

# کوانٹم میکانیٹ

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنائی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۴	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	مقید حالات اور بکھراؤ حالات
۷۲	۲.۵.۲	ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	مستثنائی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	ہلبرٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار پاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۴	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۳	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذراتی نظام	۵.۱
۲۰۷	پوزان اور فٹرمیان	۵.۱.۱
۲۱۰	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کو انظم شمار پاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۱	زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۲	$\alpha$ اور $\beta$ کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۸	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۳	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۳	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۳	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۵	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۵۹	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۰	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۰	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۳	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۶۹	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۰	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۳	چپکرومدار ربط	۶.۳.۲
۲۷۸	زیمان اثر	۶.۴
۲۷۸	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۱	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۲	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۳	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۹۵	تغیری اصول	۷
۲۹۵	نظریہ	۷.۱
۳۰۰	ہیلمی کا زینینی حال	۷.۲
۳۰۵	ہائیڈروجن سال باردار یہ	۷.۳
۳۱۵	ونزل وکرامرزو برلوان تخمین	۸
۳۱۶	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۱	سرنگرنی	۸.۲
۳۲۲	کلیات پیوند	۸.۳
۳۳۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۳۸	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۳۸	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۴۳	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۴۶	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۴۶	برق طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۴۷	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۴۸	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۰	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۵۰	آمنطائن A اور B عددی سر . . . . .	۹.۳.۱
۳۵۲	بجبان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۵۵	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۶۵	حرارت ناگزیر تخمین . . . . .	۱۰
۳۶۵	مسئلہ حرارت ناگزیر . . . . .	۱۰.۱
۳۶۵	حرارت ناگزیر عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۶۸	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۷۳	ہیت بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۷۳	گرگی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۷۵	ہندی ہیت . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۸۰	اہارو نوو پو ہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۳۸۹	بکھراؤ . . . . .	۱۱
۳۸۹	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۳۸۹	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۳۹۳	کوانٹم نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۳۹۴	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۳۹۴	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۳۹۷	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۰۰	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۰۳	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۰۳	مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۰۷	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۱۲	شسل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۱۵	پس نوشت . . . . .	۱۲
۴۱۶	آمنطائن پوڈ لکیو روزن تضاد . . . . .	۱۲.۱
۴۱۷	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۲۲	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۲۳	شرودنگر کی بلی . . . . .	۱۲.۴
۴۲۴	کوانٹم زینو تضاد . . . . .	۱۲.۵
۴۲۷	جوابات . . . . .	
۴۲۹	خطی الجبرا . . . . .	۱
۴۲۹	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۲۹	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۳۰	قتالب . . . . .	۳.۱

- ۴.۱ تبدیلی اساس ..... ۴۳۰
- ۵.۱ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار ..... ۴۳۰
- ۶.۱ ہر مشی تباولے ..... ۴۳۰

۴۳۱

فئرہنگ





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۳

### قواعد و ضوابط

#### ۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کے ”ناگہاں“ خدو حال تھے (مثلاً ہارمونی سر تعش میں توانائی کی سطح میں جفت و ناصلے) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔ یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تناسل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تناسل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ متبادل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ تناسل موج، ریاضیاتی طور پر، تصوراتی سمتیائے ایک تعریفی شرائط پر پورے اترتے ہیں؛ جبکہ عاملین ان پر خطی متبادلہ کا عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی متدرج زبان خطی الجبرا<sup>۳</sup> ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ  $\langle \alpha |$  کو  $N$  بُعدی فضا میں کسی مخصوص

<sup>۱</sup>vectors

<sup>۲</sup>linear transformations

<sup>۳</sup>linear algebra

<sup>۴</sup>آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے  $N$  عدد اجزاء  $\{a_n\}$  سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔

$$(۳.۱) \quad |\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

دو سمتیات کا اندرونی ضرب<sup>۵</sup>  $\langle\alpha|\beta\rangle$  (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسعت دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہوگا۔

$$(۳.۲) \quad \langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N$$

خطی تبدل<sup>۶</sup>  $T$ ، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) قوالبے<sup>۷</sup> سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو تالیبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$(۳.۳) \quad |\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کو انٹرمیکانیات میں پائے جانے والے ”سمتیات“ درحقیقت (زیادہ تر) تفاعلات ہوتے ہیں جو لامستثنائی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں  $N$  اجزائی تالیبی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور مستثنائی ابعاد میں سمجھ آنے والی ٹھیک وضاحتیں، لامستثنائی ابعاد میں پریشان کن ثابت ہو سکتی ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ مساوات ۳.۲ کا مستثنائی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، البتہ، لامستثنائی مجموعہ یا مکمل، عدم سرکوزیریت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگی لہذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہوگی۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علاقیت سے آپ واقف ہوں گے، مگر حال ہوشیار رہنا بہتر ہوگا۔

متغیر  $x$  کے تمام تفاعلات مل کر سمتی فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکن طبعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل موج  $\Psi$  معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام مربع متکامل تفاعلات<sup>۸</sup>

$$(۳.۴) \quad \text{ہو} \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{جہاں} \quad f(x)$$

inner product<sup>۵</sup>  
matrices<sup>۶</sup>

ہمارے لئے حدود ( $a$  اور  $b$ ) تقریباً ہر مرتبہ  $\pm\infty$  ہوں گی، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہوگا۔  
square-integrable functions<sup>۸</sup>

مسئلہ (۱) اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۳.۱-۳۔ ادیکھیں)۔ ریاضی دان اسے  $L_2(a, b)$  جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا<sup>۹</sup> کہتے ہیں۔ یوں کو انٹیمیکانیات میں

(۳.۵) **تفاعلات موج ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔**

دو تفاعلات کے اندرونی ضربے کی تعریف درج ذیل ہے جہاں  $f(x)$  اور  $g(x)$  تفاعلات ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f(x) * g(x) dx$$

اگر  $f$  اور  $g$  دونوں مربع متکامل ہوں (یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کی اندرونی ضرب موجود ہوگی (ساوات ۳.۶ کا مکمل ایک مستثنیٰ عدد<sup>۱۱</sup> پر مرکوز ہوگا)۔ ایسا شواہد عدم مساوات<sup>۱۲</sup> کے درج ذیل عملی روپ<sup>۱۳</sup> کے پیش نظر ہوگا۔

$$(۳.۷) \quad \left| \int_a^b f(x) * g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پوری اترتی ہے (سوال ۳.۱-ب)۔ بالخصوص درج ذیل مساوات میں ہم دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۳.۸) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید  $f(x)$  کی اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$(۳.۹) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Hilbert space<sup>۹</sup>

۱۰۔ تکنیکی طور پر، ہلبرٹ فضا سے مراد مکمل اندرونی ضرب فضا ہے، اور مربع متکامل تفاعلات کا ذخیرہ ہلبرٹ فضا کی نقطہ ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر مستثنیٰ ایساوی سمتی فضا ایک بے وقت ہلبرٹ فضا ہوگی۔ چونکہ  $L_2$  کو انٹیمیکانیات کا اکھاڑا ہے لہذا ماہر طبیعیات اسی کو "ہلبرٹ فضا" کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ مکمل سے مراد یہ ہے کہ ہلبرٹ فضا کے کسی بھی تفاعل کی کوئی ترتیب جس تفاعل پر مرکوز ہو، وہ اسی فضا میں پایا جائے۔ اس میں کوئی "سوراخ" نہیں پایا جاتا، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پایا جاتا (اس کے برعکس، مثلاً، تمام کثیررکنیوں کی فضا میں اور تمام ناطق اعداد کے سلسلہ میں بقسینا سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا تفاعل تفاعلات کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ (ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعل کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

۱۱۔ باب ۳ میں بعض اوقات ہمیں مجبوراً معمول پر نہ لانے کے قابل تفاعلات کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبرٹ فضا سے باہر لیتے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنی ہوگی۔ ابھی کے لئے میں فرض کرتا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔

Schwarz inequality<sup>۱۲</sup>

۱۳۔ مستثنیٰ ایساوی سمتی فضا میں شواہد عدم مساوات  $\langle \alpha|\alpha \rangle \langle \beta|\beta \rangle \geq |\langle \alpha|\beta \rangle|^2$  کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۳۳۰ پر سوال ۲.۱

دیکھیں)۔ تاہم یہ ثبوت فرض کرتا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہوگی؛ یہ صرف اس صورت<sup>۱۴</sup> میں صفر ہوگی جب  $f(x) = 0$  ہو۔

ایک تفاعل اس صورت میں معمول شدہ<sup>۱۵</sup> کہلاتا ہے جب اس کی اپنی ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک (1) کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت میں عمودی<sup>۱۶</sup> ہوں گے جب ان کی اندرونی ضرب صفر (0) ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ  $\{f_n\}$  اس صورت میں معیاری عمودی<sup>۱۷</sup> ہوگا جب تمام تفاعلات (درج ذیل دیکھیں) معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں۔

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۱۰)$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت میں مکمل<sup>۱۸</sup> ہوگا جب (لمبرٹ فنکشن) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت (درج ذیل دیکھیں) میں لکھا جاسکے۔

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (۳.۱۱)$$

معیاری عمودی تفاعلات  $\{f_n(x)\}$  کے عددی سر، فوریہ سر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$c_n = \langle f_n | f \rangle \quad (۳.۱۲)$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لا متناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات) (مساوات ۲.۲۸) وقفہ  $(0, a)$  پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتفعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ یا مساوات ۲.۸۵) وقفہ  $(-\infty, \infty)$  پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱:

ا. ظاہر کریں کہ تمام مربع متکا مسل تفاعلات کا سلسلہ مستحق فضا دے گا (صفحہ ۲۲۹ پر ضمیمہ ۱.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہوگا کہ دو مربع متکا مسل تفاعلات کا مجموعہ خود مربع متکا مسل تفاعل ہوگا۔ مساوات ۳.۱۳ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ مستحق فضا ہوگا؟

ب. ظاہر کریں کہ مساوات ۳.۶ کا مکمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ ۲.۱) کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے۔

<sup>۱۴</sup> ایسے تفاعل کے لئے کیا کہا جاسکتا ہے جو چند مخصوص تنہا نقاط کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوں؟ اگرچہ تفاعل معدوم نہیں ہے لیکن مکمل (مساوات ۳.۹) اب بھی معدوم ہوگا۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تو آپ کو ریاضی پر حنی چاہیے۔ طبیعت میں ایسے سمجھیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم لمبرٹ فنکشن میں ایسے دو تفاعلات، جن کے مربع مکمل برابر ہوں، کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر لمبرٹ فنکشن میں ترسیلات در حقیقت تفاعلات کی تعادل جماعت کو ظاہر کرتی ہیں۔

normalized<sup>۱۵</sup>

orthogonal<sup>۱۶</sup>

orthonormal<sup>۱۷</sup>

complete<sup>۱۸</sup>

سوال ۳.۲:

۱. وقفہ  $(0, 1)$  کے بیچ، متغیر  $v$  کے کس خطہ پر، تعامل  $x^v = f(x)$  ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟ فرض کر لیں کہ  $v$  حقیقی تاہم ضروری نہیں کہ مثبت ہو۔

ب. کیا  $v = \frac{1}{2}$  کی مخصوص صورت میں  $f(x)$  ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تعامل  $xf(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تعامل  $(\frac{d}{dx})f(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

## ۳.۲ قابل مشاہدہ

۳.۲.۱ ہر مشی عاملین

قابل مشاہدہ  $Q(x, p)$  کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب عملیات<sup>۹</sup>:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle \quad (۳.۱۳)$$

کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ اب پیش کش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہوگا، لہذا بہت ساری پیش کشوں کی اوسط بھی حقیقی (درج ذیل دیکھیں) ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \quad (۳.۱۴)$$

لیکن اندرونی ضرب کا مخلوط جوڑ داری ترتیب کو الٹ دیتا ہے (مساوات ۳.۸) لہذا ہماری مساوات درج ذیل ہو جائے گی

$$\langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle^* \quad (۳.۱۵)$$

جو لازماً کسی بھی تعامل موج  $\Psi$  کے لئے درست ہوگی۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین میں درج ذیل اہم خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} | f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ کے لئے} \quad (۳.۱۶)$$

ایسے عاملین کو ہم ہر مشی<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں۔

<sup>۹</sup> یاد رہے کہ  $\hat{p} = (\hbar/i) d/dx$  پر کر کے  $Q$  سے عامل  $\hat{Q}$  حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے فطری ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد  $a$  اور  $b$  اور تعامل  $f$  اور  $g$  کے لئے  $a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x) = \hat{Q}[af(x) + bg(x)]$  ہوگا۔ یہ تمام تعاملات کی فضا پر خطی حسابہ (ضرب) قائم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر کے تعامل کو باہر کے تعامل میں لے جاتے ہیں (سوال ۳.۲-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آ سکتی ہے۔

<sup>۲۰</sup> hermitian

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط عامہ کی جاتی ہے۔

$$(۳.۱۷) \quad \langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے}$$

تاہم مختلف نظر آنے کے باوجود، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کی عین معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نکتہ یہ ہے کہ ہر مشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کو انٹیم میکانیات میں ہر مشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رومنا ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

$$(۳.۱۸) \quad \text{قابل مشاہدہ کو ہر مشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔}$$

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیار حرکت کا عامل ہر مشی ہے؟

$$(۳.۱۹) \quad \langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ  $f(x)$  اور  $g(x)$  مربع مکامل ہیں لہذا  $\pm\infty$  پر ان دونوں کو صفر تک بانٹنا چاہیے<sup>۲۱</sup> جس کی بنا پر مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مکمل بالخصوص سے پیدا منفی کی علامت کو  $i$  کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل  $d/dx$  (جس میں  $i$  نہیں پایا جاتا) غیر ہر مشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: ظاہر کریں کہ اگر (مربع فضا میں) تمام تفاعل  $h$  کے لیے  $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle h | \hat{Q}h \rangle$  ہو تب تمام  $f$  اور  $g$  کے لیے  $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$  ہوگا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہر مشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے  $h = f + g$  اور بعد میں  $h = f + ig$  لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہر مشی عاملین کا مجموعہ خود بھی ہر مشی ہوگا۔

ب. فرض کریں  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے اور  $\alpha$  ایک مخلوط عدد ہے۔  $\alpha \hat{Q}$  پر کیا شرائط عائد کرنے سے  $\alpha \hat{Q}$  بھی ہر مشی ہوگا؟

ج. دو ہر مشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مشی ہوگا؟

د. دکھائیں کہ عامل مقام ( $\hat{x} = x$ ) اور ہیملٹنی عامل ( $\hat{H} = -(\hbar^2/2m) d^2/dx^2 + V(x)$ ) ہر مشی ہیں۔

<sup>۲۱</sup> حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے گھمبیر تفاعلات پائے جاتے ہیں جو مربع مکامل ہونے کے باوجود لامتناہی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تفاعلات طبیعیات میں نہیں پائے جاتے، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے تو ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کر دیتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ متناہی وقفے پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان دینا ہوگا کیونکہ  $(-\infty, \infty)$  پر ہر مشی عامل،  $(0, \infty)$  یا  $(-\pi, \pi)$  پر غیر ہر مشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامتناہی چوکور کنویں کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تفاعلات موج لامتناہی لکیر پر پائے جاتے ہیں، جو کسی وجہ سے  $(0, a)$  کے باہر صفر ہیں۔



سوال ۳.۵: عامل  $\hat{Q}$  کا ہر مشی جوڑی دار<sup>۲۲</sup> یا شریکے عامل<sup>۲۳</sup>  $\hat{Q}^+$  درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(۳.۲۰) \quad \langle f | \hat{Q} g \rangle = \langle \hat{Q}^+ f | g \rangle \quad (\text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے})$$

یوں ہر مشی عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر  $(\hat{Q} = \hat{Q}^+)$  گا۔

۱.  $x, i$  اور  $d/dx$  کے ہر مشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی مرتعش کے عامل رفت  $a_+$  (مساوات ۲.۴۷) کا ہر مشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ  $(\hat{Q}\hat{R})^+ = \hat{R}^+\hat{Q}^+$  ہوگا۔

### ۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کے مندرجہ، جس میں تمام  $\psi$  ایک حال میں ہوں، پر قابل مشابہ  $Q$  کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کوانٹم میکانیات کی عدم تعیینیت<sup>۲۴</sup>۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں  $Q$  کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم  $q$  کہہ لیں) دے؟ اس کو آپ قابل مشابہ  $Q$  کا تعیین حال<sup>۲۵</sup> کہہ سکتے ہیں۔ (درحقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات، ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال  $\Psi_n$  میں ایک ذرے کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی<sup>۲۶</sup> ”اجازتی“ توانائی  $E_n$  دیگی۔)

تعیین حال میں  $Q$  کا معیاری انحراف صفر ہوگا جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۱) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \Psi | (\hat{Q} - q)^2 \Psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) \Psi | (\hat{Q} - q) \Psi \rangle = 0$$

(ا) اگر ہر پیمائش  $q$  دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی  $q$  ہوگی:  $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے لہذا  $\hat{Q} - q$  بھی ہر مشی عامل ہوگا؛ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے میں نے اندرونی ضرب کے ایک جزو ضربی  $(\hat{Q} - q)$  کو بائیں منتقل کیا ہے۔ تاہم ایسا واحد تعاضل جس کی خود اپنے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو جاتی ہو، 0 ہے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۲) \quad \hat{Q}\Psi = q\Psi$$

یہ عامل  $\hat{Q}$  کی امتیازی قدر مساوات<sup>۲۶</sup> ہے؛  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل<sup>۲۷</sup>  $\Psi$  اور مطابقتی امتیازی قدر<sup>۲۸</sup>  $q$  ہے۔ یوں درج ذیل

hermitian conjugate<sup>۲۲</sup>  
adjoint<sup>۲۳</sup>

ظاہر ہے، میں درست پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی غلطی کی بنا پر غلط پیمائش کی بات نہیں کی جارہی ہے، جس کو انٹرمیکانیات سے نہیں جوا جاسکتا

determinate state<sup>۲۵</sup>

eigenvalue equation<sup>۲۶</sup>

eigenfunction<sup>۲۷</sup>

eigenvalue<sup>۲۸</sup>

ہوگا۔

(۳.۲۳) تعین حالات  $\hat{Q}$  کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔

ایسے حال پر  $Q$  کی پیمائش لازماً امتیازی متدر  $q$  دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی متدر ایک عدد ہے (نہ کہ عامل یا تفاعل)۔ امتیازی تفاعل کو کسی مستقل سے ضرب دینے سے امتیازی تفاعل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کی امتیازی متدر وہی ہوگی۔ صفر کو امتیازی تفاعل نہیں لیا جاسکتا؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تفاعلات میں شامل نہیں کرتے؛ ورنہ کسی بھی عامل  $\hat{Q}$  اور تمام  $q$  کے لیے  $\hat{Q}0 = q0 = 0$  ہوگا جس کی بنا پر ہر عدد ایک امتیازی متدر ہوگا)۔ ہاں امتیازی متدر کے صفر ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا طیف<sup>۲۹</sup> حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تابع امتیازی تفاعلات کی امتیازی متدر ایک جتنی ہوگی؛ ایسے طیف کو انخطاط<sup>۳۰</sup> طیف کہا جاتا ہے۔

مشال کے طور پر، کل توانائی کے تعین حالات، ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے:

$$(۳.۲۴) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جو بالکل غیر تابع وقت شرودنگر مساوات ہے۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی متدر کے لیے صرف  $E$  اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف)  $\psi$  استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ  $e^{-iEt/\hbar}$  چسپاں کر کے  $\Psi$  حاصل کیا جاسکتا ہے؛ جواب بھی  $H$  کا امتیازی تفاعل ہوگا)۔

مشال ۳: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں  $\phi$ ، ہمیشہ کی طرح، دو البادی قطبی محدود کا متغیر ہے۔

$$(۳.۲۵) \quad \hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$$

(یہ عامل سوال ۲.۳۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا۔) کیا  $\hat{Q}$  ہر مثنیٰ ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم مستثنائی وقفے  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  پر تفاعلات  $f(\phi)$  کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں  $\phi$  اور  $\phi + 2\pi$  ایک ہی طبعی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۶) \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

تکمل بالخص استعمال کرتے ہوئے یہ نتیجہ ملے گا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* \left( i \frac{dg}{d\phi} \right) d\phi = i f^* g \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i \left( \frac{df^*}{d\phi} \right) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لہذا  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا پر سرحدی جزو خارج ہو جائے گا)۔  
امتیازی متدر مساوات:

$$i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi) \quad (3.24)$$

کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f(\phi) = A e^{-iq\phi} \quad (3.28)$$

$q$  کی ممکن قیمتیں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.29)$$

□

اس عامل کا طیف تمام صحیح اعداد پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر انخطی ہے۔

سوال ۳.۶: عامل  $\hat{Q} = d^2 / d\phi^2$  پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور  $\phi$  قطبی محدد میں انتہی زاویہ ہے۔ کیا  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتد تلاش کریں۔ عامل  $\hat{Q}$  کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انخطی ہے؟

### ۳.۳ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل (جو طبعی طور پر متبادل مشاہدہ کے تعین حالات ہیں) کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل<sup>۳۱</sup> ہو (یعنی امتیازی افتدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر متبادل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری<sup>۳۲</sup> ہو (یعنی امتیازی افتدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکن تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی افتدار کی ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے متبادل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرے کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً مستثنائی چوکور کنویں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کی متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گی؛ درحقیقت یہ مستثنائی ابعادی نظریے (ہر مشی متبادل کے امتیازی سمتیات) سے بہت مشابہت رکھتا ہے۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

## ۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل میں دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کی امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل  $f$  اور امتیازی قدر  $q$  ہو) اور

$$\langle f | \hat{Q}f \rangle = \langle \hat{Q}f | f \rangle$$

ہو ( $\hat{Q}$  ہر مشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ  $q$  ایک عدد ہے لہذا اس کو مکمل سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات ۳.۶) لہذا دائیں طرف  $q$  بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم  $\langle f | f \rangle$  صفر نہیں ہو سکتا ہے (متانون کے تحت  $f(x) = 0$  امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا) لہذا  $q = q^*$  یعنی  $q$  حقیقی ہوگا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرے کے قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: منفرد امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عموماً ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں:

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

اور  $\hat{Q}$  ہر مشی ہو، تب  $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$  ہوگا، لہذا

$$q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

ہوگا۔ (یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کی اندرونی ضربیں موجود ہوں گی)۔ اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت)  $q$  حقیقی ہے، لہذا  $q' \neq q$  کی صورت میں  $\langle f | g \rangle = 0$  ہوگا۔

□

<sup>۳۳</sup> یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دوسری صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتی ہے۔

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چوکور کنویں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تقش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ مفرد امتیازی افتدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاضلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی متابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انخطاطی حالات ( $q' = q$ ) کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک جیسی امتیازی افتدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی افتدر والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۳.۷-۱) اور ہم گرام شمد ترکیبے عمودیت<sup>۳۴</sup> (صفحہ ۲۲۹ پر سوال ۱.۱) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انخطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاضلات مرتب کر سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (اللہ کا شکر ہے) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ یوں انخطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاضلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کو انٹیمیکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم مفروض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریسٹر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اسی تفاضلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنای بعدی سمتی فضا میں ہر مشی متابل کے امتیازی سمتیے تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیے کو ان کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے لامتناہی بعدی فضاوں میں اس خاصیت کے لئے ثبوت نہیں ہے۔ تاہم یہ خاصیت کو انشائی میکانیات کے اندرونی ثبات کیلئے لازمی ہے، لہذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسئلہ (بلکہ متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مشی عاملین پر عائد شرط) لیتے ہیں۔

مسئلہ: متابل مشاہدہ کے امتیازی تفاضلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاضل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔<sup>۳۵</sup>

سوال ۳.۷:

۱. مفروض کریں کہ عامل  $\hat{Q}$  کے دو امتیازی تفاضلات  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہیں اور ان دونوں کی امتیازی افتدر  $q$  ہے۔ دکھائیں کہ  $f$  اور  $g$  کا ہر خطی جوڑ خود  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاضل ہوگا اور اس کی امتیازی افتدر  $q$  ہوگی۔

ب. تصدیق کریں کہ  $e^x = f(x)$  اور  $e^{-x} = g(x)$  عامل  $d^2/dx^2$  کے امتیازی تفاضلات ہیں اور ان کی امتیازی افتدر برابر ہے۔ تفاضل  $f$  اور  $g$  کے ایسے دو خطی جوڑ بنائیں جو وقفہ  $(-1, 1)$  پر عمودی امتیازی تفاضلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

۱. تصدیق کریں کہ مثال ۳.۱ میں ہر مشی عامل کی امتیازی افتدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (مفرد امتیازی افتدار کے) امتیازی تفاضلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال ۳.۶ کے عامل کے لیے کریں۔

<sup>۳۴</sup>Gram-Schmidt orthogonalization process

<sup>۳۵</sup>چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ صرف چند صورتوں میں متابل ثبوت بات کو مسئلہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

## ۳.۳.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کی اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۱۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقت، عمودیت اور کمیت) اب بھی کارآمد ہوں گی۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ  $p$  اس کی امتیازی تدر اور  $f_p(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ  $p$  کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع مکمل نہیں ہے؛ اس لئے ہلبرٹ فضا میں عامل معیار حرکت کا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی افتدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں تو ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۳۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم  $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$  لیں تب

$$(۳.۳۲) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۳۳) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات ۳.۱۰) کی یاد دلاتی ہے؛ یہ اشاریے استمراری متغیر ہیں، اور کرونیٹر ڈیلٹا ڈیراک ڈیلٹا بن گیا ہے؛ تاہم اس کے علاوہ یہ ایک جیسی نظر آتی ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو ڈیراک معیاری عمودیت کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعے (مساوات ۳.۱۱) کی جگہ اب مکمل استعمال ہوتا ہے؛ کسی بھی (مربع مکمل) تفاعل  $f(x)$  کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۴) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

توسیقی عددی سر (جواب تفاعل  $c(p)$  ہوگا) کو فورسز ترکیب سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$(۳.۳۵) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ توسیع (مساوات ۳.۳۲) درحقیقت ایک فورسز تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن نہیں جن کا طول موج درج ذیل ہے۔

$$(۳.۳۶) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت مناسب وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ، ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پر اسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہو۔ ہاں ہم معمول پر لانے کے قابل ایسا موجی اکٹھ بنا سکتے ہیں جس کے معیار حرکت کی سعت مختصر سی ہوگی اور ڈی بروگلی کا تعلق اس پر لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا سمجھیں؟ اگرچہ  $\hat{p}$  کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کی امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی) فزیمی ”مضافات“ میں رہتا ہے اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہے۔ یہ ممکن طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے، لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ ہم یکے بعد دیگرے کو پڑھتے ہوئے دیکھ چکے ہیں)۔<sup>۳۷</sup>

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ  $y$  امتیازی قدر اور  $g_y(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۷) \quad x g_y(x) = y g_y(x)$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے)  $y$  ایک مقررہ عدد، جبکہ  $x$  استمراری متغیر ہے۔ متغیر  $x$  کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے  $x$  سے ضرب دینا، اس کو  $y$  سے ضرب دینے

<sup>۳۷</sup> غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ نہ صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ  $\pm\infty$  پر بے فتاویٰ بڑھتے ہیں۔ اس خطے میں، جس کو میں ”مضافات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کی اپنی (مستثنائی) اندرونی ضرب نہیں پائی جاتی، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ لیکن ایسا  $\hat{p}$  کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کی امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے عامل معیار حرکت ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات ۳.۱۹ میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک  $f$  ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب  $\hat{p}$  کا امتیازی تفاعل  $g$  ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل  $\hat{p}$  کا امتیازی قدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل  $\hat{p}$  کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطے سے باہر پائے جائیں گے جس میں  $\hat{p}$  ہر مشی ہو۔

کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ  $x = y$  کے ایسی خاصیت والاتقاع عمل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تقاع عمل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تقاعلات مربع مکمل نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(۳.۳۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_y^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم  $A = 1$  لیں تاکہ

$$(۳.۳۹) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۰) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تقاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(۳.۴۱) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۲) \quad c(y) = f(y)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہر مٹی عامل کا طیف استمراری ہو (لہذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر  $p$  یا یہاں پیش مثالوں میں  $y$ ، اور بعد ازاں عموماً  $z$  سے نام دیا جائے)، امتیازی تقاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تقاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب مکمل ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی سر تقش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (مستثنیٰ چوکور کنویں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۱۰: کیا لامستثنیٰ چوکور کنویں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تقاع عمل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟



## ۳.۴. متعمم شمارتیائی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی قابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متعمم شمارتیائی مفہوم<sup>۳۸</sup> پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے قابل بناتی ہے۔ متعمم شمارتیائی مفہوم اور شرودنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقا کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انٹرمیکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شمارتیائی مفہوم: حال  $\Psi(x, t)$  میں ایک ذرے کی ایک قابل مشاہدہ  $Q(x, P)$  کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل  $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$  کی کوئی ایک امتیازی مقدار دے گی۔ اگر  $\hat{Q}$  کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل  $f_n(x)$  سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی مقدار  $q_n$  کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔} \quad (۳.۴۳)$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی مقدار  $q(z)$  حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات  $f_z(x)$  ہوں، سعت  $dz$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔} \quad (۳.۴۴)$$

پیمائشی عمل کے بنا پر تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم<sup>۳۹</sup> ہوتا ہے۔<sup>۴۰</sup>

شمارتیائی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (۳.۴۵)$$

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو باآسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔<sup>۴۱</sup>

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x)^* \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۶)$$

generalized statistical interpretation<sup>۳۸</sup>  
collapse<sup>۳۹</sup>

<sup>۳۸</sup> استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد و نواہ میں، پیمائشی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود وسعت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔  
<sup>۴۱</sup> دھیان رہے کہ تاہجیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں  $c_n(t)$  لکھنا چاہیے۔

کافی طور پر ” $\Psi$  میں  $f_n$  کی مقدار“ کو  $c_n$  ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش  $Q$  کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $\Psi$  میں ” $f_n$  کی مقدار“ پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت  $|c_n|^2$  ہوگی۔ متعمم شماریاتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔<sup>۴۲</sup>

ہاں (تمام ممکن نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۷)$$

جو یقیناً تفعل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \quad (۳.۴۸)$$

اسی طرح تمام ممکن امتیازی اقدار کو انفرادی طور پر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے  $Q$  کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۴۹)$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle \quad (۳.۵۰)$$

جسے  $\hat{Q} f_n = q_n f_n$  کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n'n} = \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۵۱)$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آرہی ہیں۔

کیا ہم معام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چومامارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال  $\Psi$  میں ایک ذرے کے لیے  $x$  کی پیمائش لازماً

<sup>۴۲</sup> ”یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ ”اس ذرے کا حال  $f_n$  میں پائے جانے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے۔“ یہاں تک بالکل عطا ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال  $\Psi$  میں ہے۔ ہاں  $Q$  کی پیمائش سے قیمت  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفعل موج  $f_n$  پر مہم دم کرتی ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال  $\Psi$  میں ہے، اس کا  $Q$  کی پیمائش کے بعد حال  $f_n$  میں ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی تدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد  $y$  متغیر  $x$  کا امتیازی تدر ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل  $\delta(x - y) = g_y(x)$  ہوگا۔ ظاہر ادرج ذیل ہوگا

$$(۳.۵۲) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سمت  $dy$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|\Psi(y, t)|^2$  ہوگا جو ٹھیک اصل شرابیاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کی ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات  $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$  ہوں گے لہذا ادرج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۳) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج پکارا اور  $\Phi(p, t)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  کا فورسٹر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فورسٹر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۵۴) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۵) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متمم شرابیاتی مفہوم کے تحت سمت  $dp$  میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال ادرج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۶) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے ذیل تفاعل کنواں  $V(x) = -\alpha\delta(x)$  میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا  $p_0 = m\alpha/\hbar$  سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) ادرج ذیل ہے (جہاں  $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$  ہے)۔

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکت کی فضا تفاعل موج ادرج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

momentum space wave function<sup>۴</sup>

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۱۱: ہارمونی مرتبہ کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فضا تقاضا عمل موج  $\Phi(p, t)$  تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے  $p$  کی پیش کش کا کلاسیکی سرعت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”تقسیم عمل حنل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$(۳.۵۷) \quad \langle x \rangle = \int \Phi^* \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp.$$

اشارہ: دھیان رہے کہ  $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left( \frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$  ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل متعام  $i\hbar \partial / \partial p$  ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۸) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگر چاہیں)۔ عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا۔

### ۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو  $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$  کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمضرات جانیں گے۔ ثبوت کا ذلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتنا خوب رکھیں۔

## ۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ  $A$  کے لیے درج ذیل ہوگا (ساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں  $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$  ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ  $B$  کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۹) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

اب کسی بھی مخلوط عدد  $z$  کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۰) \quad |z|^2 = [(\text{حقیقی}(z))]^2 + [(\text{خیالی}(z))]^2 \geq [(\text{خیالی}(z))]^2 = \left[ \frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$$

یوں  $z = \langle f | g \rangle$  لیتے ہوئے

$$(۳.۶۱) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} [\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن  $\langle f | g \rangle$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} - \hat{A} \langle B \rangle - \hat{B} \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} \Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g | f \rangle = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

لہذا

$$\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle = \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقابلہ ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (۳.۶۲)$$

یہ اصول عدم یقینیت<sup>۴۴</sup> کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دوسری مشی عاملین کے مقابل میں بھی  $i$  کا جذری پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود  $i$  کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔<sup>۴۵</sup>

مشال کے طور پر، فرض کریں مقام ( $\hat{A} = x$ ) پہلا اور معیار حرکت ( $\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ ) دوسرا تابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left( \frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۳)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو تابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر مقلوب ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ<sup>۴۶</sup> کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ تابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (مقلوب) تابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔<sup>۴۷</sup>

مشال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا  $z$  جزو باہمی ہم آہنگ تابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی اقتدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار

uncertainty principle<sup>۴۴</sup>

<sup>۴۵</sup> یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ دوسری مشی عاملین کا مقابلہ خود خلاف ہر مشی ( $\hat{Q}^+ = -\hat{Q}$ ) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۶)۔

incompatible observables<sup>۴۶</sup>

<sup>۴۷</sup> یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر مقلوب تابلوں کو بیک وقت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک جیسی مستثابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہر مشی تابلوں کو بیک وقت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۵ دیکھیں۔

حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا امتام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انٹرنل نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماراتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا امتام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا امتام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریئر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن امتام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔<sup>۳۸</sup> مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر متمثل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً متائب ممکن ہوگا جب دونوں متابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۱۳.۳:

۱. درج ذیل مسائل مقلب ثابت کریں۔

(۳.۶۴)

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar nx^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل  $f(x)$  کے لئے پر درج ذیل ہوگا۔

(۳.۶۵)

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx}$$

سوال ۱۴.۳: امتام ( $A = x$ ) میں عدم یقینیت اور توانائی ( $B = p^2/2m + V$ ) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

<sup>۳۸</sup> جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً)  $x$  کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود  $p$  کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے نوری اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے متابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا امتام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر متقارب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر  $\hat{P}$  اور  $\hat{Q}$  کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے  $f = 0$   $[\hat{P}, \hat{Q}]$  ہوگا۔

### ۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرقتش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد  $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$  کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۹ اور مساوات ۳.۶۰۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ  $\Psi$  کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو:  $g(x) = c f(x)$ ، جہاں  $c$  کوئی مخلوط عدد ہے تب شمار عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۰ میں  $z$  کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب  $0 = \text{حقیقی}(z)$  ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle = \langle f|c f \rangle = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب  $\langle f|f \rangle$  یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل  $c$  لازمًا حلی خالی ہوگا؛ جسے ہم  $ia$  لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$g(x) = ia f(x), \quad \text{حقیقی } a \quad (3.66)$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = ia(x - \langle x \rangle) \Psi \quad (3.67)$$

جو متغیر  $x$  کے تفاعل  $\Psi$  کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = A e^{-a(x - \langle x \rangle)^2 / 2\hbar} e^{i\langle p \rangle x / \hbar} \quad (3.68)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ درحقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔<sup>۴۹</sup>

سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۷ کو  $\Psi(x)$  کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  مستقالات ہیں۔

<sup>۴۹</sup> دھیان رہے کہ صرف  $\Psi$  کو  $x$  کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقالات“  $a$ ،  $A$ ،  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ  $\Psi$  کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتباہی کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحے پر تفاعل موج  $x$  کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحے پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔



## ۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۹)$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے  $\Delta x$  (متغیر  $x$  کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۹ کی طرح کا توانائی و وقت اصول عدم یقینیت<sup>۵۰</sup> درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۰)$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں  $x$  اور  $t$  (بلکہ  $ct$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں  $p$  اور  $E$  (بلکہ  $E/c$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۰ اور مساوات ۳.۶۹ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شرودنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ  $t$  اور  $x$  کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفسیقی مساوات  $t$  میں یک رتی جبکہ  $x$  میں دور رتی ہے)، اور مساوات ۳.۶۹ سے قطعاً مساوات ۳.۷۰ مراد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی فابری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاعلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو  $\Delta t$  ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متابل مشاہدہ  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنجر درج ذیل کہتی ہے (جہاں  $H = p^2/2m + V$  ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \hat{H}\Psi | \hat{Q}\Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{Q}\hat{H}\Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب  $\hat{H}$  ہر مشی ہے لہذا  $\langle \hat{H}\Psi | \hat{Q}\Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H}\hat{Q}\Psi \rangle$  اور یوں اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۱) \quad \frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۱۷.۱۳ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا، اسی کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقابلہ قسین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر  $\hat{H}$  اور  $\hat{Q}$  آپس میں متبادل ہوں، تب  $\langle Q \rangle$  مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے  $Q$  بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) میں ہم  $A = H$  اور  $B = Q$  لے کر فرض کریں کہ  $Q$  صریحاً  $t$  کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left( \frac{1}{2i} \hbar \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2 \left( \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۷۲) \quad \sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right|$$

ہم  $\Delta E \equiv \sigma_H$  اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$(۳.۷۳) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d\langle Q \rangle / dt|}$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۴) \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

اوقات کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً  $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$  ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حواسر ایک ایسے ہارمونی سرعش کی محنتی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقیاس پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درج حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبے یا کم ہوتا ہو)؛  $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں  $\Delta t$  کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا  $\Delta t$  اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ میں  $Q$  کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص  $\Delta t$  اس قابل مشاہدہ  $Q$  پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی  $\Delta E$  کی صورت میں تمام قابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکساں طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ( $\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$ )؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (ساوا ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر  $a, b, \psi_1$  اور  $\psi_2$  حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ  $\tau = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$  ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے  $\Delta E = E_2 - E_1$  اور  $\Delta t = \tau$  لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً  $\hbar/2 \geq$  ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

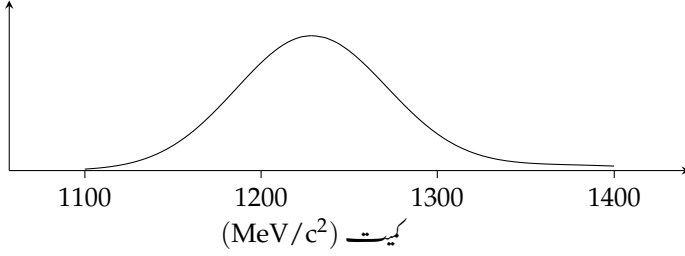
مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موتی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت  $\hbar/2 \geq$  ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔ □

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت  $\hbar/2 \geq$  ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔ □



شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔



شکل ۳.۲: کیت Δ کی پیمائشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

مثال ۳.۷: ذرہ Δ تقریباً  $10^{-23}$  سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیم، جس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط  $1232 \text{ MeV}/c^2$  پر اور چوڑائی تقریباً  $120 \text{ MeV}/c^2$  ہوگی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی ( $mc^2$ ) کیوں بعض اوقات  $1232$  سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی تحلیل کے بنا پر ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

$$\Delta E \Delta t = \left( \frac{120}{2} \text{ MeV} \right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ  $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$ ۔ یوں کیت میں پھیلاؤ اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت احبات دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔<sup>۵۲</sup> □

ان مثالوں میں ہم نے جسز  $\Delta t$  کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مراد طول موج تھ؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مراد وہ دورانیہ تھ جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک

<sup>۵۲</sup> حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ  $10^{-23}$  سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الٹ رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ فرض کریں کہ Δ تقریباً ایک پروٹان ( $10^{-15} \text{ m}$ ) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً  $10^{-23}$  سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ فرض کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔

غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں  $\Delta t$  اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا پر کوانٹم میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی  $\Delta E$  ”ادھر“ لے کر وقت  $\Delta t \approx \hbar / (2\Delta E)$  کے اندر ”والپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی جائز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹم میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۴۷ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی عناط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ عناط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱: درج ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۴۷ کی اطلاق کریں۔

$$۱. Q = 1 \quad ۲. Q = H \quad ۳. Q = x \quad ۴. Q = p$$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲۷، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف  $\sigma_x$ ،  $\sigma_H$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تقاضا عمل موج اور قابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کہیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف  $\sigma_x$ ،  $\sigma_H$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۲۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کہیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ متقابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۳ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

### ۳.۶ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ  $\mathbf{A}$  پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ  $x$  اور  $y$  محدود کا ایک کارتیسی نظام متانم کر کے اس پر سمتیہ  $\mathbf{A}$  کے اجزاء:  $A_x = \hat{i} \cdot \mathbf{A}$  اور  $A_y = \hat{j} \cdot \mathbf{A}$  وضع کریں (شکل ۳.۳-۲)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام متانم کرے جس کے محدود  $x'$  اور  $y'$  ہوں؛ وہ سمتیہ  $\mathbf{A}$  کے اجزاء  $A'_x = \hat{i}' \cdot \mathbf{A}$  اور  $A'_y = \hat{j}' \cdot \mathbf{A}$  پیش کرے گی (شکل ۳.۳-۲)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس  $(\{\hat{i}, \hat{j}\})$  اور  $(\{\hat{i}', \hat{j}'\})$  کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی متانم کردہ (اختیاری) محدودی نظام کا تابع نہیں ہے۔



شکل ۳.۳: (i) سمتیہ  $A$ ، (ب)  $xy$  محدد سے لحاظ سے  $A$  کے اجزاء، (ج)  $x'y'$  محدد کے لحاظ سے  $A$  کے اجزاء

یہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو ”باہر ہلبرٹ فضا“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفاعل معام کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی پھیلاؤ کا عددی سرموجی تفاعل  $\Psi(x, t)$  ہوگا:

$$(۳.۴۵) \quad \Psi(x, t) = \langle x | \mathcal{H}(t) \rangle$$

جہاں  $\hat{x}$  کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $x$  ہے کو سمتیہ  $|x\rangle$  ظاہر کرتا ہے<sup>۵۳</sup>، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی پھیلاؤ، معام و معیار حرکت موجی تفاعل  $\Phi(p, t)$  ہے:

$$(۳.۴۶) \quad \Phi(p, t) = \langle p | \mathcal{H}(t) \rangle$$

جہاں  $\hat{p}$  کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $p$  ہے کو سمتیہ  $|p\rangle$  ظاہر کرتا ہے۔<sup>۵۴</sup> ہم  $|\mathcal{H}\rangle$  کے پھیلاؤ کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف مندرج کر رہے ہیں):

$$(۳.۴۷) \quad c_n(t) = \langle n | \mathcal{H}(t) \rangle$$

جہاں  $\hat{H}$  کے  $n$  ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ  $|n\rangle$  ظاہر کرتا ہے؛ مساوات ۳.۴۶-۳.۴۷ ہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات  $\Psi$  اور  $\Phi$ ، اور عددی سروں کا سلسلہ  $\{c_n\}$  ٹھیک ایک جیسی

<sup>۵۳</sup> میں اس کو  $g_x$  (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس معام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھڑکا رہا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ ہلبرٹ فضا کو،  $x$  پر، بطور مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس معام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔  
<sup>۵۴</sup> سمتی فضا میں یہ  $f_p(x)$  ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ (3.48) \quad &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)\end{aligned}$$

(متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$(3.49) \quad |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس  $\{|e_n\rangle\}$  کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \\ (3.80) \quad |\beta\rangle &= \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے}\end{aligned}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبج ارکان**<sup>۵۷</sup>

$$(3.81) \quad \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(3.82) \quad \sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle$$

یا، سمتیہ  $|e_m\rangle$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$(3.83) \quad \sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(3.84) \quad b_m = \sum_n Q_{mn} a_n$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متالپی ارکان معلومات منراہم کرتے ہے۔

<sup>۵۵</sup> میں منرض کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں  $n$  استمراری ہوگا اور مجموعیات کی جگہ نکلاتے ہوں گے۔

<sup>۵۶</sup> matrix elements

<sup>۵۷</sup> یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”فالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامتناہی ہوگی (جن کی گسنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہو گا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد مستثنائی عدد  $(N)$  ہو گا۔ سمتیہ  $|\mathfrak{H}(t)\rangle$  ایسی صورت میں  $N$  ابعادی سمتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)،  $(N)$  اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عاملین  $(N \times N)$  سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامستثنائی آبادی سمتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حلقی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۸.۳: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔<sup>۵۸</sup>

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathfrak{H}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہو گا جس میں}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مشی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں  $g$  اور  $h$  حقیقی مستقل ہیں۔ اگر  $(t = 0)$  پر یہ نظام حال  $|1\rangle$  سے ابتدا کرے تب وقت  $t$  پر اس کا حال کیا ہو گا؟

حل: (تابع وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathfrak{H}\rangle = H |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۵)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شرودنگر

$$H |\mathfrak{H}\rangle = E |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۶)$$

کے حل سے ابتدا کرتے ہیں، یعنی ہم  $H$  کی امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی افتدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

<sup>۵۸</sup> یہاں ”مساوات“ کی نشان دہی سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علامت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔



آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں  $(h + g)$  اور  $(h - g)$  ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm\alpha$$

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{H}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{H}_{+}\rangle + |\mathcal{H}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو  $e^{-iE_n t/\hbar}$  منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(h+g)t/\hbar} |\mathcal{H}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\mathcal{H}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \left[ e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں؛ کیا یہ تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ  $t = 0$  پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں  $|1\rangle$  الیکٹران نیوٹرینو<sup>۶۰</sup>، اور  $|2\rangle$  میوون نیوٹرینو<sup>۶۱</sup> کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں خلاف وتر جزو  $(g)$  غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میوون نیوٹرینو<sup>۶۲</sup> میں اور میوون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

کوانٹم میکانیات میں اندرونی ضرب کو ڈیراک<sup>۶۳</sup> علامتیت<sup>۶۴</sup> سے ظاہر کیا جاتا ہے جو تکونی قوسین،  $\langle$  اور  $\rangle$ ، اور افقی کسیر  $|$ ، پر مشتمل ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں تکونی قوسین کو قوسین نہیں بلکہ عاملین تصور کریں۔ اندرونی ضرب

<sup>۵۹</sup> neutrino oscillations  
<sup>۶۰</sup> electron neutrino  
<sup>۶۱</sup> muon neutrino  
<sup>۶۲</sup> Dirac notation

$\langle \alpha | \beta \rangle$  کو دو حصوں  $\langle \alpha |$  اور  $|\beta\rangle$  میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں بالترتیب **تفاعل**<sup>۱۳</sup> اور **سمت**<sup>۱۴</sup> کہتے ہیں۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمت ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہوگا۔ ایک عامل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے دو سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک تفاعل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے کوانٹم میکانیات میں تفاعل کو ایک **تال** اور سمتیہ کو سمتیہ کی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ذرا کہ علاقیت کو **تفاعل** و **سمت** علاقیت<sup>۱۵</sup> بھی کہتے ہیں۔ ایک تفاعل میں تفاعل کو مکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f | = \int f^*[\dots] dx$$

جہاں چوکور قوسین  $[\dots]$  میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو تفاعل کے دائیں ہاتھ سمتیہ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنیٰ ابعاد سمتیہ فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (۳.۸۷)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی تفاعل ایک سمتیہ صفت

$$\langle \alpha | = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (۳.۸۸)$$

ہوگا۔ تمام تفاعل کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتیہ فضا حاصل ہوگا جس کو **دوہرہ فضا**<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں۔

تفاعل کے ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاق تصور اور خوبصورت علاقیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر  $|\alpha\rangle$  ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (۳.۸۹)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو  $|\alpha\rangle$  کے ساتھ ساتھ ”پایا جاتا ہو“:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle \alpha | \beta \rangle |\alpha\rangle;$$

ہم اس کو  $|\alpha\rangle$  کے احاطہ کیے گئے ایک بعدی ذیلی فضا پر **عامل** **تقلیل**<sup>۱۷</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $\{|e_n\rangle\}$  غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۹۰)$$

bra<sup>۱۳</sup>  
ket<sup>۱۴</sup>  
bra-ket notation<sup>۱۵</sup>  
dual space<sup>۱۶</sup>  
projection operator<sup>۱۷</sup>

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$(۳.۹۱) \quad \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = 1$$

(جو عامل ممبش ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس  $\{|e_n\rangle\}$  میں سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے پھیلاؤ کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$(۳.۹۲) \quad \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| \alpha\rangle = |\alpha\rangle$$

اسی طرح اگر  $\{|e_z\rangle\}$  ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$(۳.۹۳) \quad \langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z')$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۹۴) \quad \int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1$$

مسوات ۳.۹۱ اور مسوات ۳.۹۲ مکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تحلیل یکے طاقع<sup>۱۸</sup> ہیں، یعنی ان کے لئے  $\hat{P}^2 = \hat{P}$  ہوگا۔  $\hat{P}$  کے امتیازی امتداد تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ سمتاویہ  $|\alpha\rangle$  اور سمتاویہ  $|\beta\rangle$  درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا.  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  کو (دوہری اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کی صورت میں) تیار کریں۔

ب.  $\langle\alpha|\beta\rangle$  اور  $\langle\beta|\alpha\rangle$  تلاش کریں اور  $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$  کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل  $\hat{A} \equiv |\alpha\rangle \langle\beta|$  کے نوار کان متالب تلاش کر کے متالب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مشی ہے؟

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|)$$

جہاں  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$  معیاری عمودی اساس اور  $E$  ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی امتداد اور  $|1\rangle$  اور  $|2\rangle$  کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ امتیازی تقاع عمل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے  $\hat{H}$  کا متالب **H** کیا ہوگا؟

<sup>۱۸</sup> idempotent

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل  $\hat{Q}$  کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ  $\hat{Q}$  کو اس کے طیفی تحلیل<sup>۱۹</sup>

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچ جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

### مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: لیہانڈر کثیر رکناویا۔ وقفہ  $-1 \leq x \leq 1$  پر تقاضات  $1, x, x^2$  اور  $x^3$  کو گرام و شمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال 4A. دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پچپان پائیں؛ (معیاری عمود زنی کے علاوہ)<sup>۲۰</sup> لیہانڈر کثیر رکناویا ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک خلاف ہر مشی<sup>۲۱</sup> (یا منحرف ہر مشی<sup>۲۲</sup>) عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

(۳.۹۵)

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$$

۱. دکھائیں کہ خلاف ہر مشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشی عاملین کا مقابلہ خلاف ہر مشی ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشی عاملین کے مقابلہ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳.۲۷: ترتیبی پیمائشیں<sup>۲۳</sup>: قابل مشاہدہ  $A$  کو ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{A}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\psi_1$  اور  $\psi_2$ ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب  $a_1$  اور  $a_2$  ہیں، پائے جاتے ہیں۔ قابل مشاہدہ  $B$  کو

<sup>۱۹</sup>spectral decomposition

<sup>۲۰</sup>لیہانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کونسی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی حبز و ضربیوں منتخب کیا کہ  $x = 1$  پر تمام تقاضات

۱ کے برابر ہوں؛ ہم اس بدقسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

<sup>۲۱</sup>anti-hermitian

<sup>۲۲</sup>skew-hermitian

<sup>۲۳</sup>sequential measurements

ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{B}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\phi_1$  اور  $\phi_2$  اور بالترتیب امتیازی اعداد  $b_1$  اور  $b_2$  ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

۱. متابل مشاہدہ  $A$  کی پیمائش  $a_1$  قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فورا) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب۔ اب اگر  $B$  کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج۔ متابل مشاہدہ  $B$  کی پیمائش کے فورا بعد دوبارہ  $A$  کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ  $a_1$  حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو  $B$  کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳۰۲۸: لامتناہی چوکور کنویں کے  $n$  دیں ساکن حال کی معیار حرکت و فنکشن  $\Phi_n(p, t)$  تلاش کریں۔  $|\Phi_1(p, t)|^2$  اور  $|\Phi_2(p, t)|^2$  کو  $p$  کے تفاعل کے طور پر ترمیم کریں (نقطہ  $p = \pm n\pi\hbar/a$  پر خصوصی توجہ دیں)۔  $\Phi_n(p, t)$  کو استعمال کرتے ہوئے  $p^2$  کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۳۰۲۹ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳۰۲۹: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں  $n$  کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ  $-n\lambda < x < n\lambda$  پر یہ تفاعل خالص سائینس ہے (جس کا طول موج  $\lambda$  ہے) تاہم چونکہ یہ تفاعل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سمت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فنکشن  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں۔  $|\Psi(x, 0)|^2$  اور  $|\Phi(p, 0)|^2$  ترمیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صغروں کے بیچ) چوڑائیاں  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  تعین کریں۔ دیکھیں کہ  $n \rightarrow \infty$  کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  کو  $\Delta p$  اور  $\Delta x$  کی انداز قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ  $\sigma_p$  کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنہ ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

سوال ۳۰۳۰: درج ذیل مندرج کریں

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مستقل ہیں۔

۱.  $\Psi(x, 0)$  کو معمول پر لاتے ہوئے  $A$  تعین کریں۔

ب۔ (لحہ  $t = 0$ )  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma_x$  تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت و نصف اتفا عمل موج  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د.  $\Phi(p, 0)$  استعمال کرتے ہوئے (لحمہ  $t = 0$  پر)  $\langle p \rangle$  اور  $\sigma_p$  کا حساب کریں۔

ه. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: مسئلہ وریل۔ درج ذیل مساوات ۳.۷۱ کی مدد سے دکھائیں

$$(۳.۹۶) \quad \frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

جہاں  $T$  حرکی توانائی ( $H = T + V$ ) ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(۳.۹۷) \quad 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

اس کو مسئلہ وریل کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $\langle T \rangle = \langle V \rangle$  ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۳.۱۱ اور سوال ۳.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ  $\Delta t = \tau / \pi$  ہے جہاں ابتدائی حال  $\Psi(x, 0)$  کے عمودی حال تک  $\Psi(x, t)$  کی ارتقا کے لیے درکار وقت  $\tau$  ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کاٹف عمل موج  $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$  استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالپی ارکان  $\langle n|x|n' \rangle$  اور  $\langle n|p|n' \rangle$  تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالپی وتری رکن  $n = n'$  دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستثنیٰ) متاسب  $\mathbf{X}$  اور  $\mathbf{P}$  مرتب کریں۔ دکھائیں کہ اساس اساس میں  $\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{X}^2$  وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جسوی جواب:

$$(۳.۹۸) \quad \langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1})$$

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک جتنے احتمال کے ساتھ،  $\hbar\omega$  یا  $(3/2)\hbar\omega$  دے گی۔ اس حال میں  $\langle p \rangle$  کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت کیا ہوگی؟ اگر لحمہ  $t = 0$  پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب  $\Psi(x, t)$  کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3

ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات  $(|n\rangle = \psi_n(x))$  مساوات (۲.۶۷) میں صرف  $n = 0$  عین عدم یقینیت کی حد  $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$  پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر  $\sigma_x \sigma_p = (2n + 1)\hbar/2$  ہوگا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں اتساقی حالات<sup>۵</sup> کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل<sup>۶</sup> کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی متدر  $\alpha$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال  $|\alpha\rangle$  میں  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$  دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ  $a_-$  کا ہر مٹی جوڑی دار  $a_+$  ہے۔ فرض نہ کریں کہ  $\alpha$  حقیقی ہوگا۔

ب.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ دکھائیں کہ  $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$  ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتساقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاؤ

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د.  $|\alpha\rangle$  کو معمول پر لاتے ہوئے  $c_0$  تعین کریں۔ جواب:  $e^{-|\alpha|^2/2}$

ه. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

شامل کر کے دکھائیں کہ  $\langle \alpha(t) |$  اب بھی  $a_-$  کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی متدر ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتساقی حال ہمیشہ اتساقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال  $|n=0\rangle$  خود اتساقی حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی متدر کیا ہوگا۔

<sup>۵</sup>coherent states

<sup>۶</sup>عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

سوال ۳۶: مبسوط اصول عدم یقینیت۔ متمم اصول عدم یقینیت (مسوات ۳.۶۲) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں  $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$  ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (۳.۹۹)$$

جہاں  $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$  ہوگا۔ اشارہ: مسوات ۳.۶۰ میں  $z$  کا حقیقی جزو  $\text{Re}(z)$  جزو

ب. مسوات ۳.۹۹ کو  $A = B$  صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں  $C = 0$  ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول یہاں بے وقعت ہے؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل متابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں  $a$ ،  $b$  اور  $c$  حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\psi(t)\rangle$  کیا ہوگا؟

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\psi(t)\rangle$  کیا ہوگا؟

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل متالاب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متالاب مشاہدہ  $A$  اور  $B$  کو درج ذیل متالاب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $\omega$ ،  $\lambda$  اور  $\mu$  حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

ا.  $\mathbf{H}$ ،  $\mathbf{A}$  اور  $\mathbf{B}$  کے امتیازی افتدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں  $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$  ہے۔ لمحہ  $t=0$  پر  $H$ ،  $A$  اور  $B$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ  $t$  پر  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  کیا ہوگا؟ لمحہ  $t$  پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات  $B$  اور  $A$  کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

ا. ایک تفاعل  $f(x)$  جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں  $x_0$  کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا پر  $\hat{p}/\hbar$  کو فضا میں انتقال کا پیدا کار کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نمائی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

generator of translation in space

ب. اگر (تابع وقت) شرودنگر مساوات کو  $\Psi(x, t)$  مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x, t)$$

(جہاں  $t_0$  کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا پر  $\hat{H}/\hbar$  کو وقت میں انتقال کا پیدا کار<sup>۸</sup> کہتے ہیں۔

ج. دکھائیں لمحہ  $t + t_0$  پر حرکی متغیر  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔<sup>۹</sup>

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۱۷ حاصل کریں۔ اشارہ:  $t_0 = \int dt$  میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

۱. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شرودنگر مساوات کو معیار حرکت فنکشن میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:

$$(e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p, 0))$$

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے  $\Phi(p, 0)$  تلاش کر کے اس صورت کے لئے  $\Phi(p, t)$  مرتب کریں۔ ساتھ ہی  $|\Phi(p, t)|^2$  مرتب کریں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج.  $\Phi$  پر مبنی موزوں کمالات حل کرتے ہوئے  $\langle p \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$  کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں  $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2/2m + \langle H \rangle_0$  ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاوسی فضا ہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

<sup>۸</sup>generator of translation in time

<sup>۹</sup>بالخصوص  $t = 0$  لے کر،  $t_0$  کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$$

ہوگا جہاں  $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  ہے۔ یوں  $Q$  کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ  $\hat{Q}$  کو  $\Psi(x, t)$  اور  $\Psi(x, t)$  میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو تفسر عمل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا  $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$  کو  $\Psi(x, 0)$  اور  $\Psi(x, 0)$  میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موختر الذکر کو ہیبرنبرگ نقطہ نظر کہتے ہیں۔

جوابات

# فهرست

- ensemble, 15
- expectation
  - value, 7
- formula
  - De Broglie, 18
- Fourier
  - inverse transform, 62
  - transform, 62
- Frobenius
  - method, 53
- function
  - Dirac delta, 71
- generalized
  - distribution, 71
  - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 59
- generator
  - translation in space, 135
  - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
  - oscillator, 32
- Hermitian
  - conjugate, 48
- hermitian, 101
  - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
  - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
  - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
  - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
  - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 66
- energy
  - allowed, 28
  - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
  - neutrino, 127
- particle
  - unstable, 21
- polynomial
  - Hermite, 57
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- potential, 14
  - reflectionless, 92
- probability
  - density, 10
- probability current, 21
- probable
  - most, 7
- recursion
  - formula, 54
- reflection
  - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
  - formula, 59
- scattering
  - matrix, 93
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
  - Fourier, 35
  - power, 42
  - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - conjugate, 102
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
  - operators, 45
- law
  - Hooke, 41
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
  - S, 93
  - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- operator, 17
  - lowering, 45
  - projection, 128
  - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

- variables
  - separation of, 25
- variance, 9
- vectors, 97
- velocity
  - group, 64
  - phase, 64
- virial theorem, 132
- wag the tail, 55
- wave
  - incident, 76
  - packet, 61
  - reflected, 76
  - transmitted, 76
- wave function, 2
- wavelength, 18
  - outer, 23
- spectrum, 104
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- state
  - bound, 69
  - excited, 33
  - ground, 33
  - scattering, 69
- statistical
  - interpretation, 2
- step function, 79
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - Plancherel, 62
- transformations
  - linear, 97
- transmission
  - coefficient, 77
- tunneling, 69, 78
- turning points, 69
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119

- اتباتی  
حالات، 133  
اجباتی  
توانائیاں، 33  
ارتعاش  
نیوٹریو، 127  
استمراری، 105  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول عدم یقینیت، 116  
الیکٹران نیوٹرینی، 127  
انتشاری  
رشتہ، 65  
انخطاطی، 104، 89  
اندرونی ضرب، 98  
انعکاس  
شرح، 77  
اوسط، 7  
براء، 127  
بقا  
توانائی، 38  
پیدا کار  
تفاعل، 59  
پیدا کار  
فصل میں انتقال کا، 135  
وقت میں انتقال، 136  
تجدیدی عرصہ، 88  
ترتیبی پیمائشیں، 130  
ترسیل  
شرح، 77  
تسل  
ٹیلر، 41  
طامتی، 42  
فوریسر، 35  
تعیین حال، 103  
تغیریت، 9  
تفاعل  
ڈیلٹا، 71  
تفاعل موج، 2
- توالی  
کلیہ، 54  
توانائی  
اجباتی، 28  
توقعات  
قیمت، 7  
جفت، 33  
تفاعل، 30  
حال  
بکھراؤ، 69  
زمینی، 33  
مقید، 69  
پہچان، 33  
خطی الجبرا، 97  
خطی تبدلہ، 97  
خطی جوڑ، 28  
خفیہ متغیرات، 3  
دلیل، 60  
دم بلانا، 95، 55  
ڈیراک  
معیاری عمودیت، 108  
ڈیلٹا  
کرونیگر، 34  
ذره  
غیر مستحکم، 21  
رو  
احتمال، 21  
رفتار  
دوری سمتی، 64  
گروہی سمتی، 64  
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85  
ساکن  
حالات، 27  
سرحدی شرائط، 32

- فصل  
 بیرونی، 23  
 دہری، 128  
 فورسٹر  
 الٹ بدل، 62  
 بدل، 62  
 وٹا بل مشاہدہ  
 غیر ہم آہنگ، 116  
 وٹا بل  
 بھراو، 93  
 ترسیل، 94  
 وٹا بل ارکان، 125  
 وٹا بل  
 ہک، 41  
 قواب، 98  
 کٹ، 127  
 کشافیت  
 احتمال، 10  
 کشیر رکنی  
 ہرمانٹ، 57  
 کلیہ  
 ڈی پروگلی، 18  
 روڈریگیس، 59  
 کوپن، ہیگن مفہوم، 4  
 گرام شمد  
 ترکیب عموذیت، 106  
 متعمم  
 تنف عمل، 71  
 تقسیم، 71  
 متعمم شماریاتی مفہوم، 111  
 محتمل  
 سب سے زیادہ، 7  
 مخفیہ، 14  
 بلا العکاس، 92  
 مریخ میکا مل، 13  
 مریخ میکا مل تنف علات، 98
- سرنگ زنی، 69، 78  
 سگر، 15  
 سمتیات، 97  
 سوچ  
 انکاری، 4  
 تقلید پسند، 3  
 حقیقت پسند، 3  
 سوڈیم، 23  
 سیڑھی  
 عاملین، 45  
 سیڑھی تنف عمل، 79  
 شروڈنگر  
 غیر تاج وقت، 27  
 شروڈنگر مساوات، 2  
 شروڈنگر نقطہ نظر، 136  
 شریک عمل، 102  
 شماریاتی مفہوم، 2  
 شوارز عدم مساوات، 99  
 طاق، 33  
 طول موج، 18  
 طیف، 104  
 طیفی تحلیل، 130  
 عامل، 17  
 تحلیل، 128  
 تقلیل، 45  
 رفعت، 45  
 عدم تعین، 2  
 عدم یقینیت  
 توانائی و وقت، 119  
 عدم یقینیت اصول، 19  
 عقدہ، 34  
 علیحدگی متغیرات، 25  
 عموذی، 100، 34  
 معیاری، 34  
 غیر مسلسل، 105  
 فہرست  
 ترکیب، 53



سر نقش

ہارمونی، 32

مسئله

اہر نفسٹ، 18

پلانشرال، 62

ڈرشلے، 35

مسئلہ وریل، 132

معمول زنی، 13

معمول شدہ، 100

معیار حرکت، 16

معیار حر کی فضا تفاعل موج، 113

معیار عمومی، 34

معیاری انحراف، 9

معیاری عمودی، 100

مقلب، 43

مقلبت

باضابطہ رشتہ، 44

مقلوب، 43

100,34,مکمل

منہدم، 4، 111

موج

آمدی، 76

ترسیلی، 76

منعكس، 76

موجی اکٹھ، 61

میون نیوٹرینو، 127

واپسی نقاط، 69

وسطانیہ، 7

## ہارمونی

مسر نقش، 32

هر مشی، 101

جوڑی دار، 48، 102

خلاف، 130

منحرف، 130

ہلبہرٹ فضا، 99

ہمیز نبرگ - نقطہ نظر، 136

ہیملٹنی، 27

یک طامتی، 129