کی متاثرہ تقلیل \mathbf{S} کی وقتی اوسط قیمت ہوگا

$$\mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{J^2} \mathbf{J} \quad (۶.۷۳)$$

لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$ ہے لہذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ ہوگا لہذا

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \quad (۶.۷۴)$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{J^2}\right) \mathbf{J} \right\rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\right] \langle \mathbf{J} \rangle \quad (۶.۷۵)$$

چونکہ قوسین میں بند رکن کو اسٹے g جزو ضرب کہتے ہیں جس کو g_j سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور z کو B_{ext} کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہوگا

$$E_Z^1 = \mu_B g_j B_{\text{ext}} m_j \quad (۶.۷۶)$$

جہاں

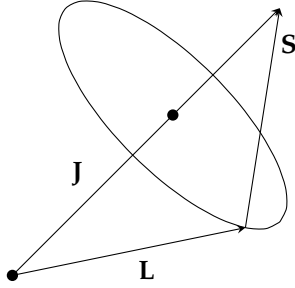
$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \quad (۶.۷۷)$$

یوہر مقناطیہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زمین کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال $n = 1$ ، $l = 0$ ، $j = 1/2$ لہذا $g_j = 2$ دو سطحوں میں بٹ جائے گا

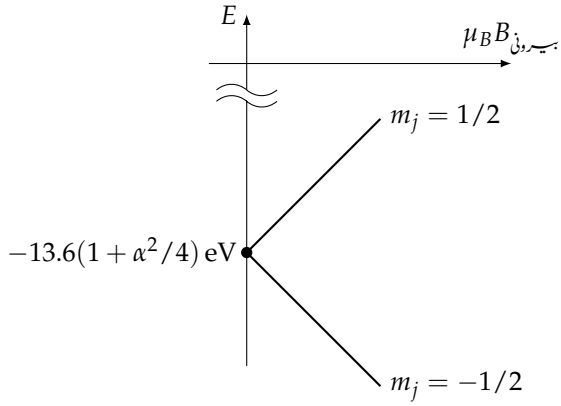
$$-13.6 \text{ eV} (1 + \alpha^2/4) \pm \mu_B B_{\text{ext}} \quad (۶.۷۸)$$

جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہوگی ان توانائیوں کو B_{ext} کے تفاعل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2l m_j\rangle$ پر غور کریں کمزور میدان زمینانہ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں B_{ext} بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔



شکل ۶.۹: چکر و مدار ارتباط کی عدم موجودگی میں L اور S علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت J کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔



شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی کمزور میدان زمینانہ اور بالائی لکیر ($m_j = 1/2$) کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر ($m_j = -1/2$) کی ڈھلوان -1 ہے۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیران اثر

اگر $B_{ext} \gg B_{int}$ ہو تب زیران اثر غالب ہوگا میدان B_{ext} کو z محور پر رکھ کر موزوں کو انجم اعداد n, l, m_l اور m_s ہو گئے جبکہ j اور m_j نہیں ہو گئے چونکہ بیرونی قوت مسروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہوگا جبکہ L_z اور S_z ہو گئے زیران ہیملٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{ext} (L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۶.۷۹) \quad E_{nmlms} = -\frac{13.6 \text{ electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext} (m_l + 2m_s)$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہوگا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہوگی

$$(۶.۸۰) \quad E_{fs}^1 = \langle nlm_l m_s | (H'_r + H'_s) | nlm_l m_s \rangle$$

اضافیتی تصدوہی ہوگا جو پہلے ہوتا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہوگا

$$(۶.۸۱) \quad \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \langle S_x \rangle \langle L_x \rangle + \langle S_y \rangle \langle L_y \rangle + \langle S_z \rangle \langle L_y \rangle = \hbar^2 m_l m_s$$

دھیان رہے کہ S_z اور L_z کہ امتیازی تصامعات کے لیے $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ ہوگا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۶.۸۲) \quad E_{fs}^1 = \frac{13.6 \text{ eV}}{n^3} \alpha^2 \left\{ \frac{3}{4n} - \left[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} \right] \right\}$$

چو کو ر قوسین کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہوگا یہاں اس کی درست قیمت ایک بے سوال 24.6 دیکھیں زیران حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_j m_s\rangle$ پر غور کریں طاقتور میدان زیران بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو ہر توانائی l^2 کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B_{ext}$ کے براہ راست متناسب زیران حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہوگی اور ان کے انحطاط کیا ہو گئے

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو تب $j = s$ ، $m_j = m_s$ ہوگا اب اس کا سکڑ اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے E_Z^1 اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر $l = 0$ کیلئے زیران اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کہ درمیانی چو کو ر قوسین رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 بھی نتیجہ دے گا

۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نہ H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہوگا لہذا ہمیں دونوں کو ایک نظریے دیکھ کر پوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہوگا

$$(۶.۸۳) \quad H' = H'_Z + H'_{fs}$$

میں $n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف l ، j ، اور m_j بیان کرتی ہے کو انخطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کیلش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کو $|jm_j\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہوگا

$$l = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

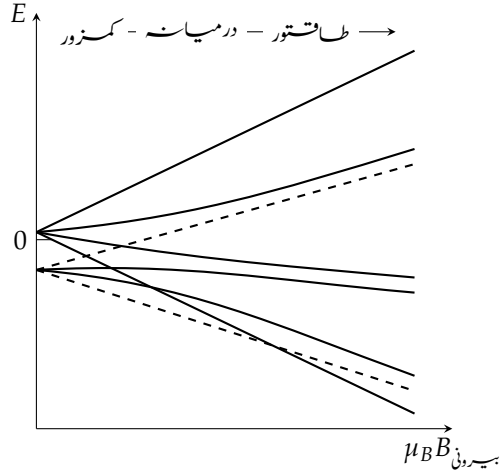
$$l = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفر وتالیبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے وتر پر پائے جاتے ہیں H'_Z کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں اور \mathbf{W} - کا مکمل متالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہوگا

$5\gamma - \beta$	00	00	00
$05\gamma + \beta$	00	00	00
00	$\gamma - 2\beta$	00	00
00	$0\gamma + 2\beta$	00	00
00	00	$\gamma - \frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta$	00
00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma - \frac{1}{3}\beta$	00
00	00	00	$\gamma + \frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta$
00	00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma + \frac{1}{3}\beta$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6 \text{ eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B B_{ext}$$



شکل ۶.۱۱: کمزور، درمیانہ اور طفتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیرمان بتوارا۔

ابتدائی چار امتیازی اقدار پہلے سے وترپرد کھائے گئے ہیں اب صرف دو 2×2 ڈیوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \quad (۶.۸۴)$$

دوسرے ڈیے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی لیکن اس میں β کی علامت الٹ ہوگی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۶.۱۱ میں B_{ext} کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد $\beta = 0$ میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طفتور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہونگے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیش گوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طفتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۶.۲۵: متالپی ارکان H'_Z اور H'_{fs} دریافت کر کے $n = 2$ کے لئے مستن میں دیا گیا متالاب W مرتب کریں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طفتور اور درمیانہ میدان خطوں کے لیے زیرمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تفاعل کے طور پر ترسیم

باب ۶. غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب

کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیان میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتی دیتی ہے

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت کتب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا پر اس کا جفت کتب معیار اثر الیکٹران کے جفت کتب معیار اثر سے بہت کم ہوگا مساوات 60.6

$$(۶.۸۵) \quad \mu_p = \frac{g_p e}{2m_p} S_p, \quad \mu_e = -\frac{e}{m_e} S_e$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہذا اس کا مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہوگا جس کی بنا پر صریح g جذب ضربی g_p لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت کتب μ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$(۶.۸۶) \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu} \delta^3(r)$$

یو پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا مساوات 58.6

$$(۶.۸۷) \quad H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \delta^3(r)$$

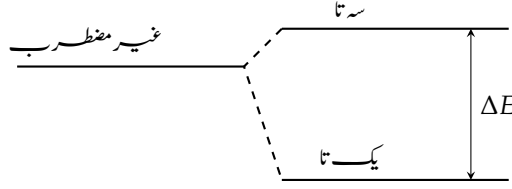
نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف مساوات ۹.6 اس طرح بھی ہیمیلٹنی کی توقعاتی قیمت ہوگی

$$(۶.۸۸) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e)}{r^3} \rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle |\psi(0)|^2$$

زمینی ہال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو توقف عمل موج کروئی تشکلی ہوگا لہذا اول توقعاتی قیمت صفر ہوگی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہوگا لہذا زمینی ہال میں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸۹) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle$$

چونکہ اس میں دو چپکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہذا اس کو چپکر چپکر ربط کہتے ہیں جیسا چپکر مدار ربط میں $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ پایا جاتا ہے چپکر چپکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چپکر زاویائی معیار اثر قبائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل



شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بنوارا۔

چپکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$(۶.۹۰) \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(۶.۹۱) \quad \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2} (S^2 - S_e^2 - S_p^2)$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چپکر ایک ہٹا دو ہے لہذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہوگا۔ سہ تا حال تمام چپکر متوازی ہیں کل چپکر ایک ہوگا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہوگا۔ یک تا حال میں کل چپکر صفر لہذا $S^2 = 0$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۲) \quad E_{hf}^1 = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_pm_e^2c^2a^4} \begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases}$$

چپکر چپکر ربط زمینی نیچال کے چپکر انحطاط کو توڑ کر سہ تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۳) \quad \Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_pm_e^2c^2a^4} = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج نور سے کا تعدد درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۴) \quad \nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420 \text{ MHz}$$

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21 \text{ cm}$ ہوگی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے۔ یہ کائنات میں احراج کی صورت میں وہ مشہور ۲۱ سینٹی میٹر تحفی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے سوال ۶.۲۷: فرض کریں a اور b دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(۶.۹۵) \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_r) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

نکمل ہمیشہ کی طرح $0 < \theta < \pi$ ، $0 < \phi < 2\pi$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ: $\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلب میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعیین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں ایکٹران کی بجائے میون ہوگا جس کا بار اور g حبز و ضرب الیکٹرون کے بار اور g حبز و ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیٹران ہوگا جس کی کمیت اور g حبز و ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور g حبز و ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہوگا جس کی کمیت اور g حبز و ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیق شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب $4.85 \times 10^{-4} \text{ eV}$ تجرباتی حاصل قیمت $8.41 \times 10^{-4} \text{ eV}$ سے بہت مختلف ہے اس مشرق کی وجہ نابودی $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی مستحالی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی انداز قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس b کا ایک ساں بار دار کروی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہوگی یہ درحقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم b/a کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں a رداس بوہر ہے صرف ابتدائی حبز و رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

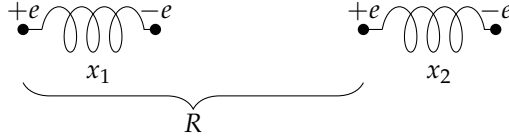
$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتے تعیین کرنی ہے آخر میں $10e - 15 \text{ meter}$ b جو تقریب پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سستی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مشغول سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 y z$$

جہاں λ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں
۱. زمینی حال



شکل ۶.۱۳: دو متابل تنظیم۔ مترجمی جوہر (سوال 31.6)۔

ب۔ سہتا انحطاطی پہلی حبان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندروالز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ کابل تنظیم ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت m اور بار $-e$ ہو ایک مرکز $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس پلک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۶) \quad H^0 = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۷) \quad H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} \right)$$

ا۔ مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$(۶.۹۸) \quad H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

ب۔ دکھائیں کہ کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دوہار مونی سرکش ہیملٹن یوں

(۶.۹۹)

$$H = \left[\frac{1}{2m} p_+^2 + \frac{1}{2} \left(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_+^2 \right] + \left[\frac{1}{2m} p_-^2 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_-^2 \right]$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$(۶.۱۰۰) \quad X_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 \pm x_2), \quad p_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 \pm p_2)$$

علیحدہ ہوگا

باب ۶. غیر تابَع وقت نظریہ اضطراب

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۶.۱۰۱) \quad E = \frac{1}{2} \hbar (\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں } \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہوتا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$(۶.۱۰۲) \quad \Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^6}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بچ کشتی مخفی پایا جاتا ہے جو ان کے بچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بچ وندروال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دور تبی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہوگی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا سر قش تقا عمل موج ہے جہاں m کمیت اور مقیاس پک k ہوگا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دور تبی تخفیف ΔV ہوگی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال 32.6:

فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی متدار معلوم λ کا تفعال ہو۔ $H(\lambda)$ کے امتیازی امدار کو اور امتیازی تفعالات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہت ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi_n \right\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انحطاطی امتیازی تفعالات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جبروالف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 19.6 استعمال کریں۔)

(جبروب): درج ذیل بقودی ہارمونی مدار اسکا اطلاق کریں۔

(ایک)

$\lambda = \omega$

لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہوگا۔

(دو)

$\lambda = \hbar$

لیں جو $\langle T \rangle$ دے گا اور

(تین)

$\lambda = m$

جو $\langle T \rangle$ اور $\langle V \rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موعازنا کریں۔

سوال 33.6:

مسلمہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہمارے ڈرو جسکے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تین کی حساب کتاب ہیں رادائی فعالیتات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

اور امتیازی افتدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max} + l + 1)^2}$$

(حبزوالف):

مسلمہ Feynman-Hellmann میں $e = \lambda$ استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔

(حبزوب):

$l = \lambda$ کو استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔ سوال 34.6:

رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2} \langle r^s \rangle - (2s+1)a \langle r^{s-1} \rangle n + \frac{s}{4} [(2l+1)^2 - s^2] a^2 \langle r^{s-2} \rangle = 0$$

صابطہ کریں جو ہمارے ڈرو جسکے حاصل ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1, s-2)$ کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رادائی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2 a^2} \right] u.$$

۔ $\int (ur^s u'') dr$ کو $\langle r^s \rangle$ ، $\langle r^{s-1} \rangle$ ، $\langle r^{s-2} \rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhis کے ذریعے دوہرا تفروق کو بیٹھائیں۔ دیکھیں کے

$$\int (ur^s u') = -(s/2) \langle r^{s-1} \rangle$$

اور

$$\int (u' r^s u') dr = -[2/(s+1)] \int (u'' r^{s+1} u') dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)

سول 35.6:

(حبزوالف):

رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s = 0, s = 1, s = 2$ اور $s = 3$ ڈال کے $\langle r^{-1} \rangle$ ، $\langle r \rangle$ ، $\langle r^2 \rangle$ اور $\langle r^3 \rangle$ کے قیامت حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قیام دریافت کر سکتے ہیں۔

(حبزوب):

دوسرے رخ آچکوں مثلاً درپیش ہوگا آپ $-1 = s$ پر کر کے دیکھیں گے آچکوں صرف $\langle r^{-2} \rangle$ اور $\langle r^{-3} \rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔

(حبزوب):

اگر آپ کسی طریقے سے $\langle r^{-2} \rangle$ دریافت کر پائیں تب آپ رشتہ 'Kramers' استعمال کر کے باقی تمام منفی قوتوں کے لئے قیادت دریافت کر سکتے ہیں۔

مسائل 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوئے $\langle r^{-3} \rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مسائل 64.6 کے ساتھ کریں۔

سوال 36.6:

ایک جوہر کو یکساں بیرونی برقی میدان E_{ext} میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں ہٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی مسائل ہے اس سوال میں ہم ہالے ڈروجن کے $n = 1$ اور $n = 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r \cos \theta$$

اسکو hamiltonian bohr مسائل 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسئلہ میں چپکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کرتے ہوئے عمدہ ساخت کو رد کریں۔

(حبزوب):

اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔

(حبزوب):

پہلا ہیجان حال 4 پرستہ $\psi_{210}, \psi_{21-1}, \psi_{210}, \psi_{211}, \psi_{200}$ انخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے، توانائی کی رتبہ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟

(حبزوب):

درج بالہ حبزوب میں موضوع تفاعلات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جو عطف قطب معیار اثر $(p_e = -er)$ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تابع نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کہ پہلی ہیجان حال میں ہالے ڈروجن برقی جو عطف قطب معیار اثر کا حاصل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکسلات پائے جاتے ہیں تاہم تقریباً تمام کی قیمت سفر ہے لہذا حساب سے قبل غور کریں اگر ϕ عمل سفر ہو تب r اور θ کمالات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی حبزوبی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)

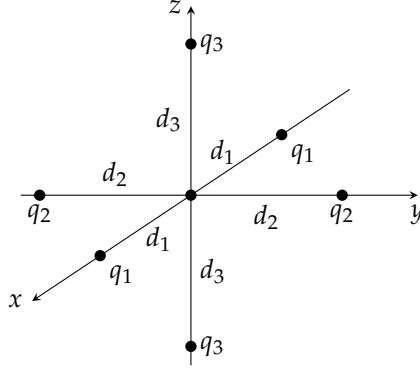
سوال 37.6: ہالے ڈروجن کی $n = 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتداًی طور پر چپکر کو نظر انداز کرتے ہوئے اب انخطاطی حالات ψ_{31m} ہونگے اور اب ہم Z رخ برقی میدان حوالہ کرتے ہیں۔

(حبزوب):

اضطرابی hamiltonian کو غلبہ کرنے والا 9×10^9 کا کم تیار کریں

حبزوبی جواب

$$\langle 300|z|310 \rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320 \rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31 \pm 1|z|32 \pm 1 \rangle = -(9/2)a.$$



شکل ۶.۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (مستطبی حبال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

(جزوب):

استیازی اقتدار اور انکی انحطاط دریافت کریں۔

سوال 38.6: ڈوٹرٹم کی زمینی حال میں نہایت موہین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طول موج میں تلاش کریں۔ ڈوٹرٹم درحقیقت بھاری ہائے ڈروجن ہے جس کے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ جڑ کر ڈوٹرٹم بناتے ہیں جس کا چکر ایک مقناطیسی دائرہ اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_{di}$$

اور ڈوٹرٹم کا g-جزو 71.1 ہے۔

سوال 39.6:

ایک کالم میں متربی باردار کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۴) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پایا جاتی ہیں۔ (چونکہ اس سوال کے ساتھ چکر کا کوئی واسطہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)

(جزوالف):

درج ذیل

$$r \ll d_1, r \ll d_2, \text{ and } r \ll d_3,$$

کی صورت میں دیکھاے

$$H' = V_0 + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_0 = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(حبزوب):

زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔

(حبزوج):

پہلی۔ ہیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں یہ چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بنے گا۔

ایک (کاپی تشاملی)

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی صورت میں۔

دو (چوں زاویہ تشاملی)

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔

تین (آرتھوہمبک تشاملی کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔

سوال 40.6:

بازاؤفات ψ_{11}^1 کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلد واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بخصوص خوبصورت مثالیں درج ذیل ہیں۔

(الف)

ایک) ہائے ڈروجن کی زمینی حال میں سنارک اثر ایک یکاں بیرونی برقی میدان E_{ext} کی موجودگی میں ہائے ڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال 36.6 stark اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n} \cos \theta;$$

استعمال کر کے دیکھیں آپ نے مستقالات A, B, C اور کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔

دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔ جواب:

$$-m(3a^2 e E_{ext} / 2\hbar)^2.$$

(حبزوب)

اگر پروٹان کا برقی جہت قطب معیار اثر p ہو تا تب ہائے ڈروجن کے الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{ep \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
 دو) دیکھیں کہ رتبہ تک جو ہر کافضل برقی جو عفت قطب معر اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہوگا۔
 تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہوگا؟

باب ۷

تغیری اصول

۱.۷ نظریہ

منرض کریں آپ ایک نظام جس کو ہیلٹنی H بیان کرتا ہو، کی زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات حاصل کرنے سے متاصر ہوتے ہیں۔ اصول تغیریت آپ کو E_{gs} کی بالائی حد دیتا ہے۔ بعض اوقات آپ کو صرف اسی سے منرض ہوتا ہے اور عموماً ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے مترب قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ انہیں اس کا استعمال دیکھیے۔ کوئی بھی معمول شدہ تفاعل ψ لیں۔ میں درج ذیل دعوہ کرتا ہوں:

$$E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle$$

یعنی کسی بھی شانہ غیر درست حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت زمینی حال توانائی سے زیادہ ہوگی۔ یقیناً اگر ψ انفاستاً ایک ہیجان حال ہو تب H کی قیمت E_{gs} سے تجاوز کرے گی۔ اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل ψ کے لیے بھی ایسا ہوگا۔

ثبوت:

چونکہ H کے نامعلوم امیتازی تفاعلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں۔ لحاظ ہم ψ کو ان کا خطی جوڑ لکھ سکتے ہیں۔ جہاں

$$\psi = \sum c_n \psi_n, \quad H\psi_n = E_n \psi_n$$

ہے۔ چونکہ ψ معمول شدہ ہے

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \left| \sum_n c_n \psi_n \right. \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

جہاں منرض کیا گیا ہے کہ امتیازی تفاعلات از حد معیاری معمول شدہ ہے۔

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

ساتھ ہی درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \middle| H \sum_n c_n \psi_n \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* E_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2$$

لیکن تعریف کی رو سے زمینی حال توانائی کم سے کم امتیازی قیمت ہوگی۔ لحاظ $E_{gs} \leq E_n$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle \geq E_{gs} \sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

جس کو ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

مثال

1.7 فرض کرے ہم ایک یودی ہارمونی مور تیش

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً ہم اس کا ٹھیک جواب جانتے ہیں۔ جو مساوات 61.2 $E_{gs} = (1/2) \hbar \omega$ نے استعمال کر کے اس ترقیب کو پرکا جاسکتا ہے۔ ہم گاوسی تفاعل

$$\psi(x) = A e^{-bx^2}$$

کو اپنا پر کیا تفاعل موج منتخب کرتے ہیں جہاں b ایک مستقل ہے اور A کو معمول زنی سے تعائن کیا جاسکتا ہے۔

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4}$$

اب درج ذیل ہے

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

جبکہ یہاں

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-bx^2}) dx = \frac{\hbar^2 b}{2m}$$

اور

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} x^2 dx = \frac{m \omega^2}{8b}$$

ہونے کی بنا پر درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m \omega^2}{8b}$$

/ مساوات 1.7 کے تحت b کی تمام قیمتوں کے لیے E_{gs} سے تجاویز کرے گا۔ سخت سے سخت حد بندی کی خاطر ہم $\langle H \rangle$ کی کم سے کم قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m \omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m \omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس $\langle H \rangle$ میں پھر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle H \rangle_{min} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہیں۔ جو حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ ہمیں نے اتفاقی طور پر ایسا پرکھنا تھا۔ کیا جس کاروپ ٹھیک حقیقی زمینی حال مساوات 59.2 کی طرح ہے۔ تاہم گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے لحاظ یہ ایک مقبول پرکھنا تھا۔ جسے وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جب حقیقی زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔

مثال 2.7 فرض کرے ہم Delta تفاعل مخفی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \alpha \delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یہاں بھی ہمیں ٹھیک جواب $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$ معلوم ہے۔ یہاں بھی ہم گاوسی پرکھنا تھا۔ مساوات 2.7 کا انتخاب کرتے ہیں۔ چونکہ ہم معمول زنی کر چکے ہیں اور $\langle T \rangle$ کا حساب کر چکے ہیں۔

$$\langle V \rangle = -\alpha |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} \delta(x) dx = -\alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ یہ تمام B کے لیے E_{gs} سے تباہ کر دے گا۔ اس کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہیں

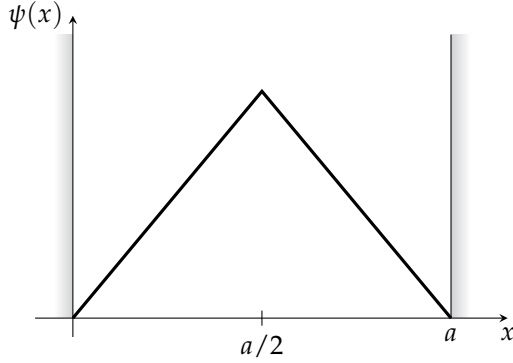
$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2 \alpha^2}{\pi \hbar^4}$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle_{min} = -\frac{m\alpha^2}{\pi \hbar^2}$$

جو کہ یقیناً E_{gs} سے یہ قدرے بلند ہوگا، چونکہ $\pi > 2$

میں نے کہا آپ کسی بھی معمول شدہ پرکھنا تھا ψ کا انتخاب کر سکتے ہیں جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ غیر استمراری تفاعلات کے دوہرہ تفرق جو $\langle T \rangle$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہوگا، کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے ان کے چال چلنا ہوگا۔ ہاں، اگر آپ محتاط ہو تو استمراری تفاعلات جن میں بل پائے جاتے ہیں، کو استعمال کرنا نسبتاً آسان ہوگا۔ اگلی مثال میں انہیں استعمال کرنا دکھایا گیا ہے۔



شکل ۱.۷: لامستناہی چوکور کنواں کے لئے آزمائشی تکیونی تناف عمل موج (مسوات 10.7)۔

مشال
3.7 تکیونی آزمائشی تناف عمل موج (شکل ۱.۷)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بعدی لامستناہی چوکور کنواں کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ A کو معمول زنی سے تعین کیا جائے گا:

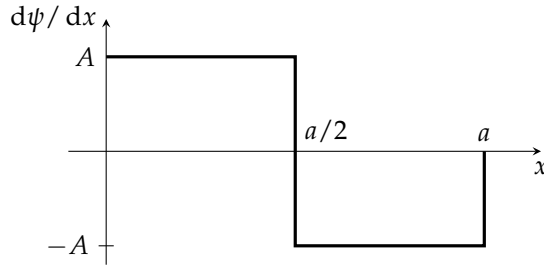
$$1 = |A|^2 \left[\int_0^{a/2} x^2 dx + \int_{a/2}^a (a-x)^2 dx \right] = |A|^3 \frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{3}{a}}$$

جیسا شکل ۱.۲ میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہوگا

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اب سیزھی تناف عمل کا تفسیق ایک Delta تناف عمل ہے۔ سوال 24.2 ب دیکھئے۔

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x - a/2) + A\delta(x - a)$$



شکل ۷.۲: لامتناہی چوکر کنویں میں ٹکونی تفاعل موج (شکل ۷.۱) کا تفرق۔

لمحظہ درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} \int [\delta(x) - 2A\delta(x - a/2) + \delta(x - a)] \psi(x) dx \\ &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} [\psi(0) - 2\psi(a/2) + \psi(a)] = \frac{\hbar^2 A^2 a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2}\end{aligned}$$

ٹھیک زمینی حال توانائی $E_{gs} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ مساوات 27.2 ہے۔ لمحظہ یہ مسئلہ کارآمد ہے۔ $12 > \pi^2$

اصول تغیریت انتہائی طاقتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سلسلہ کی زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر ماہر کیبیا ایک ایسا پر کیا تفاعل موج منتخب کر کے، جس میں متعدد مقدار معلوم پائے جاتے ہو اور ان کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\langle H \rangle$ کی کم سے کم ممکنہ قیمت تلاش کرے گا۔ اصل تفاعل موج کے ساتھ ψ کی کوئی مشابہت نہ پائے جانے کی صورت میں بھی آپ کو E_{gs} کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہوگی۔ ظاہر ہے اگر آپ ψ کو حقیقی تفاعل کے زیادہ متغیریت منتخب کر پائے تو اتنا بہتر ہوگا۔ اس ترقیب کے ساتھ مدد یہ ہے کہ آپ کبھی بھی جان نہیں سکتے کہ آپ درست جواب کے کتنے متغیر ہو۔ آپ صرف اتنا جاننے ہو کہ اصل جواب آپ کے نتیجے سے کم ہوگا۔ مزید اس روپ میں یہ ترقیب صرف زمینی حال کے لیے کارآمد ہے، البتہ سوال 4.7 دیکھیے۔

1.7 درجہ ذیل مخفیہ کے لئے زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر گامی پر کیا تفاعل مساوات 2.7 کی کم سے کم بالائی حد بندی تلاش کرے۔
(ا) خطی مخفیہ

$$V(x) = \alpha|x|$$

ب) طاقت چار مخفیہ

$$V(x) = \alpha x^4$$

سوال 2.7 یک بودی ہارمونی موڑ تیش E_{gs} کی بہترین حد بندی کو درج ذیل روپ کی پرکیا تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کر کے تلاش کریں۔ جہاں معمول زنی سے تعائن ہوگا۔ جبکہ بھی متاثر تبدیل مقدار معلوم ہے۔ سوال 3.7: ڈلت تفاعل مخفی

$$-\alpha\delta(x)$$

کی E_{gs} کی بہترین بالائی حد بندی کو کوئی پرکیا تفاعل مساوات 10.7. لیکن جس کا وسط مبدہ پر ہوا استعمال کر کے تلاش کریں۔ یہاں a ایک متاثر تبدیل مقدار معلوم ہے۔ سوال

14.7 اصول تغیریت کے درج ذیل زمینی نتیجہ کو ثابت کریں۔ اگر $\langle \psi | \psi_{gs} \rangle = 0$ تب $\langle H \rangle \geq E_{fc}$ ہوگا۔ جہاں پہلی ہیجان حال کی توانائی E_{fc} ہے۔ یوں اگر ہم کسی طرح ٹھیک زمینی حال کو امودی ایک پرکیا تفاعل تلاش کر کے تب ہم پہلی ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکتے ہیں۔ عموماً چونکہ ہم زمینی حال تفاعل ψ_{gs} کو نہیں جانتے ہے لہذا یہ کہنا مشکل ہوگا کہ ہمارا پرکیا تفاعل ψ اس کو امودی ہوگا۔ ہاں، اگر x کے لحاظ سے مخفی $V(x)$ ایک جفت تفاعل ہو تب زمینی حال بھی جفت ہوگا۔ لحاظ کوئی بھی تاگ پرکیا تفاعل خود بخود اس زمینی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا۔
(ب) درج ذیل پرکیا تفاعل

$$\psi(x) = A x e^{-b x^2}$$

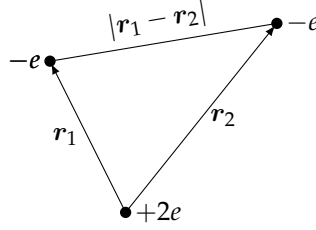
استعمال کرتے ہوئے یک بودی ہارمونی موڑ تیش کی پہلی ہیجان حال کا بہترین بالائی حد بندی تلاش کرے۔ سوال 5.7

(ا) اصول تغیریت استعمال کر کے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انخطاطی نظریہ استراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تجاوز کرے گا یا کم سے کم بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا۔
(ب) آپ جبر آجانتے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دورتی تصحیح لاظمن منفی ہوگی۔ مساوات 15.6 کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہوگا۔

۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر (شکل ۷.۳) کے مرکزہ میں دو پروٹون اور دو نیوٹران جن کا یہاں کوئی کردار نہیں ہوگا پائے جاتے ہیں اور مرکزہ کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔ مہین ساخت اور باریک طرز کو نظر انداز کرتے ہوئے اس نظام کا تھمٹھنی درج ذیل ہوگا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right)$$



شکل ۷.۳: ہیلیم جوہر۔

ہم نے زمینی حال توانائی E_{gs} کا حساب کرنا ہوگا۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکٹھا ہونے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ E_{gs} جانتے ہوئے ہم ایک الیکٹران اکٹھا ہونے کے لیے درکار توانائی برداری عمل معلوم کر سکتے ہیں۔ سوال 6.7 دیکھیں

تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حال توانائی کی قیمت کو انتہائی زیادہ درستگی تک پیش کیا گیا ہے۔

$$E_{gs} = -78.975 \text{ eV}$$

ہم نظریہ سے اسی عدد کو حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنی سادہ اور اہم مسئلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔ ملد الیکٹران الیکٹران دفع

$$V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

پیدا کرتا ہے۔ اس جز کو نظر انداز کرنے سے H حایزروجن، ہیلنیم میں الہد گا ہو جاتا ہے جہاں مرکزوی بار e کی بجائے $2e$ ہوگا۔ اس کا ٹھیک ٹھیک حل حایزروجن دفنالاچ مان کا حاصل ظرب ہوگا۔

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

اور توانائی -109 eV $8E_1$ الیکٹران دولٹ مساوات 31.5 ہوگی۔ یہ قیمت -79 eV الیکٹران دولٹ سے بہت دور ہے۔ تاہم یہ صرف آغاز ہے۔ ہم فائے ناٹ کو بھر کیا افعال معالج لیتے ہوئے E_{gs} کی بہتر تخمینہ کو اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں چونکہ یہ زیادہ تر ہملٹنی کا امتیازی دفنالاچ ہے لہذا یہ خصوصی طور پر بہتر انتخاب ہے۔

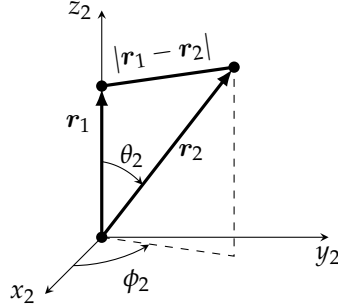
$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\langle V_{ee} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{8}{\pi a^3} \right)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$



شکل ۷.۷: محدود کا انتخاب برائے r_2 مکمل (مساوات 20.7)۔

میں r_2 مکمل کو پہلے حل کرتا ہوں۔ یوں r_1 کو مستقل تصور کیا جائے گا۔ ہم r_2 کے محدودی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ اس کا قطبی محور r_1 پر پایا جاتا ہو (شکل ۷.۷)۔ قانون کوسائن کے تحت

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}} r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\phi_2$$

متغیر ϕ_2 کا (نسایت آسان) مکمل 2π دے گا۔

متغیر θ_2 کا مکمل درج ذیل ہوگا

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}} d\theta_2 = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}}{r_1r_2} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{r_1r_2} (\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2})$$

$$= \frac{1}{r_1r_2} [(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$I_2 = 4\pi \left(\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^{\infty} e^{-4r_2/a} r_2 dr_2 \right) \\ = \frac{\pi a^3}{8r_1} \left[1 - \left(1 + \frac{2r_1}{a} \right) e^{-4r_1/a} \right]$$

اس طرح $\langle V_{ee} \rangle$ درج ذیل ہوگا۔

$$\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{8}{\pi a^3} \right) \int [1 - (1 + \frac{2r_1}{a}) e^{-4r_1/a}] e^{-4r_1/a} r_1 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\phi_1$$

ظہانی نکلات 4π دینگے جبکہ r_1 کا مکمل درج ذیل ہوگا

$$\int_0^{\infty} [r e^{-4r/a} - (r + \frac{2r^2}{a}) e^{-8r/a}] dr = \frac{5a^2}{128}$$

آخر میں اس طرح درج ذیل ہوگا

$$\langle V_{ee} \rangle \frac{5}{4a} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = -\frac{5}{2} E_1 = 34 \text{ eV}$$

جس کی بنا پر درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = -109 \text{ eV} + 34 \text{ eV} = -75 \text{ eV}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے۔ یاد رہے کہ تجرباتی قیمت 79- الیکٹران وولٹ ہے۔ تاہم ہم اس سے بھی بہتر کر سکتے ہیں۔ ہم ψ_0 جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسا ایک دوسرے پر اصرار انداز نہیں ہوتے ہیں۔ سے بہتر زیادہ حقیقت پسندانہ پھر کیا فعال کا سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کا دوسرے الیکٹران پر اصرار کو مکمل طور پر نظر انداز کرنے کی بجائے ہم کہتے ہیں کہ ایک الیکٹران قواسطن منفی بار کی بطل کی طرح ہوگا جو مرکز کو حبزدی طور پر سپر کرتا ہے جس کی بنا پر دوسرے الیکٹران کو موثر مرکز دی بار z کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آئے گی۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا برقی فعال استعمال کریں۔

$$\psi_1(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi a^3 e^{-Z(r_1+r_2)/a}}$$

ہم z کو تغیریت کا مقدار معلوم تصور کر کہ اس کی وہ تمام قیمت منتخب کر کے جس سے H کی کم سے کم قیمت حاصل ہو۔ دیہان رہے کہ فضول تغیریت کی ترقیب کبھی بھی ہیلینی کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ ہیلیم کا ہیلینی اب بھی مساوات 14.7 دیگی البتہ تصور میں ہیلینی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کے بہتر بلک یا فعال معالج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ فعال معالج اس غیر مضطرب ہیلینی جو الیکٹران کی دفعہ کو نظر انداز کرتا ہو جس

میں جسز coulomb میں دو کی جگہ z پایا جاتا ہوگا امتیازی حال ہوگا۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے ہم H 14.7 کو روپ میں لکھتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2}\right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(Z-2)}{r_1} + \frac{(Z-2)}{r_2} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right)$$

ظاہر ہے کہ H کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہوگی

$$\langle H \rangle = 2Z^2 E_1 + 2(Z-2)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \langle V_{ee} \rangle$$

یہاں $\langle 1/r \rangle$ سی مراد ایک ظہرہ ہائڈروجن زمینی حال سے 100 جس میں مرکزوی بار Z ہو میں $1/r$ کی تحقیقاتی قیمت ہے۔
یوں مساوات 55.6 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{a}$$

یہاں بھی vee کی توقیاتی قیمت وہی ہوگی جو پہلے تھی۔ مساوات 65.7 لیکن اب ہم $z=2$ کی بجائے اختیار z استعمال کریں گے لہذا ہم a کو $Z/2$ سے ظرب کرتے ہیں

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{5Z}{8a} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = \frac{5Z}{4} E_1$$

۔ ان تمام کو اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\langle H \rangle = [2Z^2 - 4Z(Z-2) - (5/4)Z] E_1 = [-2Z^2 + (27/4)Z] E_1$$

اصول تغیریت کے تحت z کی کسی قیمت کے لیے بھی یہ مقدار E_{gs} سے تجاوز کرے گی۔
بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت وہاں پائی جانے کی جب $\langle H \rangle$ کی قیمت کن سے کم ہو۔

$$\frac{d}{dZ} \langle H \rangle = [-4Z + (27/4)] E_1 = 0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$Z = \frac{27}{16} = 1.69$$

یہ ایک معقول نتیجہ نظر آتا ہے جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکز کو سپر کرتا ہے جس کی بنا پر اس کی موثر بار 2 کی بجائے 69.1 نظر آتی ہے۔ اس قیمت کو z میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^6 E_1 = -77.5 \text{ eV}$$

قبیلے تقدیر مع معلوم کی تعداد بڑھا کر زیادہ پیچیدہ پر کیا دفعالات معالج لے کر ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اسی ترقیب سے انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے ہم ٹھیک جواب کے دو فیصد متعرب ہیں لحاظ

اس کو ہمیں پر چھوڑتے ہیں۔

سوال 6.7

ہیلیم کی زمینی حال توانائی $E_{gs} = -79\text{eV}$ لیتے ہوئے توانائی بارداری حمل صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کا حساب کریں۔

اشارہ پہلے ہیلیم باردار یا He^+ جس کے مرکزہ کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے کی زمینی حال توانائی تلاش کریں۔

اس کے بعد دونوں توانائیوں کا منفرق لیں سوال 7۔

اس حصہ میں ملتمل ترتیبات کا اتلاک H^- اور Li^+ باردار یا جن میں ہلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں اور جن کی مرکزوی بار بالترتیب $z=1$ ، $z=3$ ہیں کریں۔

باریک بار ایک ایک باردار یا کے لیے کاموثر حبزوی سپر شدہ مرکزوی بار تلاش کر کہ E_{gs} کی بہترین بلائی حقیقتی متعین کریں۔

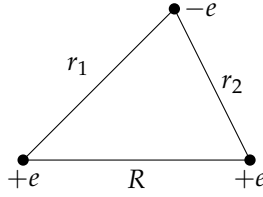
باردار یا H^- کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ $\langle H \rangle > -13.6\text{eV}$ ہوگا جس کے تحت کوئی مقید حال نہیں ہوگا۔ توانائی کی نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورتحال یہ ہوگی کہ الیکٹران درست ہو کر پیچھے مدلل حاذروجن جوہر چھوڑے۔ یہ زیادہ حیرانگی کی بات نہیں ہے چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے یہاں الیکٹران اور مرکزہ کے بیچ قوت کشش کم ہے۔ جبکہ الیکٹرانوں کے بیچ قوت دفعہ زیادہ ہے۔ جو اس جوہر کے توڑے گا حقیقت میں یہ نتیجہ درست نہیں ہے۔ زیادہ نفیس برکیا دفعال معاج ساتھ 18.7 دیکھیں منتخب کر کے دکھایا جاسکتا ہے کہ $E_{gs} < -13.6\text{eV}$ ہوگا لحاظ مقید حال موجود ہوگا۔ البتہ یہ بمشکل مقید ہوگا اور کوئی حبابی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں یوں H^- کا غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا ہے۔ تمام عبور از حمراریا کو اور از حمراریاے ہوں گے اسی لیے ان کا متالیا تجربہ گاہ میں کرنا دشوار ثابت ہوتا ہے اگرچہ سورج کی سطح پر ان کی کشیر تعد ادپائی جاتی ہے۔

۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردار ہے

اصول تغیریت کی ایک اور پلاسی کی استعمال۔ ہائیڈروجن سالمہ باردار ہے H_2^+ کا معائنہ ہے۔ ہائیڈروجن سالمہ باردار ہے دو پروٹان کی کولمب میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے (شکل ۷.۵)۔ میں فی الوقت منرض کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان ساکن ہیں اور ان کے بیچ فاصلہ R ہے۔ اگرچہ اس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ R کی اصل قیمت ہوگی۔ ہمیشی در جب ذیل ہوگا۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

جہاں r_1 اور r_2 الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلہ ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک ایسا پھر کی طفل موج کا انتخاب کریں جس کو استعمال کرتے ہوئے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے حاصل ہو۔ در حقیقت ہم صرف اتنا حبانہ چاہتے ہیں کہ آیا اس نظام میں بند پیدا ہوگا یعنی آیا ایک مادل ہائیڈروجن جوہر اور ایک آزاد پروٹان سے کیا اس نظام کی توانائی کم ہوگی۔ اگر ہماری پھر کی طفل موج دکھائے کہ ایک مکید حال پایا جاتا ہے۔ اس سے زیادہ بہتر پھر کی طفل اس بند کو مزید طاقستور بنے گا۔



شکل ۵.۷: ہائیڈروجن سال باردار H_2^+

پھر کی طفال موج تیار کرنے کی خاطر فرض کریں زمینی حال مہوار 4.80

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

میں ایک ہائیڈروجن جوہر کے متفریب لامتناہی دوسرا پروٹان متفریب لاکر فاصلہ R پر رکھ کر باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس بوجہ سے r کافی بڑا ہو تب الیکٹران کی طفال موج غالب زیادہ تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم ہمیں دونوں پروٹانوں کو ایک نظر سے دیکھنا ہوگا۔ لہذا کسی ایک کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک جیسا ہوگا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کے پھر کی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)]$$

پر غور کریں

۔ ماہر کو انٹیم کیا اس ترکیب کو جوہری مدار چوں کا خطی جوڑ کہتے ہیں۔
سب سے پہلا کام پھر کی طفال کی معمول زنی ہے۔

$$1 = \int |\psi|^2 d^3r = |A|^2 \left[\int |\psi_0(r_1)|^2 d^3r + \int |\psi_0(r_2)|^2 d^3r + 2 \int \psi_0(r_1) \psi_0(r_2) d^3r \right]$$

پہلے دو ٹکلات کا نتیجہ ایک ہے۔ چونکہ ψ_0 خود معمول شدہ ہے۔ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درج ذیل فرض کریں۔

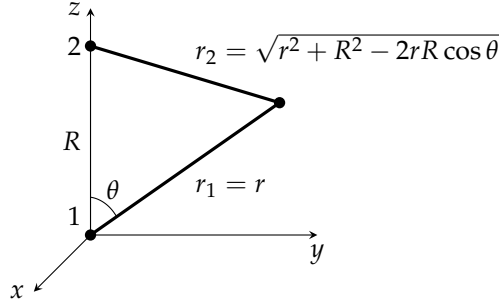
$$I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} d^3r$$

ایسا معتمدی نظام کھڑا کریں جس کہ نقطہ پر پروٹان 1 پایا جاتا ہو جبکہ Z مہور پر فاصلہ R پر پروٹان 2 پایا جاتا ہو (شکل ۷.۶)۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$r_1 = r \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}/a} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



شکل ۷.۶: مقدار I کے حساب کی خاطر محدود (مساوات 39.7)۔

متغیر ϕ (نہایت آسان) مکمل 2π دے گا۔ متغیر θ کا مکمل حل کرنے کی خاطر درجہ ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

لہذا

$$d(y^2) = 2ydy = 2rR \sin \theta d\theta$$

ہوگا۔ تب درجہ ذیل ہوگا۔

$$\int_0^\pi e^{-\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}/a} \sin \theta d\theta = \frac{1}{rR} \int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a} y dy = -\frac{a}{rR} [e^{-(r+R)/a} (r+R+a) - e^{-|r-R|/a} (r+R-a)]$$

اب مکمل r با آسانی حل ہوگا۔

$$I = \frac{2}{a^2 R} [-e^{-R/a} \int_0^\infty (r+R+a) e^{-2r/a} r dr + e^{-R/a} \int_0^R (R-r+a) r dr + e^{R/a} \int_R^\infty (r-R+a) e^{-2r/a} r dr]$$

ان نکلات کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد کچھ الجبرائی تفصیل کے بعد درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$I = e^{-R/a} \left[1 + \left(\frac{R}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \right]$$

ہاں! کو مکمل ڈمب کہتے ہیں جو $\psi_0(r_1)$ کا $\psi_0(r_2)$ پر چڑھنے کی مقدار کی پیمائش ہے۔ دیہان رہے کہ $R \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ ایک پہنچتا ہے۔ جبکہ $R \rightarrow \infty$ کی صورت میں یہ صفر کو پہنچتا ہے۔ مکمل ڈمب i میں حبز زنی معمول زنی مساوات 38.7 درجہ ذیل ہوگا۔

$$|A|^2 = \frac{1}{2(l+1)}$$

باب ۷۔ تغیری اصول

اس کے بعد ہمیں پھر کی حال ψ میں H کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہوگا۔ درج ذیل۔

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1}\right)\psi_0(r_1) = E_1\psi_0(r_1)$$

جہاں $E_1 = -13.6\text{eV}$ جو ہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے اور r_1 کی جگہ r_2 کے لئے بھی یہی کچھ کے بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} H\psi &= A\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right][\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)] \\ &= E_1\psi - A\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_2}\psi_0(r_1) + \frac{1}{r_1}\psi_0(r_2)\right]\right) \end{aligned}$$

یوں H کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle H \rangle = E_1 - 2|A|^2\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left[\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_2}\right|\psi_0(r_1)\rangle + \langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_1}\right|\psi_0(r_2)\rangle\right]$$

میں آپ کے لئے باقی دو متداویر جو بلاواسطہ مکمل

$$D \equiv a\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_2}\right|\psi_0(r_1)\rangle$$

اور مبادلہ مکمل

$$X \equiv a\langle\psi_0(r_1)\left|\frac{1}{r_1}\right|\psi_0(r_2)\rangle$$

کہلاتا ہے۔ حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلاواسطہ مکمل کا نتیجہ درج ذیل

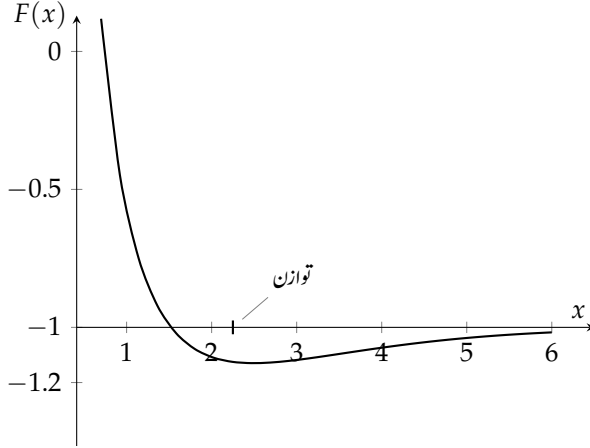
$$D = \frac{a}{R} - \left(1 + \frac{a}{R}\right)e^{-2R/a}$$

اور مبادلہ مکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$X = \left(1 + \frac{R}{a}\right)e^{-R/a}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور یاد رکھتے ہوئے مساوات 70.4 اور 72.4 کہ $E_1 = -(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/2a)$ ہے۔ ہم درج ذیل آخذ کرتے ہیں۔

$$\langle H \rangle = \left[a + 2\frac{(D + X)}{(1 + L)}\right]E_1$$



شکل ۷.۷: تفاعل $F(x)$ (مساوت 51.7) کی ترسیم مقید حال کی موجودگی دکھاتی ہے (بوہر رداس کی اکائیوں میں x دو پروٹانوں کے بیچ فاصلہ ہے)۔

اصول تغیریت کے تحت زمینی حال توانائی $\langle H \rangle$ سے کم کی۔ یقیناً یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے۔ اس کے ساتھ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی بھی پائی جائے گی۔

$$V_{pp} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{2a}{R} E_1$$

یوں نظام کی کل توانائی مائیس E_1 کی اکائیوں میں $x \equiv R/a$ کا طفل لکھتے ہوئے درج ذیل سے کم ہوگا۔

$$F(x) = -1 + \frac{2}{X} \left\{ \frac{(1 - (2/3)x^2)e^{-x} + (1+x)e^{-2x}}{1 + (1+x + (1/3)x^2)e^{-x}} \right\}$$

اس طفل کو شکل ۷.۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ منفی ایک سے نیچے ہے۔ جہاں معدل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی مائیس 6.13 الیکٹران وولٹ سے توانائی کم ہے۔ لہذا اس نظام میں بند پیدا ہوگا۔ یہ ایک شریک گرمی بند ہوگا، جہاں دونوں پروٹانوں کا الیکٹران میں ایک دوسرے کے برابر حصہ ہوگا۔ پروٹانوں کے بیچ توازنی فاصلہ تقریباً 4.2 رداس بوہر یعنی 3.1 لیٹکسڈروم ہے۔ جس کی تجرباتی قیمت 06.1 لیٹکسڈروم ہے۔ توانائی بندش کی حساب سے حاصل قیمت 8.1 الیکٹران وولٹ جبکہ پیشانی قیمت 8.2 الیکٹران وولٹ ہے۔ چونکہ اصول تغیریت ہر صورت زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے لہذا یہ بندش کی طاقت کی قیمت کم دے گا۔ بہر حال اس کی منکر نہ کریں۔ یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندش پایا جاتا ہے۔ ایک بہتر تغیراتی طفل اس مخفیہ کو مزید گہرا کرے گا۔

سوال 8.7

بلا واسطہ مکمل D اور مبادلہ مکمل X مساوت 45.7 اور 46.7 کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوت

47.7 اور 48.7 کے ساتھ کریں۔

سوال 9.7

فرض کریں ہم نے پھر کی طفل موج مساوات 37.7 میں منفی علامت استعمال کی ہوئی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)]$$

کوئی نیا تکل حل کیے بغیر مساوات 51.7 کا ماسل $F(x)$ معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بند پیدا نہیں ہوگا۔ چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے لہذا اس سے یہ ثابت نہیں ہوگا کہ ایسے حال میں بند نہیں پایا جائے گا۔ تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی چاہیے۔ تبصرہ در حقیقت درج ذیل روپ کا کوئی طفل

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)]$$

کی ایک خاصیت یہ ہے کہ الیکٹران دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم چونکہ باہمی ادل بدل $r_1 \leftrightarrow r_2$ کی صورت میں ہم منفی مساوات 35.7 غیر متغیر ہے۔ لہذا اس کے امتیازی طفلالات کو بیک وقت P کے امتیازی طفلالات چنا جاسکتا ہے۔ امتیازی قدر 1+ کے ساتھ مثبت علامت۔ مساوات 37.7 اور امتیازی قدر منفی 1 کے ساتھ منفی علامت مساوات 52.7 ہوگا۔ زیادہ عمومی صورت مساوات 53.7 استعمال مزید فائدہ نہیں دے گا۔ اگرچہ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔

سوال 10.7

نقطہ توازن پر $F(x)$ کی دوہرا تفرق سے ہائیڈروجن سالہ باردار حصہ 3.2 میں دونوں پروٹانوں کی ارتعاش کی قدرتی تعداد اویک کے انداز قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔ اگر اس موردیش کی زمینی حال توانائی $\hbar\omega/2$ نظام کی بندشی توانائی سے زیادہ ہو تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں موردیش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہوگا۔ ساتھ ہی مکید لرزشی سطحوں کی انداز تعداد دریافت کریں۔ تبصرہ آپ دہلی طور پر کم سے کم نقطہ یا اس نقطہ پر دوہرا تفرق حاصل نہیں کر پائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کیجئے گا۔

سوال 11.7

الف) درج ذیل روپ کا بر کی تفسال موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos(\pi x/a) & (-a/2 < x < a/2) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

دیگر صورت اس کا استعمال کرتے ہوئے ایک بودی ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں۔ a کی بہترین قیمت کیا ہوگی۔ H کمتر کا معازنہ ٹھیک توانائی سے کریں۔ تبصرہ: بر کی تفسال میں $\pm a/2$ پر ایک بل پایا جاتا ہے ایک غیر استمراری تفرک کیا آپ تو اس سے نمٹنا ہوگا جیسے مجھے مثال 3.7 میں نمٹنا پڑا۔ ب) وقفہ $\psi(x) = B \sin(\pi x/a)$ پر $(-a, a)$ استعمال آتے ہوئے پہلے حال کی حد بندی تلاش کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں۔

سوال 12.7

الف) درج ذیل بر کی تفسال موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2 + b^2)^n}$$

جہاں n اختیاری مستقل ہے استعمال کرتے ہوئے سوال 2.7 کو ہمومیت دیں مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[\frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ب) ہارمونی سرعش کی پہلی حبان حال تو بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت درج ذیل برکی تفال استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2 + b^2)^n}$$

جزوی جواب مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[\frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ج) آپ دیکھیں گے کہ $n \rightarrow \infty$ حد بندی بالکل ٹھیک توانائیوں تک پہنچتی ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: ہرکی تفالات اموان کو $n = 2, n = 3$ اور $n = 4$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا معازب اصل تفالات موج مساوات 59.2 اور 62.2 کے ساتھ کریں۔ تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل مسائل سے آغاز کریں۔

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

سوال 13.1

ہائیڈروجن کی زمینی حال کی کم سے کم حد بندی گوسی برکی موج تفال

$$\psi(r) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ جہاں معمول زنی سے تقسین A ہوگا جبکہ b تاہل تبدیل مقدار معلوم ہے۔ جواب -11.5eV

سوال 14.7

اگر نورس کی کیت غیر صفر ($m_\gamma \neq 0$) ہوتی تب مخفیا کی جگہ یو کو امختیا

$$V(r) = \frac{-e^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

استعمال ہوتا جہاں ($\mu = m_\gamma c / \hbar$) ہے۔ اپنی مرضی کا برکی تفال موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیا کے ہائیڈروجن جو برکی بندشی توانائی کی قیمت معلوم کریں۔ آپ $\mu a < 1$ لیں اور اپنے جواب کو $(\mu a)^2$ رتبی درستگی تک لکھیں سوال 15.7 مندرجہ کریں آپکو ایک ایسا کو انٹم نظام دیا جاتا ہے جکا ہیملٹنی H_0 صرف دو امتیازی حالات کا حاصل ہو ψ_a جسکی توانائی E_a اور ψ_b جسکی توانائی E_b ہو۔ یہ عموری معمول شدہ اور غیر انتہاتی ہے۔ مزید مندرجہ کریں کہ $E_a < E_b$ ہے۔ اب ہم استراب H' چالو کرتے ہیں۔ جسکے کالبی ارکان درج ذیل ہیں۔

$$\langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle = 0 \quad \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle = h$$

جہاں \hbar کوئی مخصوص مستقل ہے

(الف) متر ہیمیلٹونی کی امتیازی افتدار کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں تلاش کریں۔
 ب) مرتبہ دوم نظریہ استراب استعمال کرتے ہوئے متر نظام کی توانیوں کی اندازی قیمت معلوم کریں۔
 ج) متر نظام کی زمینی حال کی توانائی کی اندازی قیمت درج ذیل روپ کار کی تفال

$$\psi = (\cos \phi) \psi_a + (\sin \phi) \psi_b$$

استعمال کر کہ اصول تغیریت سے حاصل کریں۔ جہاں ϕ متابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

تبصرہ: استراب کا خطی جوڑ لازمًا معمول شدہ دے گا۔

(د) اپنے جوابات کا جز الف، ب، اور ج کے ساتھ معازنہ کریں۔ یہاں اصول تغیریت امتنا زیادہ درست کیوں ہے؟

سوال 16.7 ہم سوال 15.7 میں تیار کی گئی ترکیب مثال کے طور پر یکساں کنطیسی میدان $\vec{B} = B_z \hat{k}$ میں ایک ساکن الیکٹرون پر غور کرتے ہیں۔ جہاں ہیمیلٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$H_0 = \frac{eB_z}{m} S_z$$

امتیازی چکر کار x_a اور x_b ان کی مطابقتی توانائیاں E_a اور E_b مساوات 161.7 میں دی گئی ہیں۔ اب ہم X درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$H' = \frac{eB_x}{m} S_x$$

کے استراب کو چالو کرتے ہیں۔

(الف) استراب H' کے کابی ارکان تلاش کر کہ تصدیق کریں کہ ان کا ساخت مساوات 55.7 تو طرح ہے یہاں H کیا ہوگا؟

(ب) دوم رتبہ نظریہ استراب میں نئی زمینی حال توانائی کو سوال 15.7 (ب) استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

(ج) زمینی حال توانائی کی حد بندی سوال 15.7 (ج) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اصول تغیریت سے حاصل کریں سوال 17.7

اگرچہ ہیلیم کے لیے مساوات شرودنگر کو ٹھیک ٹھیک حل نہیں کیا جاسکتا ہے مگر ہیلیم کے ایسے نظام پائے جاتے ہیں جنکے ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ اس کی ایک سادہ مثال ربڑی پٹی، ہیلیم ہے جس میں کو توں کی بجائے متانون ہک کی درج ذیل قوتیں استعمال ہونگی

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4} m \omega^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2$$

(الف) دکھائیں کہ متغیرات \vec{r}_1, \vec{r}_2 کی بجائے متغیرات

$$\vec{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad \vec{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

استعمال کرنے سے ہیمیلٹنی دو البحدہ البحدہ تین آبادی ہارمونی مرتعشات میں تقسیم ہوگا۔

$$H = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_\mu^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \mu^2 \right] + \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_\nu^2 + \frac{1}{2} (1 - \lambda) m \omega^2 \nu^2 \right]$$

ب) اس نظام کی ٹھیک ٹھیک زمینی حال توانائی کیا ہوگی؟
 ج) ٹھیک ٹھیک حل نہ جانے تو صورت میں ہم ہیملٹنی کی اصل صورت مساوات 59.7 پر حصہ 2.7 کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔
 سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے حساب کیجیے گا۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معائنہ کریں۔
 جواب: $\langle H \rangle = 3\hbar\omega(1 - \lambda/4)$

سوال 18.7

ہم نے سوال 7.7 میں دیکھا کہ سپر کیا گیا برکی تقال موج، مساوات 27.7 جو بلییم کے لیے مفید ثابت ہوا منفی ہائیڈروجن باردار یا میں مقید حال میں موجودگی کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چندراشکر نے درج ذیل کا برکی تقال موج استعمال کیا

$$\psi(r_1, r_2) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) + \psi_2(r_1)\psi_1(r_2)]$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{z_1^3}{\pi a^3}} e^{-z_1 r/a} \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{z_2^3}{\pi a^3}} e^{-z_2 r/a}$$

یعنی انھوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی اجازت دی ایک الیکٹران کو مرکزہ کے متفریب اور دوسرے کو مرکزہ سے دور تصور کیا گیا۔ چونکہ الیکٹران متبادل زہرہ ہے لہذا انھوں نے تقال موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشا کلی بنانا ہوگا چکر حال جہاں موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں پایا جہاں تاخلاف تشا کلی ہے۔ دکھائیں کہ متبادل تبدیل مقدار معلوم Z_1 اور Z_2 کی قیمتوں کو سوچ کہ منتخب کرنے سے $\langle H \rangle$ کی قیمت -13.6eV سے کم حاصل کی جاسکتی ہے

جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{E_1}{x^6 + y^6} (-x^8 + 2x^7 + \frac{1}{2}x^6y^2 - \frac{1}{2}x^5y^2 - \frac{1}{8}x^3y^4 + \frac{11}{8}xy^6 - \frac{1}{2}y^8)$$

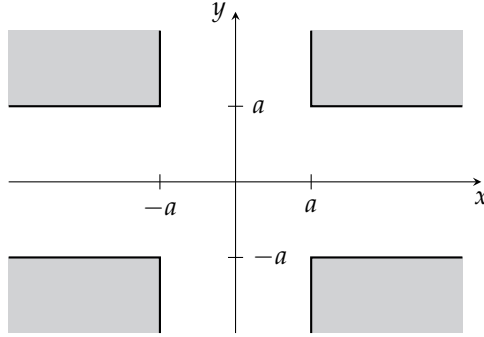
جہاں $x \equiv 2\sqrt{Z_1 Z_2}$ اور $y \equiv 1.039$ ہیں۔ چندر شکر نے $Z_1 = 1.039$ چونکہ یہ ایک سے بڑا ہے لہذا اس کو موثر مرکزہ کی بار تصور نہیں کیا جاسکتا ہے۔ تاہم اس کے باوجود اس کو برکی تقال موج متبادل کیا جاسکتا ہے۔ اور $Z_2 = 0.283$ استعمال کیا

سوال 19.7

جو برکی برکن کو برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ دو ذرات ملاً دو ڈیوٹران کو ایک دوسرے کے اتنا متفریب لانا ہے کہ کولمب قوت دفع پر ان کے پچ کشتی تاہم اثر متفریب مرکزی قوتیں سبقت لے جائیں ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کہ ان کو بلا منصوبہ تادم کے ذریعے انھیں ایک دوسرے کے متفریب زبردستی لاسکتے ہیں۔ دوسری تجویز میون عمل انگلیز کا استعمال ہے جس میں ہم ہائیڈروجن سالمہ باردار پر انان کی جگہ ڈیوٹران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹران کے پچ توازنی مفاصلہ کی پیش گوئی کریں۔ اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی خاطر کیوں الیکٹران سے میون بہتر صابت ہوگا۔

سوال 20.7

کو انٹم نقطہ مندرجہ کریں ایک ذرہ تو شکل ۷.۸ میں دکھائے گئے سلیبی خطہ پر دوباد میں حرکت کرنے کا پابند بنایا جائے سلیبی ہاتھ لامستابی تک پہنچتے ہیں۔ سلیب کے اندر مخفی صفر ہے جو کہ اس کے باہر لامستابی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تشکیل مثبت توانائی مقید حال کا حامی ہے۔



شکل ۸.۷: صلیبی خطہ برائے سوال 20.7

الف) دکھائیں کہ کم سے کم توانائی جو لامتناہی تک پہنچتی ہے درج ذیل ہے

$$E_{\text{threshold}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2};$$

اس سے کم توانائی کا ہر حل لامتناہی کا مقید ہوگا۔

اشارہ: ایک بازو پر ($x \gg a$) مساوات شرودنگر کو الجھیدگی متغیرات کو مدد سے حل کریں۔ اگر قتال موج لامتناہی تک پہنچتی ہے تب اس کا x پر انحصار $e^{ik_x x}$ جہاں $k_x > 0$ ہے کو روپ میں ہوگا۔

ب) اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ E سے کم توانائی زمینی حال کا ہوگا۔ درج ذیل برکی قتال موج استعمال کریں۔

$$\psi(x,y) = A \begin{cases} (1 - |xy|/a^2)e^{-\alpha} & |x| \leq a, |y| \leq a \\ (1 - |x|/a)e^{-\alpha}|y|/a & |x| \leq a, |y| > a \\ (1 - |y|/a)e^{-\alpha}|x|/a & |x| > a, |y| \leq a \\ 0 & \end{cases}$$

اس کو معمول پر لا کر A تعین کریں۔ اور H کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں

جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2} \left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{6 + 11\alpha} \right)$$

اب α کے لحاظ سے کم سے کم قیمت تلاش کر کہ دکھائیں یہ نتیجہ E سے کم ہوگا۔ سلیب کی تشکل سے پورا فائدہ اٹھائیں آپکو صرف خطہ 8/1 پر مکمل لینا ہوگا۔ باقی سات مکمل بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دیہان رہے کہ اگر چہ برکی قتال موج استمراری ہے اس کے تفرکات غیر استمراری ہیں۔ رکاوٹی لکیریں a $x = \pm a$ اور $y = 0$ $x = 0$ $y = \pm a$ پر پائی جاتی ہیں۔ جہاں آپکو مثال 3.7 کی تکنیک بروکار لانی ہوگی۔

باب ۸

ونزل وکرامرز و برلوان تخمین

ونزل، کرامرز، برلوان ترکیب سے غیر متابع وقت شرودنگر مساوات کی یک بُعدی تخمینی حل حاصل کیے جاسکتے ہیں اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفرقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شرودنگر کی رد اسی حصے پر کیا جاسکتا ہے۔ یہ بالخصوص مکسید حال توانائیوں اور محض رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں مفید ثابت ہوتا ہے۔ اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ای کذرہ جس کی توانائی E ہوا کہ ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ $V(x)$ ایک مستقل ہو۔ تفاعل موج $E > V$ کی صورت میں درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \sqrt{2m(E - V)/\hbar} \quad \text{جہاں}$$

وائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لیے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لیے منفی علامت استعمال ہوگا یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے جس کا طول موج $\lambda = 2\pi/k$ اٹل ہے اور اس کا جیٹ A غیر تغیر ہے۔ اب فرض کریں کہ $V(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ λ کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہے تاکہ کئی مکمل طول امواج پر مخفیہ کو مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ψ عملائیں نہ ہوگا تاہم اس کا طول موج اور جیٹ x کے ساتھ ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوگا۔ یہی ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی بنیاد ہے۔ درحقیقت یہ x پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے تیز ارتعاشات جنہیں طول موج اور جیٹ میں آہستہ آہستہ تبدیلیی ترمیم کرتا ہو۔

اسی طرح $E < V$ جہاں V ایک مستقل ہے کی صورت میں ψ قوت نمائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \sqrt{2m(V - E)/\hbar} \quad \text{جہاں}$$

اور اگر $V(x)$ ایک مستقل نہ ہو بلکہ $1/\kappa$ کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو تب حل عملاً قوت نمائی ہوگا البتہ A اور κ اب x کے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتے تفاعلات ہوں گے۔ یہ نظریہ کلاسیکی نقطہ واپسی جہاں

$V \approx E$ ہو کی متریمی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا چونکہ یہاں λ یا $1/\kappa$ لامتناہی تک بڑھتا ہے اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ $V(x)$ آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے اس تخمین میں نقصات واپسی سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

اس ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے جس کی کل توانائی E اور محلی توانائی $V(x)$ ہو۔ منسل حال میں فرض کرتا ہوں کہ $E > V(x)$ ہے لہذا $V(x)$ حقیقی ہوگا اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں کلاسیکی طور پر ذرہ x کے ساتھ پر رہنے کا پابند ہوگا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر ψ ایک مخلوط تقاضا ہوگا جس کو حیطہ $A(x)$ اور حیطہ $\phi(x)$ جہاں دونوں حقیقی ہیں کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

ہم x کے لحاظ سے تفرق کو قوت نمائی میں چھوٹی لکیر سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں

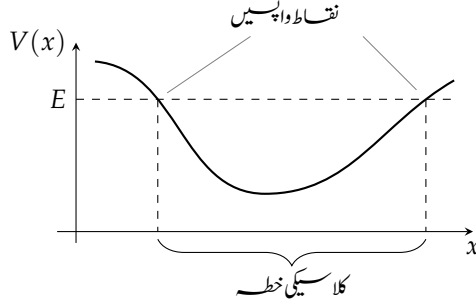
$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

اس کو مساوات 8.1 میں پُر کرتے ہیں

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خطہ میں مقید ہوگا جہاں $E \geq V(x)$ ہو۔

دونوں ہاتھ کی حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات حاصل ہوگی جبکہ دونوں ہاتھ کے خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسرا حقیقی مساوات حاصل ہوگا

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A, \quad \text{یا} \quad A'' = A \left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

اور

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0, \quad \text{یا} \quad (A^2\phi')' = 0$$

مساوات 8.6 اور 8.7 ہر لحاظ سے اصل شرودنگر مساوات کے معادل ہیں ان میں سے دوسرے کو با آسانی حل کیا جاسکتا ہے

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2, \quad \text{یا} \quad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں C ایک حقیقی مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی مساوات 8.6 کو عموماً حل کرنا ممکن نہیں ہوگا یہی ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ حیظ A بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے لحاظ جزو A'' قابل نظر انداز ہوگا۔ بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(\phi')^2$ اور p^2/\hbar^2 دونوں سے A''/A بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم مساوات 8.6 کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}, \quad \text{یا} \quad \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

میں فنل حال اسکو ایک غیر قطعی مکمل لکھتے ہوں کسی بھی مستقل کو C میں زن کیا جاسکتا ہے جس کے تحت یہ مخلوط ہو سکتا ہے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}$$

اور تخمینی عمومی حل ایسا خطی جوڑ ہوگا جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت نقطہ x پر ذرہ پایا جانے کا احتمال اس نقطہ پر ذرے کے کلاسیکی معیار حرکت لحاظ سے رفتاری کا بالکل متعصب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں چونکہ جس مقام پر ذرہ کی رفتار تیز ہو وہاں اسے پانے کا احتمال کم سے کم ہوگا۔ درحقیقت بعض اوقات تفرقی مساوات میں جزو A'' کو نظر انداز کرنے کی بجائے اس نیم کلاسیکی مشاہدے سے آغاز کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اعز کیا جاتا ہے۔ مواخر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے لیکن اوّل الذکر بہتر عقلی و قہ پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کران ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ غیر ہموار ہو (شکل ۸.۲)۔

$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کچھ مخصوص تفعل} & 0 < x < a, \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کنویں کے اندر ہر جگہ $E > V(x)$ مندرج کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

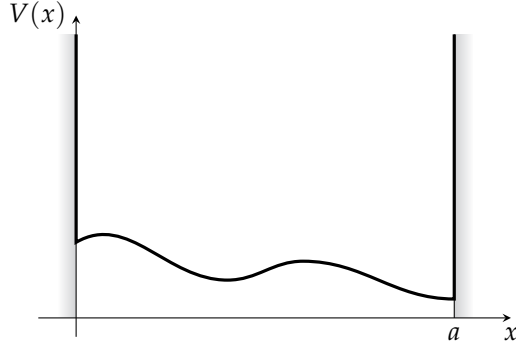
$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۴) \quad \phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'$$



شکل ۸.۲: ایسا لامستثنای چوکور کنواں جس کی تہ موڑے دار ہے۔

جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی کا منتخب کر سکتے ہیں یہاں یہی کیا گیا۔ اب $x = 0$ پر $\psi(x)$ لائٹا صفر ہوگا لحاظ چونکہ $\psi(0) = 0$ ہے $C_2 = 0$ ہوگا۔ ساتھ ہی $x = a$ پر بھی $\psi(x)$ صفر ہوگا لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۵) \quad \phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ماخوذ

(۸.۱۶)

$$\int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar$$

کو انسٹانزنی کی درج بالا شرط تخمینہ احبازاتی توانائیاں تعین کرتا ہے۔

مثلاً اگر کنویں کی تہ ہموار ہو $V(x) = 0$ تب $p(x) = \sqrt{2mE}$ ایک مستقل ہوگا اور مساوات 8.16 کے تحت $pa = n\pi\hbar$ یا

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

جولامستثنای چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرائیکل ہے مساوات 2.27۔ یہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمینہ ہمیں بالکل ٹھیک ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے چونکہ اصل تفاعل موج کا حیطہ مستقل ہے لحاظ A'' کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا۔ □

سوال ۸.۱: ونزل، کرامرز، برلوان تخمینہ استعمال کرتے ہوئے ایسے لامستثنای چوکور کنویں کی احبازاتی توانائیاں E_n تلاش

کریں جس کی آدھی تہہ میں V_0 بلندی کی سیزھی پائی جاتی ہو شکل 6.3

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو V_0 اور $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$ کی صورت میں لکھیں جہاں بغیر سیزھی لامتناہی چوکور کنویں کے n ویں اجزائی توانائی E_n^0 ہے۔ فرض کریں $E_1^0 > V_0$ تاہم یہ فرض نہ کریں کہ $E_n \gg V_0$ ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال 6.1 میں رتبہ اولیٰ طریقہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹی V_0 جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہو گیا بہت بڑی n جہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کارآمد ہوگی کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل، کرامرز، برلوان کلیہ مساوات 8.10 کو \hbar کی طاقتی پھیلاؤ سے اغز کیا جاسکتا ہے۔ آزاد ذرہ کی تقاعسل موج $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$ سے حوصلہ افزائی حاصل کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں $f(x)$ کوئی مخلوط تقاعسل ہے۔ دیہان رہے کہ کسی بھی غیر صفرتقاعسل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے لحاظ ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے۔

(الف) اس کو مساوات 8.1 روپ کی مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(ب) تقاعسل $f(x)$ کو \hbar کی طاقتی تسلسل کی صورت

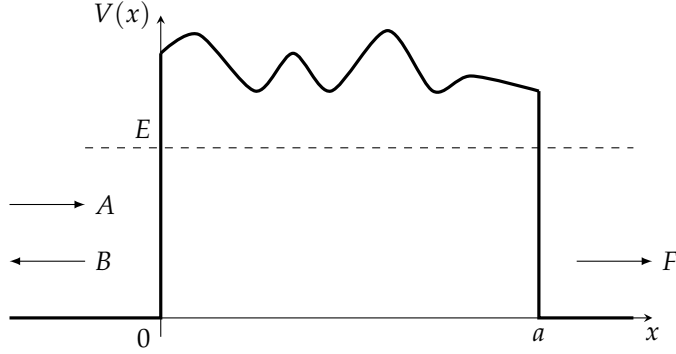
$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر \hbar کی ایک جہتی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

(ج) انہیں $f_0(x)$ اور $f_1(x)$ کے لیے حل کر کے دیکھائیں کہ \hbar کی اولیٰ رتبہ تک آپ مساوات 8.10 دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عددی کی لوگر دم کی تعریف $\ln(-z) = \ln(z) + i\pi$ ہے جہاں n ایک طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں تب دونوں اطراف کو قوت نہ میں منتقل کر کے دیکھیں۔



شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کے مستطیلی رکاوٹ سے بکھراؤ۔

۸.۲ سرنگزنی

اب تک میں $E > V$ فرض کرتا رہا ہوں لحاظ $V(x)$ حقیقی تھ۔ میں غیر کلاسیکی خط $E < V$ کے لیے بھی بلکل اے طرح مطابقتی نتیجہ لکھ سکتا ہوں جو عین مساوات 8.10 ہوگا تاہم اب $p(x)$ تخیلی ہوگا

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

ایک مثال کے طور پر ایک مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموارہ (شکل ۸.۳) سے بکھراؤ کا مسئلہ پر غور کریں۔ درکاوٹ کے بائیں جانب $x < 0$

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

جہاں A آمدی حیطہ اور B منعکس حیطہ ہے جبکہ $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے جسے 2.5 دیکھیں۔ درکاوٹ کے دائیں جانب $x > a$

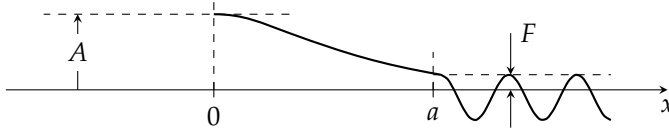
$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx};$$

F ترسیلی حیطہ جبکہ ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}.$$

سرنگزنی خط $0 \leq x \leq a$ میں وزنل، کراسرز، برلوان تخمین درج ذیل دیگی

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}.$$



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بھراؤ کے تفاعل موج کی کیفی ساخت۔

اگر رکاوٹ بہت بلند یا اور بہت چوڑا ہو یعنی جب سرنگزنی کا احتمال بہت کم ہو قوت نمائی بڑھتے جسز و کا عددی سر C لاطماً آچھوٹا ہوگا در حقیقت لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا اور تفاعل موج کچھ شکل ۸.۴ کے نقش پر ہوگی۔ غییر کا سکی خطہ پر قوت نمائی میں کل کی

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}.$$

آمدی اور ترسیلی امواج کے انسانی حیطے تعین کرتا ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا

(۸.۲۲)

$$T \cong e^{-2\gamma}, \text{ جہاں } \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx.$$

مثال ۸.۲: ایلفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ سن ۱۹۲۸ میں جارج گامو نے مساوات ۸.۲۲ استعمال کرتے ہوئے ایلفا تحلیل کی پہلی کامیاب وجہ پیش کی ایلفا تحلیل سے مراد چند مخصوص تابکار مرکزہ سے ایلفا ذرہ جو دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے۔ چونکہ ایلفا ذرہ مثبت بار $2e$ کا حامل ہے لہٰذا جیسے ہی یہ مرکزہ سے اتنا دور ہو جاتا ہے کہ یہ مرکزی بندشی قوت سے منہ راکر کے مرکزہ کے باقی حصہ کا بار Ze اس کو برقی قوت دفع سے دور جانے پر مجبور کرے گا۔ تاہم اسکو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا جو پورے تنسیم کی صورت میں حنارجی ایلفا ذرہ کی توانائی سے دو گنے سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر شکل ۸.۵ کے مخفیہ سے ظاہر کیا جس نے مرکزہ کے رداس r_1 و صت تک مرکزی قوت کشش کو مستناہی چوکور کنواں سے ظاہر کیا گیا جس کو کولومب قوت دفع کی دم کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ گامو نے کوانٹم سرنگزنی کو ایلفا ذرہ کی منہ راکر کی وجہ کرار دیا یوں پہلی بار کوانٹم میکانیات کا اطلاق مرکزوی طبیعیات پر کیا گیا۔

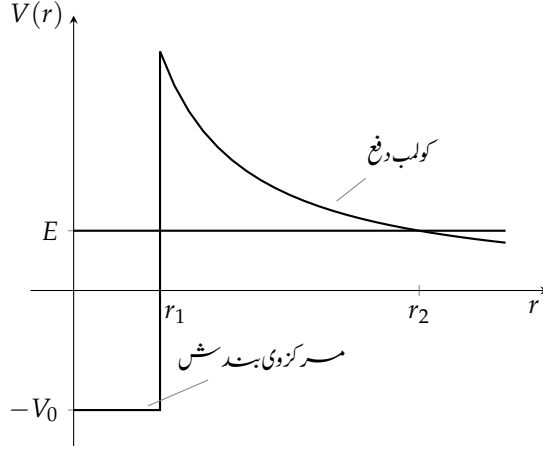
اگر حنارجی ایلفا ذرے کی توانائی E ہو تب بیرونی واپسی نقطہ r_2 درج ذیل تعین کرے گا

(۸.۲۳)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E.$$

ظاہر ہے مساوات ۸.۲۲ میں قوت نمائی γ درج ذیل ہوگا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr.$$



شکل ۸.۵: تابکار مسرکزوی میں الفا ذرہ کی مخفی توانائی کا گامونہ۔

اس عمل میں $r \equiv r_2 \sin^2 u$ پڑھ کرے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے

$$(۸.۲۳) \quad \gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right].$$

عام طور پر $r_1 \ll r_2$ ہوگا لحاظ ہم چھوٹے زاویوں کے تخمین $\sin \epsilon \cong \epsilon$ استعمال کر کے نتیجہ کی سادہ روپ حاصل کرتے ہیں

$$(۸.۲۵) \quad \gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}.$$

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

ایک عمومی مسرکزہ کی جامت تقریباً ایک 10^{-15} fm ہوتی ہے۔

اگر ہم مرکزہ کے اندر ایٹماذرہ کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار v ہے تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً $2r_1/v$ ہوگا لحاظ تصادم کا تعدد $v/2r_1$ ہوگا۔ ہر تصادم پر فرساق ہونے کا احتمال $e^{-2\gamma}$ ہے لحاظ اکائی وقت میں احسراج کا احتمال $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$ ہوگا اور یوں ولدہ مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم v نہیں جانتے ہیں لیکن اس سے زیادہ فرساق نہیں پڑتا ہے چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوت نہائی جزبہ ضربی پچیس رتبی مقدار تک تبدیل ہوتا ہے جس کے سامنے v کی تبدیلی متاثر نظر انداز ہے۔ بالخصوص عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو $1/\sqrt{E}$ کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط شکل 8.6 حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 8.25 اور 8.28 کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک مستحالی چوکر کاوٹ جس کی انچپائی $V_0 > E$ اور چوڑائی $2a$ ہو سے ایک ایٹماذرہ جس کی توانائی E ہو کی تخمینہ تریسیبی احتمال مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ بالکل ٹھیک نتیجہ سوال 2.33 کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۴: مساوات 8.25 اور 8.28 استعمال کرتے ہوئے U^{238} اور Po^{212} کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً متقل ہوتی ہے لحاظ $(r_1)^3$ اور A پروٹان اور نیوٹرانوں کی تعدادوں کا مجموعہ تقریباً برابر ہوئے۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}.$$

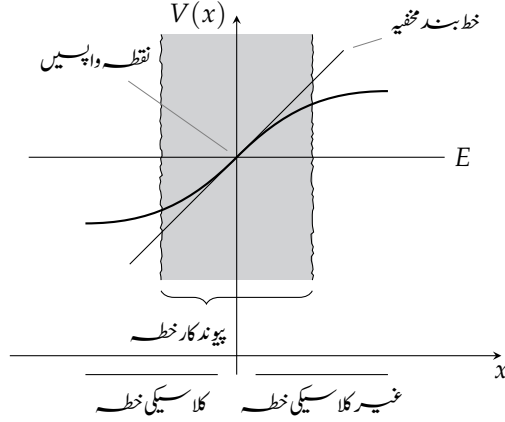
احسراج شدہ ایٹماذرہ کی توانائی کلیہ آئنسٹائن $E = mc^2$ سے اغنزیجاسکتا ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2.$$

جہاں m_p ولدہ مرکزہ کی کمیت m_d بیٹی مرکزہ کی کمیت اور m_α ایٹماذرہ یعنی He^4 مرکزہ کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مرکزہ کیا ہوگا یاد رکھیں کہ ایٹماذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لیکر منرار ہوتا ہے لحاظ Z سے دو منفی کریں اور A سے چار منفی کریں گے۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی انصر تعین کریں۔ سمتی رفتار v کی اندازا قیمت $E = (1/2)m_\alpha v^2$ سے حاصل کریں یہ مرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتا ہے لحاظ v کی قیمت اصل سے زیادہ دیگاتا ہم اس مرحلہ پر ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی انصر کی تجربہ سے حاصل عرصہ حیات بالترتیب 6×10^9 سال اور $0.5 \mu s$ ہے۔

۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے جس و منکر میں میں فرساق کرتا رہا کہ مخفی کنواں یار کاوٹ کی دیواریں انتصابی تھیں جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ در حقیقت ہمارے بنیادی نتائج مساوات 8.16 اور 8.22



شکل ۸.۶: دائیں ہاتھ نقطہ واپس کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

اس صورت بھی کافی حد تک درست ہونگے جب کناروں کی ڈھلان اتنی زیادہ نہ ہو یقیناً نظریہ گاموس میں ایسی ہی صورت پر انکا اطلاق کیا گیا۔ بہر حال ہم نقطہ واپس $E = V$ جہاں کلاسیکی اور غیر کلاسیکی خط ایک دوسرے کے ساتھ جڑتے ہیں اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نام قابل استعمال ہوتی ہے پر تعادل موج کا تریبی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مکید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) کو دیکھتا ہوں، آپ مسئلہ بجھراؤ (سوال 8.10) حل کر سکتے ہیں۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم محور کو یوں رکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپس $x = 0$ پر واقع ہو (شکل ۸.۶)۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \text{ اگر}, \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

یہ فرض کرتے ہوئے تمام $x > 0$ سے $V(x)$ بڑا ہوگا ہم اس خطے میں مثبت قوت نمائی کو خارج کر سکتے ہیں چونکہ $x \rightarrow \infty$ کرنے سے یہ بے وقت ہو بڑھتا ہے۔ ہمارا کام ان دو حوالوں کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے تاہم یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا پیش آتا ہے۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نے نقطہ واپس جہاں $p(x) \rightarrow 0$ ہوگا ψ کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تعادل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا ہے اور جیسا کہ ہمارا گمان تھا ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نقطہ واپس کی پڑوس میں نام قابل استعمال ہوتا ہے لیکن احبازتی توانائیوں کو نکالتے واپس پر سرحدی شرائط تعین کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا پیوند کار تعادل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپس کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تفاعل موج ψ_p صرف مدہ کی پڑوس میں چاہیئے لحاظ ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمین کر کے اس خطی V کے لیے شرودنگر مساوات حل کرتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p,$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p,$$

جہاں درج ذیل ہے

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}.$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان α کو غیر تابع متغیر میں زن کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x,$$

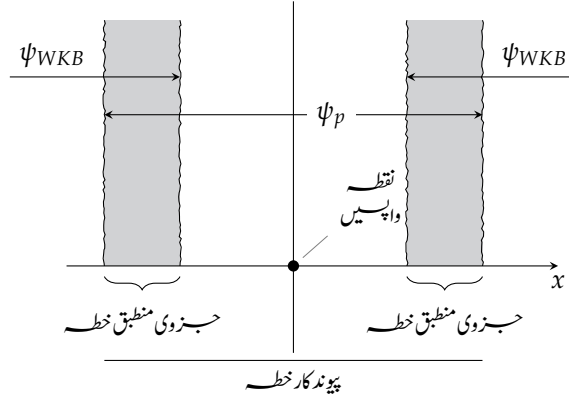
لحظہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p.$$

یہ مساوات ایری ہے جس کے حل تفاعلات ایر کہلاتے ہیں چونکہ مساوات ایری دو رتی تفرقی مساوات ہیں لحاظ دو خطی غیر تابع ایری تفاعلات $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ پائے جاتے ہیں۔ ان کا تعلق

جدول ۸.۱: ایری تفاعلات کے چند خواص

$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$ ایری تفاعلات کے خطی مجموعہ $Ai(z)$ اور $Bi(z)$	تفریقی مساوات: حل:
$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$	تکلی روپ:
$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{s^3}{3} + sz} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$	



شکل ۸.۷: پیوند کار خط اور دو منطق خطے۔

رتبہ $1/3$ کے میل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیئے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ کا خطی جوڑ

$$\psi_p(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x). \quad (۸.۳۷)$$

ہوگا۔ جہاں a اور b مناسب مستقامت ہیں۔

اب ψ_p مبدہ کی پزوس میں تخمینی تفاعل موج ہے ہم نے مبدہ کے دونوں اطراف تقریبی مشترکہ خط میں ψ_p کو وول، کراسرز، برلوان تخمین حلوں کے ساتھ ہم پلو بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ دونوں اطراف کے مشترکہ خطے نقطہ واپسی کے اتنی تقریب ہیں کہ خطی محفہ ψ_p کافی حد تک درست ہوگا لحاظ ψ_p اصل تفاعل موج کا بہترین تخمین ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی فاصلہ پر ہیں کہ وول، کراسرز، برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کا راستہ ہوگا لحاظ مساوات 8.34 کی لائیت میں درج ذیل ہوگا

$$p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}. \quad (۸.۳۸)$$

بالخصوص مشترکہ خطے دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar\alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar(\alpha x)^{3/2},$$

لحظہ وول، کراسرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$\psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \quad (۸.۳۹)$$

بڑی z کی صورت میں ایری تفاعلات کی متنازلی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خط دو میں پیوند کار تفاعل موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}.$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \quad \text{اور} \quad b = 0.$$

ہم یہی کچھ مشترکہ خط ایک کے لیے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 ہمیں $p(x)$ دیکھتا ہم اس بار x منفی ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3} \hbar (-\alpha x)^{3/2}$$

اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل عمل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہوگا

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}}(-x)^{1/4}} \left[B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right].$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی z کے لیے ایری تفاعل کی متنازب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں $b = 0$ لیا گیا ہو درج ذیل ہوگی

$$(۸.۴۴) \quad \begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

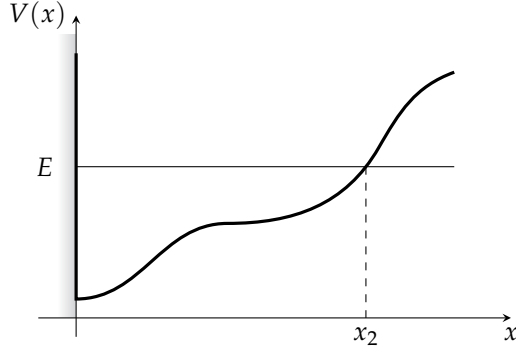
مشترکہ خط ایک میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنہ سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

جس میں a کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۸.۴۵) \quad B = -ie^{i\pi/4} D, \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4} D.$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل عمل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیداوار کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش



شکل ۸.۸: ایک انتہائی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولی متقل D کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبدہ سے اختیاری نقطہ x_2 منتقل کرتے ہوئے وزن، کراسرز، برلوان قف عمل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۸.۴۶) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2; \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2. \end{cases}$$

مثال ۸.۳: ایک انتہائی دیوار والا مخفیہ کنواں۔ فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی $x = 0$ پر انتہائی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں $\psi(0) = 0$ ہوگا لہذا مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یاد رہے ذیل ہوگا۔

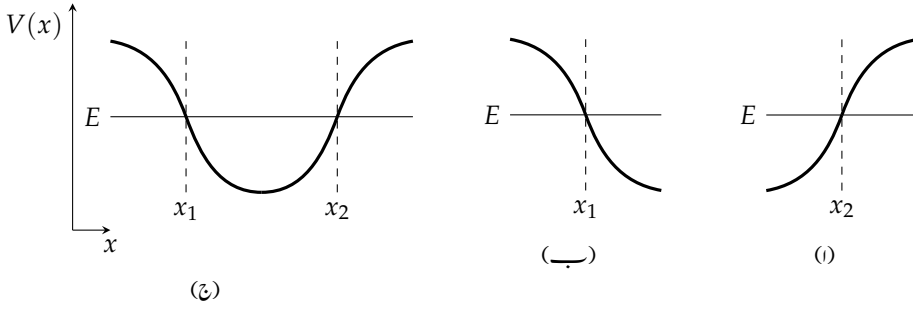
$$(۸.۴۷) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \hbar$$

مثلاً نصف ہارمونی سر تقش

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & x > 0; \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}.$$



شکل ۸.۹: بالائی جانب ڈھلوان اور نیچے جانب ڈھلوان نقطہ واپسی۔

ہوگا۔ جہاں درج ذیل نوٹہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

لحاظ

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹائی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar\omega.$$

اس مخصوص صورت میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درحقیقت ٹھیک ٹھیک اجبازتی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □

مثال ۸.۴: بغیر انتضائی دیواروں کا مخفیہ کنواں۔ اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-ا) ہوتی ہے مساوات 8.46 ونزل، کرامرز، برلوان تقاضات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی (شکل ۸.۹-ب) پر انہی وجوہات کو بروہ کار لاتے ہوئے درج ذیل ہوگا سوال 8.9

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx' \right], & \text{اگر } x < x_1; \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & \text{اگر } x > x_1. \end{cases}$$

بالخصوص مخفیہ کنویں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ $(x_1 < x < x_2)$ میں تعادل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}, \quad \text{جہاں}$$

لکھا جاسکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50 ظاہر ہے کہ $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(۸.۵۱) \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ جہاں}}$$

یہ کوانٹائزیشن شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنویں کی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے دیہان رہے دو انتضائی دیواروں کے لیے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتضائی دیوار کے لیے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اس عدد $(0, 1/4, 1/2, \dots)$ کا منفرق ہے جو n سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ وول، کراسرز، برلوان تخمین بڑی n کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لحاظ یہ منفرق صرف دیکھاوے کی حد تک ہے بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات کیے بغیر ایک سادہ عمل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینی اجازتی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔
□

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل پکے کے ساتھ اچھلتا ہوا کمیت m کی گیند کے کلاسیکی مسئلے کا مشل کو انٹیم میکانی مسئلے پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی x تعادل لکھیں؟ منفی x کی صورت میں مخفیہ لامستثنائی ہوگا چونکہ گیند وہاں کبھی نہیں جاسکتا۔

(ب) اس مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ابری تعادل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی z کے لیے $Bi(z)$ بے فتابو بڑھتا ہے لحاظ اس کو رد کرنا ہوگا۔ تعادل $\psi(x)$ کو معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ اور $m = 0.100 \text{ kg}$ لیکر حاصل کریں۔

(د) اس سبکی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی eV میں کتنی ہوگی؟ اوسطاً الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ ویریل سے $\langle x \rangle$ تعین کریں۔

سوال ۸.۶: وول، کراسرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی تھپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

(الف) احبازتی توانائیاں E_n کو m, g اور \hbar کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5 (ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بلکل ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کو انٹیم عدد n کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی احبازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جسکی زاویائی تعدد ω ہو کی n ویں ساکن حال میں کیمت m کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی x_2 تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی (d) تک پہنچنا ہوگا کہ خطی مخفیہ مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی x_2 ہو حاصل 1% تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2 + d) - V_{lin}(x_2 + d)}{V(x_2)} = 0.01,$$

تب d کیا ہوگا؟

(ج) جب تک $z \geq 5$ ہو $Ai(z)$ کا مقارب روپ 1% تک درست ہوگا۔ جب z (ب) میں حاصل کردہ d کے لیے n کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تاکہ $5 \leq \alpha d$ ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی n کے لیے ایسا مستر کہ خطہ موجود ہوگا جس میں خطی مخفیہ 1% تک کارآمد ہوگا اور بڑی z روپ کا اپری تف عمل بھی 1% تک درست ہوگا۔

سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ واپسی کے لیے پیوندی کلیہ احضار کر کے مساوات 8.50 ضرر کی تصدیق کریں۔

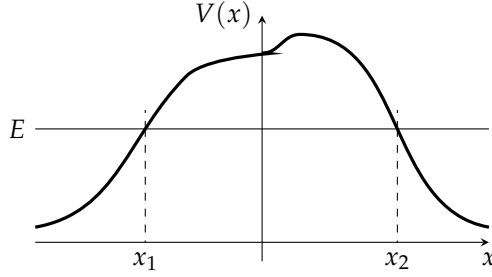
سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۰) سے بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی ونزل، کرامرز، برلوان تف عمل موج لکھ کر آغاز کریں۔

$$(۸.۵۲) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[Ae^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} + Be^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} \right], & (x < x_1); \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[Ce^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + De^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2); \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[Fe^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2). \end{cases}$$

مستقل C کو ضرر تصور نہ کریں۔ سرنگزنی احتمال $T = |F|^2 / |A|^2$ کا حساب کر کے دیکھیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہوگا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ

$$V(x) = \alpha |x|^v,$$



شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

جہاں v ایک مثبت عدد ہے کی احبازتی توانائیوں کو وول، کرامرز، برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو $v = 2$ جانچیں۔ جواب:

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[(n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: وول، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کر کے سوال ۲.51 کی مخفیہ کے لیے مفید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجے کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $-\left[\frac{9}{8} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کردی تشاکلی مخفیہ کے لیے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر وول، کرامرز، برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو $l = 0$ کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar,$$

جہاں r_0 نقطہ واپسی ہے یعنی ہم $r = 0$ کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگرڈمی مخفیہ

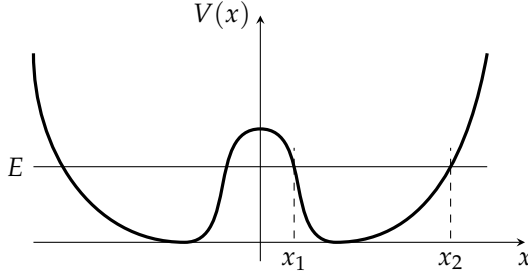
$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

کی احبازتی توانائیوں کی انداز قیمت تلاش کریں جہاں V_0 اور a مستقلات ہیں۔ صرف $l = 0$ کی صورت پر غور کریں دیکھائیں کہ سطحوں کے بیچوں سطحوں کا انحصار کیت پر نہیں ہوگا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left(\frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right).$$

سوال ۸.۱۴: وول، کرامرز، برلوان تخمین کی درج ذیل روپ

$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$



شکل ۸.۱۱: تشاکی دوہرا کنواں؛ سوال 15.8۔

استعمال کر کے ہائڈروجن کی مکید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ معصر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز حبز و شامل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2.$$

آپ دیکھیں گے کہ $l \gg n$ اور $n \gg 1/2$ کی صورت میں آپ کو بوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}.$$

سوال ۸.۱۵: تشاکی دوہرا کنویں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم $E < V(0)$ والی مکید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خط (i) $x > x_2$ ، (ii) $x_1 < x < x_2$ اور (iii) $0 < x < x_1$ کے لیے ونزل، کرامرز، برلوان تقاضات موج لکھیں۔ نقطہ x_1 اور x_2 پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں x_2 کے لیے ایسا کیا گیا ہے آپ کو x_1 کے لیے کرنا ہوگا درج ذیل دیکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

(ب) چونکہ $V(x)$ تشاکی ہے لحاظ ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تفاعلات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول الذکر صورت میں $\psi'(0) = 0$ ہوگا جبکہ ماحضر الذکر صورت میں $\psi(0) = 0$ ہوگا۔ دیکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹائی شرط حاصل ہوتی ہے

$$\tan \theta = \pm 2e^{\phi}. \quad (۸.۵۹)$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'. \quad (۸.۶۰)$$

ساوات 8.59 تمثیلی احبازی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ x_1 اور x_2 میں E کی قیمت داخل ہوتی ہے لحاظ θ اور ϕ دونوں E کے تفاعلات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بسندیا/ اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں ϕ بڑا ہوگا لحاظ e^{ϕ} انتہائی بڑا ہوگا۔ ایسی صورت میں ساوات 8.59 کے تحت θ کی قیمتیں π کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ جہاں $|\epsilon| \ll 1$ ہے لکھ کر دیکھائیں کہ کوانٹائی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}. \quad (۸.۶۱)$$

(د) مندرجہ کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکانی ہے

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & x < 0, \text{ اگر} \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & x > 0, \text{ اگر} \end{cases} \quad (۸.۶۲)$$

اس مخفیہ کوترسیم کر کے θ ساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دیکھائیں

$$E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \mp \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\phi}. \quad (۸.۶۳)$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نامقابل گزر ہو $\phi \rightarrow \infty$ تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$ دوہری انخطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنویں میں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ مستثنیٰ رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنوں کے بیچ رابطہ ممکن ہوگا لحاظ انخطاط حتم ہوگا۔ جفت حالات (ψ_n^+) کی توانائی معمولی کم اور طاق تفاعلات (ψ_n^-) کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

(د) مندرجہ کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیاں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دیکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنویں سے دوسرے اور دوسرے سے واپس پہلا کنویں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$\tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}. \quad (۸.۶۴)$$

(ھ) متغیر ϕ کی قیمت جب $V(0) \gg E$ میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لیے تلاش کریں اور دیکھائیں جب $V(0) \gg E$ ہو تب $\phi \sim m\omega a^2 / \hbar$ ہوگا۔

سوال ۸.۱۶: سٹارک اثر میں سرنگونی۔ بیرونی برقی میدان چلا کر کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جو ہر سے سرنگونی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار بن سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربہ میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ ترین یہ بعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازہ قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری متناہی چوکور کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنویں کی تہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہوگی یہاں فرض کریں $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$ ہے۔ اشارہ: یہ $2a$ چوڑائی کی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب $H' = -\alpha x$ متعارف کریں بیرونی برقی میدان $E = -E_{ext}$ میں $\alpha = eE_{ext}$ ہوگا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے ($\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2$)۔ کل مخفیہ کا حث کہ تسمیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت x رخ سرنگونی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگونی جز ضرب γ مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو منہا ہونے کے لیے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب: $\gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}, \tau = (8ma^2 / \pi\hbar) e^{2\gamma}$ ۔

(د) معقول اعداد $V_0 = 20 \text{ eV}$ بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت $a = 10^{-10} \text{ m}$ عمومی جوہر کا رداس $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$ بیرونی تجربہ گاہ میں مضبوط میدان e اور m الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ τ کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کو انجم سرنگونی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود بخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت m رداس R اور تہ h کا تکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی مقام $(h/2)$ سے بلندی کو x سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی mgx ہوگی اور بوتل اس صورت گرے گی جب x کی قیمت فاصل قیمت $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$ تک پہنچے۔ سرنگونی احتمال مساوات 8.22 کو $E = 0$ کے لیے حاصل کریں۔ حراری توانائی $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$ لیتے ہوئے رفتار کی اندازہ قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پڑ کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹم سکونیات کہا جاسکتا ہے جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت ہے $V(r, t) = V(r)$ ۔ ایسی صورت میں تابع وقت شرودنگر مساوات

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے

$$\psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

جہاں $\psi(r)$ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$H\psi = E\psi$$

کو متعین کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو وقت نمائی حیز ضربی $e^{iEt/\hbar}$ ظاہر کرتا ہے جو کسی بھی طبعی مقدار کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے $|\psi|^2$ لحاظ تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑ تیار کر کے ہم ایسے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں جن کی تابعیت وقت زیادہ دلچسپ ہوتا ہے اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کے انتقال جنہیں بعض اوقات کوانٹم چھلانگ کہتے ہیں کی خاطر ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ متعارف کریں کوانٹم حرکیات۔ کوانٹم حرکیات میں ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا حل بالکل ٹھیک ٹھیک معلوم کیا جاسکتا ہے ہاں اگر ہیملٹنی میں غیر تابع وقت حصہ لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو تب ہم اسے اضطراب تصور کر سکتے ہیں۔ اس باب میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیسرا کرتا ہے اور اس کا اطلاق جوہر سے اشعاعی اخراج اور انحراب پر کرتا ہے جو اس کی اہم ترین استعمال ہے۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کنے کی غرض سے فرض کریں غیر مضطرب نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی H^0 کے امتیازی حالات ہوں گے

$$(9.1) \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b$$

اور معیاری عمودی ہوں گے

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ بالخصوص درج ذیل

$$(9.3) \quad \psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات ψ_a اور ψ_b موزا وہ فضائی تفاعلات یا چپکے کار یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے فرض ہے لحاظ میں $\psi(t)$ لکھتا ہوں جس سے میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ہر جز اپنی خصوصی قوت نمائی جز ضرر کے ساتھ ارتقا پائے گا

$$(9.4) \quad \psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

ہم کہتے ہیں کہ حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے جس سے ہمارا اصل مطلب یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہوگا۔ تفاعل ψ کی معمولی کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

اب فرض کریں ہم تابع وقت اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ مرتب کرتے ہیں لحاظ تفاعل موج $\psi(t)$ کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے

$$(9.6) \quad \psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

میں وقت نمائی جز ضربیوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں جیسا کہ بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کے صورت میں بھی پایا جاتا ہو ہمیں نظر آتا رہے ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b تعین کریں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ذرہ آغاز میں حال ψ_a ($c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$ میں پایا جاتا ہو تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں منتقل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالب کرتے ہیں کہ $\psi(t)$ تابع وقت شرودنگر مساوات کو متبع کرے

$$(۹.۷) \quad H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \text{جس } H = H^0 + H'(t)$$

مساوات 9.6 اور 9.7 سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} & c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ &= i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_bt/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات 9.1 کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہتھ کے آکری دو اجزاء کے ساتھ کٹ جاتے ہیں لحاظ درج ذیل رہ جائے گا

$$(۹.۸) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right]$$

تفاعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لیکر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت مساوات 9.2 بروکار لاتے ہوئے \dot{c}_a کو الگ کرتے ہیں

$$c_a\langle\psi_a | H' | \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a | H' | \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں

$$(۹.۹) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i | H' | \psi_j\rangle$$

دیمان رہے کے H' ہر میٹری ہے لحاظ $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہوگا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دیکر درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۹.۱۰) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے \dot{c}_b الگ کیا جاسکتا ہے

$$c_a\langle\psi_b | H' | \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_b | H' | \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_b e^{-iE_bt/\hbar}$$

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۹.۱۱) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar} \right]$$

مسوات 9.10 اور 9.11 مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ تعین کرتے ہیں یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی تابع وقت شرڈنگر مساوات کے مکمل معدل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری ارکان متالب صفر ہوں گے عمومی صورت کے لیے سوال 9.4 دیکھیں

$$(9.12) \quad H'_{aa} = H'_{bb} = 0$$

اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ اختیار کرتی ہے

$$(9.13) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(9.14) \quad \omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

میں $E_b \geq E_a$ لوں گے لفظ $\omega_0 \geq 0$ ہوگا۔

سوال 9.1: ایک ہائڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان $E = E(t) \mathbf{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $n = 1$ اور چارگن انخطاطی پہلا ہیجان حالات $n = 2$ کے ہیج اضطراب $H' = eEz$ کے چاروں متالبی ارکان H'_{ij} حساب لگائیں۔ یہ بھی دیکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے $H'_{ii} = 0$ ہوگا۔ تبصرہ محور z کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروکار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لحاظ زیادہ بلند ہیجان حالات میں منتقلی کو نظر انداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تفصیل کے طور پر کام کرے گا۔

سوال 9.2: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام حالص ψ_a اور کسی ψ_b کے ہیج ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہوگا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا نازک ہے یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانہ کے لیے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں فرض کیجیے گا کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر منقطع کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی مندرق نہیں پڑے گا تاہم نتائج کی معقول تشریح ممکن ہوگی۔

سوال 9.3: فرض کریں اضطراب کی شکل و صورت وقت کے لحاظ سے δ تفاعل ہے

$$H' = U\delta(t)$$

جہاں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ ہے اور $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$ لیں۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں تب $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کی ہوں گے اور کیا $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہوگا۔ انتقال ہونے کا احتمال $t \rightarrow \infty$ کے لیے $P_{a \rightarrow b}$ کیا ہوگا۔ اشارہ: آپ ڈیلیٹا تقابلی عمل کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha| / \hbar)$$

۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا تاہم کم H' کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یکے بعد دیگرے تخمینے سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عند اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں رہے گا۔
رتبہ صفر:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

میں تخمینے کے رتبہ کو زیر، بالا میں کو سین میں لکھتے ہوں۔

ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پر کر کے رتبہ اول تخمینے حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ اول:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1; \quad \frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پر کر کے رتبہ دوم تخمینے حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ دوم:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \Rightarrow c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا $(c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t))$ ۔ دیہان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبہ جز بھی پایا جاتا ہے دور تہی تصحیح صرف تکلی حصہ ہوگا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے n ویں رتبی تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $n + 1$ ویں رتبہ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں H' کا کوئی حبز ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اول تصحیح میں H' کا ایک حبز ضربی پایا جاتا ہے دور تبی تصحیح میں H' کے دو حبز ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں حائل $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے بلکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہوگا۔ ہاں H' کی طاقت 1 تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2$ ایک کے برابر ہے اور رتبہ اول تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جاسکتی ہے زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیے بھی ایسا ہوگا۔

سوال ۹.۴: مندرجہ کریں آپ $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ہو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دیکھائیں کہ H' کی طاقت ایک تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$ ۔
(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جاسکتا ہے درج ذیل لیکر

$$(9.19) \quad d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(9.20) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

جہاں درج ذیل ہے

$$(9.21) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

یوں H' کے ساتھ اضافی حبز ضرب $e^{i\phi}$ منسلک ہونے کے علاوہ d_a اور d_b کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حبز (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ اپنے جواب کا حبز (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں مندرجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0) = a, c_b(0) = b$ کے لیے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بلکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائنس مضطرب

فرض کریں مضطرب میں تابعیت وقت سائنس ہو

$$(9.22) \quad H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t)$$

تب درج ذیل ہوگا

$$(9.23) \quad H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t)$$

جہاں V_{ab} درج ذیل ہے

$$(9.24) \quad V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری و تالی ارکان صفر ہوتے ہیں لحاظ پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اول تک متغیرات تلاش کریں گے لحاظ زیر بالا میں تذبذب کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اول تک درج ذیل ہوگا مساوات 9.17

$$(9.25) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{i V_{ba}}{2\hbar} \int_0^t \left[e^{i(\omega_0 + \omega)t'} + e^{i(\omega_0 - \omega)t'} \right] dt' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right] \end{aligned}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ انتہائی تعدد ω_0 کے بہت متضرب جبری تعدد ω پر توجہ رکھنے سے چوکور قوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

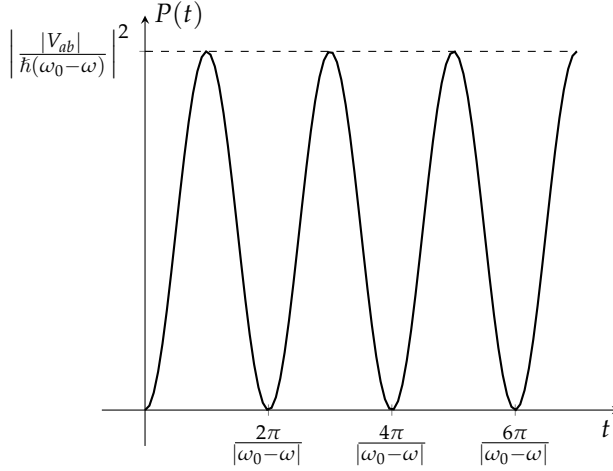
$$(9.26) \quad \omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر امتیاز کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہوگا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.27) \quad \begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}}{\omega_0 - \omega} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t/2} \right] \\ &= -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} \end{aligned}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کرے کالم t پر حال ψ_b میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا جس کو انتہائی احتمال کہتے ہیں

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



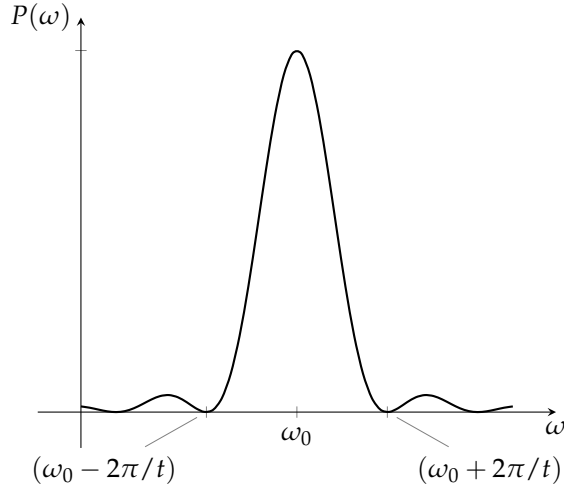
شکل ۹.۱: سائنس اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویل احتمال (مساوات 28.9)۔

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائنس ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2 / \hbar^2 (\omega_0 - \omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جولا زمی طور پر ایک (1) سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہوگا۔ واپس صفر کو گرتا ہے۔ لحاظ $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$ جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہیں پر ذرہ لازماً نحلی حال میں ہوگا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصہ کے لیے چالو نہ کریں۔ بہتر ہوگا کہ آپ وقت $\pi / |\omega_0 - \omega|$ پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی امید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقال نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں ہے بلکہ بالکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہوگا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقال کی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہوگا جب جبری تعدد و فرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a \rightarrow b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی $(|V_{ab}t| / 2\hbar)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi/t$ ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکرا ہو جاتا ہے۔ لحاظ ہم بہت کم t کے لیے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بالکل ٹھیک ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے ایک تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t} / 2$ سے جبکہ دوسرا $e^{-i\omega t} / 2$ سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$(9.29) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالقابل متحرک تعدد (مساوات 28.9)۔

ہیملٹنی وتاب کو ہر میثی بنانے کی خاطر مناخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم $c_a(t)$ کے لیے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو کو چنتے ہیں۔ اسکو گھومتی موج تخمین کہتے ہیں جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیئے بغیر بلکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ کے لیے گھومتی موج تخمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رابی تعدد

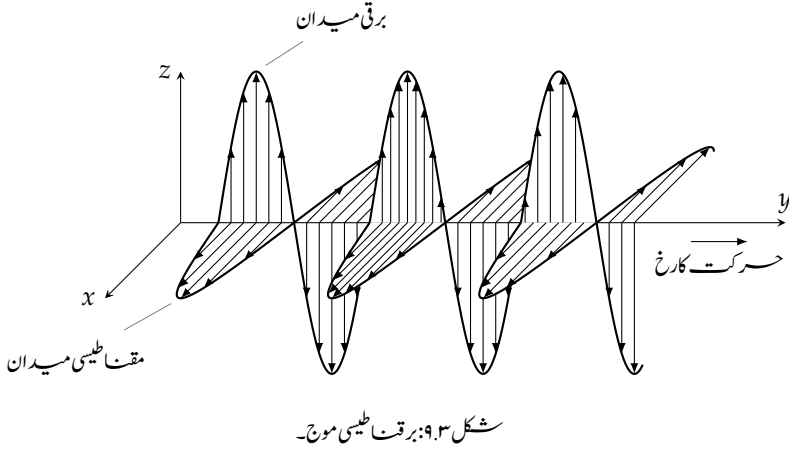
$$(9.30) \quad \omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}| / \hbar)^2}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتہائی احتمال $P_{a \rightarrow b}(t)$ تعین کر کے دیکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہوگا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں $P_{a \rightarrow b}(t)$ عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہوگا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور V پر یہ کیا پابندی عاید کرتی ہے۔

(د) نظام پہلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟



۹.۲ اشعاعی احسراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خنرد امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعداد کا فرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم متاثر ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی حبز کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طول موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فضا کی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائنسہ ارتعاشی برقی میدان

$$(۹.۳۱) \quad E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

کے زیر اثر ہوگا۔ فصل حال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور z رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔

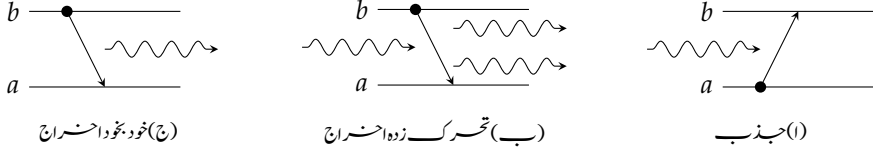
$$(۹.۳۲) \quad H' = -qE_0 z \cos(\omega t)$$

ظاہر ہے درج ذیل ہوگا

$$(۹.۳۳) \quad H'_{ba} = -pE_0 \cos(\omega t). \text{ where } p \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle$$

عمومی طور پر ψ متغیر z کا جفت یا طاق تناسب ہوگا یہ ہماری اس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ H' کے ویزی متاثری ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہوگا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۳۴) \quad V_{ba} = -pE_0$$



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحریق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیری حال ϕ_a میں پایا جاتا ہو پر تعقیب شدہ ایک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حال ϕ_b میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left(\frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جو $\hbar\omega_0 = E_b - E_a$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک نوریہ جذب کیا (شکل ۹.۴-ا)۔ جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ نوریہ درحقیقت کو انٹرمیڈیٹ حرکیات برقناطیسی میدان کی کو انٹرمیڈیٹ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حال $c_a(0) = 0, c_b(0) = 1$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بالکل وہی ہوں گے البتہ اس بار $P_{b \rightarrow a} = |C_a(t)|^2$ حاصل ہوگا جو نیچے درج ذیل یوں میں منتقل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|p| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.36)$$

چونکہ ہم $b \leftrightarrow a$ کو آپس میں بدل رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے لحاظ لائیں یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا جذب چھتے ہیں جس کے نصب نام میں $\omega + \omega_0$ پایا جاتا ہے باقی حساب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حال میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں منتقل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالائی حال منتقلی کا ہے اس عمل کو تحریق زدہ احسراج کہتے ہیں۔ جس کی پیش گوئی آئنسٹائن نے کی تھی۔

تحریق زدہ احسراج کی صورت میں برقناطیسی میدان توانائی $\hbar\omega_0$ جوہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریہ ایک اصل جس نے تحریق پیدا کیا اور ایک تحریق کی بنا پر پیدا ہوا نکلے (شکل

۹.۴-ب۔ اگر ایک بوتل میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی نوریہ دو نوریہ پیدا کرے گا اور یہ دونوں خود چپا پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایک پمپنگیشن ممکن ہوگا تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے نوریہ خارج ہوں گے لیسز اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دیہان رہے کہ لیسز عمل کے لیے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو پاپولیشن انورزن کہتے ہیں چونکہ انجربا ہس کی بنا پر ایک نوریہ کم ہوتا ہے تحرقی احراج جو ایک پیدا کرتا ہے بل معتل ہوں گے لحاظ دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے ایک پمپنگیشن پیدا نہیں ہوگا۔

انجربا اور تحرقی احراج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود باخود احراج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقتا طیبی میدان کی عدم موجودگی میں جو احراج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک نوریہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی زریعہ زمینی حال میں پہنچتا ہے پہلی نظر میں یہ سمجھ نہیں آتی کہ خود باخود احراج کیوں کر ہوگا۔ ایک ساکن حال اگر چہ ہیجان جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کو انٹرم برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی $\hbar\omega/2$ کا حاصل ہوگا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقتا طیبی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطی احراج خود باخود احراج کا سبب بنتی ہے۔ اگر حبڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام احراج تحرقی احراج ہوگی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہوگا کہ آئیہ آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی احراجی عمل کے بلکل اُلٹ ہے جہاں تمام احراج خود باخود ہوتا ہے اور تحرقی احراج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کو انٹرم برقی حرکیات اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجربا تحرقی احراج اور خود باخود احراج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود احراج کی وجہ زمینی حال برقتا طیبی میدان کا اضطراب پیش نہیں کی تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود احراج کا حباب کرنے کا مجباز بنتی ہے جس سے ہیجان جوہری حال کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جا سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتا کی برقتا طیبی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

۹.۲.۳ غیر اتا کی اضطراب

برقتا طیبی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیظ ہوگا۔

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (9.34)$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.38)$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر یکرگی موج کے لیے درست ہوگا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بری تعددی پٹی کی برقتناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں $\rho(\omega)d\omega \rightarrow u$ ہوگا جہاں $\rho(\omega)d\omega$ تعددی ساتھ $d\omega$ میں کثافت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل شکل کاروپ اختیار کرے گا

$$(۹.۳۹) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

کسنگی کو سین میں حبز کی چوٹی ω_0 پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲) جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہوگا لحاظ ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے شکل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(۹.۴۰) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

متغیرات تبدیل کر کے $x = (\omega_0 - \omega)t/2$ لکھ کر شکل کے حدود کو $\pm\infty$ تک وسعت دے کر چونکہ باہر شکل صفر ہی ہے اور قطعی شکل کو حدود سے دیکھ کر

$$(۹.۴۱) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(۹.۴۲) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

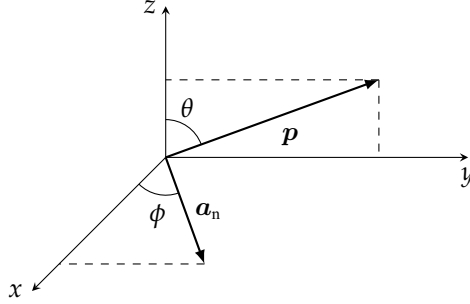
اس بار تحویلی احتمال وقت t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یکرگی اضطراب کے برعکس غیر اتنا کی تعدد کی وسعت پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بلخصوص تحویلی شرع $R \equiv dP/dt$ ایک مستقل ہوگا:

$$(۹.۴۳) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0)$$

اب تک ہم مندرجہ کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تنظیم شدہ ہے۔ لیکن ہم اس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکن تکثیف پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں $|p|^2$ کی جگہ $|p \cdot a_n|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہوگی جہاں مساوات 9.33 کو عموماً دیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۴۴) \quad p \equiv q \langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle$$

اور اوسط تمام تکثیف اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|p \cdot a_n|^2$ کی اوسط زنی۔

اوسط درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ کر دی محدد منتخب کر کے حرکت کے رخ کو z محور پر رکھیں (تاکہ کلمتیب xy سطح میں ہو) اور مستقل p سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔

$$a_n = \cos \phi i + \sin \phi j \quad (9.45)$$

تب

$$|p \cdot a_n|_{ave}^2 = \frac{1}{4\pi} \int |p|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$|p \cdot a_n|_{ave}^2 = \frac{|p|^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{3} |p|^2 \quad (9.46)$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر یکجہی، غیر اتار کی شعاع کے زیر اثر حال b سے حال a میں تحریقی اخراج کا تحویلی شرع درج ذیل ہوگا۔

$$R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \rho(\omega_0) \quad (9.47)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیار اثر کا تالی رکن p ہوگا مساوات 9.44 اور $\omega_0 = (E_b - E_a) / \hbar$ پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہوگی۔

۹.۳ خود باخود اخراج

۹.۳.۱ آہستائے A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالائی حال ψ_b میں N_b جو ہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود اخراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو $N_b A$ ذرات خود باخود اخراج کے عمل سے چوڑیں گے۔

جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحسرقی انحراج کی تحویلی شرح برقنطیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہوگا $B_{ab}\rho(\omega_0)$ یوں بالائی حال کو تحسرقی انحراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات چوڑیں گے۔ اسی طرح انجربانی ریٹ $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہوگا۔

$$(9.48) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی اور $dN_b/dt = 0$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.49) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درجہ حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولشزمان حیز ضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راست متناسب ہوگا لحاظ

$$(9.50) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$(9.51) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(9.52) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ان دونوں ریاضی جملوں کو موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$(9.53) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا

$$(9.54) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

مساوات 9.53 اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحسرقی انحراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجرباب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحسرقی انحراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر

مسوات 9.54 ہے جو ہمیں تحریقی احسراجی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود باخود احسراجی شرح A دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مسوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2 \quad (9.55)$$

لحاظہ خود باخود احسراجی شرح درج ذیل ہوگا

$$A = \frac{\omega_0^3|p|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \quad (9.56)$$

سوال ۹.۸: نیچے رختخویل میں خود باخود احسراج اور حراری تحریقی احسراج وہ تحریقی احسراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں معتابلہ ہوگا۔ دیکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $T = 300 \text{ K}$ پر $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت کم تعددوں پر حراری تحریقی احسراج غالب ہوگا جبکہ $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود باخود احسراج غالب ہوگا۔ دیکھائی دینے والی روشنی کے لیے کون غالب ہوگا؟

سوال ۹.۹: برقیاتی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود احسراجی اشارہ درحقیقت تحریقی احسراج مسوات 9.47 ہوگا۔ لحاظہ آئنسٹائن عددی سر A اور B جانے بغیر آپ خود باخود احسراجی شرح مسوات 9.56 احسز کر سکتے ہیں۔ اگر چہ ایسا کرنے کے لیے کو انٹیم برقی حرقیات بروی کار لانی ہوگی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک نوری پایا جاتا ہے تب اس کو احسز کرنا بہت آسان ہوگا۔

(الف) مسوات 5.111 کی جگہ $d_k = N\omega$ پڑ کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا ورنہ کل حسائی توانائی لامتناہی ہوگی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مسوات 9.47 استعمال کر کے خود باخود احسراجی شرح حاصل کریں۔ مسوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مسوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحریقی احسراج کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحریقی احسراج کے نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گٹھے گی۔ بلخصوص وقتی دورانیہ dt میں جوہروں میں تعداد کی Adt ہوگی۔

$$dN_b = -AN_b dt \quad (9.57)$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیئے جاسکتے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \quad (9.58)$$

نظر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد قوت نمائی طور پر کم ہوگی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۵۹) \quad \tau = \frac{1}{A}$$

جی اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علامتیت کے بنا پر ایسا کیا گئی تھرقی انحراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر متابلی رصوض سطح سے قطع نظر حال $\psi_a \rightarrow \psi_b$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی ψ_b کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات ($\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots$) میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$(۹.۶۰) \quad \tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک سپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا ہار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود بخود انحراج تنزل کی بنا پر حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$p = q \langle n|x|n'\rangle i$$

آپ نے سوال 3.33 میں x کے متابلی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

جہاں مرتعش کی متدرقی تعدد ω ہے۔ مجھے تھرقی انحراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم انحراج کی بات کر رہے ہیں لحاظ n' لاطمی طور پر n سے نیچے ہوگا۔ ہماری اس مقصد کی عرض سے تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۱) \quad p = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} i$$

نظر ہر تحویل سیزھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور انحراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$(۹.۶۲) \quad \omega_0 = \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n - n')\omega = \omega$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر انحراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۶۳) \quad A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

اور n ویں سال کا عمر صحت درج ذیل ہوگا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \quad (9.63)$$

چونکہ ہر ایک اخراجی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لحاظ اخراجی طاقت $A\hbar\omega$ ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا n ویں سال میں مرتعش کی توانائی $(n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \quad (9.65)$$

ابتدائی توانائی E کا کو انٹیم مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اخراجی طاقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مربع بار q کا اخراجی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.66)$$

ہارمونی مرتعش $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ جس کا جیٹ x_0 ہوگا میں مربع $-x_0\omega^2 \cos(\omega t)$ ہوگا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $x_0^2 m\omega^2 (1/2) = E$ ہے لحاظ $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E \quad (9.67)$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی اخراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد ($\hbar \rightarrow 0$) میں کلاسیکی اور کو انٹیم کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کو انٹیم کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = \hbar\omega (1/2)$ ہو تب مرتعش طاقتی اخراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تجوئل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے پچر شتہ تلاش کریں۔

۹.۳.۳ قواعد انتخاب

$$\langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$
$$\langle n'l'm'|r|nlm\rangle$$

انتخابی قواعد برائے m اور m' :

$$(9.48) \quad [L_z, x] = i\hbar y, [L_z, y] = -i\hbar x, [L_z, z] = 0$$
$$\begin{aligned} 0 &= \langle n'l'm' | [L_z, z] | nlm \rangle = \langle n'l'm' | L_z z - z L_z | nlm \rangle \\ &= \langle n'l'm' | [(m'\hbar)z - z(m\hbar)] | nlm \rangle = (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | z | nlm \rangle \end{aligned}$$
$$(9.69) \quad \langle n'l'm' | z | nlm \rangle = 0$$

لحاظہ ماسوائے $m' = m$ کی صورت میں z کے فتالیی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔
ساتھ ہی x کے ساتھ L_z کا مقب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L_z, x] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z x - x L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.۷۰) \quad (m' - m)\langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i\langle n'l'm' | y | nlm \rangle$$

یوں آپ y کے فتالیی ارکان کو مطابقتی x کے فتالیی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی y کے فتالیی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں y کے ساتھ L_z کا مقب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L_z, y] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z y - y L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.۷۱) \quad (m' - m)\langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

بخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m' - m)^2 \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i(m' - m)\langle n'l'm' | y | nlm \rangle = \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

لحاظہ درج ذیل ہوگا۔

$$(9.۷۲) \quad \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad (m' - m)^2 = 1$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں m کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$(9.۷۳) \quad \Delta m = \pm 1 \text{ یا } 0$$

اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہوگا نوریہ چکر ایک کا حاصل ہے لحاظہ اس کے m کی قیمت 0، 1 یا -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے جاتا ہے جو ہر اتنا کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے l اور l' :

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کچ کہا گیا۔

$$(9.۷۴) \quad [L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2 (rL^2 + L^2 r)$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقاب کو $\langle n'l'm' | nlm \rangle$ کے پیچ لپیٹ کر انتخابی متاندہ اغند کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
 \langle n'l'm' | [L^2, [l^2, r]] | nlm \rangle &= 2\hbar^2 \langle n'l'm' | (rL^2 + L^2) | nlm \rangle \\
 &= 2\hbar^4 [l(l+1) + l'(l'+1)] \langle n'l'm' | r | nlm \rangle = \langle n'l'm' | (L^2 [L^2, r] - [L^2, r] L^2) | nlm \rangle \\
 &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | [L^2, r] | nlm \rangle \\
 &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | (L^2 r - r L^2) | nlm \rangle \\
 &= \hbar^4 [l'(l'+1) - l(l+1)]^2 \langle n'l'm' | r | nlm \rangle
 \end{aligned}
 \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = [l'(l'+1) - l(l+1)]^2$$

$$\langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0 \text{ یا پھر}$$

لیکن

$$[l'(l'+1) - l(l+1)] = (l' + l + 1)(l' - l)$$

اور

$$2[l(l+1) + l'(l'+1)] = (l' + l + 1)^2 + (l' - l)^2 - 1$$

کی بنا پر مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

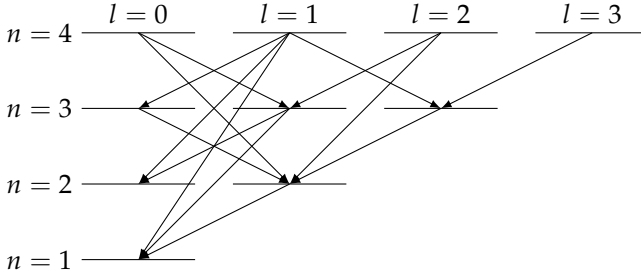
$$[(l' + l + 1)^2 - 1][(l' - l)^2 - 1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا اجز و ضربی مضمر نہیں ہو سکتا ہے مساوائے اس صورت جب $l' = l = 0$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھکارہ حاصل کیا گیا ہے لحاظ یہ شرط $l' = l \pm 1$ کی مادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں l کے لیے انتخابی متاندہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta l = \pm 1 \text{ کوئی عبور واقع نہیں ہوگا جب تک} \tag{۹.۷۸}$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اغند کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نور یہ چکر ایک کا حاصل ہے لحاظ زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد $l', l' = l + 1, l' = l - 1$ کی احبازت دیں گے۔ برقی جفت کتنی احسراج کے لیے زاویائی معیار حرکت کی بقا درمیانی صورت کی احبازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود احسراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد نہ ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائڈروجن کے لیے ابتدائی حبار بوہر



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجازتی تنزل۔

سطحوں کے لیے اجازتی توہیات دیکھائے گئے ہیں۔ دیہان رہے کہ $2S$ حال ψ_{200} اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لہذا یہ متخل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عمر صحت مثلاً $2P$ حالات ψ_{210}, ψ_{211} اور ψ_{21-1} سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصاداً کی بنا پر یا ممنوعہ تحویل کی بنا پر سوال 9.21 یا متعدد دوریہ کے اختراج کے بنا پر تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات 9.74 میں دیگئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور $r.L = r.(r \times p) = 0$ استعمال کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$

z سے r تک عمومیت دینا حقیر سا کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دیکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0$ ہوگا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کی ختم ہوگی۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جفت کتبہ تحویل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |nlm\rangle \rightarrow |n'l'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عمر صحت کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہوگا لہذا اس ترتیب میں ہر مرتبہ صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عمر صحت حاصل ہوگا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویل شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

$$(9.49) \quad H_0 \psi_n = E_n \psi_n, \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تاجع وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(9.80) \quad H = H_0 + H'(t)$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیری صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(9.81) \quad \psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t / \hbar}$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(9.82) \quad c_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t / \hbar}$$

جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے

$$(9.83) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

(ب) اگر نظام حال ψ_N میں آغاز کریں تب دیکھائیں کہ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$(9.84) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(9.85) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t' / \hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

(ج) مندرجہ کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منتقل کرنے کے علاوہ H' منتقل ہے۔ حال N سے حال M ($M \neq N$) میں تحویل کے احتمال کو t کا تعلق معلوم کریں۔ جواب:

$$(9.86) \quad 4 \left| H'_{MN} \right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t / 2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

(د) فرض کریں $H' = V \cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضے مندرجہ ذیل کرتے ہوئے دیکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور انکا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۷) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

(د) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتسا کی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دیکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیے تحریقی احسراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اول تک سوال 9.15 (ج) اور (د) کے لیے تلاش کریں۔ معمولی شرط

$$(۹.۸۸) \quad \sum_m |c_m(t)|^2 = 1$$

کی تصدیق کر کے تزاہد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $|c_N(t)|^2$ یا $1 - \sum_{m \neq N} |c_m(t)|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ N دیں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکاں ضرور لیکن تابع وقت ہوگی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہوگا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دیکھائیں کہ تفاعل موج کی حیثیت سے تبدیلی دور تبدیل ہوگا لیکن تحویل نہیں ہوگی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیثیت، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل نہ کے t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 < E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہوائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرقی احسراج، تحرقی انجزاب اور خود با خود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ خود با خود انجزاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0 k$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت γ بولار سر تعدد $\omega_0 = \gamma B_0$ مشال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf} [\cos(\omega t) i - \sin(\omega t) j]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$(۹.۸۹) \quad B = B_{rf} \cos(\omega t) i - B_{rf} \sin(\omega t) j + B_0 k$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیملٹنی متالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دیکھائیں۔

$$(۹.۹۰) \quad \dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b)$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۹.۹۱) \quad \omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $b_0 = 0$ ، $a_0 = 1$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تعلق عمل تلاش کریں۔

$$P(t) = \{\Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\} \sin^2(\omega' t/2): \text{جواب}$$

(و) منحنی گمک

$$(۹.۹۲) \quad P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرق تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لحاظ ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں نور یہ کا g جزو ضربی ایک ٹیلا کے ساکن میدان اور ایک مائکرو ٹیلا جیٹ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں فرض کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فصائی تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$(9.93) \quad E(r, t) = E_0 \cos(k.r - \omega t)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r < 1$ اور $k.r \sim r/\lambda < 1$ لحاظ $|k| = 2\pi/\lambda$ ہوگا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اول درستی۔

$$(9.94) \quad E(r, t) = E_0 [\cos(\omega t) + (k.r) \sin(\omega t)]$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ احبازتی برقی جفت کتب تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی چسکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تحویل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد کتب معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود بخود احضراجی شرح حاصل کریں اس کی تکلیب اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا نا ضروری ہوگا۔ جواب:

$$(9.95) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (a_n.r) (k.r) | b \rangle|^2$$

(ب) دیکھائیں کہ ایک بُدی مرتعش کے لیے ممنوعہ تحویلات سطح n سے سطح $n - 1$ میں ہوگی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت a_n اور k پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$(9.96) \quad R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد نور یہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ احبازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کا مضبوط تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دیکھائیں کہ ہائڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی $1S \rightarrow 2S$ کی احبازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیے بھی درست ہوگا غالب تنزل دو نور یہ احضراج کی بنا پر ہوگا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا سوال حصہ ہوگا۔

سوال ۹.۲۲: دیکھائیں کہ n, l سے n', l' میں تحویل کے لیے ہائڈروجن کا خود بخود احضراجی شرح مساوات 9.56 درج

ذیل ہوگا۔

$$(۹.۹۷) \quad \frac{e^2 \omega^3 I^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & \text{جب } l' = l + 1 \\ \frac{l}{2l-1}, & \text{جب } l' = l - 1 \end{cases}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$(۹.۹۸) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr$$

جوہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m - 1, m, m + 1$ کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دیہان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l + 1$ صورت کے لیے $|nlm\rangle$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر صفر تالی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', l + 1, m + 1 | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l + 1, m | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l + 1, m - 1 | r | nlm \rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l - 1$ کے لیے بھی کریں۔

باب ۱۰

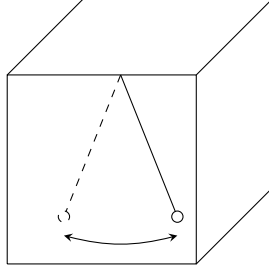
حرارت ناگزرتخمین

۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزرت

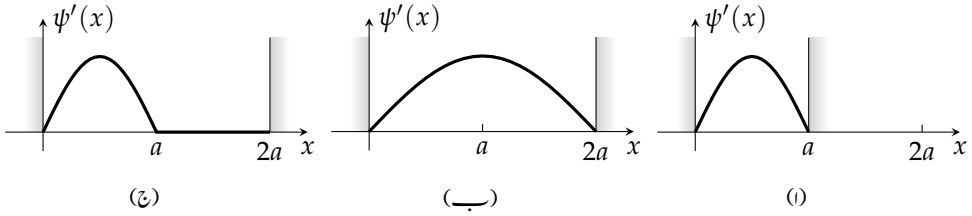
۱۰.۱.۱ حرارت ناگزرت عمل

فرض کریں ایک کامل رفاص انتضایی سبب میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مسزاحت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے اگر آپ اس رفاص کو جب تک سے بلانیں تو یہ امنرا تفسری کے ساتھ دائروی صورت میں حرکت کرنے لگے گا لیکن اگر آپ بغیر جھٹکے کے رفاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تب رفاص اسی سطح یا اس کے متوازی سطح میں شائستگی اور روانی سے اسی جیط کے ساتھ جلمھولتا رہے گا بیرونی حالات کی بہت آہستہ آہستہ تبدیلی ہی حرارت نہ گزرت عمل کی پہچان ہے دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف امتیازی وقتوں کی بات کی جاتا رہی ہے نظام کی حرکت جو یہاں رفاص کی ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا کو ظاہر کرنے والا اندرونی وقت T_i اور نظام میں نمایاں تبدیلی مثلاً لرزتے ہوئے چبوتر اپر نصب رفاص کی صورت میں چبوترے کی لرزش کا دوری عرصہ کو ظاہر کرنے والا بیرونی وقت T_e حرارت ناگزرت عمل میں $T_e \gg T_i$ ہوگا۔

حرارت نہ گزرت عمل کے تجزیہ کا بنیادی حکمت عملی یہ ہوگا کہ پہلے بیرونی عوامل مقدار معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں بہت آہستہ آہستہ وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے مثال کے طور پر مقررہ لمبائی L کی رفاص کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہوگا اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو تب دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہوگا حصہ 3.7 میں ہائیڈروجن سالہ پر تبصرہ کے دوران ایک زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی ہم نے آغاز میں مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے ان کے بیچ فاصلہ R کی صورت میں الیکٹرون کی حرکت کے لئے حل کیا نظام کی زمینی حال توانائی کو R کے تقاعص کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کی ان حناے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا سوال 10.7 طبیعت سالہ میں اس ترکیب کو جس میں ساکن مرکزہ سے آغاز کرتے ہوئے الیکٹرونی تقاعصات موج کا حساب کر کے ان سے نسبتا



شکل ۱۰.۱: حرارت ناگزرت حرکت: اگر ڈبل کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تب رمتاس اسی حیث کے ساتھ ابتدائی سطح کے متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: (۱) لامستناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تب ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تب ذرہ لحاقی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

رفتار مرکزہ کی معلومات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارن واپن ہائیمر تخمین کہتے ہیں حرارت نہ گزرتخمین کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے مندرجہ کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ H^i سے بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ H^f تک پہنچتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزرت کہتا ہے کہ اگر ذرا ابتدائی طور پر H^i کے n وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہوں تب یہ زیر مساوات شرودنگر H^f کی n وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا میں یہاں مندرجہ کرتا ہوں کہ H^i سے H^f تک تحویل کے دوران طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے بحالات کی ترتیب کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔

مشال کے طور پر ہم لامستناہی چوکور کنویں میں ایک ذرا کو زمینی حال میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-۱)۔

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ آہستہ تمام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزرت کے تحت ماسوائے

حبز و ضربی بیت کے یہ ذرہ تو سبج شدہ کنویں کے زمینی حال میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \quad (10.2)$$

دھیان رہے کے نظریہ اضطراب کی طرح ہم ہیملٹنی میں ایک چھوٹی تبدیلی کی بات نہیں کر رہے ہیں یہاں تبدیلی بہت بڑی ہے فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی بہت آہستہ آہستہ رونما ہو یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے نظام سے توانائی حاصل کرے گا جیسا کہ گاڑی کی انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے اس کے برعکس کنویں کی اچانک وسط کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج) جو نئے ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا ایک پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا سوال 38.2 یہاں توانائی کی بقا ہوگی کم از کم اس کی توقعاتی قیمت کی ضرور ہوگی جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے خلا میں گیس کی آزادانہ پھیلاؤ سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱۰.۱: ایک لامتناہی چوکور کنواں جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتا ہے کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$\Phi_n(x, t) \cong \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i t)/\hbar\omega} \quad (10.3)$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنویں کی لمبائی چوڑائی اور چوڑائی a کے اصل کنواں کی n ویں اجبازتی توانائی $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ہے عمومی حل Φ کا ایک خطی جوڑ:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t) \quad (10.4)$$

ہوگا جہاں عددی سر c_n وقت t کے تابع نہیں ہوں گے

ا. دیکھیں آیا تابع وقت شرودنگر مساوات بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات 3.10 مطمئن کرتی ہے

ب. فرض کریں اصل کنویں کی زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ($t = 0$) کرتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz \quad (10.5)$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنویں کی پھیلنے کی رفتار کی ایک بے بودی پیمائش ہے بد قسمتی سے اس تکمل کی قیمت کو بنیادی تقاضات کی صورت میں حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنہ چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں یوں بیرونی وقت $w(T_e) = 2a$ ہوگا ابتدائی زمینی حال کے تابع وقت T_i قوت نمائی حبز و ضربی کا دورانیہ اندرونی وقت ہوگا وقت T_e اور T_i تخمین کر کے دیکھائے کہ حرکت نہ گزر صورت حال سے مراد $1 \ll \alpha$ ہوگا جس کے تحت مکمل کے دائرہ کار پر $e^{-i\alpha z^2} \cong 1$ ہوگا اس کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کے عددی سر c_n تخمین کریں حال $\Psi(x, t)$ تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرارت نہ گزر کے مطابق ہے

د. دکھائیں گے $\Psi(x, t)$ میں حبز و ضربیت کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(10.6) \quad \theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_1(t') dt'$$

جہاں لمحہ t پر لحاتی امتیازی قدر $E_n(t) \equiv n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m\omega^2$ ہوگا اس نتیجہ پر تبصرہ کریں

۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت

مسئلہ حرارت نہ گزر بظاہر معقول نظر آتا ہے اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں ایک ذرہ جو n وی امتیازی حال ψ_n میں آغاز کریں

$$(10.7) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

وہ ڈوری حبز و ضربی اپنانے کے علاوہ اسی n وی امتیازی حال میں رہتا ہے

$$(10.8) \quad \Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t / \hbar}$$

اگر ہیمیلٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہوں تب امتیازی تفاعلات اور امتیازی اتداری بھی تابع وقت ہوں گے

$$(10.9) \quad H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$$

لیکن اب بھی کسی ایک مخصوص لمحہ پر یہ معیار عمودی سلسلہ

$$(10.10) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

تین گے جو مکمل ہے لہذا تابع وقت شر و ڈنگر مساوات

$$(10.11) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t)\Psi(t)$$

کے عمومی حل کو ان کا خطی مجموعہ

$$(10.12) \quad \Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(۱۰.۱۳) \quad \theta_n(t) \approx -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_n(t') dt'$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے E_n کی صورت میں معیاری دوری جزو ضربی کو عموماً دیتا ہے جس میں اس کو ہمیشہ کی طرح عددی سر $c_n(t)$ میں عزم کر سکتا ہے لیکن غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے کہ طبیعت وقت کے اس حصہ کو سر یہی لکھن موزوں ہوگا مساوات 12.10 کو مساوات 11.10 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۱۰.۱۴) \quad i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \theta_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n}$$

جہاں وقت کے لحاظ سے تفریق کو نکتے سے ظاہر کیا گیا ہے مساوات 9.10 اور 13.10 کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹ جاتے ہیں لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے

$$(۱۰.۱۵) \quad \sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n}$$

اس کا ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر لحقی امتیازی تفاسلات کی معیار ہمودیت مساوات 10.10 بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یاد درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۱۶) \quad \dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \dot{\psi}_m | \psi_n \rangle e^{\theta_n - \theta_m}$$

اب مساوات 9.10 کا وقت کے ساتھ تفریق لیتے ہیں

$$\dot{H} \psi_n + H \dot{\psi}_n = \dot{E}_n \psi_n + E_n \dot{\psi}_n$$

اور یہاں بھی ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر درج ذیل ہوگا

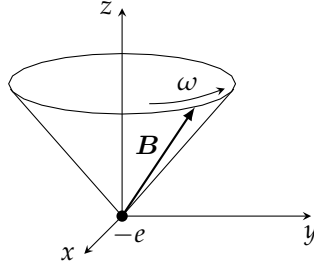
$$(۱۰.۱۷) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

ہم H کے ہر مشی ہونے سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$ لکھتے ہیں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۱۸) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انحطاطی ہے مساوات 18.10 کو مساوات 16.10 میں پر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(۱۰.۱۹) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^1 [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$



شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار ω سے مخروطی راہ چھاڑتا ہے (مساوات 10.24)۔

یہ بالکل ٹھیک نتیجہ ہے اب حرارت ناگزرتخمین کی باری آتی ہے فرض کریں \dot{H} نہایت چھوٹا ہے تب دو سراجبزو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \psi_m \rangle \quad (10.20)$$

ہوگا جس کا حل

$$c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)} \quad (10.21)$$

ہے جہاں درج ذیل ہوگا

$$\gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \rangle dt' \quad (10.22)$$

بالخصوص اگر ذرا n وی امتیازی حال یعنی $m \neq n$ کیلئے $c_n(0) = 1$ اور $c_m(0) = 0$ ہوئے آغاز کرتے تب مساوات 12.10

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t) \quad (10.23)$$

ہوگا لہذا کئی یقینی جبز و ضربیاں حاصل کرنے کے علاوہ یہ ذرا اعجاب کی ہیملٹنی کی n وی امتیازی حال میں ہی رہے گا

مثال ۱۰.۱: فرض کریں ایک مقناطیسی میدان میں نکتہ پر کیت m اور بار $-e$ کا ایک الیکٹرون ساکن پایا جاتا ہے اس مقناطیسی میدان کی مقدار B_0 ایک مستقل ہے جبکہ اس کا رخ z محور کے گرد ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے ایک مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے z کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ α ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}] \quad (10.24)$$

اس کا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar\beta_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z] \\ (10.25) \quad &= \frac{\hbar\omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

جہاں ω_0 درج ذیل ہیں

$$(10.26) \quad \omega_1 \equiv \frac{e\beta_0}{m}$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکر کار χ_+ اور χ_- درج ذیل ہیں۔

$$(10.27) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(10.28) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو $B(t)$ کے لمباتی رخ کے ساتھ ہماچکر اور خلاف چکر کو نافہر کرتے ہیں سوال 30.4 دیکھیں ان کے مطابقتی امتیازی افتدار درج ذیل ہونگے

$$(10.29) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega_1}{2}$$

فرض کریں $B(0)$ کے ہمراہ الیکٹران حید میدان صورت سے آغاز کرتا ہے

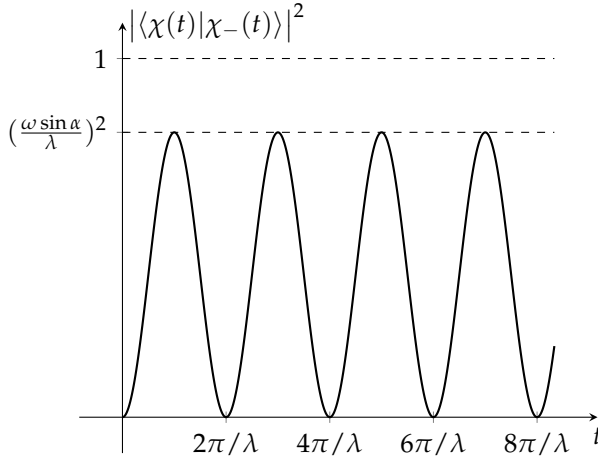
$$(10.30) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

تابع وقت شرودنگر مساوات کا بالکل ٹھیک حل درج ذیل ہوگا سوال 2.10

$$(10.31) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں λ درج ذیل

$$(10.32) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$



شکل ۱۰.۴: غیر حرارت ناگزرتنمین صورت ($\omega \gg \omega_1$) میں تحویلی احتمال (مساوات ۱۰.۱۰)۔

جسے χ_+ اور χ_- کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے

$$(10.33) \quad \chi(t) = \left[\cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ + i \left[\frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ B کے موجودہ رخ کے لحاظ سے خلاف میدان کو تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا

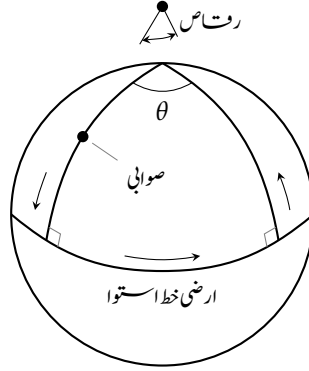
$$(10.34) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[\frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

مسئلہ حرارت ناگزرتنمین کہ $T_e \gg T_i$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال عنصر کو پہنچے گا جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت T_e ہے جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہوگا اور تقابل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت T_i ہوگا جو موجودہ صورت میں $1/(\omega_1) = \hbar/(E_+ - E_-)$ ہوگا جو حرارت ناگزرتنمین سے مراد $\omega \ll \omega_1$ ہوگا غیر مضطرب تقابلات موج کے دور کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے حرارت ناگزرتنمین صورت $\lambda \cong \omega_1$ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(10.35) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[\frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے ہیں، طبعی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوگھاتا ہے کے الیکٹران کا چکر ہر لمحہ پر B کہ رخ ہو اس کے برعکس $\omega \gg \omega_1$ کی صورت میں $\lambda \cong \omega$ ہوگا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ پکیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔

□



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر روتاص کی حرارت ناگزیر منتقلی۔

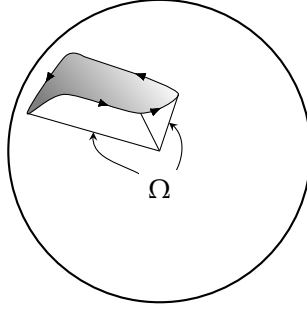
سوال ۱۰.۲: تصدیق کیجئے گا کہ مساوات 25.10 کی ہیملٹنی کیلئے مساوات 31.10 تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتی ہے ساتھ ہی مساوات 33.10 کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ عددی سروں کے سرٹوں کا مجموعہ ایک ہوگا جو معمول زنی کی شرط ہے

۱۰.۲ ہیئت بیری

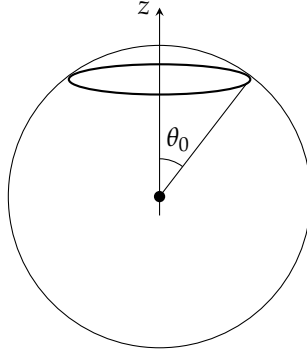
۱۰.۲.۱ گرگنی عمل

آئے حصہ 1.1.10 میں متعلیٰ کامل ہے رگڑھ لیکن جس کے چپوٹرا کو ایک مفتام سے دوسری مفتام منتقل کیا جاتا ہوں پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے حرارت نہ گزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا میں نے دھاوا کیا تھا کہ جب تک چپوٹرا کی حرکت اتنی روتاص کے دوری عرصہ کے لحاظ سے اتنی آہستہ ہو کے روتاص کی نمایاں حرکت کے دوران روتاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہوں یہ اسی مستوی میں یا اس کے متوازی مستوی میں اسی خطہ اور اسی تعدد کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

لیکن اگر میں اس کامل روتاص کو شمالی قطب پر لے جا کر مثلاً صوبانی شہر کے رخ جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے میں اس کو بہت آہستہ آہستہ یعنی حرارت نہ گزر طریقہ سے صوبانی سے گزرتے خط طول بلند پر چلتے ہوئے عرضی خط استوا تک پہنچتا ہوں یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے گا میں اس کو عرضی خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں روتاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے آخر میں میں اس نئی خط طول بلند پر چلتے ہوئے چپوٹرا کو شمالی قطب منتقل کرتا ہوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ روتاص اسی مستوی میں اب نہیں جھولے گا جہاں سے اس نے آغاز کیا یقیناً نئی مستوی اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ Θ پایا جاتا ہے جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے دو خط طول بلند کے بیچ زاویہ Θ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جس راہ پر میں چپوٹرا اٹھا کر چلتا رہا وہ راہ زمین کے مرکز پر ٹھوس زاویہ Ω بناتی ہے یہ راہ شمالی نصف کرہ کا 2π حصہ Θ گھیرتی ہے لہذا اس کا رقبہ $\Theta R^2 = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$ ہوگا



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ Ω بناتا ہے۔



شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقورتص کی راہ۔

جہاں R زمین کا رداس ہے یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \quad (10.36)$$

جو اس نتیجہ کو نہایت عمدگی کے ساتھ پیش کرتا ہے اور جو راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں ہے (شکل ۱۰.۶)۔
کرہ کی سطح پر ایک بند راہ پر چلتے ہوئے حرارت نہ گزرتمین کی ایک مثال فوکلٹ رفتص ہے جہاں چپو ترا کو
اٹھ کر چلنے کی بجائے زمین کے گھومنے کو یہ کام سونپا جاتا ہے خط عرض بلد θ_0 درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے
(شکل ۱۰.۷)۔

$$\Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos \theta)_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0) \quad (10.37)$$

زمین کے لحاظ سے جو اس دوران 2π زاویہ گھوم چکا ہو گا فوکلٹ رفتص کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi \cos \theta_0$
ہوگی اس نتیجہ کو عموماً گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کو یولس کو تو کی اثر سے حاصل کیا جاتا ہے لیکن یہاں یہ

حالت جو مشرے مفہوم پیش کرتا ہے ایسا نظام جو بند راہ پر چل کے واپس ابتدائی نکتہ پہنچ کر اپنی ابتدائی حال میں نہیں لوٹتا غیر ہماقواند نظام کہلاتا ہے یہاں ضروری نہیں کے راہ پر چلنے سے مراد حرکت دینا ہوا اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھی غیر ہماقواند نظام ہر جگہ پائے جاتے ہیں ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن غیر ہماقواند اعلیٰ ہے ہر ایک پیرا کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا وغیرہ وغیرہ اگلے حصہ میں میں غیر ہماقواند اعمالوں کی کوانٹم مکانیات پر غور کروں گا ہم نے دیکھنا ہوگا کہ ہیملٹنی کے مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرارت سنہ گزر پیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا

۱۰.۲.۲ ہندی ہیٹ

میں نے حصہ 2.1.10 میں دکھایا کہ ایک ذرا جو $H(0)$ کے n وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہو حرارت نہ گزر حالات میں تابع وقت ہیٹ جزو ضربی کے علاوہ $H(t)$ کی n وی امتیازی حال میں ہوگا بالخصوص اس کا تعلق موج مساوات 23.10 درج ذیل ہوگا

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.39)$$

حرکتی ہیٹ ہے جو تابع وقت تفاعل E_n کی صورت کے لیے جزو ضربی $e^{(-iE_n t/\hbar)}$ کو عموماً دیتا ہے اور درج ذیل ہندی ہیٹ کہلاتا ہے

$$\gamma_n(t) \equiv \int_0^t \langle \psi_n(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle dt' \quad (10.40)$$

چونکہ اب ہیملٹنی میں کوئی ایسا مقدار معلوم $R(t)$ پایا جاتا ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا $\psi_n(t)$ وقت t کا تابع ہوگا سوال 1.10 میں پھیلے ہوئے چوکور کنویں کی چوڑائی $R(t)$ ہوگی یوں درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt} \quad (10.41)$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} dR \quad (10.42)$$

جہاں R_i اور R_f مقدار معلوم R_t کے بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی بالخصوص اگر کچھ دیر T بعد ہیملٹنی واپس اپنی ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہذا $\gamma_n(T) = 0$ ہوگا جو زیادہ دلچسپ صورتحال نہیں ہے

میں نے مساوات 41.10 میں مندرجہ ذیل کی کہ ہیمیلٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو مندرجہ کریں N عدد مقدار معلوم $R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$(10.43) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

جہاں $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$ ہے اور ∇_R ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(10.44) \quad \gamma_n(t) = i \int_{\mathbf{R}_i}^{\mathbf{R}_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

اور اگر وقت T کے بعد ہیمیلٹنی واپس اپنی اصل روپ اختیار کرتا ہوں تب کل ہندسی تبدیلی درج ذیل ہوگی

$$(10.45) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں ایک بند راہ پر لکیری مکمل ہے جو عموماً غیر صفر ہوگا مساوات 45.10 کو پہلی مرتبہ 1984 میں میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ ہیٹ بیری کہلاتا ہے دھیان رہے ہیں کہ جب تک تبدیلی اتنی آہستہ ہو کہ قیاس حرارت ناگزرتنمین کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے تاکہ راہ پر چلنے کی رفتار پر اس کے برعکس مجموعی حرکتی ہیٹ

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کا تابع ہوگا

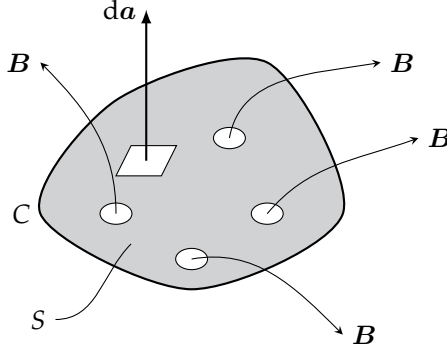
ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کا ہیٹ کچھ بھی ہو سکتا ہے اور طبعی مقداروں میں جہاں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے ہیٹ حبز و ضرب کٹ جاتا ہے اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال ہوتا ہے کہ ہندسی ہیٹ کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے آخر $\psi_n(t)$ کا ہیٹ بھی اختیاری ہے یہ جناب بیری کی دور اندیشی ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیمیلٹنی کو کسی بند دائرے پر لے جاتے ہوئے واپس اپنی اصل روپ میں لانے سے ابتدائی اور اختتامی ہیٹ کے بیچ فاصلہ غیر اختیاری ہوگا جسے حقیقتاً نا کا حساب سکتا ہے مثال کے طور پر ذراعت جو تمام حال Ψ میں ہوں کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے صرف ایک حصے کو حرارت نہ گزرتنمین تبدیل ہوتے مخفی سے گزارا جاتا ہے دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے مجموعی تفاعل موج درج ذیل روپ کا حاصل ہوگا

$$(10.46) \quad \Psi = \frac{1}{2} \Psi_0 + \frac{1}{2} \Psi_0 e^{i\Gamma}$$

جہاں سیدھی پہنچتی شعاع کا تفاعل موج Ψ_0 ہے اور متغیر H کی بنا پر شعاع کا اضافی ہیٹ Γ ہے جس کا کچھ حصہ ہر کی اور کچھ حصہ ہندسی ہوگا اس صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(10.47) \quad |\Psi|^2 = \frac{1}{4} |\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma}) (1 + e^{-i\Gamma})$$

$$(10.48) \quad = \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2)$$



شکل ۱۰.۸: بند مخفی C کے بیچ سطح S سے گزرتا مقناطیسی ہوا۔

یوں تعیلی مداخلت اور تباہ کن مداخلت نکات جہاں Γ کی قیمت π کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی کو دیکھ کر ہم Γ کی پیمائش کر سکتے ہیں بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی ہر کی ہیٹ کی موجودگی میں ہندی ہیٹ نظر نہیں آئے گی لیکن انہیں علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے تین آبادی مقدار معلوم فضا $R = (R_1, R_2, R_3)$ کی صورت میں مقناطیسی ہواؤ کہ کلیہ کا یاد دلاتی ہے سطح S جس کی سرحد مخفی C ہو سے درج ذیل ہواؤ گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S B \cdot da \quad (10.49)$$

مقناطیسی میدان کو سستی مخفیہ کنی روپ میں $(B = \nabla \times A)$ لکھ کر مسئلہ سٹوکس کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr \quad (10.50)$$

یوں مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے مقناطیسی میدان کے ہواؤ

$$“B” = i \nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \quad (10.51)$$

کو ہیٹ بیری تصور کیا جاسکتا ہے دوسرے لفظوں میں تین آبادی صورت میں ہیٹ بیری کو ایک سطحی عمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da \quad (10.52)$$

مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے تاہم ہماری استعمال کے نقطہ نظر سے مساوات 51.10 محض $\gamma_n(T)$ کو لکھنے کا دوسرا انداز ہے

سوال ۱۰.۳:

۱. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی w_1 سے بھڑکر w_2 ہونے کی صورت میں مساوات 42.10 استعمال کرتے ہوئے ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں

ب. اگر وسعت مستقل شرح $(dw/dt = v)$ سے بڑھے تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہوگی

ج. اب اگر چوڑائی کم ہو واپس w_1 ہو جاتی ہے تب اس ایک تیسرے کا ہیئت بیری کیا ہوگا

سوال ۱۰.۴: ڈیٹا تفاعل کنواں مساوات 114.2 واحد ایک مقید حال مساوات 129.2 کا حاصل ہے α آہستہ آہستہ α_1 سے بڑھ کر α_2 ہوتا ہے ہندسی تبدیلی ہیئت کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح $da/dt = c$ سے رونما ہو تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہوگا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہنسی ہیئت صفر ہوگا سوال 3.10 اور 4.10 اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن قانونی طور پر بالکل جانز جزو ضروری ہیئت منسلک کریں $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$ جہاں $\Phi_n(\mathbf{R})$ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقیناً آپ غیر صفر ہندسی ہیئت حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات 23.10 میں پر کرنے سے کیا ہوگا اور بند راہ پر صفر حاصل ہوگا سبق غیر صفر ہیئت بیری کی خاطر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی اور دو ایسا ہیملٹنی درکار ہوگا جو غیر حقیر مخلوط امتیازی تفاعلات دیتا ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیئت بیری کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مباد پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال 1.10 میں کیا گیا اور جس میں محور z کے ساتھ ایک اٹل زاویہ α بناتے ہوئے $B(t)$ ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار ω سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے حرارت نہ گزر صورت $\omega_1 \ll \omega$ میں

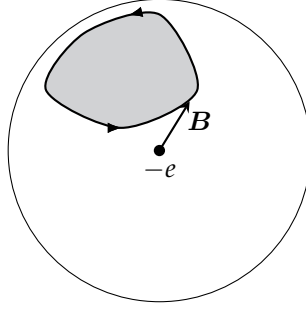
$$(۱۰.۵۳) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا لہذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$(۱۰.۵۴) \quad \chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ i \left[\frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

دوسرے جزو کو $0 \rightarrow \omega/\omega_1$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا ہر کی ہیئت درج ذیل ہے

$$(۱۰.۵۵) \quad \theta + (t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E + (t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ پر چلتا ہے۔

جہاں مساوات 29.10 سے $E_+ = \hbar\omega_1/2$ ہوگا لہذا ہندسی ہیٹ درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma + (t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پیرا کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہوگا لہذا ہیٹ سیری درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۷) \quad \gamma + (T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس B_0 $r =$ کی کراں کہ سطح ہر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان $B(t)$ کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا سوال 30.4 دیکھیں

$$(۱۰.۵۸) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں B کے دونوں کردی مہدد θ اور π وقت کے تغیرات ہیں کردی مہدد میں ڈھلواں درج ذیل ہوگا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$(۱۰.۵۹) \quad \nabla \chi_+ = \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$(۱۰.۶۰) \quad = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\phi}$$

یوں درج ذیل ہوگا

(۱۰.۲۱)

$$\langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{2r} \left[-\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \hat{\phi} \right]$$

$$(۱۰.۲۲) \quad = i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} p \hbar i$$

مسوات 51.10 کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی

$$(۱۰.۲۳) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \hat{r} = \frac{i}{2r^2} \hat{r}$$

یوں مسوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۲۴) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{a}$$

تکمل مترہ کی سطح پر اس رقبہ پر لیا جائے گا جس کو B کی چھوٹی ایک پیرامیں گرتا ہوا ہذا $r^2 d\Omega \hat{r}$ da ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۲۵) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega$$

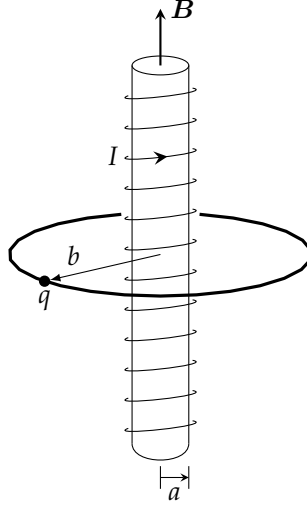
جہاں مبده پر ٹھوس زاویا Ω ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلا رگڑ رتص کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرارت نہ گزر طریقہ سے لے جانے سے کل ہندی تبدیلی بیت مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویا کی منفی بادا ہوگا مسوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مسوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقینا ہونا بھی چاہیے □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مسوات 62.10 کا مشل حاصل کریں جواب $-\Omega$ ایک ذرہ جس کا چکر s ہو کے لیے نتیجہ $-s\Omega$

۱۰.۲.۳ اہارونو پو، ہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقدا ریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ ϕ اور A بلا واسطہ نا تابل پیا ن کش ہیں

$$(۱۰.۲۶) \quad E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$



شکل ۱۰.۱۰: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمب پیچھاں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

میکسول مساوات اور متاخرہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیا کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ مرتب کرنے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیات کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$(۱۰.۶۷) \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

جہاں Λ معتام اور وقت کا کوئی بھی تقاضا ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کامیڈانوں پر کوئی اثر نہیں ہوگا کوانٹم میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو φ اور \mathbf{A} کی صورت میں تاکہ E اور B کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$(۱۰.۶۸) \quad H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi$$

بہر حال زیر ماپ تبادلہ یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبہ عرصہ کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں E اور B صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقی مقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو ستمی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرے کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہوگا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو بوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیٹ بیری کے ساتھ پیش کروں گا۔

فرض کریں ایک ذرا کو رداس b کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $a < b$ کا ایک لمب لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو I ہے (شکل ۱۰.۱۰) بہت لمب لچھا کی صورت میں لچھے کے

اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا لیکن موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۶۹) \quad \mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (r > a)$$

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہاؤ ہوگا ساتھ ہی لچھا خود غیر باردار ہے لہذا غیر سمتی مخفیہ φ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۱۰.۷۰) \quad H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla]$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ ائمت $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$ پر منحصر ہے لہذا $\nabla \rightarrow (p\hbar/b)(d/d\phi)$ ہوگا اور مساوات شرودنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$(۱۰.۷۱) \quad \frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i\frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$(۱۰.۷۲) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon \psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$(۱۰.۷۳) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$(۱۰.۷۴) \quad \psi = Ae^{i\lambda\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۷۵) \quad \lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

نقطہ $\phi = 2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا پر λ عدد صحیح

$$(۱۰.۷۶) \quad \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۱۰.۷۷) \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لچھا دائرے پر ذرا کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت n جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرا کو ظاہر کرتا ہے q مثبت لیتے ہوئے منفی n کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرا کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ احبائی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرا پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک ذرا ایسے خط میں حرکت کرتا ہے جہاں B ہے لہذا $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ہوگا تاہم \mathbf{A} خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ \mathbf{A} ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیا کے لئے عمومیت دی جاسکتی ہے مخفی توانائی V جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی شروڈنگر مساوات

$$(10.48) \quad \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

$$(10.49) \quad \Psi = e^{ig} \Psi'$$

جہاں $g(\mathbf{r})$ درج ذیل ہے

$$(10.50) \quad g(\mathbf{r}) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

اور l کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہوگی جب پورا خطا میں $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل l سے \mathbf{r} تک راہ پر منحصر ہوگا اور یوں \mathbf{r} کا تعلق عمل نہیں ہوگا Ψ' کی صورت میں Ψ کا ڈولان درج ذیل ہوگا

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i \nabla g) \Psi' + e^{\nabla \Psi'}$$

لیکن $\nabla g = (q/\hbar) \mathbf{A}$ کے برابر ہے لہذا

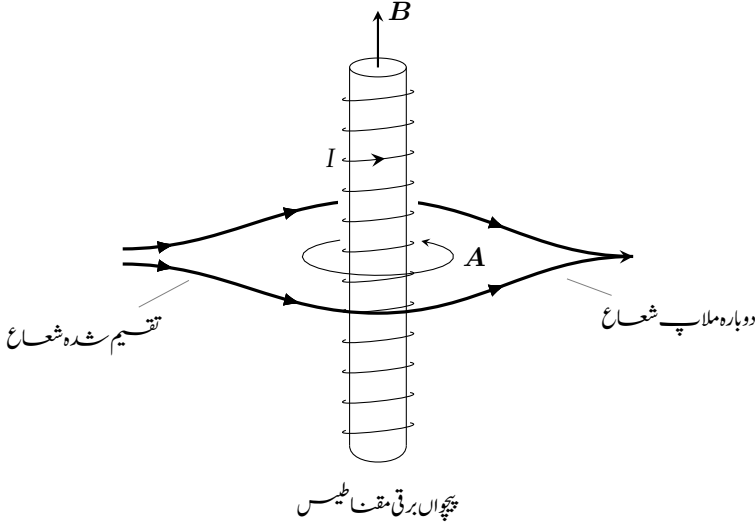
$$(10.51) \quad \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi'$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.52) \quad \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi'$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی e^{ig} کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$(10.53) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' + V \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}$$



شکل ۱۰.۱۱: اہارنو و بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پتچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

بظاہر Ψ' بغیر A شروع و نگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفی سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا حقیقی کام ہوگا: ہمیں صرف ہستی جزو ضربی $e^{i\phi}$ ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔

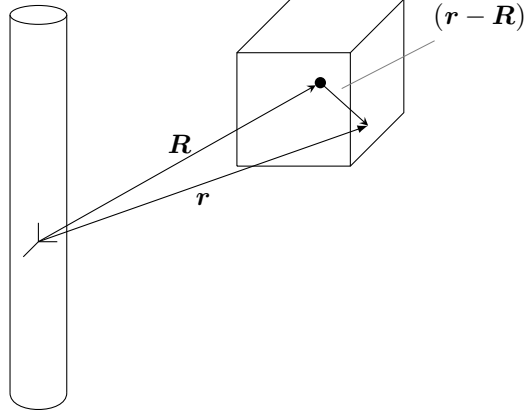
مہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لمبے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱) ان شعاعوں کو لمبے لمبے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں $B = 0$ ہوتا ہے A جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہوگا اور دونوں اطراف V کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہستی منفرق پایا جائے گا

$$(10.84) \quad g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{r} \hat{\phi} \right) \cdot (r \hat{\phi} d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہوگی جو لمبے لمبے میں A کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہستی منفرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہوگا جس سے ان کی راہ گیرتے ہیں

$$(10.85) \quad \text{پیتی منفرق} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

اس پیتی منتقل سے متاثر پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کرچے ہیں اہارنو و بوہم اثر کو ہندسی ہیئت کی ایک مثال تصور کی جاسکتی ہے مندرجہ کرین مخفی $V(r - R)$



شکل ۱۰.۱۲: مختلف $V(r - R)$ ایک ذرہ کو ڈب میں مقید کیے ہوئے ہے۔

ایک بار دار ذرہ کو ایک ڈب میں رہنے کا پابند بنانا ہو جہاں ڈبے کا مرکز بلے لچھے سے باہر نقطہ R پر ہے؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈب کو بلے لچھے کے گرد ایک پیرا دیسک لہذا R وقت کا قضا عمل ہو گا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی قضا عملات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$(10.84) \quad \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - qA(r) \right]^2 + V(r - R) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں ہم

$$(10.85) \quad \psi_n = e^{ig} \psi'_n$$

لیتے ہیں جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.86) \quad g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r A(r') \cdot d(r')$$

اور ψ'_n اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت میں مطمئن کرے گا جب $A \rightarrow 0$ ہو

$$(10.87) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r - R) \right] \psi'_n = E_n \psi'_n$$

آپ نے دیکھا کہ ψ'_n ہٹاؤ $r - R$ کا قضا عمل ہے نہ کہ ψ_n کی طرح علیحدہ علیحدہ r اور R کا قضا عمل آئے اب اس ڈب کو بلے لچھے کے گرد ایک پیرا دیسک ہیں یہاں اس عمل کا حرارت نہ گزر ہونے کے بھی

ضرورت نہیں ہے ہیئت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$ کی قیمت درکار ہوگی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(10.90) \quad \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{ig} \left[-i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 r \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 r \end{aligned}$$

بغیر زیر نوشت ∇ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ کے متعامل پر عمل کے دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری مکمل ہیمیلٹنی $-\hbar^2/2m \nabla^2 + V$ کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب i/\hbar ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہوگا یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.91) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(10.92) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو اہارونو و بوم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو و بوم اثر نہی ہیئت کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو و بوم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جاسکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے \mathbf{A} خود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا ہوا پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گیج غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں وقفہ $0 \leq x \leq a$ کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t) \delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں $f(t)$ آہستہ آہستہ صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت یہ ذرا ارتقائی ہیمیلٹین کے زمینی حال میں ہی رہے گا

۱. وقت $t \rightarrow \infty$ پر زمینی حال کا تھا کہ بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہوگا جس میں $a/2 + \epsilon$ پر ناقابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرا بائیں ہاتھ کے نسبتا بڑے حصہ میں رہنے کا پابند ہوگا

ب. وقت t پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T [\cos z - \cos(z\delta)]$$

$$\text{جہاں } k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar \text{ اور } \delta \equiv 2\epsilon/a \quad T \equiv maf(t)/\hbar^2 \quad z \equiv ka$$

ج. اب $\delta = 0$ لیتے ہوئے z کے لیے ترسیبی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ T کی قیمت 0 ہتا ∞ ہونے سے z کی قیمت π ہتا 2π ہوگی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب $\delta = 0.01$ لیتے ہوئے $T = 0, 1, 5, 20, 100$ اور 1000 کے لیے z اعدادی طریقے سے حاصل کریں

ه. کنویں کے دائیں نصف حصہ میں ذراہائے جانے کا احتمال بطور z اور δ کا تفاعل تلاش کریں جواب $P_r = [1/(1 + (I_+/I_-))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$ جہاں $I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))]$ جبکہ I_{\pm} ہوگا جس (د) میں دیے گئے T کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و. T اور δ کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترسیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذراہ کنویں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بودی ہارمونی سرعش کیت m تعدد ω پر $F(t) = m\omega^2 f(t)$ جہاں $f(t)$ کوئی مخصوص التفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے $m\omega^2$ کو صریحا لکھا ہے یوں $f(t)$ کا بعد فاصلہ ہوگا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$(10.93) \quad H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t)$$

فرض کریں وقت $t = 0$ پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہذا $t \leq 0$ پر $f(t) = 0$ ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹم میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے

۱. اگر سرعش مبداء پر ساکن حال $\dot{x}_c(0) = x_c(0) = 0$ سے آغاز کریں تب سرعش کا کلاسیکی معتمام کیا ہوگا جواب

$$(10.94) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر سرعش n وی حال $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$ جہاں $\psi_n(x)$ مساوات 61.2 دی جاتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت شرودنگر مساوات کے حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.95) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} \left[-(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega t + m \dot{x}_c (x - \frac{x_c}{2}) + \frac{m \omega^2}{2} \int_0^t f(t') x_c(t') x_c(t') dt' \right]}$$

ج. دکھائے کہ $H(t)$ کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار درج ذیل ہونگے

$$(۱۰.۹۶) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 f^2$$

د. دکھائیں کہ حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی معتام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے $x_c(t) \cong f(t)$ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرارت نہ گزر تفاعل f کہ وقتقی تفرق پر کیسا پسندی عائد کرتی ہے اشارہ $\sin[\omega(t - t')] \cos[\omega(t - t')] (1/\omega) (d/dt')$ لکھ کر مکمل مل تخص استعمال کریں

ه. اس مثال کے لیے مسئلہ حرارت نہ گزر کی تصدیق حبزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$(۱۰.۹۷) \quad \Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$$

تصدیق کیجئے گا کہ ہر کی ہیئت کاروپ درست ہے مساوات 39.10 کیا پسندی ہیئت آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرارت نہ گزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر $c_m(t)$ کے حرارت نہ گزر تسلسل کا پہلا حبزو قصور کیا جاسکتا ہے فرض کریں نظام n وی حال سے آغاز کرتا ہے حرارت نہ گزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت پسندی ہیئتقی حبزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ n وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرارت نہ گزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$(۱۰.۹۸) \quad c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt'$$

اس سے ہم متریب حرارت نہ گزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری سر نقش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کہ متریب حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہوگا میں تحویل ممکن ہوگی

$$c_{n+1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t f(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t f(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

یقیناً حویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

باب ۱۱

بکھراؤ

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

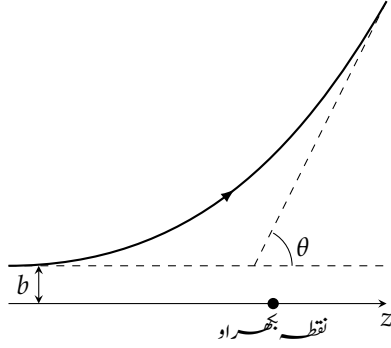
فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر داعضا جاتا ہے یہ توانائی E اور ٹکراؤ مقدار معلوم b کے ساتھ آکر کسی زاویائے بکھراؤ θ پر ابھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لیے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استی ثقلی ہے یوں خط حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لحاظ تصد اکی ہن پر اس کی حرکت اُچھلنے کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم کو جاننے ہوئے زاویائے بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سخت کرہ کا بکھراؤ۔ فرض کریں ہدف رداس R کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی صندوق کا ایک چہرہ ہے جو لچھیلی ٹپکی کھاکر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم $b = R \sin \alpha$ اور زاویہ بکھراؤ $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

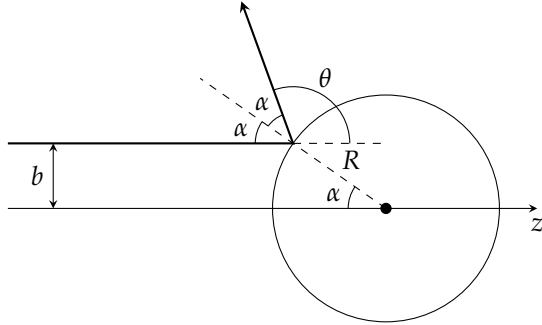
$$(11.1) \quad b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

ظاہری طور پر درج ذیل ہوگا

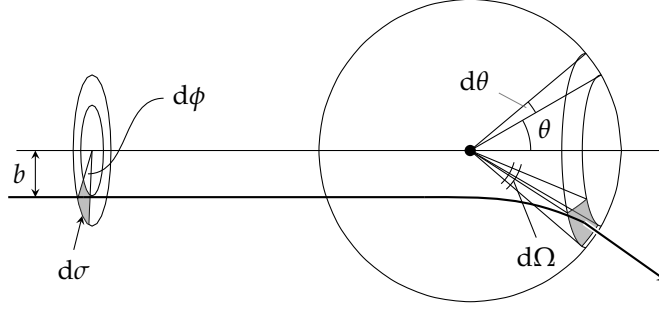
$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراؤ، جس میں نکتہ اور مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراؤ θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے پسندیدہ بکھراؤ۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ $d\sigma$ میں آمدنی ذرات ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش $d\sigma$ میں آمدنی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ بڑی $d\sigma$ کی صورت میں $d\Omega$ بھی بڑا ہوگا تناسبی حیز ضربی $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$ کو تفسیری بکھراؤ عمودی تراش کہتے ہیں

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

نکراؤ مقدار معلوم اور راستی زاویہ ϕ کی صورت میں $d\sigma = b db d\phi$ اور $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ہوں گے لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

چونکہ عمومی طور پر θ مقدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تفاعل ہوگا لہذا یہ تفرق در حقیقت منفی ہوگا اسی لیے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال ۱۱.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال جاری رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ مثال ۱۱.۱ کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$(11.6) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left(\frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□

اس مثال میں تفسیری عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا مکمل ہوگا

$$\sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega \quad (11.7)$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہوگا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$\sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2 \quad (11.8)$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھبرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھبرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً سرکڑہ کا کولمب میدان کے لیے بھی کارآمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہوگا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد} \quad (11.9)$$

فی اکائی وقت رقبہ $d\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھراؤ والے ذرات کی تعداد $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$ ہوگی لحاظ درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega} \quad (11.10)$$

چونکہ یہ صرف ان متقداروں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جاسکتا ہو لحاظ اس کو عموماً تفسیری عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھیرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو $d\Omega$ سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: رد فورڈ بکھراؤ۔ بار q_1 اور حسر کی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار q_2 ہو سے بکھرتا ہے۔

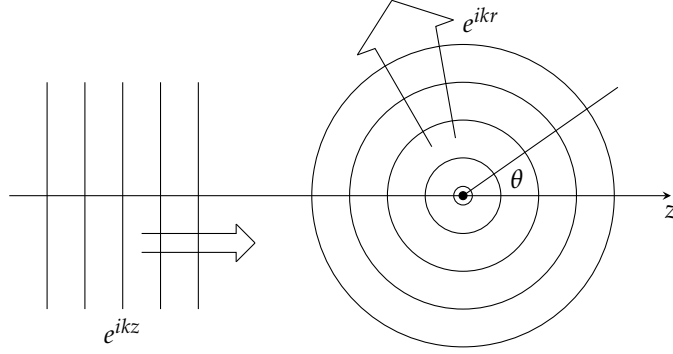
(الف) ٹکراؤ متقدار معلوم اور زاویہ بکھراؤ کے پیچ رشتہ اغیز کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2) \quad \text{جواب:}$$

(ب) تفسیری بکھراؤ عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.11)$$



شکل ۱۱.۳: امواج کا بکھراؤ؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروئی موج پیدا کرتی ہے۔

(ج) دیکھائیں کہ ردورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہوگا۔ ہم کہتے ہیں $1/r$ مخفیہ لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کو لمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹم نظریہ میں مندرجہ کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور z رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراؤ مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروئی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۳)۔ یعنی ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

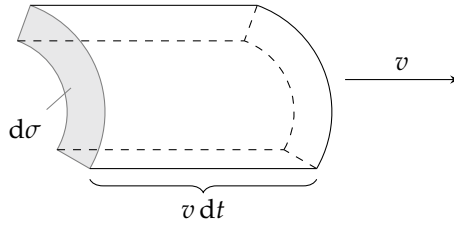
$$(11.12) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لیے}$$

کروئی موج میں جب ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے حناطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہوگا

$$(11.13) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

یہاں بھی میں مندرجہ کرتا ہوں کہ ہدف استی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروئی موج کا حیطہ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہوگا۔

ہمیں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ تعین کران ہوگا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ θ میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً سمتی رفتار v پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت dt میں لامتناہی چھوٹی



شکل ۱۱.۵: وقت dt کے دوران رقبہ $d\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم dV ہے۔

رقبہ $d\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$dP = |\psi_{آمدی}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھراؤ کا احتمال

$$dP = |\psi_{بکھراؤ}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا لحاظ $d\sigma = |f|^2 d\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$(11.13) \quad D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

ظاہر ہے کہ تفرقی عمودی تراسش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے جیٹ بکھراؤ جو مساوات ۱۱.۱۲ کے حل سے حاصل ہوگا کی مطلق مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم جیٹ بکھراؤ کی حساب کے دو ترائیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تخمینہ پر غور کریں گے۔

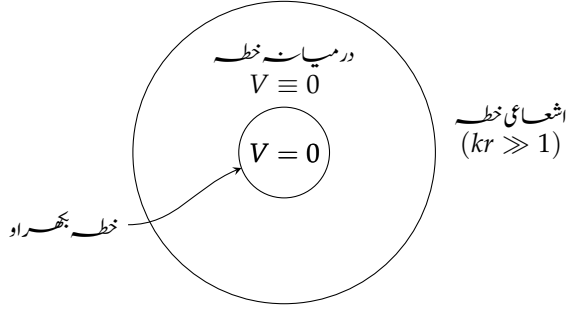
سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لیے مساوات 11.12 کے مثال تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی محفہ $V(r)$ کے لیے مساوات شرودنگر متابل علیحدگی حلوں

$$(11.15) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$



شکل ۱۱.۶: مقہای مخفیہ سے بکھراؤ؛ خط بکھراؤ، در میان خط، اور اشعاعی خط۔

کا حاصل ہوگا جہاں Y_l^m کر دی ہارمونکی مساوات 4.32 ہے اور $rR(r) = u(r)$ مساوات مساوات

$$(11.12) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

کو متعین کرتا ہے بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابل نظر ابداز ہوگا۔ لفظ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جزر خستی کر دی موج کو اور دوسرا جزر آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جب ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے اعتراف کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لیے ہوتا ہے کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $kr \gg 1$ کے لیے ہوتا ہے جیسا کہ مساوات میں خط اشعاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی مستثنائی بکھراؤ خط کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانی خط میں جہاں V کو رد کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز جز کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا ردا سی مساوات درج ذیل روپ اختیار

کرتی ہے۔

$$(11.17) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروئی۔ بیل تفاعلات کا خطی جوڑ ہوگا

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B r n_l(kr)$$

لیکن نہ ہی j_l جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی n_l جو متعیم کو سائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} کی طرح کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروئی بینکل تفاعلات کہتے ہیں

$$(11.19) \quad h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + i n_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - i n_l(x)$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروئی بینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_l^{(1)}(kr)$ جسے

$$h_l^{(2)}(x) \text{ اور } h_l^{(1)}(x) \text{ : جدول 11.1: کروئی بینکل تفاعلات}$$

$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$ $h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$ $h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$	$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$ $h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$ $h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$
$\left. \begin{aligned} h_l^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{l+1} e^{ix} \\ h_l^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{l+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1 \text{ کے لیے}$	

بینکل تفاعل کا پہلا قسم کہتے ہیں e^{ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_l^{(2)}(kr)$ بینکل تفاعل کی دوسری قسم e^{-ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ یوں رخصتی امواج کے لیے ہمیں کروئی بینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہوگی:

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_l^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہوگا بالکل ٹھیک تفاعل موج درجہ ذیل ہوگا

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا اجزاء آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشکلی ہے لحاظ تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یا درجہ $Y_l^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درجہ ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

جہاں l ویں لیٹنڈرکٹشیررکٹی کو P_l کو غلبہ کرتا ہے۔ روایتی طور پر a_l $i^{l+1}k\sqrt{4\pi(2l+1)}$ $C_{l,0}$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامت کیوں بہتر ہے a_l کو l واں جیٹہ جبزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں $i^{l+1} e^{ikr} / kr$ $(-i)^{l+1}$ جہول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا
لحظہ درج ذیل ہوگا

$$(11.24) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$(11.25) \quad f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta)$$

یہ مساوات 11.12 میں میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھتا ہے کہ جبزوی موج جیٹوں a_l کی صورت میں جیٹہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہوگا تفسیری عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.26) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta)$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.27) \quad \sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2$$

زاویائی نکل کو حل کرنے کے لیے میں نے لیٹنڈرکٹشیررکٹیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لیے جبزوی موج جیٹوں a_l کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیے کروبی محدود جبکہ آمدی موج کے لیے کارتیسی محدود استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لیے مساوات شرودنگر کو e^{ikz} متعین کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لیے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{l,m} [A_{l,m} j_l(kr) + B_{l,m} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یوں، مخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبدہ پر e^{ikz} مستثنیٰ ہے لحاظ نہ من تقاضات کی اجازت نہیں ہوگی $r = 0$ پر $n_l(kr)$ بے فتاویٰ ہوتے ہیں اور چونکہ $z = r \cos \theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لحاظ صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کردی امواج کی صورت میں سرچا پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) [j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr)] P_l(\cos \theta)$$

مثال ۱۱.۳: کو انٹیمخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل منرض کریں

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \text{ کے لیے} \\ 0, & r > a \text{ کے لیے} \end{cases}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

یوں تمام θ کے لیے

$$(11.32) \quad \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) [j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)}(ka)] P_l(\cos \theta) = 0$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$(11.33) \quad a_l = i \frac{j_l(ka)}{kh_l^{(1)}(ka)}$$

بخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(۱۱.۳۴) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جاسکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدید صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لیے $n_l(z)$ کی مقدار $j_l(z)$ سے بہت زیادہ ہوگی لحاظ

$$(۱۱.۳۵) \quad \frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z) + in_l(z)} \approx -i \frac{j_l(z)}{n_l(z)} \\ \approx -i \frac{2^l l! z^l / (2l+1)!}{-(2l)! z^{-l-1} / 2^l l!} = \frac{i}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^2 z^{2l+1}$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لحاظ بلند طاقتیں متبادل نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $l = 0$ حبز بکھراؤ میں غالب ہوگا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تفسیری عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہوگا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی تحت کرہ بکھراؤ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۱۱.۳۶) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

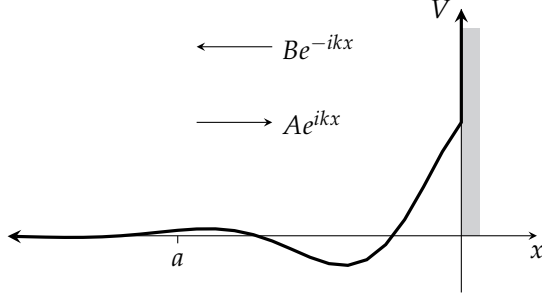
حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت جو میزانی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہوگا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُپر سے گزرتے ہیں ناکہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیٹانڈر کشیرر کئی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ l کی مختلف قیمتوں والے عددی سرلائٹما صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروئی ڈیلٹا تفسیر حل:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں جہاں α اور a مستقل ہیں۔ جیل بکھراؤ $f(\theta)$ تفسیری عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لحاظ صرف $l = 0$ حبز



شکل ۱۱.۷: معتمای مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامستناہی دیوار پائی جاتی ہے، سے ایک بعدی بکسراؤ۔

حنا طرحہ نصف ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی حنا طرہ آغاز سے ہی $l \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بعدی مقدار $\beta \equiv 2ma/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2 \text{ جواب:}$$

۱۱.۳ مستقلات حیط

پہلے نصف لکیر $x < 0$ پر مقامی مخفیہ $V(x)$ سے ایک بعدی بکسراؤ کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر ایسٹون کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$(11.37) \quad \psi_i(x) = Ae^{ikx} \quad (x < -a)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگا

$$(11.38) \quad \psi_r(x) = Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

باہم عمل خطے $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہوا احتمال کی بقا کی بنا پر منعقد موج کا حیطہ لاظماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا تو تب چونکہ مبدہ پر آمدی موج منعکس کل تن عمل موج صفر ہوگا

$$(11.39) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لحاظ $B = -A$ ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لیے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.۴۰) \quad \psi(x) = A \left(e^{ikx} - e^{i(2\delta-kx)} \right) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیے k لحاظ توانائی $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ کی صورت میں منتشر حیط کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراؤ $(-a < x < 0)$ میں مساوات زروڈنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیط B کی بجائے منتشر حیط کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیط تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا کیلے میں $m \neq 0$ والا کوئی حیز نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زیادائی معیار حرکت $(l = 0, 1, 2, \dots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظ ہر ایک حیزوی موج جسے کسی ایک خصوصی l سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیط میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی تاہم اس کا حیط تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہوگا لحاظ l ویں حیزوی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$(11.۴۱) \quad \psi_0^{(l)} = A i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۲) \quad j_l(x) = \frac{1}{2} \left[h^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x) \right] \approx \frac{1}{2x} \left[(-i)^{l+1} e^{ix} + i^{l+1} e^{-ix} \right] \quad (x \gg 1)$$

لحاظ بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۳) \quad \psi_0^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

چونکہ کورسین میں دوسرا حیز آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرانے سے تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا حیز رخصتی موج ہے جو منتشر حیط δ_l لیتا ہے

$$(11.۴۴) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

آپ e^{ikz} میں $h_l^{(2)}$ حیز کی بنا پر اس کو کروی سربکوز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_l$ منتشر حیط پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_l^{(1)}$ حصہ کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں a_l کی صورت میں پیش کیا گیا ہے اس کو مستقل حیط δ_l کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متعارف رویہ

$$(11.۴۵) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right] + \frac{(2l+1)}{r} a_l e^{ikr} \right\} P_l(\cos \theta)$$

کا δ_l کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.۴۶) \quad a_l = \frac{1}{2ik} \left(e^{2i\delta_l} - 1 \right) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$(11.۴۷) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$(11.۴۸) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے مستقلات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے۔ مستقل حیط زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_l جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_l استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بانیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[\frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad \text{جہاں } k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیط وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لیے متقلات δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بھراؤ کے لیے حبزوی موج حیٹی انتتال δ_l کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $l = 0$ حبزوی موج انتتال حیٹ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \rightarrow \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1} \left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \text{جہاں } \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$

اس کاروپ سرسری طور پر مساوات ہولشز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متبانیس حبز Q خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعل عملی منبع کے لیے مساوات ہولشز کو متعین کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \quad (11.52)$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک مکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0) Q(r_0) d^3 r_0 \quad (11.53)$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شعروڈنگر مساوات کو متعین کرتا ہے

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r-r_0)] Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r-r_0) Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولڈنگر کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیٹا تفاعل منبج کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پسلا کام $G(r)$ کے لیے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$(11.53) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$(11.56) \quad \delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

لہذا مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

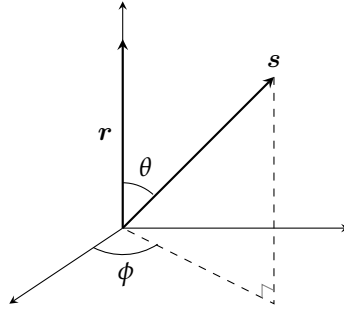
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is \cdot r} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کرنے کے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.58) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدود برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا مکمل۔

اب s مکمل کے نقطہ نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کردی محدود (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r کتنی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s \cdot r = sr \cos \theta$ ہوگا متغیر ϕ کا مکمل 2π ہوگا جبکہ θ مکمل درجہ ذیل ہوگا

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta \, d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

یوں درجہ ذیل ہوگا

$$(11.60) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds$$

باقی مکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیت استعمال کر کے نصب نمک کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مدد دگاتا بہت ہوتا ہے

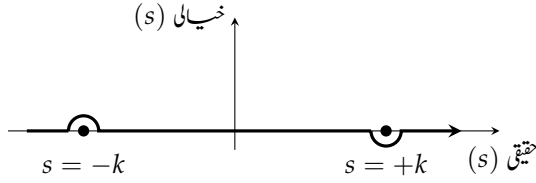
$$(11.61) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds \right\}$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

اگر z_0 خط ارتقاء کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ مکمل

$$(11.62) \quad \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} \, dz = 2\pi i f(z_0)$$

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے دیگر صورت مکمل صفر ہوگا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا



شکل ۱۱.۹: ارتقاعی مکمل (مسوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔



شکل ۱۱.۱۰: مسوات ۱۱.۶۳ اور مسوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

ہوگا میں $-k$ پر بائیں جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھاؤں گا کہ یہ تمام متبادل قبول ہوں گے۔

مسوات 11.61 میں ہر ایک مکمل کے لیے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ مکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جز بہت بڑا اور مثبت ہو تب جز ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس مکمل کے لیے ہم بالانصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰)۔ اب خط ارتقاع صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.63) \quad I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

مکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جز بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جز ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لحاظ ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰)۔ اس مرتبہ خط ارتقاع $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لحاظ اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$(11.64) \quad I_2 = - \oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.65) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[\left(i\pi e^{ikr} \right) - \left(-i\pi e^{ikr} \right) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات پلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلا واسطہ تفریق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیئے گا سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات پلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس پلم ہولٹز مساوات کو متعین کرتا ہو

$$(11.61) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی متعین کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے متعین سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.62) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شرودنگر کو متعین کرتا ہے

$$(11.68) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

مساوات 11.67 شرودنگر مساوات کی تکمیلی روپ ہے جو زیادہ معروضی تفریق روپ کی مکمل طور پر معدل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکمیلی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بلخصوص بکھراؤ مسائل کے لیے نہایت موضوع ہے۔

سوال 11.8: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے متعین کرتا ہے۔ اشارہ: $-\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$

سوال 11.9: دیکھیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لیے مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ کو ہائڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 متعین کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ E منفی ہے لحاظ $k = i\kappa$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہوگا۔

۱۱.۴ بارن تخمین اول

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مکانی مخفیہ ہے یعنی کسی مستطانی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہونگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات

11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لہذا

$$(11.69) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2 \frac{r \cdot r_0}{r^2} \right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.70) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.71) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.72) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.73) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نام میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نام میں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نام میں دوسرے جز کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔ بکھراؤ کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$(11.74) \quad \psi_0(r) = A e^{ikz}$$

یوں بڑی r کے لیے درج ذیل ہوگا

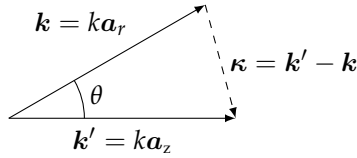
$$(11.75) \quad \psi(r) \cong A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم جیلے بکھراؤ پڑھ سکتے ہیں

$$(11.76) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین باروہ کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ متابل ذکر تبدیل نہیں کرتا ہوا ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(11.77) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = A e^{ikz_0} = A e^{ik' \cdot r_0}$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراؤ رخ ہے۔

جہاں تھکل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$(11.48) \quad k' \equiv k\hat{z}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا ہے بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k'-k)\cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ معاصر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بلخصوص خطہ بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراؤ کے لیے قوت نمائی حبز ضربی بنیادی طور پر مستقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.80) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا اید کی حیاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔
مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.81) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع جملہ مکھراؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.82) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفریقی عمودی تراش

$$(11.83) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراسش درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2 \quad (11.83)$$

□

ایک کروئی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لیے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمینہ بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \quad (11.85)$$

r_0 مکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0 \quad (11.86)$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0 \quad (11.87)$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے مکمل 2π دیا اور θ_0 مکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیر نوشت کوٹ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروئی تشاکل} \quad (11.88)$$

f کی زیویائی تابعیت κ میں سوئی گئی ہے شکل ۱۱.۱۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\kappa = 2k \sin(\theta/2) \quad (11.89)$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ ہندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کاروپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقل ہیں

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (11.90)$$

تخمین بارن درج ذیل دیا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)} \quad (11.91)$$

□ آپ کو سوال 11.11 میں یہ مکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۶: ردرفورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ جیٹ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.93) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0E\sin^2(\theta/2)}$$

اس کا مربع ہمیں تفسیریاتی عمودی تراش دے گا

$$(11.94) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0E\sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لیے کالسی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹم نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لیے نرم کرہ بکھراؤ کا جیٹ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں مکمل کی قیمت تلا کر کے دائیں ہاتھ ریاضی منکرہ کی تصدیق کریں۔

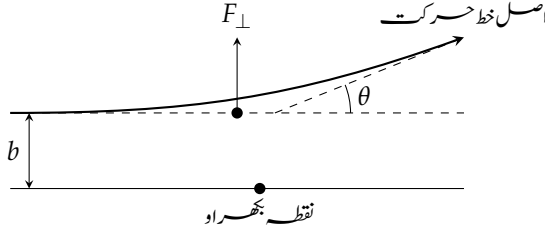
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تناسب لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لیے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں مندرجہ ذیل کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لیے ہم تخمین ضرب میں مندرجہ ذیل ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لکیر پر ہی چلے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_{\perp} dt \quad (11.95)$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \quad (11.96)$$

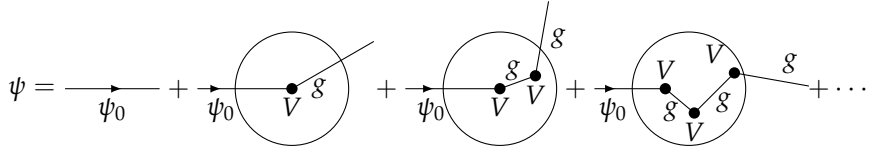
اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں۔ اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مہر کوڑ ہو سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی عملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r-r_0)V(r_0)\psi(r_0) d^3 r_0 \quad (11.97)$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (11.98)$$



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظیری مفہوم۔

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیے $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$(11.99) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے مکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$(11.100) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi$$

اس عمل کے بار بار دہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$(11.101) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots$$

ہر مکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبہ تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ کہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ ضرر رتبہ ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبہ اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبہ میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاعل عمل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ تسلسل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹم میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جز ضربی را V اور اشاعت کار g کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردورڈ بکھراؤ کے لیے θ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دیکھیں کہ مناسب حدود کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی منکرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لیے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

سوال ۱۱.۱۶: ایک بُعدی مساوات شرودنگر کے لیے تنف عمل گریں تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مثل نمثلی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$(11.102) \quad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدہ پربغیر ایسنٹون کی دیوار کی صورت میں وقف $-\infty < x < \infty$ پر ایک بُعدی بکھراؤ کے لیے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمینہ بن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے عمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.103) \quad R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیٹا تنف عمل مساوات 2.114 اور ایک مستثنائی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لیے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو ایک بُعدی تخمینہ بن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازی کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ ہیٹ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$(11.104) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$(11.105) \quad V(r) = Ae^{-\mu r^2}$$

باب ۱۲

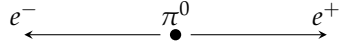
پس نوشت

اب چونکہ میں توقع کرتا ہوں آپ کو انٹرمیکانیات کو سمجھتے ہیں ہم حصہ 1.2 میں کیا گیا سوال دوبارہ اٹھاتے ہیں کو انٹرمیکانیات کے نتائج سے کیا مطلق اعزاز کرنا چاہیے مسئلہ کا حل تفاعل موج کے ساتھ وابستہ شماریاتی مفہوم کی عدم تعینیت ہے۔ تفاعل ψ یا کو انٹرمیکانیات کا حل کہنا بہتر ہوگا جو مثال کے طور پر چکر کار ہو سکتا ہے صرف ممکنہ نتائج کی شماریاتی تقسیم مہیا کرتا ہے اور کسی بھی پیمائش کا نتیجہ یکتا طور پر تعین نہیں کرتا اس سے ایک اہم سوال کھڑا ہوتا ہے کیا پیمائش سے قبل نظام یہ مخصوص خاصیت حقیقتاً رکھتا تھا جسے حقیقت پسند نقطہ نظر کہتے ہیں یا پیمائش کے عمل نے اس خاصیت کو جسم دیا جو تا فعل موج کی شماریاتی پابندی کو مطمئن کرتا ہے۔ تقلید پسند نقطہ نظر یا ہم اس سوال کو ان بنیادوں پر رد کرتے ہیں کہ یہ سوال ایک فرضی سوال ہے انکاری نقطہ نظر۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے کو انٹرمیکانیات ایک نامکمل نظریہ ہے چونکہ کو انٹرمیکانیات کی تمام فراہم کردہ معلومات یعنی اس کا تفاعل موج جانتے ہوئے آپ خواص تعین نہیں کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں کو انٹرمیکانیات سے باہر کوئی اور معلومات ہوگی جس کو ψ کے ساتھ ملا کر طبعی حقائق کو مکمل طور پر بیان کرنا ممکن ہوگا۔

تقلید پسند نقطہ نظر اس سے بھی زیادہ سنگین سوالات کھڑے کرتا ہے چونکہ اگر پیمائشی عمل نظام کو ایک خاصیت اختیار کرنے پر مجبور کرتا ہو تب پیمائش ایک عجیب عمل ہوگا ساتھ ہی یہ جانتے ہوئے کہ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی نتیجہ دیتی ہے ہمیں ماننا ہوگا کہ پیمائشی عمل تفاعل موج کو یوں مخدہ کرتا ہے جو موادات شر وڈنگر کی تجویز کردہ ارتقاء کے برعکس ہے۔

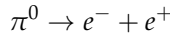
ان سب کی روشنی میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نسل در نسل ماہر طبیعیات انکاری سوچ کے پیچھے پن لینے پر مجبور کیوں ہوئے اور اپنے شاگردوں کو نصیحت کرتے رہے کہ نظریہ کے تصوراتی بنیادوں پر غور و فکر کر کے اپنا وقت ضائع نہ کریں۔



شکل ۱۲.۱: آئنسٹائن، پوڈولسکی و روزن تضاد کا بوجہ، انداز۔ ساکن π^0 کا تنزل الیکٹران و ضد الیکٹران جوڑی میں ہوتا ہے۔

۱۲.۱ آئنسٹائن پوڈولسکی و روزن تضاد

۱۹۳۵ء میں آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن نے مل کر آئنسٹائن پوڈولسکی اور روزن تضاد پیش کیا جس کا مقصد حتمی نظریاتی بنیادوں پر یہ ثابت کرنا تھا کہ صرف حقیقت پسندانہ نقطہ نظر درست ہو سکتا ہے۔ میں اس تضاد کی ایک سادہ روپ جو داؤد بام نے پیش کی پر تبصرہ کرتا ہوں۔ تادیلی پائے میزان کی ایک الیکٹران اور ایک پڑون میں تحلیل پر غور کریں



ساکن پائون کی صورت میں الیکٹران اور پڑون ایک دوسرے کے مخالف رخ جائیں گے (شکل ۱۲.۱)۔ اب چونکہ پائون کا چکر صفر سے لحاظ زاویائی معیار حرکت کی بقا کے تحت یہ الیکٹران اور پڑون میں ایک تا تفکیک میں ہوں گے

$$(12.1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + -\downarrow\uparrow)$$

اگر دیکھا جائے کہ الیکٹران ہم میدان ہے تب پڑون میں ان لاظمًا خلاف میدان ہوگا اور اسی طرح اگر الیکٹران خلاف میدان پایا جائے تب پڑون میں ان ہم میدان ہوگا۔ کوآنٹم میکانیات آپ کو یہ بتائے گا کہ کس پائون تحلیل میں آپ کو کونسی صورت حال ملے گی تاہم کوآنٹم میکانیات یہ ضرور بتا سکتی ہے کہ ان پیمائش کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق ہوگا اور اوسطاً نصف وقت ایک قسم اور نصف وقت دوسری قسم کی جوڑیاں پیدا ہوں گے۔ اب فرض کریں ہم ان الیکٹران اور پڑون میں ان کو ایک عملی تجربہ کے لیے دس میٹر تک جانے دیں یا اصولاً دس نوری سال تک جانے دیں اور اس کے بعد الیکٹران کے چکر کی پیمائش کریں۔ فرض کریں آپ کو ہم میدان ملتا ہے۔ آپ فوراً جان پائیں گے کہ بیس میٹر یا بیس نوری سال دور کوئی دوسرا شخص پڑون میں ان کو خلاف میدان پائے گا۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے اس میں کوئی حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ انکی پیمائش کے وقت سے ہی الیکٹران حقیقتاً ہم میدان اور پڑون میں ان خلاف میدان تھے ہاں کوآنٹم میکانیات ان کے بارے میں جاننے سے متاثر تھا۔ تاہم تقلید پسند نقطہ نظر کے تحت پیمائش سے قبل دونوں ذرات نہ ہم میدان اور نہ ہی خلاف میدان تھے الیکٹران پر پیمائش تفاعل موج کو منحرف کرتی ہے جو فوراً بیس میٹر یا بیس نوری سال دور پڑون میں ان کو خلاف میدان بناتا ہے۔ آئنسٹائن پوڈولسکی اور روزن اس قسم کے دور عمل کرنے والے عوامل میں یقین نہیں رکھتے تھے۔ یوں انہوں نے تقلید پسند نقطہ نظر کو نامتابل قبول و مترار دیا چاہے کوآنٹم میکانیات حتمی ہو یا نہ حتمی ہو الیکٹران اور پڑون میں ان لاظمًا کسی مخصوص چکر کے حامل تھے۔

ان کی دلیل اس بنیادی مفروضہ پر کھڑی ہے کہ کوئی بھی اثر روشنی کی رفتار سے تیز سفر نہیں کر سکتا ہے۔ ہم اسے اصول معتمدیت کہتے ہیں۔ آپ کو شبہ ہو سکتا ہے کہ تعامل موج کی انہدام کی خبر کسی مستناہی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہے۔ تاہم ایسی صورت میں زاویائی معیار حرکت کی بقا متعن نہیں ہوگی چونکہ پوزیشن ان تک انہدام کی خبر پہنچنے سے پہلے اگر ہم اس کے چکر کی پیمائش تو ہمیں دونوں اقام کے چکر چپا چپا س فیصد احتمال سے حاصل ہوں گے۔ آپ کا نظریہ جو بھی کہے تجربہ بات کے تحت دونوں کے چکر ہر صورت ایک دوسرے کے مخالف ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے تعامل موج کا انہدام ایک دم ہوتا ہے۔

سوال ۱۲.۱: یولیدہ حالات کی ایک کلاسیکی مثال یکتا چکر تشکیل مساوات 12.1 ہے۔ اس دوزہ حال کو دو یک ذری حالات کا مجموعہ نہیں لکھا جاسکتا ہے لحاظ جس کے بارے میں بات کرتے ہوئے کسی ایک ذرے کے علیحدہ حال کی بات نہیں کی جاسکتی ہے۔ آپ گمان کر سکتے ہیں کہ شانہ ہماری علاقیت کی بنا پر ہے اور عین ممکن ہے کہ یک ذرہ حالات کا کوئی خطی جوڑ اس نظام کو کھول سکے درج ذیل مسئلہ کا ثبوت پیش کریں۔

دو سطحی ایک نظام $|\psi_a\rangle$ اور $|\psi_b\rangle$ پر غور کریں جہاں $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$ ہو۔ مثلاً $|\psi_a\rangle$ ہم میدان اور $|\psi_b\rangle$ مخالف میدان کو ظاہر کر سکتا ہے۔ دو ذری حال

$$\alpha |\phi_a(1)\rangle + \beta |\phi_b(1)\rangle + \alpha |\phi_a(2)\rangle + \beta |\phi_b(2)\rangle$$

جہاں $\alpha \neq 0$ اور $\beta \neq 0$ ہیں کو کسی بھی یک ذری حالات $|\psi_r\rangle$ اور $|\psi_s\rangle$ کا حاصل ضرب

$$|\psi_r(1)\rangle + |\psi_s(2)\rangle$$

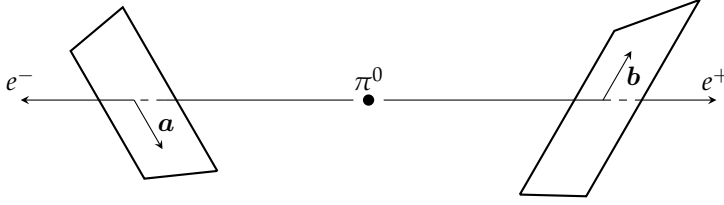
نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

اشارہ: $|\psi_s\rangle$ اور $|\psi_r\rangle$ کو $|\psi_a\rangle$ اور $|\psi_b\rangle$ کے خطی جوڑ لکھیں۔

۱۲.۲ مسئلہ بل

آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن کا کوانٹم میکانیات کی درستگی پر کوئی شک نہیں تھا البتہ انکا دعوہ کے طبعی حقیقت کو بیان کرنے کے لیے یہ ایک نہ مکمل نظریہ ہے کسی بھی نظام کا حال پوری طرح جاننے کی خاطر ψ کے ساتھ ساتھ ایک اور مقدار λ درکار ہوگی۔ چونکہ فعل حال ہم نہیں جاننے کہ λ کو کس طرح ناپا یا حساب کے ذریعہ معلوم کیا جائے۔ لحاظ ہم اسے درپردہ متغیر کہتے ہیں۔ تاریخی طور پر کئی درپردہ متغیر نظریات پیش کئے گئے جو پیچیدہ ہونے کے ساتھ ساتھ نامعقول ثابت ہوئے بہر حال سن 1964 تک اس پر کام کرنے کی وجہ نظر آتی تھی تاہم اس سال جناب بل نے ثابت کیا کہ درپردہ متغیر نظریہ اور کوانٹم میکانیات ساتھ ساتھ نہیں چل سکتے ہیں۔

بل نے آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن بونہم تجربہ کو عمومی بنانے کی بات کی الیکٹران اور پوزیٹرون کاشف کو ایک ہی رخ رکھنے کی بجائے بل نے انہیں علیحدہ علیحدہ زاویوں پر رکھنے کی اجازت دی۔ پہلا کاشف اکائی سمتیہ a کے رخ الیکٹران



شکل ۱۲.۲: آئنسٹائن، پوڈولسکی و روزن تصادف کا مکمل اندازہ۔ کاشف آزادانہ طور پر a اور b رخ سمت بند ہیں۔

چپکر کا جبر ناپتا ہے جبکہ دوسرا b کے رخ پوزیشن ان کے چپکر کا حصہ ناپتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ ہم اپنی آسانی کے لیے چپکر کو $\hbar/2$ کی اکائیوں میں ناپتے ہیں یوں کاشف کے رخ ہم میدان کی قیمت $+1$ اور خلاف میدان کی قیمت -1 ناپی جائے گی۔ کئی π^0 تسنزل کے نتائج درج ذیل جدول میں پیش کئے گئے نتائج کی طرح ہو سکتے ہیں۔ کاشف

الیکٹران	پوزیشن ان	حاصل ضرب
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	+1
-1	-1	-1
⋮	⋮	⋮

کے رخوں کی کسی ایک جوڑی کے لیے بل نے چپکر کے حاصل ضرب کی اوسط قیمت تلاش کی جسے ہم $P(a, b)$ لکھتے ہیں۔ متوازی کاشفوں کی صورت میں $b = a$ ہوگا جو ہمیں اصل آئنسٹائن و پوڈولسکی و روزن و بوم تشکیل دینا ایسی صورت میں ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان ہوگا لحاظ ان کا حاصل ضرب ہر صورت -1 ہوگا اور یوں اوسط کی قیمت بھی یہی ہوگی

$$(12.2) \quad P(a, a) = -1$$

اسی طرح اگر کاشف زد متوازی ہوں تب $b = -a$ اور ہر حاصل ضرب $+1$ لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(12.3) \quad P(a, -a) = +1$$

اختیاری سمت بندی کے لیے کو انٹرمیکانیات درج ذیل پیش گوئی کرتی ہے

$$(12.4) \quad P(a, b) = -a \cdot b$$

سوال 4.50 دیکھیں۔ بل نے دریافت کیا کہ یہ نتیجہ کسی بھی درپردہ متغیر نظریہ کا ہم اہنگ نہیں ہو سکتا ہے۔

اس کا دلیل حیرت کن حد تک سادہ ہے فرض کریں الیکٹران پوزیشن ان نظام کے مکمل حال کو کوئی درپردہ متغیر یا متغیرات λ ظاہر کرتا ہے۔ ایک پائیون تسنزل سے دوسرے پائیون تسنزل تک λ کی تبدیلی کو نہ ہم

سمجھتے اور سنہ بی فتا بو کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مندرج کرتے ہیں کہ الیکٹران کی پیمائش پر پوزیٹرون کاشف کی سمت بندی b کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے یا درہے کہ تجربہ کرنے والا الیکٹران کی پیمائش کے بعد پوزیٹرون کاشف کا رخ منتخب کر سکتا ہے۔ ایسی صورت میں چونکہ پوزیٹرون کاشف کا رخ منتخب کرنے سے پہلے ہی الیکٹران کی پیمائش کی جا چکی ہوگی لحاظ اس پر بھی کی سمت کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا ہے۔ یہ اصول مقننیت کا مفروضہ ہے یوں الیکٹران کی پیمائش کوئی تقاضا $A(a, \lambda)$ اور پوزیٹرون کی پیمائش کوئی دوسرا تقاضا $B(b, \lambda)$ دیگا۔ ان تقاضات کی قیمتیں صرف ± 1 ہو سکتی ہیں

$$(۱۲.۵) \quad A(a, \lambda) = \pm 1; \quad B(b, \lambda) = \pm 1$$

جب کاشف متوازی ہوں تب تمام λ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۶) \quad A(a, \lambda) = -B(a, \lambda)$$

اب پیمائشوں کی حاصل ضرب کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی جہاں $\rho(\lambda)$ درپردہ متغیر کی کثافت احتمال ہے

$$(۱۲.۷) \quad P(a, b) = \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda$$

کسی بھی کثافت کا احتمال کے لیے یہ غیر منفی ہوگا اور معمولی شرط $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ کو متعین کرے گا تاہم اس کے علاوہ ہم $\rho(\lambda)$ کے بارے میں کچھ بھی مندرج نہیں کرتے ہیں درپردہ متغیر کے مختلف نظریات ρ کے لیے کافی مختلف تقاضات پیش کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.6 کو استعمال کرتے ہوئے ہم B کو خارج کر سکتے ہیں۔

$$(۱۲.۸) \quad P(a, b) = - \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda$$

اگر c کوئی تیسرا اکائی سمتیہ ہو تب بدرج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۹) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [A(a, \lambda) A(b, \lambda) - A(a, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

اور چونکہ $[A(b, \lambda)]^2 = 1$ ہے لحاظ بدرج ذیل ہوگا

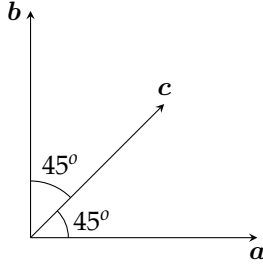
$$(۱۲.۱۰) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] A(a, \lambda) d\lambda$$

تاہم مساوات 12.5 کے تحت $+1 \leq [A(a, \lambda) A(b, \lambda)] \leq -1$ مندرجہ $\rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] \geq 0$ لحاظ

$$(۱۲.۱۱) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

یا مختصر ادرج ذیل ہوگا

$$(۱۲.۱۲) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$



شکل ۱۲.۳: کاشف کو یوں سمت بند کیا گیا ہے کہ بل عدم مساوات کی کوانٹائی خلاف ورزی ظاہر ہو۔

یہ مشہور بل عدم مساوات ہے۔ مساوات 12.5 اور 12.6 کے علاوہ کوئی شرط عائد نہیں کی گئی ہے ہم نے درپردہ متغیرات کی تعداد یا خاصیت یا تقسیم ρ کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کیا لحاظ سے عدم مساوات ہر مکائی درپردہ متغیر نظریہ کے لیے کارآمد ہوگا۔

لیکن ہم بہت آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ کوانٹم میکانیات کی پیش گوئی مساوات 12.4 اور بل عدم مساوات ہم اہن نہیں ہیں۔ فرض کریں تینوں اکائی سمتیات ایک مستوی میں پائے جاتے ہوں اور a اور b کے ساتھ c کا زاویہ 45° ہو (شکل ۱۲.۳)۔ ایسی صورت میں کوانٹم میکانیات کہتی ہے کہ

$$P(a, b) = 0,$$

$$P(a, c) = P(b, c) = -0.707$$

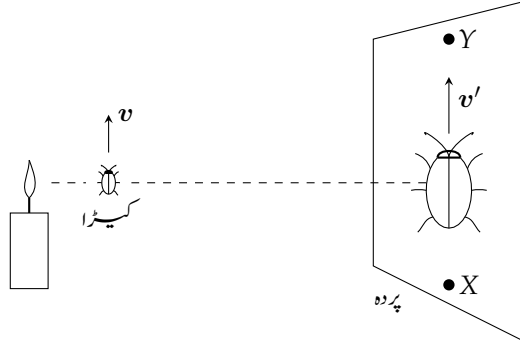
جبکہ بل عدم مساوات کہتی ہے کہ

$$0.707 \nless 1 - 0.707 = 0.293$$

جب ایک دوسرے کے غیر ہم ابٹگ نتائج ہیں یوں بل کی ترمیم سے آندھٹائن، پڈولسکی اور روزن تضاد ایک ایسی بات ثابت کرتا ہے جو اس کے مصنفین تصور بھی نہیں کر سکتے تھے۔ اگر وہ درست ہوں تب نہ صرف کوانٹم میکانیات مکمل ہے بلکہ یہ مکمل طور پر غلط ہے اس کے برعکس اگر کوانٹم میکانیات درست ہے تب کوئی درپردہ متغیر نظریہ ہمیں اس غیر مکامیت سے نجات نہیں دے سکتی جسے آندھٹائن مضائقہ خیز سمجھتا تھا۔ مزید اب ہم بہت سادی تجربہ سے اس مسئلے کو دفن کر سکتے ہیں۔

بل عدم مساوات کو پرکھنے کے لیے ساٹھ اور ستر کی دہائیوں میں کئی تجربات سرانجام دے گئے جن میں ایسکٹ، گرنیکز اور روجر کا کام متبادل فخر ہے ہمیں یہاں انکے تجربہ کی تفصیل سے دلچسپی نہیں ہے۔ انہوں نے پائیون ترمز کی بجائے دو نور پ جوہری انتقال استعمال کیا یہ خدشہ دور کرنے کے لیے کہ الیکٹران کاشف کی سمت بندی کو کسی طرح پوزیشن کاشف جان پائے گا نوریہ کی راواگی کے بعد دونوں کی سمت بندی کی گئی۔ نتائج کوانٹم میکانیات کی پیش گوئی کی عین مطابق تھے اور بل عدم مساوات کے غیر ہم ابٹگ تھے۔

ستم ظریفی کی بات ہے کہ کوانٹم میکانیات کی تجرباتی تصدیق نے سائنسی برادری کو ہلا کر رکھ دیا۔ لیکن اس کی وجہ حقیقت پسند سوچ کا غلط ثابت ہونا نہیں تھا عموماً سائنسدان کب کے اس حقیقت کو مان چکے تھے اور جو ابھی بھی



شکل ۱۲.۴: پردہ پر کیڑے کا سایہ، روشنی کی رفتار c سے زیادہ رفتار v' سے حرکت کرتا ہے بشرطیکہ پردا کافی دور ہو۔

مانتے تھے انکے لیے غیر مکائی در پردہ متغیر نظریات کا راستہ ابھی کھلا ہے چونکہ مثلاً بل اطلاق ان پر نہیں ہوتا ہے۔ اصل سدم اس بات کا تھا کہ قدرت خود بنیادی طور پر غیر مکائی ہے۔ تقابل عمل موج کی فوراً فہم کی صورت میں غیر مکامیت یا متماثل ذرات کے لیے ضرورت تشاکلیست ہمیشہ تقلید پسند نظریہ کی خاصیت رہی ہے۔ تاہم ایسپیکٹ کے تجربے سے قبل اُمید کی جاسکتی تھی کہ کوانٹم غیر مکامیت کسی طرح متناہد و ضوابط کی غیر طبعی پسیدہ اور تھی جس کے متقابل کشف اثرات نہیں ہو سکتے ہیں اس اُمید کو بھول جائیں ہمیں مناسلہ پر یکدم عمل کے تصور کو دوبارہ دیکھنا ہوگا۔

ماہر طبیعیات روشنی سے زیادہ تیز رفتار اثر و وسوخ کو کیوں برداشت نہیں کر سکتے ہیں؟ آخر کئی چیزیں روشنی سے زیادہ تیز رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ ایک موم بتی کے سامنے چلتے ہوئے کیڑے کا سامنے دیوار پر سائے کی رفتار دیوار تک مناسلہ کے راست مستناسب ہوگی اصولاً آپ اس مناسلہ کو اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ سایہ کی رفتار روشنی سے زیادہ ہو (شکل ۱۲.۴)۔ تاہم دیوار پر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک سایہ نہ کوئی توانائی منتقل کر سکتا ہے اور نہ ہی کوئی خبر پہنچا سکتا ہے۔ نقطہ X پر ایک شخص ایسا کوئی عمل نہیں کر سکتا جو یہاں سے گزرتے ہوئے سائے کے ذریعہ نقطہ Y پر اثر انداز ہو۔

اس کے برعکس روشنی سے زیادہ تیز حرکت کرنے والے سبھی اثر و وسوخ کے ناقبل مقبول مضمرات ہو سکتے ہیں۔ خصوصی نظریہ اضافت میں ایسے جمودی چوکھٹ پائے جاتے ہیں جن میں اس طرح کا اشارہ وقت میں پیچھے جاکے کا یعنی سبب سے پہلے اثر رونما ہوگا جس سے ناقابل مقبول منتقلی مسائل کھڑے ہوتے ہیں۔ مثلاً آپ اپنے نوزادہ دادا کو قتل کر سکتے ہیں۔ جو ظاہر ہے ایک بری بات ہے۔ اب سوال یہ کھڑا ہوتا ہے کہ آیا روشنی سے تیز اثرات جن کی پیشگاہ کوئی کوانٹم میکانیات کرتی ہے اور جو ایسپیکٹ کے تجربے میں کشف ہتے ہیں ان معانوں میں سببی ہے یا سائے کی حرکت کی طرح غیر حقیقی ہے جن پر فلسفیانہ اعتراضات نہیں لگائے جاسکتے ہیں۔

آئیں تجربے بل پر غور کریں کریں۔ کیا الیکٹران کی پیمائش کا پوزیشنران کی پیمائش پر اثر ہوگا یقیناً ایسا ہوتا ہے ورنہ ہم مواد کے بیچ باہم رشتہ کی وضاحت پیش کرنے سائے فاصر ہوں گے۔ لیکن کیا الیکٹران کی پیمائش پوزیشنران

کی کسی مخصوص نتیجہ کا سبب ہے؟ الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائش کے ذریعہ پوزیٹرون کاشف پر بیٹھے شخص کو اشارہ نہیں بھیج سکتا ہے چونکہ یہ اپنی پیمائش کے نتیجہ کو دتا ہو نہیں کرتا یہ الیکٹران کو ہم میدان ہونے پر مجبور نہیں کر سکتا ہے جیسا نقطہ X پر کیڑا کے سارے پر وہ شخص اثر انداز نہیں ہو سکتا، ہاں الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص فیصلہ کر سکتا ہے کہ وہ پیمائش کرے یا نہ کرے تاہم پوزیٹرون کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائش کے نتائج کو دیکھ کر یہ نہیں بتا سکتا کہ الیکٹران پر پیمائش کی گئی یا نہیں دونوں کاشف کے نتائج پر علیحدہ علیحدہ غور کرنے سے مکمل بلاواستہ مواد دیکھنے کو ملتا ہے۔ صرف دونوں مواد کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں ان کے بیچ باہم رشتہ نظر آتا ہے کسی دوسرے جمودی چوکھٹ میں الیکٹران کی پیمائش سے قبل پوزیٹرون کی پیمائش کی جائے گی لیکن اس کے باوجود اس سے کوئی متقی تہا پیدا نہیں ہوتا۔ دیکھا گیا باہم رشتہ اس پر منحصر نہیں کہ ہم کہیں الیکٹران کی پیمائش پوزیٹرون کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے یا پوزیٹرون کی پیمائش الیکٹران کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے۔ یہ ایک نہایت نازک اور خوبصورت اثر ہے جو بلاواستہ مواد کے بیچ باہم رشتہ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

یوں ہم مختلف قسم کے اثرات کی بات کرنی ہوگی سبھی قسم جو وصول کنندہ کی کسی طبعی خاصیت میں حقیقی تبدیلیاں پیدا کرتا ہو جنہیں صرف ذیلی نظام پر تجرباتی پیمائش سے کشف کیا جاسکتا ہو اور آسمانی قہر جو توانائی یا معلومات کی ترسیل نہیں کرتا اور جس کے لیے واحد ثبوت دو علیحدہ ذیلی نظاموں کے مواد کے بیچ باہم رشتہ ہے۔ اس باہم رشتہ کو کسی بھی طرح کسی ایک ذیلی نظام میں تجرباتی کے نتائج کو دیکھ کر کشف نہیں کیا جاسکتا ہے۔ سبھی اثرات روشنی کی رفتار سے تیز حرکت نہیں کر سکتے ہیں جبکہ آسمانی اثرات پر ایسی کوئی پابندی عائد نہیں۔ تعادل نوج کی انہدام سے وابستہ اثرات منحصر الذکر قسم کی ہے جس کا روشنی سے تیز سفر کرنا حیران کن ضرور ہو سکتا ہے لیکن تباہ کن نہیں ہے۔

۱۲.۳ مسئلہ کلیہ

کو انٹیم پیمائش عموماً تباہ کن ہوتے ہیں یعنی یہ پیمائش کردہ نظام کے حال کو تبدیل کرتا ہے۔ یہی تجربہ گاہ میں اصول عدم یقینیت کو یقینی بناتا ہے ہم کیوں اصل حال کی کئی متبادل نقل نقل کلیہ بن کر اصل نظام کو چھوئے بغیر ان کی پیمائش نہیں کرتے ایسا کرنا ممکن نہیں ہے۔ اگر آپ کلیہ بنانے والا ایسا آلا بنائیں تو کو انٹیم میکانیات کو خداحافظ کہنا ہوگا۔

مشال کے طور پر آئنسٹائن، پوڈولسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے ذریعہ روشنی سے تیز رفتار پر خبر بھیجتا ممکن ہوگا فرض کریں پوزیٹرون کاشف چلانے والا شخص ہاں یا نہیں کی خبر ترسیل کرتا ہے۔ خبر ہاں ہونے کی صورت میں بھیجے والا پوزیٹرون کا S_z ناپتا ہے یہ جاننے کی ضرورت نہیں کہ پیمائش کے نتیجہ کیا ہے صرف اتنا جاننا ضروری ہے کہ پیمائش کی گئی ہے یوں الیکٹران کسی غیر مبہم حال \uparrow یا \downarrow میں ہوگا جس کا جاننا غیر اہم ہے۔ خبر وصول کرنے والا جلدی سے الیکٹران کی دس لاکھ کلیہ تیار کر کے ہر ایک کی S_z ناپتا ہے اگر تمام کا ایک ہی جواب ہو تو جواب یہ جاننا ضروری نہیں ہم یقین سے کہہ سکیں گے کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی لحاظ خبر ہاں ہوگی۔ اس کے برعکس اگر نصف الیکٹران ہم میدان اور نصف خلاف میدان ہوں تب یقیناً الیکٹران کی پیمائش نہیں کی گئی اور خبر نہیں ہوگا۔

لیکن سن 1982 دوئرز، زورک اور ڈانگس نے ثابت کیا کہ ایسا مشین تیار نہیں کیا جاسکتا ہے جو کو انٹرمیٹاشل ذرات پیدا کرتا ہو، ہم چاہیں گے کہ یہ مشین حال $\langle \psi \rangle$ میں ایک ذرہ جس کا نقتل بنانا مقصود ہو اور حال $\langle X \rangle$ میں ایک اضافی ذرہ ملی کر حال $\langle \psi \rangle$ میں دو ذرات اصل اور نقتل دیتا ہو

$$(12.13) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle$$

فرض کریں ہم ایسا مشین بنانے میں کامیاب ہوتے ہیں جو حال $\langle \psi_1 \rangle$ کا کلمہ تیار کرتا ہو

$$(12.14) \quad |\psi_1\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle$$

اور $\langle \psi_2 \rangle$ پر بھی کام کرنے کے متبادل ہو

$$(12.15) \quad |\psi_2\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle$$

مثال کے طور پر اگر ذرہ ایک الیکٹران ہو تب $\langle \psi_1 \rangle$ اور $\langle \psi_2 \rangle$ ہم میدان اور خلاف میدان ہو سکتے ہیں۔ یہاں تک کوئی مسئلہ پیدا نہیں ہوتا یہ دیکھنا ہوگا کہ ان کا خطی جوڑ $\langle \psi \rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle$ کی صورت میں کیا ہوگا؟ ظاہر ہے ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(12.16) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow \alpha |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle$$

جو ہم نہیں چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل چاہتے ہیں

$$(12.17) \quad |\psi\rangle |X\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle = [\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle][\alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle] \\ = \alpha^2 |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle + \beta^2 |\psi_2\rangle |\psi_2\rangle + \alpha\beta[|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle]$$

آپ ہم میدان الیکٹران اور خلاف میدان الیکٹران کے کلمہ بنانے کی مشین بنا سکتے ہیں لیکن وہ کسی بھی باوقعت (غیر صفر) خطی جوڑ کی صورت میں ناکامی کا شکار ہوگا یہ بالکل ایسا ہوگا جیسا نقتل بنانے کی مشین اگلی لکیریوں اور انتہائی لکیریوں کی نقتل خوش اصلوبی سے کرتا ہو لیکن وتری لکیریوں کو مکمل طور پر بگاڑتا ہو۔

۱۲.۴ شرودنگر کی بلی

کو انٹرمیکانیات میں پیمائش کا عمل ایک شرارتی کردار ادا کرتا ہے جس میں عدم تعینیت غیر مکامیرت تفاعل موج کا انہدام اور باقی تمام تصوراتی مشکلات رونما ہتی ہیں۔ پیمائش کی غیر موجودگی میں مساوات شرودنگر کے تحت تفاعل موج متبادل تعین طریقہ سے ارتقا کرتا ہے اور کو انٹرمیکانیات کسی بھی سادہ نظریہ میدان کی طرح نظر آتا ہے جو کلاسیکی برقی حرکیات سے بہت سادہ ہوگا چونکہ دو میدان E اور B کی بجائے اس میں واحد ایک غیر سمتی ψ پایا جاتا ہے۔ یہ پیمائش کا عمل ہی ہے جو کو انٹرمیکانیات میں عجیب و غریب کردار ادا کرتے ہوئے اس کو سمجھنے کے باہر خواص سے نوازتا ہے۔ یہ پیمائش حقیقت میں ہے کیا؟ اسے گنگر طبعی عوامل سے کیا منفرد بناتا ہے اور ہم کس طرح جان سکتے ہیں کہ پیمائش کی گئی ہے؟

شعور نگرنے اپنے مشہر تضاد بلی کے مفروضہ نے اس بنیادی سوال کو ہمیشہ کیا۔

ایک بلی کو فولاد کے ایک بند ڈبے میں بند کیا جاتا ہے اس ڈبے میں ایک گنگر گنت کار اور کسی تاب کار مادہ کی اتنی چھوٹی مقدار رکھی جاتی ہے جس کا ایک گھنٹہ میں صرف ایک جوہر کے تحلیل ہونے کا امکان ہوتا ہے یہ بھی ممکن ہے کہ کوئی جوہر تحلیل نہ ہو تحلیل کی صورت میں گنت کار اس ڈبے میں ایک زہریلی گیس چھوڑتا ہے۔ ایک گھنٹہ گزرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ تحلیل نہ ہونے کی صورت میں یہ بلی زندہ ہوگی۔ پہلی تحلیل اس کو زہر سے مار دیتی۔ اس مکمل نظام کا تفاعل موج اس حقیقت کو ظاہر کرنے کے لیے زندہ اور مردہ بلی کے برابر حصوں پر مشتمل ہوگا۔

ایک گھنٹہ کے بعد بلی کا تفاعل موج درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{مردہ}} + \psi_{\text{زندہ}}) \quad (12.18)$$

یہ بلی نہ تو زندہ اور نہ ہی مردہ ہے بلکہ پیمائش سے پہلے ہی ان دونوں کا ایک خطی جوڑ ہو گیا ہے کھڑکی سے اندر دیکھ کر بلی کا حال جاننے کو پیمائش تصور کیا جائے گا۔ آپ کا دیکھنے کا عمل بلی کو زندہ یا مردہ ہونے پر مجبور کرتا ہے ایسی صورت میں اگر بلی مردہ پائی جائے تو یقیناً اس کے زمہ دار آپ ہی ہیں چونکہ آپ نے کھڑکی سے دیکھ کر اسے قتل کیا۔

شعور نگر اس تمام کو ایک بکواس سے زیادہ نہیں سمجھتا تھا اور میرے خیال سے زیادہ تر ماہر طبیعیات ان کے ساتھ متفق ہیں۔ کلا بین اجسام کا دو مختلف حالات کی ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہونے کا تصور بے معنی ہے۔ ایک الیکٹران تو ہم میدان اور خلاف میدان کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہو سکتا ہے لیکن ایک بلی زندہ اور مردہ حالات کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں نہیں ہو سکتی ہے۔ اس کو کوانٹم میکانیات کی تقلید پسند تشریح کے ساتھ کس طرح ہم اب تک بنا یا جا سکتا ہے۔

شماریاتی مفہوم کے لحاظ سے مقبول ترین جواب یہ ہے کہ گنت کار کی گنتی پیمائش ہوگی تاکہ کھڑکی میں سے انسانی مشاہدہ پیمائش سے مراد وہ عمل ہے جو کلا بین نظام پر اثر انداز ہو جو یہاں گنت کار ہے۔ پیمائش کا عمل اس لمحہ پر رونما ہوگا جب خرد بین نظام جسے کوانٹم میکانیات کے قوانین بیان کرتا ہے کلا بین نظام جسے کلاسیکی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں کے ساتھ اس طرح باہم عمل کرے جس سے دائمی تبدیلی رونما ہو۔ کلا بین نظام خود منفرد حالات کی ایک خطی جوڑ کا مکین نہیں ہو سکتا ہے۔

۱۲.۵ کوانٹم زینو تضاد

اس عجیب قصہ کی اہم ترین خاصیت تفاعل موج کا انہدام ہے۔ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش سے اسی نتیجہ کے حصول کی خاطر حلاکتاً نظریاتی بنیادوں پر اسے متعارف کیا گیا تھا یقیناً اس دور رس اصول موضوعہ کے متاثر شدہ اثرات بھی ہوں گے۔ مراد اور سرشاران نے سن 1977 میں تفاعل علی

موج کی انہدام کا ایک ڈرامائی تجرباتی مظاہرہ تجویز کیا جسے انہوں نے کو انٹیم زینو اثر کا نام دیا۔ ان کا تصور یہ تھا کہ ایک غیر مستحکم نظام مثلاً ہیجان حال میں ایک جوہر کو بار بار پینائنٹی عمل سے گزارا جائے۔ ہر ایک مشاہدہ تفاعل موج کو منہدم کر کے گھڑی کو دوبارہ صفر سے چالو کرے گا اور یوں زیریں حال میں متوقع انتقال کو غیر معائنہ مدد تک روکا جاسکتا ہے۔

فرض کریں ایک نظام ہیجان حال ψ_2 سے آغاز کرتا ہے اور زمینی حال ψ_1 میں منتقلی کے لیے اس کا قدرتی عرصہ حیات τ ہے۔ عام طور پر τ سے کافی کم وقتوں کے لیے انتقالی احتمال وقت t کا راست متناسب ہوگا مساوات 9.42 دیکھیں چونکہ انتقالی شرح $1/\tau$ ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{t}{\tau} \quad (12.19)$$

وقت t پر پینائنش کرنے کی صورت میں بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau} \quad (12.20)$$

درج کریں ہم دیکھتے ہیں کہ نظام بالائی حال میں ہی ہے ایسی صورت میں تفاعل موج واپس ψ_2 پر منحصر ہوگا اور پورا عمل ایک بار نئے سرے سے دوبارہ شروع ہوگا۔ اگر ہم وقت $2t$ پر دوسری پینائنش کریں تب بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \approx 1 - \frac{2t}{\tau} \quad (12.21)$$

جو وہی ہے جو اس صورت ہوتا اگر ہم پہلی پینائنش کرتے ہی نہیں سادہ موج کے تحت ایسا ہی ہونا چاہیے تھا۔ اگر ایسا ہی ہوتا تب نظام کا بار بار مشاہدہ کرنے سے کوئی فخر نہیں پڑتا اور سنی کو انٹیم زینو اثر پیدا ہوتا تاہم بہت قلیل وقت کی صورت میں انتقالی احتمال وقت t کے بجائے t^2 کا راست متناسب ہوگا 9.39 دیکھیں

$$P_{2 \rightarrow 1} = \alpha t^2 \quad (12.22)$$

ایسی صورت میں دو پینائنشوں کے بعد بھی نظام بالائی حال میں ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$\left(1 - \alpha t^2\right)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2 \quad (12.23)$$

جبکہ پہلی پینائنش نہ کرنے کی صورت میں اب احتمال درج ذیل ہوتا

$$1 - \alpha(2t)^2 \approx 1 - 4\alpha t^2 \quad (12.24)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقت t گزرنے کے بعد نظام کے مشاہدہ کی بنا پر زیریں حال میں منتقلی کا احتمال کم ہوا ہے۔

یقیناً $t = 0$ سے لیکر $t = T$ تک n برابر وقفہ $T/n, 2T/n, 3T/n, \dots, T$ پر نظام کا مشاہدہ کرنے کی وجہ سے اس دورانیہ کے آخر میں بھی نظام بالائی حال میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا

$$(12.25) \quad \left(1 - \alpha(T/n)^2\right)^n \approx 1 - \frac{\alpha}{n} T^2$$

جو $n \rightarrow \infty$ کی حد میں 1 تک پہنچتا ہے ایک غیر مستحکم نظام جس کا مسلسل مشاہدہ کیا جائے کبھی بھی تحویل نہیں ہوگا بعض مصنفین اس ماحوز سے اتفاق نہیں کرتے اور ان کے نزدیک یہ تفاعل موج کے انہدام غیر درست ہونے کا ثبوت ہے۔ تاہم ان کے سدلاخل مشاہدہ کے مفہوم کی عنایت تشریح پر مبنی ہے اگر بلبلا حنائے میں ایک ذرہ کی راہ کو مسلسل مشاہدہ کرار دے دیا جائے تب یہ بالکل درست ہوں گے چونکہ ایسی ذرات یقیناً تحویل ہوتے ہیں اور ان کا عمر ص حیات پر کاشف کا متابل پیمائش اثر نہیں پایا جاتا ہے تاہم ایسا ذرہ حنائے کے اندر جوہروں کے ساتھ حنادو حنال باہم عمل کرتا ہے جبکہ کو انٹرم زیواثر کے لیے ضروری ہے کہ یک بعد دیگر پیمائشوں کے بیچ وقفہ اتنا کم ہو کہ نظام کو t^2 خطہ میں پکڑا جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ خود بخود انتقل کی صورت میں یہ تجربہ عملاً ممکن نہیں ہے۔ تاہم پیدا کردہ انتقال کی صورت میں نتائج کا نظریاتی پیش گوئی کے ساتھ مکمل اتفاق پایا جاتا ہے۔ بد قسمتی سے یہ تجربہ تفاعل موج کی انہدام کا ختمی ثبوت پیش نہیں کر سکتا ہے اس مشاہدہ کے دیگر وجوہات بھی دئے جاسکتے ہیں۔

میں نے اس کتاب میں ایک ہم آہنگ اور بلا تضاد کہانی پیش کرنے کی کوشش کی ہے تفاعل موج ϕ کسی ذرہ یا نظام کے حال کو ظاہر کرتا ہے۔ عمومی طور پر ای کذرہ کسی مخصوص حرکی خاصیت مثلاً مکام معیار حرکت توانائی زوایائی معیار حرکت وغیرہ کا حاصل نہیں ہوتا اس وقت تک جب پیمائشی عمل مداخلت نہ کرے کسی ایک تجربہ میں حاصل ایک مخصوص قیمت کا احتمال ϕ کی شماراتی مفہوم تعین کرتا ہے۔ پیمائشی عمل سے تفاعل موج مضمر ہوتا ہے جس کی بنا پر فوراً دوسری پیمائش لائٹما وہی نتیجہ دیگی۔ اگرچہ دیگر تشریحات مثلاً غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات متعدد کائنات کا تصور بلا تضاد تاریخیں سگرہ نمونے وغیرہ بھی پائے جاتے ہیں لیکن میں یقین کرتا ہوں کہ یہ سب سے سادہ ہے جس سے عموماً ماہر طبیعیات اتفاق کرتے ہیں۔ یہ ہر تجربہ سے کامیابی سے ابھرا ہے تاہم یہ کہانی کا اختتام نہیں ہے ہمیں پیمائشی عمل کے بارے میں اور انہدام کے طریقے کار کے بارے میں بہت کچھ جاننا ہے عین ممکن ہے کہ آنے والے نسلیں زیادہ پیچیدہ نظریہ جانتے ہوئے سوچتے ہوں کہ ہم اتنا سادہ کیسے ہو سکتے تھے۔

جوابات

ضمیمہ ۱

خطی الجبر ۱

۱.۱ سمتیات

۲.۱ اندرونی ضرب

$$(i) \quad |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \leq \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle$$

سوال ۱.۱: شواہد عدم مساوات (مساوات ۱) ثابت کریں۔ اشارہ: آپ $0 \leq \langle \gamma | \gamma \rangle$ استعمال کرتے ہوئے
 $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle \alpha | \beta \rangle / \langle \alpha | \alpha \rangle) |\alpha\rangle$ سے شروع کریں۔

۳.۱ متالب

۴.۱ تبدیلی اساس

۵.۱ امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار

۶.۱ ہر مشی تبادلے

فهرست

- ensemble, 15
- expectation
 - value, 7
- formula
 - De Broglie, 18
- Fourier
 - inverse transform, 62
 - transform, 62
- Frobenius
 - method, 53
- function
 - Dirac delta, 71
- generalized
 - distribution, 71
 - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 59
- generator
 - translation in space, 135
 - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
 - oscillator, 32
- Hermitian
 - conjugate, 48
- hermitian, 101
 - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
 - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
 - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
 - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
 - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 66
- energy
 - allowed, 28
 - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
 - neutrino, 127
- particle
 - unstable, 21
- polynomial
 - Hermite, 57
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- potential, 14
 - reflectionless, 92
- probability
 - density, 10
- probability current, 21
- probable
 - most, 7
- recursion
 - formula, 54
- reflection
 - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
 - formula, 59
- scattering
 - matrix, 93
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
 - Fourier, 35
 - power, 42
 - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - conjugate, 102
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
 - operators, 45
- law
 - Hooke, 41
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
 - S, 93
 - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- operator, 17
 - lowering, 45
 - projection, 128
 - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

- variables
 - separation of, 25
- variance, 9
- vectors, 97
- velocity
 - group, 64
 - phase, 64
- virial theorem, 132
- wag the tail, 55
- wave
 - incident, 76
 - packet, 61
 - reflected, 76
 - transmitted, 76
- wave function, 2
- wavelength, 18
 - outer, 23
- spectrum, 104
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- state
 - bound, 69
 - excited, 33
 - ground, 33
 - scattering, 69
- statistical
 - interpretation, 2
- step function, 79
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - Plancherel, 62
- transformations
 - linear, 97
- transmission
 - coefficient, 77
- tunneling, 69, 78
- turning points, 69
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119

- اتفاق
حالات، 133
اجبازتی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹریو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینی، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انخطاطی، 104، 89
اندرونی ضرب، 98
انعکاس
شرح، 77
اوسط، 7
براء، 127
بقا
توانائی، 38
پیدا کار
تفاعل، 59
پیدا کار
فصل میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136
تجدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسل
ٹیلر، 41
طامتی، 42
فوریسر، 35
تعیین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2
- توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجبازتی، 28
توقعات
قیمت، 7
جفت، 33
تفاعل، 30
حال
بکھراؤ، 69
زمینی، 33
مقید، 69
پہچان، 33
خطی الجبرا، 97
خطی تبدلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 60
دم بلانا، 95، 55
ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیگر، 34
ذره
غیر مستحکم، 21
رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85
ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

- فصل
سیرونی، 23
دوہری، 128
فورسٹر
الٹ بدل، 62
بدل، 62
قابل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
قابل
بچھراو، 93
ترسیل، 94
قابل ارکان، 125
قانون
ہک، 41
قواب، 98
کٹ، 127
کشادہ
احتمال، 10
کشیر رکنی
ہرمانٹ، 57
کلیہ
ڈی پروگلی، 18
روڈریگیس، 59
کوپن، ہیگن مفہوم، 4
گرام شمد
ترکیب عودیت، 106
متعمم
تفعل، 71
تقسیم، 71
متعمم شماریاتی مفہوم، 111
مختل
سب سے زیادہ، 7
مخفیہ، 14
بالا العکاس، 92
مربع منکامل، 13
مربع منکامل تفعلات، 98
سرنگ زنی، 69، 78
سگر، 15
سمتیات، 97
سوچ
انکاری، 4
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سوڈیم، 23
سیڑھی
عاملین، 45
سیڑھی تفعل، 79
شروڈنگر
غیر تاج وقت، 27
شروڈنگر مساوات، 2
شروڈنگر نقطہ نظر، 136
شریک عمل، 102
شماریاتی مفہوم، 2
شوارز عدم مساوات، 99
طابق، 33
طول موج، 18
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
عامل
تخلیل، 128
تقلیل، 45
رفعت، 45
عدم تعین، 2
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عتدہ، 34
علیحدگی متغیرات، 25
عودی، 100، 34
معیاری، 34
غیر مسلسل، 105
فہرست
ترکیب، 53

- ہارمونئی
 ہارمونئی، 32
 ہر مشی، 101
 جوڑی دار، 48، 102
 خلاف، 130
 منحرف، 130
 ہلبرٹ فنکشن، 99
 ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
 ہیملٹنی، 27
 یک طاقتی، 129
- مرتعش
 ہارمونئی، 32
 مسئلہ
 اجر نفٹ، 18
 پلانشرال، 62
 ڈرشلے، 35
 مسئلہ وریل، 132
 معمول زنی، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 16
 معیار حرکتی فنکشن عمل موج، 113
 معیار عمودی، 34
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100
 مقلوب، 43
 مقلبت
 باضابطہ رشتہ، 44
 مقلوب، 43
 مکمل، 34، 100
 منہدم، 4، 111
 موج
 آمدی، 76
 ترسیلی، 76
 منعکس، 76
 موجی اکٹھ، 61
 میون نیوٹرینو، 127
 واپسی نقطہ، 69
 وسطانیہ، 7