

کوانٹم میکینکات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۲۵ / نومبر ۲۰۲۱

عنوان

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل تغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری تغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنای چپکور کنواں
۴۱	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۳	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	ڈیلٹا تفاسل محفہ
۶۹	۲.۵.۱	مقید حالات اور بکھراؤ حالات
۷۱	۲.۵.۲	ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	مستثنای چپکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	ہلیرٹ فصنا
۱۰۱	۳.۲	قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۵	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۷	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شرابیاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۴	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۳	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۰	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۵	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۱۹۹	متنائل ذرات	۵
۱۹۹	دو ذراتی نظام	۵.۱
۲۰۱	بوزان اور فرمیون	۵.۱.۱
۲۰۴	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۰۸	جوہر	۵.۲
۲۰۸	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۰	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۱۴	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۱۴	آزاد الیکٹرون گیس	۵.۳.۱
۲۱۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۲۵	کو انظم شرابیاتی میکانیات	۵.۴
۲۲۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۲۸	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۳۱	زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم	۵.۴.۳
۲۳۲	α اور β کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۳۷	سیاحسی طیف	۵.۴.۵
۲۴۳	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۴۳	غیر اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۴۳	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۴۵	اول رتبہ نظریہ	۶.۱.۲
۲۴۹	دوم رتبہ توانائیاں	۶.۱.۳
۲۵۰	اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۵۰	دو پڑتا اخطا	۶.۲.۱
۲۵۲	بلند رتبہ اخطا	۶.۲.۲
۲۵۹	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۶۰	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۶۳	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۶۸	زیمان اثر	۶.۴
۲۶۸	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۷۱	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۷۲	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۷۴	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۸۵	تغیری اصول	۷
۲۸۵	نظریہ	۷.۱
۲۹۰	ہیلمیوم کا زینینی حال	۷.۲
۲۹۵	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۰۵	ونزل و کرامرز و برلوان تخمین	۸
۳۰۶	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۱۱	سرنگرنی	۸.۲
۳۱۲	کلیات پیوند	۸.۳
۳۲۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۲۸	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۲۸	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۳۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۳۳	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۳۶	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۳۶	برق طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۳۷	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود بخود احسراج	۹.۲.۲
۳۳۸	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۴۰	۹.۳	خود با خود احسراج
۳۴۰	۹.۳.۱	آمنشائن A اور B عددی سر
۳۴۲	۹.۳.۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات
۳۴۵	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۵۵	۱۰	حرارت ناگزیر تھمین
۳۵۵	۱۰.۱	مسئلہ حرارت ناگزیر
۳۵۵	۱۰.۱.۱	حرارت ناگزیر عمل
۳۵۸	۱۰.۱.۲	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت
۳۶۳	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۶۳	۱۰.۲.۱	گرگنی عمل
۳۶۵	۱۰.۲.۲	ہندی ہیت
۳۷۰	۱۰.۲.۳	اہارو نوو یوہم اثر
۳۷۹	۱۱	بھراو
۳۷۹	۱۱.۱	تعارف
۳۷۹	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بھراو
۳۸۳	۱۱.۱.۲	کوانٹم نظریہ بھراو
۳۸۴	۱۱.۲	جزوی موج تجزیہ
۳۸۴	۱۱.۲.۱	اصول وضوابط
۳۸۷	۱۱.۲.۲	لا یا عمل
۳۹۰	۱۱.۳	یتقلات حیط
۳۹۳	۱۱.۴	بارن تھمین
۳۹۳	۱۱.۴.۱	مسادات شروڈنگر کی عملی روپ
۳۹۷	۱۱.۴.۲	بارن تھمین اول
۴۰۲	۱۱.۴.۳	تسل بارن
۴۰۵	۱۲	پس نوشت
۴۰۶	۱۲.۱	آمنشائن پوڈلکیو روزن تضاد
۴۰۷	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۱۲	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۴۱۳	۱۲.۴	شروڈنگر کی لمبی
۴۱۴	۱۲.۵	کوانٹم زینو تضاد
۴۱۷		جوابات
۴۱۹	۱	خطی الجبرا
۴۱۹	۱.۱	سمتیات
۴۱۹	۲.۱	اندرونی ضرب

۴۱۹	۳.۱	فتالب
۴۱۹	۴.۱	تبدیلی اساس
۴۱۹	۵.۱	امتیازی تفاسلات اور امتیازی اقتدار
۴۱۹	۶.۱	هر مشی تبادله

۴۲۱ فخر ہنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

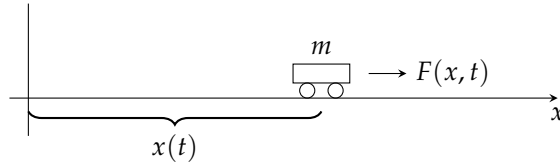
28 اکتوبر 2011ء

باب ۱

تفہم عمل موج

۱.۱ شرودنگر مساوات

فرض کریں محور x پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت m ہو، پر قوت $F(x, t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت t پر تعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کی اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکت کی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکت کی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں تعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے تعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو خفی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) اس مساوات کے ساتھ ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضیٰ قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کی بات نہیں کر رہے ہیں۔ دیگر، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ($v \ll c$) تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کی تفاعل موج^۲ جس کی علامت $\Psi(x, t)$ ہے کو شرودنگر مساوات^۳ حل کر کے حاصل کرتے ہیں

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

جہاں i منفی ایک (-1) کا جذر اور \hbar پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم 2π ہوگا:

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات، جو عموماً $\Psi(x, 0)$ ہوگا، استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x, t)$ تعین کرتی ہے، جیسا کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے فاعلہ نیوٹن $x(t)$ تعین کرتا ہے۔

۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں، ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے t پر یہ x کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم^۴ پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے t پر نقطہ x پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ دیگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ^۵ درج ذیل ہے۔

$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{محتمل} & \text{محتمل} \\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} & \text{محتمل} \end{cases} \text{ لمحے } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ A پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ B پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا اس نظریہ سے ذرہ کے بارے میں تمام متبادل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جانتے ہوئے بھی ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاصر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کے صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں عدم تعین^۶ کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور

wave function^۲
Schrodinger align^۳
statistical interpretation^۴

تفاعل موج از خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ (جہاں Ψ^* تفاعل موج Ψ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا چاہیے۔
indeterminacy^۶



شکل ۱.۲: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ a اور b کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ A کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ B کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتی ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کو انٹرمیکانی نظریہ میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام C پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کو انٹرمیکانی نظریہ میں مختلف طبقہ سوچ کے بارے میں علم ہو گا۔

(1) حقیقت: پسند^۸ سوچ: ذرہ مقام C پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کو انٹرمیکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گا کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ C پر ہی تھا اور کو انٹرمیکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے متاثر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعین پن متدرتی میں نہیں پایا جاتا بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے تحت کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں Ψ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا ہے اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات^۹ کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند^{۱۰} سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتی ہے کہ وہ ایک مقام پر ”کھڑا ہو جائے“ (وہ مقام C کو کیوں منتخب کرتا ہے، اس بارے میں ہمیں سوال کرنے کی اجازت نہیں ہے)۔ مشاہدہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل پیدا کرتا ہے، یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرہ کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے

^۸ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ مکمل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی حائل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ C کے قریب پایا گیا۔

^۹realist
hidden variables
^{۱۰}orthodox

ہیں۔ ”یہ تصور جو کپنہیگن مفہوم“ پکارا جاتا ہے جناب یوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہر طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ سوچ درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھی عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصہ کی بحث و مباحثوں کے بعد بھی پراسرار کی کاشکار ہے۔

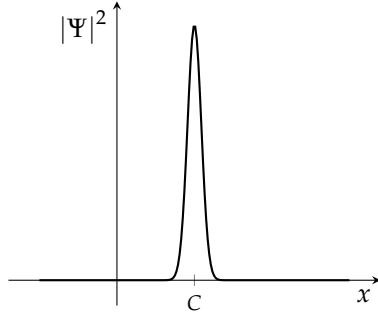
(3) انکار^{۱۱} سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی یوقونانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حاصل نہیں بتا پاتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبقہ سوچ کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جناب جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرہ کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربہ پر قابل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی عملی سوچ اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جناب جان بل کی دلیل سمجھ آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربہ بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں^{۱۲}۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتی ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کی مطابقت شریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرہ پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کے پہلے تجربہ میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے جیسا شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم^{۱۳} کر کے اس کو نوکیلی صورت اختیار کرنے پر مجبور کرتی ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گی لہذا دوسری پیمائش جلدی کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دوبہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پاتا ہے، اور دوسری جس میں پیمائش Ψ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر کرنے پر منہدم کرتی ہے^{۱۵}۔

Copenhagen interpretation^{۱۱}
agnostic^{۱۲}

^{۱۳} یہ فقرہ کچھ زیادہ سخت ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں بعد میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معامی خفیہ متغیرات کے نظریات اور دیگر تھیوریات مثلاً متعدد دنیا تشریح جو ان تینوں سوچ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتے ہیں۔ بہر



شکل ۱.۳: تقاسم عمل موج کا انہدام: اس لمحہ کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

۱.۳.۱ احتمال

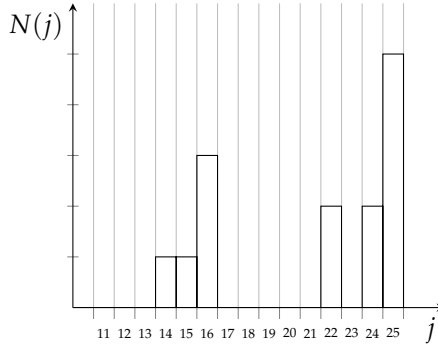
۱.۳.۱ غیر مسلسل تغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیٹ کی شریاتی تشریح کی جاتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہوگا جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ فرض کریں ایک کمرہ میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک شخص،
- 15 سال عمر کا ایک شخص،
- 16 سال عمر کے تین اشخاص،
- 22 سال عمر کے دو اشخاص،
- 24 سال عمر کے دو اشخاص،
- 25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔

حال، اب کے لئے بہتر ہے کہ ہم کوانٹم نظریہ کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کی مسائل کے بارے میں منکر کریں۔
collapses^{۱۳}

^{۱۵} کوانٹم میکانیٹ میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور اتنا حیران کن ہے کہ انان سوچ میں پڑھ جاتا ہے کہ پیمائش درحقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خوردبینی (کوانٹائی) تقاسم اور کلاسیک (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسا جناب بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسا ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مدہوش مشاہدہ کار کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسا جناب وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس سخت مسئلہ پر دوبارہ بات باب ۱۲ میں کروں گا؛ ابھی کے لئے ہم بولی بولی سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنسدان تجربہ گاہ میں، فیتا، گھڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ ترسیم کی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تب درج ذیل ہوگا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ $N(17)$ ، مثال کے طور پر، صفر ہوگا۔ کسرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ $N = 14$ ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال ۱ اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تب $P(14) = 1/14$ ، $P(15) = 1/14$ ، $P(16) = 3/14$ ، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$

دھیان رہے کہ چودہ پانچ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہوگا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2 کوئی عمر سب سے زیادہ ^{۱۶} ممکن ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا j وہی j ہوگا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 وسطانیہ ^{۱۷} عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ j کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک دوسرے جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی اوسط ^{۱۸} عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر j کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

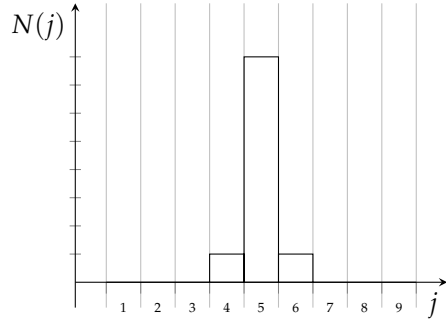
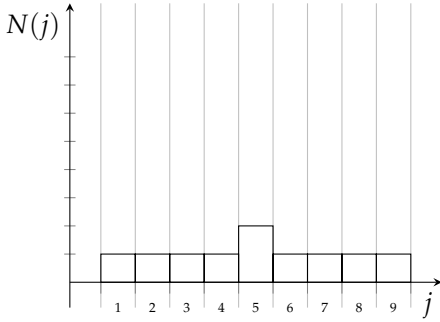
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو توقعاتی قیمت ^{۱۹} کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہوگا؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $225 = 15^2$ ، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $256 = 16^2$ حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

^{۱۶} most probable
^{۱۷} median
^{۱۸} mean
^{۱۹} expectation value



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیلات میں ایک دوسرے جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر j کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷، ۱.۸ اور ۱.۹ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j \rangle^2$ کے برابر نہیں ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہو تب $\langle x^2 \rangle = 5$ جبکہ $\langle x \rangle^2 = 4$ ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورتوں میں واضح مندرجہ پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند تر قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے متربیہ نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہوگی جبکہ دھاتی علاقہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاؤ، عددی صورت میں درکار ہوگا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا منفرق

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام Δj کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j \rangle$ مستقل ہے لہذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ Δj کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن Δj کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا

مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے خبات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیر^{۲۰} کہتے ہیں جبکہ تغیریت کا جذر σ کو معیار^{۲۱} انحراف^{۲۱} کہتے ہیں۔ روایتی طور پر σ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد پھیلاؤ کی پیمائش مانا جاتا ہے۔
ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں σ اس پلے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے منفرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپ یاد ہو گا میں نے ذکر کیا $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں σ^2 غیر منفی ہو گا لہذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاؤ نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

۱.۳.۲ استمراری تغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل تغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلک ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے امیراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہذا Δ عدد صحیح تھا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک ۱۶ سال ۴ گھنٹہ، ۲۷ منٹ اور ۳.۳۷۵۲۴ سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا ۱۶ اور ۱۷ سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر ۱۶ سال اور ۱۶ سال جمع دو دونوں

^{۲۰} variance
^{۲۱} standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگن ہو گا۔ (ما سوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچ پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس واقعہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیداوار کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} \text{بلا منصوبہ منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ کا کثافت احتمال^{۲۲} کہلاتا ہے۔ مستثنای وقفہ a تا b کے بیچ x پایا جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا عمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

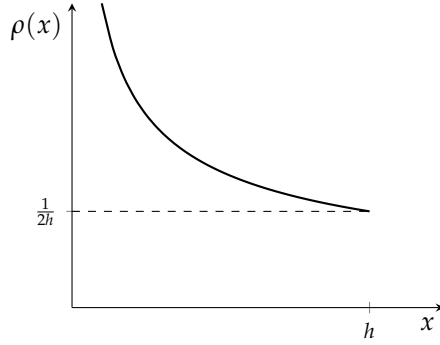
مثال ۱: ایک چٹان جس کی اونچائی h ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچے جاتے ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا وقتی اوسط کیا ہوگا؟^{۲۳}

حل: پتھر ساکن حال سے بہت درج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے متریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہوگا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ t پر فاصلہ x درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

probability density^{۲۴}

^{۲۳} ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہوگا کہ میں مستثنای نمونہ (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر ”اصلی“ اوسط میں منفرق نہیں کر پارہا ہوں۔ یہ ایک تجربہ کرنے والے کے لئے مصیبت پیدا کر سکتی ہے، خاص کر جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے عنبر ضرر ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تحمین ہے۔



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سستی رفتار $\frac{dx}{dt} = gt$ ہوگی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہوگا۔ وقفہ dt میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{dt}{T}$ ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت dx میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال از خود لامستناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی ρ کا مکمل) لازماً مستناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہوگا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

۱. اوسط کا مربع $\langle i^2 \rangle$ اور مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر j کے لیے Δj دریافت کریں اور مساوات ۱۱.۱۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو ۱۱ اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلاواسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ x پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں A ، a اور λ مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے A کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط $\langle x^2 \rangle$ اور معیاری انحراف σ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

۱.۴ معمول زنی

ہم تعامل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ t پر ایک ذرے کا نقطہ x پر پائے جانے کی کثافت احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت $|\Psi|^2$ کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.20)$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تعامل موج کو مساوات شرودنگر تعین کرتی ہے اور Ψ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہوگا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x, t)$ حل ہو تب $A\Psi(x, t)$ بھی حل ہوگا، جہاں A کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمولی زنی^{۲۴} کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمولی پر لایا گیا ہے۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمولی پر لانے کے متبادل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شرودنگر مساوات کے مربع میکانک^{۲۵} حل ہونگے۔^{۲۶}

یہاں رک کر ذرا غور کریں! مندرجہ بالا $t = 0$ پر ہمیں ایک تفاعل موج کو معمولی پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ Ψ ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمولی شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمولی پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں A وقت t کا تابع تفاعل ہو گا نا کہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ شرودنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمولی شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماراتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کو انٹیم نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہذا اہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف t کا تفاعل ہے لہذا اس میں نے پہلے فترہ میں کل تفرق $\frac{d}{dt}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل t اور x دونوں کا تفاعل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق $\partial/\partial t$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V\Psi$$

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا محلول جو ڈی دار لیتے ہوئے)

$$(1.24) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V\Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

normalization^{۲۴}
square-integrable^{۲۵}

تساہر ہے کہ $|x| \rightarrow \infty$ کی صورت میں $\Psi(x, t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمولی زنی صرف محلول عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا پتہ غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مسوات ۱.۲۱ میں مکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جاسکتی ہے:

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے مقابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \rightarrow \pm\infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ صفر ۷ کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر متاثر) مستقل ہوگا؛ لہذا $t = 0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔ سوال ۱.۴: لہذا $t = 0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں A ، a اور b مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں (یعنی a اور b کی صورت میں A تلاش کریں)۔

ب. متغیر x کے لحاظ سے $\Psi(x, 0)$ ترسیم کریں۔

ج. لہذا $t = 0$ پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ a کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $b = a$ اور $b = 2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں A ، λ اور ω مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا مخفیہ $V^{۲۸}$ ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں۔

۷ ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی غلطیوں میں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں؛ اور لامتناہی تفاعلات موج ہر صورت صفر کو پہنچتے ہیں۔
potential^{۲۸}

ب. متغیرات x اور x^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر x کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر x کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x \rangle + \sigma)$ اور $(\langle x \rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے x کی ”پھیل“ کو σ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہوگی۔ اس سمت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

۱.۵ معیار حرکت

حال Ψ میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.28) \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x |\Psi|^2 dx$ حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعین ہے) تعامل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں $\langle x \rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہوگی جو یکساں حال Ψ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال Ψ میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی سکرین^{۲۹} کو ایک ہی حال Ψ میں لاکر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x \rangle$ ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیش کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال Ψ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متریب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیٹا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا منطقی ترسیم تقریباً $|\Psi|^2$ دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x \rangle$ ہوگی۔ (چونکہ ہم مستثنائی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کیا جاسکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متریب حاصل ہوں گے۔) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سکرپ کے جانے والے تجربہ کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربہ کی نتائج کی اوسط قیمت۔ چونکہ Ψ وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ $\langle x \rangle$ تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل^{۳۰} لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.29) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

^{۲۹}ensemble

^{۳۰}چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں نمل کے حد نہیں لکھ رہا ہوں۔

تکمل بالخصص^۱ کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۰) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جبزو کو اس بنسداد کیا کہ (\pm) لامستثنائی پر Ψ کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جبزو پر دوبارہ تکمل بالخصص لاگو کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۱) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ x کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے تاکہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم Ψ جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفسیق ہوگا۔

$$(۱.۳۲) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

ساوات ۱.۳۱ ہمیں Ψ سے بلاواسطہ $\langle v \rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت^۲ $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۳) \quad \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx$$

میں $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$(۱.۳۴) \quad \langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx$$

$$(۱.۳۵) \quad \langle p \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

^۱تغا عمل ضرب کے تحت

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + f g \Big|_a^b$$

یوں تکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جبزو سے تفسیق اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت منفی علامت اور اضافی سرحدی جبزو کی صورت میں آپ کو ادا کرنی ہوگی۔

^۲momentum

کوانٹم میکانیات میں مقام کو عامل x ”ظاہر“ کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ”ظاہر“ کرتا ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بچ لکھ کر عمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر مقداروں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$L = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار مثلاً $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر p کی جگہ $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ پر کر کے حاصل عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بچ لپیٹ کر درج ذیل عمل حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.36) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi dx$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.37) \quad \langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$$

حال Ψ میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکت کی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۴ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب یوہر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز ہے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر عمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو x کے اوپر سے گزار کر، یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$ ہوگا؟

سوال ۱.۷: $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$ کا حساب کریں۔ جواب:

$$(1.38) \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

operator^{۳۳}

۳۳ ایک ”عامل“ آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تعادل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہوگا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ x سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ x کے لحاظ سے تفریق لیں (اور نتیجہ کو $-i\hbar$ سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات $(d/dt, d^2/dt^2, \partial/\partial x, \partial^2/\partial x^2)$ وغیرہ (یا ضرب کار i, x^2 ، وغیرہ) اور یا ان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ ابہر لفظ ۲۵ کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو x اور t کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو $e^{-iVt/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟

۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے متاصر ہو گئے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج ۳۶ پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھٹکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے متاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام ہتانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج حنا صحت سے متبادل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہوگا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم قابل تعین ہوگا۔ فورسز تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کئی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے Ψ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ذرے کے لیے

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.39)$$

پیش ۳۸ کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاؤ معیار حرکت میں پھیلاؤ کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہوگا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

Ehrenfest's theorem^{۳۵}

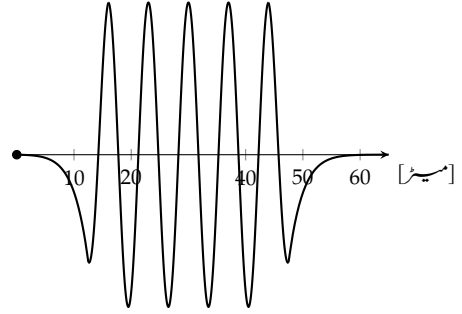
wavelength^{۳۶}

De Broglie formula^{۳۷}

۳۸ میں اس کا ثبوت جملہ پیش کردہ بعض مضغین کلیہ ذی پروگنی کو ایک مسئلہ کے عامل $\frac{\hbar}{i} \partial / \partial x$ سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے دھیان ہٹاتی ہے۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصہ معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھا خاصہ معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.20)$$

جہاں σ_x اور σ_p بالترتیب x اور p کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت^{۳۹} ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”پھیلاؤ“ سے مراد یہ ہے کہ یکاں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو (Ψ کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں متضاد نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو (Ψ کو ایک لمبی سائنس موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نہ ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۲۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں σ_x اور σ_p کی جسامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ Ψ کو ایک لمبی ہلدار لکیر بن کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو، σ_x اور σ_p کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

^{۳۹}uncertainty principle

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل A تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے Ψ شرور ونگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. x ، x^2 ، p اور p^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. σ_x اور σ_p کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل π کے ہندسی پھیلاؤ کے اولین ۲۵ ہندسوں (3, 1, 4, 1, 5, 9, 0, 0, 0) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیماس کی حشراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے ٹکڑا کر 0 اور π زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہوگا؟ اشارہ: زاویہ θ اور $(\theta + d\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $\rho(\theta) d\theta$ ہوگا۔ متغیر θ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں ρ صفر ہوگا۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہوگا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle \theta \rangle$ ، $\langle \theta^2 \rangle$ اور σ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle \sin \theta \rangle$ ، $\langle \cos \theta \rangle$ اور $\langle \cos^2 \theta \rangle$ تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے x محدود (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱. $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟ x کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا $+2r$ ترسیم کریں جہاں r سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ: x اور $(x + dx)$ کے بیچ ψ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x) dx$ ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں θ کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ $d\theta$ کا مطابقتی dx کیا ہوگا؟

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ L رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر L لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ t پر ($a < x < b$) کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ہے۔ $J(x, t)$ کی اکائی کیا ہوگی؟ تبصرہ: چونکہ J آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ x پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے لہذا J کو رو احتمال^{۴۰} کہتے ہیں۔ اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب خط کے ایک سر میں احتمال کے آمد خط کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہوگا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال ρ کیا ہوگا؟ (یہ زیادہ مسزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک غیر مستحکم ذرہ^{۴۱} کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا ”عمر حیات“ τ ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (مکمل طور پر) وقت نہائی گئے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = e^{-t/\tau}$$

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۴ میں ہم نے کچھ بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی V ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں V کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں V_0 حقیقی مخفی توانائی اور Γ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

۱. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P$$

^{۴۰}probability current
^{۴۱}unstable particle

ب. $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات Γ کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شرودنگر کے کسی بھی دو عدد (معمول پر لانے کے متبادل) حل Ψ_1 ، Ψ_2 کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. معمول ذنی مستقل A تلاش کریں۔

ب. لمحہ $t = 0$ پر x کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر p کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو $P = m d\langle x \rangle / dt$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د. x^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ه. p^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و. $x(\sigma_x)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز. $p(\sigma_p)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹم میکانیات اس وقت کارآمد ہوگی جب ذرے کا ڈی بروگلی طول موج (h/p) نظام کی جسامت (d) سے زیادہ ہو۔ درجہ T (کیلون) پر حرارتی توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکت توانائی درج ذیل ہوگی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_b T$$

جہاں k_b بولٹزمن مستقل ہے لہذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹم میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہوگا۔

۱. ٹھوس اجسام: فاصلہ حبال ٹھوس اجسام میں تقریباً $d = 0.3 \text{ nm}$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران ۳۲ کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مسرکڑہ کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ (سوڈیم ۳۳ کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کو انٹرمیکانی ہوں گے جبکہ جوہری مسرکڑہ (تقریباً) کبھی بھی کو انٹرمیکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مانع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا) ماسوائے 4 K سے کم درجہ حرارت پر موجود ہیلیم ۴ کے لئے۔

ب. گیس: میکانی دباؤ P پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کو انٹرمیکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون ($PV = Nk_B T$) استعمال کر کے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب: $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5} P^{2/5}$ ؛ ظاہر ہے ہم m کو چھوٹے سے چھوٹا اور P کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیس کو کو انٹرمیکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباؤ پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا بیرونی فضاء ۴ میں (جہاں درجہ حرارت 3 K اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً 1 cm ہے) ہائیڈروجن کو انٹرمیکانی ہوگا؟

^{۳۲} ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مسرکڑہ سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کارڈاس ہوگا۔ اس کے برعکس، بیرون ترین الیکٹران کبھی نہیں جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے فاصلہ حبال کو موزوں فاصلہ لیا جاسکتا ہے۔ یہ مسئلہ بیرونی الیکٹران کے لئے ہے۔

^{۳۳} sodium
^۴ helium
^{۴۵} outer space

باب ۲

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف متعادلوں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفیہ $V(x, t)$ کی لئے شرودنگر مساوات

$$(۲.۱) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ V وقت t کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں مساوات شرودنگر کو علیحدگی متغیرات^۲ کے طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے، جو ماہر طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب

$$(۲.۲) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں ψ صرف x اور φ صرف t کا تفاعل ہے۔ ظاہری طور پر حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست قدم نظر نہیں آتا ہے لیکن حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً ہوتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے حاصل حلوں کو

۱ بار بار ”مخفی تو اتائی تفاعل“ کہنا انسان کو تھکا دیتا ہے، لہذا لوگ V کو صرف ”مخفیہ“ چکارتے ہیں، اگرچہ ایسا کرنے سے برقی مخفیہ کے ساتھ عملی پیدا ہو سکتی ہے جو دراصل فی اکائی بار مخفی تو اتائی ہوتی ہے۔
separation of variables^۲

یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ متابل علیحدگی حلوں کیلئے درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \varphi$$

جسودہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar \psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi + V\psi\varphi$$

دونوں اطراف کو $\psi\varphi$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(۲.۳) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V$$

اب بائیں ہاتھ تفاعل صرف t کا تابع ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف x کا تابع ہے۔ یاد رہے اگر V از خود x اور t دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہوگا۔ صرف t تبدیل ہونے سے دایاں ہاتھ کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ اسی طرح صرف x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل کہتے ہیں جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ یو مساوات ۲.۳ درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E$$

$$(۲.۴) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad \text{یا}$$

اور

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V = E$$

$$(۲.۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad \text{یا}$$

علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دوسرا تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے۔ دونوں اطراف کو dt سے ضرب دیتے ہوئے مکمل لیں۔ یوں عمومی حل $Ce^{-iEt/\hbar}$ حاصل ہوگا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب $\psi\varphi$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا ہم مستقل C کو ψ میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۶) \quad \varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

”دھیان رہے کہ اگر V از خود x کے ساتھ ساتھ t کا بھی تفاعل ہوتا تب ایسا ممکن نہ ہوتا۔“

دوسری (مساوات ۲.۵) کو غیر متعلق وقتے شرودنگر مساوات^۴ کہتے ہیں۔ پوری طرح مخفی توانائی V جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ مخفی توانائی کیلئے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات کی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تابع وقت شرودنگر مساوات کے زیادہ تر حل $\psi(x)\phi(t)$ کی صورت میں نہیں لکھے جاسکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہوگا۔

(1) یہ ساکن حالات ہیں۔ اگرچہ تعامل موج از خود

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad (2.7)$$

وقت t کا تابع ہے، کثافت احتمال

$$|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^* e^{+iEt/\hbar} \psi e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x)|^2 \quad (2.8)$$

وقت کا تابع نہیں ہے؛ تابعیت وقت کٹ جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب میں ہوگا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^* Q \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi dx \quad (2.9)$$

ہر توقعاتی قیمت وقت میں مستقل ہوگی؛ یہاں تک کہ ہم $\phi(t)$ کو رد کر کے Ψ کی جگہ ψ استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات ψ کو ہی تعامل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسئلہ کھڑے ہو سکتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تعامل موج ہر صورت تابع وقت ہو گا۔ بالخصوص $\langle x \rangle$ مستقل ہوگا لہذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت) $\langle p \rangle = 0$ ہوگا۔ ساکن حال میں کبھی کبھی کچھ نہیں ہوتا ہے۔

(2) یہ غیر مبہم کل توانائی کے حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حرکی جمع مخفی) کو ہیملٹن^۵ کہتے ہیں جس کو H سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (2.10)$$

اس کا مطلب بقتی ہیملٹنی عامل، قواعد و ضوابط کے تحت $p \rightarrow (\hbar/i)(\partial/\partial x)$ پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (2.11)$$

time-independent Schrodinger align^۶

معمول پر لانے کے مقابل حل کے لئے لازم ہے کہ E حقیقی ہو (سوال ۲.۱-۲ اور یکسین)۔

Hamiltonian^۷

جہاں غلط فہمی پیدا ہونے کی گنجائش ہو وہاں میں عامل پر ٹوپی (۸) کا نشان ڈال کر اس کو اس تغیر پذیر متغیر سے علیحدہ رکھوں گا جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔

باب ۲. غیر تاج وقت شرودنگر مساوات

یوں غیر تاج وقت شرودنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کریں

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (۲.۱۲)$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi dx = E \int |\psi|^2 dx = E \int |\Psi|^2 dx = E \quad (۲.۱۳)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ψ کی معمولی ψ کی معمولی ψ کے مترادف ہے۔ مزید درج ذیل

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E(\hat{H}\psi) = E^2 \psi$$

کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = E^2 \int |\psi|^2 dx = E^2$$

یوں H کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0 \quad (۲.۱۴)$$

یاد رہے کہ $\sigma = 0$ کی صورت میں تمام ارکان کی قیمت ایک دوسری جیسی ہوگی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہوگا)۔ نتیجتاً متبادل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً E قیمت دے گی۔ (اسی کی بنا علیحدگی مستقل کو E سے ظاہر کیا گیا)۔

(3) عمومی حل متبادل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا۔ جیسا ہم جلد دیکھیں گے، غیر تاج وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ دے گا جہاں ہر ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل (E_1, E_2, E_3, \dots) منسلک ہوگا لہذا ہر اجازتی توانائی کا ایک منفرد تعلق عمل میں پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}, \quad \Psi_2(x, t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \dots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تاج وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑ^۹ از خود ایک حل ہوگا۔ ایک بار متبادل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم

linear combination^۸
allowed energy^۹

۸. انتہا مساوات $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ ، وغیرہ کے خطی جوڑے مساوات درج ذیل روپ کا فترہ ہے جہاں c_1 ، c_2 ، وغیرہ کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتے ہیں۔

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \dots$$

زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$(۲.۱۵) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}$$

حقیقتاً تاج وقت شرودنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل (c_1, c_2, \dots) تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط مطمئن کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کر پائیں گے۔ باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک بار غیر تاج وقت شرودنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تاج وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں ہم بہت کچھ کہنا چکا ہے۔ میں ان کو مختصراً اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ زیر غور عمومی مسئلہ کا غیر تاج وقت خفی توانائی $V(x)$ اور ابتدائی تفاعل عمل موج $\Psi(x, 0)$ دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام t کیلئے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تاج وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلی قدم میں آپ غیر تاج وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی (E_1, E_2, E_3, \dots) ہوگی۔ ٹھیک ٹھیک $\Psi(x, 0)$ پر بیٹھنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$(۲.۱۶) \quad \Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

یہاں کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت مستقل c_1, c_2, c_3, \dots دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل عمل موج $\Psi(x, t)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تاجیت وقت $e^{-iE_n t / \hbar}$ چسپال کریں گے۔

$$(۲.۱۷) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t)$$

چونکہ متابل علیحدگی حل

$$(۲.۱۸) \quad \Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تاج وقت ہوں گی لہذا یہ از خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۷) یہ خاصیت نہیں رکھتا ہے؛ افسردہ ساکن حالات کی توانائیاں ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر $|\Psi|^2$ کا حساب کرتے ہوئے قوت نمائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتی ہیں۔

^{۱۱} بعض اوقات آپ تاج وقت شرودنگر مساوات کو بغیر علیحدگی متغیرات حل کر سکیں گے (سوال ۲.۴۹ اور سوال ۲.۵۰ دیکھیں)۔ تاہم ایسی صورتیں بہت کم پائی جاتی ہیں۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ ابتدائی طور پر دو ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو:

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کہ مستقل c_n اور حالات $\psi_n(x)$ حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت t کیلئے تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟ کثافت احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔
حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t / \hbar}$$

جہاں E_1 اور E_2 بالترتیب تفاعل ψ_1 اور ψ_2 کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \left(c_1 \psi_1 e^{iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2 e^{iE_2 t / \hbar} \right) \left(c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t / \hbar} \right) \\ &= c_1^2 \psi_1^2 + c_2^2 \psi_2^2 + 2c_1 c_2 \psi_1 \psi_2 \cos[(E_2 - E_1)t / \hbar] \end{aligned}$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ پولر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استعمال کیا۔) ظاہری طور پر کثافت احتمال زاویائی تعدد $(\frac{E_2 - E_1}{\hbar})$ سے سائن نار تعاش کرتا ہے لہذا یہ ہر گز ساکن حال نہیں ہوگا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعلات کے خطی جوڑ نے حرکت پیدا کی۔ □

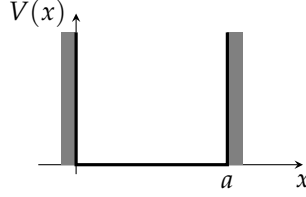
سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

۱. متقابل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل E لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۷ میں E کو $E_0 + i\Gamma$ لکھ کر (جہاں E اور Γ حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام t کے لئے مساوات ۱۱.۲۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب Γ صفر ہو۔

ب. غیر تاجع وقت تفاعل موج $\psi(x)$ ہر موقع پر حقیقی لیا جاسکتا ہے (جبکہ تفاعل موج $\Psi(x, t)$ لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تاجع شرودنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (اقتی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی ψ ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ $(\psi + \psi^*)$ اور $i(\psi - \psi^*)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر $V(x)$ جفتے تقاطع ہو یعنی $V(-x) = V(x)$ تب $\psi(x)$ کو ہمیشہ جفت یا طاق لیا جاسکتے ہو۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب $\psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ $\psi(x) \pm \psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایا جاسکتا ہو، E کی قیمت لازماً $V(x)$ کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مشاں کیا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج



شکل ۲.۱: لامستناہی چکور کنواں مخفیہ (مساوات ۲.۱۹)

ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

دکھائیں کہ سمت $E < V$ کی صورت میں ψ اور اس کے دو گنا تصرف کی علامتیں لازمًا ایک دوسری جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تقاضا معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوگا۔

۲.۲ لامستناہی چکور کنواں

درج ذیل مندرج کریں (شکل ۲.۱)۔

$$(۲.۱۹) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اس مخفی توانائی میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی $x = 0$ اور $x = a$ پر، جہاں ایک لامستناہی قوت اس کو مضار ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ ایک کنواں میں ایک لامستناہی لچکدار گیند ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا رہتا ہو۔ (اگرچہ یہ ایک فرضی مخفی توانائی ہے، آپ اس کو اہمیت دیں۔ اگرچہ یہ بہت سادہ نظر آتا ہے البتہ اس کی سادگی کی بنا ہی یہ بہت ساری معلومات مضراہم کرنے کے قابل ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

کنواں سے باہر $\psi(x) = 0$ ہوگا (لہذا یہاں ذرہ پایا جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنواں کے اندر، جہاں $V = 0$ ہے، غیر تاج وقت شروع و نگر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۲۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

یا

$$(۲.۲۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے فرض کرتا ہوں کہ $E \geq 0$ ہوگا۔ ہم سوال ۲.۲ سے جانتے ہیں کہ $E < 0$ سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کا سبکی سادہ پارامونی مرتعش^{۱۲} کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (۲.۲۲)$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقلات کو مسئلہ کے سرحدی شرائط^{۱۳} تعین کرتے ہیں۔ $\psi(x)$ کے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاقی ہوگا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کر دوں گا اور $V = \infty$ کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کبھی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (۲.۲۳)$$

تاکہ کنواں کے باہر اور کنواں کے اندر حل ایک دوسرے کے ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں A اور B کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

ہے لہذا $B = 0$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = A \sin kx \quad (۲.۲۴)$$

یوں $\psi(a) = A \sin ka$ کی بنیاد $A = 0$ ہوگا (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل $\psi(x) = 0$ ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا $\sin ka = 0$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

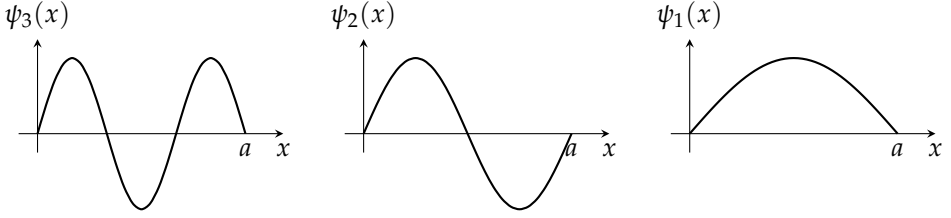
$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (۲.۲۵)$$

اب $k = 0$ (بھی $\psi(x) = 0$ دیتا ہے جس) میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ کی بنا k کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہذا ہم منفی کی علامت کو A میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۲.۲۶)$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ $x = a$ پر سرحدی شرط مستقل A تعین نہیں کرتا ہے بلکہ اس کی بجائے مستقل k تعین کرتے ہوئے E کی احبازتی قیمتیں تعین کرتا ہے:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (۲.۲۷)$$



شکل ۲.۲: لامستثنائی چپکور کنواں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

کلاسیکی صورت کے برعکس لامستثنائی چپکور کنواں میں کو انٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص اجازتی^{۱۴} قیمتوں^{۱۵} میں سے ہونا ہوگا۔ مستقل A کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ψ کو معمول پر لانا ہوگا:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

یہ A کی صرف مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر $A = \sqrt{2/a}$ منتخب کرنا بہتر ہوگا (کیونکہ A کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنواں کے اندر شرودنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۲۸) \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میرے قول کو پورا کرتے ہوئے، (ہر مثبت عدد صحیح n کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت شرودنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامستثنائی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے جو لمبائی a کے دھانگے پر ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل ψ_1 جو زمین حال^{۱۶} کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں n^2 کے براہ راست بڑھتی ہیں پیمائش^{۱۷} کہلاتے ہیں۔ تفاعلات $\psi_n(x)$ چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری جفت اور طاق ہیں۔ ψ_1 جفت ہے، ψ_2 طاق ہے، ψ_3 جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔^{۱۸}

^{۱۴} allowed
^{۱۵} ادھیان رہے کہ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کو حل کرتے ہوئے سرحدی شرائط مسلط کرنے سے اجبازتی توانائیوں کی کوانٹائزیشن شرط محض تنسیک وجوہات کی بنا پر ابھرتا ہے۔

^{۱۶} ground state

^{۱۷} excited states

^{۱۸} اس تشاکلی کو زیادہ وضاحت سے پیش کرنے کی خاطر بعض مصنفین کنواں کے مرکز کو مبدا پر رکھتے ہیں (یوں کنواں $-a$ تا $+a$ رکھا جاتا ہے)۔ تب جفت تفاعلات کو ساکن جبکہ طاق تفاعلات ساکن ہوں گے۔ سوال ۲.۳۶ دیکھیں۔

ب. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے عقدوں^{۱۹} (معبور صفر) کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہوگا۔ (چونکہ آخری نقاط کے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہذا) ψ_1 میں کوئی عقدہ نہیں پایا جاتا ہے، ψ_2 میں ایک پایا جاتا ہے، ψ_3 میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

ج. یہ تمام درج ذیل نقطہ نظر سے باہمی عمودوں^{۲۰} ہیں جہاں $m \neq n$ ۔

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0 \quad (۲.۲۹)$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right] dx \\ &= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right\} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $m = n$ کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہوگا: (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں ناقابل قبول ہوگا۔) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل ہمیں بتاتا ہے کہ مکمل کی قیمت 1 ہے۔ درحقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فقرے میں سمیایا جاسکتا ہے:^{۲۱}

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (۲.۳۰)$$

جہاں δ_{mn} کرونیکر ڈیلٹا^{۲۲} کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (۲.۳۱)$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام) ψ معیار عمودوں^{۲۳} ہیں۔

د. یہ مکمل^{۲۴} ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تفاعل $f(x)$ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (۲.۳۲)$$

^{۱۹} nodes
^{۲۰} orthogonal
^{۲۱} یہاں تمام ψ حقیقی ہیں لہذا ψ_m پر * ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقبل میں استعمال کے نقطہ نظر سے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔
^{۲۲} Kronecker delta
^{۲۳} orthonormal
^{۲۴} complete

میں تفاعلات $\sin \frac{n\pi x}{a}$ کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اعلیٰ علم الاحصاء کے ساتھ واقفیت کی صورت میں آپ مساوات ۲.۳۲ کو $f(x)$ کا فوریر تسلسلہ^{۲۵} پہچان پائیں گے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تفاعل کو فوریر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جاسکتا ہے، بعض اوقات مسئلہ ڈرشلے^{۲۶} کہلاتا ہے۔^{۲۷} کسی بھی دیے گئے تفاعل $f(x)$ کے لئے عددی سروں c_n کو $\{\psi_n\}$ کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو $\psi_m(x)$ سے ضرب دے کر یکم لیں:

$$(۲.۳۳) \quad \int \psi_m(x) * f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x) * \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

(آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرونیٹرڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دیتا ہے ماسوائے اس جزو کو جس کے لئے $n = m$ ہو۔) یوں تفاعل $f(x)$ کے پھیلاؤ کے n ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہوگا۔^{۲۸}

$$(۲.۳۴) \quad c_n = \int \psi_n(x) * f(x) dx$$

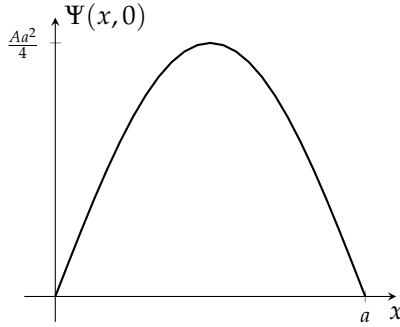
درج بالا چار خواص انتہائی طاقتور ہیں جو صرف لامتناہی چکور کنواں کے لیے مخصوص نہیں ہیں۔ پہلا خواص ہر اس صورت میں کارآمد ہوگا جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسرا، مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عامل گیر خواص ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ ان تمام مخفیہ کے لئے جن کو آپ کا (ممکنہ) سامن ہو سکتا ہے کے لئے مکملیت کارآمد ہوگی، لیکن اس کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ جس کی بنا عموماً ماہر طبیعیات یہ ثبوت دیکھے بغیر، اس کو مان لیتے ہیں۔ لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۳۵) \quad \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

میں نے دعویٰ کیا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔

$$(۲.۳۶) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

Fourier series^{۲۵}Dirichlet's theorem^{۲۶}^{۲۷} $f(x)$ میں متناہی تعداد کے عدم استمرار (پھلانگ) پائے جاسکتے ہیں۔^{۲۸} آپ یہاں فکری متغیر کے لئے m یا کوئی تیسرا حرف استعمال کر سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کیا جائے)، اور ہاں یا در ہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج $\psi(x, 0)$ پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر c_n درکار ہوں گے:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

تفاعلات ψ کی ملکیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشلے کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر $\psi(x, 0)$ کو ہر صورت یوں بیان کر سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا c_n کو فورسٹر قسمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x, 0) dx \quad (۲.۳۷)$$

آپ نے دیکھا: دی گئی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاؤ کے عددی سروں c_n کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں پر کر $\Psi(x, t)$ حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج جانتے ہوئے دلچسپی کی کسی بھی حشر کی مقدار کا حاسب، باب ۱ میں مستعمل تراکیب استعمال کرتے ہوئے، کیا جاسکتا ہے۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہوگا؛ صرف ψ کی قیمتیں اور اجازتی توانائیاں یہاں سے مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جہاں A ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

کنواں سے باہر $\psi = 0$ ہے۔ $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^2(a - x)^2 dx = |A|^2 \frac{a^5}{30}$$

A تعین کرتے ہیں:

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مسوات ۲.۳۷ کے تحت n واں عددی سر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left\{ a \left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right. \\ &\quad \left. - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right\} \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[-\frac{a^3}{n\pi} \cos(n\pi) + a^3 \frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3} \cos(n\pi) + a^3 \frac{2}{(n\pi)^3} \cos(0) \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3} [\cos(0) - \cos(n\pi)] \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا (مسوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

غیر محتاط بات چیت میں ہم کہتے ہیں کہ Ψ میں ψ_n کی مقدار کو c_n ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ n ویں ساکن حال میں ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے جو درست نہیں چونکہ ذرہ حال Ψ میں ناکہ حال ψ_n میں پایا جاتا ہے؛ مزید تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرہ کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی مشہور کی پیش کش کرتے ہو جس کا جواب ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیش کش سے E_n قیمت حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔ (کوئی بھی پیش کش، ”احبازتی“ قیمتوں میں سے کوئی ایک دے گی، اسی لئے انہیں احبازتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا

$$(۲.۳۸) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

جس کا ثبوت Ψ کی عمود زنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام c_n غیر تاجع وقت ہیں لہذا میں $t = 0$ پر ثبوت پیش کرتا ہوں۔ آپ باآسانی اس ثبوت کو عمومیت دے کر کسی بھی t کے لئے ثبوت پیش کر سکتے ہیں)۔

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \right)^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

(یہاں بھی m پر مجموعہ لینے میں کرونیٹر ڈیلٹا جزو $m = n$ کو چنتا ہے۔)

مزید، توانائی کی توقعاتی قیمت لازمآ درج ذیل ہوگی

$$(۲.۳۹) \quad \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n$$

جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جاسکتی ہے: غیر تاجع وقت شرودنکر مساوات کہتی ہے

$$(۲.۴۰) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left(\sum c_m \psi_m \right)^* H \left(\sum c_n \psi_n \right) dx \\ &= \sum \sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum |c_n|^2 E_n \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تاجع وقت ہوگا اور یوں H کی توقعاتی قیمت بھی غیر تاجع وقت ہوگی۔ کوانٹم میکانیات میں **بٹا توانائی**^{۲۹} کی یہ ایک مثال ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تفاعل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال ψ_1 (شکل ۲.۲) کے ساتھ متربی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کرتے گے کہ $|c_1|^2$ غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 = 0.998555 \dots$$

^{۲۹} conservation of energy

باقی تمام عددی سرسمل کر منفرق دیتے ہیں: ۳۰

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت ہماری توقعات کے عین مطابق درج ذیل ہے۔

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3 \pi^3} \right)^2 \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{480 \hbar^2}{\pi^4 ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5 \hbar^2}{ma^2}$$

یہ $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ کے بہت قریب، ہیجان حل حالتوں کی بشمول کی بن معمولی زیادہ ہے۔ □

سوال ۲.۳: دکھائیں کہ لامستثنای چکور کنواں کے لئے $E = 0$ یا $E < 0$ کی صورت میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کا کوئی بھی متابل قبول حل نہیں پایا جاتا ہے۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک خصوصی صورت ہے، لیکن اس بار شرودنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط پر پورا نہیں اتر سکتے ہیں۔)

سوال ۲.۴: لامستثنای چکور کنواں کے n ویں ساکن حال کیلئے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ ، σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول غیر یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال غیر یقینیت کی حد کے قریب ترین ہوگا؟

سوال ۲.۵: لامستثنای چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل عمل موج اولین دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔ (یعنی A تلاش کریں۔ آپ ψ_1 اور ψ_2 کی معیاری عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ $t = 0$ پر Ψ کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا۔ اگر آپ کو شک ہے، جزو-ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ مومنرالذکر کو وقت کے سائن تفاعل عمل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا۔ نتائج کو اداہ صورت میں لکھنے کی خاطر $\omega \equiv \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$ لیں۔

ج. $\langle x \rangle$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔ اس ارتعاش کی زاویائی تعدد کتنی ہوگی؟ ارتعاش کا محیط کیا ہوگا؟ (اگر آپ کا محیط $\frac{a}{2}$ سے زیادہ ہو تب آپ کو جیل بھیجنے کی ضرورت ہوگی۔)

۳۰۔ آپ درج ذیل سلسل کی ریاضی کی کتاب سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

د. $\langle p \rangle$ تلاش کریں (اور اس پہ زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ه. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش سے کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں؟ اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہوگا؟ H کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ E_1 اور E_2 کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگر چہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی با معنی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (چونکہ یہ کسی بھی متبادل پیمائش مقدار میں کٹ جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر ہم سوال ۲.۵ میں ψ_1 اور ψ_2 کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کرتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

جہاں ϕ کوئی مستقل ہے۔ $\Psi(x, t)$ ، $|\Psi(x, t)|^2$ اور $\langle x \rangle$ تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص $\phi = \pi/2$ اور $\phi = \pi$ کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامتناہی چپکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔^{۳۱}

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a - x), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کا رخا کہ کھینچیں اور مستقل A کی قیمت تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ E_1 ہونے کا احتمال کتنا ہوگا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک لامتناہی چپکور کنواں، جس کی چوڑائی a ہے، میں کیست m کا ایک ذرہ کنواں کے بائیں حصے سے ابتدا ہوتا ہے اور یہ $t = 0$ پر بائیں نصف حصے کے کسی بھی نقطہ پر ہو سکتا ہے۔

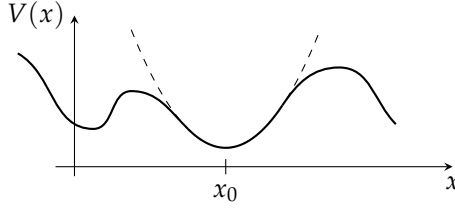
ا. اس کی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ تلاش کریں۔ (منرض کریں کے یہ حقیقی ہے اور اسے معمول پر لانا بھولے گا۔)

ب. پیمائش توانائی کا نتیجہ $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۲.۹: لمحہ $t = 0$ پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے H کی توقعاتی قیمت تکمیل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$$

^{۳۱} اصولی طور پر ابتدائی تفاعل موج کی شکل و صورت پر کوئی پابندی عائد نہیں ہے، تاہم لازم ہے کہ یہ معمول پر لانے کے متبادل ہو۔ بالخصوص، ضروری نہیں کہ $\Psi(x, 0)$ کا استمراری تفسیق پلایا جاتا ہو؛ بلکہ تفاعل عمل کا از خود استمراری ہونا بھی ضروری نہیں ہے۔ ہاں، $\Psi(x, 0)$ کے دوم تفسیق کی عدم وضاحت کی بنا، ایسی صورتوں میں $\int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$ سے $\langle H \rangle$ کی قیمت کے حصول میں آپ کو تکنیکی مسائل درپیش ہو سکتے ہیں۔ سوال ۲.۹ میں ایسا کرنا اس لئے ممکن ہوا کہ عدم استمرار آخسری سروں پر پائے گئے جہاں تفاعل عمل از خود منصر ہے۔ سوال ۲.۷ طرح کے مسائل کو حل کرنا آپ سوال ۲.۸ میں دیکھیں گے۔



شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے معتمی کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکانی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔ دھیان رہے کیونکہ H غیر تابع وقت ہے لہذا $t = 0$ لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

۲.۳ ہارمونی مرتعش

کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک پلک دار اسپرنگ جس کا مقیاس پلک k ہو اور کمیت m پر مشتمل ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت قانون ہکے^{۳۲}

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

کے تحت ہوگی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

ہوگا جہاں

$$(۲.۴۱) \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

$$(۲.۴۲) \quad V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

ہوگی جس کی ترسیم قطع مکانی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی مرتعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور متون ہک اس سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہوگا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، معتمی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں تخمین قطع مکانی ہوگا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی $V(x)$ کے کم سے کم نقطہ x_0 کے لحاظ سے $V(x)$ کو ٹیلر تسلسل^{۳۳} کے لحاظ

^{۳۲} Hooke's law
^{۳۳} Taylor series

سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

اس سے $V(x_0)$ منفی کر کے (ہم $V(x)$ سے کوئی بھی مستقل بغیر خطرہ و منکر منفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہوگا) اور یہ جانتے ہوئے کہ $V'(x_0) = 0$ ہوگا (چونکہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلندی پر ارکان رد کرتے ہوئے (جو $(x - x_0)$ کی قیمت کم ہونے کی صورت میں متبادل نظر انداز ہونگے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

جو نقطہ x_0 پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس پُلک $k = V''(x_0)$ ہو۔^{۳۴} یہ وجہ ہے جس کی بنا سادہ ہارمونی سر تعیش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا محیط کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوگا۔

کو انٹرمیکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$(۲.۴۳) \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

کے لیے شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس پُلک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$(۲.۴۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو ”طاقت کے بل بوتے پر“ **طریقہ تسلسل**^{۳۵} کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولب مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **عالمی سیر** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور حل جلدی دیتا)^{۳۶} ہے۔ اگر آپ طاقتی تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپ کو یہ ترکیب سیکھنی ہوگی۔

^{۳۴} چونکہ ہم فرض کر رہے ہیں کہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے لہذا $V''(x_0) \geq 0$ ہوگا۔ صرف اس نایاب صورت میں ارتعاش تخمینی طور پر بھی سادہ ہارمونی نہیں ہوگا جب $V''(x_0) = 0$ ہو۔

^{۳۵} power series

^{۳۶} یہی ترکیب زاویائی معیار حرکت کے نظریہ (باب ۴) میں مستعمل ہیں اور انہیں عموماً دیتے ہوئے عمدہ تشاکل کو انٹرمیکانیات کے مخفیہ کی وسیع جامعیت کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابستہ کرتے ہیں

$$(۲.۴۵) \quad \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]\psi = E\psi$$

جہاں $p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$(۲.۴۶) \quad H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]$$

کو کو اجزائے ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عدد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ p اور x عاملین ہیں اور عاملین عموماً مقلوب^{۳۷} نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ xp سے مراد px نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل متبادروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$(۲.۴۷) \quad a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$$

(جہاں قوسین کے باہر حبز و ضربی لگانے سے آہستہ سی نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب a_-a_+ کیا ہوگا؟

$$\begin{aligned} a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی حبزو ($xp - px$) پایا جاتا ہے جس کو ہم x اور p کا مقلوب^{۳۸} کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیدائش ہے۔ عمومی طور پر عامل A اور عامل B کا مقلوب (جسے چپکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴۸) \quad [A, B] \equiv AB - BA$$

اس علامت کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴۹) \quad a_-a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar}[x, p]$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

ہمیں x اور عددی p کا مقابلہ دریافت کرنا ہوگا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہوگا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تقابل عمل $f(x)$ عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آخر میں اس پر کھی تقابل عمل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۰) \quad [x, p]f(x) = \left[x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = -i\hbar f(x)$$

پر کھی تقابل عمل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۱) \quad [x, p] = i\hbar$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے باضابطہ مقلبتی^{۲۹} رشتہ^{۳۰} کہلاتا ہے۔
اسے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$(۲.۵۲) \quad a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2}$$

یا

$$(۲.۵۳) \quad H = \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right)$$

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیمیلٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا اور دائیں ہاتھ اضافی $-\frac{1}{2}$ ہوگا۔ یاد رہے گاہیاں a_+ اور a_- کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ a_+ کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۵۴) \quad a_+ a_- = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۵) \quad [a_-, a_+] = 1$$

یوں ہیمیلٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۶) \quad H = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

^{۲۹} canonical commutation relation

^{۳۰} گہری نظر سے دیکھا جائے تو کوانٹم میکینکس کے تمام ظلمات کا دار و مدار اس حقیقت پر ہے کہ معیاری اور معیار حرکت آپس میں مقلوب نہیں ہیں۔ بعض مضغین باضابطہ مقلبتی رشتہ کو مسلمہ لیتے ہوئے $p = (\hbar/i) d/dx$ اخذ کرتے ہیں۔

ہارمونی مرتعش کی شرودنگر مساوات a_{\pm} کو صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۷) \quad \hbar\omega \left(a_{\pm} a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) = E\psi$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ یا تو بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو اور یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی E کی شرودنگر مساوات کو ψ مطمئن کرتا ہو ($H\psi = E\psi$) تب توانائی $(E + \hbar\omega)$ کی شرودنگر مساوات کو $a_+\psi$ مطمئن کرے گا: $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$ **ثبوت:**

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega \left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+ \right) \psi \\ &= \hbar\omega a_+ \left(a_- a_+ + \frac{1}{2} \right) \psi = a_+ \left[\hbar\omega \left(a_+ a_- + 1 + \frac{1}{2} \right) \psi \right] \\ &= a_+ (H + \hbar\omega) \psi = a_+ (E + \hbar\omega) \psi = (E + \hbar\omega) (a_+\psi) \end{aligned}$$

(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے $a_- a_+$ کی جگہ $a_+ a_- + 1$ استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ a_+ اور a_- کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے، a_{\pm} اور کسی بھی مستقل، مثلاً \hbar ، ω اور E کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہوگا۔)

اسی طرح حل $a_-\psi$ کی توانائی $(E - \hbar\omega)$ ہوگی۔

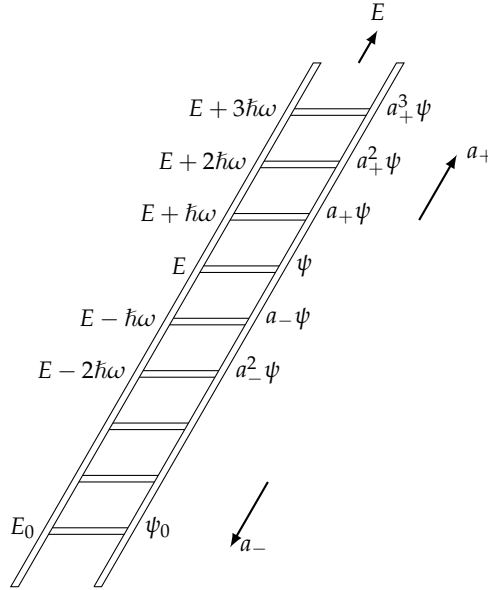
$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) (a_-\psi) = \hbar\omega a_- \left(a_+ a_- - \frac{1}{2} \right) \psi \\ &= a_- \left[\hbar\omega \left(a_- a_+ - 1 - \frac{1}{2} \right) \psi \right] = a_- (H - \hbar\omega) \psi = a_- (E - \hbar\omega) \psi \\ &= (E - \hbar\omega) (a_-\psi) \end{aligned}$$

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جانتے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ چونکہ a_{\pm} کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھنا یا نیچے اتر سکتے ہیں لہذا انہیں ہم **عاملین** سیدھی^{۲۲} پکارتے ہیں: a_+ **عامل رفعت**^{۲۳} اور a_- **عامل تقلیل**^{۲۴} ہے۔ حالات کی ”سیدھی“ کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

ذرا کیے! عامل تقلیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہوگا جس کی توانائی صفر سے کم ہوگی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے)۔ نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی

^{۲۱} میں بار بار ”غیر تابع وقت شرودنگر مساوات“ کہہ کر جھک گیا ہوں لہذا جہاں متن سے واضح ہو کہ میں کس قسم کی مساوات کی بات کر رہا ہوں، میں اس کو ”شرودنگر مساوات“ پکاروں گا۔

^{۲۲} ladder operators
^{۲۳} raising operator
^{۲۴} lowering operator



شکل ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے حالات کی ”سیڑھی“۔

نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہوگی۔ ایسا کیوں کر ہوگا؟ ہم جانتے ہیں کہ $a_-\psi$ شرودنگر مساوات کا ایک نیا حل ہوگا، تاہم اس کی مناسبت نہیں دی جاسکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے قابل بھی ہوگا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مربع مکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہوگا: سیڑھی کے سب سے نیچے پایہ (جس کو ہم ψ_0 کہتے ہیں) پر درج ذیل ہوگا۔

$$a_-\psi_0 = 0 \quad (۲.۵۸)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\psi_0(x)$ تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

کبھی جاسکتی ہے جسے باآسانی حل کیا جاسکتا ہے:

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \implies \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

(C مستقل ہے۔) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ہم اس کو یہیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2 / \hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}}$$

لہذا $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}}$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۹) \quad \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شرودنگر مساوات میں پر کر کے $\hbar\omega(a_+ a_- + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$ حاصل کرتے ہیں اور یہ جاننے ہوئے کہ $a_-\psi_0 = 0$ ہوگا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۰) \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

سیڑھی کے خپلا پایہ (جو کوانٹم سر تعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جاسکتے ہیں^{۴۵} جہاں ہر قدم پر توانائی میں $\hbar\omega$ کا اضافہ ہوگا۔

$$(۲.۶۱) \quad \psi_n(x) = A_n (a_+)^n \psi_0(x), \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

یہاں A_n مستقل معمول زنی ہے۔ یوں ψ_0 پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی سر تعش کے تمام^{۴۶} ممکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسا کیے بغیر ہم تمام احبازاتی توانائیاں تعین کر پاتے ہیں۔

مثال ۲.۴: ہارمونی سر تعش کا پھلا ہیجان حال تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۲) \quad \begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ &= A_1 \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \end{aligned}$$

^{۴۵} ہارمونی سر تعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے بہت کر، حالات کی شمار $n = 1$ کی بجائے $n = 0$ سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۱۷ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔
^{۴۶} دھیان رہے کہ ہم اس ترکیب سے (معمول پر لانے کے مقابل) تمام حاصل حاصل کرتے ہیں۔ اب اگر کسی وجہ کی بنا دیگر حاصل بھی پائے جاتے تب ہم عامل رفعت اور عامل تفصیل استعمال کرتے ہوئے دوسری سیڑھی حاصل کر سکتے ہیں، تاہم اس سیڑھی کے سب سے خپلے پایہ کو مساوات ۲.۵۸ مطبق کرنا ہوگا، جس سے ہم لازماً مساوات ۲.۵۹ تک پہنچتے ہیں۔ یوں خپلے پایہ ایک دوسرے جیسے ہوں گے لہذا دونوں سیڑھیاں درحقیقت یکساں ہوں گی۔

ہم اس کو قسّم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2 dx = |A_1|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $A_1 = 1$ ہوگا۔

اگرچہ میں چپاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے ψ_50 حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محنت چلنا ہوگا لہذا دھیان رکھیے کہ ہم جاننے ہیں کہ $a \pm \psi_n$ اور $\psi_{n\pm 1}$ ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$(۲.۶۳) \quad a_+ \psi_n = c_n \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = d_n \psi_{n-1}$$

تناسبی مستقل c_n اور d_n کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (ظاہر ہے کہ عملیات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کو لازماً صفر پہنچنا ہوگا۔)

$$(۲.۶۴) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp}f)^* g dx$$

(خطی الجبر کی زبان میں $a \mp$ اور $a \pm$ ایک دوسرے کے ہر مشق جوڑنے دار ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left(\mp \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) g dx$$

تکمل بالخصوص کے ذریعے $\int f^* \left(\frac{dg}{dx} \right) dx$ سے $\int \left(\frac{df}{dx} \right)^* g dx$ حاصل ہوگا (جہاں $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا پر حدی اجزاء صفر ہوں گے) لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\pm \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) f \right]^* g dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp}f)^* g dx \end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_{\pm}\psi_n)^* (a_{\pm}\psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp}a_{\pm}\psi_n)^* \psi_n dx$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$(۲.۶۵) \quad a_+ a_- \psi_n = n \psi_n, \quad a_- a_+ \psi_n = (n+1) \psi_n$$

ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ \psi_n)^* (a_+ \psi_n) dx &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 dx = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_n)^* (a_- \psi_n) dx &= |d_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 dx = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \end{aligned}$$

چونکہ ψ_n اور $\psi_{n\pm 1}$ معمول شدہ ہیں، لہذا $|c_n|^2 = n+1$ اور $|d_n|^2 = n$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۶) \quad a_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_+ \psi_0, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_+ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+)^2 \psi_0, \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} a_+ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a_+)^3 \psi_0, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_+ \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (a_+)^4 \psi_0, \end{aligned}$$

دیگر تفاعلات بھی اسی طرح حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۷) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ ہوگا۔ (بالخصوص $A_1 = 1$ ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لامتناہی چیکور کنواں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی سر تقش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$(۲.۶۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دوبار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے a_+ اور بعد میں a_- اپنی جگہ سے ہٹا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* (a_+ a_-) \psi_n dx &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \end{aligned}$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

جب تک $m = n$ نہ ہو $\int \psi_m^* \psi_n dx$ لازماً صفر ہوگا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم $\psi(x, 0)$ کو کن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عمودی سر مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی سر تعش کے n ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔
حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx$$

اس قسم کے کمالات جن میں x یا p کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات x اور p کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفیات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تنقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$(۲.۴۹) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a_+ - a_-)$$

اس مثال میں ہم x^2 میں دچپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \int \psi_n^* [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2] \psi_n dx$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے) $(a_+)^2 \psi_n$ تفاعل ψ_{n+2} کو ظاہر کرتا ہے جو ψ_n کو عمودی ہے۔ یہی کچھ $(a_-)^2 \psi_n$ کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے جو ψ_{n-2} کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کر کے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} (n + n + 1) = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

جیسا آپ نے دیکھ مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حسر کی توانائی ہے)۔
جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی سر تعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔
□

سوال ۲.۱۰:

۱. $\psi_2(x)$ تیار کریں۔

ب. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کا خن کہ کھنچن۔

ج. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کی عمودیت کی تصدیق کمل لے کر صریح کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جنست پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقت آصرف ایک کمل حل کرنا ہوگا۔

سوال ۲.۱۱:

ا. حالات ψ_0 (مساوات ۲.۵۹) اور ψ_1 (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح کملات لے کر $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی سر تعش کے مائل میں متغیر $\sqrt{m\omega/\hbar}x \equiv \xi$ اور مستقل $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حرکی توانائی $\langle T \rangle$ اور اوسط مخفی توانائی $\langle V \rangle$ کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپ کو نی کمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی سر تعش کے n ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، اور $\langle p^2 \rangle$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی سر تعش مخفی قوہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

ا. A تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تیار کریں۔

ج. $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں $\psi_1(x)$ کی بجائے $\psi_2(x)$ دیستاب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ اہر نفٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی سر تعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد ω پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس لک 4 گنا ہو جاتا ہے لہذا $\omega' = 2\omega$ ہوگا جبکہ ابتدائی تفاعل موج تبدیل نہیں ہوگا (یقیناً ہمیشہ تبدیل ہونے کے بن Ψ اب مختلف انداز سے ارتقاپائے گا)۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی $\hbar\omega/2$ قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ $\hbar\omega$ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی سر تقش کی شرودنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$(۲.۷۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلا واسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$(۲.۷۱) \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

شرودنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۷۲) \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K) \psi$$

جہاں K توانائی ہے جس کی اکائی $\frac{1}{2} \hbar \omega$ ہے۔

$$(۲.۷۳) \quad K \equiv \frac{2E}{\hbar \omega}$$

ہم نے مساوات ۲.۷۲ کو حل کرنا ہوگا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں K اور (E) کی ”اجبازتی“ قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔ ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں ξ کی قیمت (یعنی x کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں ξ^2 کی قیمت K کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگی لہذا مساوات ۲.۷۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$(۲.۷۴) \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi$$

جس کا تخمینہ حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$(۲.۷۵) \quad \psi(\xi) \approx A e^{-\xi^2/2} + B e^{+\xi^2/2}$$

اس میں B کا جنر و معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے (چونکہ $\infty \rightarrow |x|$ کرنے سے اس کی قیمت بے فتا بڑھتی ہے)۔ طبعی طور پر فتا بل مقبول حل درج ذیل متعارف صورت کا ہوگا۔

$$(۲.۷۶) \quad \psi(\xi) \rightarrow () e^{-\xi^2/2} \quad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے})$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت نہا حصہ کو ”پھیلنا“ چاہیے،

$$(۲.۷۷) \quad \psi(\xi) = h(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے، $h(\xi)$ ، اس کی صورت $\psi(\xi)$ سے سادہ ہو۔^{۴۸} ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفصیلات

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \left(\frac{dh}{d\xi} - \xi h \right) e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h \right) e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہذا شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۷۸) \quad \frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0$$

ہم ترکیبے فروبنیوس^{۴۹} استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل ξ کے طاقتی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۷۹) \quad h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفصیلات

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3\xi + 3 \cdot 4a_4\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۸۰) \quad \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j] \xi^j = 0$$

طاقتی تسلسل پھیلاؤ کے یکسانی کی بنا پر ξ کے ہر طاقت کا عددی سر صفر ہوگا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

^{۴۸} اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمینے سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفصیلی مساوات کے طاقتی تسلسل حل میں متعارفی جزو کا چھیلنا معمولاً پس انداز ہوتا ہے۔

Frobenius method^{۴۹}

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۸۱) \quad a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

یہ کلیہ **توالی** ۵۰ شروع و نگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو a_0 سے ابتداء کرتے ہوئے تمام ہفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12} a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24} a_0, \dots$$

اور a_1 سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6} a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20} a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120} a_1, \dots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۲.۸۲) \quad h(\xi) = h_{\text{حت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi)$$

جہاں

$$h_{\text{حت}}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

متغیر ξ کا ہفت تناسب ہے جو از خود a_0 پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

طاق تناسب ہے جو a_1 پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات a_0 اور a_1 کی صورت میں ξ تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ j کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توالی (تخمیناً) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$$

جس کا تخمینی حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

ہوگا جہاں C ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی j کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2}$$

اور اب اگر h کی قیمت e^{ξ^2} کے لحاظ سے بڑھے تب ψ (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں) $e^{\xi^2/2}$ (مساوات ۲.۷۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متغیرابی روپ^{۵۱} ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طمقی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر j کی ایک ایسی بلند ترین قیمت، n ، پائی جائے گی جو $a_{n+2} = 0$ دیتی ہو (یوں قیمت h تسلسل یا طاق h تسلسل اختتام پذیر ہوگا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہوگا؛ قیمت n کی صورت میں $a_1 = 0$ ہوگا جبکہ طاق n کی صورت میں $a_0 = 0$ ہو گا۔ یوں متابل مقبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = 2n + 1$$

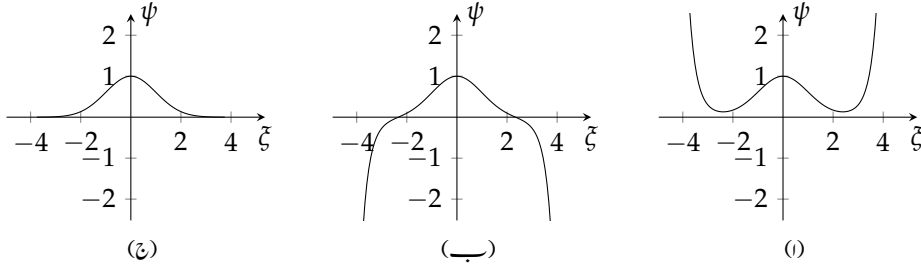
جہاں n کوئی غیر منفی عدد صحیح ہوگا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۷۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲.۸۳)$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹائزیشن شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹائزیشن، شرودنگر مساوات کے طمقی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً E کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۷۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر E کے لیے اس کے دو قطبی غیر متابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی x پر، بے متابقت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنیاد معمول پر لانے کے قابل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم E کی کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً $0.49 \hbar \omega$) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-۱)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب E کی قیمت کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً $0.51 \hbar \omega$) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم^{۵۲} دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-۲)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے قابل حل دے گی (شکل ۲.۶-۳)۔

^{۵۱} یہ حیرت کی بات نہیں کہ مساوات ۲.۸۱ میں بدخو حل بھی شامل ہے۔ یہ کلیہ توانائی ہر لحاظ سے شرودنگر مساوات کا معادل ہے لہذا اس میں لازماً دو دونوں متغیرابی حل شامل ہوں گے جنہیں ہم نے مساوات ۲.۷۵ میں حاصل کیا۔

^{۵۲} ہم اس کو دم ہلانے (wag the tail) کی ترکیب کہہ سکتے ہیں۔ جب بھی دم بٹے، آپ حبان حبانیں کہ آپ اجبازتی توانائی پر سے گزرے ہیں۔



شکل ۲.۶: مساوات شرودنگر کی (ا) $E = 0.49\hbar\omega$ ، (ب) $E = 0.51\hbar\omega$ اور (ج) $E = \hbar\omega$ صورت میں حل۔

کلیہ توانی K کی اجزائی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۸۴) \quad a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

اگر $n = 0$ ہو تب تسلسل میں ایک جزو پایا جائے گا (نہیں) $a_1 = 0$ لینا ہو گا تاکہ طاق h خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 0$ سے $a_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے:

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم $n = 1$ کے لیے $a_0 = 0$ لیں گے، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 1$ سے $a_3 = 0$ حاصل ہو گا، لہذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہو گا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم $n = 2$ کے لیے $j = 0$ لے کر $a_2 = -2a_0$ اور $j = 2$ لے کر $a_4 = 0$ حاصل کرتے ہیں۔ پوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

^{۵۳} دھیان رہے کہ n کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں a_j کا ایک منسرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمانٹ کشیر کنیاں $H_n(\xi)$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned}$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا۔) عمومی طور پر $h_n(\xi)$ متغیر ξ کا n درجی کشیر رکھتی ہوگا، جو جفت عدد صحیح n کی صورت میں جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح n کی صورت میں طاق طاقتوں کا کشیر رکھتی ہوگا۔ جسز و ضربی a_0 اور a_1 کے علاوہ یہ عین ہرمانٹے کشیر رکھنے^{۵۴} $H_n(\xi)$ ہیں۔^{۵۵} جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جسز و ضربی یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ ξ کے بلند تر طاقت کا عددی سر 2^n ہو۔ اس روایت کے تحت، ہارمونی سر تعش کے معمول شدہ^{۵۶} مسائل کن حالات درج ذیل ہوں گے

$$(۲.۸۵) \quad \psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶۷ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

سوال ۲.۱۵: ہارمونی سر تعش کے زمینی حال میں کلاسیکی احبابزاتی خطہ کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین با معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک سر تعش کی توانائی $E = (1/2)ka^2 = (1/2)m\omega^2 a^2$ ہوگی جہاں a جیٹہ ہے۔ یوں توانائی E کے سر تعش کا ”کلاسیکی احبابزاتی خطہ“ $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ تا $+\sqrt{2E/m\omega^2}$ ہوگا۔ مکمل کی قیمت ”عمومی تقسیم“ یا ”تفعل حنل“ کی جدول سے دیکھیں۔

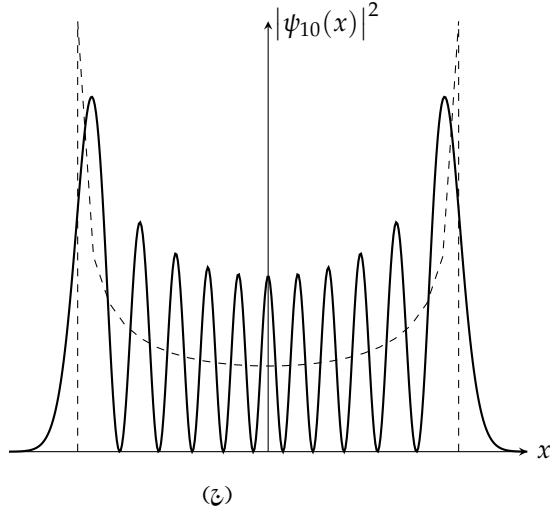
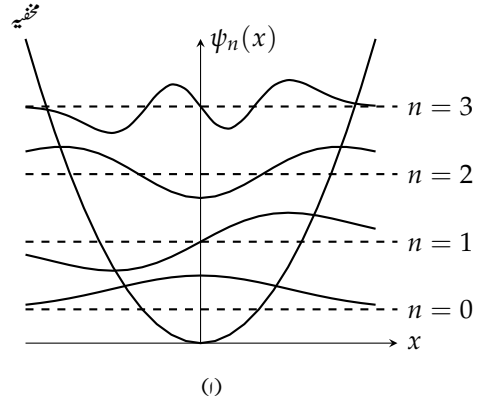
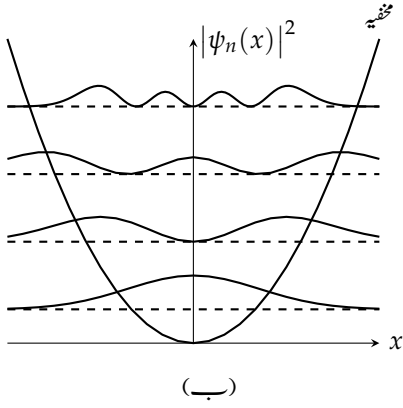
سوال ۲.۱۶: کلیہ توانائی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے $H_5(\xi)$ اور $H_6(\xi)$ تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر ξ کی بلند تر طاقت کا عددی سر روایت کے تحت 2^n لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہرمانٹے کشیر رکھنے کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

^{۵۴}Hermite polynomials

^{۵۵}ہرمانٹے کشیر رکھنے پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

^{۵۶}میں یہاں معمولی ذاتی مستقالات حاصل نہیں کروں گا۔



شکل ۲: ہارمونی سر تعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

۱. کلیہ روڈریگیس^{۵۷} درج ذیل کہتا ہے۔

$$(۲.۸۶) \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

اس کو استعمال کر کے H_3 اور H_4 اخذ کریں۔

ب. درج ذیل کلیہ توانی گزشتہ دو ہر مائٹ کشیر رکنیوں کی صورت میں H_{n+1} دیتا ہے۔

$$(۲.۸۷) \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi)$$

اس کو جب $n=1$ کے نتائج کے ساتھ استعمال کر کے H_5 اور H_6 تلاش کریں۔

ج. اگر آپ n رتبی کشیر رکنی کا تفرق لیں تو آپ کو $n-1$ رتبی کشیر رکنی حاصل ہوگی۔ ہر مائٹ کشیر رکنیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۸۸) \quad \frac{dH_n}{d\xi} = 2n H_{n-1}(\xi)$$

جس کی تصدیق ہر مائٹ کشیر رکنی H_5 اور H_6 کے لئے کریں۔

د. پیدا کار تفاعل^{۵۸} $e^{-z^2+2z\xi}$ کا $z=0$ پر n واں تفرق $H_n(\xi)$ ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر پھیلاؤ میں یہ $z^n/n!$ کا عددی سر ہوگا۔

$$(۲.۸۹) \quad e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi)$$

اس کو استعمال کر کے H_0 ، H_1 اور H_2 دوبارہ اخذ کریں۔

۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے ہر جگہ $V(x) = 0$ ہوگا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہوئی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہوگی، لیکن کو انٹیم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر متابع وقت شرودنگر مساوات ذیل

$$(۲.۹۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

یا ذیل ہے۔

$$(۲.۹۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

یہاں تک یہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوتہ صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نہا (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہوگی۔

$$(۲.۹۲) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

لامتناہی چکور کنواں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو k (اور یوں E) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حامل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تاہم وقت $e^{-iEt/\hbar}$ جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۹۳) \quad \Psi(x, t) = Ae^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x + \frac{\hbar k}{2m}t)}$$

ایسا کوئی بھی تفاعل جو x اور t متغیرات کی مخصوص جوڑ $(x \pm vt)$ کا تابع ہو (جہاں v مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو v رفتار سے x رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تفاعل کے دلیل^۹ کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہوگا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x = \mp vt + \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (انتہی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں مندرجہ صرف k کی علامت کا ہے لہذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(۲.۹۴) \quad \Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)}$$

جہاں k کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$(۲.۹۵) \quad k \equiv \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے ”ساکن حالات“ حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج $\lambda = 2\pi/|k|$ ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۶) \quad p = \hbar k$$

ان امواج کی رفتار (یعنی t کا عددی سر تقسیم x کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۷) \quad v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی E ہو (جو حتمی طور پر حرکت کر رہا ہو) کی کلاسیکی رفتار $E = mv^2/2$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۹۸) \quad v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}}$$

ظاہری طور پر کوانٹم میکانیکی تعامل موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تعامل پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تعامل موج معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے۔

$$(۲.۹۹) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2 (\infty)$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں متبادل علیحدگی حل طبعی طور پر متبادل مقبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جاسکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ متبادل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی متبادل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ n پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر k کے لحاظ سے مکمل ہوگا)۔

$$(۲.۱۰۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

(ہم $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ کو اپنی آسانی کیلئے مکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر c_n کی جگہ یہاں $\phi(k)$ (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جاسکتا ہے۔ تاہم اس میں k کی قیمتوں کی سعت پائی جائے گی، لہذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائے گی۔ ہم اس کو موج اکٹھا^{۱۰} کہتے ہیں۔^{۱۱}

wave packet^{۱۰}

^{۱۱} ان فضا امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنیاد تمام ہمدی اور معمول زنی مسکن ہوتی ہے۔

باب ۲. غیر متناہج وقت شرودنگر مساوات

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں $\Psi(x, 0)$ مندرہم کر کے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk \quad (۲.۱۰۱)$$

پر پورا اترتا ہوا $\psi(k)$ کی تعیین کیا جائے؟ یہ فوریر تبدیل کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب مسئلہ پلانشرل^{۶۲}:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (۲.۱۰۲)$$

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰، دیکھیں)۔ $F(k)$ کو $f(x)$ کا فوریر بدل^{۶۳} کہا جاتا ہے جبکہ $f(x)$ کو $F(k)$ کا الٹے فوریر بدل^{۶۴} کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نہ کی علامت کا فرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، اجزائی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: مکمل کا موجود^{۶۵} ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقصد کے لئے، تفاعل $\Psi(x, 0)$ پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں $\phi(k)$ درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx \quad (۲.۱۰۳)$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ $-a \leq x \leq a$ میں رہنے کا پابند ہو کو وقت $t = 0$ پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔ $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہیں۔

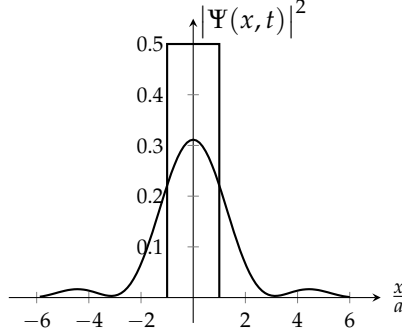
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^a dx = 2a |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

^{۶۲} Plancherel's theorem

^{۶۳} Fourier transform

^{۶۴} inverse Fourier transform

^{۶۵} تفاعل $f(x)$ پر عائد لازم اور کافی پابندی یہ ہے کہ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ مستثنائی ہو۔ (ایسی صورت میں $\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$ بھی مستثنائی ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں تعلقات کی قیمتیں ایک دوسری پیشی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)



شکل ۲.۸: تفاعل $|\Psi(x, t)|^2$ کی لمحہ $t = 0$ پر مستطیل اور $t = ma^2/\hbar$ پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۴)۔

اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے $\psi(k)$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k}\end{aligned}$$

آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

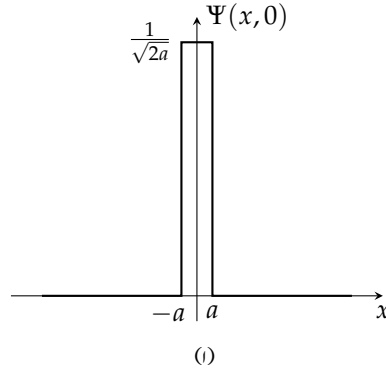
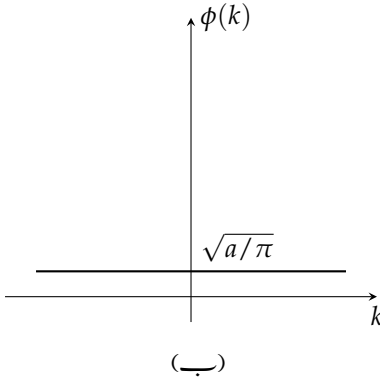
$$(۲.۱۰۴) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk$$

بد قسمتی سے اس عمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقتاً پائی جاتی ہیں جن کے لئے $\Psi(x, t)$ کا مکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر a کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت معنای نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹-۱)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمیناً $\sin ka \approx ka$ لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

جو k کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاؤ کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہذا k ، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا



شکل ۲.۹: چھوٹے a کے لئے مثال ۲.۶- (i) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم؛ (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم۔

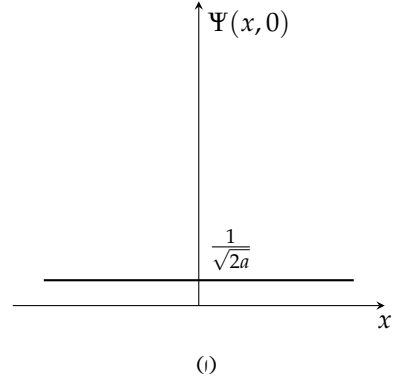
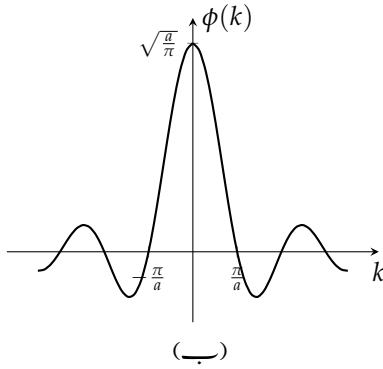
پھیلاؤ لازماً زیادہ ہوگا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی a) کی صورت میں مقام کا پھیلاؤ زیادہ ہوگا (شکل ۲.۱۰) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ka}{ka}$$

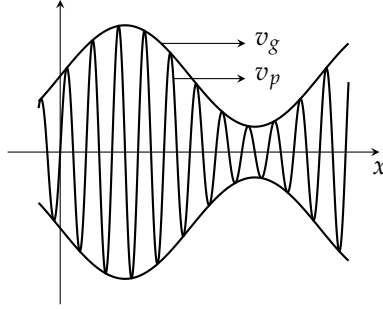
اب $\sin z/z$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر $z = \pm\pi/a$ (جو یہاں $k = \pm\pi/a$ کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی a کیلئے $k = 0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل $\Psi_k(x, t)$ ، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ Ψ_k طبعی طور پر قابل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تفاعل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سمونی سمتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصویروں کے ساتھ متعلقہ حالات کا خطی میل جس کے حیطہ کو ϕ ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہوگا؛ یہ ”علائف“ میں ڈھانکے ہوئے ”لہروں“ پر مشتمل ہوگا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو دوری سمتی رفتار (v_p) کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ علائف کی رفتار، جس کو گرووی سمتی رفتار (v_g) کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہوگی۔ علائف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہوگی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھاگے پر امواج کی گرووی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہوگی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر

^{۱۱} phase velocity
^{۱۲} group velocity



شکل ۲.۱۰: بڑی a کے لئے (i) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم، (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ ”عنائف“ گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

دیکھا ہوگا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا جیٹ بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا جیٹ گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہو گا کہ کوانٹم مینیکانیٹ میں آزاد ذرے کے تفاعل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہوگی۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

(یہاں $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$ ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے انتشاری رشتہ^{۶۸}

(ω) کا متغیر k کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہوگا۔ ہم مندرجہ ذیل کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی k_0 پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا k بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھے کے مختلف اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنیاد موجی اکٹھے بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ k_0 سے دور مکمل متابل نظر انداز ہے لہذا ہم تعامل $\omega(k)$ کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega'_0(k - k_0)$$

جہاں نقطہ k_0 پر k کے لحاظ سے ω کا تفرق ω'_0 ہے۔

(تکمل کے وسط کو k_0 پر منتقل کرنے کے مندرجہ ذیل) ہم متغیر k کی جگہ متغیر $s = k - k_0$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0 + s)x - (\omega_0 + \omega'_0 s)t]} ds$$

وقت $t = 0$ پر

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)x} ds$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega'_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)(x - \omega'_0 t)} ds$$

ماسوائے x کو $(x - \omega'_0 t)$ منتقل کرنے کے یہ $\Psi(x, 0)$ میں پایا جانے والا تکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۰۵) \quad \Psi(x, t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} \Psi(x - \omega'_0 t, 0)$$

ماسوائے دوری جبز و ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں $|\Psi|^2$ کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوگا) یہ موجی اکٹھے بظاہر سمتی رفتار ω'_0 سے حرکت کرے گا:

$$(۲.۱۰۶) \quad v_{\text{دوری}} = \frac{d\omega}{dk}$$

(جس کی قیمت کا حساب $k = k_0$ پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(۲.۱۰۷) \quad v_{\text{دوری}} = \frac{\omega}{k}$$

یہاں $\omega = (\hbar k^2/2m)$ یعنی $\omega/k = (\hbar k/2m)$ ہے جبکہ $d\omega/dk = (\hbar k/m)$ ہے جو دگنہ ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروپی سمتی رفتار نا کہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$(۲.۱۰۸) \quad \text{دوری} = 2v = v_{\text{گروپی}} = v_{\text{کلاسیکی}}$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر x کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$ اور $[C \cos kx + D \sin kx]$ ہیں۔ مستقالات C اور D کو مستقالات A اور B کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقالات A اور B کو مستقالات C اور D کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کو انٹیمیکانیات میں جب $V = 0$ ہو، قوت نمائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ \sin اور \cos ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامتناہی چکور کنواں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال J تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال روکے ہوا کارچ کیا ہوگا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ متناہی وقفہ کے فورسٹر تسلسل سے آف زکر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامتناہی تک بڑھاتے گے۔

۱. مسئلہ ڈرشلے کہتا ہے کہ وقفہ $[-a, +a]$ پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو فورسٹر تسلسل کے پھیلاو سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

a_n اور b_n کی صورت میں c_n کیا ہوگا؟

ب. فورسٹر تسلسل کے عددی سروں کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} dx$$

ج. n اور c_n کی جگہ نئے متغیرات $k = (n\pi/a)$ اور $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} ac_n$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جبزو-۱ اور جبزو-۲ درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx,$$

جہاں ایک n سے اگلی n تک k میں تبدیلی Δk ہے۔

باب ۲. غیر تاجع وقت شروع و نگر مساوات

د. حد $a \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ: $F(k)$ کی صورت میں $f(x)$ اور $f(x)$ کی صورت میں $F(k)$ کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوں گے۔ اس کے باوجود حد $a \rightarrow \infty$ کی صورت میں ان دونوں کی ساخت ایک دوسرے کے ساتھ مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تغا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-a|x|}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\phi(k)$ تلاش کریں۔

ج. $\Psi(x, t)$ کو مکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں a بہت بڑا ہو، اور جہاں a بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: گاؤس موج اکٹھا ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تغا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2}$$

جہاں A اور a مستقل ہیں (حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔ اشارہ: ”مربع مکمل کرتے ہوئے“ درج ذیل روپ کے مکمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

مان لیں $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$ ۔ یوں $y^2 - (b^2/4a) = (ax^2 + bx)$ ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج. $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar at/m)^2}}$$

وقت $t = 0$ پر $|\Psi|^2$ کا حنا کہ (بطور x کا تغا عمل) بنائیں۔ کسی بڑے t پر دوبارہ حنا کہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $|\Psi|^2$ کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ ؛ اور احتمالات σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ جزوی جواب:

$$\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$$

۵. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کارآمد ہے؟ کس لمحہ t پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے متغیر ہوگا؟

۲.۵ ڈیلیٹ انفاسل مخفیہ

۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات

ہم غیر تاج وقت شرودنگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چکوروں اور ہارمونی سر تعش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اعشاریہ n کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر k کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تاج وقت شرودنگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ (n پر لیا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ (k پر) عمل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں ایک بعدی غیر تاج وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر $V(x)$ ذرے کی کل توانائی E سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-۱) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنواں میں ”پھنسا“ رہے گا: یہ **والپیٹ نقاط**^{۶۹} کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنواں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **مقید حال**^{۷۰} کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر E ایک (یا دونوں) جانب $V(x)$ سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-۲ ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **بکھراو حال**^{۷۱} کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی سر تعش)؛ بعض صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پسٹ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔

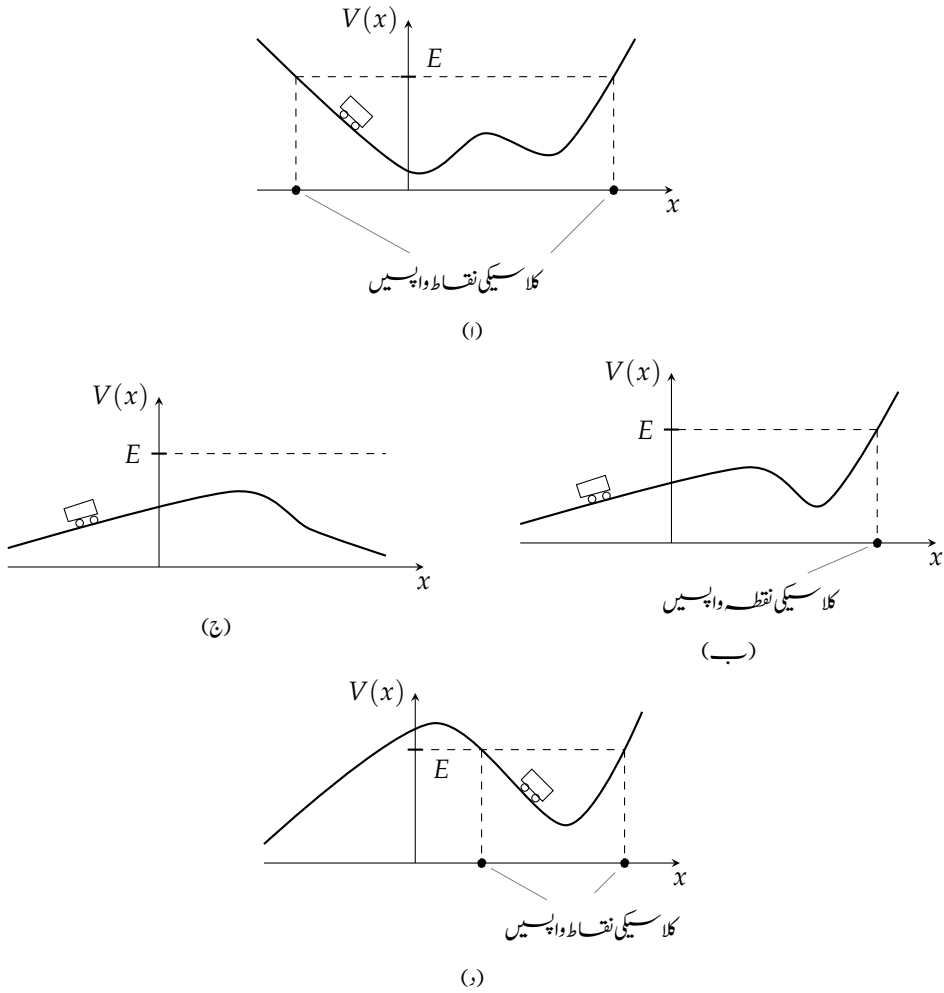
شرودنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ فرق اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں **سرنگے زنی**^{۷۲} (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو

^{۶۹} turning points

^{۷۰} bound state

^{۷۱} scattering state

^{۷۲} tunneling



شکل ۲.۱۲: (ا) مقید حال، (ب، ج) بکسر احوالات، (د) کلاسیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بکسر احوال۔

کسی بھی مستثنای مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہذا مخفیہ کی قیمت صرف لامستثنای پر اہم ہوگی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$(۲.۱۰۹) \quad \begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases}$$

”روزمرہ زندگی“ میں لامستثنای پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں سلسلہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$(۲.۱۱۰) \quad \begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases}$$

چونکہ $x \rightarrow \pm\infty$ پر لامستثنای چپور کنواں اور ہارمونی سر تعش کی مخفی توانائیاں لامستثنای کو پہنچتی ہیں لہذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہذا یہ صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں

مبداء پر لامستثنای کم چوڑائی اور لامستثنای بلند ایوانو کی لامتفاعل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل 13.2) ڈیلٹا تفاعل^{۲۷} کہلاتا ہے۔

$$(۲.۱۱۱) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل مستثنای نہیں ہے لہذا تکنیکی طور پر اس کو تفاعل کہنا غلط ہوگا (ریاضی دان اسے متعمم تفاعل^{۲۸} یا متعمم تقیم^{۲۹} کہتے ہیں)۔^{۳۰} تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت بار ایک ڈیلٹا تفاعل ہوگا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\delta(x - a)$ نقطہ a پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تفاعل ہوگا۔ چونکہ $\delta(x - a)$ اور ایک سادہ تفاعل $f(x)$ کا حاصل ضرب نقطہ a کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوگا لہذا $\delta(x - a)$ کو $f(x)$ سے ضرب دینا، اسے $f(a)$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$(۲.۱۱۲) \quad f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$$

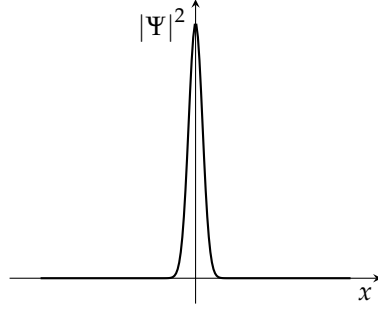
^{۲۷} آپ کو یہاں پریشانی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے $V > E$ درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھراو حال، جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہوگا۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں ہیں تب $E \leq 0$ کے لئے مساوات شروع کر کے آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

^{۲۸} Dirac delta function

^{۲۹} generalized function

^{۳۰} generalized distribution

^{۳۱} ڈیلٹا تفاعل کو ایسے مستطیل (یا شائش) کی تصدیق صورت تصور کیا جاسکتا ہے جس کی چوڑائی بتدریج کم اور قد بتدریج بڑھتا ہو۔



شکل ۲.۱۳: ڈیلٹا فنکشن (مساوات ۲.۱۱۱)

بالخصوص درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ڈیلٹا فنکشن کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$(۲.۱۱۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = f(a)$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ a پر فنکشن $f(x)$ کی قیمت ”اٹھاتا“ ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ ہو، صرف اتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ a شامل ہو لہذا $a - \epsilon$ تا $a + \epsilon$ تکمل لینا کافی ہوگا جہاں $\epsilon > 0$ ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں α ایک مثبت مستقل ہے۔^۸

$$(۲.۱۱۴) \quad V(x) = -\alpha \delta(x)$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامستناہی چکور کنواں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانیاں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا فنکشن کنواں کے لیے شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۲.۱۱۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \alpha \delta(x) \psi = E \psi$$

جو مقید حالات ($E < 0$) اور بکھراؤ حالات ($E > 0$) دونوں پیدا کرتی ہے۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ $x < 0$ میں $V(x) = 0$ ہوگا لہذا

$$(۲.۱۱۶) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = k^2 \psi$$

^۸ ڈیلٹا فنکشن عمل کی اکائی ایک ہٹسبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہذا α کا بُعد توانائی ضرب لمبائی ہوگا۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں k درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے E منفی ہوگا لہذا k حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۲.۱۱۷)$$

مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad (۲.۱۱۸)$$

ہوگا جہاں $x \rightarrow -\infty$ پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا ہمیں $A = 0$ منتخب کرنا ہوگا:

$$\psi(x) = Be^{kx}, \quad (x < 0) \quad (۲.۱۱۹)$$

خطہ $x > 0$ میں بھی $V(x)$ صفر ہے اور عمومی حل $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا: اب $x \rightarrow +\infty$ پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا $G = 0$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل لیا جائے گا۔

$$\psi(x) = Fe^{-kx}, \quad (x > 0) \quad (۲.۱۲۰)$$

ہمیں نقطہ $x = 0$ پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں انفعل کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہوگا۔ میں ψ کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

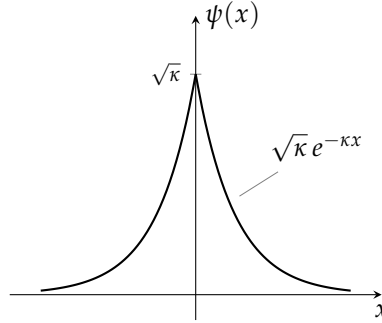
$$\begin{cases} 1. & \psi \text{ لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{d\psi}{dx} \text{ استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفیہ لامتناہی ہو} \end{cases} \quad (۲.۱۲۱)$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت $F = B$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases} \quad (۲.۱۲۲)$$

انفعل $\psi(x)$ کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا متناہی چکور کنواں کی طرح) جوڑ پر مخفیہ لامتناہی ہے اور انفعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ $x = 0$ پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیٹک انفعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر ψ کے تفرق میں عدم استمراری ہی ڈیٹک انفعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx \quad (۲.۱۲۳)$$



شکل ۲.۱۳: ڈیلتا تفاعل محفہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

پہلا مکمل درحقیقت دونوں آخری نقاط پر $\frac{d\psi}{dx}$ کی قیمتیں ہوں گی، آخری مکمل اس پٹی کا رقبہ ہوگا، جس کا قدمتناہی، اور $\epsilon \rightarrow 0$ کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہذا یہ مکمل صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۴) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہوگا لہذا $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوگا۔ لیکن جب سرحہ پر $V(x)$ لامتناہی ہو تب یہ دلیل متبادل مقبول نہیں ہوگی۔ بالخصوص $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$(۲.۱۲۵) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

یہاں درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x > 0) \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x < 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{+} = -Bk \\ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہذا $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$ ہوگا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = B$ ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$(۲.۱۲۶) \quad k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

اور اجبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$(۲.۱۲۷) \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

آخسر میں ψ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذور کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۸) \quad B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیٹا انفاسل، کی ”زور“ α کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$(۲.۱۲۹) \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

ہم $E > 0$ کی صورت میں بکھراو حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شعرو ڈنگر مساوات $x < 0$ کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۳۰) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۱۳۱) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

جہاں کوئی بھی جبزوبے متاثر نہیں ہڑھتا ہے لہذا انہیں رد نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $x > 0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

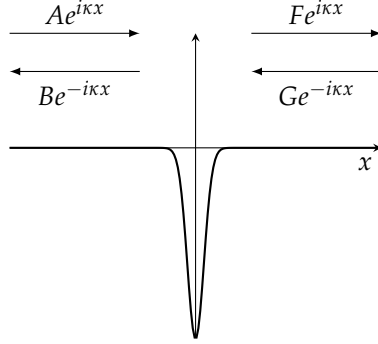
$$(۲.۱۳۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۳) \quad F + G = A + B$$

تغیروں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), & (x > 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & (x < 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$



شکل ۲.۱۵: ڈیلٹا فنکشن پوٹنشل کنواں سے بکھراؤ۔

لہذا $\Delta(d\psi/dx) = ik(F - G - A + B)$ ہوگا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = (A + B)$ ہوگا لہذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$(۲.۱۳۲) \quad ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$$

یا مختصراً:

$$(۲.۱۳۵) \quad F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نا معلوم مستقلات A ، B ، C اور D بلکہ k شامل کرتے ہوئے پانچ نا معلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہوگا۔ بہتر ہوگا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی طبعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ e^{ikx} (کے ساتھ تایم وقت جزو ضربی $e^{-iEt/\hbar}$ منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا متعلقہ موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح e^{-ikx} بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل A بائیں سے آمدی موج کا جیٹ ہے، B بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا جیٹ ہے، F (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا جیٹ جبکہ H دائیں سے آمدی موج کا جیٹ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراؤ کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا جیٹ صفر ہوگا:

$$(۲.۱۳۶) \quad G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراؤ}$$

آمدی موج^۹ کا جیٹ A ، منعکس موج^{۱۰} کا جیٹ B جبکہ ترسیل موج^{۱۱} کا جیٹ F ہوگا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو B اور F

^۹incident wave
^{۱۰}reflected wave
^{۱۱}transmitted wave

کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$(۲.۱۳۷) \quad B = \frac{i\beta}{1-i\beta}A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta}A$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراؤ کا مطالعہ کرنا چاہیں تب $A = 0$ ہوگا؛ G آمدی جیٹ، F منعکس جیٹ، اور B ترسیلی جیٹ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال $|\psi|$ ہوتا ہے لہذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی A^* احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۳۸) \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

جہاں R کو شرح انعکاس^{۸۳} کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو R آپ کو بتائے گا کہ ٹکرائے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہوگا جسے شرح ترسیل^{۸۴} کہتے ہیں۔

$$(۲.۱۳۹) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہوگا۔

$$(۲.۱۴۰) \quad R + T = 1$$

دھیان رہے کہ R اور T متغیر β کے اور لہذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵) E کے تفاع عمل ہوں گے۔

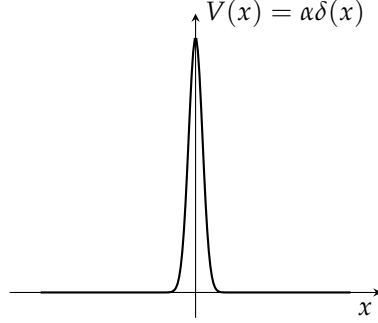
$$(۲.۱۴۱) \quad R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}}$$

توانائی جتنی زیادہ ہو، ترسیل کا احتمال اتنا ہی زیادہ ہوگا (جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے)۔

یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے تاہم ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ بکھراؤ موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم ہم اس مسئلہ کا حل جانتے ہیں۔ جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا، ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہونگے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھے ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا سادہ اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد

^{۸۳} یہ معمول پر لانے کے قابل تفاعل نہیں ہے لہذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہوگا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیاراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

^{۸۴} reflection coefficient
^{۸۵} transmission coefficient



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

سے حل کرنا بہتر ہوگا۔^{۸۵} چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جاسکتا ہے لہذا R اور T کو (بالترتیب) E کے متضرب ذرات کی تخمینی شرح انکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم اب باب وقت کے تاجع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بھڑک کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور، ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مساوات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں) ψ ایک مخلوط، غیر تاجع وقت، ساکن تفاعل ہے جو (مستقل جیٹ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے تفاعل موج، جن کی تابعیت وقت نہ ہونے کے برابر ہو، کے خطی جوڑ لے کر ایک (سرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے (سوال ۲.۲۳)۔

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف α کی علامت تبدیل کرنی ہوگی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انکاس اور شرح ترسیل جو α^2 پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنواں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی فضا کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بھڑاو غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E > V$ ہو تب $R = 0$ اور $T = 1$ ہوگا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا؛ اگر $E < V$ ہو تب $T = 0$ اور $R = 1$ ہوگا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بھڑاو زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E < V$ ہو تب بھی ایک ذرے کا مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہوگا۔ اس مظہر کو **سرنگے زنی**^{۸۶} کہتے

^{۸۵} کنواں اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھ کے بھڑاو کے عددی مطالعہ دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔
^{۸۶} tunneling

ہیں جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کا سبب بنا ہے۔ اس کے برعکس بلند تر $E > V$ کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہوگا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کودیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹم میکانیٹ آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل کھلات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$۱. \int_{-3}^{+1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \delta(x + 2) dx$$

$$ب. \int_0^{\infty} [\cos(3x) + 2] \delta(x - \pi) dx$$

$$ج. \int_{-1}^{+1} e^{(|x|+3)} \delta(x - 2) dx$$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا فنکشنات زیر علامت مکمل رہتے ہیں اور دو فترے $D_1(x)$ اور $D_2(x)$ جو ڈیلٹا فنکشنات پر مبنی ہیں صرف درج صورت میں ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx$$

جہاں $f(x)$ کوئی بھی سادہ فنکشن ہو سکتا ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$(۲.۱۴۲) \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$$

جہاں c ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی c کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. سیڈھ تفاعل $\theta(x)$ درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم $\theta(0)$ کی تعریف $\frac{1}{2}$ کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ $d\theta/dx = \delta(x)$ ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۴۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ ψ کے تفرق کا $x = 0$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے لہذا $\langle p^2 \rangle$ کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل $\delta(x)$ کا فوریئر تبدل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۲.۱۴۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

تبصرہ: اس کلیہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگرچہ $x = 0$ کے لئے یہ مکمل لامتناہی ہے اور $x \neq 0$ کی صورت میں چونکہ مکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوند کاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم $L -$ تا $L +$ مکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو، $L \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے متناہی مکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع مکالمیت) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا انف عمل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۲ پر مربع مکالمیت کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲: درج ذیل حبڑواں ڈیلٹا انف عمل مخفیہ پر غور کریں جہاں α اور a مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

۱. اس مخفیہ کا حنا کہ کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟ $\alpha = \hbar^2/ma$ اور $\alpha = \hbar^2/4ma$ کیلئے اجازتی توانائیاں تلاش کریں اور تفصیلات موع کا حنا کہ کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: حبڑواں ڈیلٹا انف عمل کے مخفیہ (سوال ۲.۲) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

۲.۶ متناہی چپکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر متناہی چپکور کنواں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (۲.۱۴۵)$$

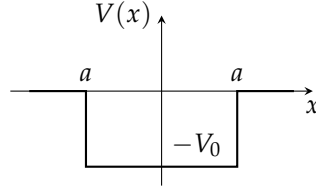
لیتے ہیں جہاں V_0 ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۲.۱۷)۔ ڈیلٹا انف عمل کنواں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں $E < 0$ ہوگا) کے ساتھ ساتھ نکھر احوالات (جہاں $E > 0$ ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خط $x < -a$ میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۲.۱۴۶)$$



شکل ۲.۱: مستثنائی چپ کور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵)۔

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$ ہے لیکن $x \rightarrow -\infty$ کے صورت میں اس کا پہلا جزو بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیشہ طرح؛ مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر فتابل مقبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۷) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad x < -a$$

خط $-a < x < a$ میں جہاں $V(x) = -V_0$ ہے مساوات شر وڈنگ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -V_0 \psi$$

جہاں l درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۸) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے E منفی ہے تاہم سر $E > V$ کی بن (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو $-V_0$ سے بڑا ہونا ہوگا؛ لہذا l بھی حقیقی اور مثبت ہوگا۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا^{۸۸}

$$(۲.۱۴۹) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), \quad -a < x < a$$

جہاں C اور D اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خط $x > a$ جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے؛ عمومی حل $\psi(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا تاہم $x \rightarrow \infty$ کی صورت میں دوسرا جزو بے فتابو بڑھتا ہے لہذا فتابل مقبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad x > a$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے: ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ نقاط $-a$ اور a پر استمراری ہیں۔ یہ جاننے ہوئے کہ دیانگیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق

^{۸۸} آپ جابہیں تو عمومی حل کو قوت نائی روپ $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$ میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی دبی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تعلق مخفیہ کی بن ہم جاننے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور \sin اور \cos کا استعمال اس حقیقت کو بلا واسطہ بروئے کار لاسکتا ہے۔

ہوں گے (سوال ۲.۱-ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً $a +$) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ $\psi(-x) = \pm \psi(x)$ ہے لہذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہوگا۔ میں جفت-حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔ \cos جفت ہے (جبکہ \sin طاق ہے) لہذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$(۲.۱۵۱) \quad \psi(x) = \begin{cases} Fe^{-\kappa x} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

نقطہ $x = a$ پر $\psi(x)$ کی استمراریت درج ذیل کہتی ہے

$$(۲.۱۵۲) \quad Fe^{-\kappa a} = D \cos(la)$$

جبکہ $\frac{d\psi}{dx}$ کی استمراریت درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۲.۱۵۳) \quad -\kappa Fe^{-\kappa a} = -lD \sin(la)$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۴) \quad \kappa = l \tan(la)$$

چونکہ κ اور l دونوں E کے تعلق میں ہیں لہذا اس کلیہ سے اجبازتی توانائیاں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اجبازتی توانائی E کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علائقہ متعارف کرتے ہیں۔

$$(۲.۱۵۵) \quad z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0}$$

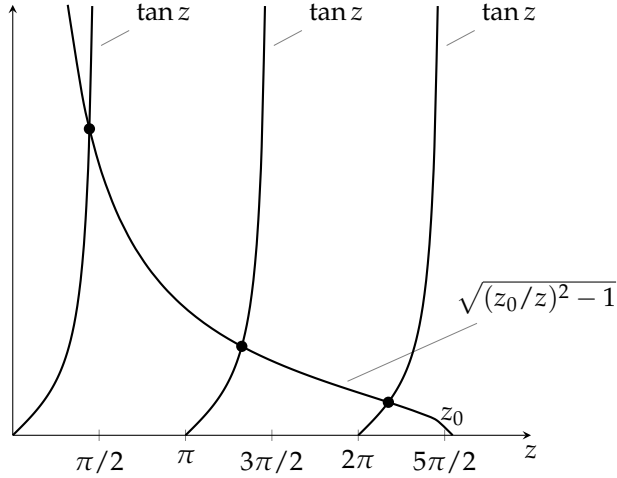
مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$ ہوگا لہذا $\kappa a = \sqrt{z_0^2 - z^2}$ ہوگا اور مساوات ۲.۱۵۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۲.۱۵۶) \quad \tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$$

یہ z (لہذا E) کی مادی مساوات ہے جس کا متغیر z_0 ہے (جو کنواں کی ”جامت“ کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقہ سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جاسکتا یا $\tan z$ اور $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۱۸)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. چوڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی z_0 کی صورت میں طاق n کے لئے نقاط تقاطع $z_n = n\pi/2$ سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۷) \quad E_n + V_0 \cong \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$



شکل ۲.۱۸: تریسیمی حل برائے مساوات ۲.۱۵۶ جہاں $z_0 = 8$ لیا گیا ہے (جفت حالات)۔

اب $E + V_0$ کنواں کی تہ سے زیادہ توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں $2a$ چوڑائی کے لامستثنای چکور کنواں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ n یہاں طاق ہے لہذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہوگی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق نصف عمل موج سے حاصل ہوگی۔) یوں $V_0 \rightarrow \infty$ کرنے سے مستثنای چکور کنواں سے لامستثنای چکور کنواں حاصل ہوگا؛ تاہم کسی بھی مستثنای V_0 کی صورت میں مقید حالات کی تعداد مستثنای ہوگی۔

ب۔ کم گہرا کم چوڑا کنواں جیسے جیسے z_0 کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ آخر کار ($z_0 < \pi/2$) کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا (صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی ”کنزور“ کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔

اگر آپ ψ (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراؤ حالات ($E > 0$) کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ بائیں ہاتھ جہاں $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < -a) \quad (2.158)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2.159)$$

کنواں کے اندر جہاں $V(x) = -V_0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad (-a < x < a) \quad (2.160)$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۱) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

دائیں جانب، جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی، درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

یہاں آمدی جیٹ A ، انعکاسی جیٹ B اور ترسلی جیٹ F ہے۔^{۸۹}

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ $-a$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۳) \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

نقطہ $-a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۴) \quad ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

نقطہ $+a$ پر $\psi(x)$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۵) \quad C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika}$$

اور $+a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$(۲.۱۶۶) \quad l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika}$$

ہم ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے C اور D حراج کر کے باقی دو کو B اور F کے لئے حل کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے)۔

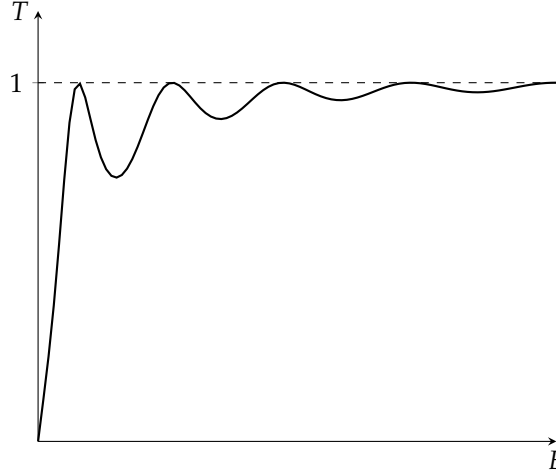
$$(۲.۱۶۷) \quad B = i \frac{\sin(2la)}{2kl} (l^2 - k^2) F$$

$$(۲.۱۶۸) \quad F = \frac{e^{-2ika} A}{\cos(2la) - i \frac{(k^2 + l^2)}{2kl} \sin(2la)}$$

شرح ترسیل $(T = |F|^2 / |A|^2)$ کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۹) \quad T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right)$$

^{۸۹} مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفصالات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بچر او میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشکیلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حسرت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نہائی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔



شکل ۲.۱۹: ترسیلی مستقل بطور توانائی کا تفاعل (مساوات ۲.۱۶۹)۔

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں n عدد صحیح ہے

$$(۲.۱۷۰) \quad \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi$$

وہاں $T = 1$ (اور کنواں ”مکمل شفاف“ ہوگا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۷۱) \quad E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

جو عین لامستثنائی چپور کنواں کی اجازتی توانائیاں ہیں۔ شکل ۲.۱۹ میں توانائی کے لحاظ سے T ترسیم کیا گیا ہے۔^{۹۰}

سوال ۲.۲۹: مستثنائی چپور کنواں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ اجازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیلی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا $\psi(x)$ معمول پر لا کر مستقل D اور F تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور فت لامستثنائی تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۳) لامستثنائی گہرا ہونے کے باوجود $0 \rightarrow z_0$ کی بنا ایک ”مکزور“ مخفیہ ہے۔ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ کو مستثنائی چپور کنواں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ

^{۹۰} اس حیرت کن مظہر کا مشاہدہ تجربہ گاہ میں بطور مزاور و ٹائونسنڈ اثر (Ramsauer-Townsend effect) کیا گیا ہے۔

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے C اور D کو F کی صورت میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la)] e^{ika} F; \quad D = [\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la)] e^{ika} F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیلی رکاوٹ (جسے خطہ $-a < x < a$ میں $V(x) = +V_0 > 0$ سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعیین کریں۔ تین صورتوں $E < V_0$ ، $E = V_0$ اور $E > V_0$ کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تصاعلی موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب: $E < V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔^۹

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس $E < V_0$ کی صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس $E > V_0$ کی صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہوگی لہذا شرح ترسیل $|F|^2 / |A|^2$ نہیں ہوگی (جہاں A آمدی جیٹ اور F ترسیلی جیٹ ہے)۔ دکھائیں کہ $E > V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

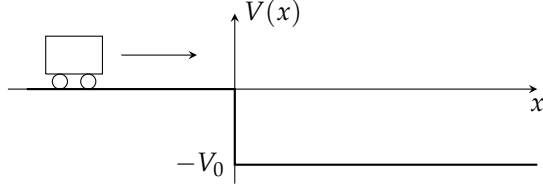
$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (۲.۱۷۲)$$

اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رد (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ $E < V_0$ کی صورت میں T کیا ہوگا؟

د. صورت $E > V_0$ کے لئے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے $T + R = 1$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور حرکی توانائی $E > 0$ ہو مخفیہ کی ایک اچانک گہرائی (شکل ۲.۲۰) کی طرف بڑھتا ہے۔

^۹ یہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔



شکل ۲.۲۰: عمودی چٹان سے بکھراؤ (سوال ۲.۳۵)۔

۱. صورت $E = V_0/3$ میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳۴ کی طرح ہے، بس یہاں سیڑھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

ب. میں نے محفّیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکراؤ واپس لوٹنے کا احتمال حبزو-۱ کے نتیجے سے بہت کم ہوگا۔ یہ محفّیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل ۲.۲۰ میں جیسے ہی گاڑی نقطہ $x = 0$ پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی عدم استمرار کے ساتھ گر کر $-V_0$ ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئی گاڑی کے لیے درست ہوگا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے محفّیہ میں اچانک کمی محسوس کرتا ہے۔ باہر $V = 0$ جبکہ مرکزہ کے اندر $V = -12 \text{ MeV}$ ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ اشتقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی 4 MeV ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا اشتقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ نے حبزو-۱ میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ $T = 1 - R$ استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبداء پر $-a < x < +a$ کے بیچ لامستثنائی چپکوروکنواں کے اندر $V(x) = 0$ اور اس کے باہر $V(x) = \infty$ ہے۔ غیر تابع وقت شرودنگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری ψ (مساوات ۲.۲۸) میں $(x+a)/2 \rightarrow x$ پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام ψ حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنواں کی چوڑائی $2a$ ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامستثنائی چپکوروکنواں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل A اور $\Psi(x, t)$ تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے $\langle x \rangle$ کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: $\sin^n \theta$ اور $\cos^n \theta$ کو تخفیف کے بعد $\sin(m\theta)$ اور $\cos(m\theta)$ کے خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ہوگا۔

باب ۲. غیر تاج وقت شرودنگر مساوات

سوال ۲.۳۸: کمیت m کا ایک ذرہ لامستثنائی چپکور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔ اچانک کنویں کا دایاں دیوار a سے $2a$ منتقل ہوتا ہے جس سے کنواں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لحاتی طور پر اس عمل سے تقا عمل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پینانش اب کی جاتی ہے۔

ا. کون نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کون نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہوگا؟

ج. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامستثنائی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

ا. دکھائیں کہ لامستثنائی چپکور کنواں میں ایک ذرہ کا تقا عمل موج کوانٹائی تجدیدی عرصہ $T = 4ma^2 / \pi \hbar$ کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$ ہوتا ہے۔

ب. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی E ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہوگا؟

ج. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟^{۹۳}

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل مخفی کومیس پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2 / ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

ا. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہوگی؟

ب. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنواں کے باہر ($x > a$) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنواں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنواں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ہارمونی مرتعش کی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے جہاں A کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ا. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

revival time^{۹۴}

^{۹۳} یہ غور طلب تضاد ہے کہ کلاسیکی اور کوانٹائی تجدیدی عرصوں کا ہر ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور کوانٹائی تجدیدی عرصہ توانائی پر منحصر بھی نہیں ہے۔)

ب. مستقبل کے لمحہ T پر تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\Psi(x, T) = B \left(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

جہاں B کوئی مستقل ہے۔ لمحہ T کی کم سے کم ممکن قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی سر تعیش کی اجبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا سپرنگ جس کو کھینچ تو جاسکتا ہے لیکن دبایا نہیں جاسکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح معزماری کرنی ہوگی جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہوگی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2} e^{ilx}$$

جہاں l ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

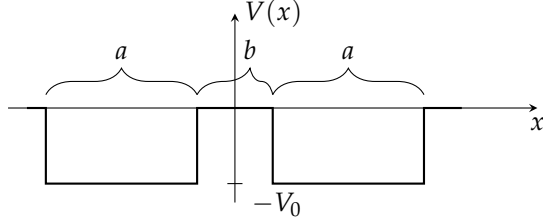
سوال ۲.۴۴: مبدأ پر لامتناہی چکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر متابع وقت شرودنگر مساوات حل کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ اجبازتی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترمیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تفاعل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تفاعل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں $0 \rightarrow a$ اور $\infty \rightarrow a$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر متابع وقت شرودنگر مساوات کے منفرد^{۹۴} حل جن کی توانائی E ایک دوسرے جیسی ہو کو **انحطاطی**^{۹۵} کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ محض ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بعدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے

^{۹۴} ایسے دو حل جن میں صرف جبزو ضربی کا مندرجہ پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتبہ معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جبزو ϕ کا مندرجہ پایا جاتا ہو) در حقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جاسکتا ہے۔ یہاں ”منفرد“ سے مراد ”خطی طور پر غیر متابع“ ہے۔
degenerate^{۹۵}



شکل ۲.۲۱: دوہرا چکور کنواں (سوال ۲.۴۷)۔

جاتے ہیں۔^{۹۶} اشارہ: مندرجہ ذیل ψ_1 اور ψ_2 ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی، E ، ایک دوسری جیسی ہو۔ حل ψ_1 کی شرودنگر مساوات کو ψ_2 سے ضرب دیں اور اس سے ψ_2 کی شرودنگر مساوات کو ψ_1 سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ $\psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx}$ ایک مستقل ہوگا۔ اب $\pm\infty$ پر معمول پر لائے جانے کے متبادل ہر حل $0 \rightarrow \psi$ ہوگا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل درحقیقت صفر ہوگا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ψ_2 دراصل ψ_1 کا مضرب ہے لہذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: مندرجہ ذیل کیسٹ m کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط L ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں $\psi(x+L) = \psi(x)$ ہوگا۔) اس کے ساکن حالت تلاش کر کے انہیں معمول پر لائیں اور ان کی مطابقتی احبازی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی E_n کے لئے دو آپس میں غیر تاج حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا خلاف گھڑی حرکت کے لیے ہوگا، جنہیں آپ $\psi_n^+(x)$ اور $\psi_n^-(x)$ کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۴۵ کے مسئلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کارآمد کیوں نہیں ہے)؟

سوال ۲.۴۷: آپ کو صرف کئی تجزیہ کی احبازت ہے حاب کر کے نتیجہ اخذ کرنے کی احبازت نہیں ہے۔ شکل ۲.۲۱ میں دکھائے گئے ”دوہرا چکور کنواں“ پر غور کریں جہاں گہرائی V_0 اور چوڑائی a مقررہ ہیں جو اتنے بڑے ضرور ہیں کہ کئی مقید حال ممکن ہوں۔

۱. زمینی قنصل موج ψ_1 اور پہلا جعبان حال ψ_2 کا خن کہ درج ذیل صورت میں کھینچیں۔

$$۱. \quad b = 0$$

$$۲. \quad b \approx a$$

$$۳. \quad b \gg a$$

^{۹۶} جیسا ہم باب ۳ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاط عام پائی جاتی ہیں۔ مندرجہ ذیل کہ مخفی علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے قنصلے میں $V = \infty$ ہو۔ مثلاً دو تنہا لامتناہی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنواں میں پایا جائے گا۔

ب۔ b کی قیمت صفر سے لامتناہی تک بڑھتے ہوئے توانائیاں (E_1 اور E_2) کس طرح تبدیل ہوتی ہیں، اس کا کیفی جواب دیں۔ $E_1(b)$ اور $E_2(b)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج۔ دو جوہری سالمہ میں الیکٹران پر اثر انداز مخفی توانائی کا تاریخی ایک دوری نمونہ دوہرا کنواں پیش کرتا ہے (سمرکزوں کی قوت کشش کو دو کنویں ظاہر کرتی ہیں)۔ اگر سمرکزوں کی آزادی سے حرکت کر سکتے ہوں تب یہ کم سے کم توانائی کی تنظیم اختیار کریں گے۔ جزو- (ب) میں حاصل نتائج کے تحت کیا الیکٹران ان سمرکزوں کو ایک دوسرے کے قریب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور رہنے پر مجبور کرے گا۔ (اگرچہ دو سمرکزوں کے بیچ قوت دفع بھی پایا جاتا ہے تاہم اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔)

سوال ۲.۴۸: آپ نے مساوات ۲.۳۹ کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال ۲.۷-۲ میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں حاشیہ میں آپ کو میں نے آگاہ کیا کہ اس کو $\langle H \rangle = \int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$ کے پرانے طریقہ سے حاصل نہ کریں چونکہ $\psi(x, 0)$ کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ مکمل بالخصوص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈیراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھے مسائل حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ فراہم کرتا ہے۔

ا۔ آپ سوال ۲.۷ میں $\psi(x, 0)$ کا پہلا تفرق حاصل کر کے اس کو سیدھی تفاعل $\theta(x - a/2)$ کی صورت میں لکھیں جسے مساوات ۲.۱۴۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ (آخری سروں کی منکر نہ کریں، صرف اندرونی خط $0 < x < a$ کے لیے لکھیں۔)

ب۔ ابتدائی موجی تفاعل $\psi(x, 0)$ کے دوہرا تفرق کو سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

ج۔ مکمل $\int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$ کو حل کر کے اس کی قیمت حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ پہلے حاصل کر چکے ہیں۔

سوال ۲.۴۹:

ا۔ دکھائیں کہ ہارمونک سر تعیش کی مخفی توانائی (مساوات ۲.۴۳) کے لئے

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{a^2}{2} (1 + e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t} \right)}$$

تابع وقت شروڈنگر مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں a ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔^{۹۷}

ب۔ $|\psi(x, t)|^2$ تلاش کریں اور موجی اکٹھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

ج۔ $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کا حساب لگائیں اور دیکھیں آیا مسئلہ اہر نفٹ (مساوات ۱.۳۸) پر یہ پورا اترتے ہیں۔

سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کنواں پر غور کریں

$$V(x, t) = -\alpha \delta(x - vt)$$

^{۹۷} تابع وقت شروڈنگر مساوات کے ٹیکہ ٹیکہ ہندروپ میں حل کی یہ ایک نایاب مثال ہے۔

جہاں کنواں کی (غیر تغیر) سمتی رفتار کو v ظاہر کرتا ہے۔
۱. دکھائیں کہ تاجع وقت شرودنگر مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i[(E+(1/2)mv^2)t-mvx]/\hbar}$$

جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ساکن ڈیلٹا تفاعل کے مقید حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو شرودنگر مساوات میں پڑ کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔ سوال ۲۰.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔

ب. اس حال میں ہیملٹن کی توقعاتی قیمت تلاش کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔
سوال ۲۰.۵۱: درج ذیل مخفیہ پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax)$$

جہاں a ایک مثبت مستقل ہے۔
۱. اس مخفیہ کو ترمیم کریں۔

ب. تصدیق کریں کہ اس مخفیہ کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A \operatorname{sech}(ax)$$

اور اسکی توانائی تلاش کریں۔ ψ_0 کو معمول پر لا کر اس کی ترمیم کا حث کہ بنائیں۔

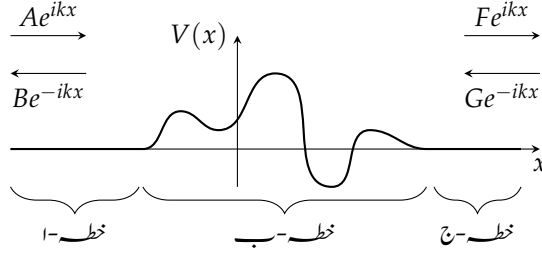
ج. دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کسی بھی (مثبت) توانائی E کے لیے شرودنگر مساوات کو حل کرتا ہے (جہاں ہمیشہ کی طرح $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے)۔

$$\psi_k(x) = A \left(\frac{ik - a \tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}$$

چونکہ $z \rightarrow -\infty$ سے $z \rightarrow -1$ $\tanh z$ ہوگا لہذا x کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\psi_k(x) \approx A e^{ikx} \text{ بڑی منفی } x \text{ کے لیے}$$

جو e^{-ikx} کی عدم موجودگی کی بنا، بائیں سے آمد ایک موج کو ظاہر کرتا ہے جس میں کوئی انعکاسی موج نہیں پائی جاتی ہے۔ x کی بڑی مثبت قیمتوں کے لیے $\psi_k(x)$ کی متعارف روپ کیا ہوگی؟ اس مخفیہ کے لیے R اور T کیا ہوں گے؟ تبصرہ: بلا انعکاس مخفیہ^{۹۸} کی ایک بہت مشہور مثال ہے؛ ہر ذرہ، اس سے قطع نظر کہ اس کی توانائی کتنی ہے، اس مخفیہ سے سیدھا گزرتا ہے۔



شکل ۲.۲۲: معتمی اختیاری مخفیہ (جو خط-۲ کے علاوہ $V(x) = 0$ ہے) سے بکھراؤ (سوال ۲.۵۲)۔

سوال ۲.۵۲: قالبے بکھراؤ۔^{۹۹} معتمی مخفیہ کے لیے بکھراؤ کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے (شکل ۲.۲۲)۔ بائیں ہاتھ خط-۱ میں $V(x) = 0$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ جہاں}$$

دائیں ہاتھ خط-۲ میں بھی $V(x) = 0$ ہے لہذا ایسا درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۴۴) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

ان دونوں کے بیچ خط-۲ میں مخفیہ جانے بغیر میں آپ کو ψ کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا، تاہم چونکہ شرودنگر مساوات خطی اور دور تہی تفسر قی ہے لہذا اس کا عمومی حل لازماً درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Cf(x) + Dg(x)$$

جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو خطی غیر تابع مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد سرحدی شرائط ہوں گے جن میں سے دو خط-۱ اور ۲ کو جوڑیں گے اور باقی دو خط-۲ اور ۳ کو جوڑیں گے۔ ان میں سے دو کو استعمال کر کے C اور D کو حصار کرتے ہوئے باقی دو کو حل کر کے A اور G کی صورت میں B اور F تلاش کیے جاسکتے ہیں:

$$B = S_{11}A + S_{12}G, \quad F = S_{21}A + S_{22}G$$

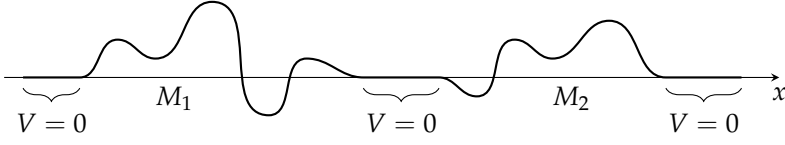
یہ چار عددی سر S_{ij} جو k (لہذا E) پر منحصر ہیں 2×2 متالب S دیتے ہیں جس کو قالبے بکھراؤ^{۱۰۰} یا مختصر قالبے S ^{۱۰۱} کہتے ہیں۔ متالب S آپ کو آمدی حیطوں (A اور G) کی صورت میں رخصتی حیطوں (B اور F) کی قیمت دیتا ہے:

$$(۲.۱۴۵) \quad \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

^{۹۹} scattering matrix

^{۱۰۰} scattering matrix

^{۱۰۱} S-matrix



شکل ۲.۲۳: دو تہا حصوں پر مبنی مخفیہ (سوال ۲.۵۳)۔

بائیں سے بھراؤ کی صورت میں $G = 0$ ہوگا لہذا انعکاسی اور ترسیلی شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$(۲.۱۷۶) \quad R_l = \frac{|B|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{11}|^2, \quad T_l = \frac{|F|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{21}|^2$$

دائیں سے بھراؤ کی صورت میں $A = 0$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۱۷۷) \quad R_r = \frac{|F|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{22}|^2, \quad T_r = \frac{|B|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{12}|^2$$

۱. ڈیٹا تفسیر عمل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) کے لیے بھراؤ کا متالاب S تیار کریں۔

ب. لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۱۳۵) کے لیے متالاب S تیار کریں۔ اشارہ: مسئلہ کی تشاکلی پن بروئے کار لائیں۔
نئے کام کی ضرورت نہیں ہوگی۔

سوال ۲.۵۳: **قالب ترسیل**۔ S (سوال ۲.۵۲) آپ کو رخصتی حیطوں (B اور F) کو آمدی حیطوں (A اور G) کی صورت میں پیش کرتا ہے (مساوات ۲.۱۷۵)۔ بعض اوقات ترسیلی و متالاب M کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفیہ کے دائیں جانب حیطوں (F اور G) کو بائیں جانب حیطوں (A اور B) کی صورت میں پیش کرتا ہے:

$$(۲.۱۷۸) \quad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

۱. متالاب S کے اجزاء کی صورت میں متالاب M کے چار اجزاء تلاش کریں۔ اسی طرح متالاب M کے چار اجزاء کی صورت میں متالاب S کے اجزاء تلاش کریں۔ مساوات ۲.۱۷۶ اور مساوات ۲.۱۷۷ میں دیے گئے R_l, T_l, R_r اور T_r کو M متالاب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

ب. فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسا مخفیہ ہو جو دو تہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو (شکل ۲.۲۳)۔ دکھائیں کہ اس پورے نظام کا M متالاب ان دو حصوں کے انفرادی M متالاب کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$(۲.۱۷۹) \quad M = M_2 M_1$$

(ظاہر ہے کہ آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفیہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ یہی M متالب کی اہمیت کا سبب ہے۔)

ج. نقطہ a پر (درج ذیل) واحد ایک ڈیلٹا فنکشن عمل مخفیہ سے بکھراؤ کا M متالب تلاش کریں۔

$$V(x) = -\alpha\delta(x - a)$$

د. جب دو-ب کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دو ہر ڈیلٹا فنکشن عمل

$$V(x) = -\alpha[\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

کے لیے M متالب تلاش کریں۔ اس مخفیہ کی ترسیمی شرح کیا ہوگی؟

سوال ۲.۵۴: دم ہلانے کی ترکیب سے ہارمونی سر تعیش کی زمینی حال توانائیوں کو پانچ معنی خیز ہندسوں تک تلاش کریں۔ یعنی K کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات ۲.۴۲ کو اعدادی طریقہ سے یوں حل کریں کہ ϵ کی بڑی قیمت کے لیے حاصل فنکشن عمل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کرے۔ ماتھیمٹیکا میں درج ذیل پُر کرنے سے ایسا ہوگا

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[u[x] /. \text{NDSolve}[u''[x] - (x^2 - K) * u[x] == 0, u[0] == 1, u'[0] == 0, \\ u[x], x, 10^{-8}, 10, \text{MaxSteps} \rightarrow 10\,000]], x, a, b, \text{PlotRange} \rightarrow c, d]$$

یہاں a, b ترسیم کی افقی سمت جبکہ c, d انتصابی سمت ہے (ابتدا $a = 0, b = 10, c = -10$ اور $d = 10$ سے کریں)۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا درست جواب $K = 1$ ہے لہذا آپ $K = 0.9$ سے شروع کر سکتے ہیں۔ فنکشن عمل موج کی ”دم“ پر نظر رکھیں۔ اب $K = 1.1$ لیں، آپ دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف پلٹ جائے گی۔ ان دونوں کے بیچ کہیں درست حل موجود ہے۔ K کی قیمت کو درست قیمت کے دونوں اطراف متعریب سے متعریب لانے سے درست جواب حاصل ہوگا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ (سوال ۲.۵۴) استعمال کرتے ہوئے ہارمونی سر تعیش کے ہیجان حال توانائی کو پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیے آپ کو $u[0] == 0$ اور $u'[0] == 1$ لینا ہوگا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامستثنای چکور کنواں کی اولین چار توانائیوں کی قیمتیں پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۲.۵۴ کی تعریفی مساوات میں درکار تبدیلیاں لائیں۔ اس بار آپ کو $u(1) = 0$ چاہتے ہیں۔

باب ۳

قواعد و ضوابط

۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونئی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کی ”ناگہاں“ خدوخال کی بنیاد تھے (مثلاً ہارمونئی سرعش میں توانائی کی سطح میں جفت واصل) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ثابت ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔ یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تناسل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تناسل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ متبادل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر تصوراتی سمیت^۱ کے تعریفی شرائط پر تناسل موج پورا اترتے ہیں جبکہ عاملین ان پر خطی متبادل^۲ کے طور پر عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی متدرج زبان خطی الجبرا^۳ ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ $|\alpha\rangle$ کو N بعدی فضا میں کسی مخصوص

^۱vectors

^۲linear transformations

^۳linear algebra

^۴آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے N عدد اجزاء $\{a_n\}$ سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (۳.۱)$$

دو سمتیات کا اندرونی ضرب^۵ $\langle \alpha | \beta \rangle$ (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسط دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہوگا۔

$$\langle \alpha | \beta \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N \quad (۳.۲)$$

خطی تبادلہ، T ، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) قوالجے^۶ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو تالیی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$|\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (۳.۳)$$

کو انٹرمیکانیات میں پائے جانے والے ”سمتیات“ درحقیقت (زیادہ تر) تفاعللات ہوتے ہیں جو لامستثنائی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں N اجزائی تالیی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور مستثنائی ابعادی صورت میں درست رویہ رکھنے والے ریاضیاتی عمل، لامستثنائی ابعادی صورت میں پریشان کن ثابت ہو سکتے ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ اگرچہ مساوات ۳.۲ کا مستثنائی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، لامستثنائی مجموعہ؛ یا مکمل، عدم سرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگا لہذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہوگا۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علاقیت سے آپ واقف ہوں گے، بہر حال ہوشیار رہنا بہتر ہوگا۔

متغیر x کے تمام تفاعللات مل کر مستحق فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے یہ ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکنہ طبعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل عمل موج Ψ معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام مربع متکامل تفاعلات^۸

$$f(x) \quad \text{جس} \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{ہو} \quad (۳.۴)$$

inner product^۵
matrices^۶

ہمارے لئے حد (a اور b) تقریباً ہر مرتبہ $\pm \infty$ ہوں گے، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہوگا۔
square-integrable functions^۸

مسئلہ (۱) اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۳.۱-۱ ادیکھیں)۔ ریاضی دان اسے $L_2(a, b)$ جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبیرٹ فضا^۹ کہتے ہیں۔ یوں کو انٹرمیکانیات میں

(۳.۵) تفاعلات موج ہلبیرٹ فضا میں لیتے ہیں۔

ہم دو تفاعلات کے اندرونی ضربے کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ تفاعلات ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

اگر f اور g دونوں مربع متکا مسل ہوں (یعنی دونوں ہلبیرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کا اندرونی ضرب موجود ہوگا (مساوات ۳.۶ کا مکمل ایک مستثنیٰ عدد^{۱۱} پر مرکوز ہوگا)۔ ایسا شواہد عدم مساوات^{۱۲} کی درج ذیل مکملی روپ^{۱۳} کے پیش نظر ہوگا۔

$$(۳.۷) \quad \left| \int_a^b f(x)^* g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے (سوال ۳.۱-ب)۔ بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۸) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید $f(x)$ کا پنےی ساتھ اندرونی ضرب

$$(۳.۹) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Hilbert space^۹

۱۰. تکنیکی طور پر، ہلبیرٹ فضا سے مراد مکمل اندرونی ضرب فضا ہے، اور مربع متکا مسل تفاعلات کا ذخیرہ ہلبیرٹ فضا کی نقطہ ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر متناہی ابعادی سمتی فضا ایک حقیر ہلبیرٹ فضا ہوگی۔ چونکہ کو انٹرمیکانیات کا اکھٹا L_2 ہے لہذا ماہر طبیعیات اسی کو "ہلبیرٹ فضا" کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ مکمل سے مراد یہ ہے کہ ہلبیرٹ فضا میں تفاعلات کا ہر کوئی ترتیب ایک تفاعل پر مرکوز ہوگا جو از خود اسی فضا میں پایا جائے گا؛ اس میں کوئی "سوراخ" نہیں پائے جاتے ہیں، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پائے جاتے ہیں (اس کے برعکس، مثلاً، تمام کشیر رکنیوں کی فضا میں اور تمام ناقل اعداد کے سلسلہ میں یقیناً سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا (بد قسمتی سے، ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) تفاعلات کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعلات کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔
۱۱. باب ۲ میں بعض اوقات ہمیں مجبوراً معمول پر نہ لانے کے قابل تفاعلات کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبیرٹ فضا سے باہر لیتے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنا ہوگا۔ اب کے لئے میں مندرجہ کرتا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبیرٹ فضا میں لیتے ہیں۔

Schwarz inequality^{۱۲}

۱۳. متناہی ابعادی سمتی فضا میں شواہد عدم مساوات $\langle \alpha|\beta \rangle \leq \langle \alpha|\alpha \rangle \langle \beta|\beta \rangle$ کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۳۱۹ پر سوال ۱.۱ دیکھیں)۔ تاہم ایسا ثبوت مندرجہ کرتا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبیرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہوگا؛ یہ صرف اس صورت^{۱۴} صفر ہوگا جب $f(x) = 0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت معمول شدہ^{۱۵} کہلاتا ہے جب اس کا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک (1) کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت عمودی^{۱۶} ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صفر (0) ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ $\{f_n\}$ اس صورت معیاری عمودی^{۱۷} ہوگا جب تمام تفاعلات معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں:

$$(3.10) \quad \langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn}$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت مکمل^{۱۸} ہوگا جب (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکے:

$$(3.11) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

معیاری عمودی تفاعلات $\{f_n(x)\}$ کے عددی سر فورسیر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$(3.12) \quad c_n = \langle f_n | f \rangle$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لامتناہی چکوروں کے ساکن حالات) (ساوا ۲.۲۸) وقفہ $(0, a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات (ساوا ۲.۶ تا ۲.۸۵) وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱:

ا. دکھائیں کہ تمام مرتعش میکا مکمل تفاعلات کا سلسلہ مستی فضا دے گا (صفحہ ۴۱۹ پر ضمیمہ ۱.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہوگا کہ دو مرتعش میکا مکمل تفاعلات کا مجموعہ از خود مرتعش میکا مکمل تفاعل ہوگا۔ ساوا ۲.۷ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ مستی فضا ہوگا؟

ب. دکھائیں کہ ساوا ۳.۶ کا عمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ ۲.۱) کے تمام شرائط پر پورا اترتا ہے۔

سوال ۳.۲:

^{۱۴} ایسے تفاعل کے لئے کہ کیا کہا جاسکتا ہے جو چند مخصوص تہا تفاعل کے علاوہ ہر معتم پر صفر ہوں؟ مکمل (ساوا ۳.۹) اب بھی معدوم ہوگا، اگرچہ تفاعل از خود ایسا نہیں۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تب آپ کو ریاضیات کا مضمون پڑھنا چاہیے۔ طبیعیات میں ایسے عمگیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم ہلبرٹ فضا میں ایسے دو تفاعلات جن کے مرتعش مکمل ایک دوسرے جیتنے ہوں کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر ہلبرٹ فضا میں ترسیات در حقیقت تفاعلات کی تعداد کا عمگیر کو تفہر کرتے ہیں۔

normalized^{۱۵}

orthogonal^{۱۶}

orthonormal^{۱۷}

complete^{۱۸}

۱. وقفہ $(0, 1)$ کے بچ متغیر v کے کس خطہ پر تفاعل $f(x) = x^v$ ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟
- ب. کیا $v = \frac{1}{2}$ کی مخصوص صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تفاعل $x f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تفاعل $(\frac{d}{dx})f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

۳.۲ قابل مشاہدہ

۳.۲.۱ ہر مشی عاملین

قابل مشاہدہ $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب علامتیت^{۱۹}:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle \quad (۳.۱۳)$$

کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ اب پیش کش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہوگا، لہذا ابھی کچھ بہت ساری پیشکشوں کی اوسط کے لئے بھی درست ہوگا۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \quad (۳.۱۴)$$

اب اندرونی ضرب کا جوڑی دار مخلوط ترتیب کو الٹ کرتا ہے (مساوات ۳.۸) لہذا درج ذیل ہوگا

$$\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle^* \quad (۳.۱۵)$$

جو لازماً کسی بھی تفاعل موج Ψ کے لئے درست ہوگا۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین کی درج ذیل مخصوص خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \quad (۳.۱۶)$$

ایسے عاملین کو ہم ہر مشی^{۲۰} کہتے ہیں۔

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط مسلط کی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} g \rangle = \langle \hat{Q} f | g \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے} \quad (۳.۱۷)$$

تاہم بظاہر مختلف نظر آنے کے، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط عین میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کا معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔

^{۱۹} یاد رہے کہ $\hat{p} = (\hbar/i) d/dx$ پر p کے Q سے عامل \hat{Q} حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے خطہ ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط اعداد a اور b اور تفاعل f اور g کے لئے $a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x) = \hat{Q}[af(x) + bg(x)]$ ہوگا۔ یہ تمام تفاعل علامت کی فضا پر خطی تبادلہ (غیمہ ۳.۱) قائم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر تفاعل کو باہر تفاعل میں منتقل کرتے ہیں (سوال ۳.۲-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آسکتی ہے۔

اصل نقطہ یہ ہے کہ ہر مشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کو انٹیم میکانیات میں ہر مشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

قابل مشاہدہ کو ہر مشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔

(۳.۱۸)

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیاری حرکت کا عامل ہر مشی ہے؟

$$(۳.۱۹) \quad \langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ مربع یکساں ہیں لہذا $\pm\infty$ پر یہ دونوں صفر تک پہنچتے ہیں^{۲۱} جس کی بنا مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مکمل بالخصوص سے پیدا منفی کی علامت کو i کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل d/dx (جس میں i نہیں پایا جاتا) غیر ہر مشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: دکھائیں کہ اگر ہلبرٹ فضا میں تمام تفاعل h لیے $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle \hat{Q}h | h \rangle$ ہو تب تمام f اور g کے لیے $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$ ہوگا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہر مشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے $h = f + g$ اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہر مشی عاملین کا مجموعہ از خود ہر مشی ہوگا۔

ب. فرض کریں \hat{Q} ہر مشی ہے اور α ایک مخلوط عدد ہے۔ α پر کیا شرائط مسلط کرنے سے $\alpha \hat{Q}$ بھی ہر مشی ہوگا؟

ج. دو ہر مشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مشی ہوگا؟

د. دکھائیں کہ عامل معتام ($\hat{x} = x$) اور ہیلیمنی عامل ($\hat{H} = -(\hbar^2/2m) d^2/dx^2 + V(x)$) ہر مشی ہیں۔

سوال ۳.۵: عامل \hat{Q} کا ہر مشی جوڑی دار^{۲۲} یا شریکے عامل^{۲۳} \hat{Q}^+ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(۳.۲۰) \quad \langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}^+f | g \rangle \quad \text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے}$$

یوں ہر مشی عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر ہوگا $\hat{Q} = \hat{Q}^+$ ۔

^{۲۱} حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے ٹکڑے تفاعل پائے جاتے ہیں جو مربع یکساں ہونے کے باوجود لامستثنائی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تفاعل طبیعیات میں نہیں پائے جاتے ہیں، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں تب ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کرتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ مستثنائی وقفہ پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان رکھنا ہوگا چونکہ $(-\infty, \infty)$ پر ہر مشی عامل، $(0, \infty)$ یا $(-\pi, \pi)$ پر غیر ہر مشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامستثنائی چیکور کو ان کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تفاعل موج لامستثنائی لکیر پر پائے جاتے ہیں؛ جو کسی وجہ سے $(0, a)$ کے باہر صفر ہیں۔

hermitian conjugate^{۲۲}
adjoint^{۲۳}

۱. x, i اور d/dx کے ہر مشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی سر تعش کے عامل رفت a_+ (مساوات ۲.۴۷) کا ہر مشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$ ہوگا۔

۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کا مفروضہ، جس میں تمام ψ حال میں ہوں، پر متبادل مشاہدہ Q کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کو انٹرمیکانیات کی عدم تعینیت^{۲۴}۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں عددی Q کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم q کہہ سکتے ہیں) دیگا؟ اس کو آپ متبادل مشاہدہ Q کا تعیین حال^{۲۵} کہہ سکتے ہیں۔ (درحقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال Ψ_n میں ایک ذرہ کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی اجازتی توانائی E_n دیگی۔)

تعیین حال میں Q کی معیاری انحراف صفر ہوگی جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۱) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \Psi | (\hat{Q} - q)^2 | \Psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) | (\hat{Q} - q) | \Psi \rangle = 0$$

(اب اگر ہر پیمائش q دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی q ہوگی: $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ \hat{Q} ہر مشی ہے لہذا $\hat{Q} - q$ بھی ہر مشی عامل ہوگا؛ میں نے اندرونی ضرب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایک جبڑو ضربی کو بائیں منتقل کیا۔) تاہم ایسا واحد تعامل جس کا خود کے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو 0 ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۲) \quad \hat{Q}\Psi = q\Psi$$

یہ عامل \hat{Q} کی امتیازی قدر مساوات ہے؛ \hat{Q} کا امتیازی تعامل Ψ اور مطابقتی امتیازی قدر q ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۳) \quad \text{تعیین حالات } \hat{Q} \text{ کے امتیازی تعاملاتے ہوں گے۔}$$

ایسے حال پر Q کی پیمائش لازماً امتیازی قدر q دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی قدر ایک عدد ہے (تاکہ عامل یا تعامل)۔ امتیازی تعامل کو کسی منتقل سے ضرب دینے سے امتیازی تعامل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کا امتیازی قدر وہی ہوگا۔ صفر کو امتیازی تعامل نہیں لیا جاسکتا ہے؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تعاملات میں شامل نہیں کرتے ہیں؛ ورنہ کسی بھی عامل \hat{Q} اور تمام q کے لیے $q0 = 0 = \hat{Q}0$ ہوگا جس کی بنا پر عدد ایک امتیازی قدر ہوگا۔) ہاں امتیازی

^{۲۴} ظاہر ہے، میں مبادی پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی عملی کی بنا عمل پیمائش کی بات نہیں کی جا رہی ہے، اور جس کو کو انٹرمیکانیات سے نہیں جوڑا جاسکتا ہے

determinate state^{۲۵}

وتدر کا صنف ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کے تمام امتیازی افتدار کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا طیف^{۲۶} حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تابع امتیازی تفاعلات کے امتیازی وتدر ایک دوسرے جتنے ہوں گے؛ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ طیف انخطاط^{۲۷} ہے۔

مشال کے طور پر، کل توانائی کے تعین حالات، ہمیشگی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (۳.۲۴)$$

جو عین غیر تابع وقت شرودنگر مساوات ہے۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی وتدر کے لیے حرف E اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف) ψ استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ $e^{-iEt/\hbar}$ چسپاں کر کے Ψ حاصل کیا جاسکتا ہے؛ جواب بھی H کا امتیازی تفاعل ہوگا)۔

مشال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں ϕ ، ہمیشگی طرح، دو ابعادی قطبی محدود کا متغیر ہے۔

$$\hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi} \quad (۳.۲۵)$$

(یہ عامل سوال ۲.۳۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا۔) کیا \hat{Q} ہر مثنیٰ ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم مستثنای وقف $0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر تفاعلات $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں ϕ اور $\phi + 2\pi$ ایک ہی طبی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \quad (۳.۲۶)$$

تکمل بالخص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* \left(i \frac{dg}{d\phi} \right) d\phi = i f^* g \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i \left(\frac{df^*}{d\phi} \right) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لہذا \hat{Q} ہر مثنیٰ ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا سرحدی جزو خارج ہوگا)۔

امتیازی وتدر مساوات

$$i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi) \quad (۳.۲۷)$$

کامی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f(\phi) = A e^{-iq\phi} \quad (۳.۲۸)$$

q کی ممکنہ قیمتوں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل پر رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.29)$$

□

اس عامل کا طیف تمام عدد صحیح پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر انحطاطی ہے۔

سوال ۳.۶: عامل $\hat{Q} = d^2 / d\phi^2$ پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور ϕ قطبی محدد میں استی زاویہ ہے۔ کیا \hat{Q} ہر مثنیٰ ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار تلاش کریں۔ عامل \hat{Q} کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انحطاطی ہے؟

۳.۳ ہر مثنیٰ عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مثنیٰ عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبعی طور پر متبادل مشاہدہ کے تعین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل^{۲۸} ہو (یعنی امتیازی اقتدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات بلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر متبادل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری^{۲۹} ہو (یعنی امتیازی اقتدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقتدار کی ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے متبادل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا (مثلاً ہارمونی سرکش کی ہیملٹنی، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً مستثنیٰ چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نہایت زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ درحقیقت یہ مستثنیٰ ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہر مثنیٰ متالب کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مثنیٰ عامل کے معمول پر لانے کے متبادل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقتدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی \hat{Q} کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی مقدار q ہو) اور ^{۳۰}

$$\langle f | \hat{Q} f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle$$

ہو (\hat{Q} ہر مشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہذا اس کو عمل سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل عمل مخلوط جوڑی دار ہے) (ساوا 6.3) لہذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہوگا۔ تاہم $\langle f | f \rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہوگا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرہ کی متابل مشاہدہ کی پیشکش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: انفرادی امتیازی مقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ ساتھ مندرج کریں \hat{Q} ہر مشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے)۔ اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f | g \rangle = 0$ ہوگا۔

□

یہی وجہ ہے کہ لامستثنائی چپکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی مقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی متابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انخطاطی حالات ($q' = q$) کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیسا) امتیازی مقدار رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی مقدار والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۳.۷-۱) اور ہم گرام شد ترکیبے عمودیتے! (سوال ۱A4) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک

^{۳۰} یہ وہ موقع ہے جہاں ہم مندرج کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

اخطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں اخطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کو انٹرمیکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فورسز کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اساس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنای بعدی سمتی فضا میں ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامستثنای بعدی فضاوں تک وسعت نہیں دی جاسکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کو انٹرمیکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہذا (ذیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مشی عاملین پر اس کو مطلق شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: متبادل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔^{۳۲}

سوال ۳.۷:

ا. فرض کریں کہ عامل \hat{Q} کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ ان خود \hat{Q} کا امتیازی تفاعل ہوگا اور اس کا امتیازی قدر q ہوگا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^x$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل d^2/dx^2 کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک دوسرے جیسا ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہر مشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

۳.۳.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۱۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

^{۳۲} چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامستثنای چیکورکواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں متبادل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

مثلاً: فرض کریں کہ p امتیازی متدر اور $f_p(x)$ امتیازی تقاسم ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع مکمل نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تقاسمات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی افتدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۳۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$(۳.۳۲) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۳۳) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیٹر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو ڈیراک معیاری عمودیت^{۳۳} کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تقاسمات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب مکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (مربع مکمل) تقاسم $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۴) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

پھیلاؤ عددی سر (جواب تقاسم $c(p)$ ہوگا) کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۵) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p-p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ پھیلاؤ (مساوات ۳.۳۲) درحقیقت ایک فورسز تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائنس ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (3.36)$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ \hat{p} کا کوئی بھی امتیازی تفاعل لمبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) تدریجی ”مضافات“ میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ بعد کی تفسیر اور پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔^{۳۳}

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی متدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$xg_y(x) = yg_y(x) \quad (3.37)$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $x = y$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل عمل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

^{۳۳}غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ ناصرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے فتاویٰ ہوتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں ”مضافات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کاپٹ (مستانی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ لمبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا \hat{p} کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ لمبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی حبز کو رد کیا گیا۔ (جب تک f لمبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب \hat{p} کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی متدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی متدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل \hat{p} کا امتیازی متدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل \hat{p} کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جاتے ہیں جس میں \hat{p} ہر مشی ہو۔

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تفاعلات مربع مکمل نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(۳.۳۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$(۳.۳۹) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۰) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(۳.۴۱) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۲) \quad c(y) = f(y)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فورسیر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہر مٹی عامل کا طیف استمراری ہو (لہذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y ، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب مکمل ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی سر تعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (مستثنیٰ چکور کٹوں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۱۰: کیا لامستثنیٰ چکور کٹوں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

۳.۴. متعمم شمارتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی قابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متعمم شمارتی مفہوم^{۳۵} پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکن نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے قابل بناتی ہے۔ متعمم شمارتی مفہوم اور شرودنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقا کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انٹرمیکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شمارتی مفہوم: حال $\Psi(x, t)$ میں ایک ذرے کی ایک قابل مشاہدہ $Q(x, P)$ کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$ کی کوئی ایک امتیازی مقدار دے گی۔ اگر \hat{Q} کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی مقدار q_n کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔} \quad (۳.۴۳)$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی مقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سعت dz میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔} \quad (۳.۴۴)$$

پیمائشی عمل کے بن تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم^{۳۶} ہوتا ہے۔^{۳۷}

شمارتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (۳.۴۵)$$

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو باآسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔^{۳۸}

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x)^* \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۶)$$

generalized statistical interpretation^{۳۵}
collapse^{۳۶}

^{۳۷} استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد دو واہ میں، پیمائشی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود وسعت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔
^{۳۸} دھیان رہے کہ تاہم وقت، جو یہاں مسئلہ نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں $c_n(t)$ لکھنا چاہیے۔

کافی طور پر ” Ψ میں f_n کی مقدار“ کو c_n ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش Q کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال Ψ میں ” f_n کی مقدار“ پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت $|c_n|^2$ ہوگی۔ متعمم شماریاتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔^{۳۹}

ہاں (تمام ممکن نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۷)$$

جو یقیناً تفعل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \quad (۳.۴۸)$$

اسی طرح تمام ممکن امتیازی اقدار کو انفرادی طور پر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے Q کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۴۹)$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle \quad (۳.۵۰)$$

جسے $\hat{Q} f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n'n} \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۵۱)$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آرہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چومامارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال Ψ میں ایک ذرے کے لیے x کی پیمائش لازماً

^{۳۹} یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ ”اس ذرے کا حال f_n میں پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے۔“ یہاں تک بالکل عطا ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال Ψ میں ہے۔ ہاں Q کی پیمائش سے قیمت q_n کے حصول کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفعل موج f_n پر مہم دم کرتی ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال Ψ میں ہے، اس کا Q کی پیمائش کے بعد حال f_n میں ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی تدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد y متغیر x کا امتیازی تدر ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل $\delta(x - y) = g_y(x)$ ہوگا۔ ظاہر ادرج ذیل ہوگا

$$(۳.۵۲) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سمت dy میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y, t)|^2$ ہوگا جو ٹھیک اصل شرابیاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کی ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۳) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج پکارا اور $\Phi(p, t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کا فورسٹر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فورسٹر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۵۴) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۵) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متمم شرابیاتی مفہوم کے تحت سمت dp میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۶) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ذیل تفاعل کنواں $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$(۳.۵۷) \quad \Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکت کی فضا تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

momentum space wave function*

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۱۱: ہارمونی مرتبہ کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فضا تقاضا عمل موج $\Phi(p, t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے p کی پیش کش کا کلاسیکی سرعت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”تقسیم عمل حائل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$(۳.۵۸) \quad \langle x \rangle = \int \Phi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp.$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left(\frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل متعام $i\hbar \partial / \partial p$ ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۹) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگر چاہیں)۔ عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا۔

۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتنا خوب رکھیں۔

۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ A کے لیے درج ذیل ہوگا (ساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ B کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۰) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

اب کسی بھی مخلوط عدد z کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۱) \quad |z|^2 = [(\text{حقیقی}(z))]^2 + [(\text{خیالی}(z))]^2 \geq [(\text{خیالی}(z))]^2 = \left[\frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$$

یوں $z = \langle f | g \rangle$ لیتے ہوئے

$$(۳.۲۲) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن $\langle f | g \rangle$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} - \hat{A} \langle B \rangle - \hat{B} \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} \Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g | f \rangle = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

لہذا

$$\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle = \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle \hat{B} \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقابلہ ہے (مسوات ۲.۴۸)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (۳.۶۳)$$

یہ اصول عدم یقینیت^{۴۱} کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہر مشی عاملین کے مقابل میں بھی i کا بذریعہ پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود i کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔^{۴۲}

مشال کے طور پر، فرض کریں مقام ($\hat{A} = x$) پہلا اور معیار حرکت ($\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$) دوسرا تابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مسوات ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۴)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو تابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر مقلوب ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگے قابل مشاہدہ^{۴۳} کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگے قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگے (مقلوب) قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔^{۴۴}

مشال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا z جزو باہمی ہم آہنگے قابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی اقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار

uncertainty principle^{۴۱}

^{۴۲} یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ دو ہر مشی عاملین کا مقابلہ از خود متضاد ہر مشی ($\hat{Q}^+ = -\hat{Q}$) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۶)۔

incompatible observables^{۴۳}

^{۴۴} یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر مقابلہ تابلوں کو بسکوقت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک دوسرے جیسی میثابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہر مشی تابلوں کو بسکوقت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۵.۱ دیکھیں۔

حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا امتیام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انٹرم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماراتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا امتیام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا امتیام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فورسٹر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن امتیام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔^{۳۵} مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر متمثل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً متائب ممکن ہوگا جب دونوں متابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۳:

۱. درج ذیل مداخل مقلب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (۳.۶۵)$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے پر درج ذیل ہوگا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx} \quad (۳.۶۶)$$

سوال ۳.۱۴: امتیام ($A = x$) میں عدم یقینیت اور توانائی ($B = p^2/2m + V$) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

^{۳۵} جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) x کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود p کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے فوٹان اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے فتابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا امتیام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر \hat{P} اور \hat{Q} کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $[\hat{P}, \hat{Q}] f = 0$ ہوگا۔

۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرقتش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$ کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۶۰ اور مساوات ۳.۶۱۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ Ψ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = c f(x)$ ، جہاں c کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۱ میں z کے حقیقی جز کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 = \text{حقیقی}(z)$ ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle_{\text{حقیقی}} = \langle c f|f \rangle_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f \rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل c لازمًا حلی خالی ہوگا؛ جسے ہم ia لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$(3.62) \quad g(x) = i a f(x), \quad z \text{ حقیقی}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(3.68) \quad \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = i a (x - \langle x \rangle) \Psi$$

جو متغیر x کے تفاعل Ψ کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$(3.69) \quad \Psi(x) = A e^{-a(x - \langle x \rangle)^2 / 2\hbar} e^{i \langle p \rangle x / \hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ درحقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔^{۳۶}

سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۸ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ مستقلات ہیں۔

^{۳۶} دھیان رہے کہ صرف Ψ کو x کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقلات“ a ، A ، $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ Ψ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتداد غوی کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحے پر تفاعل موج x کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحے پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔

۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۰)$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لا پرواہی سے Δx (متغیر x کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۷۰ کی طرح **توانائی و وقت اصول عدم یقینیت** درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۱)$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں x اور t (بلکہ ct) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں p اور E (بلکہ E/c) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۱ اور مساوات ۳.۷۰ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شرودنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ t اور x کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفسیقی مساوات t میں یک رتی جبکہ x میں دور رتی ہے)، اور مساوات ۳.۷۰ قطعاً مساوات ۳.۷۱ مراد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی فابری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متبادل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاعلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو Δt ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متبادل مشاہدہ $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنجر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \hat{H}\Psi | \hat{Q}\Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{Q}\hat{H}\Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب \hat{H} ہر مشی ہے لہذا $\langle \hat{H}\Psi | \hat{Q}\Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H}\hat{Q}\Psi \rangle$ اور یوں اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۲) \quad \frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۱۷.۱۳ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا،^{۳۸} یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقابلہ تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر \hat{H} اور \hat{Q} آپس میں متبادل ہوں، تب $\langle Q \rangle$ مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے Q بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۳) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ Q صریحاً t کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2i} \hbar \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \left(\frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right|$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$(۳.۷۳) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d\langle Q \rangle / dt|}$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۴) \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

^{۳۸} وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$ ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حواسطہ ایک ایسے ہارمونی سر تعیش کی محنتی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقباس پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجب حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبے یا کم ہوتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں Δt کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا Δt اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ میں Q کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص Δt اس قابل مشاہدہ Q پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی ΔE کی صورت میں تمام قابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکساں طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (ساوا ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر a, b, ψ_1 اور ψ_2 حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar / (E_2 - E_1)$ ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً $\geq \hbar/2$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

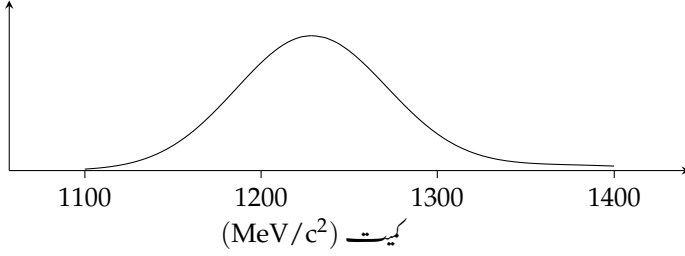
مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موتی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔ □

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔ □



شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔



شکل ۳.۲: کیت Δ کی پیمائشوں کی مستطیلی ترمیم (مثال ۳.۷)۔

مثال ۳.۷: ذرہ Δ تقریباً 10^{-23} سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیت تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232 \text{ MeV}/c^2$ پر اور چوڑائی تقریباً $120 \text{ MeV}/c^2$ ہوگی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی (mc^2) کیوں بعض اوقات 1232 سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی حائل کے بنائے جی نہیں کیوں کہ

$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2} \text{ MeV} \right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$ ۔ یوں کیت میں پھیلاؤ انتہائی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت احبازت دیتا ہے؛ انتہائی کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔^{۴۹} □

ان مثالوں میں ہم نے حبزو Δt کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مسرہ طول موج تھتا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مسرہ دورانیہ تھتا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک

^{۴۹} حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ 10^{-23} سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسیتی ترمیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق اراٹ رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ مندرجہ کریں کہ Δ تقریباً ایک پروٹان (10^{-15} m) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً 10^{-23} سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ مندرجہ کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔

غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں Δt اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنیادی میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی ΔE ”ادھار“ لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar / (2\Delta E)$ کے اندر ”واپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی بڑی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی جائز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹم میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی عنایت استعمال کے باوجود نتائج زیادہ عنایت نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱: درج ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷۲ کی اطلاق کریں۔

۱. $Q = 1$ ب. $Q = H$ ج. $Q = x$ د. $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲۷، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

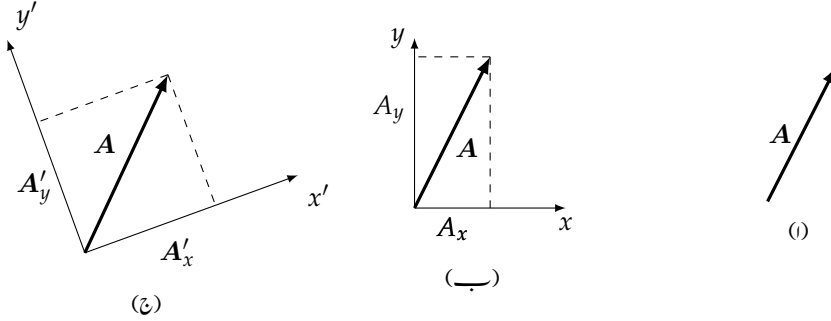
سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف σ_x اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تقاضا عمل موج اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کہیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف σ_x ، σ_H اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۲۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کہیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ متقابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۳ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

۳.۶ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ A پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ x اور y محدد کا ایک کارتیسی نظام متائم کر کے اس پر سمتیہ A کے اجزاء: $A_x = \hat{i} \cdot A$ اور $A_y = \hat{j} \cdot A$ وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام متائم کرے جس کے محدد x' اور y' ہوں؛ وہ سمتیہ A کے اجزاء $A'_x = \hat{i}' \cdot A$ اور $A'_y = \hat{j}' \cdot A$ پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس $(\{\hat{i}, \hat{j}\})$ اور $(\{\hat{i}', \hat{j}'\})$ کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ از خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی متائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔



شکل ۳.۳: (i) سمتیہ A ، (ب) xy محددے لحاظ سے A کے اجزاء، (ج) $x'y'$ محددے لحاظ سے A کے اجزاء

یہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ $|\psi(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو ”باہر بلسرٹ فنکشن“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفاعل معام کی اساس میں $|\psi\rangle$ کی پھیلاؤ کا عددی سرموجی تفاعل عمل $\Psi(x, t)$ ہوگا:

$$(۳.۷۵) \quad \Psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle$$

جہاں \hat{x} کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت x ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں $|\psi\rangle$ کی پھیلاؤ، معام و معیار حرکت موجی تفاعل $\Phi(p, t)$ ہے:

$$(۳.۷۶) \quad \Phi(p, t) = \langle p | \psi(t) \rangle$$

جہاں \hat{p} کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت p ہے کو سمتیہ $|p\rangle$ ظاہر کرتا ہے۔^{۵۰} ہم $|\psi\rangle$ کے پھیلاؤ کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف مندرج کر رہے ہیں):

$$(۳.۷۷) \quad c_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle$$

جہاں \hat{H} کے n ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $|n\rangle$ ظاہر کرتا ہے؛ مساوات ۳.۴۶ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات Ψ اور Φ ، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی

^{۵۰}میں اس کو g_x (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس معام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھڑکا رہا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ بلسرٹ فنکشن کو، x پر، بطور مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس معام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتیہ فنکشن سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
^{۵۱}معمانی فنکشن میں یہ $f_p(x)$ ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ (3.48) \quad &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)\end{aligned}$$

(متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$(3.49) \quad |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$ کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \\ (3.50) \quad |\beta\rangle &= \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے}\end{aligned}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قابلِ ارکان** ^{۵۲} ^{۵۳}

$$(3.51) \quad \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۴۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(3.52) \quad \sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle$$

یا، سمتیہ $|e_m\rangle$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$(3.53) \quad \sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(3.54) \quad b_m = \sum_n Q_{mn} a_n$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متالپی ارکان معلومات منراہم کرتے ہے۔

^{۵۲} میں مندرجہ کرنا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں n استمراری ہوگا اور مجموعہ کی جگہ نکلائے ہوں گے۔

^{۵۳} matrix elements

^{۵۴} یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”فالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامتناہی ہوگی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہو گا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد مستثنائی عدد (N) ہو گا۔ سمتیہ $|\mathfrak{H}(t)\rangle$ ایسی صورت میں N ابعادی سمتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، (N) اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عاملین $(N \times N)$ سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامستثنائی آبادی سمتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حلقی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۸.۳: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔^{۵۵}

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathfrak{H}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہو گا جس میں}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مشی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں g اور h حقیقی مستقل ہیں۔ اگر $(t = 0)$ پر یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت t پر اس کا حال کیا ہو گا؟

حل: (تابع وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathfrak{H}\rangle = H |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۵)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شرودنگر

$$H |\mathfrak{H}\rangle = E |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۶)$$

کے حل سے ابتدا کرتے ہیں، یعنی ہم H کی امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی افتدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h - E & g \\ g & h - E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h - E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h - E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

^{۵۵} یہاں ”مساوات“ کی نشان دہی سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علامت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں $(h + g)$ اور $(h - g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm\alpha$$

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathfrak{z}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathfrak{z}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathfrak{z}_{+}\rangle + |\mathfrak{z}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_{\text{nt}}t/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathfrak{z}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(h+g)t/\hbar} |\mathfrak{z}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\mathfrak{z}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \left[e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t = 0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو^{۵۶} کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ الیکٹران نیوٹرینو^{۵۷}، اور $|2\rangle$ میوون نیوٹرینو^{۵۸} کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں خلاف وتر جزو (g) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میون نیوٹرینو^{۵۹} میں اور میون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

ڈیراک نے اندرونی ضرب $\langle \alpha | \beta \rangle$ میں براکٹ^{۵۹} کی علامت کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کر کے پہلے حصہ کو برا^{۶۰}، $|\alpha\rangle$ ، اور دوسرے حصے کو کٹے^{۶۱}، $|\beta\rangle$ کا نام دیا۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ

^{۵۶} neutrino oscillations

^{۵۷} electron neutrino

^{۵۸} muon neutrino

^{۵۹} انگریزی میں قوسین کو براکٹ کہتے ہیں۔

^{۶۰} bra

^{۶۱} ket

اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ جوڑنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہوگا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک برا کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) ایک تفاعلی فضا میں برا کو مکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f | = \int f^* [\dots] dx$$

جہاں چکور قوسین $[\dots]$ میں وہ تفاعل پر کیا جانے گا جو برا کے دائیں ہاتھ کٹ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنیٰ بعدی سمتیہ فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی برا ایک سمتیہ صف

$$\langle \alpha | = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (3.88)$$

ہوگا۔ تمام برا کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتیہ فضا حاصل ہوگا جس کو **دوہری فضا**^{۱۲} کہتے ہیں۔

برا کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (3.89)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے ساتھ ساتھ ”پایا جاتا ہو“:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle \alpha | \beta \rangle |\alpha\rangle;$$

ہم اس کو $|\alpha\rangle$ کے احاطہ کیے گئے ایک بعدی ذیلی فضا پر **تخلیل**^{۱۳} کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn} \quad (3.90)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = 1 \quad (3.91)$$

^{۱۲} dual space
^{۱۳} projection operator

(جو عامل مشاثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاؤ کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n | \alpha \rangle = |\alpha\rangle \quad (۳.۹۲)$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z') \quad (۳.۹۳)$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1 \quad (۳.۹۴)$$

مسوات ۳.۹۱ اور مسوات ۳.۹۲ کمیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تحلیل یکے کا قیض^{۱۳} ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہوگا۔ \hat{P} کے امتیازی امتداد تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ کٹ $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کو (دوہری اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle \alpha | \beta \rangle$ اور $\langle \beta | \alpha \rangle$ تلاش کریں اور $\langle \beta | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $|\alpha\rangle \langle \beta| \equiv \hat{A}$ کے نوار کان متالب تلاش کر کے متالب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مشی ہے؟

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|)$$

جہاں $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ معیاری عمودی اساس اور E ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی امتداد اور $|1\rangle$ اور $|2\rangle$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ امتیازی تقاضا تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے \hat{H} کا متالب **H** کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل \hat{Q} کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ \hat{Q} کو اس کے طیفی تحلیل^{۶۵}

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: لیہانڈر کثیر رکناویا۔ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تقاضات $1, x, x^2$ اور x^3 کو گرام وشمڈ طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال 4A. دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پچپان پائیں؛ (معیاری عمود زنی کے علاوہ)^{۶۶} لیہانڈر کثیر رکناویا ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک خلاف ہر مشی^{۶۷} (یا مخرف ہر مشی^{۶۸}) عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

(۳.۹۵)

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$$

ا. دکھائیں کہ خلاف ہر مشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشی عاملین کا مقابلہ خلاف ہر مشی ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشی عاملین کے مقابلہ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳.۲۷: ترتیبی پیمائش^{۶۹}: متابل مشاہدہ A کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{A} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ψ_1 اور ψ_2 ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب a_1 اور a_2 ہیں، پائے جاتے ہیں۔ متابل مشاہدہ B کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{B} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ϕ_1 اور ϕ_2 اور بالترتیب امتیازی اقدار b_1 اور b_2 ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

^{۶۵}spectral decomposition

^{۶۶}لیہانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کونسی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی جبر و ضربی یوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تقاضات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بدقسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

^{۶۷}anti-hermitian

^{۶۸}skew-hermitian

^{۶۹}sequential measurements

۱. متابل مشاہدہ A کی پیمائش a_1 قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فوراً) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب. اب اگر B کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. متابل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ a_1 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳۰۲۸: لامتناہی چکور کنواں کے n وہیں ساکن حال کی معیار حرکت۔ ولفن تعامل موج $\Phi_n(p, t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p, t)|^2$ اور $|\Phi_2(p, t)|^2$ کو p کے تعامل کے طور پر ترسیم کریں (تسا $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p, t)$ کو استعمال کرتے ہوئے p^2 کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۳۰۲۹ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳۰۲۹: درج ذیل تعامل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں n کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تعامل خالص سائنس ہے (جس کا طول موج λ ہے) تاہم چونکہ یہ تعامل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سمت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت ولفن تعامل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x, 0)|^2$ اور $|\Phi(p, 0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفر کے بیچ) چوڑائیاں ω_x اور ω_p تعین کریں۔ دیکھیں کہ $\omega_x \rightarrow \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟ ω_x اور ω_p کو Δx اور Δp کی اندازہ قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ σ_p کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنا ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

سوال ۳۰۳۰: درج ذیل مندرج کریں

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں۔

۱. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے A تعین کریں۔

ب. (لمحہ $t = 0$ پر) $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ_x تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت ولفن تعامل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p, 0)$ استعمال کرتے ہوئے (لمحہ $t = 0$ پر) $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ اور σ_p کا حساب کریں۔

ه. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: مسئلہ وریل۔ درج ذیل مساوات ۳.۷۲ کی مدد سے دکھائیں

$$(۳.۹۶) \quad \frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

جہاں T حرکی توانائی ($H = T + V$) ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(۳.۹۷) \quad 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

اس کو مسئلہ وریل کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۱۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau / \pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x, 0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x, t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کا تنفس عمل موج $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2} [\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی چپاچپ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالبی ارکان $\langle n|x|n' \rangle$ اور $\langle n|p|n' \rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالبی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستثنائی) متالب \mathbf{X} اور \mathbf{P} تشکیل دیں۔ دکھائیں کہ اساس اساس میں $\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{X}^2$ وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جسٹری جواب:

$$(۳.۹۸) \quad \langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1})$$

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک دوسرے جتنے احتمال کے ساتھ، $\hbar\omega (1/2)$ یا $\hbar\omega (3/2)$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p \rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت کیا ہو گی؟ اگر لحد $t = 0$ پر اس کی قیمت (یعنی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3

ہارمونی مرتعش کے اتالی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ($\psi_n(x) = |n\rangle$ ، مساوات ۲.۶۷) میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد ($\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$) پر ٹیختا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں

معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x \sigma_p = (2n + 1)\hbar/2$ ہوگا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں اتانے حالات^۱ کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقیل^۲ کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی و تدر α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔)

۱. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مشال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ a_- کا ہر مشی جوڑی دار a_+ ہے۔ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہوگا۔

ب. σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتانے حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاؤ

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$ ۔
 ھ. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

شامل کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی a_- کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی و تدر ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتانے حال ہمیشہ اتانے حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال ($n = 0$) از خود اتانے حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی و تدر کیا ہوگا۔

^۱coherent states

^۲عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

سوال ۳.۳۶: مبسوط اصول عدم یقینیت۔ متمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۳) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$ ہے۔

۱. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بن کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (۳.۹۹)$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$ ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۱ میں z کا حقیقی جزو $\text{Re}(z)$ جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۹ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول غیر اہم ہوگا؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل متابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

۱. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیس ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیس ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل متالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متابل مشاہدہ A اور B کو درج ذیل متالب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں ω ، λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

۱. \mathbf{H} ، \mathbf{A} اور \mathbf{B} کے امتیازی افتدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{D}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔ لمحہ $t=0$ پر H ، A اور B کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ t پر $|\mathcal{D}(t)\rangle$ کیا ہوگا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کی قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

۱. ایک تفاعل $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں x_0 کوئی بھی مستقل منسلک ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا \hat{p}/\hbar کو فضا میں انتقال کا پیدا کار^{۴۳} کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نمائندگی درج ذیل طاق تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شرودنگر مساوات کو $\Psi(x, t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$(۳.۱۰۰) \quad \Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} \Psi(x, t)$$

(جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا \hat{H}/\hbar کو وقت میں انتقال کا پیدا کار^۲ کہتے ہیں۔

ج. دکھائیں لمحہ $t + t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔^۳

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۲ حاصل کریں۔ اشارہ: $t_0 = dt$ لے کر dt میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

۱. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شرودنگر مساوات کو معیار حرکت فنکشن میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:

$$(e^{-ip^2t/2m\hbar} \Phi(p, 0))$$

ب. متحرک گاؤسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p, 0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p, t)$ تشکیل دیں۔ ساتھ ہی $|\Phi(p, t)|^2$ تشکیل دیں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج. Φ پر مبنی موزوں کمالات حل کرتے ہوئے $\langle p \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2 / 2m + \langle H \rangle_0$ ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاؤسی فضا ہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

generator of translation in time^۴

۵. بالخصوص $t = 0$ لے کر، t_0 کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$$

ہوگا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں Q کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ \hat{Q} کو $\Psi(x, t)$ اور $\Psi(x, t)$ میں لپیٹ کر (تاہمیت وقت کو تناسل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$ کو $\Psi(x, 0)$ اور $\Psi(x, 0)$ میں لپیٹ کر (تاہمیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موخر الذکر کو ہیبرنر نقطہ نظر کہتے ہیں۔

جوابات

فهرست

- ensemble, 15
- expectation
 - value, 7
- formula
 - De Broglie, 18
- Fourier
 - inverse transform, 62
 - transform, 62
- Frobenius
 - method, 53
- function
 - Dirac delta, 71
- generalized
 - distribution, 71
 - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 59
- generator
 - translation in space, 135
 - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
 - oscillator, 32
- Hermitian
 - conjugate, 48
- hermitian, 101
 - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
 - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
 - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
 - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
 - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 66
- energy
 - allowed, 28
 - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
 - neutrino, 127
- particle
 - unstable, 21
- polynomial
 - Hermite, 57
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- potential, 14
 - reflectionless, 92
- probability
 - density, 10
- probability current, 21
- probable
 - most, 7
- recursion
 - formula, 54
- reflection
 - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
 - formula, 59
- scattering
 - matrix, 93
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
 - Fourier, 35
 - power, 42
 - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - conjugate, 102
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
 - operators, 45
- law
 - Hooke, 41
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
 - S, 93
 - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- operator, 17
 - lowering, 45
 - projection, 128
 - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

variables
 separation of, 25
 variance, 9
 vectors, 97
 velocity
 group, 64
 phase, 64
 virial theorem, 132

 wag the tail, 55
 wave
 incident, 76
 packet, 61
 reflected, 76
 transmitted, 76
 wave function, 2
 wavelength, 18

 outer, 23
 spectrum, 104
 square-integrable, 13
 square-integrable functions, 98
 standard deviation, 9
 state
 bound, 69
 excited, 33
 ground, 33
 scattering, 69
 statistical
 interpretation, 2
 step function, 79

 theorem
 Dirichlet's, 35
 Ehrenfest, 18
 Plancherel, 62
 transformations
 linear, 97
 transmission
 coefficient, 77
 tunneling, 69, 78
 turning points, 69

 uncertainty principle, 19, 116
 energy-time, 119

- اتباتی
حالات، 133
اجباتی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹریو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینی، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انخطاطی، 104، 89
اندرونی ضرب، 98
انعکاس
شرح، 77
اوسط، 7
براء، 127
بقا
توانائی، 38
پیدا کار
تفاعل، 59
پیدا کار
فصل میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136
تجدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسل
ٹیلر، 41
طامتی، 42
فوریسر، 35
تعیین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2
- توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجباتی، 28
توقعات
قیمت، 7
جفت، 33
تفاعل، 30
حال
بکھراؤ، 69
زمینی، 33
مقید، 69
پہچان، 33
خطی الجبرا، 97
خطی تبدلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 60
دم بلانا، 95، 55
ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیگر، 34
ذره
غیر مستحکم، 21
رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85
ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

- فصل
سیرونی، 23
دوہری، 128
فورسٹر
الٹ بدل، 62
بدل، 62
قابل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
قابل
بچھراو، 93
ترسیل، 94
قابل ارکان، 125
قانون
ہک، 41
قواب، 98
کٹ، 127
کشادہ
احتمال، 10
کشیر رکنی
ہرمانٹ، 57
کلیہ
ڈی پروگلی، 18
روڈریگیس، 59
کوپن، ہیگن مفہوم، 4
گرام شمد
ترکیب عودیت، 106
متعمم
تفعل، 71
تقسیم، 71
متعمم شماریاتی مفہوم، 111
مختل
سب سے زیادہ، 7
مخفیہ، 14
بالا العکاس، 92
مربع منکامل، 13
مربع منکامل تفعلات، 98
سرنگ زنی، 69، 78
سگر، 15
سمتیات، 97
سوچ
انکاری، 4
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سوڈیم، 23
سیڑھی
عاملین، 45
سیڑھی تفعل، 79
شروڈنگر
غیر تابع وقت، 27
شروڈنگر مساوات، 2
شروڈنگر نقطہ نظر، 136
شریک عمل، 102
شماریاتی مفہوم، 2
شوارز عدم مساوات، 99
طاق، 33
طول موج، 18
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
عامل
تخلیل، 128
تقلیل، 45
رفعت، 45
عدم تعین، 2
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عتدہ، 34
علیحدگی متغیرات، 25
عودی، 100، 34
معیاری، 34
غیر مسلسل، 105
فہرست
ترکیب، 53

- ہارمونئی
 ہارمونئی، 32
 مسئلہ
 ہارمونئی، 32
 مسئلہ
 18
 پلانشرال، 62
 ڈرشلے، 35
 مسئلہ وریل، 132
 معمول زئی، 13
 معمول شدر، 100
 معیار حرکت، 16
 معیار حرکی فصائفا عمل موج، 113
 معیار عمودی، 34
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100
 متقلب، 43
 متقلبت
 باضابطہ رشتہ، 44
 مقلوب، 43
 مکمل، 100:34
 منہدم، 111:4
 موج
 آمدی، 76
 ترسیلی، 76
 منعکس، 76
 موجی اکٹھ، 61
 میون نیوٹرینو، 127
 واپسی نقساط، 69
 وسطانیہ، 7
- ہارمونئی
 ہارمونئی، 32
 ہر مشی، 101
 جوڑی دار، 48، 102
 خلاف، 130
 منحرف، 130
 ہلبرٹ فصا، 99
 ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
 ہیملٹنی، 27
 یک طاقتی، 129