

کوانٹم میکینیات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۲۸/ اگست ۲۰۲۱



# عنوان

vii میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاعل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل تغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری تغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنائی چپکور کنواں
۴۰	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۲	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۱	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۸	۲.۵	ڈیلٹ تفاعل محفہ
۶۸	۲.۵.۱	مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۰	۲.۵.۲	ڈیلٹ تفاعل کنواں
۷۹	۲.۶	مستثنائی چپکور کنواں
۹۳	۳	قواعد و ضوابط
۹۳	۳.۱	ہلبرٹ فضا
۹۷	۳.۱.۱	وتابل معلوم حالات
۹۹	۳.۲	ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

۳.۲.۱	غیر مسلسل طیف	۹۹
۳.۲.۲	استمراری طیف	۱۰۱
۳.۳	متعمم شمارائی مفہوم	۱۰۴
۳.۴	اصول عدم یقینیت	۱۰۸
۳.۴.۱	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۱۰۸
۳.۴.۲	کم سے کم عدم یقینیت کا مجموعی اکٹھ	۱۱۲
۳.۴.۳	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۱۱۲
۳.۵	ڈیراک علاقیت	۱۱۷
۴	تین البادی کو انٹرمیکانیات	۱۳۱
۴.۱	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۱۳۱
۴.۱.۱	علیحدگی متغیرات	۱۳۳
۴.۱.۲	زاویائی مساوات	۱۳۴
۴.۱.۳	ردای مساوات	۱۳۹
۴.۲	ہائیڈروجن جوہر	۱۴۳
۴.۲.۱	ردای تقف عمل موج	۱۴۴
۴.۲.۲	ہائیڈروجن کا طیف	۱۵۴
۴.۳	زاویائی معیار حرکت	۱۵۶
۴.۳.۱	امتیازی اقتدار	۱۵۷
۴.۳.۲	امتیازی تقف عملات	۱۶۲
۴.۴	چکر	۱۶۵
۴.۴.۱	مقناطیسی میداں میں ایک الیکٹران	۱۷۲
۵	متماثل ذرات	۱۶۹
۵.۱	دو ذراتی نظام	۱۶۹
۵.۱.۱	بوزان اور فیرمیون	۱۷۱
۵.۱.۲	قوت مبادلہ	۱۷۴
۵.۲	جوہر	۱۷۷
۵.۲.۱	ہیلمیم	۱۷۸
۵.۲.۲	دوری جدول	۱۸۰
۵.۳	ٹھوس اجسام	۱۸۲
۵.۳.۱	آزاد الیکٹرون گیس	۱۸۳
۵.۳.۲	تخت پٹی	۱۸۶
۵.۴	کو انٹرم شمارائی میکانیات	۱۹۱
۵.۴.۱	ایک مثال	۱۹۲
۶	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۱۹۵
۶.۱	غیر انحطاطی نظریہ اضطراب	۱۹۵
۶.۱.۱	عمومی ضابطہ بندی	۱۹۵
۶.۱.۲	اول رتبہ نظریہ	۱۹۶

۲۰۰	دوم رتبی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۰۱	اخٹاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۰۱	دو پڑتا انحطاط	۶.۲.۱
۲۰۵	بلند رتبی انحطاط	۶.۲.۲
۲۰۹	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۱۰	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۱۳	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۱۷	زیمان اثر	۶.۴
۲۱۷	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۱۹	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۲۰	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۲۱	نہایت مہین بٹوارہ	۶.۴.۴
۲۳۱	تغیری اصول	۷
۲۳۱	نظریہ	۷.۱
۲۳۳	ونزل و کرامرز پر لو ان تخمین	۸
۲۳۴	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۲۳۸	سرنگزنی	۸.۲
۲۳۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۲۴۰	دوسطی نظام	۹.۱
۲۴۰	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۲۴۳	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۲۴۵	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۲۴۷	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۲۴۷	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۲۴۷	انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۲۴۹	غیر اتار کی اضطراب	۹.۲.۳
۲۵۱	خود بخود اخراج	۹.۳
۲۵۱	آمنٹائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۲۵۲	ہیجان حال کا عمر و حیات	۹.۳.۲
۲۵۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۲۶۵	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۲۶۵	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۲۶۵	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۲۶۷	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۲۷۱	ہیتیری	۱۰.۲
۲۷۱	گرگنی عمل	۱۰.۲.۱

۲۷۲	ہندسی بیت	۱۰.۲.۲
۲۷۷	اہارونو یوہیم اثر	۱۰.۲.۳

۲۷۱	بکھراو	۱۱
۲۷۱	تعارف	۱۱.۱
۲۷۱	کلاسیکی نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۱
۲۷۳	کوانٹم نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۲
۲۷۴	حبزوی موج تجزیہ	۱۱.۲
۲۷۴	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۲۷۷	لایا عمل	۱۱.۲.۲
۲۷۹	مستقلات حیط	۱۱.۳
۲۸۲	بارن تخمین	۱۱.۴
۲۸۲	مسوات شروع نگر کی تکمیلی روپ	۱۱.۴.۱
۲۸۶	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۲۹۰	شسل بارن	۱۱.۴.۳

۲۹۳	پس نوشت	۱۲
۲۹۴	آئنسٹائن پوڈلکیوروزن تضاد	۱۲.۱
۲۹۵	مسئلہ بل	۱۲.۲
۲۹۹	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۳۰۰	شروع نگر کی پٹی	۱۲.۴
۳۰۱	کوانٹم زینو تضاد	۱۲.۵

۳۰۷	جوابات	
-----	--------	--

۳۰۷	خطی الجبرا	۱
۳۰۷	سمتیات	۱.۱
۳۰۷	اندرونی ضرب	۲.۱
۳۰۷	فتالب	۳.۱
۳۰۷	تبدیلی اساس	۴.۱
۳۰۷	امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار	۵.۱
۳۰۷	ہر مشی تبادلے	۶.۱

۳۰۹	فہرہنگ	
-----	--------	--

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء





## باب ۴

# تین ابعادی کوانٹم میکانیات

### ۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعاد تک توسیع با آسانی کی جاسکتی ہے۔ مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi;$$

معیاری طریقہ کار کے مطابق  $x$  کے ساتھ ساتھ  $y$  اور  $z$  پر کر کے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی عمل  $H$  کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھاں کلاسیکی مشہور اور عمل میں مشرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عمل پر ”ٹوٹی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عمل میں پر ”ٹوٹی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

خفی تو انائی  $V$  اور تفاعل موج  $\Psi$  اب  $(x, y, z)$  اور  $t$  کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم  $d^3 r = dx dy dz$  میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال  $|\Psi(r, t)|^2 d^3 r$  ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 r = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کو پوری فصا پر لینا ہوگا۔ اگر خفی تو انائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(r, t) = \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فصائی تفاعل موج  $\psi_n$  غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(r, t) = \sum c_n \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقامت  $c_n$  ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(r, 0)$  سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین  $r$  اور  $p$  کے تمام باضابطہ مقلبتیہ رشتے:  $[x, y]$ ،  $[x, p_y]$ ،  $[x, p_x]$ ،  $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ  $x, y$  اور  $z$  کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ  $r_x = x$ ،  $r_y = y$  اور  $r_z = z$  ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگا۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً)  $\sigma_x \sigma_{p_y}$  پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

#### ۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبداء سے فاصلہ کا تعلق ہوگا۔ ایسی صورت میں **کروئی محمد**  $(r, \theta, \phi)$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل 4-1)۔ کروئی محمد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کروئی محمد میں تابع وقت شرودنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو  $RY$  سے تقسیم کر کہ  $-2mr^2/\hbar^2$  سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین میں جبکہ صرف  $r$  کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف  $\theta$  اور  $\phi$  کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم  $l(l+1)$  روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔<sup>۶</sup>

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارٹیزی محدد میں علیحدگی مستغیرات استعمال کرتے ہوئے لامستغیری سرجمی کنواں (یاڈب میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ اور } 0 \text{ تینوں کے پچپائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

ا. ممکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو  $E_1, E_2, E_3, \dots$  وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے  $E_1$  تا  $E_6$  تلاش کریں۔ ان کی انخطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حصوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: ایک بعدی صورت میں انخطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی  $E_{14}$  کی انخطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

## ۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات  $\theta$  اور  $\phi$  پر  $\psi$  کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو  $Y \sin^2 \theta$  سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

<sup>۶</sup> ایسا کرنے سے ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں  $l$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ  $l$  کو لازمًا عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچاننے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (۴.۱۹)$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے  $\Theta\Phi$  سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف  $\theta$  کا متغیر ہے، جبکہ دوسرا صرف  $\phi$  کا متغیر ہے، لہذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو  $m^2$  لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (۴.۲۰)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (۴.۲۱)$$

متغیر  $\phi$  کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (۴.۲۲)$$

[در حقیقت دو حل پائے جاتے ہیں:  $e^{im\phi}$  اور  $e^{-im\phi}$ ، تاہم  $m$  کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موختر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم  $\Theta$  میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محلی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہذا برقی حرکیات میں اتنی تقارن عمل ( $\Phi$ ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی  $\phi$  کی قیمت میں  $2\pi$  کا اضافہ آئے، ہے، ہم فنکشن میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط<sup>۸</sup> مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں  $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$  یا  $e^{2\pi im} = 1$  ہوگا جس کے تحت  $m$  لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

یہاں بھی ہم عموماً یہ نہیں کھوتے ہیں، چونکہ  $m$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ  $m$  کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔  
انتباہ: اب حرف  $m$  دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

<sup>۸</sup> یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ  $m$  کی قیمت سے قطع نظر، احتمال  $\langle \Phi |^2 \rangle$  یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقے سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے  $m$  پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

جدول ۴.۱: ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں۔

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

مساوات  $\theta$

$$(۴.۲۵) \quad \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$(۴.۲۶) \quad \Theta(\theta) = AP_l^m(\cos \theta)$$

جہاں  $P_l^m$  شریک لیژانڈر تفاعل<sup>۹</sup> ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$(۴.۲۷) \quad P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

اور  $l$  ویں لیژانڈر کشیر رکنی کو  $P_l(x)$  ظاہر کرتا ہے<sup>۱۰</sup> جس کی تعریف کلیہ روڈریگیز<sup>۱۱</sup>

$$(۴.۲۸) \quad P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{4 \cdot 2} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سی ظاہر ہے،  $P_l(x)$  متغیر  $x$  کی

<sup>۹</sup> associated Legendre function  
<sup>۱۰</sup> دھیان رہے کہ  $P_l^{-m} = P_l^m$  ہو گا۔  
<sup>۱۱</sup> Rodrigues formula

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات  $P_l^m(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} P_2^0 &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) & P_0^0 &= 1 \\ P_3^3 &= 15\sin\theta(1 - \cos^2\theta) & P_1^1 &= \sin\theta \\ P_3^2 &= 15\sin^2\theta\cos\theta & P_1^0 &= \cos\theta \\ P_3^1 &= \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1) & P_2^2 &= 3\sin^2\theta \\ P_3^0 &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) & P_2^1 &= 3\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

درجہ  $l$  کثیررکنی ہے، اور  $l$  کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہوگی۔ تاہم  $P_l^m(x)$  عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق  $m$  کی صورت میں اس میں  $\sqrt{1-x^2}$  کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$\begin{aligned} P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2}, \\ P_2^2(x) &= (1-x^2) \left( \frac{d}{dx} \right)^2 \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2), \end{aligned}$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں  $P_l^m(\cos \theta)$  چاہیے اور چونکہ  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$  ہوتا ہے لہذا  $P_l^m(\cos \theta)$  ہر صورت  $\cos \theta$  کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق  $m$  کی صورت میں  $\sin \theta$  ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں  $\cos \theta$  کے چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح  $l$  کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید  $|m| > l$  کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت  $P_l^m = 0$  ہوگا۔ یوں  $l$  کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2l+1)$  ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکھیے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفرقی مساوات ہے:  $l$  اور  $m$  کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہوں گے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم  $\theta = 0$  اور  $\theta = \pi$  پر ایسے حل بے فتابوڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنیاد طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدود میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

لہذا معمولی ذنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$



$$\begin{array}{ll}
Y_2^{\pm 2} = (\frac{15}{32\pi})^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/2} \\
Y_3^0 = (\frac{7}{16\pi})^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2} \cos \theta \\
Y_3^{\pm 1} = \mp (\frac{21}{64\pi})^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} = \mp (\frac{3}{8\pi})^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
Y_3^{\pm 2} = (\frac{105}{32\pi})^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 = (\frac{5}{16\pi})^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
Y_3^{\pm 3} = \mp (\frac{35}{64\pi})^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} = \mp (\frac{15}{8\pi})^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}
\end{array}$$
$$(r, \mathbf{r}) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$
$$(r, \mathbf{r}) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$
$$(r,rr) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

جب کہ  $m$  کو مقناطیس کو انسانی عدد<sup>۱۵</sup> کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۲.۲، ۲.۸، ۴.۲ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے  $Y_2^1$  اور  $Y_0^0$  تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

۱۲ معمول ذری مستقل کو سوال 4.4 میں حاصل کیا گیا ہے، نظریہ زاویائی معیار حرکت میں متبادل علاقیت کے ساتھ ہم آہستگی کی خاطر  $e$  (جس کی قیمت 1 یا  $-1$  ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ ردھیان رہے کہ  $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$  ہوگا۔

spherical harmonics<sup>۱۳</sup>  
azimuthal quantum number<sup>۱۴</sup>  
magnetic quantum number<sup>۱۵</sup>

مساوات  $\theta$  (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) نامتناہل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حیرانی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے  $Y_l^l(\theta, \phi)$  اور  $Y_3^2(\theta, \phi)$  تفصیل دیں۔ (آپ  $P_3^2$  کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ  $P_l^l$  آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تفصیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ  $l$  اور  $m$  کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹمانڈر کنشیرر کنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left( \frac{2}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: کھل بالخص استعمال کریں۔)

### ۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشاکلی مخفیہ کے لئے تف عمل موج کا زاویائی حصہ،  $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ  $V(r)$  کی شکل و صورت تف عمل موج کے صرف رداسی حصہ،  $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1) R \quad (۴.۳۵)$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لیئے

$$u(r) \equiv rR(r) \quad (۴.۳۶)$$

لہذا  $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ،  $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ،  $R = u/r$  درج ذیل ہوگا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (۴.۳۷)$$

اس کو رداسی مساوات<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں<sup>۱۷</sup> جو شکل و صورت کے لحاظ سے یک بعدی شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ<sup>۱۸</sup> درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (۴.۳۸)$$

<sup>۱۶</sup> radial equation

<sup>۱۷</sup> یہاں  $m$  کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل  $m$  نہیں پایا جاتا ہے۔

<sup>۱۸</sup> effective potential

جس میں  $[\hbar^2/2m][l(l+1)/r^2]$  اضافی حبزوپایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو اکہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدأ سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2 dr = 1 \quad (۴.۳۹)$$

کسی مخصوص مخفیہ  $V(r)$  کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروئی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \quad (۴.۴۰)$$

اس کے تفاعلات موج اور احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u \quad (۴.۴۱)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۴.۴۲)$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط  $u(a) = 0$  ملا کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت  $l = 0$  کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج  $R(r) = u(r)/r$  ہے اور  $0 \rightarrow r$  کی صورت میں  $[\cos(kr)]/r$  بے متابہ بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں  $B = 0$  منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ  $\sin(ka) = 0$  ہو لہذا  $ka = n\pi$  ہوگا جہاں  $n$  عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (۴.۴۳)$$

centrifugal term<sup>۱۹</sup>

<sup>۱۹</sup> دور حقیقت۔ ہم صرف انہی چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستحالی ہو؛ مساوات ۴.۳۱ میں  $R(r) \sim 1/r$  معمول پر لانے کے قابل ہے۔

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔  $u(r)$  کو معمول پر لانے سے حاصل ہوگا۔ زاویائی جبزو (جو  $1/\sqrt{4\pi}$ )  $Y_0^0(\theta, \phi)$  کی بنا غیر اہم ہے (کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \quad (۴.۴۴)$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو اٹائی اعداد  $n$ ،  $l$  اور  $m$  استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:  $\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی،  $E_{nl}$ ، صرف  $n$  اور  $l$  پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح  $l$  کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \quad (۴.۴۵)$$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں  $j_l(x)$  رتبہ  $l$  کا کروئی بیل ٹیٹل تفاعل<sup>۲۲</sup> ہے اور  $n_l(x)$  رتبہ  $l$  کا کروئی نیومن تفاعل<sup>۲۳</sup> ہے جن کی تعریضات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \quad (۴.۴۶)$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروئی بیل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر  $x$  کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

quantum numbers<sup>۲۱</sup>  
spherical Bessel function<sup>۲۲</sup>  
spherical Neumann function<sup>۲۳</sup>

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات،  $j_n(x)$  اور  $n_l(x)$ ؛ چھوٹی  $x$  کے لئے مقترانی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے فتا بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً  $B_l = 0$  منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۷) \quad R(r) = A j_l(kr)$$

اب سرحدی شرط  $R(a) = 0$  کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ  $k$  کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۴.۴۸) \quad j_l(ka) = 0$$

یعنی  $l$  رتبی کروی بیسل تفاعل کا  $(ka)$  ایک صفر ہوگا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل 2.4 دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامستثنیٰ تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔ تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے فنکشنوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط  $n\pi$  یا انفاط  $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{nl}$$

جہاں  $\beta_{nl}$  رتبہ  $l$  کروی بیسل تفاعل کا  $n$  واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$(۴.۵۰) \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$(۴.۵۱) \quad \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل  $A_{nl}$  کا تعین معمولی ذنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ  $l$  کی ہر ایک قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2l+1)$  مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح  $(2l+1)$  گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

ا. کروئی نیومن تفاعلات  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر  $1 \ll x$  کے لئے کارآمد  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ  $V(r) = 0$  اور  $l = 1$  کے لئے  $Arj_l(kr)$  رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کٹواں کیلئے  $l = 1$  کی صورت میں احبازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعیین کریں۔ دکھائیں کہ  $n$  کی بڑی قیمت کے لئے  $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$  ہوگا۔ (اشارہ: پہلے  $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$  دکھائیں۔ اس کے بعد  $x$  اور  $\tan x$  کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کیت  $m$  ہے کو مستناہی کروئی کٹواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال،  $l = 0$  کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ  $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$  کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

## ۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار  $e$  کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار  $-e$  کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل 3.4 دیکھیں)۔ فتون کولب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (۴.۵۲)$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (۴.۵۳)$$

ہم نے اس مساوات کو  $u(r)$  کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں  $E$  تعیین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرکش کے تحلیل حل کی ترکیب سے، قدم بامقدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے)۔

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

کولمب محفّی، مساوات ۴.۵۲، ( $E > 0$  کے لئے) استراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی مومنٹال ذکر میں ہے۔

#### ۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے  $e$  منفی ہونے کی وجہ سے  $\kappa$  حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو  $E$  سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ 1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[ 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

اس کے بعد ہم حالات کی مفت تاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب  $\rho \rightarrow \infty$  کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ( $\rho \rightarrow \infty$  کی صورت میں)  $e^{\rho}$  بے وقتا بڑھتا ہے لہذا ہمیں  $B = 0$  لینا ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس  $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛<sup>۲۴</sup> لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ( $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں)  $\rho^{-l}$  بے متابوڑ ہوتا ہے لہذا  $D = 0$  ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی رویہ کو چھیلنے کی خاطر یہ افت عمل  $v(\rho)$ :

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ  $u(\rho)$  سے  $v(\rho)$  زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[ (l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[ -2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح  $v(\rho)$  کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \quad (۴.۶۱)$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل،  $v(\rho)$ ، کو  $\rho$  کا طمقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad (۴.۶۲)$$

<sup>۲۴</sup> یہ دلیل  $l = 0$  کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔



ہمیں عددی سر (  $c_0$  ،  $c_1$  ،  $c_2$  ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزوتفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”ضرعی اشاریہ“  $j$  کو  $j+1$  کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ  $j = -1$  سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزوضربی (  $j+1$  ) اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم ضرے سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل  $v(\rho)$  تعین کرتا ہے۔ ہم  $c_0$  سے شروع کر کے (جو مجموعی منتقل کاروب اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے  $c_1$  تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے  $c_2$  تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔<sup>۲۵</sup>

<sup>۲۵</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب  $u(\rho)$  پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متنازعاتی رویہ کو کیوں (جبزوضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جبزوضربی  $\rho^{l+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر  $c_{l+1}$  ہوگا)؛  $\rho^{l+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا جبزو  $\rho^0$  حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس جبزوضربی  $e^{-\rho}$  باہر نہ نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے  $c_{j+2}$  ،  $c_{j+1}$  اور  $c_j$  پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

آئے  $j$  کی بڑی قیمت (جو  $\rho$  کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔<sup>۲۶</sup>

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے مضر کرے کہ یہ بالکل ٹھیک ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \quad (۴.۶۴)$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \quad (۴.۶۵)$$

جو  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے بے متابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نہا وہی غنیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے حبانز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، بلند  $j$ ، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلند}}+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j_{\text{بلند}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد<sup>۲۷</sup>

$$n \equiv j_{\text{بلند}} + l + 1 \quad (۴.۶۷)$$

<sup>۲۶</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں  $\rho_0 - 2(l+1)$  اور نسب نماس میں  $2l+2$  رد کرنے کی طرح  $j+1$  میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تین میں ایک جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا چاہتا ہوں۔

<sup>۲۷</sup> principal quantum number

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب  $E$  کو  $\rho_0$  تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر<sup>۲۸</sup> ہے جو غالباً پورے کو انٹیم میکانیٹ میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور انٹیم کو انٹیم میکانیٹ کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

رداء بوہر<sup>۲۹</sup> کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کو انٹائی اعداد ( $n$ ،  $l$  اور  $m$ ) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

<sup>۲۸</sup> Bohr formula

<sup>۲۹</sup> Bohr radius

<sup>۳۰</sup> رداء اس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے:  $a_0$ ، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا میں اس کو صرف  $a$  لکھوں گا۔

ہوگا جبکہ  $v(\rho)$  متغیر  $\rho$  میں درجہ  $n - l - 1$  = بندہ  $z$  کا کشیدہ رکھی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تق عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حالت<sup>۳۱</sup> (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے  $n = 1$  ہوگا؛ طبعی مستقامت کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[ \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ  $z$  توانائی<sup>۳۲</sup> (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو بار بار دہرنا ہے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۷۷ کے تحت  $l = 0$  لہذا  $m = 0$  ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے  $j = 0$  کے لئے  $c_1 = 0$  حاصل ہوتا ہے)، لہذا  $v(\rho)$  ایک مستقل ( $c_0$ ) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی  $c_0 = 2/\sqrt{a}$  حاصل ہوگا۔ مزید  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح  $n = 2$  کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندہ  $z$  توانائی ہے کیونکہ  $l = 0$  ہو سکتا ہے (جس میں  $m = 0$  ہوگا) یا  $l = 1$  ہو سکتا ہے (جس کے لئے  $m$  کی قیمت  $-1$ ،  $0$  یا  $+1$  ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہوگی۔ کلیہ توالی

ground state<sup>۳۱</sup>  
binding energy<sup>۳۲</sup>

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

(ساوات ۴.۷۶)  $l = 0$  کے لئے  $j$  استعمال کرتے ہوئے  $c_1 = -c_0$  اور  $j = 1$  استعمال کرتے ہوئے  $c_2 = 0$  دے گا لہذا  $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۸۲) \quad R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد  $l$  اور  $n$  کے لئے پھیلاؤ عددی سر  $\{c_j\}$  مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہ  
تو  $l = 1$  کی صورت میں پہلے جب زو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛  $v(\rho)$  ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل  
حاصل ہوگا۔

$$(۴.۸۳) \quad R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a}$$

(ہر منفرد صورت میں  $c_0$  معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری  $n$  کے لئے (ساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ)  $l$  کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$(۴.۸۴) \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

جبکہ ہر  $l$  کے لئے  $m$  کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد  $(2l + 1)$  ہوگی (ساوات ۴.۲۹)، لہذا  $E_n$  سطح توانائی کی کل  
انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۸۵) \quad d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

کثیر رکنی  $v(\rho)$  (جو ساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی  
ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۸۶) \quad v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho)$$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

ایک شریکے لاگنچ کثیر رکنی<sup>۳۳</sup> ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$q$  ویں لاگنچ کثیر رکنی<sup>۳۴</sup> ہے۔<sup>۳۵</sup> (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگنچ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

<sup>۳۳</sup> associated Laguerre polynomial

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنج کشیر رکنیاں،  $L_q(x)$

---

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

---

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنج کشیر رکنیاں،  $L_{q-p}^p(x)$

---

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

---

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاسلات،  $R_{nl}(r)$

$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$
$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$
$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$
$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$
$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$
$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$
$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$
$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$

چند ابتدائی شریک لائیج کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل 4.4 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ ان چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کو انسانی اعداد کے نتائج ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف  $n$  تعین کرتا ہے۔ یہ کولب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں  $l$  پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیاں کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ( $n \neq n'$ ) کی صورت میں  $H$  کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیما ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک  $|\psi|^2$  کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات متقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج  $R_{30}$ ،  $R_{31}$  اور  $R_{32}$  حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے  $R_{20}$  کو معمول پر لا کر  $\psi_{200}$  تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے  $R_{21}$  کو معمول پر لا کر  $\psi_{211}$ ،  $\psi_{210}$  اور  $\psi_{21-1}$  تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لائیج کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $l = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $l = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

<sup>۳۴</sup> Laguerre polynomial  
<sup>۳۵</sup> دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔



ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle r \rangle$  اور  $\langle r^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس جوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle x \rangle$  اور  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا مکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  ہوگا، اور از زمینی حال میں تشکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال  $m = 1, l = 1, n = 2$  کے لیے  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال  $x, y$  اور  $z$  کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں  $x = r \sin \theta \cos \phi$  استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں  $r$  کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ  $r$  اور  $r + dr$  کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال  $m = 1, l = 1, n = 2$  اور  $m = -1, l = 1, n = 2$  کے درج ذیل خطی جوڑے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال  $\Psi(r, t)$  تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت  $\langle V \rangle$  تلاش کریں۔ (کیا یہ  $t$  کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

### ۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال  $\psi_{nlm}$  میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی فوٹان کے احراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔<sup>۳۷</sup> عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جاتیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کوانٹم چھلانگ“ کہتے ہیں) منتقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

<sup>۳۷</sup> فطرۃً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۵ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب کلیہ پلانک<sup>۳۸</sup> کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

جبکہ طول موج  $\lambda = c/\nu$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left( \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل<sup>۳۹</sup> کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ<sup>۴۱</sup> ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو فطرت کے بنیادی مستقالات کی صورت میں  $R$  کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ( $n_f = 1$ ) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمانی کارلیماخ<sup>۴۲</sup> تسلسل<sup>۴۲</sup> کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ( $n_f = 2$ ) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلسل<sup>۴۳</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح  $n_f = 3$  میں عبور، پاشن تسلسل<sup>۴۴</sup> دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل 7.4 دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے)۔ سوال ۳.۱۶: ہائیڈروجن جوہر  $Z$  پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں  $Z = 1$  جبکہ باردارہ ہیلیم<sup>۴۵</sup> میں  $Z = 2$  اور دہری باردارہ لتیم<sup>۴۶</sup> میں  $Z = 3$  ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں  $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی  $E_1(Z)$ ، رداس بوہر  $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل  $R(Z)$  تعیین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقی طیفی طیف کے کس خطہ میں

<sup>۳۸</sup> Planck's formula

<sup>۳۹</sup> فوٹان در حقیقت برقی طیفی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات متماثل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

<sup>۴۰</sup> Rydberg constant

<sup>۴۱</sup> Rydberg formula

<sup>۴۲</sup> Lyman series

<sup>۴۳</sup> Balmer series

<sup>۴۴</sup> Paschen series

<sup>۴۵</sup> Helium

<sup>۴۶</sup> Lithium

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

$Z = 2$  اور  $Z = 3$  کی صورت میں لیمن تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں  $e^2 \rightarrow Ze^2$  ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تذبذبی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت  $m$  جبکہ سورج کی کمیت  $M$  لیں۔)

ب. اس نظام کا ”رد اس بوہر“  $a_g$  کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تذبذبی کلیہ بوہر لکھ کر رد اس  $r_0$  کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو  $E_n$  کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ  $n = \sqrt{r_0/a_g}$  ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد  $n$  کی انداز قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح  $(n-1)$  میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احسراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔  
- حسراج فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹاؤن) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

### ۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد  $n$ ،  $l$  اور  $m$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد  $(n)$  حال کی توانائی تعیین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ  $l$  اور  $m$  مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبادا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$L = r \times p \quad (۴.۹۵)$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \quad (۴.۹۶)$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ  $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ ،  $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$ ،  $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$  سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقابلیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

## ۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین  $L_x$  اور  $L_y$  آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ (۴.۹۷) \quad &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned}$$

باضابطہ مقلوبیت رشتوں مساوات 10.4 سے ہم جانتے ہیں کہ صرف  $x$  اور  $p_x$ ،  $y$  اور  $p_y$ ،  $z$  اور  $p_z$  عاملین غیر مقلوب ہیں یوں درمیانی دواجزا ہدف ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

ہم  $[L_y, L_z]$  یا  $[L_z, L_x]$  بھی تلاش کر سکتے تھے تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم اشاریہ کی چکری اول بدل ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ ) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلوبیت رشتے ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوگا

دھیان رہے کہ  $L_x$  اور  $L_y$  غیر ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں متعمم اصول عدم یقینیت مساوات 62.3 کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

یا

$$(۴.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا یوں ایسے حالات کی تلاش جو  $L_x$  اور  $L_y$  کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع

$$(۴.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$L_x$  کے ساتھ مقلوب ہے

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

معتاب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات 64.3 استعمال کیا یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $L_y$  اور  $L_z$  کے ساتھ بھی  $L^2$  مقلوب ہوگا

$$(۴.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اُدرج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۰۳) \quad [L^2, L] = 0$$

اس طرح  $L$  کے ہر جزو کے ساتھ  $L^2$  ہم آہنگ ہوگا اور ہم  $L^2$  کا مثلاً  $L_z$  کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں

$$(۴.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

ہم نے حصہ 1.3.2 میں ہارمونی مرتعش پر سیر بھی عامل کی ترکیب استعمال کی یہی ترکیب یہاں پر بھی استعمال کرتے ہیں  
یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$(۴.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

$L_z$  کا مقابلہ درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوں گے

$$(۴.۱۰۷) \quad [L^2, L_{\pm}] = 0$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر  $L^2$  اور  $L_z$  کا امتیازی تفاعل  $f$  ہو تب  $L_{\pm}(f)$  بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا  
مساوات 107.4 کہتی ہے کہ

$$(۴.۱۰۸) \quad L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f)$$

لہذا اسی امتیازی مقدار  $\lambda$  کے لیے  $L_{\pm}f$  بھی  $L^2$  کا امتیازی تفاعل ہوگا جبکہ مساوات 106.4 کہتی ہے کہ

$$(۴.۱۰۹)$$

$$L_z(L_{\pm}f) = (L_z L_{\pm})f + L_{\pm} L_z f = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) = (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f)$$

لہذا نئی امتیازی متدر  $\mu \pm \hbar$  کے لیے  $L_{\pm} f$  کا امتیازی قنف عمل ہوگا ہم  $L_{+}$  کو عامل رفعت کہتے ہیں چونکہ  $L_z$  کے امتیازی متدر کو  $\hbar$  بڑھاتا ہے جبکہ  $L_{-}$  عامل تقلیل کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو  $\hbar$  کم کرتا ہے یوں ہمیں  $\lambda$  کی کسی ایک قیمت کے لیے حالات کی ایک سیزھی ملتی ہے جس کا ہر پایہ متربی پایہ سے  $L_z$  کی امتیازی متدر کے لحاظ سے  $\hbar$  کی ایک اکائی دور ہوگا شکل 8.4 سیزھی چڑھنے کی حنا طرہم عامل رفعت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیزھی اتزنی کی حنا طرہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچیں گے جس کا  $z$  جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت ہے سیزھی کا بالائی پایہ  $f_t$  درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$(۳.۱۱۰) \quad L_{+} f_t = 0$$

فرض کریں اس بالائی پایہ پر  $L_z$  کی امتیازی قیمت  $\hbar l$  ہو صرف  $L$  کی مناسبت آپ پر حبلہ آیا ہوں گی

$$(۳.۱۱۱) \quad L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t$$

اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm} L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

یادو سرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_{-} L_{+} + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں  $L_z$  کی امتیازی متدر کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں  $L^2$  کی امتیازی متدر دیتی ہے ساتھ ہی اسی وجہ کی بنا سیزھی کا سب سے نچلے پایہ  $f_b$  پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$(۳.۱۱۴) \quad L_{-} f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے پایہ پر  $L_z$  کا امتیازی متدر  $\hbar \bar{l}$  ہو

$$(۳.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

ساوات 112.4 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$L^2 f_b = (L_{+} L_{-} + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مسوات 113.4 اور 116.4 کا موازنہ کرنے سے  $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$  ہوگا لہذا  $\bar{l} = l + 1$  ہوگا جو بے معنی ہے چونکہ خچلا پایہ سب سے اوپر (بالائی) پایہ سے بلند نہیں ہوگا یا درج ذیل ہوگا

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ  $L_z$  کے امتیازی امتداد  $m\hbar$  ہونگے جہاں  $m$  جس کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہوگی کی قیمت  $N$  قدموں میں  $-l$  تا  $+l$  ہوگی بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $l = -l + N$  لہذا  $l = N/2$  ہوگا یوں  $l$  لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا امتیازی تفاعلات کو اعداد  $l$  اور  $m$  بیان کرتے ہیں

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

$l$  کی کسی ایک قیمت کے لیے  $m$  کی  $2l + 1$  مختلف قیمتیں ہوں گی یعنی سیرھی کے  $2l + 1$  پایہ ہونگے بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل 9.4 کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے جو  $l = 2$  کے لیے دکھایا گیا ہے یہاں تیسرا نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں ان تمام کی لمبائیاں  $\hbar$  کی اکائیوں میں  $\sqrt{l(l + 1)}$  ہوں گی جو یہاں  $\sqrt{6} = 2.45$  ہے جبکہ  $m$  کے  $z$  اجزاء  $m$  کی اجازتی قیمتیں  $2, 1, 0, -1, -2$  ہیں دھیان رہے کہ ان سمتیات کے متناظر یعنی کرہ کارڈ اس  $z$  محور کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑی ہے عموماً  $\sqrt{l(l + 1)} > l$  ہوگا ماسوائے  $l = 0$  کی غیر اہم صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا  $z$  رخ نہیں رکھ سکتے ہیں پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے کیا میں  $z$  محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت مسوات 100.4 کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہوگا چلو مان لیا لیکن کیا یہ ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی  $z$  محدود  $L$  کے رخ منتخب کر لوں بالکل نہیں آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے یہ ایسا نہیں ہے کہ آپ  $L$  کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کی سمتیہ کے تینوں اجزاء متبادل تعین نہیں ہو سکتے ہیں جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت متبادل تعین نہیں ہو سکتے اگر  $L_z$  کی قیمت متبادل تعین ہو تب  $L_x$  اور  $L_y$  کی قیمتیں متبادل تعین نہیں ہوگی شکل 9.4 میں سمتیات گمراہ کن ہے بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لمبائی کی حباتی جو یہ ظاہر کرتی کہ  $L_x$  اور  $L_y$  متبادل تعین ہیں

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں مسوات 99.4 سے ابتداء کرتے ہوئے ہم نے صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر  $L^2$  اور  $L_z$  کی امتیازی امتداد تعین کیے آئے اب امتیازی تفاعلات تیار کریں جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا ماسکین کا نئے کی بات سے شروع کرتا ہوں  $Y_l^m = L^2 f_l^m$  اور  $L_z$  کی امتیازی تفاعلات

وہی کردی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ 2.1.4 میں حاصل کیا یہی وجہ ہے کہ ہمیں نے حرف  $l$  اور  $m$  استعمال کیے اب میں آپ کو بتا دوں گا کہ کردی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں یہ الگ تھلگ امتیازی افتدار کے ہر مشی عاملین  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی تفاعلات ہیں

سوال ۴.۱۸: عمل رفت اور عمل تقلیل  $m$  کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$(۴.۱۲۰) \quad L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1}$$

جہاں  $A_l^m$  کوئی مستقل ہے امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر  $A_l^m$  کیا ہوگا اشارہ پہلے دکھائیں کہ  $L_{\pm}$  اور  $L_z$  ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہے چونکہ  $L_x$  اور  $L_y$  مشہود ہیں آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی تصدیق کر سکتے ہیں اس کے بعد مساوات 112.4 استعمال کریں جواب

$$(۴.۱۲۱) \quad A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}$$

دیکھیے گائے سیزھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہوگا جب آپ  $f_l^l$  یا  $f_l^{-l}$  پر  $L_{-}$  لاگو کرتے ہیں سوال ۴.۱۹:

۱. مقتمام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات 10.4 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل مقالب حاصل کریں

$$(۴.۱۲۲) \quad [[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \quad [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0]$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 96.4 سے  $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$  حاصل کریں

ج. مقالب  $[L_z, r^2]$  اور  $[L_z, p^2]$  کی قیمتیں تلاش کریں جہاں  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  اور  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  ہوگا

د. اگر  $V$  صرف  $r$  کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہیمیلٹنی  $H = (p^2/2m) + V$  کے تمام تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا یوں  $L^2$  اور  $L_z$  باہمی ہم آہنگ مشہود ہوں گے

سوال ۴.۲۰:

۱. دکھائیں ایک مخفی توانائی  $V(r)$  میں ایک ذرے کی مداری زاویائی معیار حرکت  $L$  کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسرود کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt} \langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

یہ مسئلہ اہر نفٹ کا مائل گھومت تعلق ہے



باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ب۔ دکھائے کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی توانائی کے لیے  $d\langle L \rangle dt = 0$  ہوگا یہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کوانٹم میکانی روپ ہے

### ۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے  $L_x$ ،  $L_y$  اور  $L_z$  کو کروی محددت میں لکھنا ہوگا اب  $L = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$  ہے جبکہ کروی محددت میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں  $\mathbf{r} = r\hat{r}$  ہوگا یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[ r(\hat{r} \times \hat{r}) \frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r} \times \hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{r} \times \hat{\phi}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب  $(\hat{r} \times \hat{\phi}) = \hat{\theta}$  اور  $(\hat{r} \times \hat{\theta}) = -\hat{\phi}$  (۱.4 لہذا درج ذیل ہوگا)

$$L = \frac{\hbar}{i} \left( \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات  $\hat{\theta}$  اور  $\hat{\phi}$  کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں

$$\hat{\theta} = (\cos \theta \cos \phi) \hat{i} + (\cos \theta \sin \phi) \hat{j} - (\sin \theta) \hat{k} \quad (۴.۱۲۵)$$

$$\hat{\phi} = -(\sin \phi) \hat{i} + (\cos \phi) \hat{j} \quad (۴.۱۲۶)$$

یوں

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۷)$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left( +\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۸)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۳.۱۲۹)$$

ہمیں آسٹل رشت اور اسٹل تقطیل بقی درکار ہوں گے

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

چونکہ  $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$  ہوتا ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۳.۱۳۰)$$

بالخصوص سوال 21.4(a) درج ذیل ہوگا

$$L_+ L_- = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۳.۱۳۱)$$

لہذا سوال 21.4(b) درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (۳.۱۳۲)$$

ہم اب  $f_l^m(\theta, \phi)$  پائین کر سکتے ہیں یہ  $L^2$  کا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قدر  $\hbar^2 l(l+1)$  ہے

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

یہ ٹھیک زاویائی مساوات 18.4 ہے ساتھ ہی یہ  $L_z$  کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قدر  $m\hbar$  ہوگا

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جوان شملی مساوات مساوات 21.4 کا معادل ہے ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں ان کا معمول شدہ نتیجہ  $Y_l^m(\theta, \phi)$  ہے اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی تفاعلات کروئی ہارمونیات ہونگے حصہ 1.4 میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شرودنگر حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقلوبی عاملین  $H$  اور  $L^2$  کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۳.۱۳۳)$$

ہم مساوات 132.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات شرودنجر مساوات 14.4 کو مختصر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{2mr^2} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتی ہے علحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح  $l$  قیمتیں مساوات 29.4 حاصل ہوئی جبکہ زاویائی معیار حرکت کی الجبرائی نظریہ  $l$  اور لہذا  $m$  بھی کی نصف عدد صحیح قیمتیں مساوات 119.4 بھی دیتی ہے آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہے لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے کہ یہ انتہائی زیادہ اہمیت کے حامل ہے سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات 130.4 سے مساوات 131.4 اخذ کریں اشارہ تفاعل برقی استعمال کرنا نہ بھولیں

ب. مساوات 129.4 اور 131.4 سے مساوات 132.4 اخذ کریں اشارہ مساوات 112.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں  $L + Y_l^l$  کیا ہوگا

ب. مساوات 130.4 کے ساتھ حبز و (الف) کا نتیجہ اور یہ جاننے ہوئے کہ  $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$  ہوگا  $Y_l^l(\theta, \phi)$  کی ایک مستقل تک معمول شدہ قیمت تلاش کریں

ج. بلاواسطہ مکمل کے ذریعے مستقل معمول ذنی تعین کریں اپنی حتمی نتیجہ کا سوال 5.4 کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال 3.4 میں درج ذیل دکھایا

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عامل رفت کا  $Y_2^2(\theta, \phi)$  پر اطلاق کریں معمول ذنی کے لیے مساوات 121.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۴: پے کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی  $a$  ہے کے دونوں سروں پر کمیت  $m$  کے ذرات بندے ہوئے ہیں یہ نظام وسط کے گرد آزادی سے تین بودی حرکت کر سکتا ہے جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا

ا. دکھائیں کہ اس نظام کی اجبازتی توانائیاں درج ذیل ہوگی

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ کلاسیکی تمنائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے اس نظام کی  $n$  وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی

## ۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے پلک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں پہلی قسم مرکز کیت کے حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مداری ( $L = r \times p$ ) کہتے ہیں جبکہ دوسری چکر ( $S = I\omega$ ) جو مرکز کیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنائے ہوئے زمین کا مداری زاویائی معیار حرکت ہوگا جبکہ روزانہ کی بنیاد پر شمال جنوبی محور کے گرد چکر کی بنا اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا کلاسیکی طور پر یہ فئزق ہماری آسانی کے لئے ہے چونکہ حقیقتاً ہر پختہ ہر پہاڑ وغیرہ جن پر زمین مشتمل ہے کا زمین کے محور کے گرد الفئزادی مداری زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ  $S$  کے برابر ہوگا کو انٹیم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے لیکن یہاں ایک بنیادی فئزقی پایا جاتا ہے ہائیڈروجن کی صورت میں مرکزہ کے گرد الیکٹران کی طوائف کی بنائے ہوئے مداری زاویائی معیار حرکت کے ساتھ ساتھ الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتے ہیں جس کا نصف میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے لہذا اس کو معتام کے متغیرات  $r$  اور  $\theta$  سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے چونکہ یہ کلاسیکی چکر کی طرح ہے لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں یہ مماثلت یہی پر حتم ہو جاتی ہے ایک الیکٹران جہاں تک ہم جانتے ہیں کوئی کوئی جاسمت نہیں پائی جاتی ہے اور یہ فقط ذرا ہے لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو مداری زاویائی معیار حرکت پر مشتمل حصوں میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے سوال 25.4 یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات بیرونی زاویائی معیار حرکت  $L$  کے ساتھ ساتھ اندرونی زاویائی معیار حرکت  $S$  بھی رکھتے ہیں چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کی نظریہ کی طرح ہے ہم باضابطہ تبدیلی تعلقات سے شروع کرتے ہیں

$$(۴.۱۳۴) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

یوں پہلے کی طرح  $S^2$  اور  $S_z$  کے امتیازی تفاعلات درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$(۴.۱۳۵) \quad S^2 |sm\rangle = \hbar^2 s(s+1) |sm\rangle; \quad S_z |sm\rangle = \hbar m |sm\rangle$$

جبکہ درج ذیل ہوگا جہاں  $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$

$$(۴.۱۳۶) \quad S_{\pm} |sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s(m \pm 1)\rangle$$

تاہم یہاں امتیازی تفاعلات  $\theta$  اور  $\phi$  کے تفاعل نہیں ہیں لہذا یہ کروئی ہارمونیات نہیں ہونگے اور کوئی وجہ نہیں پائی جاتی ہے کہ ہم  $s$  اور  $m$  کی نصف عدد صحیح قیمتیں مقبول نہ کریں

$$(۴.۱۳۷) \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے  $s$  کی ایک مخصوص نامتناہل تبدیلی قیمت ہوتی ہے جسے اس مخصوص نسل کا چکر کہتے ہیں  $\pi$  میزون کا چکر 0 ہے الیکٹران کا چکر 1/2 پروٹان کا چکر 1 ڈیلٹا کا چکر 3/2 گریوٹون کا چکر 2 وغیرہ وغیرہ اس کے برعکس ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹرون کا مداری زاویائی معیار حرکت کو انٹیم عدد 1 کوئی بھی عدد صحیح قیمت رکھ سکتا ہے جو نظام پھیڑنے سے تبدیل ہوگا تاہم کسی بھی ذرے کا  $s$  اٹل ہوگا جس کی بنا نظریہ چکر نسبتاً

سادہ ہے سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس درج ذیل ہو

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

ہم آئنسٹائن گلیے  $E = mc^2$  کے تحت یہ فرض کرتے ہوئے کہ الیکٹران کی کمیت اس کی برقی میدان کے توانائی کی بنا ہے الیکٹران کا کلاسیکی رداس حاصل کرتے ہیں الیکٹران کا زاویائی معیار حرکت  $(1/2)\hbar$  لیتے ہوئے خط استوا پر کسی نقطے کی رفتار  $ms^{-1}$  میں تلاش کریں کیا حاصل جواب معنی خیز ہے درحقیقت تجربہ بات سے ظاہر ہے کہ الیکٹران کا رداس  $r_c$  سے بہت کم ہے کیا یہ جانتے ہوئے نتیجہ مزید غلط محسوس ہوگا

### 1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک<sup>۴</sup> اور تمام لیپٹان<sup>۵</sup> کیلئے  $\frac{1}{2} = s$  ہوگا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف ”دو“ عدد امتیازی تفاسلات پائے جاتے ہیں: پہلا  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$  ہے جسے ہم میدان<sup>۶</sup> چکر<sup>۹</sup> (یا غنیرر سی طور پر ↑) اور دوسرا  $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$  ہے جس کو مخالف میدان<sup>۷</sup> چکر<sup>۱۰</sup> (↓) کہتے ہیں۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو اجزائی متالب قطار (یا چکر کار<sup>۱۱</sup>) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

quarks<sup>۴</sup>  
leptons<sup>۵</sup>  
spin up<sup>۹</sup>  
spin down<sup>۱۰</sup>  
spinor<sup>۱۱</sup>

ساتھ ہی عاملین چکر  $2 \times 2$  متاب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم  $S^2$  کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متاب

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا  $c = \frac{3}{4} \hbar^2$  اور  $e = 0$  ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا  $d = 0$  اور  $f = \frac{3}{4} \hbar^2$  ہوگا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۴.۱۴۴) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اب چونکہ  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  ہے لہذا  $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$  اور  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۸) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ  $S_x, S_y, S_z$  تینوں میں  $\hbar/2$  کا حبز و ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ  $\frac{\hbar}{2}\sigma$  لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالبے چکر<sup>۵۲</sup> ہیں۔ دھیان رکھیں کہ  $S_x, S_y, S_z$  اور  $S^2$  تمام ہر مٹی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کونفا ہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس  $S_+$  اور  $S_-$  غیر ہر مٹی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔  $S_z$  کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۰) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

عمومی حال  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی  $S_z$  کی پیمائش،  $|a|^2$  احتمال کے ساتھ  $+\hbar/2$  یا  $|b|^2$  احتمال کے ساتھ  $-\hbar/2$  دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۵۱) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہوگا)۔<sup>۵۳</sup>

تاہم اس کی بجائے آپ  $S_x$  کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں  $S_x$  کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ  $S_x$  کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو  $S_z$  کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

<sup>۵۲</sup> Pauli spin matrices

<sup>۵۳</sup> لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر  $S_z$  کی پیمائش کی جائے تب  $\frac{\hbar}{2}$  نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہوگا۔ (صفحہ ۱۰۵ پر حاشیہ ۱۲ دیکھیں۔)

لہذا  $\beta = \pm \alpha$  ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $S_x$  کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشنی متالب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۳) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ  $S_x$  کی پیمائش کریں تب  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $|a+b|^2/2$  اور  $-\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $|a-b|^2/2$  ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)  
مثال ۴.۲: فرض کریں  $\frac{1}{2}$  چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$(۴.۱۵۴) \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ  $S_z$  اور  $S_x$  کی پیمائش کرتے ہوئے  $+\hbar/2$  اور  $-\hbar/2$  حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔  
حل: یہاں  $a = (1+i)\sqrt{6}$  اور  $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$  ہے لہذا  $S_z$  کیلئے  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ  $-\hbar/2$  حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح  $S_x$  کیلئے  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$  جبکہ  $-\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$  ہوگا۔ اتفاقی طور پر  $S_x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left( +\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left( -\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$



جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو  $1/2$  چکر سے متعلق ایک فرضی پیمائشی تجربہ سے گزرتا ہوں۔ چونکہ یہ ان تصوراتی خیالات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ فرض کریں ایک ذرا حال  $\psi_+$  میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے کہ اس زرے کی زاویائی چکری میار حرکت کا  $z$  جز کیا ہے۔ تب ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب  $\hbar/2 +$  ہوگا۔ چونکہ  $z$  کی پیمائش لازمِ یہی قیمت دے گی۔ اس کے بجائے اگر پوچھنے والا سوال کرے کہ اس زرے کی چکری زاویائی میار حرکت کا  $x$  جز کیا ہوگا۔ تب ہم یہ کہنے پر مجبور ہو گئے کہ  $S_x$  کی پیمائش سے  $\hbar/2 +$  یا  $\hbar/2 -$  کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماحرِ تبات یا حصہ ۱-۲ کے نقطہ نظر سے حقیقت پسند ہو تو وہ اس جواب کو ناکافی سمجھے گا۔ کیا آپ یہ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس زرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے۔ نہیں میں نے یہ تو نہیں کہا!۔ مجھے زرے کا حال تھیک تھیک معلوم ہے اور یہ  $\psi_+$  ہے۔ یہ ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا  $x$  جز نہیں بتا سکتے اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص  $x$  جز نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً ایسا ہی ہوگا۔ اگر  $S_x$  اور  $S_z$  کی قیمتیں تائین ہوں تب اصولِ ادمِ یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔ یہ سنتے ہی سوال کرنے والا زرے کی چکر کا  $x$  جز از خود پیمائش کرتا ہے۔ اب فرض کریں کہ وہ  $\hbar/2 +$  قیمت حاصل کرتا ہے۔ وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے۔ اس زرے کی  $S_x$  قیمت  $\hbar/2 +$  ہے۔ جی آپ درست فرض مانتے ہیں اب اس کی یہی قیمت ہے۔ جس سے یہ بالکل سبب نہیں ہوتا کہ تجربہ سے پہلے بھی اس کی یہی قیمت تھی۔ اب ظاہر ہے آپ بال کی کھال اتار رہے ہو اور آپ کی ادمِ یقینیت اصول کا کیا بنتا۔ میں اب  $S_x$  اور  $S_z$  دونوں کو حبانہ ہوں۔ جی نہیں آپ نہیں جانتے ہیں۔ آپ نے پیمائش کے دوران زرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ  $\psi_+$  اور اگر چہ آپ اس کے  $S_x$  کی قیمت جانتے ہیں۔ آپ  $S_z$  کی قیمت اب نہیں جانتے ہیں۔ لیکن میں نے  $S_x$  کی پیمائش کے دوران ہم نے پوری کوس کی کہ میں زرے کا سکون برپا نہ کروں۔ اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے تو خود تصدیق کریں۔ آپ  $S_z$  کی پیمائش کریں اور دیکھیں کہ کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ وہ  $\hbar/2$  حاصل کرے جو میرے لیے سرمنرگی کا عصر ہوگا۔ اگر ہم اس پورے عمل کو بار بار دورائیں تو یہ سب اوقات اسے  $\hbar/2 -$  حاصل ہوگا۔ یہ کام آدمی کے لیے

ایک عام آدمی، ایک فلسفی یا ایک کلاسیکی مایہ تبات کا یہ کہنا کہ کس زرے کا ٹھیک ٹھیک مکان یا ميعار حرکت یا چکری زاویائی میار حرکت کا  $x$  جز یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نذر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھنا جس نے کوانٹم میکینکات کا گہرا مطالعہ کیا ہو تو قریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی عقل دنگ نہیں دہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو  $1/2$  چکر نظام پر دوبارہ غور کی جائے گا۔ یہ کوانٹم میکینکات کی پیچیدہ تفصیلات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کی جائے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی میار حرکت کے بنیادی تبدیلی رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مشال 148.4 درج ذیل زروی متاندہ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۵)$$

جہاں اشاریہ x, y, z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ  $\epsilon_{jkl}$  Levi-Civita علامت ہے۔ جو  $1, 2, 3$  یا  $jkl = 1, 2, 3$  یا  $3, 1, 2$  کی صورت میں +1 جبکہ  $1, 2, 3$  یا  $3, 2, 1$  کی صورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹرون درج ذیل چکری حال میں ہے۔  $\psi = A \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix}$  (الف) مامولزنی مستقل A تائین کریں۔

(ب)  $S_x, S_y, S_z$  کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت  $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$  اور  $\sigma_{S_z}$  تلاش کریں۔ دیکھان رہے کہ یہاں  $\sigma$  سے مراد میار انہر انہر ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جیئے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدنی کی نیت کے عین متاک ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ 1 کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول سد spinor  $\chi$  مساوات 139.4 کے لیے  $S_x^2, S_y^2, S_z^2$  اور  $S_x, S_y, S_z$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ  $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$  ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor  $S_y$  کے امتیازی عدداد تلاش لیں۔ (ب) عمومی حال  $\chi$  مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک زرے کے  $S_y$  کی پیانس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جائے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیکھان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکتے ہیں۔ (ج)  $S_y$  کی پیانس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ  $r$  کے ہم رہ چکری زاویائی میار حرکت کے اجزاء کا کالپ  $S_r$  تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (۴.۱۵۶)$$

$S_r$  کی امتیازی عدداد اور معمول سد امتیازی spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad (۴.۱۵۷)$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری جز ضرب  $e^{i\phi}$  سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک زرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ  $S_x, S_y$  اور  $S_z$  تیار کریں۔ اشعارہ  $S_z$  کے کتنے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر  $S_+, S_z, S_-$  کا عمل تائین کریں۔ نصاب میں 1/2 چکر کے لیے استعمال کی گئی ترتیب استعمال کریں

## ۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹتے ہوئے بار بار ذرہ پر مقناطیسی جھک کتبہ مشتمل ہوگا۔ اس کا مقناطیسی جھک کتبہ معیار اثر  $\mu$ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت  $S$  کو راست متناسب ہوگا۔

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۸)$$

جہاں تناسبی مستقل  $\gamma$  مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان  $B$  میں رکھے گئے مقناطیسی جھک کتبہ پر قوتِ سروٹ  $\mu \times B$  عمل کرتا ہے۔ جو کمپس کی سوئے کی طرح اس کو میدان کے متوازن لانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس قوتِ سروٹ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۹)$$

لہذا مقناطیسی میدان  $B$  میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کا ہیملٹونین درج ذیل ہوگا۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۶۰)$$

سوال ۴.۲۶: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد  $1/2$  چکر ذرات یکساں تنظیم؟؟ میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $S_a^{(1)}$  کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز  $\hat{a}$  ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $S_b^{(2)}$  کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز  $\hat{b}$  ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں  $\hat{a}$  اور  $\hat{b}$  کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۶۱)$$

سوال ۴.۲۷:

۱. کلیڈش گورڈن عددی سروں کو  $1/2$   $s_1 = anything$   $s_2$  کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں  $A$  اور  $B$  عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے  $|sm\rangle$  کا امتیازی حال ویکٹر  $S^2$  ہوگا

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |S_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |S_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاثر ہوں کہ  $S_x^{(2)}$  مثلاً ویکٹر  $|s_2 m_2\rangle$  پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں  $s = s_2 \pm 1/2$  مساویں تعین کرتی ہیں۔

ب۔ اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجہ دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۲۸: ہمیشہ کی طرح  $S_z$  کی امتیازی حالات کو اس سلیٹے ہوئے  $3/2$  چکر کے ذرے کے لیے متالاب  $S_x$  تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے  $S_x$  کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۲۹: مساوات 145.4 اور 147.4 میں  $1/2$  چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں  $3/2$  چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری  $s$  چکر کے لیے چکر کی متالاب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$  ہوگا۔

سوال ۴.۳۰: کروئی ہارمونیات کے لیے،؟؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جز  $B_l^m$  تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے  $B_l^{m+1}$  کی صورت میں  $B_l^m$  کا کلیہ تواری دریافت کریں۔ اس کو  $m$  کے ریاضی ماحول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے  $B_l^m$  کو مجموعی مستقل  $C(l)$  تک حل کریں۔ آخر

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجناڈر تفاعل کے تفسرک کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(۴.۱۶۲) \quad (1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m$$

سوال ۴.۳۱: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi -)$$

ا. مداری زاویائی معیار حرکت کے مربع  $(L^2)$  کی پیمائش کے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفسردی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ معیاری  $z$  زاویائی معیار حرکت کے  $(L_z)$  حیز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیزر  $(S^2)$  کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار  $z$  کے  $(S_z)$  حیز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت  $S = J + L$ ۔

ه. آپ  $J^2$  کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفسردی احتمال کیا ہوگا۔  
و. یہی کچھ  $J_z$  کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی  $r, \theta, \phi$  پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگا؟

ح. آپ چکر کے  $z$  حیز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس  $r$  پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۲:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل  $f(\phi)$  جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) \equiv e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں  $\varphi$  اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا  $L_z/\hbar$  کو  $z$  کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی  $L \cdot \hat{n}/\hbar$  ہوگا جو  $\hat{n}$  کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی  $e^{(iL \cdot \hat{n}\varphi/\hbar)}$  کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ  $\varphi$  گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار  $S \cdot \hat{n}/\hbar$  ہوگا بالخصوص  $1/2$  چکر کے لیے

$$(۴.۱۶۳) \quad \chi' = e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} \chi$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور  $x - axis$  کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا  $(2 \times 2)$  متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہمہ میدان  $(\chi_+)$  کو مخالف میدان  $(\chi_-)$  میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور  $y - axis$  کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا متالب تیار کریں اور دیکھیں کہ  $(\chi_+)$  پر اس کا اثر کیا ہوگا؟

د. محور  $z - axis$  کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں

$$e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۱۶۴)$$

سوال ۴.۳۳: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی تبدیلی رشتے (مساوات 99.4) امتیازی افتدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ  $L = r \times p$  کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہوگا۔ ہم  $a$  کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جس کا بود لمبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس اس بوہر درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ  $i\hbar[q_1, p_2] = [q_1, p_1] = [q_2, p_1] = [q_2, p_2] = 0$  یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ تبدیلی رشتوں کو  $q's$  اور  $p's$  مطابقت کرنے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2 - q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی سرعش جس کی کیت  $m = \hbar/a^2$  ہو اور تعدد  $\omega = 1$  ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی  $H$  کے لیے  $L_z = H_1 - H_2$  گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی سرعش کے ہیملٹنی کی امتیازی افتدار  $(n+1/2)\hbar\omega$  ہیں جہاں  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ہوگا (حصہ ?? کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ تبدیلی رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ  $L_z$  کے امتیازی افتدار لازمًا عدد ہوں گے۔

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

سوال ۴.۳۴: عمومی حال مساوات 139.4 می 1/2 چکر کے  $S_z$  اور  $S_y$  کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی  $| \langle S_z \rangle | \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$  میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومییت کھوئے بغیر  $a$  کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہوگی  $b$  حالف حقیقی یا حالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۳۵: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا؟؟؟؟  $q$  ہو اور جو مقناطیسی میدان  $E$  اور  $B$  میں مستحق رفتار  $v$  کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لوریسنز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۱۶۵)$$

اس قوت کو کسی بھی غیر مستحق توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو مقبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (۴.۱۶۶)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \quad (۴.۱۶۷)$$

جہاں  $A$  مستحق مخفی  $\nabla \times A = B$  اور  $\phi$  غیر مستحق مخفی قوت  $(E = -\nabla \phi - \partial A / \partial t)$  ہیں لہذا شروڈنگر مساوات میں باضابطہ متبادل  $(\hbar/i) \nabla \rightarrow (p - qA)$  درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\phi \right] \psi \quad (۴.۱۶۸)$$

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d \langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (p - qA) \rangle \quad (۴.۱۶۹)$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم  $d \langle r \rangle / dt$  کو  $\langle v \rangle$  لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d \langle v \rangle}{dt} = q \langle E \rangle + \frac{q}{2m} \langle (p \times B - B \times p) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (A \times B) \rangle \quad (۴.۱۷۰)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں  $E$  اور  $B$  میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d \langle v \rangle}{dt} = q(E + \langle v \rangle \times B), \quad (۴.۱۷۱)$$

اس طرح  $\langle v \rangle$  کی توقعاتی قیمت عین لوریسنز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۴.۳۶: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں  $B_0$  اور  $K$  مستقل ہیں

$$A = \frac{B_0}{2}(x_j - y_i)$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان  $E$  اور  $B$  تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیت  $m$  اور بار  $q$  ہوں کے ساکن حالات کی احبازی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$(۴.۱۷۲) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں  $qB_0/m = \omega_1$  اور  $\sqrt{2qKm} = \omega_2$  ہوگا۔ تبصرہ:  $0 = K$  کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کو انٹیم مشل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد  $\omega_1$  ہوگا اور یہ  $z$  رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ احبازی توانائیاں  $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$  ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۳۷: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوت  $A$  اور  $\varphi$  یکساں طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں، طبیعتداریں میدان  $E$  اور  $B$  ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوت

$$(۴.۱۷۳) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں مقام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان  $\varphi$  اور  $A$  دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گنج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہے۔

ب. کو انٹیم مکانیات میں مخفی قوت کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا یہ نظریہ گنج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$(۴.۱۷۴) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گنج تبادلہ مخفی قوت  $\varphi'$  اور  $A$  لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ  $\Psi$  اور  $\Psi'$  میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبیعتدار کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔





جوابات



# فهرست

54relation,	allowed
energy	26energies,
22allowed,	51 argument,
31conservation,	Bessel
13ensemble,	99function,spherical
expectation	107energy,binding
6value,	Bohr
formula	106radius,
16Broglie,De	106formula,Bohr
Fourier	25conditions,boundary
52transform,inverse	98term,centrifugal
52transform,	83states,coherent
Frobenius	4collapses,
45method,	commutation
function	36relation,canonical
59delta,Dirac	90relations,canonical
generalized	36commutator,
59distribution,	28complete,
59function,	77continuous,
generating	90continuum,
50function,	coordinates
generator	91spherical,
86space,intranslation	3interpretation,Copenhagen
86time,intranslation	75degenerate,
Gram-Schmidt	delta
79process,orthogonalization	28Kronecker,
21Hamiltonian,	Dirac
harmonic	80orthonormality,
25oscillator,	77discrete,
	dispersion

- 3realist,
- 12potential,
- 97effective,
- probability
- 8density,
- quantum
- 105number,principle
- numberquantum
- 96azimuthal,
- 96magnetic,
- 99numbers,quantum
- 97equation,radial
- recursion
- 46formula,
- reflection
- 64coefficient,
- 73time,revival
- Rodrigues
- 49formula,
- 94formula,Rodrigues
- Rydberg
- 113constant,
- 113formula,
- Schrodinger
- 20time-independent,
- 1align,Schrodinger
- series
- 113Balmer,
- 28Fourier,
- 113Lyman,
- 113Paschen,
- 35power,
- 34Taylor,
- spherical
- 96harmonics,
- 11square-integrable,
- 7deviation,standard
- state
- 58bound,
- 113Helium,
- Hermitian
- 40conjugate,
- 3variables,hidden
- 2indeterminacy,
- ladder
- 38operators,
- Laguerre
- 108polynomial,associated
- 108polynomial,
- 90Laplacian,
- law
- 34Hooke,
- Legendre
- 94associated,
- linear
- 22combination,
- 113Lithium,
- 6mean,
- 6median,
- 14momentum,
- Neumann
- 99function,spherical
- 27node,
- 10normalization,
- 14operator,
- 38lowering,
- 38raising,
- 27orthogonal,
- 28orthonormal,
- Planck's
- 113formula,
- polynomial
- 48Hermite,
- position
- 3agnostic,
- 3orthodox,

اتاقی  
حالات، 83  
اجزائی  
توانائی، 26  
استمراری، 77  
استمراریہ، 90  
اصول  
عدم یقینیت، 16  
انتشاری  
رشتہ، 54  
انخطاطی، 75  
انعکاس  
شرح، 64  
اوسط، 6  
بقا  
توانائی، 31  
بندشی توانائی، 107  
بوہر  
رداس، 106  
کلیہ، 106  
بیل  
کروی تقاعل، 99  
پلانک  
کلیہ، 113  
پیداکار  
فضا میں انتقال کا، 86  
وقت میں انتقال، 86  
پیداکار  
تقاعل، 50  
تبادلہ  
باضابطہ رشتہ، 36  
باضابطہ رشتہ، 90  
تبادلہ کار، 36  
تجدیدی عرصہ، 73  
ترسیل  
شرح، 64  
تسل  
المر، 113  
پاشن، 113

27excited,  
107,27ground,  
58scattering,  
statistical  
2interpretation,  
66function,step  
theorem  
28Dirichlet's,  
15Ehrenfest,  
52Plancherel,  
112transition,  
transmission  
64coefficient,  
65,58tunneling,  
58points,turning  
16principle,uncertainty  
variables  
19of,separation  
7variance,  
velocity  
54group,  
54phase,  
wave  
64incident,  
52packet,  
64reflected,  
64transmitted,  
1function,wave  
16wavelength,

- ساکن  
حالات، 21  
سرحدی شرائط، 25  
سرنگ زنی، 58، 65  
سگرا، 13  
سوچ  
انکاری، 3  
تقلید پسند، 3  
حقیقت پسند، 3  
سیڑھی  
عاملین، 38  
سیڑھی تفاعل، 66  
شروڈنگر  
غیر تابع وقت، 20  
شروڈنگر تصویر کشی، 86  
شروڈنگر مساوات، 1  
شماریاتی مفہوم، 2  
طول موج، 16، 113  
عامل  
تقلیل، 38  
رفت، 38  
عبور، 112  
عدم تعین، 2  
عدم یقینیت اصول، 16  
عندروہ، 27  
علیحدگی متغیرات، 19  
عمودی، 27  
معیاری، 28  
غیر مسلسل، 77  
منرو وینوس  
ترکیب، 45  
فوریسر  
الٹ بدل، 52  
بدل، 52  
قابل تکامل مربع، 11  
قانون
- ٹیلر، 34  
طامتی، 35  
فوریسر، 28  
لیمان، 113  
تغییریت، 7  
تفاعل  
ڈیلٹا، 59  
تفاعل موج، 1  
توالی  
کلیہ، 46  
توانائی  
اجزائی، 22  
توقعاتی  
قیمت، 6  
جفت  
تفاعل، 24  
حال  
بکھراؤ، 58  
زمینی، 27، 107  
مقید، 58  
ہیجان، 27  
خطی جوڑ، 22  
خفیہ متغیرات، 3  
دلیل، 51  
ڈیراک  
معیاری عمودیت، 80  
ڈیلٹا  
کرونیگر، 28  
رداسی مساوات، 97  
رڈبرگ، 113  
کلیہ، 113  
رفتار  
دوری سستی، 54  
گروہی سستی، 54  
روڈریگیس  
کلیہ، 94

- ۳۴، ہا
- کثافت
- ۸، احتال
- کثیر رکنی
- ۴۸، ہرمانٹ
- کروی
- ۹۶، ہارمونیات
- کلیہ
- ۱۶، ڈی پروگ
- ۴۹، روڈریگیس
- کوانٹم
- ۱۰۵، صدر عدد
- ۹۹، کوانٹائی اعداد
- کوانٹائی عدد
- ۹۶، استی
- ۹۶، مقناطیسی
- ۳، کوپن ہیگن مفہوم
- گرام شمہ
- ۷۹، ترکیب عمودیت
- ۴، گر کر
- ۹۰، لاپلاسی
- لاگ
- ۱۰۸، شریک کثیر رکنی
- ۱۰۸، کثیر رکنی
- ۱۱۳، تقسیم
- لیوڈنڈر
- ۹۴، شریک
- متعمم
- ۵۹، تقا عمل
- ۵۹، تقسیم
- محمد
- ۹۱، کروی
- ۱۲، مخفیہ
- ۹۷، موثر
- مشرقی
- ۲۵، ہارمونی
- ۹۸، مرکز گریز جبزو
- مسئلہ
- ۱۵، اہر نفٹ
- ۵۲، پلانشرال
- ۲۸، ڈرٹلہ
- ۱۰، معمول زنی
- ۱۴، معیار حرکت
- ۲۸، معیار عمودی
- ۷، معیاری انحراف
- ۲۸، مکمل
- موج
- ۶۴، آمدی
- ۶۴، ترسیلی
- ۶۴، منعکس
- ۵۲، موجی اکٹھ
- نیومن
- ۹۹، کروی تقا عمل
- ۵۸، واپسی نقاط
- ۶، وسطانیہ
- ہارمونی
- ۲۵، مشرقش
- ۴۰، جوڑی دار
- ۸۶، ہیزنبرگ تصویر کشی
- ۱۱۳، ہیلیم
- ۲۱، ہیملٹنی