کوانٹم میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

۱ تفاعل موج ۱
۱.۱ مساوات شروڈنگر ۱
۱.۲ شماریاتی مفہوم ۲
۱.۳ احتمال ۵
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات ۵
۱.۳.۲ استمراری متغیرات ۹
۱.۴ معمول زنی ۱۲
۱.۵ معیار حرکت ۱۵
۱.۶ اصول عدم یقینیت ۱۸

۲ غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر ۲۵
۲.۱ ساکن حالات ۲۵
۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں ۳۱
۲.۳ ہارمونی مرتعش ۴۲
۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب ۴۴
۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب ۵۳
۲.۴ آزاد ذرہ ۶۰
۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ ۷۰
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات ۷۰
۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں ۷۲
۲.۶ متناہی چوکور کنواں ۸۱

۳ قواعد و ضوابط ۹۷
۳.۱ ہلبرٹ فضا ۹۷
۳.۲ قابل مشاہدہ ۱۰۱
۳.۲.۱ ہرمشی عاملین ۱۰۱

۳.۲.۲ تعیین حال ۱۰۳
۳.۳ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل ۱۰۵
۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف ۱۰۶
۳.۳.۲ استمراری طیف ۱۰۸
۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم ۱۱۱
۳.۵ اصول عدم یقینیت ۱۱۵
۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت ۱۱۵
۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ ۱۱۸
۳.۵.۳ توانائی ووقت اصول عدم یقینیت ۱۱۹
۳.۶ ڈیراک علامتیت ۱۲۳

۴ تین ابعادی کوانٹم میکانیات ۱۳۷
۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر ۱۳۷
۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات ۱۳۹
۴.۱.۲ زاویائی مساوات ۱۴۱
۴.۱.۳ رداسی مساوات ۱۴۶
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر ۱۵۰
۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج ۱۵۱
۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف ۱۶۱
۴.۳ زاویائی معیار حرکت ۱۶۴
۴.۳.۱ امتیازی اقدار ۱۶۴
۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات ۱۷۰
۴.۴ چکر ۱۷۳
۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران ۱۸۱
۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ ۱۸۷

۵ متماثل ذرات ۲۰۵
۵.۱ دوذروی نظام ۲۰۵
۵.۱.۱ بوسن اور فرمیان ۲۰۷
۵.۱.۲ قوت مبادلہ ۲۱۰
۵.۲ جوہر ۲۱۵
۵.۲.۱ ہیلیم ۲۱۶
۵.۲.۲ دوری جدول ۲۱۹
۵.۳ ٹھوس اجسام ۲۲۳
۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس ۲۲۳
۵.۳.۲ پٹی دار ساخت ۲۲۹
۵.۴ کوانٹائی شماریاتی میکانیات ۲۳۶
۵.۴.۱ ایک مثال ۲۳۶
۵.۴.۲ عمومی صورت ۲۳۹

۵.۴.۳ سب سے زیادہ محتمل تشکیل ۲۴۲
۵.۴.۴ α اور β کی طبیعی اہمیت ۲۴۵
۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف ۲۴۹

۶ غیر تابع وقت نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی ۲۵۵
۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ ۲۵۷
۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں ۲۶۱
۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۶۲
۶.۲.۱ دوپڑتا انحطاط ۲۶۲
۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط ۲۶۷
۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت ۲۷۲
۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح ۲۷۳
۶.۳.۲ چکر ومدار ربط ۲۷۶
۶.۴ زیمان اثر ۲۸۱
۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر ۲۸۲
۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر ۲۸۳
۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر ۲۸۵
۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ ۲۸۷

۷ تغیری اصول ۲۹۷
۷.۱ نظریہ ۲۹۷
۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال ۳۰۲
۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردارِیہ ۳۰۷

۸ ونزل وکرامرز وبرلوان تخمین ۳۱۷
۸.۱ کلاسیکی خطہ ۳۱۸
۸.۲ سرنگزنی ۳۲۳
۸.۳ کلیات پیوند ۳۲۶

۹ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۳۹
۹.۱ دوسطحی نظام ۳۴۰
۹.۱.۱ مضطرب نظام ۳۴۰
۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۴۳
۹.۱.۳ سائن نما اضطراب ۳۴۵
۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب ۳۴۸
۹.۲.۱ برقناطیسی امواج ۳۴۸
۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود با خود اخراج ۳۴۹
۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب ۳۵۰

۹.۳ خود باخود اخراج ۳۵۲
۹.۳.۱ آئنسٹائن A اور B عددی سر ۳۵۲
۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات ۳۵۴
۹.۳.۳ قواعد انتخاب ۳۵۷

۱۰ حرارت ناگزر تخمین ۳۶۷
۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزر ۳۶۷
۱۰.۱.۱ حرارت ناگزر عمل ۳۶۷
۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت ۳۷۰
۱۰.۲ ہیئت بیری ۳۷۵
۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل ۳۷۵
۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت ۳۷۷
۱۰.۲.۳ اہارونووبوہم اثر ۳۸۲

۱۱ بکھراو ۳۹۱
۱۱.۱ تعارف ۳۹۱
۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو ۳۹۱
۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراو ۳۹۵
۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ ۳۹۶
۱۱.۲.۱ اصول وضوابط ۳۹۶
۱۱.۲.۲ لایا عمل ۳۹۹
۱۱.۳ ینتقلات حیط ۴۰۲
۱۱.۴ بارن تخمین ۴۰۵
۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکملی روپ ۴۰۵
۱۱.۴.۲ بارن تخمین اوّل ۴۰۹
۱۱.۴.۳ تسلسل بارن ۴۱۴

۱۲ پس نوشت ۴۱۷
۱۲.۱ آئنسٹائن پوڈلسکیوروزن تضاد ۴۱۸
۱۲.۲ مسئلہ بل ۴۱۹
۱۲.۳ مسئلہ کلیہ ۴۲۴
۱۲.۴ شرودنگر کی بلی ۴۲۵
۱۲.۵ کوانٹم زینو تضاد ۴۲۶

جوابات ۴۲۹

ا خطی الجبرا ۴۳۱
ا.۱ سمتیات ۴۳۱
ا.۲ اندرونی ضرب ۴۳۱
ا.۳ قالب ۴۳۲

ا.۴ تبدیلی اساس ۴۳۲
ا.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار ۴۳۲
ا.۶ ہرمشی تبادلے ۴۳۲

فرہنگ ۴۳۳

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ٦

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

٦.١ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب

٦.١.١ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر:

$$H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0 \tag{٦.١}$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

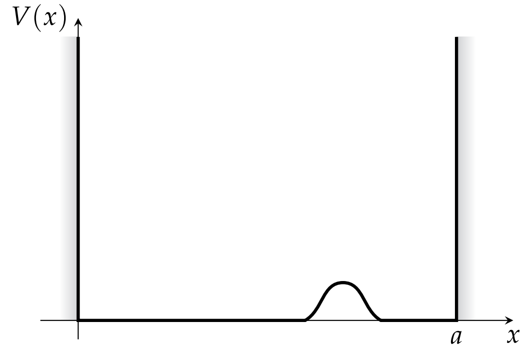
$$\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = \delta_{nm} \tag{٦.٢}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑ ڈال کر؛ شکل ٦.١) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{٦.٣}$$

تاہم ہماری خوش قسمتی کے علاوہ ایسی کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں۔ **نظریہ اضطراب**، غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر، قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے۔ ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ:

$$H = H^0 + \lambda H' \tag{٦.٤}$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

لکھ کر آغاز کرتے ہیں، جہاں H' اضطراب ہے (زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے)۔ ہم وقتی طور پر λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں؛ بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی، اور H اصل ہیملٹنی ہو گی۔ اگلے قدم میں، ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots \tag{۶.۵}$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots \tag{۶.۶}$$

یہاں n ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اول رتبی تصحیح** کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اول رتبی تصحیح** کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے؛ اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبی تصحیح ہوں گی، وغیرہ۔ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$(H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$
$$= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$

یا (λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$H^0\psi_n^0 + \lambda(H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0) + \lambda^2(H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1) + \cdots$$
$$= E_n^0\psi_n^0 + \lambda(E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0) + \lambda^2(E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0) + \cdots$$

کمتر رتبہ (λ^0) کی صورت میں اس سے $H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے، جو نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱)۔ رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہو گا۔

$$H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0 \tag{۶.۷}$$

---

[1] ہمیشہ کی طرح، طاقتی تسلسل پھیلاو کی یکتائی ضمانت دیتی ہے کہ ایک جیسی طاقت کے عددی سر ایک جتنے ہوں گے۔

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1 = E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0 \tag{۶.۸}$$

وغیرہ۔ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا؛ اب اس کی کوئی ضرورت نہیں لہٰذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں۔)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں (یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر تکمل لیتے ہیں)۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

تاہم H^0 ہرمشی ہے لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle$$

ہو گا، جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا۔ مزید $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہو گا۔[۲]

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \tag{۶.۹}$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے؛ بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹائی میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے۔ یہ کہتی ہے کے غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت، توانائی کی اول رتبی تصحیح ہو گی۔

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کے غیر مضطرب تفاعلات موج (مساوات ۲.۲۸) درج ذیل ہیں۔

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی "تہہ" (زمین) کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں (شکل ۶.۲)۔ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں۔

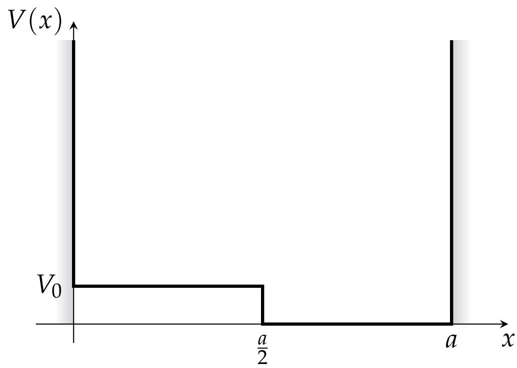
حل: یہاں $H' = V_0$ ہو گا لہٰذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہو گی۔

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|V_0|\psi_n^0\rangle = V_0\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گی؛ جی ہاں، تمام V_0 مقدار اوپر اٹھتی ہیں۔ یہاں حیرانگی کی بات صرف یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی

[۲] موجودہ سیاق و سباق میں $\langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle$ یا $\langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle$ (جہاں اضافی انتصابی لکیر شامل کی گئی ہے) لکھنے میں کوئی فرق نہیں، چونکہ ہم حال کو تفاعل موج کے لحاظ سے "نام" دیتے ہیں۔ لیکن موخر الذکر علامتی اظہار زیادہ بہتر ہے، چونکہ یہ ہمیں اس روایت سے آزاد کرتا ہے۔

شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی۔[۳] اس کے بر عکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت (شکل ۶.۳) میں درج ذیل ہو گا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے۔ یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں، تاہم اول رتبی تخمین کے نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

[۳] یہاں کوئی ی چیز لامتناہی چوکور کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے، لہٰذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہو گا۔

مساوات ۶.۹ ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے؛ تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم مساوات ۶.۷ کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے۔

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \tag{۶.۱۰}$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے، لہٰذا یہ ψ_n^1 کی غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہٰذا (کسی بھی تفاعل کی طرح) ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ:

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0 \tag{۶.۱۱}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ψ_n^1 مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتے ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha\psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے، لہٰذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں؛ ایسا ہی کرتے ہوئے مساوات ۶.۱۱ کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا۔ عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۶.۱۰ میں مساوات ۶.۱۱ پر کرتے ہوئے، اور یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب مساوات شروڈنگر (مساوات ۶.۱) کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہو گا اور ہمیں دوبارہ مساوات ۶.۹ ملتی ہے؛ اگر $l \neq n$ ہو تو

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۲}$$

ہو گا، لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0 \tag{۶.۱۳}$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انحطاطی ہو، نسب نما کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $n = m$ نہیں ہو گا)۔ ہاں اگر دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک جتنی ہوں (مساوات ۶.۱۲ کے نسب نما میں صفر پایا جائے گا) تب نسب نما ہمیں مصیبت میں ڈالتا ہے؛ ایسی صورت میں **انحطاطی نظریہ اضطراب**[۴] کی ضرورت پیش آئے گی، جس پر حصہ ۶.۲ میں غور کیا جائے گا۔

یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے۔ توانائی کی اول رتبی تصحیح، E_n^1، مساوات ۶.۹ دیتی ہے، اور تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح، ψ_n^1، مساوات ۶.۱۳ دیتی ہے۔ میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی انتہائی درست قیمتیں دیتا ہے (یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہو گی)، اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں۔

سوال ۶.۱: فرض کریں ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں δ تفاعلی موڑ:

$$H' = \alpha\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ڈالتے ہیں، جہاں α ایک مستقل ہے۔

ا. اجازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ بتائیں جفت n کی صورت میں توانائیاں کیوں مضطرب نہیں۔

ب. زمینی حال کی تصحیح، ψ_1^1، کی اتساع (مساوات ۶.۱۳) کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے۔ اب فرض کریں مقیاس لچک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے: $k \to (1+\epsilon)k$، (جس سے اسپرنگ کی لچک کم ہو گی)۔

ا. نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک قیمتیں حاصل کریں (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں۔

ب. اب مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں۔ یہاں H' کیا ہو گا؟ اپنے نتیجے کا جزو-ا کے ساتھ موازنہ کریں۔ اشارہ: یہاں کسی نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نہ ضرورت اور نہ اجازت ہے۔

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں۔ یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

(جہاں V_0 ایک مستقل جس کا بعد توانائی ہے اور a کنویں کی چوڑائی ہے) کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں۔

---

[۴] degenerate perturbation theory

ا. پہلے قدم میں، ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے، زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں۔

ب. زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کی توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمین اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں۔

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

اسی طرح بڑھتے ہوئے، ہم ψ_n^0 اور دور تبی مساوات (مساوات ۶.۸) کا اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^2\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کے ہرمشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں:

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^2\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle$$

لہٰذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ ساتھ ہی $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ ہے لہٰذا E_n^2 کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle - E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle \tag{۶.۱۴}$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = 0$$

ہو گا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۵}$$

ہو گا۔ یہ دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل موج (ψ_n^2) کی دوم رتبی تصحیح، توانائی کی سوم رتبی تصحیح، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں، لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات ۶.۱۵ تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔[۵]

سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۱ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۲ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجے کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۳.۳۳ دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں مساوات شروڈنگر کو بلاواسطہ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہیں۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں؛ یعنی، دو (یا دو سے زیادہ) منفرد حالات (ψ_a^0 اور ψ_b^0) کی توانائیاں ایک جیسی ہوں، تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہوگا، چونکہ $c_a^{(b)}$ (مساوات ۶.۱۲) اور E_a^2 (مساوات ۶.۱۵) بے قابو بڑھتے ہیں (ماسوائے اس صورت میں جب شمار کنندہ صفر ہو: $\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = 0$؛ اس پوشیدہ صورت کو ہم بعد میں استعمال کریں گے)۔ یوں انحطاطی صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

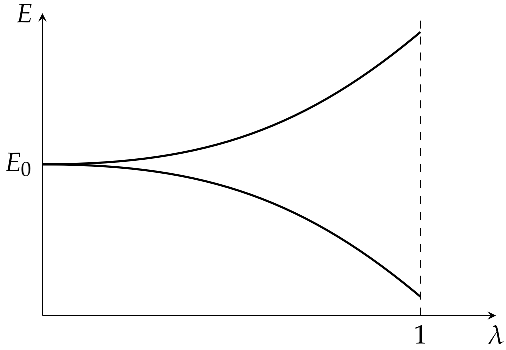
۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \tag{۶.۱۶}$$

[۵] مختصر انداز لکھائی میں $V_{mn} \equiv \langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle$، $\Delta_{mn} \equiv E_m^0 - E_n^0$ اور n ویں توانائی کی پہلی تین تصحیح درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n^1 = V_{nn}, \quad E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}}, \quad E_n^3 = \sum_{l,m\neq n}\frac{V_{nl}V_{lm}V_{mn}}{\Delta_{nl}\Delta_{nm}} - V_{nn}\sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}^2}$$



شکل ۶.۴: انحطاط کا خاتمہ بذریعہ اضطراب۔

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \tag{۶.۱۷}$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا اور اس کی امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہو گی۔

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0 \tag{۶.۱۸}$$

عام طور پر اضطراب (H') انحطاط کو "توڑے" (یا "منسوخ" کرے) گا: جیسے جیسے ہم λ کی قیمت (0 سے 1 کی طرف) بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی (شکل ۶.۴)۔ مخالف رخ چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند (یعنی صفر) کر دیں تب "بالائی" حال کا تخفیف، ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں جبکہ "زیریں" حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا، تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے کہ یہ "**موزوں**"[۶] خطی جوڑ کیا ہوں گے۔ چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے، لہٰذا ہم اول رتبی توانائیوں (مساوات ۶.۹) کا حساب نہیں کر سکتے۔

اسی لیے، ہم ان "موزوں" غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ (مساوات ۶.۱۷) میں لکھتے ہیں، جہاں α اور β قابل تغیر ہوں گے۔ ہم مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi \tag{۶.۱۹}$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \cdots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda\psi^1 + \lambda^2\psi^2 + \cdots \tag{۶.۲۰}$$

[۶] good linear combinations

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں۔ انہیں مساوات ۶.۱۹ میں ڈال کر (ہمیشہ کی طرح) λ کی ایک جیسی طاقتیں اکٹھی کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \cdots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \cdots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ (مساوات ۶.۱۸) کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے، جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0 \tag{۶.۲۱}$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_a^0|H^0\psi^1\rangle + \langle\psi_a^0|H'\psi^0\rangle = E^0\langle\psi_a^0|\psi^1\rangle + E^1\langle\psi_a^0|\psi^0\rangle$$

چونکہ H^0 ہرمشی ہے، لہٰذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ مساوات ۶.۱۷ کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط (مساوات ۶.۱۶) کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha\langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle + \beta\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \tag{۶.۲۲}$$

حاصل ہو گا جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$W_{ij} \equiv \langle\psi_i^0|H'|\psi_j^0\rangle, \quad (i,j = a,b) \tag{۶.۲۳}$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا۔

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \tag{۶.۲۴}$$

دھیان رہے کہ (اصولاً) ہمیں تمام W معلوم ہیں، چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان قالب ہیں۔ مساوات ۶.۲۴ کو W_{ab} سے ضرب دے کر، مساوات ۶.۲۲ استعمال کرتے ہوئے βW_{ab} کو خارج کر کے، درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\alpha[W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \tag{۶.۲۵}$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات ۶.۲۵ ہمیں E^1 کی مساوات دیگی۔

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \tag{۶.۲۶}$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور (مساوات ۶.۲۳ سے) جانتے ہوئے کہ $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہو گا، ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\ \right] \tag{۶.۲۷}$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے، جہاں دو جذر دو مضطرب توانائیاں ہیں۔

لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہو گا؟ ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہو گا، لہٰذا مساوات ۶.۲۲ کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات ۶.۲۴ کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہو گا۔ یہ درحقیقت عمومی نتیجہ (مساوات ۶.۲۷) میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے (مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہو گا)۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle\psi_b^0|H'|\psi_b^0\rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل ہوتے (مساوات ۶.۹)۔ یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے: حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے "موزوں" خطی جوڑ تھے۔ کیا اچھا ہوتا، اگر ہم آغاز سے ہی "موزوں" حالات جان پاتے؛ تب ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے۔ حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں۔

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہرمشی عامل ہے، جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے۔ اگر (H^0 کے انحطاطی امتیازی تفاعلات) ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں، جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں،

$$A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0 \quad \text{اور} \quad \mu \neq \nu \quad \text{ہو}$$

تب $W_{ab} = 0$ ہو گا (لہٰذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں قابل استعمال، "موزوں" حالات ہوں گے)۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے کہ $[A, H'] = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\langle\psi_a^0|[A, H']\psi_b^0\rangle &= 0\\
&= \langle\psi_a^0|AH'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'A\psi_b^0\rangle\\
&= \langle A\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'\nu\psi_b^0\rangle\\
&= (\mu - \nu)\langle\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle = (\mu - \nu)W_{ab}
\end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہٰذا $W_{ab} = 0$ ہو گا۔

سبق: اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو، ایسا ہرمشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو؛ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائیں۔ ایسے عامل کی تلاش میں ناکامی کی صورت میں آپ کو مساوات ۶.۲۷ استعمال کرنا ہو گا، جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے۔

$\square$

سوال ۶.۶: دو "موزوں" غیر مضطرب حالات

$$\psi^0_{\pm} = \alpha_{\pm}\psi^0_a + \beta_{\pm}\psi^0_b$$

لیں، جہاں $\alpha_{\pm}$ اور $\beta_{\pm}$ کو (معمول زنی تک) مساوات ۶.۲۲ (یا مساوات ۶.۲۴) تعین کرتا ہے۔ صریحاً درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\psi^0_{\pm}$ عمودی ہیں: $(\langle\psi^0_+|\psi^0_-\rangle = 0)$؛

ب. $\langle\psi^0_+|H'|\psi^0_-\rangle = 0$؛

ج. $\langle\psi^0_{\pm}|H'|\psi^0_{\pm}\rangle = E^1_{\pm}$ جہاں $E^1_{\pm}$ کی قیمت مساوات ۶.۲۷ دیتی ہے۔

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ، جس کی کمیت m ہے، ایک بند یک بعدی تار، جس کی لمبائی L ہے، پر آزادی سے حرکت کرتا ہے (سوال ۲.۴۶)۔

ا. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{2\pi inx/L}, \qquad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $(n = 0)$ کے علاوہ تمام حالات دہرے انحطاطی ہیں۔

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہے۔ (یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں ایک ٹویا پیدا کرتا ہے، گویا تار کو مروڑ کر پکڑ بنایا گیا ہو۔) مساوات ۶.۲۷ استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمل کی حدوں کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm\infty$ رکھیں۔

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کے "موزوں" خطی جوڑ کیا ہوں گے؟ دکھائے کہ ان حالات کو لے کر، مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے، اول رتبی تصحیح حاصل ہو گی۔

د. ایسا ہرمشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو، اور دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہیں جنہیں آپ نے جزو-ج میں استعمال کیا۔

۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط

گزشتہ حصہ میں انحطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا، تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶.۲۲ اور مساوات ۶.۲۴ کو ہم قالبی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{۶.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ E^1، W قالب کے امتیازی اقدار ہیں۔ مساوات ۶.۲۶ اس قالب کی امتیازی مساوات ہے، اور غیر مضطرب حالات کے "موزوں" خطی جوڑ $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم n پڑتا انحطاط کی صورت میں $n \times n$ قالب:

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle \tag{۶.۲۹}$$

کے امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ الجبرا کی زبان میں "موزوں" غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسی اساس تیار کرنا ہے جو قالب $\mathbf{W}$ کو وتری بناتی ہو۔ یہاں بھی اگر آپ ایسا عامل A تلاش کر سکیں، جو H' کا مقلوبی ہو، اور A اور H' کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر سکیں تو قالب W خود بخود وتری ہو گا، لہٰذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی۔[7] (اگر آپ کو میری دو پڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تو سوال ۶.۱۰ حل کر کے اپنی تسلی کر لیں۔)

مثال ۶.۲: تین ابعادی لامتناہی کعبی کنویں (سوال ۴.۲):

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۰}$$

پر غور کریں۔ ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$\psi^0_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a}z\right) \tag{۶.۳۱}$$

جہاں n_x، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں۔ ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں۔

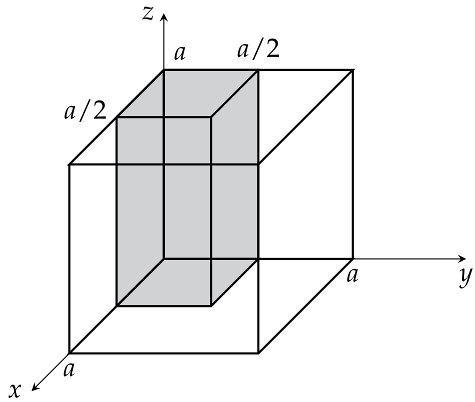
$$E^0_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{۶.۳۲}$$

دھیان رہے کہ زمینی حال (ψ_{111}) غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے۔

$$E_1^0 \equiv 3\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \tag{۶.۳۳}$$

---

[7] انحطاطی نظریہ اضطراب، در حقیقت، ہیملٹنی کے انحطاطی حصہ کو وتری بنانے کے مترادف ہے۔ قوالب کا وتری بنانا (اور مقلوبی قوالب کا بیک وقت وتری بنانا) ضمیمہ کے حصہ ا.۵ میں سکھایا گیا ہے۔



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

تاہم پہلا ہیجان حال (تہرا) انحطاطی ہے:

$$\psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211} \tag{۶.۳۴}$$

اور ان تینوں کی توانائی:

$$E_1^0 \equiv 3\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} \tag{۶.۳۵}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیں اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۶}$$

جوڈبے کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات ۶.۹ دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle\psi_{111}|H'|\psi_{111}\rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4}V_0 \end{aligned} \tag{۶.۳۷}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔

اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہو گی۔ پہلے قدم میں ہم قالب **W** تیار کرتے ہیں۔ اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں (سوائے اس بات کے، کہ ان میں

سے ایک سائن کا دلیل دگنا ہے)؛ آپ درج ذیل کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4}V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہیں۔

$$W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z$$

تاہم z تکمل صفر ہوگا (جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا)، لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z = \frac{16}{9\pi^2}V_0$$

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے۔

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \tag{۶.۳۸}$$

قالب $\mathbf{W}$ بلکہ $4\,\mathbf{W}\,/\,V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات (ضمیمہ ا.۵ کے تحت):

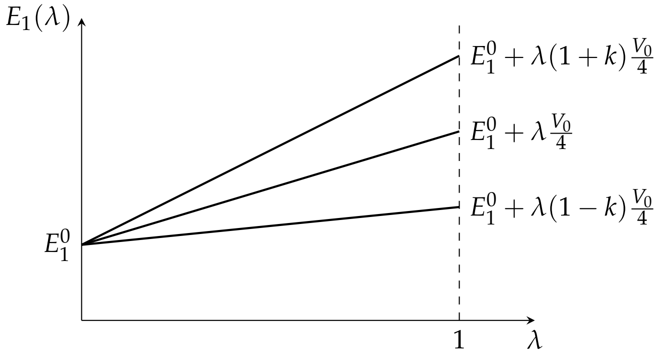
$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگی۔

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1+\kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1-\kappa \approx 0.2795$$



شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہو گا

$$E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases} \tag{۶.۳۹}$$

جہاں E_1^0 (مشترکہ) غیر مضطرب توانائی (مساوات ۶.۳۵) ہے۔ یہ اضطراب، توانائی E_1^0 کو تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ اگر ہم بھول کر اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) تینوں حالات کے لئے ایک جتنی اور $V_0/4$ کے برابر ہوتی جو در حقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے۔

مزید "موزوں" غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہوں گے

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c \tag{۶.۴۰}$$

جہاں عددی سر (α، β اور γ) قالب $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1$، $\beta = \gamma = 0$؛ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0$، $\beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$

حاصل ہوتے ہیں۔ (میں نے انہیں معمول شدہ کیا ہے۔) یوں "موزوں" حالات درج ذیل ہوں گے۔[۸]

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{۶.۴۱}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں (مساوات ۶.۳۰) میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تفاعلی "موڑا":

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4)\delta(y - a/2)\delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور (تہرا انحطاطی) اول ہیجان حال کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف "تین" خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں۔ فرض کریں قالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے، اور ϵ کوئی چھوٹا عدد $(\epsilon \ll 1)$ ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی $(\epsilon = 0)$ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں۔

ب. قالب $\mathbf{H}$ کے ٹھیک ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں۔ ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں۔

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کا جزو-ا کے ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

[۸] یہ جانتے ہوئے کہ H' کے ساتھ، x اور y کو آپس میں تبدیل کرنے والا عامل، P_{xy} مقلوب ہے، ہم اس نتیجے کو قیاساً معلوم کر سکتے تھے۔ اس کے امتیازی اقدار (زیر تبدیلی جفت تفاعلوں کے لئے) $+1$ اور (طاق تفاعلات کے لئے) -1 ہے۔ یہاں ψ_a پہلے سے جفت ہے، $(\psi_b + \psi_c)$ جفت اور $(\psi_b - \psi_c)$ طاق ہے۔ یہ فیصلہ کن نہیں ہے، چونکہ جفت حالات کا ہر ایک خطی جوڑ جفت ہو گا۔ لیکن، اگر ہم عامل Q بھی استعمال کریں، جو z کو $a - z$ منتقل کرتا ہو، اور یہ جانتے ہوں کہ ψ_a ایسا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قدر -1 ہے اور باقی دو امتیازی تفاعلات کی امتیازی قدر $+1$ ہے، ابہام دور ہو جاتا ہے۔ یہاں عاملین P_{xy} اور Q مل کر، حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں A کا کردار ادا کرتے ہیں۔

د. دو ابتدا میں انحطاطی امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریہ اضطراب سے تلاش کریں۔ ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کی اول رتبی تصحیح، قالب W کی امتیازی اقدار ہوں گی۔ میں نے اس دعوے کی وجہ یہ پیش کی کہ یہ $n = 2$ صورت کی "قدرتی" عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ ۶.۲.۱ کے قدموں پر چل کر، درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات ۶.۱۷ کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات ۶.۲۲ کے مماثل کا مفہوم قالب $\mathbf{W}$ کی امتیازی قدر مساوات لی جا سکتی ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر (حصہ ۴.۲) کے مطالعہ کے دوران ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۶.۴۲}$$

(جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولمب مخفی توانائی ہے)۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے۔ ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ زیادہ اہم **مہین ساخت**[9] ہے، جو در حقیقت دو منفرد وجوہات، **اضافیتی تصحیح**[10] اور **چکرو مدار ربط**[11]، کی بنا پر پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کے لحاظ سے مہین ساخت، α^2 جزو ضربی کم، نہایت چھوٹا اضطراب ہے، جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \tag{۶.۴۳}$$

مہین ساخت مستقل[12] کہلاتا ہے۔ اس سے بھی (مزید α جزو ضربی) چھوٹا **لیمب انتقال**[13] ہے، جو برقی میدان کی کوانٹازنی سے وابستہ ہے، اور اس سے مزید ایک رتبہ کم، **نہایت مہین ساخت**[14] کہلاتا ہے، جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول ۶.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے۔ سوال ۶.۱۱:

---

[9] fine structure
[10] relativistic correction
[11] spin-orbit coupling
[12] fine structure constant
[13] Lamb shift
[14] hyperfine structure

جدول ۱.۶: ہائیڈروجن کی بوہر توانائیوں میں تصحیح کی درجہ بندی۔

بوہر توانائی:	کارتبہ	$\alpha^2 mc^2$
مہین ساخت:	کارتبہ	$\alpha^4 mc^2$
لیمب انتقال:	کارتبہ	$\alpha^5 mc^2$
نہایت مہین ساخت:	کارتبہ	$(m/m_p)\alpha^4 mc^2$

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی (mc^2) کی صورت میں لکھیں۔

ب. (ϵ_0 ، e ، $\hbar$ اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر) مہین ساخت مستقل کی قیمت بنیادی اصول استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ تبصرہ: پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ خالص (بے بعدی) بنیادی عدد ہے۔ یہ برقناطیسیت (الیکٹران کا بار)، اضافیت (روشنی کی رفتار) اور کوانٹائی میکانیات (پلانک مستقل) کے بنیادی مستقلات کے پیچ رشتہ بیان کرتا ہے۔ اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں، یقیناً آپ کو نوبیل انعام سے نوازا جائے گا۔ البتہ میرا مشورہ ہو گا کہ اس پر زیادہ وقت ضائع نہ کریں؛ (اب تک) بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں۔

۱.۳.۶ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{۶.۴۴}$$

جس میں باضابطہ متبادل $\boldsymbol{p} \to (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہو گا۔

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{۶.۴۵}$$

تاہم مساوات ۶.۴۴ حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے؛ اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \tag{۶.۴۶}$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے (جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے، اور جس سے ہمیں فی الحال غرض بھی نہیں ہے)، جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے؛ ان کے فرق کو حرکت سے منسوب کیا جا سکتا ہے۔
ہمیں سمتی رفتار کی بجائے (اضافیتی) معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۶.۴۷}$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہو گا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1-(v/c)^2]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \tag{۶.۴۸}$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتیجہ (مساوات ۶.۴۴) دیتی ہے؛ ایک چھوٹے عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} T &= mc^2\Big[\sqrt{1+\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2} - 1\Big] = mc^2\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2 - \frac{1}{8}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^4 \cdots - 1\Big] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots \end{aligned} \tag{۶.۴۹}$$

ظاہر ہے کہ ہیملٹنی کی سب سے کم رتبی[15] اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے۔

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2} \tag{۶.۵۰}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہو گی (مساوات ۶.۹)۔

$$E_r^1 = \langle H'_r\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle\psi|p^4\psi\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\psi|p^2\psi\rangle \tag{۶.۵۱}$$

اب (غیر مضطرب حالات کے لئے) مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

$$p^2\psi = 2m(E-V)\psi \tag{۶.۵۲}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔[16]

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle(E-V)^2\rangle = -\frac{1}{2mc^2}[E^2 - 2E\langle V\rangle + \langle V^2\rangle] \tag{۶.۵۳}$$

---

[15] چونکہ ہائیڈروجن میں الیکٹران کی حرکی توانائی کا رتبہ $10\,\text{eV}$ ہے، جو اس کی ساکن توانائی $(511\,000\,\text{eV})$ سے بہت کم ہے، لہٰذا ہائیڈروجن جوہر بنیادی طور پر غیر اضافیتی ہے اور یوں ہم صرف سب سے کم رتبی تصحیح رکھ سکتے ہیں۔ مساوات ۶.۴۹ میں p اضافیتی معیار حرکت (مساوات ۶.۴۷) ہے نا کہ کلاسیکی معیار حرکت (mv)۔ ہم مساوات ۶.۵۰ میں اب کوانٹائی عامل $-i\hbar\nabla$ کے ساتھ اول الذکر منسلک کرتے ہیں۔

[16] یہاں، ہم نے p^2 اور $(E-V)$ کی ہرمشی پن استعمال کی جو درست نہیں ہے۔ درحقیقت ان حالات کے لئے جن کا $l = 0$ ہو عامل p^4 غیر ہرمشی ہو گا (سوال ۶.۱۵)، اور مساوات ۶.۵۰ پر ($l = 0$ کی صورت میں) نظریہ اضطراب کا اطلاق شک سے خالی نہیں ہو گا۔ خوش قسمتی سے، ہمیں ٹھیک ٹھیک جواب معلوم ہے؛ جسے (غیر اضافیتی) مساوات شروڈنگر کی بجائے (اضافیتی) مساوات ڈیراک استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، اور جو یہاں سرسری انداز میں حاصل نتیجہ کی تصدیق کرتا ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے؛ تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $(-1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle\Big] \tag{۶.۵۴}$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے۔

یہ کام مکمل کرنے کی خاطر، ہمیں (غیر مضطرب) حال ψ_{nlm} (مساوات ۴.۸۹) میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی۔ ان میں سے پہلا دریافت کرنا آسان ہے (سوال ۶.۱۲ دیکھیں):

$$\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle = \frac{1}{n^2a} \tag{۶.۵۵}$$

جہاں a رداس بوہر (مساوات ۴.۷۲) ہے۔ دوسرا اتنا آسان نہیں ہے (سوال ۶.۳۳ دیکھیں)، تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے۔[۱۷]

$$\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3a^2} \tag{۶.۵۶}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\frac{1}{n^2a} + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{(l+1/2)n^3a^2}\Big]$$

یا (مساوات ۴.۷۲ استعمال کرتے ہوئے) a کو خارج کر کے، (مساوات ۴.۷۰ استعمال کر کے) تمام کو E_n کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big[\frac{4n}{l+1/2} - 3\Big] \tag{۶.۵۷}$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2\times10^{-5}$ جز و ضربی کم ہے۔

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے، میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا (مساوات ۶.۵۱)۔ لیکن یہاں اضطراب کروی تشاکلی ہے، لہٰذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہو گا۔ مزید کسی E_n کے n^2 حالات کے لئے ان (ایک ساتھ تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کی منفرد امتیازی اقدار ہوں گی۔ یوں خوش قسمتی سے، تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے "موزوں" حالات ہوں گے (یا جیسا ہم کہتے ہیں n، l اور m **موزوں کوانٹائی اعداد**[۱۸] ہیں)، لہٰذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال قانوناً درست تھا (حصہ ۶.۲.۱ کے آخر میں سبق دیکھیں)۔

---

[۱۷] متغیر r کے کسی بھی طاقت کی توقعاتی قیمت کا عمومی کلیہ موجود ہے۔

[۱۸] good quantum numbers

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل (سوال ۴.۴۰) استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۵۵ ثابت کریں۔

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴.۴۳ میں حال ψ_{321} میں r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی۔ اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر سا کام)، $s = -1$ (مساوات ۶.۵۵)، $s = -2$ (مساوات ۶.۵۶)، اور $s = -3$ (مساوات ۶.۶۴) کے لیے کریں۔ اس پر تبصرہ کریں کہ $s = -7$ کی صورت میں کیا ہوگا۔

سوال ۶.۱۴: یک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے (سب سے کم رتبی) اضافیتی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں۔

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہرمشی اور p^4 غیر ہرمشی ہے۔ ان حالات کے لئے ψ متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے، لہٰذا درج ذیل ہوگا (مساوات ۴.۱۳)۔

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle f|p^2 g\rangle = -4\pi\hbar^2\left(r^2 f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - r^2 g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^\infty + \langle p^2 f|g\rangle$$

تصدیق کریں کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}}e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں، اور دکھائیں کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

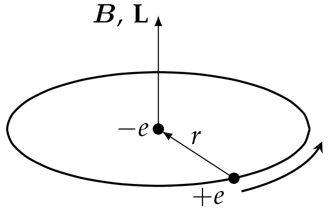
$$\langle\psi_{n00}|p^4\psi_{m00}\rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4}\frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4\psi_{n00}|\psi_{m00}\rangle$$

۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوکٹ میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر μ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیملٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{۶.۵۸}$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر $\boldsymbol{\mu}$ درکار ہوگا



شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کرکے اس کے مقناطیسی میدان کو بایوٹ وسیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے جہاں e پروٹان کے بار کو اور T دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوکٹ میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi m r^2/T$ ہوگا مزید $\boldsymbol{B}$ اور $\mathbf{L}$ دونوں کا رخ ایک جیسا ہوگا شکل ۶.۷ میں اوپر جانب لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\mathbf{L} \tag{۶.۵۹}$$

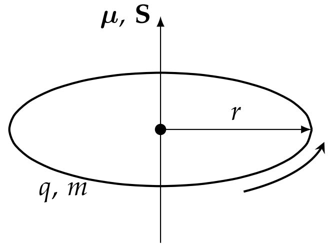
جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کرکے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضربی مسکن مقناطیسی مثبت ہوگا جس کا سامنا ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار q جس کی لمبائی رداس r کے چھلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلا کی کمیت m ہو جمودی معیار اثر mr^2 ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہوگا

$$S = \frac{2\pi m r^2}{T}$$



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

اس تشکیل کے لیے ظاہر ہے کہ مسکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہو گا دھیان رہے کہ یہ r اور T کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہو تا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کی قیمت معلوم کر پا تا جب تک کمیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تا کہ بار اور کمیت کا نسبت یکساں ہو ہر چھلے کا اور لہذا پوری جسم کا مسکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہو گا مزید $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کے رخ ایک جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہونگے لہذا درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right) \mathbf{S}$$

یہ خالصاً کلاسیکی حساب ہے در حقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m} \mathbf{S} \tag{۶.۶۰}$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے

ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2c^2r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

اس حساب میں ایک فریب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہذا یہ اسراع پذیر ہو گا اس حساب میں مجرد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے قبول کیا جا سکتا ہے جو حساب میں جزو ضربی $1/2$ شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2c^2r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \tag{۶.۶۱}$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ مسکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت جزو ضربی جو اتفاقاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبعی طور پر یہ الیکٹران کے لحاتی ساکن چھوکٹ میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت مروڑ کی بدولت ہے۔

اب کوانٹم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں L اور S کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہٰذا چکر اور دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ H'_{so} مقلوب ہو گا L^2، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{۶.۶۲}$$

لہٰذا یہ مقداریں بقائی ی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ L^2، S^2، J^2، اور J_z کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \tag{۶.۶۳}$$

ہو گا لہٰذا $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6(ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$\langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \tag{۶.۶۴}$$

لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{so} = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہیں

$$E^1_{so} = \frac{(E_n)^2}{mc^2}\left\{\frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)}\right\} \tag{۶.۶۵}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چکر و دائری ربط ایک جتنا رتبہ (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کرکے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

$$E^1_{fs} = \frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big(3 - \frac{4n}{j+1/2}\Big) \tag{۶.۶۶}$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ جوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}\Big[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\Big(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2}\Big)\Big] \tag{۶.۶۷}$$

مہین ساخت l میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک n کیلئے l کی مختلف اجازتی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہونگی تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری و چکر زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی اقدار m_l اور m_s اب موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کوانٹم اعداد n ، l ، s ، j ، اور m_j ہونگے

سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{L}]$، (ب) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{S}]$، (ج) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{J}]$، (د) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, L^2]$، (ہ) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, S^2]$، (و) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, J^2]$؛ اشارہ: $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ ہے مثبت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو قریب قریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہو گی اور ان کے بیچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے E^1_{fs} میں eV تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں نوریہ کی صورت میں توانائی کا اخراج $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت ΔE کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں نوریہ تعدد میں تبدیل کرکے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بیچ فاصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $j = $ (???) سے $j = $ (???)، 2 $j = $ (???) سے $j = $ (???)، . . . ہونگے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بیچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بیچ فاصلہ ??? Hz ہے . . .

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافیت استعمال کیے بغیر ڈیراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2\Big\{\Big[1 + \Big(\frac{\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}}\Big)^2\Big]^{-1/2} - 1\Big\}$$

یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $1 \ll \alpha$ ہے اس کو a^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

۶.۴ زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان B_{ext} میں رکھنے سے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زیمان اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_1 + \mu_2) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۶۸}$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m}\,\mathbf{S} \tag{۶.۶۹}$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1 = -\frac{e}{2m}\,\mathbf{L} \tag{۶.۷۰}$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$H'z = \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۷۱}$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر $B_{int} \ll B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور H' کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے جبکہ $B_{int} \gg B_{ext}$ کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زیمان میدان کتنا ہوگا

۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر $B_{int} \gg B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہو گی اور موزوں کوانٹم اعداد n ، l ، j ، اور m_j ہونگے تاہم چکر و مدار ربط کی موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے لہٰذا m_l اور m_s موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے رتبہ اول نظریہ اضطراب میں زیمان توانائی میں تصحیح درج ذیل ہو گی

$$H_Z^1 = \langle nljm_j|H_Z'|nljm_j\rangle = \frac{e}{2m}\boldsymbol{B}_ext \cdot \langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S}\rangle \tag{۶.۷۲}$$

اب $\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$ ہو گا بدقسمتی سے ہمیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقہ سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)۔ اس مقررہ سمتیہ کے گرد $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص $\mathbf{J}$ پر $\mathbf{S}$ کی قائمہ تظلیل $\mathbf{S}$ کی وقتی اوسط قیمت ہو گا

$$\mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})}{j^2}\,\mathbf{J} \tag{۶.۷۳}$$

لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$ ہے لہٰذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$ ہو گا لہٰذا

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \tag{۶.۷۴}$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S}\rangle = \langle \Big(1 + \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}}{J^2}\Big)\,\mathbf{J}\rangle = \Big[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\Big]\langle \mathbf{J}\rangle \tag{۶.۷۵}$$

چکور قوسین میں بند رکن کو لنڈے g جز و ضرب کہتے ہیں جس کو g_j سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور z کو $\boldsymbol{B}_{ext}$ کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہو گا

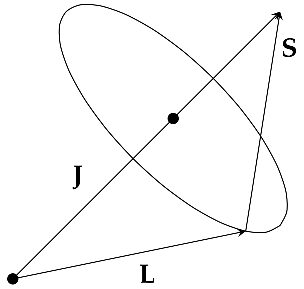
$$E_Z^1 = \mu_B g_J B_{ext} m_j \tag{۶.۷۶}$$

جہاں

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/T} \tag{۶.۷۷}$$

بوہر مقناطیسہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زیمان کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال $n = 1$ ، $l = 0$ ، $j = 1/2$ لہٰذا $g_j = 2$ دو سطحوں میں بٹ جائے گا

$$-13.6\,\mathrm{eV}(1 + \alpha^2/4) \pm \mu_B B_{ext} \tag{۶.۷۸}$$



شکل ۶.۹: چکر و مدار ارتباط کی عدم موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J}$ کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔

جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہو گی ان توانائیوں کو B_{ext} کے تفاعل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں کمزور میدان زیمان بٹنے کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں B_{ext} بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر

اگر $B_{ext} \gg B_{int}$ ہو تب زیمان اثر غالب ہو گا میدان B_{ext} کو z محور پر رکھ کر موزوں کوانٹم اعداد n، l، m_l، اور m_s ہونگے جبکہ j اور m_j نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت مروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہو گا جبکہ L_z اور S_z ہونگے زیمان ہیملٹنی

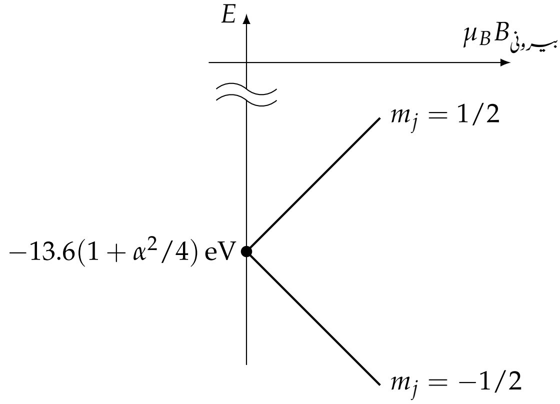
$$H'_Z = \frac{e}{2m}B_{ext}(L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہو نگی

$$E_{nmlms} = -\frac{13.6\,\text{electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext}(m_l + 2m_s) \tag{۶.۷۹}$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہو گا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہو گی

$$E^1_{fs} = \langle nlm_lm_s|(H'_r + H'_so)|\rangle nlm_lm_s\rangle \tag{۶.۸۰}$$



شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی کمزور میدانی زیمان بٹوارا؛ بالائی لکیر $(m_j = 1/2)$ کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر $(m_j = -1/2)$ کی ڈھلوان -1 ہے۔

اضافیتی قصہ وہی ہو گا جو پہلے تھا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہو گا

$$\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\rangle = \langle S_x\rangle\langle L_x\rangle + \langle S_y\rangle\langle L_y\rangle + \langle S_z\rangle\langle L_y\rangle = \hbar^2 m_l m_s \tag{۶.۸۱}$$

دھیان رہے کہ S_z اور L_z کہ امتیازی تفاعلات کے لیے $\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = \langle L_x\rangle = \langle Ly\rangle = 0$ ہو گا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{fs} = \frac{13.6\,\text{eV}}{n^3}\alpha^2\Big\{\frac{3}{4n} - \Big[\frac{l(l+1)-m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)}\Big]\Big\} \tag{۶.۸۲}$$

چوکور قوسین کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہو گا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زیمان حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_jm_s\rangle$ پر غور کریں طاقتور میدان زیمان بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو بوہر توانائی l^2 کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B_{ext}$ کے براہ راست متناسب زیمان حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہو گی اور ان کے انحطاط کیا ہونگے

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو تب $j = s$، $m_j = m_s$ ہو گا لہٰذا کمزور اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے E^1_Z اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر $l = 0$ کیلئے زیمان اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کے درمیانی چوکور قوسین رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نہ H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہو گا لہٰذا ہمیں دونوں کو ایک نظر سے دیکھ کر بوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہو گا

$$H' = H'_Z + H'_{fs} \tag{۶.۸۳}$$

$n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف l ، j ، اور m_j بیان کرتی ہے میں کو انحطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیبش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہو گا

$$l = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

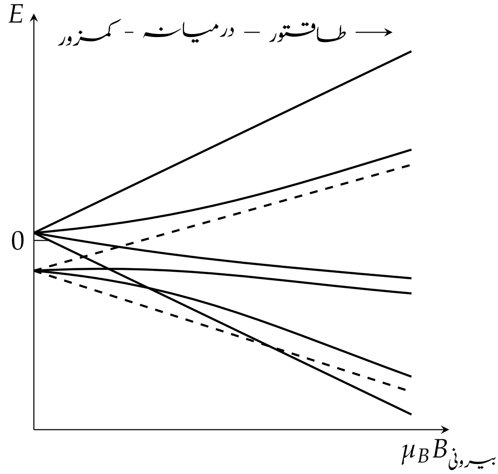
$$l = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفر قالبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے وتر پر پائے جاتے ہیں H'_Z کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں اور $\mathbf{W}-$ کا مکمل قالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہو گا

$$\begin{array}{cccc}
5\gamma-\beta 0 & 00 & 00 & 00 \\
05\gamma+\beta & 00 & 00 & 00 \\
00 & \gamma-2\beta 0 & 00 & 00 \\
00 & 0\gamma+2\beta & 00 & 00 \\
00 & 00 & \gamma-\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma-\frac{1}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & 00 & \gamma+\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\
00 & 00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma+\frac{1}{3}\beta
\end{array}$$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6\,\text{eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B \boldsymbol{B}_{ext}$$



شکل ۱۱.۶: کمزور، درمیانہ اور طاقتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیمان بٹوارا۔

ابتدائی چار امتیازی اقدار پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں اب صرف دو 2×2 ڈبوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \tag{۶.۸۴}$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی لیکن اس میں β کی علامت الٹ ہو گی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۱۱.۶ میں B_{ext} کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد $\beta = 0$ میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طاقتور میدان $\gamma \ll \beta$ کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہونگے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیشگوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طاقتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۲۵.۶: قابل ارکان H'_Z اور H'_{fs} دریافت کر کے $n = 2$ کے لئے متن میں دیا گیا قالب W مرتب کریں۔

سوال ۲۶.۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طاقتور اور درمیانی میدان خطوں کے لیے زیمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تفاعل کے طور پر ترسیم

کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیانے میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتی دیتی ہے

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت کتب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا پر اس کا جفت کتب معیار اثر الیکٹران کے جفت کتب معیار اثر سے بہت کم ہوگا مساوات 60.6

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p}\,\mathbf{S}_p, \quad \boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e}\,\mathbf{S}_e \tag{۶.۸۵}$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہٰذا اس کا مسکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہوگا جس کی بنا پر صریحی g جذب ضربی g_p لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت کتب μ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۶}$$

یوں پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا مساوات 58.6

$$H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\frac{[3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\,\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\,\delta^3((\boldsymbol{r})) \tag{۶.۸۷}$$

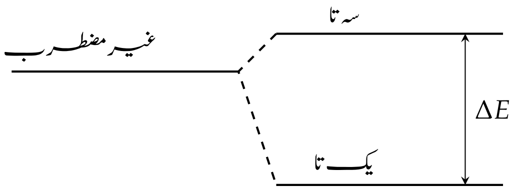
نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف مساوات 9.6 اس طرح بھی ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت ہوگی

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\langle\frac{3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e)}{r^3}\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\rangle|\psi(0)|^2 \tag{۶.۸۸}$$

زمینی حال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو تفاعل موج کروی تشاکلی ہوگا لہٰذا اول توقعاتی قیمت صفر ہوگی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہوگا لہٰذا زمینی حال میں درج ذیل ہوگا

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3}\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\rangle \tag{۶.۸۹}$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کو چکر چکر ربط کہتے ہیں جیسا چکر مدار ربط میں $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$ پایا جاتا ہے چکر چکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چکر زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل



شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بٹوارا۔

چکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p \tag{۶.۹۰}$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2) \tag{۶.۹۱}$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چکر ایک بٹا دو ہے لہٰذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہو گا سہ تا حال تمام چکر متوازی میں کل چکر ایک ہو گا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہو گا یک تا حال میں کل چکر صفر لہٰذا $S^2 = 0$ ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$E_{hf}^1 = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases} \tag{۶.۹۲}$$

چکر چکر ربط زمینی نیچال کے چکر انحطاط کو توڑ کر سہ تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6}\,\text{eV} \tag{۶.۹۳}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج نوریہ کا تعدد درج ذیل ہو گا

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420\,\text{MHz} \tag{۶.۹۴}$$

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21\,\text{cm}$ ہو گی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے یہ کائنات میں اخراج کی صورت میں وہ مشہور 21 سینٹی میٹر تختی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے سوال ۶.۲۷: فرض کریں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}}) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{۶.۹۵}$$

تکمل ہمیشہ کی طرح $\pi < \theta < 0$ ، $2\phi < \phi < 0$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\mathbf{S}_e \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \rangle = 0$$

اشارہ: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi \boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi \boldsymbol{j} + \cos\theta \boldsymbol{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلیہ میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں ایکٹران کی بجائے میون ہو گا جس کا بار اور g جزو ضرب الیکٹرون کے بار اور g جزو ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیٹران ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور g جزو ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیئم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیق شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا یہ گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب 4.85×10^{-4} eV تجرباتی حاصل قیمت 8.41×10^{-4} eV سے بہت مختلف ہے اس فرق کی وجہ نابودی جفت $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیئم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی متناہی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازا قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس b کا یکساں بار دار کروی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہو گی یہ درحقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم b/a کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں a رداس بوہر ہے صرف ابتدائی جزو رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

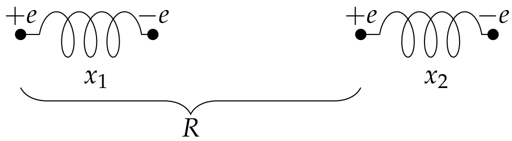
آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتے تعین کرنی ہے آخر میں $b \approx 10e - 15\text{meter}$ جو تقریبا پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سمتی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مرتعش سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 yz$$

جہاں λ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں

ا. زمینی حال



شکل ۶.۱۳: دو قابل تقطیب قریبی جوہر (سوال 31.6)۔

ب. سہتا انحطاطی پہلی حجان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندر والز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ قابل تقطیب ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت m اور بار $-e$ ہو ایک مرکزہ بار $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس لچک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{۶.۹۶}$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہو گا

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2}\Big) \tag{۶.۹۷}$$

ا. مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$H' \cong -\frac{e^2x_1x_2}{2\pi\epsilon_0R^3} \tag{۶.۹۸}$$

ب. دکھائیں کے کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دو ہارمونی مرتعش ہیملٹن یوں

$$H = \Big[\frac{1}{2m}p_+^2 + \frac{1}{2}\Big(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R^3}\Big)x_+^2 big\Big] + \Big[\frac{1}{2m}p_-^2 + \frac{1}{2}\Big(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R^3}\Big)x_-^2 big\Big] \tag{۶.۹۹}$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$X\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2), \quad \text{جس میں}\; p\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \tag{۶.۱۰۰}$$

علیحدہ ہو گا

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں RL}\omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \tag{۶.۱۰۱}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہو تا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{R^6} \tag{۶.۱۰۲}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بیچ کششی مخفیہ پایا جاتا ہے جو ان کے بیچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بیچ وندر وال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دورتی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہو گی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا مر تعش تفاعل موج ہے جہاں m کمیت اور مقیاس لچک k ہو گا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دورتی تخفیف ΔV ہو گی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال ۶.۳۲: فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم λ کا تفعال ہو. $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور امتیازی تفعالات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسلہ Feynman–Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \Big\langle \psi_n \Big| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big| \psi_n \Big\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انحطاطی امتیازی تفعالات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جز و الف): مسلہ Feynman–Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 9.6 استعمال کریں۔)

(جز و ب): درج ذیل یک بعدی ہارمونی مدار اس کا اطلاق کریں۔

ایک)

$\lambda = \omega$

لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہو گا۔

دو)

$\lambda = \hbar$

لیں جو $\langle T\rangle$ دے گا اور

تین)

$\lambda = m$

جو $\langle T\rangle$ اور $\langle V\rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۳۳: مسئلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تین کی جا سکتی ہیں۔ رداسی تفاعلات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r}$$

اور امتیازی اقدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max}+l+1)^2}$$

(جزو الف):
مسئلہ Feynman-Hellmann میں $\lambda = e$ استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔
(جزو ب):
$\lambda = l$ کو استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۴: رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s \rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle n + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0$$

ثابت کریں جو ہائیڈروجن کے حال ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1,$ اور $s-2)$ کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رداسی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \Big[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\Big]u.$$

$\int(ur^su'')dr$ کو $\langle r^s\rangle$، $\langle r^{s-1}\rangle$، $\langle r^{s-2}\rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhisis کے ذریعے دوہرا تفرق کو بیٹھائیں۔ دیکھایں کے

$$\int(ur^su') = -(s/2) < r^{s-1} >$$

اور

$$\int(u'r^su')dr = -[2/(s+1)]\int(u''r^{s+1}u')dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)

سوال ۶.۳۵: (جزو الف):
رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s = 0, s = 1, s = 2$ اور $s = 3$ ڈال کے $\langle r^2\rangle$, $\langle r\rangle$, $\langle r^{-1}\rangle$ اور $\langle r^3\rangle$ کے قلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قلیہ دریافت کر سکتے ہیں۔
(جزو ب):

دوسرے رخ آپکو مثلاً درپیش ہوگا آپ $-1 \quad = \quad s$ پر کر کے دیکھیں کے آپکو صرف $\langle r^{-2}\rangle$ اور $\langle r^{-3}\rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔
جزوج:
اگر آپ کسی طریقہ سے $\langle r^{-2}\rangle$ دریافت کر پائیں تب آپ رشتہ Kramers' استعمال کر کے باکی تمام منفی قوعتوں کے لئے قلیات دریافت کر سکتے ہیں۔
مساوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوے $\langle r^{-3}\rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مساوات 64.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۶: ایک جوہر کو یقیا بیرونی برقی میدان E_{ext} میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی ماسل ہے اس سوال میں ہم ھائےڈروجن کے $n \; = \; 1$ اور $n \; = \; 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہٰذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

$$H_S' = eE_{ext}z = eE_{ext}r\cos\theta$$

اسکو hamiltonian bohr مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کرتے ہوے عمدہ ساخت کو رعد کریں۔
(جزوالف):
اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔
(جزوب):
پہلا ہیجان حال 4 پرتہ ψ_{200}، ψ_{211}، ψ_{210}، ψ_{21-1}، انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوے، توانائی کی رتبہِ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟
(جزوج):
درج بالہ جزوب میں موضوع تفعلات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جوعفت قطب میعارِ اثر ($p_e \quad = \quad -er$) کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابع نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کے پہلی ہیجان حال میں ھائےڈروجن برقی جوعفت قطب میعارِ اثر کا حامل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکملات پائے جاتے ہیں تاہم تقریبن تمام کی قیمت سِفر ہے لہذا حساب سے قبل غور کریں اگر ϕ تکمل سفر ہو تب r اور θ تکملات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی جزوی جواب

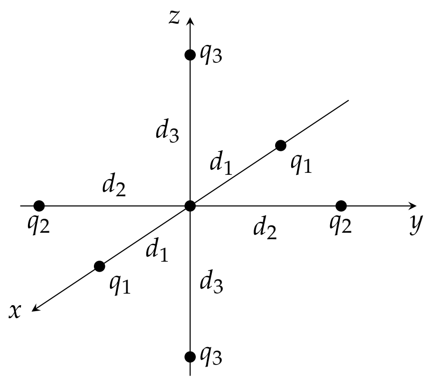
$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)

سوال ۶.۳۷: ھائےڈروجن کی $n \; = \; 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتدائی طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوے اب انحطاطی حالات ψ_{3lm} ہونگے اور اب ہم z رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔
(جزوالف):
اضطرابی hamiltonian کو ظاہر کرنے والا 9×9 کا کالم تیار کریں
جزوی جواب

$$\langle 300|z|310\rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320\rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31\pm 1|z|32\pm 1\rangle = -(9/2)a.$$

(جزوب):
امتیازی اقدار اور انکی انحطاط دریافت کریں



شکل ۶.۱۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (قلمی جال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

سوال ۶.۳۸: ڈوٹرئم کی زمینی حال میں نہایت موحین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طولِ موج میں تلاش کریں۔ ڈوٹرئم درحقیقت بھاری ھائیڈروجن ہے جسکے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ جڑ کر ڈوٹرئم بناتے ہیں جسکا چکر ایک مقناطیسی دار اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹرئم کا g-جزو 71.1 ہے۔

سوال ۶.۳۹: ایک کالم میں قریبی باردارا کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۴) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای جاتی ہیں۔(چونکے اس۔سوال کے ساتھ چکر کا کوئی۔واستہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)

(جزو الف):
درج ذیل

$$r << d_1, r << d_2, andr << d_3,$$

کی صورت میں دیکھاے

$$H' = V_o + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_o = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جزوب):
زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔
(جزوج):
پہلی ہیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں یہ چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بٹے گا۔
ایک) کابی تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی۔ صورت میں۔
دو) چوں زاویہ تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔
تین) آرتھوھامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔

سوال ۶.۴۰: بازاوقات ψ_n^1 کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلہ واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔
(الف)
ایک) ھائیڈروجن کی زمینی حال میں سٹارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان E_{ext} کی۔ موجودگی میں ھائیڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال 36.6 stark اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n}cos\theta;$$

استعمال کرکے دیکھیں اپ نے مستقلات $A, B,$ اور C کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔
دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔ جواب:

$$-m(3a^2eE_{ext}/2\hbar)^2.$$

(جزوب)
اگر پروٹان کا برقی جست قطب میعار اثر p ہوتا تب ھائیڈروجن کے الیکٹرانکی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{epcos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کرکے تلاش کریں۔
دو) دیکھایں کہ رتبہ تک جوہر کا قل برقی جو عفت قطب میعار اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہوگا۔
تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہوگا؟

جوابات

فرهنگ

adjoint, 102
allowed
  energies, 33
argument, 60

boundary conditions, 32
bra, 127

coherent states, 133
collapses, 4, 111
commutation
  canonical relation, 44
commutator, 43
commute, 43
complete, 34, 100
continuous, 105
Copenhagen interpretation, 4

decomposition
  spectral, 130
degenerate, 89, 104
delta
  Kronecker, 34
determinate state, 103
Dirac
  orthonormality, 108
discrete, 105
dispersion
  relation, 66

energy
  allowed, 28
  conservation, 38
ensemble, 15
expectation
  value, 7

formula
  De Broglie, 18
Fourier
  inverse transform, 62
  transform, 62
Frobenius
  method, 53
function
  Dirac delta, 71

generalized
  distribution, 71
  function, 71
generalized statistical interpretation, 111
generating
  function, 59
generator
  translation in space, 135
  translation in time, 136
Gram-Schmidt
  orthogonalization process, 106

Hamiltonian, 27
harmonic
  oscillator, 32
Hermitian
  conjugate, 48
hermitian, 101
  anti, 130

orthonormal, 34, 100
oscillation
    neutrino, 127

particle
    unstable, 21
polynomial
    Hermite, 57
position
    agnostic, 4
    orthodox, 3
    realist, 3
potential, 14
    reflectionless, 92
probability
    density, 10
probability current, 21
probable
    most, 7

recursion
    formula, 54
reflection
    coefficient, 77
revival time, 88
Rodrigues
    formula, 59

scattering
    matrix, 93
Schrodinger
    time-independent, 27
Schrodinger align, 2
Schwarz inequality, 99
sequential measurements, 130
series
    Fourier, 35
    power, 42
    Taylor, 41
sodium, 23
space
    dual, 128

    conjugate, 102
    skew, 130
hidden variables, 3
Hilbert space, 99

idempotent, 129
indeterminacy, 2
inner product, 98

ket, 127

ladder
    operators, 45
law
    Hooke, 41
linear
    combination, 28
linear algebra, 97

matrices, 98
matrix
    S, 93
    transfer, 94
matrix elements, 125
mean, 7
median, 7
momentum, 16
momentum space wave function, 113

neutrino
    electron, 127
    muon, 127
node, 34
normalization, 13
normalized, 100

observables
    incompatible, 116
operator, 17
    lowering, 45
    projection, 128
    raising, 45
orthogonal, 34, 100

variables
separation of, 25
variance, 9
vectors, 97
velocity
group, 64
phase, 64
virial theorem, 132

wag the tail, 55
wave
incident, 76
packet, 61
reflected, 76
transmitted, 76
wave function, 2
wavelength, 18

outer, 23
spectrum, 104
square-integrable, 13
square-integrable functions, 98
standard deviation, 9
state
bound, 69
excited, 33
ground, 33
scattering, 69
statistical
interpretation, 2
step function, 79

theorem
Dirichlet's, 35
Ehrenfest, 18
Plancherel, 62
transformations
linear, 97
transmission
coefficient, 77
tunneling, 69, 78
turning points, 69

uncertainty principle, 19, 116
energy-time, 119

اتفاقی
حالات، 133
اجازتی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹرینو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینو، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انحطاطی، 89، 104
اندرونی ضرب، 98
انعکاس
شرح، 77
اوسط، 7

براء، 127
بقا
توانائی، 38

پیداکار
تفاعل، 59
پیداکار
فضا میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136

تحدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسلسل
ٹیلر، 41
طاقتی، 42
فوریئر، 35
تعین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2

توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجازتی، 28
توقعاتی
قیمت، 7

جفت، 33
تفاعل، 30

حال
بکھراو، 69
زمینی، 33
مقید، 69
ہیجان، 33

خطی الجبرا، 97
خطی تبادلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3

دلیل، 60
دم ہلانا، 55، 95

ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیکر، 34

ذرہ
غیر مستحکم، 21

رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاونسڈ اثر، 85

ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

سرنگ زنی، 69، 78
سگرا، 15
سمتیات، 97
سوچ
انکاری، 4
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سوڈیم، 23
سیڑھی
عاملین، 45
سیڑھی تفاعل، 79

شروڈنگر
غیر تابع وقت، 27
شروڈنگر مساوات، 2
شروڈنگر نقطہ نظر، 136
شریک عامل، 102
شماریاتی مفہوم، 2
شوارز عدم مساوات، 99

طاق، 33
طول موج، 18
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130

عامل، 17
تظلیل، 128
تقلیل، 45
رفعت، 45
عدم تعین، 2
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عقدہ، 34
علیحدگی متغیرات، 25
عمودی، 34، 100
معیاری، 34

غیر مسلسل، 105

فروبنیوس
ترکیب، 53

فضا
بیرونی، 23
دوہری، 128
فوریئر
الٹ بدل، 62
بدل، 62

قابل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
قالب
بکھراو، 93
ترسیل، 94
قابلی ارکان، 125
قانون
ہک، 41
قوالب، 98

کٹ، 127
کثافت
احتمال، 10
کثیر رکنی
ہرمائٹ، 57
کلیہ
ڈی بروگلی، 18
روڈریگیس، 59
کوپن ہیگن مفہوم، 4

گرام شمد
ترکیب عمودیت، 106

متعمم
تفاعل، 71
تقسیم، 71
متعمم شماریاتی مفہوم، 111
محتمل
سب سے زیادہ، 7
مخفیہ، 14
بلا انعکاس، 92
مربع متکامل، 13
مربع متکامل تفاعلات، 98

مرتعش
ہارمونی، 32
مسئلہ
اہرنفسٹ، 18
پلانشرال، 62
ڈرشلے، 35
مسئلہ وریل، 132
معمول زنی، 13
معمول شدہ، 100
معیار حرکت، 16
معیار حرکی فضا تفاعل موج، 113
معیار عمودی، 34
معیاری انحراف، 9
معیاری عمودی، 100
مقلب، 43
مقلبیت
باضابطہ رشتہ، 44
مقلوب، 43
مکمل، 34، 100
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 76
ترسیلی، 76
منعکس، 76
موجی اکٹھ، 61
میون نیوٹرینو، 127

واپسی نقاط، 69
وسطانیہ، 7

ہارمونی
مرتعش، 32
ہرمشی، 101
جوڑی دار، 48، 102
خلاف، 130
منحرف، 130
ہلبرٹ فضا، 99
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیملٹنی، 27

یک طاقتی، 129