کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۵ر اگست ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ vii

۱ تفاعل موج ۱
۱.۱ شروڈنگر مساوات ۱
۱.۲ شماریاتی مفہوم ۲
۱.۳ احتمال ۵
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات ۵
۱.۳.۲ استمراری متغیرات ۹
۱.۴ معمول زنی ۱۲
۱.۵ معیار حرکت ۱۵
۱.۶ اصول عدم یقینیت ۱۸

۲ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ۲۳
۲.۱ ساکن حالات ۲۳
۲.۲ لامتناہی چکور کنواں ۲۹
۲.۳ ہارمونی مرتعش ۳۸
۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب ۴۰
۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب ۴۹
۲.۴ آزاد ذرہ ۵۷
۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ ۶۶
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات ۶۶
۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں ۶۸
۲.۶ متناہی چکور کنواں ۷۷

۳ قواعد وضوابط ۸۷
۳.۱ ہلبرٹ فضا ۸۷
۳.۱.۱ قابلِ معلوم حالات ۹۱
۳.۲ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل ۹۳

۳.۲.۱ غیر مسلسل طیف ۹۳
۳.۲.۲ استمراری طیف ۹۵
۳.۳ متعمم شماریاتی مفہوم ۹۸
۳.۴ اصول عدم یقینیت ۱۰۲
۳.۴.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت ۱۰۲
۳.۴.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ ۱۰۶
۳.۴.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ۱۰۶
۳.۵ ڈیراک علامتیت ۱۱۱

۴ تین ابعادی کوانٹم میکانیات ۱۲۵
۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر ۱۲۵
۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات ۱۲۷
۴.۱.۲ زاویائی مساوات ۱۲۸
۴.۱.۳ رداسی مساوات ۱۳۳
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر ۱۳۷
۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج ۱۳۸
۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف ۱۴۸
۴.۳ زاویائی معیار حرکت ۱۵۰
۴.۳.۱ امتیازی اقدار ۱۵۱

۵ متماثل ذرات ۱۶۱
۵.۱ دو زراتی نظام ۱۶۱

۶ غیر تابع وقت نظریہ اضطراب ۱۶۹
۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ۱۶۹
۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی ۱۶۹
۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ ۱۷۰
۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں ۱۷۴
۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب ۱۷۵
۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط ۱۷۵
۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط ۱۷۹
۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت ۱۸۳
۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح ۱۸۴
۶.۳.۲ چکر و مدار ربط ۱۸۷
۶.۴ زیمان اثر ۱۹۱
۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر ۱۹۱
۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر ۱۹۳

۷ تغیری اصول ۱۹۳

۸ وکب تخمین ۱۹۵

۹ تابع وقت نظریہ اضطراب ۱۹۷

۱۰ حرارت ناگزر تخمین ۱۹۹

۱۱ بکھراو ۲۰۱

۱۲ بکھراو ۲۰۳
۱.۱۲ تعارف . . . ۲۰۳
۱.۱.۱۲ کلاسیکی نظریہ بکھراو . . . ۲۰۳
۲.۱.۱۲ کوانٹم نظریہ بکھراو . . . ۲۰۵
۲.۱۲ جزوی موج تجزیہ . . . ۲۰۶
۱.۲.۱۲ اصول وضوابط . . . ۲۰۶
۲.۲.۱۲ لایا عمل . . . ۲۰۹
۳.۱۲ ینتقلات حیط . . . ۲۱۱
۴.۱۲ بارن تخمین . . . ۲۱۴
۱.۴.۱۲ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ . . . ۲۱۴
۲.۴.۱۲ بارن تخمین اوّل . . . ۲۱۸
۳.۴.۱۲ تسلسل بارن . . . ۲۲۲

۱۲ پس نوشت ۲۲۱

جوابات ۲۲۳

ا خطی الجبرا ۲۲۵
۱.ا سمتیات . . . ۲۲۵
۲.ا اندرونی ضرب . . . ۲۲۵
۳.ا قالب . . . ۲۲۵
۴.ا تبدیلی اساس . . . ۲۲۵
۵.ا امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار . . . ۲۲۵
۶.ا ہرمشی تبادلے . . . ۲۲۵

فرہنگ ۲۲۷

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۱۱

بکھراو

باب ۱۲

بکھراو

۱۲.۱ تعارف

۱۲.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو

فرض کریں کسی مرکز بکھراو پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر داغا جاتا ہے جس کی توانائی E اور ٹکراو مقدار معلوم b کے ساتھ آکر کسی زاویائے بکھراو θ پر اُبھرتا ہے شکل 11.1 دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لیئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے یوں خطِ حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لحاظہ تصادم کی بنا اس کی حرکت اُچھلنے کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراو کا بنیادی مسئلہ یہ ہو گا: ٹکراو مقدار معلوم کو جانتے ہوئے زاویائے بکھراو کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراو مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراو اتنا بڑا ہو گا۔

مثال ۱۲.۱: **سخت کرہ کا بکھراو۔** فرض کریں ہدف رداس R کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی بندوق کا ایک چھرہ ہے جو لچکیلی ٹپکی کھا کر مڑتا ہے شکل 11.2۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراو مقدار معلوم $b = R\sin\alpha$ اور زاویہ بکھراو $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۲.۱}$$

ظاہری طور پر درج ذیل ہو گا

$$\theta = \begin{cases} 2\cos^{-1}(b/R), & b \leq R \text{ اگر} \\ 0, & b \geq R \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھریں گے شکل 11.3۔ بڑی $\mathrm{d}\sigma$ کی صورت میں $\mathrm{d}\Omega$ بھی بڑا ہوگا تناسبی جز ضربی $D(\theta) \equiv \mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}\Omega$ کو تفرقی بکھراو عمودی تراش کہتے ہیں

$$\mathrm{d}\sigma = D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۲.۳}$$

ٹکراو مقدار معلوم اور اسمتی زاویہ ϕ کی صورت میں $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہوں گے لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{۱۲.۴}$$

چونکہ عمومی طور پر θ مقدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تفاعل ہوگا لحاظہ یہ تفرق در حقیقت منفی ہوگا اسی لیئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال ۱۲.۲: **سخت کرہ کے بکھراو کی مثال جاری رکھتے ہیں۔** سخت کرہ بکھراو مثال 11.1 کی صورت میں

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۲.۵}$$

لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{۱۲.۶}$$

اس مثال میں تفرقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔ □

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا تکمل ہوگا

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۲.۷}$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہوگا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراو کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$\sigma = (R^2/4)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2 \tag{۱۲.۸}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً مرکزہ کا کولمب میدان کے لیئے بھی کارآمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہوگا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{timeunitperareaunitperparticlesincidentofnumber} \tag{۱۲.۹}$$

فی اکائی وقت رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھراو والے ذرات کی تعداد $\mathrm{d}N = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$ ہو گی لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{۱۲.۱۰}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں با آسانی ناپا جا سکتا ہو لحاظہ اس کو عموماً تفرقی عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو $\mathrm{d}\Omega$ سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۲: **ردرفورڈ بکھراو۔** بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار q_2 ہو سے بکھرتا ہے۔

(الف) ٹکراو مقدار معلوم اور زاویہ بکھراو کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

جواب: $b = (q_1 q_2/8\pi\epsilon_0 E)\cot(\theta/2)$

(ب) تفرقی بکھراو عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۲.۱۱}$$

(ج) دکھائیں کہ ردرفورڈ بکھراو کا کل عمودی تراش لامتناہی ہو گا۔ ہم کہتے ہیں $1/r$ مخفیہ لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۲.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراو

بکھراو کے کوانٹم نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور z رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراو مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے شکل 11.4 یعنی ہم مساوات شروڈنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \qquad \text{بڑے } r \text{ کے لیے} \tag{۱۲.۱۲}$$

کروی موج میں جز ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے خاطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہو گا

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۱۲.۱۳}$$

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف استمتی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروی موج کا حیطہ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہو گا۔

ہمیں حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تعین کران ہو گا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ θ میں بکھراو کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفریقی عمودی تراش سے ہو گا۔ یقیناً سمتی رفتار v پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت $\mathrm{d}t$ میں لامتناہی چھوٹی رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال شکل 11.5 دیکھیں درج ذیل ہو گا

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{آمدی}}\right|^2 \mathrm{d}V = |A|^2 \,(v\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھراو کا احتمال

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{بکھراو}}\right|^2 \mathrm{d}V = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2}(v\,\mathrm{d}t) r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

بھی یہی ہو گا لحاظہ $\mathrm{d}\sigma = |f|^2\,\mathrm{d}\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$D(\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{۱۲.۱۴}$$

ظاہر ہے کہ تفرقی عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے حیطہ بکھراو جو مساوات شروڈنگر کے حل سے حاصل ہو گا کی مطلق مربع کے برابر ہو گا آنے والے حصوں میں ہم حیطہ بکھراو کی حساب کے دو تراکیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تخمین پر غور کریں گے۔

سوال ۱۲.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراو کے لیئے مساوات 11.12 کے مماثل تیار کریں۔

۱۲.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۲.۲.۱ اصول وضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لیئے مساوات شروڈنگر قابلِ علیحدگی حلوں

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۱۲.۱۵}$$

کا حاصل ہو گا جہاں Y_l^m کروی ہارمونی مساوات 4.32 ہے اور $u(r) = rR(r)$ رداسی مساوات مساوات 4.37

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu \tag{۱۲.۱۶}$$

کو متعین کرتا ہے بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابلِ نظر انداز ہو گا۔ لحاظہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} \approx -k^2u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جزر خصتی کروی موج کو اور دوسرا جز آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جب ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے اخذ کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لیئے تھا یا یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ $kr >> 1$ کے لیئے تھا جسی بصریات میں خطہ اشاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہو گا کہ کسی متناہی بکھراؤ خطہ کے باہر یہ تقریباً صفر ہو گا شکل 11.6۔ درمیانی خطہ میں جہاں V کو رد کیا جا سکتا ہے لیکن مرکز گریز جز کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا رداسی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = -k^2u \tag{۱۲.۱۷}$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروی بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ ہو گا

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr) \tag{۱۲.۱۸}$$

لیکن نہ ہی j_l جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی n_l جو متعمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروی ہینکل تفاعلات کہتے ہیں

$$h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + in_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - in_l(x) \tag{۱۲.۱۹}$$

جدول ۱.۱۲: کروی ہینکل تفاعلات $h_l^{(1)}(x)$ اور $h_l^{(2)}(x)$

$h_0^{(1)} = -i\frac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i\frac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right) e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right) e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right) e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right) e^{-ix}$

$$\left.\begin{aligned} h_l^{(1)} &\to \frac{1}{x}(-i)^{l+1}e^{ix} \\ h_2^{(2)} &\to \frac{1}{x}(i)^{l+1}e^{-ix} \end{aligned}\right\} x >> 1 \text{ کے لیے}$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروی ہینکل تفاعلات پیش کیئے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_l^{(1)}(kr)$ جسے ہینکل تفاعل کا پہلا قسم کہتے ہیں e^{ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_l^{(2)}(kr)$ ہینکل تفاعل کی دوسری قسم e^{-ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ یوں رخصتی امواج کے لیئے ہمیں کروی ہینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہو گی:

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr) \tag{۱۲.۲۰}$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہو گا بالکل ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left\{e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta,\phi)\right\} \tag{۱۲.۲۱}$$

اس کا پہلا جز آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروی تشاکلی ہے لحاظہ تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یاد رہے $Y_l^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درج ذیل ہو گا

$$Y_l^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۲۲}$$

جہاں l ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو P_l کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر $C_{l,0} \equiv i^{l+1}k\sqrt{4\pi(2l+1)}a_l$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$\psi(r,\theta) = A\left\{e^{ikz} + k\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos\theta)\right\} \tag{۱۲.۲۳}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامتیت کیوں بہتر ہے a_l کو l واں حیطہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں ہینکل تفاعل $(-i)^{l+1}e^{ikr}/kr$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہو گا لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{(ikr)}}{r}\right\} \tag{۱۲.۲۴}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۲۵}$$

یہ مساوات 11.12 میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھاتا ہے کہ جزوی موج حیطوں a_l کی صورت میں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہو گا تفریقی عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$D(\theta)=\left|f(\theta)\right|^2=\sum_{l}\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)a_l^* a_{l'} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta) \tag{۱۲.۲۶}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|a_l\right|^2 \tag{۱۲.۲۷}$$

زاویائی تکمل کو حل کرنے کے لیئے میں نے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۲.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لیئے جزوی موج حیطوں a_l کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ مسئلا صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیئے کروی محدد جبکہ آمدی موج کے لیئے کارتیسی محدد استعمال کیئے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہو گا۔

یقیناً $V=0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V=0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\sum_{l,m}\left[A_{l,m}j_l(kr)+B_{l,m}n_l(kr)\right]Y_l^m(\theta,\phi)$$

یوں بلخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیئے اب مبدہ پر e^{ikz} متناہی ہے لحاظہ نیومن تفاعلات کی اجازت نہیں ہو گی $r=0$ پر $n_l(kr)$ بے قابو بڑھتے ہیں اور چونکہ $z=r\cos\theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لحاظہ صرف $m=0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں سریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۲۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,\theta) = A\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\left[j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr)\right]P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۲۹}$$

مثال ۱۲.۳: کوانٹم سخت کرہ بکھراو۔ درج ذیل فرض کریں

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \text{ کے لیے} \\ 0, & r > a \text{ کے لیے} \end{cases} \tag{۱۲.۳۰}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہو گا

$$\psi(a,\theta) = 0 \tag{۱۲.۳۱}$$

یوں تمام θ کے لیے

$$\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\left[j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)(ka)}\right]P_l(\cos\theta) = 0 \tag{۱۲.۳۲}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$a_l = i\frac{j_l(ka)}{kh_l^(1)(ka)} \tag{۱۲.۳۳}$$

بلخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}\right|^2 \tag{۱۲.۳۴}$$

یہ بلکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جا سکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراو $ka \ll 1$ کی تحدید صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لیے $n_l(z)$ کی مقدار $j_l(z)$ سے بہت زیادہ ہو گی لحاظہ

$$\frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z)+in_l(z)} \approx -i\frac{j_l(z)}{n_l(z)}$$

$$\approx -i\frac{2^l l! z^l/(2l+1)!}{-(2l)!z^{-l-1}/2^l l!} = \frac{i}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^2 z^{2l+1} \tag{۱۲.۳۵}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لحاظہ بلند طاقتیں قابلِ نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $l = 0$ جز بکھراؤ میں غالب ہو گا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تفریقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہو گا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \tag{۱۲.۳۶}$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت جومیٹرائی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طولِ موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جسامت ہے جو بصریات میں بھی ہو گا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُپر سے گزرتے ہیں نا کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۲.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیژانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ l کی مختلف قیمتوں والے عددی سر لازماً صفر ہوں گے۔

سوال ۱۲.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha\delta(r-a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کیصور پر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ حیط بکھراؤ $f(\theta)$ تفریقی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لحاظہ صرف $l = 0$ جز خاطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $l \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

جواب: $\sigma = 4\pi a^2\beta^2/(1+\beta)^2$

۱۲.۳ یتنقلات حیط

پہلے نصف لکیر $x < 0$ پر مکامی مخفیہ $V(x)$ سے یک بُعدی بکھراؤ کے مسئلے پر غور کرتے ہیں شکل 11.7 میں $x = 0$ پر اینٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تا کہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۲.۳۷}$$

مکمل طور پر منعکس ہو گا

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۲.۳۸}$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا منعکد موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہو گا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدہ پر آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہو گا

$$\psi_0(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad (V(x) = 0) \tag{۱۲.۳۹}$$

لحاظہ $B = -A$ ہو گا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لیے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}\right) \qquad (V(x) \neq 0) \tag{۱۲.۴۰}$$

نظریہ بکھراو کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیے k لحاظہ توانائی $E = \hbar^2k^2/2m$ کی صورت میں یتنقل حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراو $(-a < x < 0)$ میں مساوات زروڈنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مسلط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ B کی بجائے یتنقل حیطہ کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیطہ تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیارِ حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں $0 \neq m$ والا کوئی جز نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زیاویائی معیارِ حرکت $(l = 0, 1, 2, \dots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظہ ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی l سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہو گا لحاظہ l ویں جزوی موج درج ذیل ہو گی مساوات 11.28

$$\psi_0^{(l)} = Ai^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۲.۴۱}$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$j_l(x) = \frac{1}{2}\left[h^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)\right] \approx \frac{1}{2x}\left[(-i)^{l+1}e^{ix} + i^{l+1}e^{-ix}\right] \quad (x \gg 1) \tag{۱۲.۴۲}$$

لحاظہ بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\psi_0^{(l)} \approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۲.۴۳}$$

حیکور کو سین میں دوسرا جز آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جز رخصتی موج ہے جو ینتقل حیط δ_l لیتا ہے

$$\psi^{(1)} \approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^l e^{-ikr}\right] P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) \neq 0) \tag{۱۲.۴۴}$$

آپ e^{ikz} میں $h_l^{(2)}$ جز کی بنا اس کو کروی مرتکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_l$ ینتقل حیط پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_l^{(1)}$ حصے کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریے کو جزوی تفاعل حیطوں a_l کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو ینتقل حیط δ_l کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متقاربی روپ

$$\psi^{(1)} \approx A\left\{\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right] + \frac{(2l+1)}{r}a_l e^{ikr}\right\} P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۴۵}$$

کا δ_l کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$a_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin(\delta_l) \tag{۱۲.۴۶}$$

اس طرح بلخصوص مساوات 11.25

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)P_l(\cos\theta) \tag{۱۲.۴۷}$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l) \tag{۱۲.۴۸}$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے ینتقلات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے ینتقلی حیط زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_l جو دو حقیقی اعدادت پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_l استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۲.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq z \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔
جواب:

$$Ae^{-2ika}\left[\frac{k - ik'\cot(k'a)}{k + ik'\cot(k'a)}\right]e^{-ikx}, \qquad k' = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar \text{جہاں}$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیطہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لیے ینتقلات حیط δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔
جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۲.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لیے جزوی موج حیطی انتقال δ_l کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۲.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $l = 0$ جزوی موج انتقال حیط $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \to \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔
جواب:

$$-\cot^{-1}\left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta\sin^2(ka)}\right], \qquad \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}\text{جہاں}$$

۱۲.۴ بارن تخمین

۱۲.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ

غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi + V\psi = E\psi \tag{۱۲.۴۹}$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{۱۲.۵۰}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{اور} Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi \tag{۱۲.۵۱}$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلم ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جز Q از خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لیئے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \tag{۱۲.۵۲}$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک تکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0)\, d^3 r_0 \tag{۱۲.۵۳}$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int \Big[(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)\Big]\, Q(r_0)\, d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0)\, d^3 r_0 = Q(r)\end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لیئے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریئر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s \tag{۱۲.۵۴}$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Big[(\nabla^2 + k^2)e^{is\cdot r}\Big]\, g(s)\, d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$\nabla^2 e^{is\cdot r} = -s^2 e^{is\cdot r} \tag{۱۲.۵۵}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$\delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s \tag{۱۲.۵۶}$$

لحاظہ مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \tag{۱۲.۵۷}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کر کے درج ذیل ملتا ہے

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} \, d^3 s \tag{۱۲.۵۸}$$

اب s تکمل کے نقطع نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کروی محدد (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r کتبی محور پر پایا جاتا ہو شکل 11.8۔ یوں $s \cdot r = sr\cos\theta$ ہو گا متغیر ϕ کا تکمل 2π ہو گا جبکہ θ تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} e^{isr\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = -\frac{e^{isr\cos\theta}}{isr}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\sin(sr)}{sr} \tag{۱۲.۵۹}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^{\infty} \frac{s\sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds \tag{۱۲.۶۰}$$

باقی تکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds\right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r}(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{۱۲.۶۱}$$

اگر z_0 خطِ ارتفاع کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ تکمل

$$\oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} \, dz = 2\pi i f(z_0) \tag{۱۲.۶۲}$$

استعمال کرتے ہوئے ان تکملات کی قیمت تلاش کی جا سکتی ہے دیگر صورت تکمل صفر ہو گا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بلکل اوپر سے گزرتا ہے کے کے ساتھ ساتھ تکمل لیا جا رہا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہو گا میں $-k$ پر بلائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا شکل 11.9۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہو گا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھاؤں گا کہ یہ تمام قابلِ قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک تکمل کے لیئے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہو گا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ تکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ تکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جز بہت بڑا اور مثبت ہو تب جز ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس تکمل کے لیئے ہم بالا نصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (الف)۔ اب خط ارتفا صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطع کو گھیرتا ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right] \frac{1}{s-k} \,\mathrm{d}s = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\bigg|_{s=k} = i\pi e^{ikr} \tag{۱۲.۶۳}$$

تکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جز بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جز ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لحاظہ ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں شکل 11.10 (ب)۔ اس مرتبہ خطِ ارتفا $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لحاظہ اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہو گا

$$I_2 = -\oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right] \frac{1}{s+k} \,\mathrm{d}s = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\bigg|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr} \tag{۱۲.۶۴}$$

ماخوذ:

$$G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r}\left[\left(i\pi e^{ikr}\right) - \left(-i\pi e^{ikr}\right)\right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{۱۲.۶۵}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیئے گا سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانز ہلم ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0 \tag{۱۲.۶۶}$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے قریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۲.۶۷}$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0 \tag{۱۲.۶۸}$$

مساوات 11.67 شروڈنگر مساوات کی تکملی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معدل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جانے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے یہ بلخصوص بکھراؤ مسائل کے لیئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۲.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمعن کرتا ہے۔ اشارہ: $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$ ۔

سوال ۱۲.۹: دیکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لیئے مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ کو ہائڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمعن کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ E منفی ہے لحاظہ $k = i\kappa$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہوگا۔

۱۲.۴.۲ بارن تخمین اوّل

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مکامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیئے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لحاظہ

$$|r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right) \tag{۱۲.۶۹}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$|r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0 \tag{۱۲.۷۰}$$

ہم

$$k \equiv k\hat{r} \tag{۱۲.۷۱}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۲.۷۲}$$

ہوگا۔ لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۲.۷۳}$$

نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نما میں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نما میں دوسرے جز کو پھیلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراؤ کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$\psi_0(r) = Ae^{ikz} \tag{۱۲.۷۴}$$

یوں بڑی r کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{ik\cdot r_0}V(r_0)\psi(r_0)\,d^3 r_0 \tag{۱۲.۷۵}$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراؤ پڑھ سکتے ہیں

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A}\int e^{-ik\cdot r_0}V(r_0)\psi(r_0)\,d^3 r_0 \tag{۱۲.۷۶}$$

یہاں تک یہ بلکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروۓ کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمد یہ مستوی موج کو مخفیہ قابلِ ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

$$\psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik'\cdot r_0} \tag{۱۲.۷۷}$$

جہاں تکمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$k' \equiv k\hat{z} \tag{۱۲.۷۸}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بلکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k'-k)\cdot r_0}V(r_0)\,d^3 r_0 \tag{۱۲.۷۹}$$

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اوّل الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ مؤخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے شکل 11.11 دیکھیں۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیارِ حرکت کو ظاہر کرے گا بلخصوص خطہ بکھراؤ پر کم توانائی لمبی طولِ موج بکھراؤ کے لیے قوتِ نمائی جز ضربی بنیادی طور پر مستقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\int V(r)\,d^3 r, \qquad \text{کم توانائی} \tag{۱۲.۸۰}$$

میں نے یہاں r کے زیرِ نوشت میں کچھ نہیں لکھا اُمید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۲.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ درج ذیل مخفیہ لیں

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \text{ اگر} \\ 0, & r > a \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۲.۸۱}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہو گا۔

$$f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{۱۲.۸۲}$$

تفرقی عمودی تراش

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f\right|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۲.۸۳}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۲.۸۴}$$

□

ایک کروی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لیئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \tag{۱۲.۸۵}$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos\theta_0 \tag{۱۲.۸۶}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos\theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin\theta_0 \,\mathrm{d}r_0 \,\mathrm{d}\theta_0 \,\mathrm{d}\phi_0 \tag{۱۲.۸۷}$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیرِ نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty rV(r) \sin(\kappa r) \,\mathrm{d}r \qquad \text{کروی تشاکل} \tag{۱۲.۸۸}$$

f کی زیویائی تابعیت κ میں سموئی گئی ہے شکل 11.11 کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\kappa = 2k\sin(\theta/2) \tag{۱۲.۸۹}$$

مثال ۱۲.۵: یوکاوا بکھراو۔ یوکاوا مخفیہ جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کا روپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$V(r) = \beta\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۱۲.۹۰}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(\kappa r)\,\mathrm{d}r = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2+\kappa^2)} \tag{۱۲.۹۱}$$

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔ $\square$

مثال ۱۲.۶: ردرفورڈ بکھراو۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہو گا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2} \tag{۱۲.۹۲}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{۱۲.۹۳}$$

اس کا مربع ہمیں تفرقی عمودی تراش دیگا

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۲.۹۴}$$

جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لیئے کلاسیکی میکانیات، تخمین بارن اور کوانٹم نظریہ میدان تمام ایک دوسرے جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ $\square$

سوال ۱۲.۱۰: اختیاری توانائی کے لیئے نرم کرہ بکھراو کا حیطہ بکھراو بارن تخمین سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہو گا۔

سوال ۱۲.۱۱: مساوات 11.91 میں تکمل کی قیمت تلاکر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۲.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۲.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لیئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

۱۲.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لیئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لیکر پر ہی چلے جاتا ہے شکل 11.12 ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_{\perp} \, \mathrm{d}t \tag{۱۲.۹۵}$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیارِ حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں p آمدی معیارِ حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \tag{۱۲.۹۶}$$

اسے ہم رتبہ اوّل تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبی کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبی تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ در حقیقت اس کی رتبہ اوّل تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبی تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بلکل ٹھیک جواب پر مرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۲.۹۷}$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{۱۲.۹۸}$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیئے جز ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جا سکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \tag{۱۲.۹۹}$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے تکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \tag{۱۲.۱۰۰}$$

اس عمل کو بار بار دوہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \tag{۱۲.۱۰۱}$$

ہر متکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اوّل اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبی تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل 11.13 میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبی ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبی اوّل میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹم میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جز ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۲.۱۴: تخمین ضرب میں ردرفورڈ بکھراؤ کے لیئے θ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ مناسب حدوں کے اندر آپ کا نتیجہ بلکل ٹھیک ریاضی فکرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۲.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراو کے لیئے حیطہ بکھراو تلاش کریں۔

جواب: $-(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1-(4mV_0a^2/5\hbar^2)]$

سوال ۱۲.۱۶: یک بُعدی مساوات شروڈنگر کے لیئے تفاعل گریں تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مماثل تکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|}V(x_0)\psi(x_0)\,\mathrm{d}x_0 \tag{۱۲.۱۰۲}$$

سوال ۱۲.۱۷: مبدہ پر بغیر اینٹون کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر یک بُعدی بکھراو کے لیئے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \tag{۱۲.۱۰۳}$$

سوال ۱۲.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل مساوات 2.114 اور ایک متناہی چکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراو کے لیئے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو یک بُعدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بلکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۲.۱۹: آگے رخ ہیطہ بکھراو کے خیالی جز اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} Im(f(0)) \tag{۱۲.۱۰۴}$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۲.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \tag{۱۲.۱۰۵}$$

جوابات

فرہنگ

allowed
26energies,
51argument,

Bessel
99function,spherical
107energy,binding
Bohr
106radius,
106formula,Bohr
25conditions,boundary

98term,centrifugal
83states,coherent
4collapses,
commutation
36relation,canonical
90relations,canonical
36commutator,
28complete,
77continuous,
90continuum,
coordinates
91spherical,
3interpretation,Copenhagen

75degenerate,
delta
28Kronecker,
Dirac
80orthonormality,
77discrete,
dispersion
54relation,

energy
22allowed,
31conservation,
13ensemble,
expectation
6value,

formula
16Broglie,De
Fourier
52transform,inverse
52transform,
Frobenius
45method,
function
59delta,Dirac

generalized
59distribution,
59function,
generating
50function,
generator
86space,intranslation
86time,intranslation
Gram-Schmidt
79process,orthogonalization

21Hamiltonian,
harmonic
25oscillator,

113Helium,
Hermitian
40conjugate,
3variables,hidden

2indeterminacy,

ladder
38operators,
Laguerre
108polynomial,associated
108polynomial,
90Laplacian,
law
34Hooke,
Legendre
94associated,
linear
22combination,
113Lithium,

6mean,
6median,
14momentum,

Neumann
99function,spherical
27node,
10normalization,

14operator,
38lowering,
38raising,
27orthogonal,
28orthonormal,

Planck's
113formula,
polynomial
48Hermite,
position
3agnostic,
3orthodox,
3realist,
12potential,
97effective,
probability
8density,

quantum
105number,principle
numberquantum
96azimuthal,
96magnetic,
99numbers,quantum

97equation,radial
recursion
46formula,
reflection
64coefficient,
73time,revival
Rodrigues
49formula,
94formula,Rodrigues
Rydberg
113constant,
113formula,

Schrodinger
20time-independent,
1align,Schrodinger
series
113Balmer,
28Fourier,
113Lyman,
113Paschen,
35power,
34Taylor,
spherical
96harmonics,
11square-integrable,
7deviation,standard
state
58bound,

excited, 27
ground, 27, 107
scattering, 58
statistical
interpretation, 2
step function, 66

theorem
Dirichlet's, 28
Ehrenfest, 15
Plancherel, 52
transition, 112
transmission
coefficient, 64
tunneling, 58, 65
turning points, 58

uncertainty principle, 16

variables
separation of, 19
variance, 7
velocity
group, 54
phase, 54

wave
incident, 64
packet, 52
reflected, 64
transmitted, 64
wave function, 1
wavelength, 16

اتفاقی
حالات، 83
اجازتی
توانائیاں، 26
استمراری، 77
استمراریہ، 90
اصول
عدم یقینیت، 16
انتشاری
رشتہ، 54
انحطاطی، 75
انعکاس
شرح، 64
اوسط، 6

بقا
توانائی، 31
بندشی توانائی، 107
بوہر
رداس، 106
کلیہ، 106
بیسل
کروی تفاعل، 99

پلانک
کلیہ، 113
پیداکار
فضا میں انتقال کا، 86
وقت میں انتقال، 86
پیداکار
تفاعل، 50

تبادلی
باضابطہ رشتہ، 36
باضابطہ رشتے، 90
تبادل کار، 36
تجدیدی عرصہ، 73
ترسیل
شرح، 64
تسلسل
بالمر، 113
پاشن، 113

ٹیلر،34
طاقتی،35
فوریئر،28
لیمان،113
تغیریت،7
تفاعل
ڈیلٹا،59
تفاعل موج،1
توالی
کلیہ،46
توانائی
اجازتی،22
توقعاتی
قیمت،6

جفت
تفاعل،24

حال
بکھراو،58
زمینی،27،107
مقید،58
ہیجان،27

خطی جوڑ،22
خفیہ متغیرات،3

دلیل،51

ڈیراک
معیاری عمودیت،80
ڈیلٹا
کرونیکر،28

رداسی مساوات،97
رڈبرگ،113
کلیہ،113
رفتار
دوری سمتی،54
گروہی سمتی،54
روڈریگیس
کلیہ،94

ساکن
حالات،21
سرحدی شرائط،25
سرنگ زنی،58،65
سگرا،13
سوچ
انکاری،3
تقلید پسند،3
حقیقت پسند،3
سیڑھی
عاملین،38
سیڑھی تفاعل،66

شروڈنگر
غیر تابع وقت،20
شروڈنگر تصویر کشی،86
شروڈنگر مساوات،1
شماریاتی مفہوم،2

طول موج،16،113

عامل،14
تقلیل،38
رفعت،38
عبور،112
عدم تعین،2
عدم یقینیت اصول،16
عقدہ،27
علیحدگی متغیرات،19
عمودی،27
معیاری،28

غیر مسلسل،77

فروبنیوس
ترکیب،45
فوریئر
الٹ بدل،52
بدل،52

قابل تکامل مربع،11
قانون

ہک، 34

کثافت
احتمال، 8
کثیر رکنی
ہرمائٹ، 48
کروی
ہارمونیات، 96
کلیہ
ڈی بروگلی، 16
روڈریگیس، 49
کوانٹم
صدر عدد، 105
کوانٹائی اعداد، 99
کوانٹائی عدد
اسمتی، 96
مقناطیسی، 96
کوپن ہیگن مفہوم، 3

گرام شمد
ترکیب عمودیت، 79
گرکر، 4

لاپلاسی، 90
لاگیغ
شریک کثیر رکنی، 108
کثیر رکنی، 108
لتھیم، 113
لیژانڈر
شریک، 94

متعمم
تفاعل، 59
تقسیم، 59
محدد
کروی، 91
مخفیہ، 12
موثر، 97
مرتعش
ہارمونی، 25

مرکز گریز جزو، 98
مسئلہ
اہرنفسٹ، 15
پلانشرال، 52
ڈرشلے، 28
معمول زنی، 10
معیار حرکت، 14
معیار عمودی، 28
معیاری انحراف، 7
مکمل، 28
موج
آمدی، 64
ترسیلی، 64
منعکس، 64
موجی اکٹھ، 52

نیومن
کروی تفاعل، 99

واپسی نقاط، 58
وسطانیہ، 6

ہارمونی
مرتعش، 25
ہرمشی
جوڑی دار، 40
ہیزنبرگ تصویر کشی، 86
ہیلیم، 113
ہیملٹنی، 21