

کوانٹم میکینیات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۵ اگست ۲۰۲۱

عنوان

vii میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	تفاعل موج	۱
۱	۱.۱ شرو وڈنگر مساوات	۱
۲	۱.۲ شماراتی مفہوم	۲
۵	۱.۳ احتمال	۵
۵	۱.۳.۱ غیر مسلسل تغیرات	۵
۹	۱.۳.۲ استمراری تغیرات	۹
۱۲	۱.۴ معمول زنی	۱۲
۱۵	۱.۵ معیار حرکت	۱۵
۱۸	۱.۶ اصول عدم یقینیت	۱۸
۲۳	۲ غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات	۲۳
۲۳	۲.۱ ساکن حالات	۲۳
۲۹	۲.۲ لامستثنای چکور کنواں	۲۹
۳۸	۲.۳ ہارمونی سر نقش	۳۸
۴۰	۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب	۴۰
۴۹	۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب	۴۹
۵۷	۲.۴ آزاد ذرہ	۵۷
۶۶	۲.۵ ڈیلٹا تفاعل محفہ	۶۶
۶۶	۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات	۶۶
۶۸	۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں	۶۸
۷۷	۲.۶ مستثنای چکور کنواں	۷۷
۸۷	۳ قواعد و ضوابط	۸۷
۸۷	۳.۱ ہلبرٹ فضا	۸۷
۹۱	۳.۱.۱ متابل معلوم حالات	۹۱
۹۳	۳.۲ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل	۹۳

۹۳	غیر مسلسل طیف	۳.۲.۱
۹۵	استمراری طیف	۳.۲.۲
۹۸	متعمم شمارائی مفہوم	۳.۳
۱۰۲	اصول عدم یقینیت	۳.۴
۱۰۲	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۴.۱
۱۰۶	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۴.۲
۱۰۶	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۴.۳
۱۱۱	ڈیراک علاقیت	۳.۵
۱۲۵	تین البادی کو انٹرمیکانیات	۴
۱۲۵	کروی محدود میں مساوات شرودنگر	۴.۱
۱۲۷	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۲۸	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۳۳	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۳۷	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۳۸	ردای تقف عمل موج	۴.۲.۱
۱۴۸	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۵۰	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۵۱	امتیازی افتدار	۴.۳.۱
۱۶۱	متماش ذرات	۵
۱۶۱	دوزراتی نظام	۵.۱
۱۶۹	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۱۶۹	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۱۶۹	عمومی مضابطہ بندی	۶.۱.۱
۱۷۰	اول رتبی نظریہ	۶.۱.۲
۱۷۴	دوم رتبی توانائیاں	۶.۱.۳
۱۷۵	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۱۷۵	دوپڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۱۷۹	بلند رتبی انخطاط	۶.۲.۲
۱۸۳	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۱۸۴	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۱۸۷	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۱۹۳	تغیری اصول	۷
۱۹۵	و کب تخمین	۸
۱۹۷	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹

۲۰۱	۱۱ بکھراؤ
۲۰۱	۱۱.۱ جبزوی مونج تجزیہ
۲۰۱	۱۱.۱.۱ اصول وضوابط
۲۰۳	۱۱.۱.۲ لایا عمل
۲۰۶	۱۱.۲ یتقلات حیط
۲۰۹	۱۱.۳ بارن تخمین
۲۰۹	۱۱.۳.۱ مساوات شروڈنگر کی مکملی روپ
۲۱۲	۱۱.۳.۲ بارن تخمین اوّل
۲۱۶	۱۱.۳.۳ قسمل بارن
۲۲۱	۱۲ پس نوشت

۲۲۳	جوابات
۲۲۵	۱ خطی الجبرا
۲۲۵	۱.۱ سمتیات
۲۲۵	۲.۱ اندرونی ضرب
۲۲۵	۳.۱ قتالب
۲۲۵	۴.۱ تبدیلی اساس
۲۲۵	۵.۱ امتیازی قناعات اور امتیازی امتدار
۲۲۵	۶.۱ ہر مشی تبادله
۲۲۷	منہنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

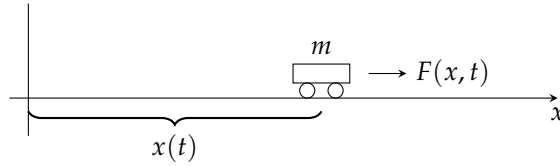
28 اکتوبر 2011ء

باب ۱

تفہم عمل موج

۱.۱ شرودنگر مساوات

فرض کریں محور x پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت m ہو، پر قوت $F(x, t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت t پر تعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کی اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکت کی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکت کی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں تعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے تعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو خفی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) اس مساوات کے ساتھ ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کی بات نہیں کر رہے ہیں۔ دیگر، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ($v \ll c$) تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کی تفاعل موج^۲ جس کی علامت $\Psi(x, t)$ ہے کو شرودنگر مساوات^۳ حل کر کے حاصل کرتے ہیں

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

جہاں i منفی ایک (-1) کا جذر اور \hbar پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم 2π ہوگا:

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات، جو عموماً $\Psi(x, 0)$ ہوگا، استعمال کرتے ہوئے شرودنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x, t)$ تعین کرتی ہے، جیسا کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے فاعلہ نیوٹن $x(t)$ تعین کرتا ہے۔

۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں، ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے t پر یہ x کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم^۴ پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے t پر نقطہ x پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ دیگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ^۵ درج ذیل ہے۔

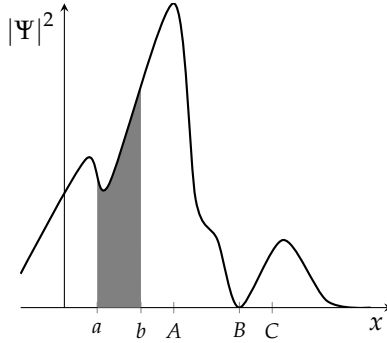
$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{محتمل} & \text{محتمل} \\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} & \text{محتمل} \end{cases} \text{ لمحے } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ A پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ B پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا اس نظریہ سے ذرہ کے بارے میں تمام متبادل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جانتے ہوئے بھی ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاصر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کے صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں عدم تعین^۶ کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور

wave function^۲
Schrodinger align^۳
statistical interpretation^۴

تفاعل موج از خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ (جہاں Ψ^* تفاعل موج Ψ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا چاہیے۔
indeterminacy^۶



شکل ۱.۲: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ a اور b کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ A کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ B کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتی ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کو انٹرمیکانی نظریہ میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام C پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کو انٹرم عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقہ سوچ کے بارے میں علم ہو گا۔

(1) حقیقت: پسند^۸ سوچ: ذرہ مقام C پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کو انٹرمیکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گا کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ C پر ہی تھا اور کو انٹرمیکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے متاثر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعین پن متدرتی میں نہیں پایا جاتا بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے تحت کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں Ψ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا ہے اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات^۹ کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند^{۱۰} سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتی ہے کہ وہ ایک مقام پر ”کھڑا ہو جائے“ (وہ مقام C کو کیوں منتخب کرتا ہے، اس بارے میں ہمیں سوال کرنے کی اجازت نہیں ہے)۔ مشاہدہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل پیدا کرتا ہے، یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرہ کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے

^۸ ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ مکمل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی حائل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ C کے قریب پایا گیا۔

^۹ realist
hidden variables
^{۱۰} orthodox

ہیں۔ ”یہ تصور جو کوپنہیگن مفہوم“ پکارا جاتا ہے جناب یوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہر طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ سوچ درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھی عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصہ کی بحث و مباحثوں کے بعد بھی پراسرار کی کاشکار ہے۔

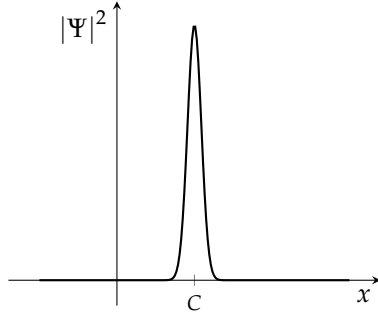
(3) انکار^{۱۱} سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حاصل نہیں ہوتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964ء تک تینوں طبقہ سوچ کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جناب جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرہ کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربہ پر تامل مشاہدہ اٹایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی عملی سوچ اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جناب جان بل کی دلیل سمجھ آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربہ بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں^{۱۲}۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتی ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کی مطابقت شدہ ریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرہ پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کے پہلے تجربہ میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے جیسا شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم^{۱۳} کر کے اس کو نوکیلی صورت اختیار کرنے پر مجبور کرتی ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گی لہذا دوسری پیمائش جلدی کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دوبہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروع و مگر مساوات کے تحت ارتقا پاتا ہے، اور دوسری جس میں پیمائش Ψ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر گرنے پر مجبور کرتی ہے۔

Copenhagen interpretation^{۱۱}
agnostic^{۱۲}

^{۱۳} یہ فہم کہ زیادہ سخت ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں بعد میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معنائی خفیہ متغیرات کے نظریات اور دیگر ٹھیکائیاں مثلاً متعدد دنیا تشریح جو ان تینوں سوچ کے ساتھ مطابقت نہیں رکھتے ہیں۔ بہر حال، اب کے لئے بہتر ہے کہ ہم کو ان نظریہ کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کی مسائل کے بارے میں فکر کریں۔
collapses^{۱۴}



شکل ۱.۳: تقاعیل موج کا انہدام: اس لمحہ کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

۱.۳.۱ احتمال

۱.۳.۱.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیات کی شماراتی تشریح کی جاتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہوں گے جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ فرض کریں ایک کمرہ میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

• 14 سال عمر کا ایک شخص،

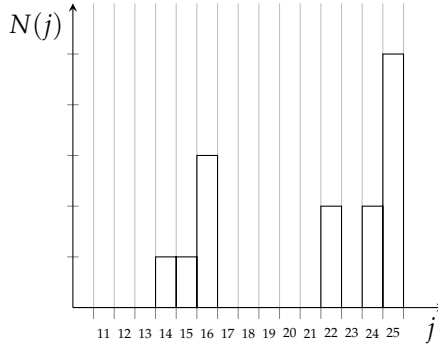
• 15 سال عمر کا ایک شخص،

• 16 سال عمر کے تین اشخاص،

• 22 سال عمر کے دو اشخاص،

• 24 سال عمر کے دو اشخاص،

• اور 25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ ترسیم کی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تب درج ذیل ہوگا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ $N(17)$ ، مثال کے طور پر، صفر ہوگا۔ کسرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ $N = 14$ ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال ۱ اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تب $P(14) = 1/14$ ، $P(15) = 1/14$ ، $P(16) = 3/14$ ، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$

دھیان رہے کی چودہ یا پندرہ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہوگا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2 کوئی عمر سب سے زیادہ ^{۱۵} ممکن ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا j وہی j ہوگا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 و 3 وسطانیہ ^{۱۶} عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ j کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک دوسرے جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی اوسط ^{۱۷} عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر j کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

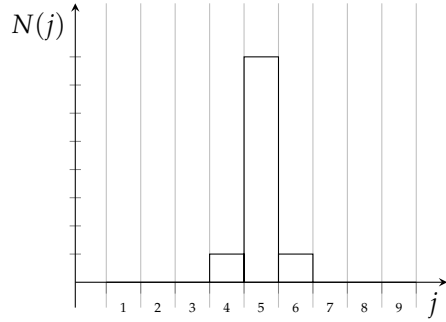
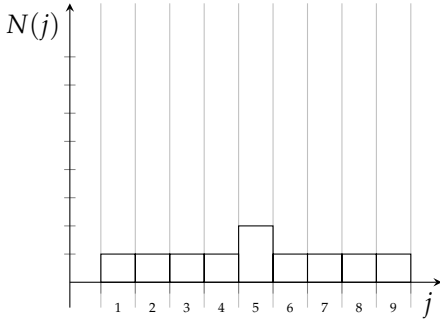
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو توقعاتی قیمت ^{۱۸} کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہوگا؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $225 = 15^2$ ، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $256 = 16^2$ حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

^{۱۵} most probable
^{۱۶} median
^{۱۷} mean
^{۱۸} expectation value



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیلات میں ایک دوسرے جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر j کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷، ۱.۸ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j \rangle^2$ کے برابر نہیں ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہو تب $\langle x^2 \rangle = 5$ جبکہ $\langle x \rangle^2 = 4$ ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورتوں میں واضح مندرجہ پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند تر قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے متربیہ نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہوگی جبکہ دھاتی علاقہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاؤ، عددی صورت میں درکار ہوگا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا منفرق

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام Δj کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j \rangle$ مستقل ہے لہذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ Δj کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن Δj کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا

مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے خبات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیریت^{۱۹} کہتے ہیں جبکہ تعبیریت کا جذر σ کو معیاری انحراف^{۲۰} کہتے ہیں۔ روایتی طور پر σ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد پھیلاؤ کی پیمائش مانا جاتا ہے۔ ہم تعبیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں σ اس پلے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے منفرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپ کو یاد ہو گا میں نے ذکر کیا $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں σ^2 غیر منفی ہو گا لہذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاؤ نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلک ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے امیراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہذا Δ عدد صحیح بھتا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال جمع دو دونوں

^{۱۹} variance
^{۲۰} standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگنہ ہوگا۔ (ماسوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچ پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس متاعدہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} \text{بلا منصوبہ منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ کثافت احتمال^{۱۱} کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ a تا b کے بیچ x پایا جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا مکمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

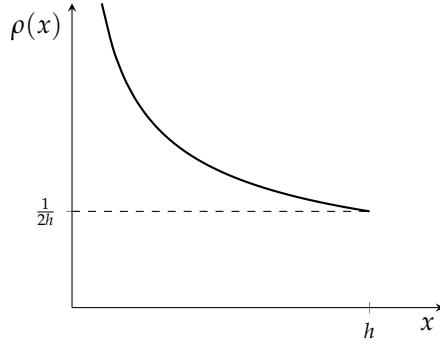
$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی h ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ و مستقیم فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچے جاتے ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا اوسط قیمت کیا ہوگا؟

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہوگا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ t پر فاصلہ x درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سستی رفتار $\frac{dx}{dt} = gt$ ہوگی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہوگا۔ وقفہ dt میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{dt}{T}$ ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت dx میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال از خود لامستناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی ρ کا مکمل) لازماً مستناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہوگا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

۱. اوسط کا مربع $\langle i^2 \rangle$ اور مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر j کے لیے Δj دریافت کریں اور مساوات ۱۱.۱۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو ۱۱ اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلاواسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ x پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں A ، a اور λ مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے A کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط $\langle x^2 \rangle$ اور معیاری انحراف σ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

۱.۴ معمول زنی

ہم تعامل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ t پر ایک ذرے کا نقطہ x پر پائے جانے کی کثافت احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت $|\Psi|^2$ کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.20)$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تعامل موج کو مساوات شرودنگر تعین کرتی ہے اور Ψ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہوگا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x, t)$ حل ہو تب $A\Psi(x, t)$ بھی حل ہوگا، جہاں A کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمول زنی^{۲۲} کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمول پر لایا گیا ہے۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمول پر لانے کے متبادل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شرودنگر مساوات کے قابل مرلجہ تکامل^{۲۳} حل ہونگے۔^{۲۴}

یہاں رک کر ذرا غور کریں! فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر میں ایک تفاعل موج کو معمول پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ Ψ ارتقاپانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمول پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں A وقت t کا تابع تفاعل ہو گا تاکہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ شرودنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماراتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹم نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہذا اہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف t کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے پہلے فقرہ میں کل تفرق $\frac{d}{dt}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل t اور x دونوں کا تفاعل عمل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق $\frac{\partial}{\partial t}$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi| = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi$$

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$(1.24) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

normalization^{۲۵}
square-integrable^{۲۶}

^{۲۵} ظاہر ہے کہ $|x| \rightarrow \infty$ کی صورت میں $\Psi(x, t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا پتہ غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مسوات ۱.۲۱ میں مکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جاسکتی ہے:

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \rightarrow \pm \infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ صفر ^{۲۵} کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر متاثر) مستقل ہوگا؛ لہذا $t = 0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔ سوال ۱.۴: لہذا $t = 0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں A ، a اور b مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں (یعنی a اور b کی صورت میں A تلاش کریں)۔

ب. متغیر x کے لحاظ سے $\Psi(x, 0)$ ترسیم کریں۔

ج. لہذا $t = 0$ پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ a کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $b = a$ اور $b = 2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں A ، λ اور ω مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا محقق ^{۲۶} V ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تفاعل موج Ψ کو معمول پر لائیں۔

ب. متغیرات x اور x^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

^{۲۵} طبیعیات کی میدان میں لامتناہی پر تفاعل موج ہر صورت صفر کو پہنچتی ہے۔
^{۲۶} potential

ج. متغیر x کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر x کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x \rangle + \sigma)$ اور $(\langle x \rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے x کی ”پھیل“ کو σ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہوگی۔ اس سمت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

۱.۵ معیار حرکت

حال Ψ میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۱.۲۸) \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x |\Psi|^2 dx$ حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعین ہے) تفاعل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں $\langle x \rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہوگی جو یکساں حال Ψ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال Ψ میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی سگرائے کو ایک ہی حال Ψ میں لاکر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x \rangle$ ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال Ψ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متعرب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا منطقی ترسیم تقریباً $|\Psi|^2$ دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x \rangle$ ہوگی۔ (چونکہ ہم مستحالی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کیا جاسکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متعرب حاصل ہوں گے۔) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سگرا پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ Ψ وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ $\langle x \rangle$ تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱.۲۹) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

کمل بالخص کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۰) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا رد کیا کہ (\pm) لامستناہی پر Ψ کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ مکمل بالخص لاگو کرتے ہیں۔

$$(1.31) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ x کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے تاکہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم Ψ جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تصرف ہوگا۔

$$(1.32) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

مساوات ۱.۳۱ میں Ψ سے بلاواسطہ $\langle v \rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$(1.33) \quad \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx$$

میں $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$(1.34) \quad \langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx$$

$$(1.35) \quad \langle p \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

کوانٹم میکانیات میں مقام کو عامل x اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ ظاہر کرتے ہیں۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بیچ لکھ کر مکمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر متداریوں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار مثلاً $Q(x, p)$ کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر p کی جگہ $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ پر کر کے حاصل حاصل کو Ψ^* اور Ψ کے پیچ لپیٹ کر درج ذیل نکل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi dx \quad (1.36)$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx \quad (1.37)$$

حال Ψ میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکت کی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۲ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب بوجہ کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ مثال قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز ہے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

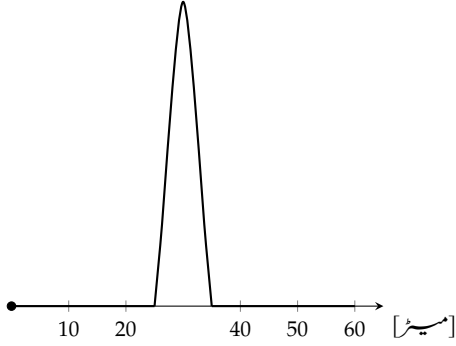
سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر عمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو x کے اوپر سے گزار کر، یہ جاننے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$ ہوگا؟

سوال ۱.۷: $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$ کا حساب کریں۔ جواب:

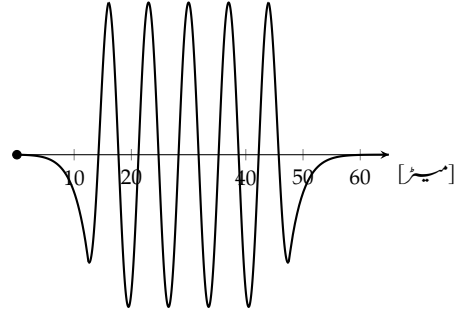
$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \quad (1.38)$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ ابھر لفظ کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو x اور t کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا پاتی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب $e^{-iVt/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکت کی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصا معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھا خاصا معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔

۱.۶ اصول عدم یقینیت

منرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے متاصر ہو گئے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج^{۳۱} پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھکادیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے متاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام ہٹانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج حناصی حد تک متبادل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہوگا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم متبادل تعین ہوگا۔ فورسٹر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانیکی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے Ψ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ذیل^{۳۲} کے ذریعے

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.39)$$

پیش کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاؤ معیار حرکت میں پھیلاؤ کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہوگا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.40)$$

جہاں σ_x اور σ_p بالترتیب x اور p کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت^{۳۳} ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”پھیلاؤ“ سے مراد یہ ہے کہ یکاں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو (Ψ کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں متعریب نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو (Ψ کو ایک لمبی سائنڈ موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے متعریب متعریب ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نہ ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۴۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں σ_x اور σ_p کی جامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ Ψ کو ایک لمبی بلدار لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو، σ_x اور σ_p کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = A e^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل A تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے Ψ شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. x ، x^2 ، p اور p^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. σ_x اور σ_p کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل π کے ہندسی پھیلاؤ کے اولین ۲۵ ہندسوں (۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ۹, ۰, ۰, ۰) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱۱.۱: گاڑی کی رفتار پیماس کی حشراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے ٹکرا کر 0 اور π زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہوگا؟ اشارہ: زاویہ θ اور $(\theta + d\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $d\theta \rho(\theta)$ ہوگا۔ متغیر θ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تقسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں ρ صفر ہوگا)۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہوگا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle \theta \rangle$ ، $\langle \theta^2 \rangle$ اور σ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle \sin \theta \rangle$ ، $\langle \cos \theta \rangle$ اور $\langle \cos^2 \theta \rangle$ تلاش کریں۔

سوال 12.1 ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ لیکن اس بار ہم سوئی کے سرے x محدود میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ یعنی عرف کی لکیر پر سوئی کے سایہ میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔ $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟ x کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا r^2 میں تقسیم کریں۔ جہاں r سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ فاصلہ 1 کے برابر ہوگا۔ اشارہ: x اور $x + dx$ کے بیچ ψ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x)dx$ ہوگا۔ آپ سوال 11.1 سے θ کا احتمال جانتے ہیں کہ کس کے ساتھ پر پایا جاتا ہے۔ اب یہاں سوال یہ ہے کہ $d\theta$ کے وقفے مطابقتی dx کیا ہوگا؟ $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ اس تقسیم کے لیے تیار کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال 11.1 کے حصہ (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں۔

سوال 13.1 کاغذ پر L فاصلے پر اف کی لکیریں بنائی جاتی ہیں۔ کچھ بکندی سے اس کاغذ پر ایک سوئی گرائی جاتی ہے سوئی کی لمبائی L ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ سوئی لکیر کو کاٹ کر صف پر آن ٹھرے۔ اشارہ: سوال 12.1 سے رجوع کریں۔

سوال 14.1 لمحہ T پر $(a < x < b)$ کے بیچ ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

(الف) دکھائیں کہ

$$(1.31) \quad \frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$(1.32) \quad j(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right)$$

$J(x, t)$ کی اکائی کیا ہوگی؟ چونکہ J آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ x عرصے احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے۔ لہذا J کو احتمال ρ کہتے ہیں۔ اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب کسی خطے میں ایک جانب سے احتمال کی آمد خطے کے دوسری طرف کے احتمال کے خواتم سے زیادہ ہوگا۔

(ب) سوال 9.1 میں طفل معان کا احتمال ρ کیا ہوگا؟

سوال 15.1 میں عرض کریں آپ ایک غیر مستحکم ذرہ کے بارے میں بات کرنا چاہیں، جس کا عرصہ حیات τ ہو۔ ایسی صورت میں کہیں پر بھی ذرہ پائے جانے کا متل اہتمال مستقل نہیں ہوگا۔ بلکہ وقت کے ساتھ قوت نمائی طور پر کم ہوگا۔ اس نتیجے کو بے ڈھنگے طریقے سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.۴۳) \quad P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$$

اگر ہم مساوات 24.1 میں فرض کر لیں کہ V (مکمل توانائی) ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے۔ لیکن اس سے مساوات 27.1 میں اہتمال کی اٹل پن معفوظ ہوتی ہے۔ آئیں دیکھیں V کا خیالی جزو بھی پایا جاتا ہو۔

$$(1.۴۴) \quad V = V_0 - iT$$

جہاں V_0 حقیقی مکمل توانائی ہے۔ اور یہ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

(الف) دکھائیں کہ اب مساوات 27.1 کی جگہ ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$(1.۴۵) \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{2T}{\hbar} P$$

(ب) $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات T کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال 16.1: دکھائیں کہ shroudingier مساوات کے کائی بھی 2 معمول پر لائے جانے کے قابل حل یہاں ψ_1 اور ψ_2 درج ذیل پر پورا اترتے ہیں۔

$$(1.۴۶) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = 0$$

سوال 17.1: $T = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل طفال معالج پیش کرتا ہے۔

$$\begin{cases} \psi(x, 0) = A(a^2 - b^2) \text{ if } -a \leq x \leq +a \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

(الف) معمول پر لائے جانے والا A تلاش کریں۔

(ب) $t = 0$ پر x کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

(ج) $t = 0$ پر p تلاش کریں اور یہاں دیہان رہے۔ آپ اس کو $P = \frac{md\langle x \rangle}{dt}$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے

(د) x^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

(ه) p^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔ $x(\sigma_x)$ کی غیر یقینی صورتحال دریافت کریں۔ $p(\sigma_p)$ کی غیر یقینی صورتحال دریافت کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج حصول لائیکن کے عین مطابق ہیں۔

باب ۱. تفسیر موج

سوال 1-18: عموماً کوئنٹم مکانیات تب کرامت ہوگا جب ایک ذرہ کی ڈی بروگلی طول معان نظام کی جسامت سوزیادہ ہو۔ درجہ T Kelvin پر ذرے کی اوسط توانائی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_b T \quad (1.47)$$

ہوگی۔ جہاں k_b boltzman مستقل ہے۔ لہذا ڈی بروگلی طول معان درجہ ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \quad (1.48)$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونف نظام کوئنٹم سے حل ہوگا اور کونف نظام کلاسیکل سے حل ہوگا اور کیا کرنا مناسب ہوگا۔
(الف) ٹھوس جسم میں فاصلہ حبال $d = 0.33mm$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جہاں آزاد برکی ذرہ کوئنٹم مکانیاتی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سوکم درجہ حرارت پر Atomic Particles کوئنٹم مکانیاتی ہوں گے۔ sodium کو مثال بنائیں۔ ہم دیکھیں گے کہ کچھ اجسام میں آزاد برکی ذرے ہر صورت کوئنٹم مکانیاتی ہوں گے۔ جبکہ Atomic مرکز کبھی بھی کوئنٹم مکانی نہیں ہوں گے۔ یہی سب کچھ معیا کے لیے بھی درست ہے۔ جہاں Atoms کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا۔ سوائے helium کے یا ان kAtoms جن کا درجہ حرارت 4kelvin پر موجود Helium کے (ب) گیس: میکانی دباؤ p پر کس درجہ حرارت سے نیچے کامل گیس کے Atoms کوئنٹم مکانی ہوں گے۔ اشارہ:

باب ۲

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف متعارفوں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفی توانائی $V(x, t)$ کی لئے شرودنگر مساوات

$$(۲.۱) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کرتے ہوئے $\Psi(x, t)$ حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ V وقت t کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں مساوات شرودنگر کو علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے، جو ماہر طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب

$$(۲.۲) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں ψ صرف x اور φ صرف t کا تفاعل ہے۔ ظاہری طور پر حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست و قدم نظر نہیں آتا ہے لیکن حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً ہوتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے حاصل حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ و تاہل علیحدگی حلوں کیلئے درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi$$

separation of variables¹

جودہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar\psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \varphi + V\psi\varphi$$

دونوں اطراف کو $\psi\varphi$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(۲.۳) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V$$

اب بائیں ہاتھ تفاعل صرف t کا تابع ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف x کا تابع ہے۔ یاد رہے اگر V از خود x اور t دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہوگا۔ صرف t تبدیل ہونے سے دایاں ہاتھ کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ اسی طرح صرف x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل کہتے ہیں جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ یو مساوات ۲.۳ درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۴) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi$$

اور

$$(۲.۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دوسرا تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے۔ دونوں اطراف کو dt سے ضرب دیجئے ہوئے مکمل لیں۔ یوں عمومی حل $Ce^{-iEt/\hbar}$ حاصل ہوگا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب $\psi\varphi$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا ہم مستقل C کو ψ میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۶) \quad \varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو غیر متابع وقت شرودنگر مساوات^۲ کہتے ہیں۔ پوری طرح مخفی توانائی V جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ خفی توانائی کیلئے غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات کی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تاجع وقت شرودنگر مساوات کے زیادہ تر حل $\psi(x)\varphi(t)$ کی صورت میں نہیں لکھے جاسکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہوگا۔

(1) یہ ساکن حالات ہیں۔ اگرچہ تعامل موج از خود

$$(۲.۷) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

وقت t کا تاجع ہے، کثافت احتمال

$$(۲.۸) \quad |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^* e^{+iEt/\hbar} \psi e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x)|^2$$

وقت کا تاجع نہیں ہے؛ تابعیت وقت کٹ جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حشر کی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب میں ہوگا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۹) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^* Q \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

ہر توقعاتی قیمت، وقت میں منتقل ہوگی؛ یہاں تک کہ ہم $\varphi(t)$ کو رد کر کے Ψ کی جگہ ψ استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات ψ کو ہی تعامل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسئلہ کھڑے ہو سکتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تعامل موج ہر صورت تاجع وقت ہو گا۔ بالخصوص $\langle x \rangle$ منتقل ہو گا لہذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت) $\langle p \rangle = 0$ ہو گا۔ ساکن حال میں کبھی بھی کچھ نہیں ہوتا ہے۔

(2) یہ غیر مبہم کل توانائی کے حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حشر کی جمع خفی) کو ہیملٹن^۲ کہتے ہیں جس کو H سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(۲.۱۰) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

اس کا مطلب یقینی ہیملٹنی عامل، قواعد و ضوابط کے تحت $p \rightarrow (\hbar/i)(\partial/\partial x)$ پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۱) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

یوں غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کریگی

$$(۲.۱۲) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi dx = E \int |\psi|^2 dx = E \int |\Psi|^2 dx = E \quad (۲.۱۳)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ψ کی معمولی ψ کی معمولی ψ کے مترادف ہے۔ مزید درج ذیل

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H} \psi) = \hat{H}(E \psi) = E(\hat{H} \psi) = E^2 \psi$$

کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = E^2 \int |\psi|^2 dx = E^2$$

یوں H کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0 \quad (۲.۱۴)$$

یاد رہے کہ $\sigma = 0$ کی صورت میں تمام امکان کی قیمت ایک دوسری جیسی ہوگی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہوگا)۔ نتیجتاً متبادل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً ایک ہی قیمت E دے گی۔ (اسی کی بنا علیحدگی مستقل کو E سے ظاہر کیا گیا۔)

(3) عمومی حل متبادل علیحدگی حلوں کا خطہ جوڑا ہوگا۔ جیسا ہم جلد دیکھیں گے، غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ دے گا جہاں ہر ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل (E_1, E_2, E_3, \dots) منسلک ہوگا لہذا ہر اجازتی توانائی کا ایک منفرد تعلق عمل میں پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x) e^{-iE_1 t / \hbar}, \quad \Psi_2(x, t) = \psi_2(x) e^{-iE_2 t / \hbar}, \dots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑا خود ایک حل ہوگا۔ ایک بار متبادل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۲.۱۵)$$

حقیقتاً تاجع وقت شرودنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل (c_1, c_2, \dots) تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط مطمئن کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کر پائیں گے۔

linear combination^{*}
allowed energy^o

باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک بار غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تاجع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں ہم بہت کچھ کہا چکا ہے۔ میں ان کو مختصر اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ زیر غور عمومی مسئلہ کا غیر تاجع وقت خفی توانائی $V(x)$ اور ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام t کیلئے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلی قدم میں آپ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$ حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی (E_1, E_2, E_3, \dots) ہوگی۔ ٹھیک ٹھیک $\Psi(x, 0)$ پر بیٹھنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$(۲.۱۲) \quad \Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

یہاں کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت مستقل c_1, c_2, c_3, \dots دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج $\Psi(x, t)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت $e^{-iE_n t/\hbar}$ چسپاں کریں گے۔

$$(۲.۱۳) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t)$$

چونکہ متابیل علیحدگی حل

$$(۲.۱۸) \quad \Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تاجع وقت ہوں گی لہذا یہ از خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۳) یہ خاصیت نہیں رکھتا ہے؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیاں ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر $|\Psi|^2$ کا حساب کرتے ہوئے قوت نمائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتی ہیں۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ ابتدائی طور پر دو ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو:

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کہ مستقل c_n اور حالات $\psi_n(x)$ حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت کیلئے تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟ کشاف احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔

حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

جہاں E_1 اور E_2 بالترتیب تفاعل ψ_1 اور ψ_2 کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left(c_1 \psi_1 e^{iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{iE_2 t/\hbar} \right) \left(c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \\ = c_1^2 \psi_1^2 + c_2^2 \psi_2^2 + 2c_1 c_2 \psi_1 \psi_2 \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar]$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ یور $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استعمال کیا۔) ظاہری طور پر کثافت احتمال زاویائی تعدد $(\frac{E_2 - E_1}{\hbar})$ سے سائن نمائندگی کا تعاش کر تا ہے لہذا یہ ہرگز ساکن حال نہیں ہوگا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعلات کے خطی جوڑنے حرکت پیدا کیا۔ □

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

۱. متبادل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل E لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۴ میں E کو $E_0 + i\Gamma$ لکھ کر (جہاں E اور Γ حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام t کے لئے مساوات ۱۱.۲۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب Γ صفر ہو۔

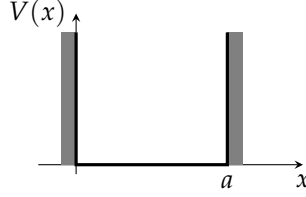
ب. غیر تاجع وقت تفاعل موج $\psi(x)$ ہر موقع پر حقیقی لیا جاسکتا ہے (جبکہ تفاعل موج $\Psi(x, t)$ لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تاجع شرودنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (تبی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی ψ ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ $(\psi + \psi^*)$ اور $i(\psi - \psi^*)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر $V(x)$ جھٹے تفاعل ہو یعنی $V(-x) = V(x)$ تب $\psi(x)$ کو ہمیشہ جفت یا طاق لیا جاسکتا ہے۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص E کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب $\psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ $\psi(x) \pm \psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایا جاسکتا ہو، E کی قیمت لازماً $V(x)$ کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مشا کیسا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

دکھائیں کہ $E < V$ کی صورت میں ψ اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک دوسری جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تفاعل معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوگا۔



شکل ۲.۱: لامستثنائی چپکور کنواں (مساوات ۲.۱۹)

۲.۲ لامستثنائی چپکور کنواں

درج ذیل مندرجہ کریں (شکل ۲.۱)۔

$$(۲.۱۹) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اس مخفی توانائی میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی $x = 0$ اور $x = a$ پر، جہاں ایک لامستثنائی قوت اس کو منہر ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ ایک کنواں میں ایک لامستثنائی لچکدار گیند ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا رہتا ہو۔ (اگرچہ یہ ایک مندرجہ مخفی توانائی ہے، آپ اس کو اہمیت دیں۔ اگرچہ یہ بہت سادہ نظر آتا ہے البتہ اس کی سادگی کی بنا ہی یہ بہت ساری معلومات منہر اہم کرنے کے قابل ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

کنواں سے باہر $\psi(x) = 0$ ہوگا (لہذا ایساں ذرہ پایا جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنواں کے اندر، جہاں $V = 0$ ہے، غیر تابع وقت شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۲۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

یا

$$(۲.۲۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے مندرجہ کرتا ہوں کہ $E \geq 0$ ہوگا۔ ہم سوال ۲.۲ سے جانتے ہیں کہ $E < 0$ سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کا کلاسیکی سادہ ہارمونک مرتعش^۱ کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$(۲.۲۲) \quad \psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقلات کو مسئلہ کے سرحدی شرائط تعین کرتے ہیں۔ $\psi(x)$ کے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہوگا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور $V = \infty$ کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کچی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (۲.۲۳)$$

تاکہ کنواں کے باہر اور کنواں کے اندر حل ایک دوسرے کے ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں A اور B کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

ہے لہذا $B = 0$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = A \sin kx \quad (۲.۲۴)$$

یوں $\psi(a) = A \sin ka$ کی بنیاد $A = 0$ ہوگا (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل $\psi(x) = 0$ ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا $\sin ka = 0$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (۲.۲۵)$$

اب $k = 0$ (بھی $\psi(x) = 0$ دیتا ہے جس) میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ کی بنا k کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہذا ہم منفی کی علامت کو A میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۲.۲۶)$$

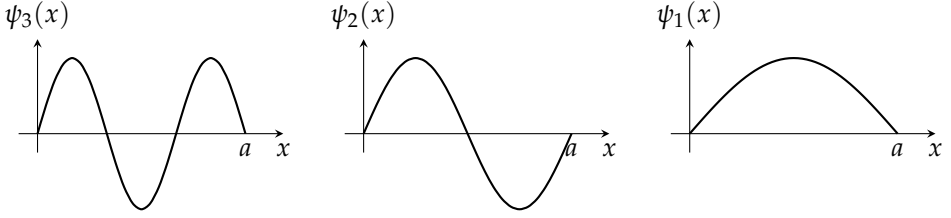
دلچسپ بات یہ ہے کہ $x = a$ پر سرحدی شرط مستقل A تعین نہیں کرتا ہے بلکہ اس کی بجائے مستقل k تعین کرتے ہوئے E کی اجازتی قیمتیں تعین کرتا ہے:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (۲.۲۷)$$

کلاسیکی صورت کے برعکس لامتناہی چکور کنواں میں کو انٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص اجازت^۸ قیمتوں میں سے ہونا ہوگا۔ مستقل A کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ψ کو معمول پر لانا ہوگا:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \implies \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

boundary conditions^۷
allowed^۸



شکل ۲.۲: لامستثنائی چکور کنواں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

یہ A کی صرف مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر $A = \sqrt{2/a}$ منتخب کرنا بہتر ہوگا (کیونکہ A کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنواں کے اندر شرودنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۲۸) \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میرے قول کو پورا کرتے ہوئے، (ہر مثبت عدد صحیح n کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت شرودنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامستثنائی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے جو لمبائی a کے دھاگے پر ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل ψ_1 جو زمینی حالت کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں n^2 کے براہ راست بڑھتی ہیں **پہچان** **حالات** کہلاتے ہیں۔ تفاعلات $\psi_n(x)$ چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری جفت اور طاق ہیں۔ ψ_1 جفت ہے، ψ_2 طاق ہے، ψ_3 جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔

۲. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے **عقدوں** (عبور صفر) کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہوگا۔ (چونکہ آخری نقطہ کے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہذا) ψ_1 میں کوئی عقدہ نہیں پایا جاتا ہے، ψ_2 میں ایک پایا جاتا ہے، ψ_3 میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

۳. یہ تمام درج ذیل نقطہ نظر سے باہمی **عمودوں** ^{۱۲} ہیں جہاں $m \neq n$ ہے۔

$$(۲.۲۹) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0$$

ground state^۹
excited states^{۱۰}
nodes^{۱۱}
orthogonal^{۱۲}

ثبوت:

$$\begin{aligned}
\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right] dx \\
&= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right\} \Big|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right\} = 0
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $m = n$ کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہوگا؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں ناقابل قبول ہوگا۔) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل ہمیں بتاتا ہے کہ مکمل کی قیمت 1 ہے۔ درحقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فترے میں سموایا جاسکتا ہے:^{۱۳}

$$(۲.۳۰) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

جہاں δ_{mn} کرونیکر ڈیلٹا^{۱۴} کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(۲.۳۱) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام) ψ معیاری عمودی^{۱۵} ہیں۔

۴. یہ مکمل^{۱۶} ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تعامل $f(x)$ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے:

$$(۲.۳۲) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میں تعاملات $\sin \frac{n\pi x}{a}$ کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اعلیٰ علم الاحصاء کے ساتھ واقعیت کی صورت میں آپ مساوات ۲.۳۲ کو $f(x)$ کا فوریر تسلسل^{۱۷} پہچان پائیں گے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تعامل کو فوریر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جاسکتا ہے، بعض اوقات مسئلہ ڈرشلے^{۱۸} کہلاتا ہے۔^{۱۹}

^{۱۳} یہاں تمام ψ حقیقی ہیں لہذا $\psi_m^* = \psi_m$ پر * ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقل کی استعمال کے نقطہ نظر سے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔

^{۱۴} Kronecker delta

^{۱۵} orthonormal

^{۱۶} complete

^{۱۷} Fourier series

^{۱۸} Dirichlet's theorem

^{۱۹} تعامل $f(x)$ میں متناہی تعداد کی عدم استمرار (چھلانگ) پائے جاسکتی ہیں۔

کسی بھی دیے گئے تفاعل $f(x)$ کے لئے عددی سروں c_n کو $\{\psi_n\}$ کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو $\psi_m(x)$ سے ضرب دے کر تحمل لیں:

$$(۲.۳۳) \quad \int \psi_m(x)^* f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

(آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرونیٹر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دیتا ہے ماسوائے اس جزو کو جس کے لئے $n = m$ ہو۔) یوں تفاعل $f(x)$ کے پھیلاؤ کے n ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہوگا۔^{۲۰}

$$(۲.۳۴) \quad c_n = \int \psi_n(x)^* f(x) dx$$

درج بالا چار خواص انتہائی طاقتور ہیں جو صرف لامتناہی چکور کنواں کے لیے مخصوص نہیں ہیں۔ پہلا خواص ہر اس صورت میں کارآمد ہوگا جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسرا، مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عامل گیر خواص ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ ان تمام مخفیہ کے لئے جن کو آپ کا (ممکنہ) سامن ہو سکتا ہے کے لئے عملیت کارآمد ہوگی، لیکن اس کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ جس کی بنا عموماً ماہر طبیعیات یہ ثبوت دیکھنے بغیر، اس کو مان لیتے ہیں۔

لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۳۵) \quad \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

میں نے دعویٰ کیا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔

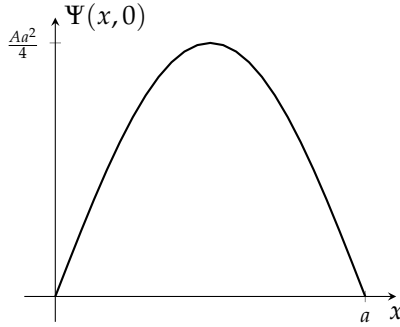
$$(۲.۳۶) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہوگا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج $\psi(x, 0)$ پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر c_n درکار ہوں گے:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

تفاعلات ψ کی کمیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشل کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر $\psi(x, 0)$ کو ہر صورت یوں بیان کر سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا c_n کو فورسٹر تسلسل سے حاصل

^{۲۰} آپ یہاں فضلی تغیر کو m یا n کوئی تیسرا حرف لے سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کریں)، اور ہاں یاد رہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

کیا جاسکتا ہے:

$$(۲.۳۷) \quad c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x, 0) dx$$

آپ نے دیکھا: دی گئی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاؤ کے عددی سروں c_n کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں پر کر $\Psi(x, t)$ حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج جانتے ہوئے دلچسپی کی کسی بھی حرکت کی مقدار کا حساب، باب ۱ میں متعلقہ ترکیب استعمال کرتے ہوئے، کیا جاسکتا ہے۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہوگا؛ صرف ψ کی قیمتیں اور اجازتی توانائیاں یہاں سے مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جہاں A ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

کنواں سے باہر $\psi = 0$ ہے۔ $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^2(a - x)^2 dx = |A|^2 \frac{a^5}{30}$$

A تعین کرتے ہیں:

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مسوات ۲.۳۷ کے تحت n واں عددی سر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left\{ a \left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right. \\
 &\quad \left. - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right\} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[-\frac{a^3}{n\pi} \cos(n\pi) + a^3 \frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3} \cos(n\pi) + a^3 \frac{2}{(n\pi)^3} \cos(0) \right] \\
 &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3} [\cos(0) - \cos(n\pi)] \\
 &= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا (مسوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

غیر محتاط بات چیت میں ہم کہتے ہیں کہ Ψ میں ψ_n کی مقدار کو c_n ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ n ویں ساکن حال میں ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے جو درست نہیں چونکہ ذرہ حال Ψ میں ناکہ حال ψ_n میں پایا جاتا ہے؛ مزید تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرہ کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی مشہود کی پیمائش کرتے ہو جس کا جواب ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیمائش سے E_n قیمت حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔ (کوئی بھی پیمائش، ”احبازتی“ قیمتوں میں سے کوئی ایک دے گی، اسی لئے انہیں احبازتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا

$$(۲.۳۸) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

باب ۲. غیر تابَع وقت شرودنجر مساوات

جس کا ثبوت Ψ کی عمود زنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام c_n غیر تابَع وقت ہیں لہذا میں $t = 0$ پر ثبوت پیش کرتا ہوں۔ آپ باآسانی اس ثبوت کو عمومیّت دے کر کسی بھی t کے لئے ثبوت پیش کر سکتے ہیں)۔

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \right)^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

(یہاں بھی m پر مجموعہ لینے میں کرانیکر ڈیلٹا جب $m = n$ کو چنتا ہے۔)

مزید، توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً درج ذیل ہوگی

$$(۲.۳۹) \quad \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n$$

جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جاسکتی ہے: غیر تابَع وقت شرودنجر مساوات کہتی ہے

$$(۲.۴۰) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left(\sum c_m \psi_m \right)^* H \left(\sum c_n \psi_n \right) dx \\ &= \sum \sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum |c_n|^2 E_n \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابَع وقت ہوگا اور یوں H کی توقعاتی قیمت بھی غیر تابَع وقت ہوگی۔ کوانٹم میکانیات میں بتا توانائی^{۲۱} کی یہ ایک مثال ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تفاعل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال ψ_1 (شکل ۲.۲) کے ساتھ متربی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کرتے گے کہ $|c_1|^2$ غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 = 0.998555 \dots$$

باقی تمام عددی سرسمل کر منرق دیتے ہیں:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

^{۲۱} conservation of energy

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت ہماری توقعات کے عین مطابق درج ذیل ہے۔

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \right)^2 \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{480\hbar^2}{\pi^4ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2}$$

□ یہ $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ کے بہت قریب، ہیجان حل حالتوں کی شمول کی بنا معمولی زیادہ ہے۔

سوال ۲.۳: دکھائیں کہ لامستناہی چکور کنواں کے لئے $E = 0$ یا $E < 0$ کی صورت میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کا کوئی بھی متابل قبول حل نہیں پایا جاتا ہے۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک خصوصی صورت ہے، لیکن اس بار شرودنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط پر پورا نہیں اتر سکتے ہیں۔)

سوال ۲.۴: لامستناہی چکور کنواں کے n ویں ساکن حال کیلئے $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ اور σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول غیر یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال غیر یقینیت کی حد کے قریب ترین ہوگا؟

سوال ۲.۵: لامستناہی چکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج اولین دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔ (یعنی A تلاش کریں۔ آپ ψ_1 اور ψ_2 کی معیاری عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ $t = 0$ پر Ψ کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا۔ اگر آپ کو شک ہے، جزو ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ موحضہ الذکر کو وقت کے سائن تفاعل عمل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا۔ نتائج کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر $\omega \equiv \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$ لیں۔

ج. $\langle x \rangle$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔ اس ارتعاش کی زاویائی تعدد کتنی ہوگی؟ ارتعاش کا چیطہ کیا ہوگا؟ (اگر آپ کا چیطہ $\frac{a}{2}$ سے زیادہ ہو تب آپ کو جیل بھیجنے کی ضرورت ہوگی۔)

د. $\langle p \rangle$ تلاش کریں (اور اس سے زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ه. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش سے کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں؟ اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہوگا؟ H کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ E_1 اور E_2 کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگرچہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی با معنی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (چونکہ یہ کسی بھی متابل پیمائش مقدار میں کٹ جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر ہم سوال ۲.۵ میں ψ_1 اور ψ_2 کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کرتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنجر مساوات

جہاں ϕ کوئی مستقل ہے۔ $\Psi(x, t)$ ، $|\Psi(x, t)|^2$ اور $\langle x \rangle$ تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص $\phi = \pi/2$ اور $\phi = \pi$ کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامستثنیٰ چپکور کنواں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a - x), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

ا. $\Psi(x, 0)$ کا خاکہ کھینچیں اور مستقل A کی قیمت تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ E_1 ہونے کا احتمال کتنا ہوگا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک لامستثنیٰ چپکور کنواں، جس کی چوڑائی a ہے، میں کمیت m کا ایک ذرہ کنواں کے بائیں حصے سے ابتدا ہوتا ہے اور یہ $t = 0$ پر بائیں نصف حصے کے کسی بھی نقطہ پر ہو سکتا ہے۔

ا. اس کی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x, 0)$ تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے اور اسے معمول پر لانا بھولے گئے۔)

ب. پیمائش توانائی کا نتیجہ $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۲.۹: لمحہ $t = 0$ پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے H کی توقعاتی قیمت مکمل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$$

مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔ دھیان رہے کیونکہ H غیر تابع وقت ہے لہذا $t = 0$ لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

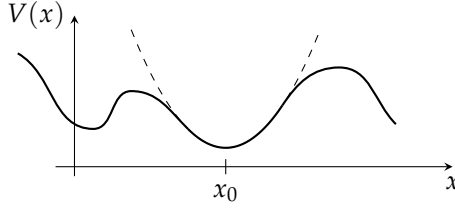
۲.۳ ہارمونی مرتعش

کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک پلک دار اسپرنگ جس کا مقیاس پلک k ہو اور کمیت m پر مشتمل ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت قانون ہکے^{۲۲}

$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

کے تحت ہوگی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$



شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے معتمی کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکانی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

ہوگا جہاں

$$(۲.۴۱) \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

$$(۲.۴۲) \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

ہوگی جس کی ترسیم قطع مکانی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی سر تعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور قانون ہک اس سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہوگا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، معتمی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں تخمین قطع مکانی ہوگا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی $V(x)$ کے کم سے کم نقطہ x_0 کے لحاظ سے $V(x)$ کو ٹیلر تسلسل^{۲۳} کے لحاظ سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

اس سے $V(x_0)$ مخفی کر کے (ہم $V(x)$ سے کوئی بھی مستقل بغیر خطرو منکر مخفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہوگا) اور یہ جانتے ہوئے کہ $V'(x_0) = 0$ ہوگا (چونکہ x_0 کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلند رتبہ ارکان رد کرتے ہوئے (جو $(x - x_0)$ کی قیمت کم ہونے کی صورت میں قابل نظر انداز ہونگے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

جو نقطہ x_0 پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس پگ $k = V''(x_0)$ ہو۔ یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا سادہ ہارمونی سر تعش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا محیط کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوگا۔

کو انٹرمیکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$(۲.۴۳) \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

کے لیے شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس پلک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات

$$(۲.۴۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو ”طاققت کے بل بوتے پر“ **طاققت تسلسل** کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولم مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **حالیہ سیدھی** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور جلد حل دیتا) ہے۔ اگر آپ طاققت تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپ کو یہ ترکیب سیکھنی ہوگی۔

۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتدا کرتے ہیں

$$(۲.۴۵) \quad \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2] \psi = E\psi$$

جہاں $p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$(۲.۴۶) \quad H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$$

کو کو اجزائے ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عداد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ p اور x عاملین ہیں اور عاملین عموماً مقلوبے نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ xp سے مراد px نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل مقداروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$(۲.۴۷) \quad a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp ip + m\omega x)$$

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخیری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب $a_- a_+$ کیا ہوگا؟

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو $(xp - px)$ پایا جاتا ہے جس کو ہم x اور p کا مقلب^{۲۵} کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیمائش ہے۔ عمومی طور پر عامل A اور عامل B کا مقلب (جسے چکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہوگا۔

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (۲.۴۸)$$

اس علاقیت کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar} [x, p] \quad (۲.۴۹)$$

ہمیں x اور عددی p کا مقلب دریافت کرنا ہوگا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہوگا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل $f(x)$ عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آختر میں اس پر کھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۰) \quad [x, p]f(x) = \left[x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = -i\hbar f(x)$$

پر کھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$[x, p] = i\hbar \quad (۲.۵۱)$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے باضابطہ مقلبیت^{۲۶} رشتہ کہلاتا ہے۔

اسے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (۲.۵۲)$$

یا

$$H = \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) \quad (۲.۵۳)$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیمیلٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا اور دائیں ہاتھ اضافی $-\frac{1}{2}$ ہوگا۔ یاد رہے گایاں a_+ اور a_- کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ a_+ کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$a_+a_- = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \quad (۲.۵۴)$$

بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$[a_-, a_+] = 1 \quad (۲.۵۵)$$

یوں ہیمیلٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = \hbar\omega \left(a_+a_- + \frac{1}{2} \right) \quad (۲.۵۶)$$

ہارمونی مرتعش کی شرودنگر مساوات کو a_{\pm} کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hbar\omega \left(a_{\pm}a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) = E\psi \quad (۲.۵۷)$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

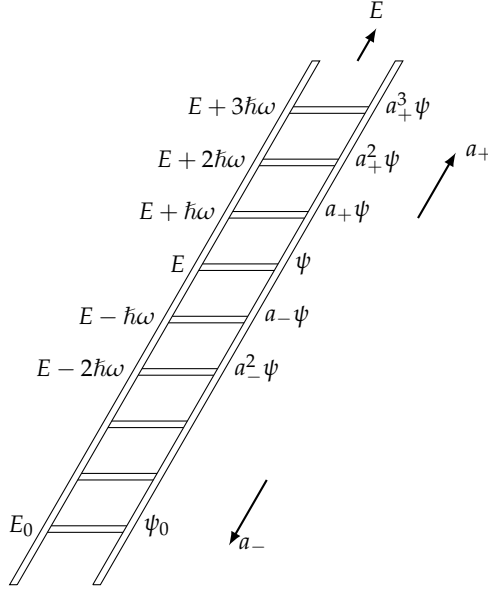
ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی E کی شرودنگر مساوات کو ψ مطمئن کرتا ہو ($H\psi = E\psi$) تب توانائی $(E + \hbar\omega)$ کی شرودنگر مساوات کو $a_+\psi$ مطمئن کرے گا: $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$ ثبوت:

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left(a_+a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega (a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+)\psi \\ &= \hbar\omega a_+ (a_-a_+ + \frac{1}{2})\psi = a_+ \left[\hbar\omega (a_+a_- + 1 + \frac{1}{2})\psi \right] \\ &= a_+ (H + \hbar\omega)\psi = a_+ (E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)(a_+\psi) \end{aligned}$$

(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے a_-a_+ کی جگہ $a_+a_- + 1$ استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ a_+ اور a_- کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے، a_{\pm} اور کسی بھی مستقل، مثلاً \hbar ، ω اور E کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہوگا۔)

اسی طرح حل $a_-\psi$ کی توانائی $(E - \hbar\omega)$ ہوگی۔

$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega \left(a_-a_+ - \frac{1}{2} \right) (a_-\psi) = \hbar\omega a_- (a_+a_- - \frac{1}{2})\psi \\ &= a_- \left[\hbar\omega (a_-a_+ - 1 - \frac{1}{2})\psi \right] = a_- (H - \hbar\omega)\psi = a_- (E - \hbar\omega)\psi \\ &= (E - \hbar\omega)(a_-\psi) \end{aligned}$$



شکل ۲.۵: ہارمونی مسرتش کے حالات کی ”سیڑھی“۔

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جانتے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ چونکہ $a \pm$ کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہذا انہیں ہم عاملین سیڑھی^{۲۷} پکارتے ہیں: a_+ عامل رفتی^{۲۸} اور a_- عامل تقلیل^{۲۹} ہے۔ حالات کی ”سیڑھی“ کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

ذرا کیے! عامل تقلیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہوگا جس کی توانائی صفر سے کم ہوگی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے)۔ نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہوگی۔ ایسا کیوں کر ہوگا؟ ہم جانتے ہیں کہ $a_- \psi$ شرودنگر مساوات کا ایک نیا حل ہوگا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جاسکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے متاثر بھی ہوگا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مسر بھی مکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہوگا: سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ (ψ_0 جس کو ہم ψ_0 کہتے ہیں) پر درج ذیل ہوگا۔

$$a_- \psi_0 = 0 \quad (۲.۵۸)$$

ladder operators^{۲۷}
raising operator^{۲۸}
lowering operator^{۲۹}

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\psi_0(x)$ تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

لکھی جاسکتی ہے جسے باآسانی حل کیا جاسکتا ہے:

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \implies \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

(C مستقل ہے۔) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ہم اس کو یہیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2 / \hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}}$$

لہذا $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}}$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۹) \quad \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شرودنگر مساوات میں پر کر کے

$$\hbar\omega(a_+ a_- + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$$

یہ جانتے ہوئے کہ $a_- \psi_0 = 0$ ہوگا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۰) \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

سیڑھی کے نچلا پایہ (جو کو انٹم مرتعش کا زمینی حال ہے) پر پیرکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جاسکتے ہیں۔^{۲۰} جہاں ہر قدم پر توانائی میں $\hbar\omega$ کا اضافہ ہوگا۔

$$(۲.۶۱) \quad \psi_n(x) = A_n (a_+)^n \psi_0(x), \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

^{۲۰} ہارمونی مرتعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے بہت کر، حالات کی شمار $n = 1$ کی بجائے $n = 0$ سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۵۱ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔

یہاں A_n مستقل معمول زنی ہے۔ یوں ψ_0 پر عامل رعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی سر تعش کے تمام ساکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسے بغیر ہم تمام احبازتی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

مثال ۲.۴: ہارمونی سر تعش کا پہلا ہیجان حال تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۱۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ (۲.۶۲) \quad &= A_1 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

ہم اس کو قلم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2 dx = |A_1|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} dx = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $A_1 = 1$ ہوگا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رعت استعمال کر کے ψ_5 حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محتاط چلنا ہوگا لہذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ ψ_n اور $a \pm \psi_{n\pm 1}$ ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$(۲.۶۳) \quad a_+ \psi_n = c_n \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = d_n \psi_{n-1}$$

تناسبی مستقل c_n اور d_n کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (ظاہر ہے کہ کلمات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ \pm پر $f(x)$ اور $g(x)$ کو لازماً صفر پہنچنا ہوگا۔)

$$(۲.۶۴) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx$$

(خطی الجبر کی زبان میں $a \mp$ اور $a \pm$ ایک دوسرے کے ہر مشق جوڑی دار^{۳۱} ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left(\mp \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) g dx$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

کمل بالخص کے ذریعے $\int f^* \left(\frac{dg}{dx} \right) dx$ سے $-\int \left(\frac{df}{dx} \right)^* g dx$ حاصل ہوگا (جہاں $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^* (a_{\pm} g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\pm \hbar \frac{d}{dx} + m \omega x \right) f \right]^* g dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx \end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_{\pm} \psi_n)^* (a_{\pm} \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} a_{\pm} \psi_n)^* \psi_n dx$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$(۲.۶۵) \quad a_+ a_- \psi_n = n \psi_n, \quad a_- a_+ \psi_n = (n+1) \psi_n$$

ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ \psi_n)^* (a_+ \psi_n) dx &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 dx = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_n)^* (a_- \psi_n) dx &= |d_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 dx = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx \end{aligned}$$

چونکہ ψ_n اور $\psi_{n\pm 1}$ معمول شدہ ہیں، لہذا $|c_n|^2 = n+1$ اور $|d_n|^2 = n$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۶) \quad a_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_+ \psi_0, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_+ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+)^2 \psi_0, \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} a_+ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a_+)^3 \psi_0, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_+ \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (a_+)^4 \psi_0, \end{aligned}$$

دیگر تفصیلات بھی اسی طرح حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۷) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ ہوگا۔ (بالخصوص $A_1 = 1$ ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لاستثنای چکور کٹواں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$(۲.۶۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دوبار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے a_+ اور بعد میں a_- اپنی جگہ سے ہٹا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(a_+ a_-) \psi_n dx &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \end{aligned}$$

جب تک $m = n$ نہ ہو $\int \psi_m^* \psi_n dx$ لازماً صفر ہوگا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم $\psi(x, 0)$ کو ساکن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عمودی مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت E_n حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے n ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔
حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx$$

اس قسم کے محمولات جن میں x یا p کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات x اور p کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$(۲.۶۹) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \quad p = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a_+ - a_-)$$

اس مثال میں ہم x^2 میں دلچسپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

اب اس درج ذیل ہوگا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} \int \psi_n^* [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2] \psi_n dx$$

اب (مساوائے معمول زنی کے) $\psi_n (a_+)^2$ تفاعل ψ_{n+2} کو ظاہر کرتا ہے جو ψ_n کو عمودی ہے۔ یہی کچھ $\psi_n (a_-)^2$ کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے جو ψ_{n-2} کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کر کے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(n + n + 1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

جیسا آپ نے دیکھا مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حرکی توانائی ہے)۔
 جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی مرتعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔ □

سوال ۲.۱۰:

ا. $\psi_2(x)$ تیار کریں۔

ب. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کا خاکہ کھینچیں۔

ج. ψ_0, ψ_1, ψ_2 کی عمودیت کی تصدیق مکمل لے کر صریحاً کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔

سوال ۲.۱۱:

ا. حالات ψ_0 (مساوات ۲.۵۹) اور ψ_1 (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح کلمات لے کر $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی مرتعش کے مسائل میں متغیر $\sqrt{m\omega/\hbar}x \equiv \xi$ اور متقل $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حرکی توانائی $\langle T \rangle$ اور اوسط مخفی توانائی $\langle V \rangle$ کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپ کو نیا مکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی مرتعش کے n ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$ اور $\langle T \rangle$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی مرتعش مخفی قوتہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

ا. تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x, t)$ اور $|\Psi(x, t)|^2$ تیار کریں۔

ج. $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں $\psi_1(x)$ کی بجائے $\psi_2(x)$ دیے تابت جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ اہر نفٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د۔ اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد ω پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس پلک 4 گنا ہو جاتا ہے لہذا $\omega' = 2\omega$ ہو گا جبکہ ابتدائی تعادل موج تبدیل نہیں ہو گا (یقیناً ہم مملثنی تبدیل ہونے کے بنا Ψ اب مختلف اندازے ارتقاء پائے گا)۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی $\hbar\omega/2$ قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ $\hbar\omega$ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی مرتعش کی شرودنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi \quad (۲.۴۰)$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلا واسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (۲.۴۱)$$

شرودنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K) \psi \quad (۲.۴۲)$$

جہاں K توانائی ہے جس کی اکائی $\frac{1}{2} \hbar\omega$ ہے۔

$$K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (۲.۴۳)$$

ہم نے مساوات ۲.۴۲ کو حل کرنا ہو گا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں K اور E کی ”اجبازتی“ قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔ ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں ξ کی قیمت (یعنی x کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں ξ^2 کی قیمت K کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگی لہذا مساوات ۲.۴۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi \quad (۲.۴۴)$$

جس کا تخمینہ حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$\psi(\xi) \approx A e^{-\xi^2/2} + B e^{+\xi^2/2} \quad (۲.۴۵)$$

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

اس میں B کا جزو معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہے (چونکہ $\infty \rightarrow |x|$ کرنے سے اس کی قیمت بے انتہا بڑھتی ہے)۔ طبی طور پر متبادل مقبول حل درج ذیل متغیر B صورت کا ہوگا۔

$$(۲.۷۶) \quad \psi(\xi) \rightarrow () e^{-\xi^2/2} \quad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے})$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت مضامین کو ”چھیلنا“ چاہیے،

$$(۲.۷۷) \quad \psi(\xi) = h(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے، $h(\xi)$ ، اس کی صورت $\psi(\xi)$ سے سادہ ہو۔^{۳۲} ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفصیلات

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \left(\frac{dh}{d\xi} - \xi h \right) e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2 h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h \right) e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہذا شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۷۸) \quad \frac{d^2 h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0$$

ہم ترکیبے فروبنیوس^{۳۳} استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل ξ کے طاقی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۷۹) \quad h(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفصیلات

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{d^2 h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 \xi + 3 \cdot 4a_4 \xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2} \xi^j$$

^{۳۲} اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمینے سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفصیلی مساوات کے طاقی تسلسل حل میں متغیر B کا چھیلنا معمولاً پہلا قدم ہوتا ہے۔

^{۳۳} Frobenius method

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۸۰) \quad \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j]\xi^j = 0$$

طریقہ تسلسل پھیلاؤ کے یکسانی کی بنا پر ہر طاقت کا عددی سر صفر ہوگا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۸۱) \quad a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

یہ کلیہ توانی^{۳۴} شروع و گنگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو a_0 سے ابتداء کرتے ہوئے تمام جفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12} a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24} a_0, \dots$$

اور a_1 سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6} a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20} a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120} a_1, \dots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۲.۸۲) \quad h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi)$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

متغیر ξ کا جفت تفاعل ہے جو از خود a_0 پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

طاق تفاعل ہے جو a_1 پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات a_0 اور a_1 کی صورت میں ξ تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجہ تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ j کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توانی (تخمیناً) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$$

جس کا تخمینہ حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

ہوگا جہاں C ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی j کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2}$$

اور اب اگر h کی قیمت e^{ξ^2} کے لحاظ سے بڑھے تب ψ (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں) $e^{\xi^2/2}$ (مساوات ۲.۴۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متقارب رویہ ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طاق متقی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر j کی ایک ایسی بلند ترین قیمت، n ، پائی جائے گی جو $a_{n+2} = 0$ دیتی ہو (یوں قیمت h تسلسل یا طاق h تسلسل اختتام پذیر ہوگا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہوگا؛ قیمت n کی صورت میں $a_1 = 0$ ہوگا جبکہ طاق n کی صورت میں $a_0 = 0$ ہوگا۔ یوں متقابل مقبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہوگا

$$K = 2n + 1$$

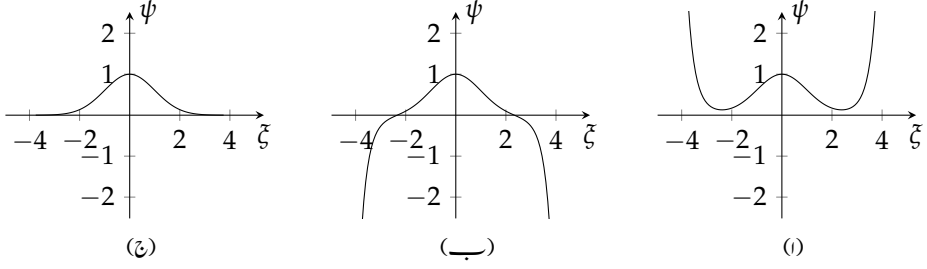
جہاں n کوئی غیر منفی عدد صحیح ہوگا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۴۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$(۲.۸۳) \quad E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹائزیشن شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹائزیشن، شرودنگر مساوات کے طاق متقی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً E کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۴۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر E کے لیے اس کے دو خطی غیر متابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی x پر، بے متابو قوت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنیاد معمول پر لانے کے قابل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم E کی کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً $0.49 \hbar \omega$) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-۱)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب E کی قیمت کسی ایک اجبازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً $0.51 \hbar \omega$) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-۲)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے قابل حل دے گی (شکل ۲.۶-۳)۔

کلیہ توانائی K کی اجبازتی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۸۴) \quad a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$



شکل ۲.۶: مساوات شروڈنگر کی (ا) $E = 0.49\hbar\omega$ ، (ب) $E = 0.51\hbar\omega$ اور (ج) $E = \hbar\omega$ صورت میں حل۔

اگر $n = 0$ ہو تب تسلسل میں ایک جزوی پایا جائے گا (ہمیں $a_1 = 0$ لینا ہو گا تاکہ طبق h خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۳ میں $j = 0$ سے $a_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم $n = 1$ کے لیے $a_0 = 0$ لیں گے ۲.۵ اور مساوات ۲.۸۳ میں $j = 1$ سے $a_3 = 0$ حاصل ہو گا، لہذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہو گا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم $n = 2$ کے لیے $j = 0$ لے کر $a_2 = -2a_0$ اور $j = 2$ لے کر $a_4 = 0$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا)۔ عمومی طور پر $h_n(\xi)$ متغیر ξ کا n درجی کشیر رکھتی ہو گا، جو جفت عدد صحیح n کی صورت میں

۲.۵ دھیان رہے کہ n کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں a_j کا ایک منسرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمانٹ کشیرر کنیاں $H_n(\xi)$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned}$$

جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح n کی صورت میں طاق طاقتوں کا کشیرر کنی ہوگا۔ جزو ضربی a_0 اور a_1 کے علاوہ یہ عین ہرمانٹے کیئر رکھنے $H_n(\xi)$ میں $3^۶$ ہیں۔ جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جزو ضربیوں منتخب کیا جاتا ہے کہ ξ کے بلند تر طاقت کا عددی سر 2^n ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی سر نقش کے معمول شدہ $3^۸$ کن حالات درج ذیل ہوں گے

$$(۲.۸۵) \quad \psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

شکل ۲.۷-۱۱ اور ب میں چند ابتدائی n کے لیے $\psi_n(x)$ اور $|\psi_n(x)|^2$ ترسیم کیے گئے ہیں۔ کو انٹم سر نقش حیران کن حد تک کلاسیکی سر نقش سے مختلف ہے۔ نہ صرف اس کی توانائیاں کوانٹا شدہ ہیں بلکہ اس کی موضعی تقسیم کے بھی عجیب خواص پائے جاتے ہیں۔ مثلاً کلاسیکی طور پر اجبازی سعت کے باہر (یعنی توانائی کے کلاسیکی حیط سے زیادہ x پر) ذرہ پایا جانے کا احتمال غیر صفر ہے (سوال ۲.۱۵ دیکھیں) اور تمام طاق حالات میں عین وسط پر ذرہ پائے جانے کا احتمال صفر ہے۔ کلاسیکی اور کوانٹائی صورتوں میں مشابہت صرف n کی بڑی قیمتوں پر پائی جاتی ہے۔ میں نے شکل ۲.۷-۲ ج میں کلاسیکی موضعی تقسیم کو $n = 10$ کے کوانٹائی موضعی تقسیم پر ترسیم کیا ہے۔ انہیں ہموار کرنے سے یہ ایک دوسرے پر اچھی طرح بیٹھتے ہیں (البتہ کلاسیکی صورت میں ہم ایک ارتعاش میں وقت کے لحاظ سے معتام کی تقسیم کی بات کرتے ہیں جبکہ کوانٹائی صورت میں ہم یکساں تیار کردہ حالات کے ایک سگر کی تقسیم کی بات کرتے ہیں)۔^{۳۹}

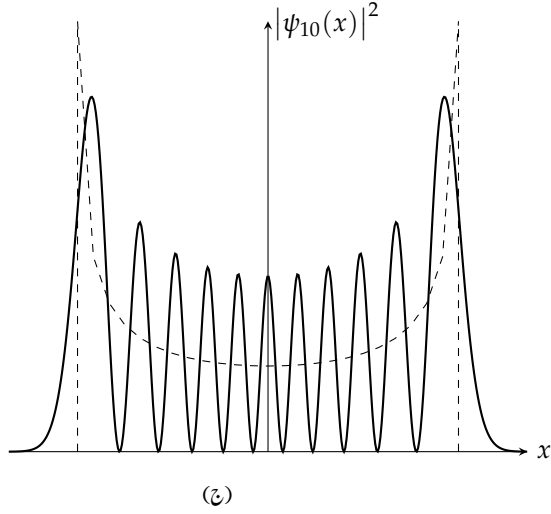
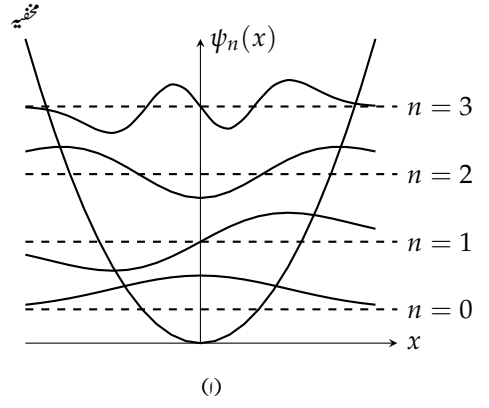
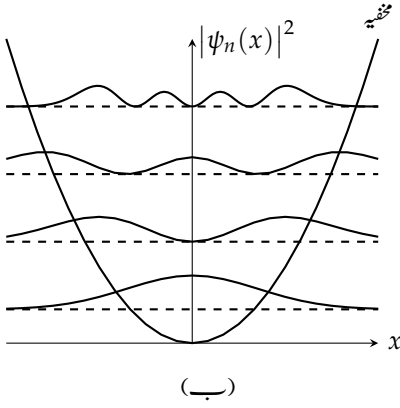
سوال ۲.۱۵: ہارمونی سر نقش کے زمینی حال میں کلاسیکی اجبازی خطے کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین با معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک سر نقش کی توانائی $E = (1/2)ka^2$ ہوگی جہاں a حیط ہے۔ یوں توانائی E کے سر نقش کا ”کلاسیکی اجبازی خطہ“ $\sqrt{2E/m\omega^2}$ تا

Hermite polynomials^{۳۶}

^{۳۷} ہرمانٹ کشیرر کنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

^{۳۸} میں یہاں معمولی متقلات حاصل نہیں کروں گا۔

^{۳۹} کلاسیکی تقسیم کو ایک حبیبی توانائی کے متعدد سر تقشات، جن کے نقاط آغز بلا منصوب ہوں، کا سگر تصور کرتے ہوئے یہ ممال زیادہ بہتر ہوگا۔



شکل ۲: پارمونی سر تعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

باب ۲. غنیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$\sqrt{2E/m\omega^2}$ ہوگا۔ مکمل کی قیمت ”عمومی تقسیم“ یا ”تفاعل حائل“ کی جدول سے دیکھیں۔

سوال ۲.۱۶: کلیہ توانی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے $H_5(\xi)$ اور $H_6(\xi)$ تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر ξ کی بلند تر طاقت کا عددی سرروایت کے تحت 2^n لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہم ہر مائٹ کشیررکٹی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

۱. کلیہ روڈریگیس^{۴۰} درج ذیل کہتا ہے۔

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (۲.۸۶)$$

اس کو استعمال کر کے H_3 اور H_4 اخذ کریں۔

ب. درج ذیل کلیہ توانی گزشتہ دوہر مائٹ کشیررکٹیوں کی صورت میں H_{n+1} دیتا ہے۔

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi) \quad (۲.۸۷)$$

اس کو جزو-۱ کے نتائج کے ساتھ استعمال کر کے H_5 اور H_6 تلاش کریں۔

ج. اگر آپ n رتبی کشیررکٹی کا تفرق لیں تو آپکو $1 - n$ رتبی کشیررکٹی حاصل ہوگی۔ ہر مائٹ کشیررکٹیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\frac{dH_n}{d\xi} = 2n H_{n-1}(\xi) \quad (۲.۸۸)$$

جس کی تصدیق ہر مائٹ کشیررکٹی H_5 اور H_6 کے لئے کریں۔

د. پیداکار تفاعل^{۴۱} $e^{-z^2+2z\xi}$ کا z پر n واں تفرق $H_n(\xi)$ ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر پھیلاؤ میں یہ $z^n/n!$ کا عددی سر ہوگا۔

$$e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) \quad (۲.۸۹)$$

اس کو استعمال کر کے H_0 ، H_1 اور H_2 دوبارہ اخذ کریں۔

۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے پرچگہ $V(x) = 0$ ہوگا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہونی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہوگی، لیکن کوانٹم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر متابع وقت شرودنگر مساوات ذیل

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi \quad (۲.۹۰)$$

یا ذیل ہے۔

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۲.۹۱)$$

یہاں تک یہ لامتناہی چکور کنواں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوت صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نہ (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہوگی۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (۲.۹۲)$$

لامتناہی چکور کنواں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو k (اور یوں E) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تابعیت وقت $e^{-iEt/\hbar}$ جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) = Ae^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x + \frac{\hbar k}{2m}t)} \quad (۲.۹۳)$$

ایسا کوئی بھی تغاقل جو x اور t متغیرات کی مخصوص جوڑ $(x \pm vt)$ کا تابع ہو (جہاں v مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو v رفتار سے $\mp x$ رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تغاقل کے دلیل^۲ کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہوگا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x = \mp vt + \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (یعنی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں منفرق صرف k کی علامت کا ہے لہذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} \quad (۲.۹۴)$$

جہاں k کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$(۲.۹۵) \quad k \equiv \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے ”ساکن حالات“ حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۶) \quad p = \hbar k$$

ان امواج کی رفتار (یعنی t کا عددی سر تقسیم x کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۷) \quad v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی E ہو (جو حتمی حرکت کی ہوگی چونکہ $V = 0$ ہے) کی کلاسیکی رفتار $E = \frac{1}{2}mv^2$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۹۸) \quad v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}}$$

ظاہری طور پر کوانٹم میکانیکی تفاعلی موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاعلی موج معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے۔

$$(۲.۹۹) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2 (\infty)$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں متقابل علیحدگی حل طبعی طور پر متقابل مقبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جاسکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ متقابل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تاجع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی متقابل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ n پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر k کے لحاظ سے مکمل ہوگا)۔

$$(۲.۱۰۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

(نم) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ کو اپنی آسانی کیلئے مکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر c_n کی جگہ یہاں $\phi(k)$ (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جاسکتا ہے۔ اب اس تفاعلی موج کو (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جاسکتا ہے۔

ہے۔ تاہم اس میں k کی قیمتوں کی سعت پائی جائے گی، لہذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائے گی۔ ہم اس کو موجی اکٹھ^{۴۳} کہتے ہیں۔

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں $\Psi(x, 0)$ مندرہم کر کے $\Psi(x, t)$ تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk \quad (2.101)$$

پر پورا اترتا ہوا $\psi(k)$ کیے تعین کیا جائے؟ یہ فوریر تبدیل کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب مسئلہ پلانشرل^{۴۵}:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.102)$$

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰، دیکھیں)۔ $F(k)$ کو $f(x)$ کا فوریر بدل^{۴۶} کہا جاتا ہے جبکہ $f(x)$ کو $F(k)$ کا الٹے فوریر بدل^{۴۷} کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نسائی علامت کا مندرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، احبازنی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: مکمل کا موجود^{۴۸} ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقاصد کے لئے، تفاعل $\Psi(x, 0)$ پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں $\phi(k)$ درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx \quad (2.103)$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ $-a \leq x \leq a$ میں رہنے کا پابند ہو کو وقت $t = 0$ پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔ $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔

^{۴۳} wave packet

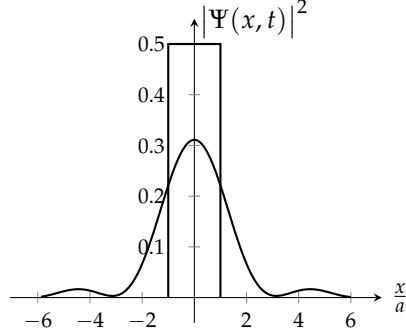
^{۴۴} سائنس دانوں کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنا مقام ہندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

^{۴۵} Plancherel's theorem

^{۴۶} Fourier transform

^{۴۷} inverse Fourier transform

^{۴۸} تفاعل $f(x)$ پر عائد لازم کافی پابندی یہ ہے کہ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ متناہی ہو۔ (ایسی صورت میں $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk$ بھی متناہی ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں کمالات کی قیمتیں ایک دوسری پیشی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)



شکل ۲.۸: تفاعل $|\Psi(x, t)|^2$ کی لحاظ سے $t = 0$ پر مستطیل اور $t = ma^2/\hbar$ پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۳)۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^a dx = 2a |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے $\psi(k)$ تلاش کرتے ہیں۔

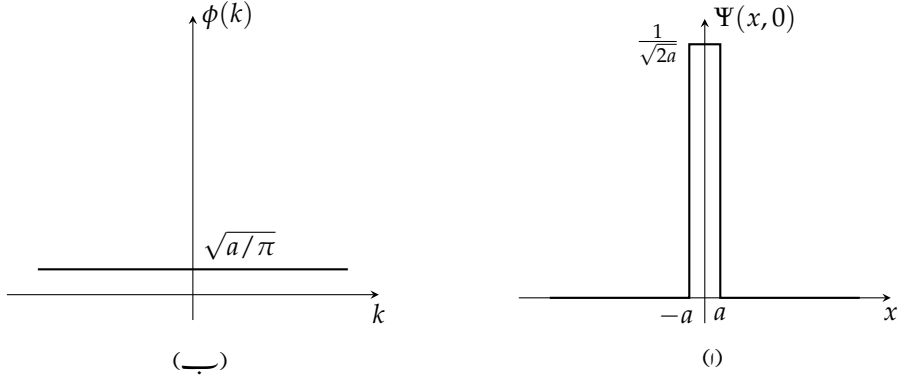
$$\begin{aligned} \phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$(۲.۱۰۴) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk$$

بد قسمتی سے اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقت پائی جاتی ہیں جن کے لئے $\Psi(x, t)$ کا تکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر a کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمینہ $\sin ka \approx ka$ لکھ کر درج



شکل ۲.۹: چھوٹے a کے لئے مثال ۲.۶ (ا) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم؛ (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم۔

ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

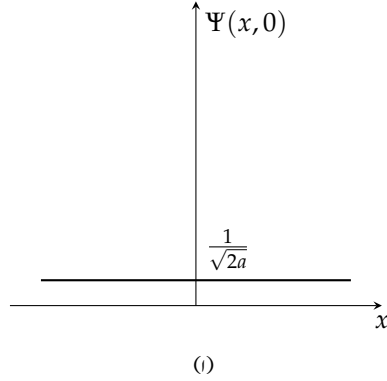
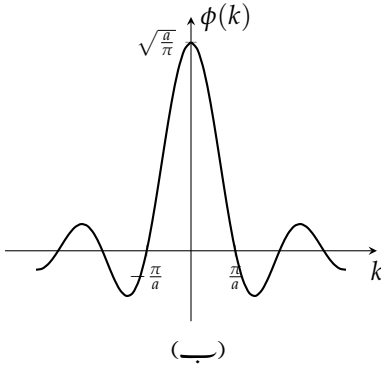
جو k کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاؤ کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہذا k ، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا پھیلاؤ لازماً زیادہ ہوگا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی a) کی صورت میں مقام کا پھیلاؤ زیادہ ہوگا (شکل ۲.۱۰) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ka}{ka}$$

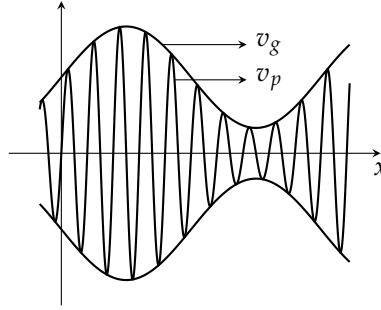
اب $\sin z/z$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر $\pm\pi$ (جو یہاں $k = \pm\pi/a$ کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی a کیلئے $k = 0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل $\Psi_k(x, t)$ ، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ Ψ_k طبعی طور پر قابل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تقاضا عمل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سموی سستی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصورات یوں ہے: سائن متعلقہ حالات کا خطی میل جس کے حیطہ کو ϕ ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہوگا؛ یہ ”علائف“ میں ڈھانکے ہوئے ”لہروں“ پر مشتمل ہوگا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو دوری سمتی رفتار^۹ (v_p)

^۹ phase velocity



شکل ۲.۱۰: a کے لئے (i) $\Psi(x, 0)$ کی ترسیم، (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ ”عنائف“ گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ عنائف کی رفتار، جس کو گروہی سمتی رفتار v_g کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہوگی۔ عنائف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہوگی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھماگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہوگی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہوگا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا محیط بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا محیط گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہو گا کہ کوانٹم میکانیات میں آزاد ذرے کے تفاعل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہوگی۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

(یہاں $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$ ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جبار ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے انتشاری رشتہ^{۵۱} $\omega(k)$ کا متغیر k کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہوگا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی k_0 پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا k بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنیاد موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ k_0 سے دور مکمل و متابل نظر انداز ہے لہذا ہم تقاضا $\omega(k)$ کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega'_0(k - k_0)$$

جہاں نقطہ k_0 پر k کے لحاظ سے ω کا تفرق ω'_0 ہے۔

(مکمل کے وسط کو k_0 پر منتقل کرنے کے عنصر سے) ہم متغیر k کی جگہ متغیر $s = k - k_0$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0 + s)x - (\omega_0 + \omega'_0 s)t]} ds$$

وقت $t = 0$ پر

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)x} ds$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega'_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)(x - \omega'_0 t)} ds$$

ماسوائے x کو $(x - \omega'_0 t)$ منتقل کرنے کے یہ $\Psi(x, 0)$ میں پایا جانے والا مکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۰۵) \quad \Psi(x, t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} \Psi(x - \omega'_0 t, 0)$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں $|\Psi|^2$ کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوگا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار ω'_0 سے حرکت کرے گا:

$$(۲.۱۰۶) \quad v_{گروہی} = \frac{d\omega}{dk}$$

باب ۲. غیر تاجع وقت شرودنجر مساوات

(جس کی قیمت کا حاب $k = k_0$ پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$v_{دوری} = \frac{\omega}{k} \quad (۲.۱۰۷)$$

یہاں $\omega = (\hbar k^2/2m)$ یعنی $\omega/k = (\hbar k/2m)$ ہے جبکہ $d\omega/dk = (\hbar k/m)$ ہے جو دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروپی سمتی رفتار نا کہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$v_{دوری} = 2v_{کلاسیکی} \quad (۲.۱۰۸)$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر x کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$ اور $[C \cos kx + D \sin kx]$ ہیں۔ مستقالات C اور D کو مستقالات A اور B کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقالات A اور B کو مستقالات C اور D کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کو انٹرمیکانیات میں جب $V = 0$ ہو، قوت نمائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ \sin اور \cos ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامستناہی چپور کنواں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال رو J تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے ہوا کا رخ کیا ہوگا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ مستناہی وقفہ کے فوریسر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامستناہی تک بڑھاتے گے۔

۱. مسئلہ ڈرشل کہتا ہے کہ وقفہ $[-a, +a]$ پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو فوریسر تسلسل کے پھیلاوے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

a_n اور b_n کی صورت میں c_n کیا ہوگا؟

ب. فوریسر تسلسل کے عددی سرور کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} dx$$

ج. n اور c_n کی جگہ نئے متغیرات $k = (\frac{n\pi}{a})$ اور $ac_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(k)$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ
 جسزہ-۱ اور جسزہ-۲ درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx,$$

جہاں ایک n سے اگلی n تک k میں تبدیلی Δk ہے۔

د. حد $a \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ: $F(k)$ کی صورت میں $f(x)$ اور $f(x)$ کی صورت میں $F(k)$ کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوں گی۔ اس کے باوجود حد $a \rightarrow \infty$ کی صورت میں ان دونوں کی ساخت ایک دوسرے کے ساتھ مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-a|x|}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\phi(k)$ تلاش کریں۔

ج. $\Psi(x, t)$ کو تکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں a بہت بڑا ہو، اور جہاں a بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: گاؤس موج اکٹھا ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-ax^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں (a حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\Psi(x, t)$ تلاش کریں۔ اشارہ: ”مربع مکمل کرتے ہوئے“ درج ذیل روپ کے تکمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

مان لیں $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$ ہے۔ یوں $(ax^2 + bx) = y^2 - (b^2/4a)$ ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج. $|\Psi(x, t)|^2$ تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل متدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1 + (2\hbar a t / m)^2}}$$

وقت $t = 0$ پر $|\Psi|^2$ کا حاک کہ (بطور x کا تفاعل) بنائیں۔ کسی بڑے t پر دوبارہ حاک کہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $|\Psi|^2$ کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں $\langle x \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ ؛ اور احتمالات σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$ ، تاہم جواب کو اس سادہ روپ میں لانے کیلئے آپ کو کافی الجبرا کرنا ہوگا۔

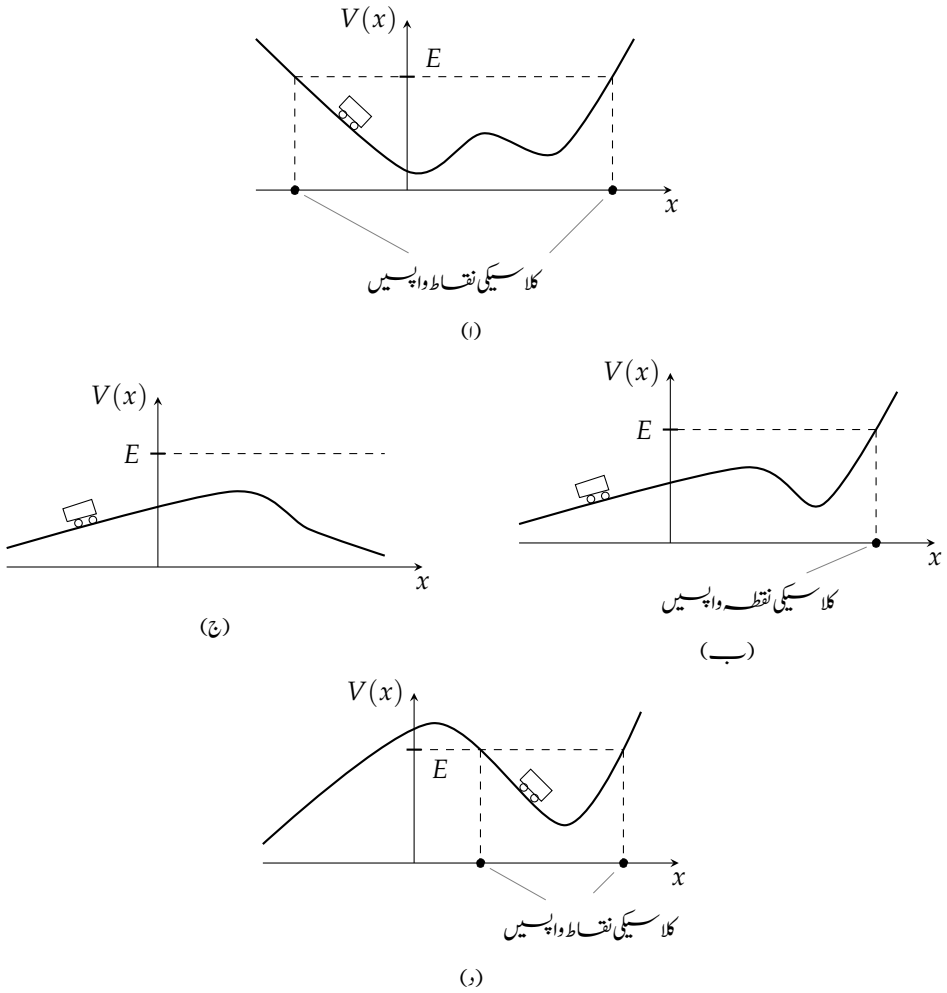
ه. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کارآمد ہے؟ کس لمحہ t پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ

۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات

ہم غیر تاجع وقت شروع و نگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چکور کنواں اور ہارمونی سرقتش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اعشاریہ n کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر k کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تاجع وقت شروع و نگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ (n پر ایسا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ (k پر) نکل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تاجع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر $V(x)$ ذرے کی کل توانائی E سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-۱) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنواں میں ”پھنسا“ رہے گا: یہ **واپس نقاط** E کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنواں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے مقید **حالت** E کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر E ایک (یا دونوں) جانب $V(x)$ سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-۲ ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **بکھراو حالت** E کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی سرقتش)؛ بعض صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پہاڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔



شکل ۲.۱۲: (ا) مقید حال، (ب، ج) بکھر احوالات، (د) کلا سیکنی مقید حال، لیکن کوانٹائی بکھر احوال۔

باب ۲. غیر تاج وقت شرودنگر مساوات

شرودنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ مندرجہ اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں سرنگے زلف^{۵۵} (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی مستثنیٰ مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہذا مخفیہ کی قیمت صرف لامتناہی پراہم ہوگی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$\begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \quad (۲.۱۰۹)$$

”روزمرہ زندگی“ میں لامتناہی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں ملمہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$\begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \quad (۲.۱۱۰)$$

چونکہ $\pm\infty \rightarrow x$ پر لامتناہی چکور کٹواں اور ہارمونی سرعش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہذا یہ صرف بکھراو حال^{۵۶} پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

۲.۵.۲ ڈیلٹا تعامل کٹواں

مبداء پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا تعامل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل ۱۳.۲) ڈیلٹا تعامل^{۵۷} کہلاتا ہے۔

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (۲.۱۱۱)$$

نقطہ $x = 0$ پر یہ تعامل مستثنیٰ نہیں ہے لہذا تکنیکی طور پر اس کو تعامل کہنا غلط ہوگا (ریاضی دان اسے متعمم تعامل^{۵۸} یا متعمم تقیم^{۵۹} کہتے ہیں)۔ تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کشافیت بار ایک ڈیلٹا تعامل ہوگا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\delta(x - a)$ نقطہ a پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تعامل ہوگا۔ چونکہ $\delta(x - a)$ اور ایک سادہ تعامل $f(x)$ کا

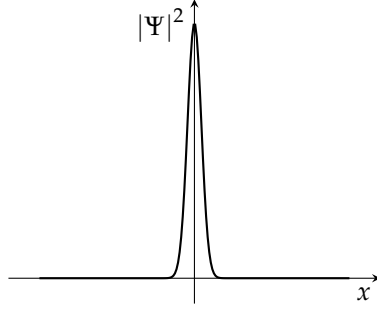
^{۵۵}tunneling
^{۵۶}آپ کو یہاں پریشانی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے $E > V$ درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھراو حال، جو معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہوگا۔ اگر آپ اسے مطمئن نہیں ہیں تب $E \leq 0$ کے لئے مساوات شرودنگر کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

^{۵۷}Dirac delta function

^{۵۸}generalized function

^{۵۹}generalized distribution

^{۶۰}ڈیلٹا تعامل کو ایسے مستطیل (یا مثلث) کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے جس کی چوڑائی بہت درجہ کم اور قد بہت درجہ بڑھتا ہو۔



شکل ۲.۱۳: ڈیراک ڈیلٹا فنکشن (مساوات ۲.۱۱۱)

حاصل ضرب نقطہ a کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوگا لہذا $\delta(x - a)$ کو $f(x)$ سے ضرب دینا، اسے $f(a)$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$(۲.۱۱۲) \quad f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ڈیلٹا فنکشن کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$(۲.۱۱۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ a پر فنکشن $f(x)$ کی قیمت ”اٹھاتا“ ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ ہو، صرف اتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ a شامل ہو لہذا $a - \epsilon$ تا $a + \epsilon$ تکمل لینا کافی ہوگا جہاں $\epsilon > 0$ ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں α ایک مثبت مستقل ہے۔^{۱۱}

$$(۲.۱۱۴) \quad V(x) = -\alpha\delta(x)$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامستناہی چکور کنواں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانیاں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا فنکشن کنواں کے لیے شروع و نگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۲.۱۱۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi$$

جو مقید حالات ($E < 0$) اور بکھراؤ حالات ($E > 0$) دونوں پیدا کرتی ہے۔

^{۱۱} ڈیلٹا فنکشن کی اکائی ایک بٹا سبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہذا α کا بعد توانائی ضرب سبائی ہوگا۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ $x < 0$ میں $V(x) = 0$ ہوگا لہذا

$$(۲.۱۱۶) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = k^2 \psi$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں k درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے E منفی ہوگا لہذا k حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$(۲.۱۱۷) \quad k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$(۲.۱۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

ہوگا جہاں $x \rightarrow -\infty$ پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا ہمیں $A = 0$ منتخب کرنا ہوگا:

$$(۲.۱۱۹) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad (x < 0)$$

خطہ $x > 0$ میں بھی $V(x)$ صفر ہے اور عمومی حل $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا؛ اب $x \rightarrow +\infty$ پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا $G = 0$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل ایسا جائے گا۔

$$(۲.۱۲۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad (x > 0)$$

ہمیں نقطہ $x = 0$ پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہو گا۔ میں ψ کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

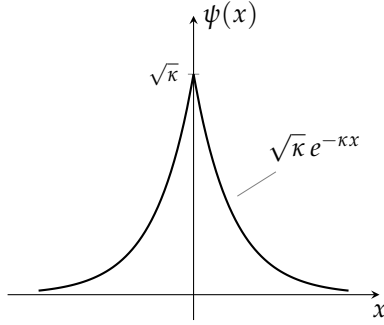
$$(۲.۱۲۱) \quad \begin{cases} 1. & \psi \text{ لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{d\psi}{dx} \text{ استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفی لامتناہی ہو} \end{cases}$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت $F = B$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۲) \quad \psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases}$$

تفاعل $\psi(x)$ کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا متناہی چکوروں کی طرح) جوڑ پر مخفی لامتناہی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ $x = 0$ پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلک تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر ψ کے تفرق میں عدم استمراری ڈیلک تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$(۲.۱۲۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x) \psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx$$



شکل ۲.۱۳: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

پہلا عمل در حقیقت دونوں آخری نقاط پر $\frac{d\psi}{dx}$ کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری عمل اس پٹی کا رقبہ ہوگا، جس کا قدمتناہی، اور $\epsilon \rightarrow 0$ کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہذا یہ عمل صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۴) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہوگا لہذا $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہوگا۔ لیکن جب سرح پر $V(x)$ لامتناہی ہو تب یہ دلیل متاثر نہیں ہوگی۔ بالخصوص $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$(۲.۱۲۵) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

یہاں درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x > 0) \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x < 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{+} = -Bk \\ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہذا $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$ ساتھ ہی $\psi(0) = B$ ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$(۲.۱۲۶) \quad k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$(۲.۱۲۷) \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

آخر میں ψ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذر کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۸) \quad B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلٹا فنکشن عمل کی ”زور“ α کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$(۲.۱۲۹) \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

ہم $E > 0$ کی صورت میں بکھراؤ حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شرودنگر مساوات $x < 0$ کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۳۰) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۱۳۱) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

جہاں کوئی بھی جبزولے متاثر نہیں ہڑھتا ہے لہذا انہیں رد نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $x > 0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

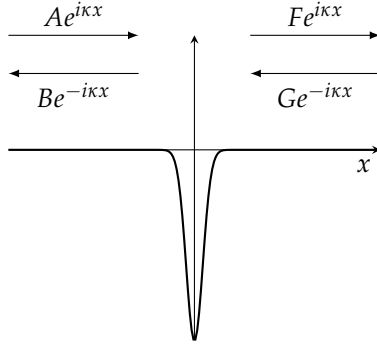
$$(۲.۱۳۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۳) \quad F + G = A + B$$

تفسیرات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), & (x > 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & (x < 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$



شکل ۲.۱۵: ڈیٹا انتفاع عمل کنواں سے بکھراؤ۔

لہذا $\Delta(d\psi/dx) = ik(F - G - A + B)$ ہوگا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = (A + B)$ ہوگا لہذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$(۲.۱۳۲) \quad ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$$

یا مختصراً:

$$(۲.۱۳۵) \quad F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات A ، B ، C اور D بلکہ k شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہوگا۔ بہتر ہوگا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی طبعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ e^{ikx} (کے ساتھ تایع وقت جزو ضربی $e^{-iEt/\hbar}$ منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا انتفاع عمل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح e^{-ikx} بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل A بائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے، B بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا حیطہ ہے، F (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا حیطہ جبکہ H دائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراؤ کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا حیطہ صفر ہوگا:

$$(۲.۱۳۶) \quad G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراؤ}$$

آمدی موج کا حیطہ A ، منکسر موج کا حیطہ B جبکہ ترسیل موج کا حیطہ F ہوگا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو B اور F

incident wave^{۱۲}
reflected wave^{۱۳}
transmitted wave^{۱۴}

کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$(۲.۱۳۷) \quad B = \frac{i\beta}{1-i\beta} A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta} A$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراؤ کا مطالعہ کرنا چاہیں تب $A = 0$ ہوگا؛ G آمدی جیٹ، F منعکس جیٹ، اور B ترسیلی جیٹ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال $|\psi|^2$ ہوتا ہے لہذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۳۸) \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

جہاں R کو **شرح انعکاس**^{۶۶} کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو R آپ کو بتائے گا کہ ٹکرانے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہوگا جسے **شرح ترسیل**^{۶۷} کہتے ہیں۔

$$(۲.۱۳۹) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہوگا۔

$$(۲.۱۴۰) \quad R + T = 1$$

دھیان رہے کہ R اور T متغیر β کے لہذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵) E کے تفاعل ہوں گے۔

$$(۲.۱۴۱) \quad R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}}$$

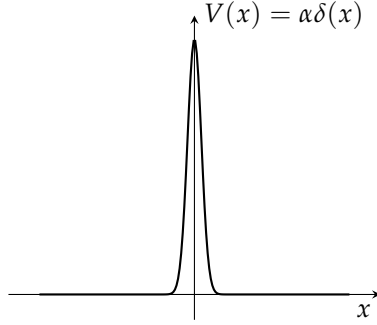
زیادہ توانائی ترسیل کا احتمال بڑھاتی ہے جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے۔

یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے لیکن ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ بکھراؤ موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں، لیکن ہم اس مسئلے کا حل جاننے ہیں۔ ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہوں گے جو معمول پر لانے جانے کے قابل ہوں، جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھے ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد

^{۶۶} یہ معمول پر لانے کے قابل تفاعل نہیں ہے لہذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہوگا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

^{۶۷} reflection coefficient

^{۶۸} transmission coefficient



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

سے حل کرنا بہتر ہو گا۔^{۶۸} چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جاسکتا ہے لہذا R اور T کو (بالترتیب) E کے قریب ذرات کی تخمینی شرح انکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم اب اسباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بکھر کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مادرات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں) ψ ایک مخلوط، غیر تابع وقت، سائن تفاعل ہے جو (مستقل جیٹ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مل کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے تفاعل موج، جن کی تابعیت وقت نہ ہونے کے برابر ہو، کے خطی جوڑ لے کر ایک (سرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے (سوال ۲.۴۳)

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف α کی علامت تبدیل کرنی ہوگی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انکاس اور شرح ترسیل جو α^2 پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ایک ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنواں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی فاصلہ کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بکھراؤ غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $V > E$ ہو تب $R = 0$ اور $T = 1$ ہو گا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا! اگر $V < E$ ہو تب $T = 0$ اور $R = 1$ ہو گا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بکھراؤ زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $V > E$ ہو تب بھی ایک ذرہ کے مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہو گا۔ اس مظہر کو **سرنگے زنی**^{۶۹} کہتے ہیں

^{۶۸} کنواں اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھ کے بکھراؤ کے اعدادی مطالعہ دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔
^{۶۹} tunneling

جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کے پشت پر ہے۔ اس کے برعکس بندر $V > E$ کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہوگا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کودیں اور توقع رکھیں کہ کو انٹیمیکانیات آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل نکلمات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$۱. \int_{-3}^{+1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \delta(x + 2) dx$$

$$ب. \int_0^{\infty} [\cos(3x) + 2] \delta(x - \pi) dx$$

$$ج. \int_{-1}^{+1} e^{|x|+3} \delta(x - 2) dx$$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا تفاعلات زیر علامت مکمل رہتے ہیں اور دو دفترے $D_1(x)$ اور $D_2(x)$ جو ڈیلٹا تفاعل پر مستحکم ہیں صرف درج صورت میں ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx$$

جہاں $f(x)$ کوئی بھی سادہ تفاعل ہو سکتا ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$(۲.۱۴۲) \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$$

جہاں c ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی c کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. سیرہ تفاعل $\theta(x)$ درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم $\theta(0)$ کی تعریف $\frac{1}{2}$ کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ $\delta(x) = d\theta/dx$ ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ ψ کے تفرق کا $x = 0$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے لہذا $\langle p^2 \rangle$ کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴ ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جبزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل $\delta(x)$ کا فورسیر تبادل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۲.۱۴۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

تبصرہ: یہ کلیہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگر چہ $x = 0$ کے لئے یہ مکمل لامستثنائی ہے اور $x \neq 0$ کی صورت میں چونکہ مکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوند کاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم $-L$ تا $+L$ مکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو، $L \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے مستثنائی مکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع تکمیل) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا فنکشن عمل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۵۹ پر مربع تکمیل کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲: درج ذیل حبڑواں ڈیلٹا فنکشن عمل مخفیہ پر غور کریں جہاں α اور a مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

۱. اس مخفیہ کا خنک کہہ سکتے ہیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟ $\alpha = \hbar^2/ma$ اور $\alpha = \hbar^2/4ma$ کیلئے احباب ذی توانیاں تلاش کریں اور فنکشن عملات مون کا خنک کہہ سکتے ہیں۔

سوال ۲.۲۸: حبڑواں ڈیلٹا فنکشن عمل کے مخفیہ (سوال ۲.۲) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

۲.۶ مستثنائی چکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر مستثنائی چکور کنواں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (۲.۱۴۵)$$

لیتے ہیں جہاں V_0 ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۱۷.۲)۔ ڈیلٹا فنکشن عمل کنواں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں $E < 0$ ہوگا) کے ساتھ ساتھ کھراؤ حالات (جہاں $E > 0$ ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خط $x < -a$ میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شرودنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۲.۱۴۶)$$

باب ۲. غیر تانج وقت شرودنگر مساوات

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$ ہے لیکن $x \rightarrow -\infty$ کے صورت میں اس کا پہلا جزو بے فتاوہ بڑھتا ہے لہذا (ہمیشہ طرح: مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۷) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad x < -a$$

خط $-a < x < a$ میں جہاں $V(x) = -V_0$ ہے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -V_0 \psi$$

جہاں l درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۸) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے E منفی ہے تاہم $E > V$ کی بنا (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو $-V_0$ سے بڑا ہونا ہوگا؛ لہذا l بھی حقیقی اور مثبت ہوگا۔ اس کا عمومی حل^۱

$$(۲.۱۴۹) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), \quad -a < x < a$$

جہاں C اور D اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خط $x > a$ جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے، عمومی حل $\psi(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہوگا لیکن یہاں $x \rightarrow \infty$ کی صورت میں دوسرا جزو بے فتاوہ بڑھتا ہے لہذا قابل قبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad x > a$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے: ψ اور $\frac{d\psi}{dx}$ نقاط $-a$ اور a پر استمراری ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دیا گیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق ہوں گے (سوال ۲.۱ ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً $+a$) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ $\psi(-x) = \pm \psi(x)$ ہے لہذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہوگا۔ میں جفت حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے ہوں گے۔ \cos جفت ہے (جبکہ \sin طاق ہے) لہذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$(۲.۱۵۱) \quad \psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

^۱ آپ جانتے ہیں تو عمومی حل کو قوت نئی روپ $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$ میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی وہی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشکیلی مخفیہ کی بنا ہم جانتے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور \sin اور \cos کا استعمال اس حقیقت کو بلا واسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔

نقطہ $x = a$ پر $\psi(x)$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$Fe^{-\kappa a} = D \cos(la) \quad (۲.۱۵۲)$$

جبکہ $\frac{d\psi}{dx}$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$-\kappa Fe^{-\kappa a} = -lD \sin(la) \quad (۲.۱۵۳)$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\kappa = l \tan(la) \quad (۲.۱۵۴)$$

چونکہ κ اور l دونوں E کے تفاعل میں لہذا اس کلیہ سے احبازتی توانائیاں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ احبازتی توانائی E کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad (۲.۱۵۵)$$

مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$ اور ہوگا لہذا $\sqrt{z_0^2 - z^2}$ کا κa ہوگا اور مساوات ۲.۱۵۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (۲.۱۵۶)$$

یہ z (لہذا E) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر z_0 ہے (جو کنواں کی ”جامت“ کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقے سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جاسکتا یا $\tan z$ اور $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے (شکل 18.2)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. موٹا ایک چوڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی z_0 کی صورت میں طاق n کے لئے نقاط تقاطع $z_n = n\pi/2$ سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} \quad (۲.۱۵۷)$$

اب $E + V_0$ کنواں کی تہ کے اوپر توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں $2a$ چوڑائی کے لامستثنائی چپکوروکنواں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ n یہاں طاق ہے لہذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہوگی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفاعل موج سے حاصل ہوگی)۔ یوں $\infty \rightarrow V_0$ کرنے سے مستثنائی چپکوروکنواں سے لامستثنائی چپکوروکنواں حاصل ہوگا؛ تاہم کسی بھی مستثنائی V_0 کی صورت میں مقید حالات کی تعداد مستثنائی ہوگی۔

ب. کم گہرا کم چوڑا کنواں جیسے جیسے z_0 کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم سے کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ آخر کار ($z_0 < \pi/2$) کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا) صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی ”کمزور“ کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔

اگر آپ ψ (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراؤ حالات $E > 0$ کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ ہوں بائیں ہاتھ جہاں $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۵۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۹) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

کنواں کے اندر جہاں $V(x) = -V_0$ ہے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۰) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad (-a < x < a)$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۱) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

دائیں جانب جہاں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

یہاں آمدی جیٹ A ، انعکاسی جیٹ B اور ترسیلی جیٹ F ہے۔^{۴۲}

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ $-a$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۳) \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

نقطہ $-a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۴) \quad ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

نقطہ $+a$ پر $\psi(x)$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۵) \quad C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika}$$

^{۴۲} مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفعلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بکھراؤ میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشکیلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حسرت۔ پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نفاذی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔

اور $a + \frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$(۲.۱۶۶) \quad l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika}$$

ہم ان میں سے دو استعمال کرتے ہوئے C اور D حنا کر کے باقی دو حل کر کے B اور F تلاش کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے گا)۔

$$(۲.۱۶۷) \quad B = i \frac{\sin(2la)}{2kl} (l^2 - k^2) F$$

$$(۲.۱۶۸) \quad F = \frac{e^{-2ika} A}{\cos(2la) - i \frac{(k^2 + l^2)}{2kl} \sin(2la)}$$

شرح ترسیل $T = |F|^2 / |A|^2$ کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۹) \quad T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right)$$

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں n عدد صحیح ہے

$$(۲.۱۷۰) \quad \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi$$

وہاں $T = 1$ (اور کنواں ”شفاف“ ہوگا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۷۱) \quad E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

جو عین لامستثنای چپور کنواں کی اجازتی توانائیاں ہیں۔ شکل 19.2 میں توانائی کے لحاظ سے T ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۲.۲۹: مستثنای چپور کنواں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ اجازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیبی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا $\psi(x)$ معمول پر لا کر مستقل D اور F تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈائی راک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور قد لامستثنای تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۳) لامستثنای گبر ہونے کے باوجود $0 \rightarrow z_0$ کی بنا ایک ”کنزور“ مخفیہ ہے۔ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ کو مستثنای چپور کنواں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

باب ۲. غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے C اور D کو F کی صورت میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la)] e^{ika} F; \quad D = [\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la)] e^{ika} F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیل رکاوٹ (جسے خطہ $-a < x < a$ میں $V(x) = +V_0 > 0$ لینے سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعیین کریں۔ تین صورتوں $E < V_0$ ، $E = V_0$ اور $E > V_0$ کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تفعل موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب: $E < V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔^{۳۴}

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس $E < V_0$ صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس $E > V_0$ صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہوگی لہذا شرح ترسیل $|F|^2 / |A|^2$ نہیں ہوگی (جہاں A آمدی جیٹ اور F ترسیلی جیٹ ہے)۔ دکھائیں کہ $E > V_0$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (۲.۱۴۲)$$

اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رد (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ $E < V_0$ کی صورت میں T کیا ہوگا؟

د. صورت $E > V_0$ کے لیے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے $T + R = 1$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور حرکی توانائی $E > 0$ ہو مخفیہ کی ایک احبابک گہرائی (شکل 34.2) کی طرف بڑھتا ہے۔

^{۳۴} سیہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔

۱. صورت $E = V_0/3$ میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳ کی طرح ہے، بس یہاں سیڑھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکراؤ واپس لوٹنے کا احتمال جزو-۱ کے نتیجے سے بہت کم ہوگا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل 20.2 میں جیسے ہی گاڑی نقطہ $x = 0$ پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی معدم استمرار کے ساتھ گر کر $V_0 -$ ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئے ایک گاڑی کے لیے درست ہوگا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کی محسوس کرتا ہے۔ باہر $V = 0$ جبکہ مرکزہ کے اندر $V = -12 \text{ MeV}$ ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ اشتقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی 4 MeV ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا اشتقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ نے جزو-۱ میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ $T = 1 - R$ استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبداء پر $-a < x < +a$ کے بیچ لامتناہی چپور کنواں کے اندر $V(x) = 0$ اور اس کے باہر $V(x) = \infty$ ہے۔ غیر تائید وقت شروع و نگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری ψ (مساوات ۲.۲۸) میں $(x+a)/2 \rightarrow x$ پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام ψ حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنواں کی چوڑائی $2a$ ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامتناہی چپور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل A اور $\Psi(x, t)$ تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے $\langle x \rangle$ کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: $\sin^n \theta$ اور $\cos^n \theta$ کو تخفیف کے بعد $\sin(m\theta)$ اور $\cos(m\theta)$ کے خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ہوگا۔

سوال ۲.۳۸: کیمت m کا ایک ذرہ لامتناہی چپور کنواں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔ اچانک کنویں کا دایاں دیوار a سے $2a$ منتقل ہوتا ہے جس سے کنواں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لحاقی طور پر اس عمل سے تقاضا عمل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

۱. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہوگا؟

۲. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہوگا؟

۳. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامتناہی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

۱. دکھائیں کہ لامتناہی چکور کنواں میں ایک ذرہ کا تفاعل موج کو انشائی تجدیدی عرصہ $T = 4ma^2 / \pi \hbar$ کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$ ہوتا ہے۔

۲. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی E ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہوگا؟

۳. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصے ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کیت m ہے درج ذیل مخفی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2 / ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

۱. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہوگی؟

۲. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنواں کے باہر ($x > a$) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنواں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنواں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کیت m ہے ہارمونی مرتعش کی مخفی (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغز کرتا ہے جہاں A کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

۱. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

۲. مستقبل کے لمحے T پر تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\Psi(x, T) = B \left(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

جہاں B کوئی مستقل ہے۔ لمحے T کی کم سے کم ممکن قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی مرتعش کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا سپرنگ جس کو کھینچا تو حبسکتا ہے لیکن اسے دیا نہیں جاسکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح سوچنا ہوگا جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہوگی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تقاضا عمل موج

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2} e^{ilx}$$

جہاں l ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبداء پر لامتناہی چکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تقاضا عمل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات حل کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} \alpha \delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

جفت اور طاق تقاضا عمل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ اجبازی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترمیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تقاضا عمل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تقاضا عمل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں $0 \rightarrow a$ اور $a \rightarrow \infty$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تاجع وقت شرودنگر مساوات کے منفرد حل جن کی توانائی E ایک دوسرے جیسی ہو کو **انحطاط**^{۴۶} کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ شخص ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بعدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے جاتے ہیں۔^{۴۷} اشارہ: مندرجہ کریں ψ_1 اور ψ_2 ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی، E ، ایک دوسری جیسی ہو۔ حل ψ_1 کی شرودنگر مساوات کو ψ_2 سے ضرب دیں اور اس سے ψ_2 کی شرودنگر مساوات کو ψ_1 سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ $\psi_1 d\psi_2/dx - \psi_2 d\psi_1/dx$ ایک مستقل ہوگا۔ اب $\pm\infty$ پر معمول پر لائے جانے کے قابل ہر حل $0 \rightarrow \psi$ ہوگا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل درحقیقت صفر ہوگا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ψ_2 دراصل ψ_1 کا مضرب ہے لہذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: مندرجہ کریں کیمت m کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط L ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں $\psi(x+L) = \psi(x)$ ہوگا۔) اس کے ساکن حال تلاش کر کے انہیں معمول پر لائیں اور ان کی مطابقتی اجبازی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی E_n کے لئے دو آپس

^{۴۶} ایسے دو حل جن میں صرف جبزو ضربی کا مشرق پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتب معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جبزو ϕ کا مشرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جاسکتا ہے۔ یہاں ”منفرد“ سے مراد ”خطی طور پر غیر تاجع“ ہے۔
degenerate^{۴۷}

^{۴۸} جب ہم باب ۳ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاط عابثی جاتی ہیں۔ مندرجہ کریں کہ مخفی علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے پچھلے میں $V = \infty$ ہو۔ مثلاً دو تہا لامتناہی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنواں میں پایا جائے گا۔

میں غیر تابع حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا خلاف گھڑی حرکت کے لیے ہوگا، جنہیں آپ $\psi_n^+(x)$ اور $\psi_n^-(x)$ کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۳۵ کے مسئلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کارآمد کیوں نہیں ہے)؟

باب ۳

قواعد و ضوابط

۳.۱ ہلبرٹ فضا

گشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے کئی مفیکو کی بنی تھے۔ مثلاً ہارمونی مرتعش میں توانائی کی سطح میں جفت وصالے جبکہ باقی زیادہ عموماً نظر آتے ہیں، جنہیں ایک بار ثابت کرنا مفید ثابت ہوگا انکی مثالیں عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت ہے۔ اسکو ذہن میں رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیا جائے گا۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تقارن عمل موج اور عامل کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تقارن عمل موج ظاہر کرتی ہے۔ جبکہ متبادل مشاہدہ خواص کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر تصوراتی، سمتیات کی تعریفی، حالات پر تقارن عمل موج پورا اترتے ہیں۔ جبکہ عاملین ان پر خطی تبادلہ کے طور پر عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی قدرتی زبان خطی الجبرائی ہے۔

لیکن مجھے خدشہ ہے کہ اس طرز کی خطی الجبرائے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ ایک بُدی فضا میں سمتیر $|\alpha\rangle$ کو ایک مخصوص معیاری عمودی اساس

$$(۳.۱) \quad |\alpha\rangle \rightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کے لحاظ سے N عدد اجزاء a_n سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔ دو سمتیات کا اندرونی ضرب $\langle\beta|\alpha\rangle$ تین بُدی

نقطہ ضرب کو وسط دیتے ہوئے درج ذیل مخلوط عدد ہوگا،

$$(۳.۲) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N$$

خطی تبدلہ T جنہیں انہی مخصوص اساس کے لحاظ سے متالاب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ متالابی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتا ہے۔

$$(۳.۳) \quad |\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow b = Ta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

کوانٹم میکانیات میں پائے جانے والے سمتیات زیادہ تر تفاعل ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں رہتے ہیں انہیں N اجزائی متالاب کے علامت سے ظاہر کرنا کچھ زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور متناہی ابعادی صورت میں ٹھیک رکھنے والے ریاضیاتی عمل لامتناہی ابعادی صورت میں پریشان کن صورت اختیار کر سکتے ہیں۔ اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ اگرچہ مساوات 3.2 متناہی مجموعہ ہر صورت موجود ہوگا لامتناہی مجموعہ یا مکمل عدم سرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگا۔ لحاظ اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل بے معنی ہوگی۔ یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علاقیت سے واقف ہوں گے بہتر ہوگا کہ یہاں آپ ہوشیار رہیں۔

متغیر x کے تمام تفاعل مل کر سمتی فضا پیدا کرتے ہیں، لیکن ہمارے لیئے یہ بس بڑا ہوگا۔ کسی بھی مکاناتی حال کو ظاہر کرنے کے لیئے ضروری ہے کہ تفاعل موج Ψ معمول پر لانے کے قابل ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام متالاب تکامل مربع تفاعل

$$(۳.۴) \quad f(x) \text{ Such that } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

اس سے بہت چھوٹا سمتی فضا دے گا سوال 3.1 (الف) کعبہ دیکھیے گا۔ ریاضی دان اسے $L_2(a, b)$ کہتے ہیں جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا کہتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات میں

$$(۳.۵) \quad \text{تفاعل موج ہلبرٹ فضا میں جیتے ہیں}$$

ہم دو تفاعلوں کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔ جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو تفاعل ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f | g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

اگر f اور g دونوں متبادل مربع مکمل ہوں یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ انکا اندرونی ضرب موجود ہوگا مساوات 3.6 کا مکمل ایک مستثنائی عدد پر مرکوز ہوگا۔ یہ شواہز عدم مساوات کی درج ذیل تعمیلی صورت کے پیش نظر ہوگا۔

$$(۳.۷) \quad \left| \int_a^b f(x) * g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 3.6 اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے سوال 1-3 (ب)۔ بالخصوص درج ذیل پر دیہان دیں

$$(۳.۸) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید $f(x)$ کا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$(۳.۹) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

حقیقی اور غیر منفی ہوگا یہ صرف اس صورت صفر ہوگا جب $f(x) = 0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت معمول شدہ کہلاتا ہے جب اسکا اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک کے برابر ہو دو تفاعل اس صورت عمودی ہوں گے جب انکا اندرونی ضرب صفر ہو اور تفاعلوں کا سلسلہ f_n اس صورت معیاری عمودی ہوگا جب تمام معمول شدہ اور باہمی طور پر عمودی ہوں:

$$(۳.۱۰) \quad \langle f_m|f_n \rangle = \delta_{mn}$$

آخر میں تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت مکمل ہوگا جب ہلبرٹ فضا میں ہر تفاعل کو انکا خطی جوڑ لکھا جاسکے:

$$(۳.۱۱) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

معیاری عمودی تفاعلوں $f_n(x)$ کے عددی سر فوریر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیئے جاتے ہیں:

$$(۳.۱۲) \quad c_n = \langle f_n|f \rangle$$

آپ اسکی تصدیق کر سکتے ہیں۔ میں نے باب 2 میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ لامستثنائی چپکور کنواں کے ساکن حالات مساوات 2.28 وقفہ $(0,a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات مساوات (2.67 اور 2.85) وقفہ $(-\infty, \infty)$ مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

(الف) دیکھائیں کہ تمام متبادل مکمل مربع تقاعسوں کا سلسلہ سری فضا دے گا آپ حصہ A.1 میں تعریف کا موازنہ کریں اشارہ: آپ نے دیکھنا ہوگا کہ دو عدد متبادل مربع تقاعسوں کا مجموعہ از خود متبادل مکمل مربع ہوگا مساوات 3.7 استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تقاعسوں کا سلسلہ سری فضا ہوگا؟

(ب) دیکھائیں کہ مساوات 3.6 کا مکمل اندرونی ضرب ضرب کے تمام شرائط پر پورا اترتا ہے حصہ A.2۔ سوال 3.2

(الف) تقاعس $x^v = f(x)$ متغیر v کے کس مقداری سعت وقفہ $(0,1)$ پر ہلبرٹ فضا میں ہوگا؟ متغیر v کو حقیقی تصور کریں جو ضروری نہیں مثبت ہو۔

(ب) کیا $\frac{1}{2} = v$ کی صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تقاعس $f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ اور تقاعس $f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

چونکہ ہر مثبت عاملین کی توقعاتی قیمت حقیقی ہوتی ہے لحاظ یہ کو انٹرمیکانیات میں قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔

متبادل مشاہدہ کو ہر مثبت عاملین فضا ہر کرتے ہیں (۳.۱۳)

آئیں اس کی تصدیق کریں۔ مثلاً کیا معیاری حرکت کا عامل ہر مثبت ہے؟

$$(۳.۱۴) \quad \langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ متبادل مکمل مربع ہیں لحاظ $\pm\infty$ پر یہ صفر تک پہنچیں گے۔ لحاظ مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا ہوگا کہ مکمل بالخصوص کے بنا منفی کی علامت کو i کا محلول جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ علامت d/dx جس میں i نہیں پایا جاتا غیر ہر مثبت ہے اور یہ کسی بھی متبادل مشاہدہ کو فضا ہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۱: دیکھائیں کہ ہلبرٹ فضا میں تمام تقاعس h جن کے لیے $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle h | \hat{Q}h \rangle$ ہوتا ہے تمام f اور g کے لیے $\langle \hat{Q}f | g \rangle = \langle f | \hat{Q}g \rangle$ ہوگا۔ مساوات 3.16 اور 3.17 میں ہر مثبت کی تعریفات معادل ہیں۔ اشارہ پہلے $h = f + g$ لیں اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۲:

(الف) دیکھائیں کہ دو ہر مثبت عاملین کا مجموعہ از خود ہر مثبت ہوگا۔

(ب) فرض کریں \hat{Q} ہر مثبت ہے اور α ایک محلول عدد ہے۔ α پر کیا شرائط مسلط کرنے سے $\alpha \hat{Q}$ بھی ہر مثبت ہوگا؟

(ج) دو ہر مثبت عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مثبت ہوگا؟

(د) دیکھائیں کہ ہلبرٹ فضا میں تمام $(\hat{x} = x)$ اور ہیلبرٹ فضا میں $(\hat{H} = -(\hbar^2/2m)d^2/dx^2 + V(x))$ ہر مثبت ہے۔

سوال ۳.۳: عامل \hat{Q} کا ہر مثبت جوڑی دار یا شریک عامل \hat{Q}^\dagger درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(۳.۱۵) \quad \langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f | g \rangle \text{ (gandfallfor)}$$

یوں ہر میٹھی عامل اپنے ہر میٹھی جوڑی دار کے برابر ہوگا $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$ ۔

(الف) x, i اور d/dx کے ہر میٹھی جوڑی دار تلاش کریں۔

(ب) ہارمونی سرکش کے عامل رفت a_+ مساوات 2.47 کا ہر میٹھی جوڑی دار تیار کریں۔

(ج) دیکھیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$ ہوگا۔

۳.۱.۱ قابل معلوم حالات

کوانٹم میکانیات کی قابل معلومیت کی بنیاد عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ کہ صدرہ جو تمام ψ حال میں ہوں کی قابل مشاہدہ Q پیمائش سے ایک چھپے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں Q کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت جسے ہم q کہہ سکتے ہیں دیگا؟ اس کو 'قابل مشاہدہ' Q کی قابل معلوم حال کہہ سکتے ہو۔ ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ہیلٹونی کی ساکن حالات قابل معلوم ہے۔ ساکن حال ψ_n میں ایک ذرہ کی قُل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی اجازتی توانائی E_n دیگا۔

قابل معلوم حال میں Q کی معیاری انحراف صفر ہوگی جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۳.۱۶) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{Q} - q)^2 \psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) \psi | (\hat{Q} - q) \psi \rangle = 0$$

اب اگر ہر پیمائش q دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی q ہوگی $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ \hat{Q} ہر میٹھی ہے لہذا $Q - q$ بھی ہر میٹھی عامل ہوگا۔ میں نے اندرونی ضرب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایک حبز ضربی کو بائیں منتقل کیا لیکن ایسا واحد تفاعل جس کا خود کے ساتھ اندرونی ضرب صفر ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۷) \quad \hat{Q}\psi = q\psi$$

یہ عامل کیونکہ امتیازی قدر مساوات یا آگنی قدر مساوات ہے۔ \hat{Q} کا ایک امتیازی تفاعل ψ ہے جس کی مطابقتی آگنی قدر Q ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۱۸) \quad \text{eigenfunctions are states Determinate } \hat{Q}$$

ایسے حال پر Q کی پیمائش لازماً امتیازی قدر q دیگی۔

دیباچہ رہے کہ آگنی قدر ایک عدد ہے تاکہ کوئی عامل یا تفاعل۔ ایک آگنی تفاعل کو ایک مستقل سے ضرب دینے سے دوبارہ ایک آگنی تفاعل حاصل ہوگا جسکی آگنی قیمت وہی ہوگی۔ امتیازی تفاعل کی تعریف کے روئے صفر ایک آگنی تفاعل نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب کسی بھی عامل \hat{Q} اور تمام q کے لیے $Q\psi = q\psi = 0$ ہوتا اور ہر عدد ایک آگنی قدر ہوتا۔ ہاں آگنی قدر کی قیمت صفر ہو سکتی ہے ایک عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس کا طیف حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی تفاعل کی امتیازی قیمت ایک دوسرے جیسی ہوگی ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ طیف انحطاطی ہے۔

مشال کے طور پر متل توانائی کے متاثرہ معلوم حالات ہیلٹونی کے امتیازی تفاعل ہوں گے۔

$$(۳.۱۹) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جو عین وقت کا غیر متاثرہ شرودنگر مساوات ہے۔ ایسی سیاق و سباق میں ہم امتیازی متدرج کے لیے صرف E استعمال کرتے ہیں اور امتیازی تفاعل کے لیے ψ اس کے ساتھ حبز $\exp(-iEt/\hbar)$ جو ψ کا حاصل ہوگا جو اگر آپ چاہیں اب بھی H کا امتیازی تفاعل ہے۔

مشال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں دو ابعاد میں ϕ قطبی معدد کا ایک متغیر ہے

$$(۳.۲۰) \quad \hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$$

یہ عامل سوال 2.46 میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا کیا \hat{Q} ہر میٹری ہے؟ اس کے امتیازی تفاعل اور امتیازی امتداد تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم متناہی وقفہ $0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر تفاعل $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں $\phi + 2\pi$ اور ϕ ایک ہی طبعی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(۳.۲۱) \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

تکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* (i \frac{dg}{d\phi}) d\phi = if^*g|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i (\frac{df^*}{d\phi}) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لحاظ \hat{Q} ہر میٹری ہے یہاں مساوات 3.26 کی بنا سرحدی حبز خارج ہوگا۔ امتیازی امتداد مساوات

$$(۳.۲۲) \quad i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi)$$

کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$(۳.۲۳) \quad f(\phi) = Ae^{-iq\phi}$$

مساوات 3.26 q کی ممکنہ قیمتوں کو درج ذیل پر رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$(۳.۲۴) \quad e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

□

اس عامل کا طیف تمام عدد صحیح پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر انخطاتی ہے۔

۳.۲ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبعی طور پر متابل مشاہدہ کے تعین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل^۱ ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات بلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر متابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری^۲ ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہوگی، معمول پر لانے کے متابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا مثلاً ہارمونی سرکش کی ہیملٹنی، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً متناہی چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نہایت زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ درحقیقت یہ متناہی ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۲.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مشی عامل کے معمول پر لانے کے متابل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی \hat{Q} کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی قدر q ہو) اور^۳

$$\langle f | \hat{Q}f \rangle = \langle \hat{Q}f | f \rangle$$

ہو (\hat{Q} ہر مشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہذا اس کو تکرار سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات 6.3) لہذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم $\langle f | f \rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہوگا۔

□

discrete^۱

continuous^۲

۳ یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات بلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرہ کی متابل مشاہدہ کی پیشکش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۲: انفرادی امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ ساتھ مندرج کریں \hat{Q} ہر مشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$ ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے مندرج کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے۔) اب (مسئلہ ۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f | g \rangle = 0$ ہوگا۔

□

بھی وجہ ہے کہ لامستثنیٰ چپکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی متابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۲: ہمیں انحطاطی حالات ($q' = q$) کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیا) امتیازی مقدار رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی مقدار والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۴، ۳-۱) اور ہم گرام شمد ترکیبے عمودیت^۴ (سوال A4 استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولی طور پر ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کو انٹرمیکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم مندرج کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریت سے ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اساس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنیٰ بعدی سمتی فضا میں ہر مشی متالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامستثنیٰ بعدی فضاوں تک وسعت نہیں دی جاسکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کو انٹرمیکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہذا (ذرا کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) سمجھتے ہیں۔

مسلمہ: متابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔^۵

Gram-Schmidt orthogonalization process^۶

^۴چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرٹلے کے تحت، لامستثنیٰ چپکور کنواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں متابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

سوال ۳.۴:

۱. فرض کریں کہ عامل \hat{Q} کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی مقدار q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ از خود \hat{Q} کا امتیازی تفاعل ہوگا اور اس کا امتیازی مقدار q ہوگا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^x$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل d^2/dx^2 کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی مقدار ایک دوسرے کے عکس ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۵:

۱. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہر مشی عامل کے امتیازی مقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی مقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

۳.۲.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے متبادل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور کمیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی مقدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی مقدار اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۲۵) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ متبادل یکساں مربع نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی مقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۳-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۶) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$(۳.۲۷) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۲۸) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p - p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ مساوات ۳.۲۸ کو ڈیراک معیاری عمودیت^۱ کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب عمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (قابل تکامل مربع) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۹) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

پھیلاؤ عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہوگا) کو فورسیر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ پھیلاؤ (مساوات ۳.۲۹) درحقیقت ایک فورسیر تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۲۷) سائن نمائیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$(۳.۳۱) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ \hat{p} کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اعداد حقیقی ہوں گے) "مضامنت" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول

^۱ Dirac orthonormality

پر لانے کے متبادل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ بعد میں پتہ چلے گا)۔^۷

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی افتد اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی فتدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$(3.32) \quad xg_y(x) = yg_y(x)$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $x = y$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ درحقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہوگا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی فتدر کو لازماً حقیقی ہونا ہوگا؛ امتیازی تفاعلات متبادل یکساں صریح نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(3.33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$(3.34) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(3.35) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(3.36) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

^۷ غیر حقیقی امتیازی افتد والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ تاہم معمول پر لانے کے متبادل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے متناہد ہوتے ہیں۔ اس خط میں، جس کو میں ”مضافات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا پتہ (مستثنائی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ لمبرٹ فنکشن میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا \hat{p} کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی افتد غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ لمبرٹ فنکشن میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی حیز کو رد کیا گیا۔ (جب تک f لمبرٹ فنکشن میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب \hat{p} کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی فتدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی فتدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل \hat{p} کا امتیازی فتدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل \hat{p} کے امتیازی افتد ہوں گے؛ باقی اعداد اس خط سے باہر پائے جائیں گے جس میں \hat{p} ہر مشی ہو۔

جہاں درج ذیل ہوگا

$$c(y) = f(y) \quad (۳.۳۷)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فورسیرے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہذا اس کے امتیازی اعداد کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y ، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اعداد والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عموماً ہر پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب مکمل ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۶:

ا. باب ۲ سے ہارمونی سر تعش کے علاوہ ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے آزاد ذرہ کے علاوہ ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے مستثنیٰ چکور کنواں کے علاوہ ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۷: کیا لامستثنیٰ چکور کنواں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

۳.۳ متعمم شماراتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی متابل مشاہدہ مختار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متعمم شماراتی مفہوم^۸ پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے متابل بتاتی ہے۔ متعمم شماراتی مفہوم اور شرودنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقاء کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انٹرمیکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شماراتی مفہوم: حال $\Psi(x, t)$ میں ایک ذرے کی ایک متابل مشاہدہ $Q(x, P)$ کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$ کی کوئی ایک امتیازی فندر دے گی۔ اگر \hat{Q} کا طیف غیر مسلسل ہو تب

معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔} \quad (۳.۳۸)$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی اقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سعت dz میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔} \quad (۳.۳۹)$$

پیشانی عمل کے بن تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم^۹ ہوتا ہے۔^{۱۰}

شماراتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (۳.۴۰)$$

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو باآسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔^{۱۱}

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x) \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۱)$$

کینی طور پر Ψ میں f_n کی مقدار c_n ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیشانی Q کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال Ψ میں f_n کی مقدار ”پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیشانی کی ٹھیک ٹھیک قیمت $|c_n|^2$ ہوگی۔ متمم شماراتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔^{۱۲}

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۲)$$

collapse^۹

^{۱۰} استمراری طیف کی صورت میں پیشانی قیمت کے گرد دو نواہ میں، پیشانی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود سعت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔

^{۱۱} دھیان رہے کہ تاہم وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں $c_n(t)$ لکھنا چاہیے۔

^{۱۲} یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ ”اس ذرے کا حال f_n میں پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے۔“ یہ کہنا بالکل غلط ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال Ψ میں ہے۔ ہاں Q کی پیشانی قیمت q_n کے حصول کا احتمال $|c_n|^2$ ہوگا۔ ایسی پیشانی اس حال کو تفاعل موج f_n پر منہدم کرتی ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال Ψ میں ہے، اس کا Q کی پیشانی کے بعد حال f_n میں ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جو یقیناً تقابلاً عمل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ (۳.۴۳) \quad &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n' n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned}$$

اسی طرح تمام ممکن امتیازی افتدرا کو افتدراوی طور ہر اس افتدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے Q کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$(۳.۴۴) \quad \langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2.$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۵) \quad \langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left(\hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle$$

نئے $\hat{Q} f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۴۶) \quad \langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n' n} = \sum_n q_n |c_n|^2.$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آ رہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چومارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال Ψ میں ایک ذرے کے لیے x کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی افتدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد y متغیر x کا امتیازی افتدر ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ذیراکہ معیاری عمودی) امتیازی تقابلاً عمل $\delta(x - y)$ ہوگا۔ ظاہر اورج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۷) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سمت dy میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y, t)|^2$ ہوگا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تقابلاً عمل $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۸) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج^۳ پکارا اور $\Phi(p, t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x, t)$ کا فورسیر بدل ہے جو مسئلہ پائشرال کے تحت اس کا الٹ فورسیر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۴۹) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متعمم شریاتی مفہوم کے تحت سعت dp میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۱) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ڈیلتا تفاعل کوانا $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟
حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$(۳.۵۲) \quad \Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکت کی فضا تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۸: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکت کی فضا تفاعل موج $\Phi(p, t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے p کی پیمائش کا کلاسیکی سعت کے باہر نتیجہ کا احتمال

(دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”تقسیم عمل خنل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔
سوال ۳.۹: درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle x \rangle = \int \Phi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp. \quad (۳.۵۳)$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $x e^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left(\frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل مقام $i\hbar \partial/\partial p$ ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases} \quad (۳.۵۴)$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا)۔

۳.۴ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتوجہ رکھیں۔

۳.۴.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ A کے لیے درج ذیل ہوگا (ساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ B کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (خوارزم عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \quad (۳.۵۵)$$

اب کسی بھی مخلوط عدد z کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$|z|^2 = [(\text{حقیقی}(z))^2 + (\text{خیالی}(z))^2] \geq [(\text{خیالی}(z))^2] = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*) \right]^2$$

یوں $z = \langle f|g \rangle$ لیتے ہوئے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن $\langle f|g \rangle$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \hat{B}\langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B}\Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g|f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

لہذا

$$\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عملین کا مقابلہ ہے (مساوات ۳.۴۸)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

یہ اصول عدم یقینیت^{۱۴} کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہر مشی عملین کے مقابلہ میں بھی i کا جذریا پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود i کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔^{۱۵}

^{۱۴}uncertainty principle

^{۱۵}یہ کہتا زیادہ درست ہوگا کہ دو ہر مشی عملین کا مقابلہ از خود حنائف ہر مشی ($\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۳)۔

مثال کے طور پر، مندرجہ ذیل میں $(\hat{A} = x)$ پہلا اور معیار حرکت $(\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx})$ دوسرا متبادل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (ملاحظات ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} i\hbar\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۵۹)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو متبادل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر متقابل ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ^{۱۹} کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ متبادل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۱۲.۳ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (متقابل) متبادل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔^{۲۰}

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹن، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا z جزو باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی مقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا مقام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انٹرم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شمار یاتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا مقام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا مقام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فورسٹر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسیع سرعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج

^{۱۹} incompatible observables

^{۲۰} یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر متقابل متبادلوں کو بسکوقوت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک دوسرے جیسی میثاب تبادله سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ متقابل ہر مشی متبادلوں کو بسکوقوت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۱۱ دیکھیں۔

(اب) پوری طرح معین لیکن مقام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔^{۱۸} مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر متمم کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہو گی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متبادل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً تب ممکن ہوگا جب دونوں متبادل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۰:

۱. درج ذیل مسائل متعلق ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (۳.۶۰)$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx} \quad (۳.۶۱)$$

سوال ۳.۱۱: مقام ($A = x$) میں عدم یقینیت اور توانائی ($B = p^2/2m + V$) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

سکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۲: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر \hat{P} اور \hat{Q} کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $0 = [\hat{P}, \hat{Q}]f$ ہوگا۔

^{۱۸} جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) x کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود p کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے فوٹان اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے متابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا مقام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

۳.۴.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرقتش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$ کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۵ اور مساوات ۳.۵۶۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ Ψ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = cf(x)$ ، جہاں c کوئی مخلوط عدد ہے تب شمار عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۵۶ میں z کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 = \text{حقیقی}(z)$ ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle_{\text{حقیقی}} = (c\langle f|f \rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f \rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل c لازماً حاصِ خیالی ہوگا؛ جسے ہم ia لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۲) \quad g(x) = iaf(x), \quad z \text{ حقیقی}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۳.۶۳) \quad \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = ia(x - \langle x \rangle) \Psi$$

جو متغیر x کے تفاعل Ψ کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۳)۔

$$(۳.۶۴) \quad \Psi(x) = Ae^{-a(x - \langle x \rangle)^2 / 2\hbar} e^{i\langle p \rangle x / \hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ درحقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔^{۱۹}

سوال ۳.۱۳: مساوات ۳.۶۳ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ مستقلات ہیں۔

۳.۴.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$(۳.۶۵) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

^{۱۹} دھیان رہے کہ صرف Ψ کو x کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقلات“ a ، A ، $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ Ψ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتادہائی کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحے پر تفاعل موج x کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحے پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے Δx (متغیر x کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۵ کی طرح کا توانائی و وقت اصول عدم یقینیت^{۲۰} درج ذیل ہے۔

$$(۳.۶۶) \quad \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں x اور t (بلکہ ct) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں p اور E (بلکہ E/c) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۶۶ اور مساوات ۳.۶۵ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکینکس چار سمتیات نہیں کر رہے ہیں۔ شرودنگر مساوات صرف غیر اضافی ہے۔ یہ t اور x کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفسیقی مساوات t میں یک رتی جبکہ x میں دور تبی ہے)، اور مساوات ۳.۶۵ سے قطعاً مساوات ۳.۶۶ مراد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر متدار اس کے تفسیلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو Δt ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متابل مشاہدہ $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹن ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{Q} \hat{H} \Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب \hat{H} ہر مشی ہے لہذا $\langle \Psi | \hat{H} \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle$ اور یوں اورج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۷) \quad \frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۴ اور ۳.۲۸ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا،^{۲۱} یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقلب تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر \hat{H} اور \hat{Q} آپس میں متبادل ہوں، تب $\langle Q \rangle$ مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے Q بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۵۸) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ Q صریحاً t کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2i} \frac{\hbar d \langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \left(\frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right|$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریضات لیتے ہیں۔

$$(۳.۶۸) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d \langle Q \rangle / dt|}$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۹) \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں Δt کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d \langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا Δt اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں Q کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص Δt اس متبادل مشاہدہ Q پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک متبادل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی ΔE کی صورت میں تمام متبادل

^{۲۱} وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$ ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حناطر ایک ایسے ہارمونی سر تقش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقلب اس پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجب حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبے یا کم ہو جاتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک متابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکساں طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے متغل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مادہ ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر a, b, ψ_1 اور ψ_2 حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$ ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً $\geq \hbar/2$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے شکل 1.3؟ کئی طور پر $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$ ہوگا لیکن $E = p^2/2m$ ہے، لہذا $\Delta E = p\Delta p/m$ ہوگا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\geq \hbar/2$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۶ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۷: ذرہ Δ تقریباً 10^{-23} سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود نکلے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیمیت کی تمام پیماؤں کا مستطیلی ترسیل، جبرس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232 \text{ MeV}/c^2$ پر اور چوڑائی تقریباً $120 \text{ MeV}/c^2$ ہوگی (شکل 2.3)۔ ساکن صورت توانائی (mc^2) کیوں بعض اوقات 1232 سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی منسل کے بنائے جی نہیں کیوں کہ

$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2} \text{ MeV}\right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ $3 \times 10^{-22} \text{ MeV s} = \hbar/2$ یوں کیفیت میں پھیلاؤ انتہائی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت احبازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیفیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔^{۲۲} □

ان مثالوں میں ہم نے حبزو Δt کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مسر اد طول موج بھٹا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مسر اد وہ دورانیہ بھٹا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں Δt اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بن کو انٹرمیکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو احبازت ہے کہ آپ توانائی ΔE ”ادھار“ لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar / (2\Delta E)$ کے اندر ”واپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی حبابز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کو انٹرمیکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی احبازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۶۹ کے حصول میں کوئی ایسی احبازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی غلط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ غلط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۶۷ کی اطلاق کریں۔

$$۱. Q = 1 \quad ۲. Q = H \quad ۳. Q = x \quad ۴. Q = p$$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۵: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تعامل موج اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۶: معیاری انحراف σ_H ، σ_x اور $d\langle x \rangle / dt$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۲۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۷: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۱ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

^{۲۲} حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ 10^{-23} سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الارغ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ مندرجہ کریں کہ Δ تقسیمیاً ایک پروٹان (10^{-15} m) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقسیمیاً 10^{-23} سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ مندرجہ کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔

۳.۵ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ A پر غور کریں (شکل 3.3 الف)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ x اور y محدد کا ایک کارتیسی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ A کے اجزاء: $A_x = \hat{i} \cdot A$ اور $A_y = \hat{j} \cdot A$ وضع کریں (شکل 3.3 ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام قائم کرے جس کے محدد x' اور y' ہوں؛ وہ سمتیہ A کے اجزاء $A'_x = \hat{i}' \cdot A$ اور $A'_y = \hat{j}' \cdot A$ پیش کرے گی (شکل 3.3 ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس $(\{\hat{i}, \hat{j}\})$ اور $(\{\hat{i}', \hat{j}'\})$ کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ از خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

یہی کچھ کو انٹرمیکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ $|\mathcal{H}(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو ”باہر بلبرٹ فضا“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفاعل معام کی اساس میں $|\mathcal{H}\rangle$ کی پھیلاؤ کا عددی سر موثری تفاعل $\Psi(x, t)$ ہوگا:

$$\Psi(x, t) = \langle x | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.40)$$

(جہاں \hat{x} کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت x ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے)^{۲۲}، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں $|\mathcal{H}\rangle$ کی پھیلاؤ، معام و معیار حرکت موثری تفاعل $\Phi(p, t)$ ہے:

$$\Phi(p, t) = \langle p | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.41)$$

(جہاں \hat{p} کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت p ہے کو سمتیہ $|p\rangle$ ظاہر کرتا ہے)۔^{۲۳} ہم $|\mathcal{H}\rangle$ کے پھیلاؤ کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر رہے ہیں):

$$c_n(t) = \langle n | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.42)$$

(جہاں \hat{H} کے n ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $|n\rangle$ ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات 3.۴۱ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات Ψ اور Φ ، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x) \end{aligned} \quad (3.43)$$

^{۲۲} میں اس کو g_x (مساوات 3.۳۴) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس معام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھکارا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ بلبرٹ فضا کو، x پر، بطور متبادل منبع عمل تفاعل کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس معام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتیہ فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
^{۲۳} معامی فضا میں یہ $f_p(x)$ ہوگا (مساوات 3.۴۲)۔

(متابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle \quad (۳.۴۴)$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$ کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$|\alpha\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \quad (۳.۴۵)$$

$$|\beta\rangle = \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے قالمیج ارکان^{۲۶}

$$\langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn} \quad (۳.۴۶)$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۴۴ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle \quad (۳.۴۷)$$

یا، سمتیہ $|e_m\rangle$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$\sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \quad (۳.۴۸)$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn} a_n \quad (۳.۴۹)$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متابلی ارکان معلومات فراہم کرتے ہیں۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہوگا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد مستثنائی عدد (N) ہوگا۔ سمتیہ $|\psi(t)\rangle$ ایسی صورت میں N ابعادی سیتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، (N) اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عملین $(N \times N)$ سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامستثنائی آبادی سیتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

^{۲۵} میں مندرج کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں n استمراری ہوگا اور مجموعہ اس کی جگہ نکلائے ہوں گے۔

^{۲۶} matrix elements

^{۲۷} یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”متالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامستثنائی ہوگی (جن کی گسیتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تانج حالات ممکن ہیں۔^{۲۸}

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$| \mathcal{A} \rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ہوگا جس} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہے۔}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مشی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں g اور h حقیقی مستقل ہیں۔ اگر ($t = 0$) پر یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت t پر اس کا حال کیا ہوگا؟

حل: (تانج وقت) شرودنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathcal{A}\rangle = H |\mathcal{A}\rangle \quad (۳.۸۰)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تانج تانج شرودنگر

$$H |\mathcal{A}\rangle = E |\mathcal{A}\rangle \quad (۳.۸۱)$$

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم H کی امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی افتدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \pm g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں $(h+g)$ اور $(h-g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm \alpha$$

^{۲۸} یہاں ”مساوات“ کی نشان سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی عدا تیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathfrak{z}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathfrak{z}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathfrak{z}_{+}\rangle + |\mathfrak{z}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_nt/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathfrak{z}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i(h+g)t/\hbar}|\mathfrak{z}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar}|\mathfrak{z}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar} \left[e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شرودنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t = 0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو^{۳۹} کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ الیکٹران نیوٹرینو^{۴۰} اور $|2\rangle$ میوون نیوٹرینو^{۴۱} کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں حلافت وتر جزو (g) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میوون نیوٹرینو^{۴۲} میں اور میوون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

ڈیراک نے اندرونی ضرب $\langle \alpha | \beta \rangle$ میں براکٹ^{۴۳} کی علامت کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کر کے پہلے حصہ کو برا^{۴۴}، $\langle \alpha |$ ، اور دوسرے حصے کو کٹے^{۴۵}، $|\beta\rangle$ کا نام دیا۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ جوڑنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہو گا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک برا کے ساتھ سمتیہ جوڑنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) ایک تفاعلی فنکشن میں برا کو مکمل

^{۳۹}neutrino oscillations

^{۴۰}electron neutrino

^{۴۱}muon neutrino

^{۴۲}انگریزی میں تو سین کو براکٹ کہتے ہیں۔

^{۴۳}bra

^{۴۴}ket

لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f| = \int f^*[\dots] dx$$

جہاں چکور قوسین $[\dots]$ میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو برا کے دائیں ہاتھ کٹ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنیٰ بعدی سمتی فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی برا ایک سمتیہ صنف

$$\langle\alpha| = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (3.83)$$

ہوگا۔ تمام برا کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتی فضا حاصل ہوگا جس کو دوبارہ فضا^{۳۵} کہتے ہیں۔

برا کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (3.84)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا وہ حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے ساتھ ساتھ ”پایا جاتا ہو“:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle;$$

ہم اس کو $|\alpha\rangle$ کے احاطہ کیے گئے ایک بعدی ذیلی فضا پر عامل^{۳۶} تفیلیل^{۳۶} کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \quad (3.85)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \quad (3.86)$$

(جو عامل مماثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاؤ کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (3.87)$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z') \quad (3.88)$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1 \quad (3.89)$$

مسواۃ ۸۶ اور مساوات ۸۹، مکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۱۸: دکھائیں کہ عاملین تظلیل یکے با یکے طاقتی ۳ ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہوگا۔ \hat{P} کے امتیازی امتداد تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ کٹ $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $\langle \alpha |$ اور $\langle \beta |$ کو (دوہری اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle \alpha | \beta \rangle$ اور $\langle \beta | \alpha \rangle$ تلاش کریں اور $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $|\alpha\rangle \langle \beta| \equiv \hat{A}$ کے نوار کان متالب تلاش کر کے متالب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مشی ہے؟

سوال ۳.۲۰: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|)$$

جہاں $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ معیاری عمودی اساس اور E ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی امتداد اور $|1\rangle$ اور $|2\rangle$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ (امتیازی تقاضا عمل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے \hat{H} کا متالب **H** کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۱: فرض کریں عامل \hat{Q} کے معیاری عمودی امتیازی تقاضاات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ \hat{Q} کو اس کے طیفی تحلیل ۲۸

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

idempotent^{۲۷}
spectral decomposition^{۲۸}

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکن سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۲: لیہ انڈر کثیر رکناؤں۔ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تصاعلات 1 ، x ، x^2 اور x^3 کو گرام وشمڈ طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال 4.A. دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو چھپان پائیں؛ (معیاری عمودزنی کے علاوہ) ^{۳۹} یہ لیہ انڈر کثیر رکناؤں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۳: ایک خلاف ہر مشق ^{۴۰} (یا مخرف ہر مشق ^{۴۱}) عامل اپنے ہر مشق جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q} \quad (۳.۹۰)$$

ا. دکھائیں کہ خلاف ہر مشق عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشق عاملین کا مقابل خلاف ہر مشق ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشق عاملین کے مقابل کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳.۲۴: ترتیب پیمائش ^{۴۲}: متابل مشاہدہ A کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{A} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ψ_1 اور ψ_2 ، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب a_1 اور a_2 ہیں، پائے جاتے ہیں۔ متابل مشاہدہ B کو ظاہر کرنے والے عامل \hat{B} کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ϕ_1 اور ϕ_2 بالترتیب امتیازی اقدار b_1 اور b_2 ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. متابل مشاہدہ A کی پیمائش a_1 قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فورا) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب. اب اگر B کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

^{۳۹} لیہ انڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کوئی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی جبز وضرئی یوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تصاعلات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بدقسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

^{۴۰} anti-hermitian

^{۴۱} skew-hermitian

^{۴۲} sequential measurements

ج. متابل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ a_1 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر مسین آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا ہے۔)

سوال ۳.۲۵: لامستثنائی چیکور کنواں کے n ویں ساکن حال کی معیار حرکت و فنکشن تفاعل موج $\Phi_n(p, t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p, t)|^2$ اور $|\Phi_2(p, t)|^2$ کو p کے تفاعل کے طور پر ترسیم کریں (نقطہ $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p, t)$ کو استعمال کرتے ہوئے p^2 کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۳.۲۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۲۶: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں n کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تفاعل حائل سائنس ہے (جس کا طول موج λ ہے) تاہم چونکہ یہ تفاعل لامستثنائی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سعت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فنکشن تفاعل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x, 0)|^2$ اور $|\Phi(p, 0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صغروں کے بیچ) چوڑائیاں ω_x اور ω_p تعین کریں۔ دیکھیں کہ $n \rightarrow \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟ ω_x اور ω_p کو Δx اور Δp کی اندازا قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ σ_p کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامن ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۲۷: درج ذیل فرض کریں

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں A اور a مستقل ہیں۔

ا. $\Psi(x, 0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے A تعین کریں۔

ب. (لحہ $t = 0$ پر) $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور σ_x تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت و فنکشن تفاعل موج $\Phi(p, 0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p, 0)$ استعمال کرتے ہوئے (لحہ $t = 0$ پر) $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ اور σ_p کا حساب کریں۔

ه. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۲۸: مسئلہ ورلڈ۔ درج ذیل مساوات ۳.۶۷ کی مدد سے دکھائیں

$$\left(\frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle - \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \right) \quad (۳.۹۱)$$

جہاں T حرکی توانائی ($H = T + V$) ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$2\langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle \quad (۳.۹۲)$$

اس کو مسئلہ وربل^{۳۳} کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۲۹: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau / \pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x, 0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x, t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کاغذی عمل موج $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی چانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۰: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالابی ارکان $\langle n|x|n' \rangle$ اور $\langle n|p|n' \rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالابی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستثنائی) متالاب \mathbf{X} اور \mathbf{P} تشکیل دیں۔ دکھائیں کہ اساس میں $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$ وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جزوی جواب:

$$\langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) \quad (۳.۹۳)$$

سوال ۳.۳۱: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک دوسرے جتنے احتمال کے ساتھ، $\hbar\omega/2$ یا $3\hbar\omega/2$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p \rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (نہی زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x, t)$ کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۲: 35-3 ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات^{۳۴} ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ($\psi_n(x) = |n\rangle$)، مساوات ۲.۶۷ میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد ($\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$) پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x \sigma_p = (2n+1)\hbar/2$ ہوگا۔ تاہم چند خطی جوز (جنہیں اتساقی حالات^{۳۳} کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل^{۳۵} کے امتیازی تقاضے

^{۳۳} virial theorem

^{۳۴} coherent states

^{۳۵} عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

ہوں گے

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی و تدر α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔)

۱. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ ، $\langle p \rangle$ ، $\langle p^2 \rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۳.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ a_- کا ہر مشی جوڑی دار a_+ ہے۔ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہوگا۔

ب. σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتفاقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاؤ

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاؤ کے عددی سر درج ذیل ہونگے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$

ه. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

شامل کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی a_- کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی و تدر ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتفاقی حال ہمیشہ اتفاقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال ($n = 0$) از خود اتفاقی حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی و تدر کیا ہوگا۔

سوال ۳.۳۳: مبوط اصول عدم یقینیت سے متعمم اصول عدم یقینیت (مسوات ۳.۵۸) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$ ہے۔

۱. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بن کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (۳.۹۴)$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$ ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۳.۵۶ میں z کا حقیقی جزو $\text{Re}(z)$ جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۴ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول غیر اہم ہوگا؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۴: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل متابل دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

۱. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیا ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{H}(t)\rangle$ کیا ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۵: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل متالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متابل مشاہدہ A اور B کو درج ذیل متاسب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں ω ، λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

۱. \mathbf{A} ، \mathbf{H} اور \mathbf{B} کے امتیازی افتدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{B}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $1 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2$ ہے۔ لمحہ $t=0$ پر H ، A اور B کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ t پر $|\mathcal{B}(t)\rangle$ کیا ہوگا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کی قیمتیں دے سکتے ہیں، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳۶: ۳:

۱. ایک تفاعل $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں x_0 کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بن \hat{p}/\hbar کو فضا میں انتقال کا پیدا کار^{۴۶} کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نم کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شرودنجر مساوات کو $\Psi(x, t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} \Psi(x, t) \quad (۳.۹۵)$$

(جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بن \hat{H}/\hbar کو وقت میں انتقال کا پیدا کار^{۴۷} کہتے ہیں۔

^{۴۶} generator of translation in space
^{۴۷} generator of translation in time

ج. دکھائیں لمحہ $t + t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔^{۲۸}

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۶۷ حاصل کریں۔ اشارہ: $dt = dt_0$ لے کر dt میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۳:

ا. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شرودنگر مساوات کو معیار حرکت فنکشن میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:
 $(e^{-ip^2t/2m\hbar} \Phi(p, 0))$

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹہ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p, 0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p, t)$ تشکیل دیں۔ ساتھ ہی $|\Phi(p, t)|^2$ تشکیل دیں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج. Φ پر مبنی موزوں عملیات حل کرتے ہوئے $\langle p \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2 / 2m + \langle H \rangle_0$ ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

^{۲۸} بالخصوص $t = 0$ لے کر، t_0 کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر
 $\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$
 ہوگا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں Q کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ \hat{Q} کو $\Psi(x, t)^*$ اور $\Psi(x, t)$ میں پھیلا کر (تالیبت وقت کو تناسل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$ کو $\Psi(x, 0)^*$ اور $\Psi(x, 0)$ میں پھیلا کر (تالیبت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موختر الذکر کو ہیبرنیرگ نقطہ نظر کہتے ہیں۔

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع با آسانی کی جاسکتی ہے۔ مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi;$$

معیاری طریقہ کار کا اطلاق x کے ساتھ ساتھ y اور z پر کر کے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی اعمال H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھاں کلاسیکی مشہور اور اعمال میں مشرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں اعمال پر ”ٹوپی“ کا نشان بنانا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عاملین پر ”ٹوپی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

خفی تو انائی V اور تفاعل موج Ψ اب $(x, y, z) = \mathbf{r}$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 \mathbf{r} = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کو پوری فصا پر لینا ہوگا۔ اگر خفی تو انائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فصائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقامت c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین \mathbf{r} اور \mathbf{p} کے تمام باضابطہ مقلبتیہ رشتے: $[x, y], [x, p_y], [x, p_x], [p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگا۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x \sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفی صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں **کرویہ** محدودہ (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل 4-1)۔ کروئی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کروئی محدود میں تابع وقت شرودنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کہ $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین میں جبکہ صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔^۶

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارٹیزی محدد میں علیحدگی مستغیرات استعمال کرتے ہوئے لامستغیری سرجمی کنواں (یا ڈب میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ اور } 0 \text{ تینوں کے پچپائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

۱. ممکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انخطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حصوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: ایک بعدی صورت میں انخطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انخطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2 \theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

^۶ ایسا کرنے سے ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازمًا عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچاننے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (۴.۱۹)$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا متغیر ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا متغیر ہے، لہذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (۴.۲۰)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (۴.۲۱)$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (۴.۲۲)$$

[در حقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$ ، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم Θ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مقنی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہذا برقی حرکیات میں اتنی تقارن عمل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہے ہم فنکشن میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط^۸ مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

یہاں بھی ہم عموماً یہ نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔
انتباہ: اب حرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

^۸ یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کشادگی ($|\Phi|^2$) ایک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقے سے، زیادہ پر زور دیکھ لیں پیش کر کے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

جدول ۴.۱: ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں۔

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

مساوات θ

$$(۴.۲۵) \quad \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$(۴.۲۶) \quad \Theta(\theta) = AP_l^m(\cos \theta)$$

جہاں P_l^m شریک لیژانڈر تفاعل^۹ ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$(۴.۲۷) \quad P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

اور l ویں لیژانڈر کشیر رکنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے^{۱۰} جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس^{۱۱}

$$(۴.۲۸) \quad P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{4 \cdot 2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سی ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

^۹ associated Legendre function
^{۱۰} دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہو گا۔
^{۱۱} Rodrigues formula

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات $P_l^m(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} P_2^0 &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) & P_0^0 &= 1 \\ P_3^3 &= 15\sin\theta(1 - \cos^2\theta) & P_1^1 &= \sin\theta \\ P_3^2 &= 15\sin^2\theta\cos\theta & P_1^0 &= \cos\theta \\ P_3^1 &= \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1) & P_2^2 &= 3\sin^2\theta \\ P_3^0 &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) & P_2^1 &= 3\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

درجہ l کثیررکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کاطاق ہوگی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$\begin{aligned} P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2}, \\ P_2^2(x) &= (1-x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2), \end{aligned}$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_l^m(\cos \theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ ہوتا ہے لہذا $P_l^m(\cos \theta)$ ہر صورت $\cos \theta$ کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق m کی صورت میں $\sin \theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos \theta$ کے چند شریک لیٹرانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت $P_l^m = 0$ ہوگا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا رکھیے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفرقی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے فتابوڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنیاد طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروئی محدود میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

لہذا معمولی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروئی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
 Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\
 Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\
 Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
 Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
 Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}
 \end{aligned}$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاسلات^{۱۲} کو کروئی ہارمونیات^{۱۳} کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروئی ہارمونیات عمودی ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروئی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا l کو **کوانٹم کوانٹل** عدد^{۱۴}

جب کہ m کو **مقناطیسی کوانٹل** عدد^{۱۵} کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۳۲ اور ۴.۳۳ استعمال کر کے Y_2^1 اور Y_0^0 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

^{۱۲} معمول زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستقل علاقیت کے ساتھ ہم آہنگی کی منظر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}$ ہوگا۔

^{۱۳} spherical harmonics

^{۱۴} azimuthal quantum number

^{۱۵} magnetic quantum number

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) نامتناہل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حیرانی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ تفصیل دیں۔ (آپ P_3^2 کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تفصیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹمانڈر کنشیرر کنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left(\frac{2}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: بحمل بالخص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشاکلی مخفیہ کے لئے تف عمل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تف عمل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1) R \quad (۴.۳۵)$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لیئے

$$u(r) \equiv rR(r) \quad (۴.۳۶)$$

لہذا $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ، $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ، $R = u/r$ درج ذیل ہوگا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (۴.۳۷)$$

اس کو رداسی مساوات^{۱۶} کہتے ہیں^{۱۷} جو شکل و صورت کے لحاظ سے یک بعدی شرودنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ^{۱۸} درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (۴.۳۸)$$

^{۱۶} radial equation

^{۱۷} یہاں m کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

^{۱۸} effective potential

جس میں $[\hbar^2/2m][l(l+1)/r^2]$ اضافی حبزوپایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو اکہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدأ سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2 dr = 1 \quad (۴.۳۹)$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروئی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \quad (۴.۴۰)$$

اس کے تفاعلات موج اور احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u \quad (۴.۴۱)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۴.۴۲)$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ ملا کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $0 \rightarrow r$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے متابہ بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہذا $ka = n\pi$ ہوگا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (۴.۴۳)$$

centrifugal term^{۱۹}

^{۱۹} دور حقیقت۔ ہم صرف انہی چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستحالی ہو؛ مساوات ۴.۳۱ میں $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے قابل ہے۔

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو $1/\sqrt{4\pi}$) $Y_0^0(\theta, \phi)$ کی بنا غیر اہم ہے (کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \quad (۴.۴۴)$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو اٹانائی اعداد n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی، E_{nl} ، صرف n اور l پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \quad (۴.۴۵)$$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا کروئی بیل ٹیٹل تفاعل^{۲۲} ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا کروئی نیومن تفاعل^{۲۳} ہے جن کی تعریضات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \quad (۴.۴۶)$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروئی بیل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

quantum numbers^{۲۱}
spherical Bessel function^{۲۲}
spherical Neumann function^{۲۳}

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$ ؛ چھوٹی x کے لئے مقترانی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے فتا بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۷) \quad R(r) = A j_l(kr)$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۴.۴۸) \quad j_l(ka) = 0$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہوگا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل 2.4 دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔ تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے فنکشنوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط $n\pi$ یا انفریڈ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{nl}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$(۴.۵۰) \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$(۴.۵۱) \quad \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل A_{nl} کا تعین معمولی ذنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح $(2l+1)$ گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

ا. کروئی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفیات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $1 \ll x$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینہ کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کٹواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں احبازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعیین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $(\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2 \approx E_{n1}$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کیت m ہے کو مستناہی کروئی کٹواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل 3.4 دیکھیں)۔ فٹنوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (۴.۵۲)$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (۴.۵۳)$$

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں E تعیین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرکش کے تحلیل حل کی ترکیب سے، قدم بامقدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔)

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

کولمب محفّی، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی مومنٹال ذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

اس کے بعد ہم حالات کی مفت تاربی رویہ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \rightarrow \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ($\rho \rightarrow \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے وقتا بڑھتا ہے لہذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس $0 \rightarrow \rho$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛^{۲۴} لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($0 \rightarrow \rho$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے متابوڑ ہوتا ہے لہذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی رویہ کو چھیلنے کی خاطر یہ افت عمل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[(l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \quad (۴.۶۱)$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$ ، کو ρ کا طرقتی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad (۴.۶۲)$$

^{۲۴} یہ دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

ہمیں عددی سر (c_0 ، c_1 ، c_2 ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزوتفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”ضرعی اشاریہ“ j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ نیا مجموعہ $j = -1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزوضربی ($j+1$) اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم ضرعے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی منتقل کاروب اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔^{۲۵}

^{۲۵} آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متنازعاتی رویہ کو کیوں (جبزوضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جبزوضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا جبزو ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس جبزوضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

آئے j کی بڑی قیمت (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔^{۲۶}

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے مضر کرے کہ یہ بالکل ٹھیک ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \quad (۴.۶۴)$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \quad (۴.۶۵)$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے متابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نہا وہی غنیر پسندیدہ متغیرابی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیرابی حل بھی رداسی مساوات کے حبانز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، بلند j ، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلند}}+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j_{\text{بلند}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد^{۲۷}

$$n \equiv j_{\text{بلند}} + l + 1 \quad (۴.۶۷)$$

^{۲۶} آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - 2(l+1)$ اور نسب نماس میں $2l+2$ رد کرنے کی طرح $j+1$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تین میں ایک جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا چاہتا ہوں۔

^{۲۷} principal quantum number

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احبازی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر^{۲۸} ہے جو غالباً پورے کو انٹیم میکانیٹ میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، نام قابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور انٹیم کو انٹیم میکانیٹ کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

رداء بوہر^{۲۹} کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کو انٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

^{۲۸} Bohr formula

^{۲۹} Bohr radius

^{۳۰} رداء اس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0 ، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n - l - 1$ = بندہ j کا کشیدہ رکھی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تق عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حالت^{۳۱} (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہوگا؛ طبعی مستقامت کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ j توانائی^{۳۲} (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو بار بار دہرنا ہے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۷۷ کے تحت $l = 0$ لہذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندہ j توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہوگی۔ کلیہ توالی

ground state^{۳۱}
binding energy^{۳۲}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

(ساوات ۴.۷۶) $l = 0$ کے لئے j استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہذا $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۸۲) \quad R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاؤ عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہ
تو $l = 1$ کی صورت میں پہلے جب زو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہوگا لہذا درج ذیل
حاصل ہوگا۔

$$(۴.۸۳) \quad R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a}$$

(ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (ساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$(۴.۸۴) \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہوگی (ساوات ۴.۲۹)، لہذا E_n سطح توانائی کی کل
انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۸۵) \quad d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

کشیر رکنی $v(\rho)$ (جو ساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی
ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۸۶) \quad v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho)$$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

ایک شریکے لاگنچر کثیر رکنی^{۳۳} ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

q ویں لاگنچر کثیر رکنی^{۳۴} ہے۔^{۳۵} (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگنچر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنج کشیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنج کشیر رکنیاں، $L_{q-p}^p(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاسلات، $R_{nl}(r)$

$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$
$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$
$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$
$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$
$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$
$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$
$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$
$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$

چند ابتدائی شریک لائیج کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل 4.4 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ ان چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کو انسانی اعداد کے نتائج ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیاں کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں H کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیما ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات متقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لائیج کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n = 5$ ، $l = 2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

^{۳۵} دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس جوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا مکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہوگا، اور از مینی حال میں تشکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $m = 1, l = 1, n = 2$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x, y, z کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin \theta \cos \phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + dr$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $m = 1, l = 1, n = 2$ اور $m = -1, l = 1, n = 2$ کے درج ذیل خطی جوڑے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(r, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی فوٹان کے احراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔^{۳۷} عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جاتیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کوانٹم چھلانگ“ کہتے ہیں) منتقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

^{۳۷} فطرۃً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۵ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب کلیہ پلانک^{۳۸} کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

جبکہ طول موج $\lambda = c/\nu$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل^{۳۹} کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ^{۴۱} ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو فطرت کے بنیادی مستقالات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ($n_f = 1$) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمانی کارلیماخ^{۴۲} تسلسل^{۴۲} کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ($n_f = 2$) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلسل^{۴۳} کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، پاشن تسلسل^{۴۴} دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل 7.4 دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے)۔ سوال ۳.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم^{۴۵} میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ لتیم^{۴۶} میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعیین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقت طیفی طیف کے کس خطہ میں

^{۳۸} Planck's formula

^{۳۹} فوٹان در حقیقت برقت طیفی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات متاثر استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظر سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

^{۴۰} Rydberg constant

^{۴۱} Rydberg formula

^{۴۲} Lyman series

^{۴۳} Balmer series

^{۴۴} Paschen series

^{۴۵} Helium

^{۴۶} Lithium

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

$Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمن تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $Z e^2 \rightarrow e^2$ ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تذبذبی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں۔)

ب. اس نظام کا ”رد اس بوجہ“ a_g کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تذبذبی کلیہ بوجہ لکھ کر رد اس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی انداز قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احسراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔
- حسراج فوٹان (یا زیادہ ممکن طور پر گریوٹاؤن) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد (n) حال کی توانائی تعیین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبادا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$L = r \times p \quad (۴.۹۵)$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x \quad (۴.۹۶)$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \rightarrow -i\hbar \partial/\partial x$ ، $p_y \rightarrow -i\hbar \partial/\partial y$ ، $p_z \rightarrow -i\hbar \partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقابلیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی افتدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ (۴.۹۷) \quad &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned}$$

چکر 1/2

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک^{۴۷} اور تمام لیپٹان^{۴۸} کیلئے $\frac{1}{2}$ s ہوگا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط و ریاضت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف ”دو“ عدد امتیازی تفاسلات پائے جاتے ہیں: پہلا $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ ہے جسے ہم میدان^{۴۹} چکر (یا غیر رسمی طور پر \uparrow) اور دوسرا $\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$ ہے جس کو مخالف میدان^{۵۰} چکر (\downarrow) کہتے ہیں۔ انہیں کواس سہمیتا لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو اجزائی متالاب قطار (یا چکر کار^{۵۱}) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$(۴.۹۸) \quad \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-$$

جہاں

$$(۴.۹۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$(۴.۱۰۰) \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

ساتھ ہی عاملین چکر 2×2 متالاب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۰۱) \quad S^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-$$

quarks^{۴۷}
leptons^{۴۸}
spin up^{۴۹}
spin down^{۵۰}
spinor^{۵۱}

ہم S^2 کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالب۔

$$(۴.۱۰۲) \quad S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۰۱ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہوگا۔ مساوات ۴.۱۰۱ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہوگا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۴.۱۰۳) \quad S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۰۴) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۰۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۰۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۰۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ S_x, S_y, S_z تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ $S = \frac{\hbar}{2} \sigma$ لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۰۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالے قابلہ چکر^{۵۲} ہیں۔ دھیان رکھیں کہ S_x, S_y, S_z اور S^2 تمام ہر مشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس S_+ اور S_- غیر ہر مشی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ S_z کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۰۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۹۸) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیشانہش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۱۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہوگا)۔^{۵۳}

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیشانہش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں S_x کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

لہذا $\beta = \pm \alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S_x کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۱۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

^{۵۲} Pauli spin matrices

^{۵۳} لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر S_z کی پیشانہش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہوگا۔ (صفحہ ۹۹ پر حاشیہ ۱۲ دیکھیں۔)

بطور ہر مشی و تالب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مساوات ۴.۹۸) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \quad (۴.۱۱۲)$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a+b|^2/2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a-b|^2/2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۱۳)$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہذا S_z کیلئے $\hbar/2$ کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح S_x کیلئے $\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $5/6$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $1/6$ ہے۔

احتمال $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2$ اور $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2$ جبکہ $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $1/6$ ہے۔

$$\frac{5}{6} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

سوال ۴.۱۸: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد $1/2$ چکر ذرات یکتا تنظیم؟؟ میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ $S_a^{(1)}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز \hat{a} ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ $S_b^{(2)}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز \hat{b} ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں \hat{a} اور \hat{b} کے بیچ زاویہ θ ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۱۴)$$

سوال ۴.۱۹:

۱. کلیش گورڈن عددی سروں کو $s_1 = 1/2$ $s_2 = anything$ کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $|sm\rangle$ کا امتیازی حال ویکٹر S^2 ہوگا

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |S_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |S_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاثر ہوں کہ $S_x^{(2)}$ مثلاً ویکٹر $|s_2 m_2\rangle$ پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتی ہیں۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجہ دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۲۰: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر کے ذرے کے لیے متالاب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی افتدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۲۱: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکری متالاب تلاش کریں۔

جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہوگا۔

سوال ۴.۲۲: کروئی ہارمونکس کے لیے،؟؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ تواری دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجبانڈر تفاعل کے تفسرک کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(۴.۱۱۵) \quad (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1-x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m$$

سوال ۳.۲۳: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضا کی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi -)$$

۱. مدار کی زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انحصار دی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) حیز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکر کی زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیز (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکر کی زاویائی معیار z کے (S_z) حیز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت کو $J = L + S$ لیں۔

ه. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انحصار دی احتمال کیا ہوگا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگا؟

ح. آپ چکر کے z حیز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۴:

۱. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) \equiv e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا L_z/\hbar کو z کے گرد گھومنے کا پیداکار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $L\cdot\hat{n}/\hbar$ ہوگا جو \hat{n} کے رخ گھومنے کا پیداکار ہے یعنی $e^{(iL\cdot\hat{n}\varphi/\hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیداکرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیداکار $S\cdot\hat{n}/\hbar$ ہوگا بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\sigma\cdot\hat{n})\varphi/2}\chi \quad (۳.۱۱۶)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور x - axis کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہم میدان (χ_+) کو مخالف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور y - axis کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا متالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہوگا؟

د. محور z - axis کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ج. درج ذیل دکھائیں

$$e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۱۱۷)$$

سوال ۴.۲۵: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی تبدیلی رشتے (مساوات 99.4) امتیازی افتدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہوگا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جسکا پود لسانی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بولہ درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

۱. تصدیق کریں کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ تبدیلی رشتوں کو q 's اور p 's مطابقت کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2 - q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی سرعش جس کی کیت $m = \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega = 1$ ہو کہ ہر ایک ہیمیلٹنی H کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی سرعش کے ہیمیلٹنی کی امتیازی افتدار $(n + 1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ہوگا (حصہ ?? کے الجبرائی نظریہ میں ہیمیلٹنی کی روپ اور باضابطہ تبدیلی رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی افتدار لازمًا عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۲۶: عمومی حال مساوات 139.4 می 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $| \langle S_z \rangle | \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$ میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر a کو حقیقی متغیر کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہوگی b حائل حقیقی یا حائل خیالی ہو۔

سوال ۴.۲۷: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا؟؟؟؟؟ q ہو اور جو مقناطیسی میدان \mathbf{E} اور \mathbf{B} میں مستقر رفتار \mathbf{v} کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینسز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۴.۱۱۸)$$

اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (۳.۱۱۹)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (۳.۱۲۰)$$

جہاں \mathbf{A} سمتی مخفی قوت، $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ اور φ غیر سمتی مخفی قوت ($E = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$) ہیں لہذا شرودنگر مساوات میں باضابطہ متبادل ($\hbar/i \nabla$) ($\mathbf{p} \rightarrow ((\hbar/i) \nabla)$) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \psi \quad (۳.۱۲۱)$$

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \rangle \quad (۳.۱۲۲)$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle r \rangle / dt$ کو $\langle v \rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle v \rangle}{dt} = q\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{q}{2m} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \rangle \quad (۳.۱۲۳)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھے کے حجم پر یکساں \mathbf{E} اور \mathbf{B} میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}), \quad (۳.۱۲۴)$$

اس طرح $\langle v \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لوریسنز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۸: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقل ہیں

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2} (x_j^2 - y_i^2)$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

۱. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کیریت m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$(۴.۱۲۵) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں $qB_0/m = \omega_1$ اور $\sqrt{2qKm} = \omega_2$ ہوگا۔ تبصرہ: $0 = K$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مشاغل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ احبازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۲۹: (پس منظر حبانے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوت A اور ϕ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں، طبعی مقداریں میدان E اور B ہیں
۱. دکھائیں کہ مخفی قوت

$$(۴.۱۲۶) \quad \phi' \equiv \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں معتم اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان ϕ اور A دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گنج تبادله کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوت کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم حبانہ چاہیں گے کہ ایسا نظریہ گنج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$(۴.۱۲۷) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar} \Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گنج تبادله مخفی قوت ϕ' اور A لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی حبز کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبعی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گنج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

باب ۵

متماثل ذرات

۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذرہ کے لیے فعال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے $\psi(r, t)$ فضائی مہدت r اور وقت t کا تفاعل ہوگا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے مختلط (r_1) دوسرے ذرے کے مختلط (r_2) اور وقت کا تابع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے shrodinger مساوات

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا۔ جہاں H مکمل نظام کا Hamiltonian ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} v_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} v_2^2 + v(r_1, r_2, t)$$

ذرہ ایک یا ذرہ دو کے محدودوں کے لحاظ سے تفروقات لینے کو Δ زیر نوشت میں ایک یا دو سے ظاہر کیا گیا ہے۔
ذرہ ایک کا حجم $d^3 r_1$ اور ذرہ دو کا حجم $d^3 r_2$ پائے جانے کا اہتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

ظاہر ہے کہ ψ کو درج ذیل کے لحاظ سے معمول پر لانا ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفی توانائی کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۵.۶) \quad \psi(r_1, r_2, t) = \psi(r_1, r_2) e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

جہاں فنکشنی تعامل معالج ψ غیر تابع وقت shroudinging مساوات

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi$$

جس میں E پورے نظام کی قتل توانائی ہے۔

سوال-5ء1: عام طور پر باہمی مخفی توانائی انحصار صرف 2 ذرات کے بیچ سمتیہ $r_1 - r_2$ پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات r_1 اور r_2 کی جگہ نے متغیرات اور مرکز کیت $R = \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)}{m_1 + m_2}$ مساوات shroudinging ہوتی ہے۔

$$(الف)۔ دکھائیں کہ $r_1 = R + (\frac{\mu}{m_1})r, r_2 = R - (\frac{\mu}{m_2})r$ اور $\nabla_1 = (\frac{\mu}{m_2})\nabla_R + \nabla_r, \nabla_2 = \nabla_R - (\frac{\mu}{m_1})\nabla_r$ جہاں$$

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تشخیص شدہ کیت ہے۔

(ب)۔ دکھائیں کہ غیر تابع وقت shroudinging مساوات درج ذیل رعب اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(r)\psi = E\psi$$

(ج)۔ متغیرات کو $\psi(R, r) = \psi_r(r)\psi_R(R)$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_r ایک ذرہ کی shroudinging مساوات جہاں کیت $(m_1 + m_2)$ مخفی توانائی صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R کو مطمئن کرتا ہے۔ جبکہ ψ_R ایک ذرے کی shroudinging مساوات جہاں تخفیف شدہ کیت ہو۔ مخفی توانائی $V(r)$ ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ قتل توانائی اور ان کا مجموعہ $E = E_R + E_r$ ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کیت ایک آزاد ذرہ کی طرح حرکت کرتا ہے جبکہ ذرہ ایک کے لحاظ سے ذرہ دو کی نصیبتی حرکت ایسے ہی ہوگی جیسا مخفی توانائی V میں تخفیف شدہ کیت کا ایک ذرہ کرتی ہے mechanics classical میں بھی بالکل یہی تحلیل ہوگی جو 2 اجسام ملے کو محاصل ایک جسم سلسلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال 5ء2: یوں Hydrogen کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم electron کی کیمت کی جگہ تخفیف شدہ کیمت استعمال کریں گے

(الف)۔ hydrogen کی بندش کی توانائی (مساوات 4ء77) جاننے کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے دو بمعنی ہندسوں تک فیصد حائل کتنے ہوگا۔

(ب)۔ hydrogen اور Dueterium کے لیے $(n = 2) > (n = 3)$ سرخ بالمر لکیریوں کے بیچ تفاعل معالج میں مشرق تلاش کریں۔

(ج)۔ Positronium کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ proton کی جگہ positron رکھنے سے positronium پیدا ہوگا۔ positron کی کیمت electron کی کیمت کے برابر ہوگا جبکہ اس کی علامت Electron کی علامت کے مخالف ہے۔

(د)۔ فرض کریں آپ hydrogenmuonic جس میں electron کی جگہ ایک muon کی موجودگی کی تصدیق کرنا چاہتے ہوں۔ muon کا electron bar کے bar کے برابر ہے۔ جبکہ یہ electron سے 206ء77 گنا زیادہ کیمت رکھتا ہے۔ آپ Lyman α لکیر $n = 1$ تا $n = 2$ کے لیے کس طور معالج پر نظر رکھیں گے۔

سوال 5ء3: chlorine کے متدرج دو ہم حب Cl^{35} and Cl^{37} پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCL کی لرزشی طیف متدریب متدریب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا۔ جن میں مشرق $v = 7.51 \times 10^{-4} v$ جہاں Δv photon کی تعدد ہے۔ اشارہ: اس کو ایک Harmonium مشرقعیش تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ ہوگا۔ جہاں μ تخفیف شدہ کیمت (مساوات 5ء8) ہے۔ جبکہ k دونوں ہجما کے لیے ایک جیسا ہے۔

مشال 1.5 فرض کریں ایک لامتناہی چکور کنواں میں کیمت M کے باہم غیر متعلق دو ذرات جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں پائے جاتے ہیں۔ آپکو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملا کیسے کیا جا سکتا ہے۔ ایک ذرہ حالات درج ذیل ہوں گے۔ جہاں $K = \frac{(\pi)^2 (\hbar)^2}{2m(a)^2}$ ہے۔

$$(۵.۹) \quad \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n(\pi)}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

یہ ذرات متابل ممیز ہونے کی صورت میں جہاں ذرہ 1 حال n_1 میں اور ذرہ 2 حال n_2 میں ہو مرکب تفاعل موج سادہ حاصل ضرب ہوگا۔

$$(۵.۱۰) \quad \Psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = ((n_1)^2 + (n_2)^2) K.$$

مشال کے طور پر زمینی حال

$$(۵.۱۱) \quad \Psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K;$$

پہلا حبان حال دو چند انحطاطی

$$(۵.۱۲) \quad \Psi_{12} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$

$$(۵.۱۳) \quad \Psi_{21} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K;$$

باب ۵: متماثل ذرات

ہوگا وغیرہ وغیرہ۔ دونوں ذرات یکساں پوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم پہلا حجبان حال جسکی توانائی اب بھی 5K ہوگی غیر انخطاطی ہوگا۔

$$(۵.۱۴) \quad \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

اور اگر ذرات یکساں فرمیون ہوں تب کوئی حال بھی 2K توانائی کا نہیں ہوگا۔ جبکہ زمینی حال جسکی توانائی 5K ہوگی۔ درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۵) \quad \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

* سوال 4.5

(جبر و الف) اگر Ψ_a اور Ψ_b عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات 10.5 میں مستقل 'A' کیا ہوگا؟

(جبر و ب) اگر $\Psi_a = \Psi_b$ ہوں اور یہ معمول شدہ ہوں تب 'A' کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف پوزون کیلئے ممکن ہے۔)

سوال 5.5

(جبر و الف) لامتناہی چکور کنواں میں باہم غیر متماثل دو یکساں ذرات کا ہملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال 1.5 میں دیا گیا فرمیون کا زمینی حال 'H' کا مناسب امتیازی فتر والا امتیازی تفاعل ہوگا۔

(جبر و ب) مثال 1.5 میں دیئے گئے حجبان حالات سے اگلے دو حالات تفاعل موج اور توانائیاں تینوں صورتوں میں قابل ممیز یکساں موزوں، یکساں فرمیون حاصل کریں۔

سوال 6.5 لامتناہی چکور کنواں میں دو باہم غیر متماثل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال Ψ_n مساوات 28.2 اور دوسرا حال Ψ_l $n \neq l$ میں ہے۔ $(x_1 - x_2)^2$ کا حساب اس صورت لگائیں کہ (الف) یہ غیر قابل ممیز ہوں۔ (ب) یہ یکساں پوزون ہوں اور (ج) یہ یکساں فرمیون ہوں۔

سوال 7.5 فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال Ψ_a دوسرا حال Ψ_b اور تیسرا حال Ψ_c میں پائے جاتے ہیں۔ حالات Ψ_a ، Ψ_b اور Ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے مساوات 15.5، 16.5 اور 17.5 کی طرز پر تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) متماثل ممیز ذرات کو (ب) یکساں پوزون کو اور (ج) یکساں فرمیون کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشافلی ہوتا ہوگا۔ جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشافلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشافلی تفاعل امواج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ سلیئر نقطہ تیار کریں جس کی پہلی صنف $\Psi_a(x_1)$ ، $\Psi_b(x_1)$ ، $\Psi_c(x_1)$ وغیرہ پر مشتمل ہو۔ اس کی دوسری صنف $\Psi_a(x_2)$ ، $\Psi_b(x_2)$ ، $\Psi_c(x_2)$ وغیرہ پر مشتمل ہوگی اور اسی طرح اس کے بقایا صنف ہوں گے۔ یہ نقطہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہوگا۔

حصہ 2.5 جوہر

ایک ماڈل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کی کمیت M اور بار e کے Z الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہوگا۔

$$(۵.۱۶) \quad H = \sum_{j=1}^Z -\frac{h^2 \Delta_j^2}{2m} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{Ze^2}{r_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}.$$

ہر یہ قوسین میں بند جزو مرکزہ کے برقی میدان میں Z الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرا جزو جو ماسوائے $k = 1$ تمام k اور k مجموعہ پر ہے۔ الیکٹرانز میں باہمی قوت دمناع کی بت مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دوبار گنا جاتا ہے۔ ہمیں تقاضا ملتا ہے کہ موج $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$ کیلئے درج ذیل شرودنگر مساوات حل کرنی ہوگی:

$$(۵.۱۷) \quad H\Psi = E\Psi$$

چونکہ الیکٹران یکساں نمبر میون ہیں لہذا تمام حل قابل قبول نہیں ہوں گے۔ صرف وہ حل قابل قبول ہوں گے جن کا مکمل حال، مقتمام اور چکر

$$(۵.۱۸) \quad \Psi(r_1, r_2, \dots, r_Z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_Z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشافل ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ بد قسمتی سے ماسوائے سادہ ترین صورت $Z = 1$ ہائیڈروجن کیلئے مساوات 2.5 میں دی گئی ہملٹنی کی شرودنگر مساوات ٹھیک حل نہیں کی جاسکتی ہے۔ کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے بابوں میں غور کیا جائے گا۔ ابھی میں الیکٹران کی قوت دمناع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ 1.2.5 میں ہم ہلیم کی زمینی حال اور جہان حالات پر غور کریں گے۔ جبکہ حصہ 2.2.5 میں ہم بالاجواہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

سوال 8.5 فرض کریں مساوات 2.5 میں دی گئی ہملٹنی کے لیے آپ شرودنگر مساوات 2.5.5 کا حل $\Psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_Z)$ حاصل کر پائیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تشافل تقاضا عمل ایک مکمل خلاف تشافل تقاضا عمل کس طرح بنائیں گے جو شرودنگر مساوات کو کسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

جزوہ 1.2.5 ہلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے زیادہ جوہر ہلیم $Z = 2$ ہے۔ اس کا ہملٹنی

$$(۵.۱۹) \quad H = -\frac{h^2 \Delta_1^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} + -\frac{h^2 \Delta_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|},$$

بار Ze کے مرکزہ کے دو ہائیڈروجن نہ ہلکتی الیکٹران 1 اور دوسرا الیکٹران 2 کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دماغ پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر قابل علیحدگی ہوگا۔ اور اس کے حلوں کو نصف پوہر رداس مساوات 72.4 اور چارگن پوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے وجہ سے سمجھنے کی صورت میں سوال 16.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_{nlm}(r_1)\Psi_{n'l'm'}(r_2), \quad [5.28]$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی جہاں $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$ ہوگا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}), \quad [5.29]$$

بالخصوص زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi_0(r_1, r_2) = \Psi_{100}(r_1)\Psi_{100}(r_2) = \frac{8e^{-2(r_1 + r_2)/a}}{\pi a^3}, \quad (5.30)$$

مساوات 80.4 دیکھیں اور اس طرح کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$E_0 = 8(-13.6 \text{ eV}) = -109 \text{ eV}. \quad [5.31]$$

چونکہ ψ_0 تشاتل تفاعل ہے لہذا چکر حال کو خلاف تشاتل ہونا ہوگا اور یوں ہلیم کے زمینی حال کا تنظیم یکتا ہوگا۔ جس میں چکر ایک دوسرے کے مخالف صنف بند ہوں گے۔ حقیقت میں ہلیم کا زمینی حال یقیناً یکتا ہے۔ لیکن اس کی توانائی تجرباتی طور پر -78.975 eV حاصل ہوتی ہے۔ جو مساوات 31.5 سے کافی مختلف ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کہ ہم نے الیکٹران کی توانائی دماغ کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار ہے۔ مساوات 27.5 دیکھیں۔ جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی -109 کی بجائے -79 eV ہوگی۔ سوال 11.5 دیکھیں۔ ہلیم جہان حالات

$$\Psi_{nlm}\Psi_{100}. \quad [5.32]$$

ہائیڈروجن زمینی حال میں ایک الیکٹران اور دوسرا جہان حال پر مشتمل ہوگا۔ دانوں الیکٹران کو جہان حالات میں لے جاتے ہی ایک فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر پھینکتا ہے۔ ($E > 0$)۔ یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہلیم باردار یہ (He^+) حاصل ہوگا۔ یہ باذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں۔ سوال 9.5 دیکھیں۔ ہم ہمیشہ کی طرح تشاتل اور خلاف تشاتل حالات تیار کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.5؛ اول الفکر خلاف تشاتل چکر تنظیم یکتا کے ساتھ جائے گا۔ جنہیں پیراہلیم کہتے ہیں۔ جبکہ مؤخر ذکر کو تشاتل چکر تنظیم بہت درکار ہوگی اور انہیں اور تھوہلیم کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً پیراہلیم ہوگا جبکہ جہان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ 2.1.5 میں دریافت کیا۔ تشاتل فضائی حال الیکٹرانز کو متعریب لاتا ہے۔ جس کی بنا ہم توقع کرتے ہیں کہ پیراہلیم کی باہم متعادل توانائی زیادہ ہوگی۔ یقیناً تجربہ بات سے تصدیق ہوتی ہے کہ اور تھوہلیم کے لحاظ سے پیراہلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے۔ شکل 2.5 دیکھیں۔

سوال 9.5

حبزوالف فرض کریں کہ آپ ہلیم ایٹم کے دونوں الیکٹرانز کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں۔ خارج الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی۔

حبزوب ہلیم باردار He^+ کی تیف پر مقداری تجزیہ کریں۔

سوال 10.5 ہلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں کیفی تجزیہ کریں۔ (الف) اگر الیکٹران یکساں بوزون ہوتے۔ (ب) اگر الیکٹران متماثل ممیز ہوتے۔ جبکہ ان کی کیت اور بار نہ ہوتا۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے اور ان کی تنظیم چکریت اور سہتا ہے۔

سوال 11.5

(حبزوالف) مساوات 30.5 میں دی گئی حال Ψ_0 کیلے $((\frac{1}{|r_1 - r_2|}))$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کروی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھتے ہوئے تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}. \quad (۵.۲۱)$$

ہو۔ پہلے d^3r_2 کا مکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے مکمل آسان ہے۔ بس اتنا یاد رکھیں کہ آپ کو مثبت حبزو لینا ہوگا۔ آپ کو r_2 کو مکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا۔ پہلا صفر سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$ ۔

حبزوب حبزوالف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہلیم کی زمینی حال میں الیکٹران کا باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔ اور اس کو E_0 مساوات 31.5 کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمینہ حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تعامل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بعدی لامتناہی چکور کنواں) کے لئے غیر تابع وقت شرودنگر مساوات:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تقاضات کا مکمل سلسلہ

$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی افتدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنواں کی تہہ میں ایک چھوٹا موٹا ڈال کر؛ شکل 6-1) ہم نے امتیازی تقاضات اور امتیازی افتدار حسابنا چاہیں گے:

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ نظریہ اضطراب کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم ب قدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$

باب ۶. غیر تانبہ وقت نظریہ اضطراب

جہاں H' اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی اور H اصل ہیملٹنی ہوگا اس کے بعد ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں n ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبہ تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H') [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots) [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

مستمر رتبہ λ^0 کی صورت میں اس سے $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

وغیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں)

۶.۱.۲ اول رتبہ نظریہ

مساوات ۶.۷ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر مکمل لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم H^0 ہر مثنیٰ ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$ کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی

مثال ۶.۱: لامتناہی چکوروکٹوں کی غیر مضطرب تفاعلات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کٹوں کی تہہ کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل 2.6 توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں $H' = V_0$ ہوگا لہذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گے جی ہاں تمام کی تمام V_0 مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی اس کے برعکس کٹوں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل 3.6 ہوگا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مساوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی عنصر سے ہم مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں

$$(۶.۱۰) \quad (H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

یہاں کوئی یو پیسڈ لامتناہی چکوروکٹوں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا

باب ۶. غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے لہذا یہ ψ_n^1 میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہذا کسی بھی تفاعل کی طرح ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے

$$(۶.۱۱) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0$$

اگر $psi_n^1 / 10.6$ مساوات کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جاننے ہوئے کہ غیر مضطرب شعروں کے مساوات مساوات 1.6 کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بائیں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر $l \neq n$ ہو تو درج ذیل ہوگا

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$(۶.۱۲) \quad c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

لہذا اورج ذیل حاصل ہوگا

$$(۶.۱۳) \quad \psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو نسب ناکوئی ی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہوتا) ہاں اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک دوسرے جتنی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نامہ صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں انخطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبی تصحیح E_n^1 مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ

تفاعل موج کی اول رتبہ تصحیح ψ_n^1 مساوات 13.6 دیتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرورت ناکچا ہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چکور کنواں کے وسط میں δ تفاعلی موڈاڈالتے ہیں

$$H' = \alpha \delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں α ایک مستقل ہے

- احباباتی توانائیوں کی اول رتبہ تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت n کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہوں گی
- زمینی حال کی تصحیح ψ_1^1 کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاؤ میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی احباباتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس پک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$

- (الف) نہیں توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کرے آپ نے کل یہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طقتیں تسلسل میں پھیلائیں
- اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبہ اضطراب کا حساب لگائیں یہاں H' کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے مکمل کی قیمت کے حصول کی نا ضرورت اور نہ احبابات ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چکور کنواں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور a کنواں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

- پہلی قدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں
- اول رتبہ نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبہ نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم ψ_n^0 اور دور تبی مساوات مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کی ہر مشی پین کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا ساتھ ہی $1 = \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$ ہوگا لہذا ہمارے پاس E_n^2 کا درجہ ذیل کلیہ رہ جاتا ہے

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle \quad (۶.۱۴)$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} m \neq n \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۵)$$

ہوگا جو دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاسل موج کی دوم رتبی تصحیح ψ_n^2 توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔ سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2) سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $2m(\alpha / \pi \hbar n)^2 -$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح E_n^2 سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی محفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا محفی توانائی میں $H' = qEx$ متدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۱. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شرودنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

۶.۲ انخطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انخطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ مضطرب حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 کی توانائیاں ایک دوسرے جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ $c_a^{(b)}$ مساوات 12.6 اور E_a^2 مساوات 15.6 بے فت بوڑھتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$ اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انخطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

۶.۲.۱ دو پڑتا انخطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

$$(۶.۱۶) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$(۶.۱۷) \quad \psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہوگا

$$(۶.۱۸) \quad H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$

عام طور پر اضطراب (H') انخطاط کو ”توڑے“ (یا ”منوخ“ کرے) گا جیسے جیسے ہم λ کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگا شکل 4.6 مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند یعنی صفر کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں ہوگا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہوگا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات 9.6 کا حاب نہیں کر سکتے ہیں

باب ۶. غیر متابع وقت نظریہ اضطراب

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات 17.6 میں لکھتے ہیں جہاں α اور β متبادل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروع کر

$$H\psi = E\psi \quad (۱.۱۹)$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots \quad (۱.۲۰)$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات 19.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح λ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H^0 \psi^0 + \lambda (H' \psi^0 + H^0 \psi^1) + \dots = E^0 \psi^0 + \lambda (E^1 \psi^0 + E^0 \psi^1) + \dots$$

اب $H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$ مساوات 18.6 کی بنا اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$H^0 \psi^1 + H' \psi^0 = E^0 \psi^1 + E^1 \psi^0 \quad (۱.۲۱)$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

چونکہ H^0 ہر مشی ہے لہذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \quad (۱.۲۲)$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا

$$W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b) \quad (۱.۲۳)$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \quad (۱.۲۴)$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام W معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان متبادل ہیں مساوات 24.6 کو W_{ab} سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے βW_{ab} کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\alpha [W_{ab} W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \quad (۱.۲۵)$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں E^1 کی مساوات دیگی

$$(1.21) \quad (E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ ثابت ہوئے $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(1.22) \quad E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right]$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو جذور دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہوگا ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہوگا لہذا مساوات 22.6 کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات 24.6 کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہوگا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہوگا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے موزوں خطی جوڑتھے کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جان پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہر مشی عامل ہے جو H^0 اور H' کے ساتھ متبادل ہے اگر H^0 کے انحطاطی امتیازی تقاضات ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تقاضات ہوں جن کے منفرد امتیازی امتداد ہوں

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب $W_{ab} = 0$ ہوگا لہذا ψ_b^0 اور ψ_a^0 نظریہ اضطراب میں متبادل استعمال موزوں حالات ہوں گے

ثبوت: ہم مندرجہ کرچے ہیں کہ $[A, H'] = 0$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] | \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | AH' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A | \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A\psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' | \nu\psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہذا $W_{ab} = 0$ ہوگا

سبق اگر آپ کا منہ انحطاطی حالات سے ہوا ایسا ہر مشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ متبادل ہو H^0 اور A کے یک وقت امتیازی تقاضات کو اپنے غیر مضطرب حالات

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عمل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہوگا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

جہاں α_{\pm} اور β_{\pm} کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

$$a. \langle \psi_+^0 | \psi_-^0 \rangle = 0 \text{ عمودی ہے}$$

$$b. \langle \psi_+^0 | H' | \psi_-^0 \rangle = 0$$

$$c. \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E^1 \text{ کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے اپنے آپ پر بندیک بعدی خطہ جس کی لمبائی L ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

a. دکھائیں کہ ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $n = 0$ کے علاوہ تمام حالات دہرا انخطاطی ہے

b. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہو یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں معمولی چھکاوٹ پیدا کرتا گویا تار کو یہاں مروڑا گیا ہوں مساوات 27.6 استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہذا مکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت مکمل کی حدود کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm \infty$ رکھیں

c. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہوگی

د. ایسا ہر مشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جبزونج میں استعمال کیے

۶.۲.۲ بلنڈرتبی انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جاسکتا ہے مساوات 22.6 اور 24.6 کو ہم دوبارہ تلبی روپ میں لکھتے ہیں

$$(1.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ W E^1 والتاب کے امتیازی افتدار ہیں مساوات 26.6 اس والتاب کی امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم n پڑتا انخطاط کی صورت میں $n \times n$ والتاب

$$(1.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تقاضات موج کی تلاش سے مراد انخطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو والتاب W کو وتری بناتا ہو یہاں بھی ایک ایسا عامل A تلاش کر کے جو H' کا متبادل ہو A اور H' کے بیک وقت امتیازی تقاضات استعمال کر کے ہم والتاب W حاصل کریں گے جو از خود وتری ہو گا لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دو پڑتا انخطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انخطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مشال ۶.۲: تین آبادی لامتناہی کعبی کنواں سوال 2.4 پر غور کریں

$$(1.30) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(1.31) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

جہاں n_x ، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$(1.32) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

دھیان رہے کہ زمینی حال ψ_{111} غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$(۱.۳۳) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تیسرا انحطاطی ہیں

$$(۱.۳۴) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک دوسری جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جو ڈب کے ایک چوہتائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے شکل 5.6 زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتی ہے

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\ (۱.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی پہلے قدم میں ہم متالاب W تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلیل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\ &\quad \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \end{aligned}$$

تاہم z تکمل صفر ہوگا جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض درج ذیل ہوگا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے

$$(۱.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

ماتر \mathbf{W} بلکہ $4\mathbf{W}/V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ۱.۵ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کے امتیازی امتداد درج ذیل ہوں گے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$

یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۱.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 + \kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1 - \kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں E_1^0 مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی E_1^0 تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انخطاط ختم کرتا ہے شکل 6.6 دیکھیں دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انخطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تصحیح مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی $V_0/4$ ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

باب ۶. غیر تابَع وقت نظریہ اضطراب

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہونگے

(۶.۴۰)

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$

جہاں عددی سر (α, β, γ) متالِب W کے امتیازی سمتیات ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0, \beta = \pm \gamma = 1/\sqrt{2}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں پی کی ہیں۔ ہوں موزوں حالات درج ذیل ہونگے

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (۶.۴۱)$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنواں مساوات 30.6 میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تقابلی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنواں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انخطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابَع حالات پائے جاتے ہوں فرض کریں متالِبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے اور ϵ کوئی چھوٹا عدد ($\epsilon \ll 1$) ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی ($\epsilon = 0$) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. متالِب H کہ بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتب تک طاقتمتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا حبزو-۱ کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی افتدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: مسین دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح و تالاب W کے امتیازی افتدار ہوں گے مسین نے دعویٰ کیا کہ یہ $n = 2$ صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چپل کر درج ذیل سے آغاز کریں

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(ساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات 22.6 کے مثال کا مفہوم و تالاب W کی امتیازی قدر مساوات لیا جاسکتا ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶.۴۲)$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولم مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر و مدار ربط، کی بنیاد پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت α^2 گن کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۴۳)$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی α گن چھوٹا لیمب انتفتال ہے جو بھسکی میدان کی کوانٹائزیشن سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے سچے مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

۱. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی mc^2 کی صورت میں لکھیں

باب ۶. بغیر تابع وقت نظریہ اضطراب

ب۔ ϵ_0 ، e ، \hbar اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حنا الص بے بعدی بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی مستقالات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ حبزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نو بیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا حبزو بظا ہر حرکی توانائی کو ظا ہر کرتا ہے

$$(۶.۴۴) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

جس میں باضابطہ متبادل $(\hbar/i)\nabla^2 \rightarrow p$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا

$$(۶.۴۵) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$(۶.۴۶) \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

جہاں پہلا حبزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال عنصر بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا حبزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے ہمیں سختی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$(۶.۴۷) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

ہوگا جس کی بنا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

غیراضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$T = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc} \right)^4 \cdots - 1 \right]$$

$$(۶.۴۹) \quad = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبہ اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہوگی مساوات 9.6

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle \psi | p^4 | \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شرودنگر مساوات کہتی ہے

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ ہوگا

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال ψ_{nlm} مساوات 89.4 میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں a رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا مساوات ۱۷۲.۴ استعمال کرتے ہوئے a کو خارج کر کے باقی کو E_n مساوات ۷۰.۴ کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right] \quad (۶.۵۷)$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2 \times 10^{-5}$ گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات ۵۱.۶ میں اضطراب کروئی تھاکلی ہے لہذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہوگا مزید کسی E_n کے حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی افتدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں l ، n اور m موزوں کو انٹیم اعداد ہیں لہذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست ہوتا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ ورل سوال ۱۴۰.۴ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۵۵.۶ ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴۳.۴ میں حال ψ_{321} کے لیے r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ غیر اہم عنصر $s = -1$ مساوات ۵۵.۶ $s = -2$ مساوات ۵۶.۶ اور $s = -3$ مساوات ۶۴.۶ کے لیے کریں $s = -7$ کی صورت میں کیا ہوگا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: ایک بعدی ہارمونی سر تعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم رتبہ اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال ۵.۲ میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہر مشی ہے لیکن p^4 ہر مشی نہیں ہے ان حالات کے لیے ψ متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

مساوات ۱۳.۴ مکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle f | p^2 g \rangle = -4\pi\hbar^2 \left(r^2 f \frac{dg}{dr} - r^2 g \frac{df}{dr} \right) \Big|_0^\infty + \langle p^2 f | g \rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}} e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں اور لکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا

$$\langle \psi_{n00} | p^4 | \psi_{m00} \rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4} \frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4 \psi_{n00} | \psi_{m00} \rangle$$

۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے شکل 7.6 مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوٹے میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر μ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیمبلٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\mu \cdot B \quad (۶.۵۸)$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر μ درکار ہوگا پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رویہ تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو بالوٹ و سیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے جہاں e پروٹان کے بار کو اور T دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوٹے میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ ہوگا مزید B اور L دونوں کا رخ ایک دوسرے جیسا ہوگا شکل 7.6 میں اوپر جانب لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} L \quad (۶.۵۹)$$

جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب ممکن مقناطیسی مثبت ہوگا جس کا سمت ہم حصہ 2.4.4 میں کرچکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار q جس کی لمبائی r کے چلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو پر غور کریں شکل 8.6 اس پھیلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

اگر چھلا کی کیت m ہو جو دی معیار اثر mr^2 ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہوگا

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$

اس تنظیم کے لیے ظاہر ہے کہ ممکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہو گا دھیان رہے کہ یہ r اور T کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں نکلے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر μ اور S کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تا کہ بار اور کیت کا نسبت یکساں ہو ہر جھلے کا اور لہذا پوری جسم کا ممکن مقناطیسی نسبت ایک دوسرے جیسا ہو گا مزید μ اور S کے رخ ایک دوسرے جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہو گئے لہذا درج ذیل ہوگا

$$\mu = \left(\frac{q}{2m}\right)S$$

یہ حوالہ کا سیکی حساب ہے درحقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگن ہے

$$\mu_e = -\frac{e}{m}S \quad (۶.۶۰)$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی حیز و ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L$$

اس حساب میں ایک مضرب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوٹے میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہذا یہ اسراع پذیر ہوگا اس حساب میں محبہد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے مقبول کیا جاسکتا ہے جو حساب میں حیز و ضربی 1/2 شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L \quad (۶.۶۱)$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ ممکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت حیز و ضربی جو انقضاات ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبی طور پر یہ الیکٹران کے لمحاتی ساکن چھوٹے میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹنے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت سرورڈ کی بدولت ہے۔

اب کو انم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چپکرو دائری ربط کی صورت میں L اور S کے ساتھ ہیملٹنی غیر منقلب ہو گا لہذا چپکرو دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ H'_{s0} منقلب ہو گا L^2 ، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$(۶.۶۲) \quad J \equiv L + S$$

لہذا یہ مقداریں بقائی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ L^2 ، S^2 ، J^2 ، اور J_z کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (L + S) \cdot (L + S) = L^2 + S^2 + 2L \cdot S$$

کی بنا

$$(۶.۶۳) \quad L \cdot S = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2)$$

ہو گا لہذا $L \cdot S$ کے امتیازی امتداد درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6 (ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$(۶.۶۴) \quad \langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

لہذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{s0}^1 = \langle H'_{s0} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2c^2} \frac{(\hbar^2/2) [j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہیں

$$(۶.۶۵) \quad E_{s0}^1 = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)} \right\}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چپکرو دائری ربط ایک جتنا رتبہ (E_n^2 / mc^2) رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کر کے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

$$(۶.۶۶) \quad E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left(3 - \frac{4n}{j+1/2} \right)$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ چھوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (۶.۶۷)$$

مہین ساخت l میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک n کیلئے l کی مختلف اجزائی قیمتیں ایک دوسرے جیسی توانائی کے حامل نہیں ہوں گی تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری وچکر زاویائی معیار حرکت کے z حبز و امتیازی افتدار m_l اور m_s اب موزوں کو انٹم اعداد نہیں ہوں گے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کو انٹم اعداد n, l, s, j اور m_j ہوں گے سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[L \cdot S, L]$ ، (ب) $[L \cdot S, S]$ ، (ج) $[L \cdot S, J]$ ، (د) $[L \cdot S, L^2]$ ، (ه) $[L \cdot S, S^2]$ ، (و) $[L \cdot S, J^2]$ ؛ اشارہ: L اور S زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $l \pm 1/2 = j$ ہے ثت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو متعرب متعرب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہوگی اور ان کے بچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے eV میں E_{fs}^1 تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں فوٹان کی صورت میں توانائی کا اخراج $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا جہاں پہلا حبز و سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت ΔE کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں فوٹان تعدد میں تبدیل کر کے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بچ فاصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بچ تعددی فاصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بچ تعددی فاصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $(???) = j$ سے $(???) = 2$ ، $(???) = j$ سے $(???) = 3$ ، ... ہو گئے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بچ تعددی فاصلہ Hz (???) ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بچ فاصلہ ??? Hz ہے ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر ذراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\}$$

یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $1 \ll \alpha$ ہے اس کو a^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

باب ۷

تغییری اصول

باب ۸

و ک ب تخمین

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

باب ۱۰

حرارت ناگزرتخمین

باب ۱۱

بکھراؤ

۱۱.۱ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۱.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لیے مساوات شرڈنگر متابل علیحدگی حلوں

$$(11.1) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

کا حاصل ہوگا جہاں Y_l^m کروی ہارمونی مساوات 4.32 ہے اور $rR(r) = u(r)$ رادی مساوات مساوات 4.37

$$(11.2) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

کو متمعن کرتا ہے بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ متابل نظر ابداز ہوگا۔ لائن درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جزر خستی کروی موج کو اور دوسرا جزر آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جب ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے اغتر کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لیے ہوتا ہے کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $1 > kr$ کے لیے ہوتا ہے جیسا کہ بصریات میں خط اشاعی کہیں گے۔ ایک بُدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکائی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی مستطائی بکھراؤ خط کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا شکل 11.6۔ درمیانی خط میں جہاں V کو رد کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز جبز کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(11.3) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروئی میل تناسلات کا خطی جوڑ ہوگا

$$(11.4) \quad u(r) = A r j_l(kr) + B n_l(kr)$$

لیکن نہ ہی j_l جو سائن تناسل کی طرح ہے اور نہ ہی n_l جو متعمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروئی مینکل تناسلات کہتے ہیں

$$(11.5) \quad h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + i n_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - i n_l(x)$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروئی مینکل تناسلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_l^{(1)}(kr)$ جسے

جدول ۱۱.۱: کروئی مینکل تناسلات $h_l^{(2)}(x)$ اور $h_l^{(1)}(x)$

$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$ $h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$ $h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$	$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$ $h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$ $h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$
$\left. \begin{aligned} h_l^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{l+1} e^{ix} \\ h_l^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{l+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1 \text{ کے لیے}$	

مینکل تناسل کا پہلا قسم کہتے ہیں r / e^{ikr} کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_l^{(2)}(kr)$ مینکل تناسل کی دوسری قسم r / e^{-ikr} کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ یوں رخصتی امواج کے لیے ہمیں کروئی مینکل تناسلات کی پہلی قسم درکار ہوگی:

$$(11.6) \quad R(r) \sim h_l^{(1)}(kr)$$

اس طرح خط بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہوگا بالکل ٹھیک تناسل موج درج ذیل ہوگا

$$(11.7) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جبز آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کردی تشکلی ہے لہذا تفاعل موج ϕ کا تاج نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یا در ہے $Y_l^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درج ذیل ہوگا

$$(11.8) \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

جہاں l ویں لیوانڈر کشیرر کنی کو P_l کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر $a_l \sqrt{4\pi(2l+1)}$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$(11.9) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص عالیت کیوں بہتر ہے a_l کو l واں حیطہ جبزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں مینکل تفاعل e^{ikr} / kr $(-i)^{l+1}$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.10) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$(11.11) \quad f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta)$$

یہ مساوات 11.12 میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھتا ہے کہ جبزوی موج حیطوں a_l کی صورت میں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہوگا تفسیری عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.12) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta)$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.13) \quad \sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2$$

زاویائی کمل کو حل کرنے کے لیے میں نے لیوانڈر کشیرر کنیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۱.۱.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لیے جزوی موج حیٹوں a_l کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملائے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیے کروئی محدود جبکہ آمدی موج کے لیے کارتیسی محدود استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لیے مساوات شرودنگر کو e^{ikz} متعین کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لیے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{l,m} [A_{l,m} j_l(kr) + B_{l,m} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یوں بلخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبدہ پر e^{ikz} متناہی ہے لحاظ نہ من تفاعلات کی اجازت نہیں ہوگی $r = 0$ پر $n_l(kr)$ بے متابوڑ ہتے ہیں اور چونکہ $\theta = r \cos \theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لحاظ صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروئی امواج کی صورت میں سرچسپا پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$(11.14) \quad e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے

$$(11.15) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) [j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr)] P_l(\cos \theta)$$

مشال ۱۱.۱: کو انٹیم سخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل فرض کریں

$$(11.16) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \text{ کے لیے} \\ 0, & r > a \text{ کے لیے} \end{cases}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$(11.17) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

یوں تمام θ کے لیے

$$(11.18) \quad \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) [j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)}(ka)] P_l(\cos \theta) = 0$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$(11.19) \quad a_l = i \frac{j_l(ka)}{kh_l^{(1)}(ka)}$$

بخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.20) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جاسکتا ہے آئیں کم توانائی بھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدید صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنیاد یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لیے $n_l(z)$ کی مقدار $j_l(z)$ سے بہت زیادہ ہوگی لحاظ

$$\frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z) + in_l(z)} \approx -i \frac{j_l(z)}{n_l(z)}$$

$$(11.21) \quad \approx -i \frac{2^l l! z^l / (2l+1)!}{-(2l)! z^{-l-1} / 2^l l!} = \frac{i}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^2 z^{2l+1}$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لحاظ بلند طاقتیں متاثر نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $l = 0$ جب بھراؤ میں غالب ہوگا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تشریفاتی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہوگا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بھراؤ کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

حیرانی کی بات ہے کہ بھراؤ عمودی تراش کی قیمت جو میٹرائی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہوگا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے پُرسے گزرتے ہیں ناکہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۱: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیٹرانڈر کشیرر کنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ l کی مختلف قیمتوں والے عددی سرلاظما صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۲: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ تفسیری عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لحاظ صرف $l = 0$ جبکہ حیطہ حناہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $l \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بعدی مقدار $2ma\alpha / \hbar^2 \equiv \beta$ کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2 \quad \text{جواب:}$$

۱۱.۲ پتلا حیطہ

پہلے نصف لکیر $0 < x$ پر مکانی مخفیہ $V(x)$ سے یک بعدی بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کرتے ہیں شکل 11.7 میں $x = 0$ پر اینسٹون کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$(11.23) \quad \psi_i(x) = Ae^{ikx} \quad (x < -a)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگا

$$(11.24) \quad \psi_r(x) = Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا منعقد موج کا حیطہ لاظماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدہ پر آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہوگا

$$(11.25) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لحاظ $B = -A$ ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لیے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.26) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیے k لحاظ توانائی $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ کی صورت میں پتلا حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراؤ $(-a < x < 0)$ میں مساوات زرد ونگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مسلط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ B کی بجائے پتلا

حیط کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیط تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُجری صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جا تا کیلئے میں $m \neq 0$ والا کوئی حبز نہیں پایا جا تا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت $(l = 0, 1, 2, \dots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظ ہر ایک حبزوی موج جسے کسی ایک خصوصی l سے نام دیا جا تا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیط میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی تاہم اس کا حیط تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہوگا لحاظ l ویں حبزوی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$(11.27) \quad \psi_0^{(l)} = Ai^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \quad (V(r)=0)$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(11.28) \quad j_l(x) = \frac{1}{2} [h^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)] \approx \frac{1}{2x} [(-i)^{l+1}e^{ix} + i^{l+1}e^{-ix}] \quad (x \gg 1)$$

لحاظ بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.29) \quad \psi_0^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos\theta) \quad (V(r)=0)$$

چپکورو سین میں دوسرا حبز آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرانے یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا حبز رخصتی موج ہے جو متقل حیط δ_l لیتا ہے

$$(11.30) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos\theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

آپ e^{ikz} میں $h_l^{(2)}$ حبز کی بنا اس کو کروی مرکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_l$ متقل حیط پایا جا تا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_l^{(1)}$ حصے کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو حبزوی تفاضل حیطوں a_l کی صورت میں پیش کیا گیا ہے اس کو متقل حیط δ_l کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جا تا ہوگا۔ بقینا مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متعارفابی روپ

$$(11.31) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] + \frac{(2l+1)}{r} a_l e^{ikr} \right\} P_l(\cos\theta)$$

کا δ_l کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.32) \quad a_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)$$

اس طرح لمبھوں مساوات 11.25

$$(11.33) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$$

اب بھی جزوی موج حیٹوں کی بجائے متقلات حیٹ کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے۔ متقلی حیٹ زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_l جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_l استعمال کرتا ہے۔

سوال 11.3: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔
جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[\frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad \text{جہاں } k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیٹ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لیے متقلات حیٹ δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔
جواب: $\delta = -ka$

سوال 11.4: سخت کرہ بکھراؤ کے لیے جزوی موج حیٹی انتقال δ_l کی ہوں گے مثال 11.3؟

سوال 11.5: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $l = 0$ جزوی موج انتقال حیٹ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔
ایک کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \rightarrow \infty$ پر ردای تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1} \left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \text{جہاں } \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۳. بارن تخمین

۱۱.۳.۱ مساوات شرودنگر کی تکلی روپ

غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.35)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.36)$$

لکھ سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.37)$$

اس کاروپ سرسری طور پر مساوات ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جز Q از خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعل عملی منبع کے لیے مساوات ہولٹز کو متعین کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \quad (11.38)$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک مکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0 \quad (11.39)$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شرودنگر مساوات کو متعین کرتا ہے

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r-r_0)] Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہولٹز کا تفاعل عمل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعل عملی منبع کو رد عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لیے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s \quad (11.40)$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

ہوگا تاہم

$$(11.۴۱) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$(11.۴۲) \quad \delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

لاحظہ مساوات 11.52 درج ذیل کیے گئے

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is \cdot r} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۳) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُرکے کے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.۴۴) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب s مکمل کے نقطہ نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کر دی محدود (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r کتنی محور پر پایا جاتا ہو
 شکل 11.8- یوں $s \cdot r = sr \cos \theta$ ہوگا متغیر ϕ کا مکمل 2π ہوگا جبکہ θ مکمل درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۵) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۶) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds$$

باقی مکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نمائے کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھتے مددگار ثابت ہوتا ہے

$$G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right\}$$

$$(11.42) \quad = \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

اگر z_0 خط ارتقاء کے اندر پایا جاتا ہو تب کوئی کلیہ مکمل

$$(11.48) \quad \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے دیگر صورت مکمل صفر ہوگا۔ یہاں حقیقی محور $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بلکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرتا ہوگا میں $-k$ پر بلائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں کا شکل 11.9۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تقاضا گرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھاؤں گا کہ یہ تمام قابل قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک مکمل کے لیے ہمیں خط استواء کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ مکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جز بہت بڑا اور مثبت ہو تب جز ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس مکمل کے لیے ہم بالانصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (الف)۔ اب خط ارتقاء صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

مکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جز بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جز ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لحاظ ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقاء $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لحاظ اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$(11.50) \quad I_2 = - \oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.51) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[(i\pi e^{ikr}) - (-i\pi e^{ikr}) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات پلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلا واسطہ تفریق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیئے گا سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات پلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس پلم ہولٹز مساوات کو متعین کرتا ہو

$$(11.52) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی متعین کرتا ہے۔ اس ایسا م کی وجہ قطبین کے متفریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.53) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شرودنگر کو متعین کرتا ہے

$$(11.54) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

مساوات 11.67 شرودنگر مساوات کی تکلی روپ ہے جو زیادہ معروضہ تفریق روپ کی مکمل طور پر معدل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیے مساوات شرودنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ مکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ مکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکلی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بلخصوص بکھراؤ مسائل کے لیے نہایت موضوع ہے۔

سوال 11.۶: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے متعین کرتا ہے۔ اشارہ: $-\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$

سوال 11.۷: دیکھیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لیے مساوات شرودنگر کی تکلی روپ کو ہائڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 متعین کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ E منفی ہے لحاظ $i\kappa = k$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہوگا۔

۱۱.۳.۲ بارن تخمینہ اول

منرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مکانی مخفیہ ہے یعنی کسی مستثنائی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات

11.67 کی تکمیل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لحاظ

$$(11.55) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2 \frac{r \cdot r_0}{r^2} \right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.56) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.57) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.58) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لحاظ درج ذیل ہوگا

$$(11.59) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نمائیں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نمائیں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نمائیں دوسرے جز کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔
بکھراؤ کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$(11.60) \quad \psi_0(r) = A e^{ikz}$$

یوں بڑی r کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(11.61) \quad \psi(r) \cong A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم جملہ بکھراؤ پڑھ سکتے ہیں

$$(11.62) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین باروہ کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ متابل ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$(11.63) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = A e^{ikz_0} = A e^{ik' \cdot r_0}$$

جہاں مکمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$(11.۶۴) \quad k' \equiv k\hat{z}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا ہے بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۶۵) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k'-k)\cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کارخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ معاصر الذکر کارخ کاشف کے رخ ہے شکل 11.11 دیکھیں۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا، بلخصوص خطہ بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراؤ کے لیے قوت نہائی حبز ضربی بنیادی طر پر مستقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.۶۶) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشتہ میں کچھ نہیں لکھا اید کی حباتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔
مثال ۱۱.۲: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.۶۷) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع جیلہ مکھراؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۶۸) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفسیری عمودی تراش

$$(11.۶۹) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۷۰) \quad \sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

ایک کروئی تشکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لیے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تمسین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.41) \quad \kappa \equiv k' - k$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.42) \quad (k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.43) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیرِ نوشتہ کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$(11.44) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروئی تشکل}$$

f کی زیویائی تابعت κ میں سوئی گئی ہے شکل 11.11 کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.45) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال ۱۱.۳: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کارو پ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقل ہیں

$$(11.46) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تمسین بارن درج ذیل دیگا

$$(11.47) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)}$$

□

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۴: ردورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پر کرنے سے مخفیہ کو لب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.48) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa^2}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}$$

اس کا مربع ہمیں تفسیری عمودی تراش دیگا

$$(11.80) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

جو ٹھیک کلیہ ردور فورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لیے کالسی میکانیات تخمینہ بارن اور کوانٹم نظریہ میدان تمام ایک دوسرے جیسے نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردور فورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۸: اختیاری توانائی کے لیے نرم کرہ بھراؤ کا حیطہ بھراؤ بارن تخمینہ سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۹: مساوات 11.91 میں نکل کی قیمت تلا کر کے دائیں ہاتھ ریاضی منکرہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۱.۱۰: بارن تخمینہ میں یوکاوا مخفیہ سے بھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تناسب لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۱: درج ذیل امتداد سوال 11.4 کے مخفیہ کے لیے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمینہ بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمینہ بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

۱۱.۳.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بھراؤ میں تخمینہ ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرصی ضرب کا حساب کرنے کے لیے ہم تخمینہ ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لیکر پر ہی چلے جاتا ہے شکل 11.12 ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.81) \quad I = \int F_{\perp} dt$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \quad (11.82)$$

اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبہ کہہ سکتے ہیں۔ اسی طرح صفر رتبہ تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ درحقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مسر کو زہرہ سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی عملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r-r_0)V(r_0)\psi(r_0) d^3 r_0 \quad (11.83)$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (11.84)$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیے $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V محفہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \quad (11.85)$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے مکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \quad (11.86)$$

اس عمل کو بار بار دہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \quad (11.87)$$

ہر مکمل میں آمدی تفاعل عمل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبہ تصحیح کس طرح پیدا کی جائے گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل 11.13 میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبہ ψ پر محفہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبہ اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبہ میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل

نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا بعض اوقات تفرق عمل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کو انٹرمیکانیات کی فینمین تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمین میں حبز ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۲: تخمین ضرب میں ردورڈ بکھراؤ کے لیے θ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفرق عمل تلاش کریں۔ دیکھیں کہ مناسب حدود کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی منکرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۳: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لیے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

سوال ۱۱.۱۴: ایک بُدی مساوات شروع کر کے لیے تفرق عمل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مثل نمکلی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$(11.88) \quad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

سوال ۱۱.۱۵: مبدہ پر بغیر اسٹنٹون کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر ایک بُدی بکھراؤ کے لیے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھیں کہ انعکاسی عددی سردرج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.89) \quad R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

سوال ۱۱.۱۶: ایک ڈیلتا تفرق عمل مساوات 2.114 اور ایک مستناہی چپ کو رکنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لیے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو ایک بُدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۷: آگے رخ ہیٹ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$(11.90) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۱۸: QuestionMissing

$$(11.91) \quad V(r) = Ae^{-\mu r^2}$$

باب ۱۲

پس نوشت

جوابات

ضمیمہ ۱

خطی الجبر ۱

۱.۱ سمتیات

۲.۱ اندرونی ضرب

۳.۱ قلاب

۴.۱ تبدیلی اساس

۵.۱ امتیازی تقاعلات اور امتیازی افتدار

۶.۱ ہر مشی تبادله

فهرست

54relation,	allowed
energy	26energies,
22allowed,	51 argument,
31conservation,	Bessel
13ensemble,	99function,spherical
expectation	107energy,binding
6value,	Bohr
formula	106radius,
16Broglie,De	106formula,Bohr
Fourier	25conditions,boundary
52transform,inverse	98term,centrifugal
52transform,	83states,coherent
Frobenius	4collapses,
45method,	commutation
function	36relation,canonical
59delta,Dirac	90relations,canonical
generalized	36commutator,
59distribution,	28complete,
59function,	77continuous,
generating	90continuum,
50function,	coordinates
generator	91spherical,
86space,intranslation	3interpretation,Copenhagen
86time,intranslation	75degenerate,
Gram-Schmidt	delta
79process,orthogonalization	28Kronecker,
21Hamiltonian,	Dirac
harmonic	80orthonormality,
25oscillator,	77discrete,
	dispersion

- 3realist,
- 12potential,
- 97effective,
- probability
- 8density,
- quantum
- 105number,principle
- numberquantum
- 96azimuthal,
- 96magnetic,
- 99numbers,quantum
- 97equation,radial
- recursion
- 46formula,
- reflection
- 64coefficient,
- 73time,revival
- Rodrigues
- 49formula,
- 94formula,Rodrigues
- Rydberg
- 113constant,
- 113formula,
- Schrodinger
- 20time-independent,
- 1align,Schrodinger
- series
- 113Balmer,
- 28Fourier,
- 113Lyman,
- 113Paschen,
- 35power,
- 34Taylor,
- spherical
- 96harmonics,
- 11square-integrable,
- 7deviation,standard
- state
- 58bound,
- 113Helium,
- Hermitian
- 40conjugate,
- 3variables,hidden
- 2indeterminacy,
- ladder
- 38operators,
- Laguerre
- 108polynomial,associated
- 108polynomial,
- 90Laplacian,
- law
- 34Hooke,
- Legendre
- 94associated,
- linear
- 22combination,
- 113Lithium,
- 6mean,
- 6median,
- 14momentum,
- Neumann
- 99function,spherical
- 27node,
- 10normalization,
- 14operator,
- 38lowering,
- 38raising,
- 27orthogonal,
- 28orthonormal,
- Planck's
- 113formula,
- polynomial
- 48Hermite,
- position
- 3agnostic,
- 3orthodox,

- اتاقی
حالات، 83
اجزائی
توانائیاں، 26
استمراری، 77
استمراریہ، 90
اصول
عدم یقینیت، 16
انتشاری
رشتہ، 54
انخطاطی، 75
انعکاس
شرح، 64
اوسط، 6
- بقا
توانائی، 31
بندشی توانائی، 107
بوہر
رداس، 106
کلیہ، 106
بیل
کروی تقاعس، 99
- پلانک
کلیہ، 113
پیداکار
فضا میں انتقال کا، 86
وقت میں انتقال، 86
پیداکار
تقاعس، 50
- تبادلہ
باضابطہ رشتہ، 36
باضابطہ رشتہ، 90
تبادلہ کار، 36
تجدیدی عرصہ، 73
ترسیل
شرح، 64
- تسل
بالہ، 113
پاشن، 113
- 27 excited,
107, 27 ground,
58 scattering,
statistical
2 interpretation,
66 function, step
theorem
28 Dirichlet's,
15 Ehrenfest,
52 Plancherel,
112 transition,
transmission
64 coefficient,
65, 58 tunneling,
58 points, turning
16 principle, uncertainty
variables
19 of, separation
7 variance,
velocity
54 group,
54 phase,
wave
64 incident,
52 packet,
64 reflected,
64 transmitted,
1 function, wave
16 wavelength,

- ساکن
حالات، 21
سرحدی شرائط، 25
سرنگ زنی، 58، 65
سگرا، 13
سوچ
انکاری، 3
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سیڑھی
عاملین، 38
سیڑھی تفاعل، 66
شروڈنگر
غیر تابع وقت، 20
شروڈنگر تصویر کشی، 86
شروڈنگر مساوات، 1
شماریاتی مفہوم، 2
طول موج، 16، 113
عامل
تقلیل، 38
رفت، 38
عبور، 112
عدم تعین، 2
عدم یقینیت اصول، 16
عندرو، 27
علیحدگی متغیرات، 19
عمودی، 27
معیاری، 28
غیر مسلسل، 77
منرو وینوس
ترکیب، 45
فوریسر
الٹ بدل، 52
بدل، 52
قابل تکامل مربع، 11
قانون
- ٹیلر، 34
طامتی، 35
فوریسر، 28
لیمان، 113
تغییریت، 7
تفاعل
ڈیلٹا، 59
تفاعل موج، 1
توالی
کلیہ، 46
توانائی
اجزائی، 22
توقعاتی
قیمت، 6
جفت
تفاعل، 24
حال
بکھراؤ، 58
زمینی، 27، 107
مقید، 58
ہیجان، 27
خطی جوڑ، 22
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 51
ڈیراک
معیاری عمودیت، 80
ڈیلٹا
کرونیگر، 28
رداسی مساوات، 97
رڈبرگ، 113
کلیہ، 113
رفتار
دوری سستی، 54
گروہی سستی، 54
روڈریگیس
کلیہ، 94

- ہا، 34
- کثافت
- احتمال، 8
- کشیر رکنی
- ہرمانٹ، 48
- کروی
- ہارمونیات، 96
- کلیہ
- ڈی پروگ، 16
- روڈریگیس، 49
- کوانٹم
- صدر عدد، 105
- کوانٹائی اعداد، 99
- کوانٹائی عدد
- اسمیت، 96
- مقتطیسی، 96
- کوپن ہیگن مفہوم، 3
- گرام شمہ
- ترکیب عمودیت، 79
- گر کر، 4
- لاپلاسی، 90
- لاگ
- شریک کشیر رکنی، 108
- کشیر رکنی، 108
- لتصیم، 113
- لیڈانڈر
- شریک، 94
- متعمم
- تفاعیل، 59
- تقسیم، 59
- محمد
- کروی، 91
- مخفیہ، 12
- موثر، 97
- مشرقی
- ہارمونی، 25
- مسرکز گریز حبز، 98
- مسئلہ
- اہر نفٹ، 15
- پلائشرال، 52
- ڈرٹلے، 28
- معمول زنی، 10
- معیار حرکت، 14
- معیار عمودی، 28
- معیاری انحراف، 7
- مکمل، 28
- موج
- آمدی، 64
- ترسیلی، 64
- منعکس، 64
- موجی اکھ، 52
- نیومن
- کروی تفاعیل، 99
- واپسی نقاط، 58
- وسطانیہ، 6
- ہارمونی
- مشرقی، 25
- ہر مشی
- جوڑی دار، 40
- ہیزنبرگ تصویر کشی، 86
- ہیلیم، 113
- ہیملٹنی، 21