کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو **کوانٹائی سکونیات**[۱] کہا جا سکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت: $V(\boldsymbol{r}, t) = V(\boldsymbol{r})$ ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شروڈنگر:

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جا سکتا ہے، جہاں $\psi(\boldsymbol{r})$ غیر تابع مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نمائی جز وضربی $(e^{iEt/\hbar})$ ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبیعی مقدار $|\Psi|^2$ کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہٰذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑ سے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی چھلانگ**[۲] کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (**کوانٹائی حرکیات**[۳]) متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

---

[۱] quantum statics
[۲] quantum jumps
[۳] quantum dynamics

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک حل معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی اخراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی، H^0، کے امتیازی حالات:

$$H^0\psi_b = E_b\psi_b, \qquad \text{اور} \qquad H^0\psi_a = E_a\psi_a \tag{۹.۱}$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$\langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab} \tag{۹.۲}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(0) = c_a\psi_a + c_b\psi_b \tag{۹.۳}$$

اس سے فرق نہیں پڑتا کہ تفاعلات ψ_a اور ψ_b مقام و فضائی تفاعلات، یا چکر کار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے، لہٰذا جب میں $\Psi(t)$ لکھتا ہوں، میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر جزو اپنی خصوصی قوت نمائی جزو ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$\Psi(t) = c_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \tag{۹.۴}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ "حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال" $|c_a|^2$ ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے۔ یقیناً، تفاعل Ψ کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1 \tag{۹.۵}$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب، $H'(t)$، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ قائم کرتے ہیں، لہٰذا تفاعل موج $\Psi(t)$ کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہو گا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے۔

$$\Psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b(t)\psi_b e^{-E_bt/\hbar} \tag{۹.۶}$$

(میں قوت نمائی جز و ضربیوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کے تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔)
ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال ψ_a ($c_a(0) = 1$ ، $c_b(0) = 0$) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0$ ، $c_b(t_1) = 1$ ہوں، تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں تحویل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالبہ کرتے ہیں کہ $\Psi(t)$ تابع وقت مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرے۔

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad H = H^0 + H'(t) \tag{۹.۷}$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ = i\hbar\Big[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \\ + c_a\psi_a\left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right)e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b\left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right)e^{-iE_bt/\hbar}\Big] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہٰذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar}\right] \tag{۹.۸}$$

تفاعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم $\dot{c}_a$ کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle \tag{۹.۹}$$

دھیان رہے کہ H' ہرمشی ہے، لہٰذا $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہو گا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}\left[c_aH'_{aa} + c_bH'_{ab}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۰}$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے $\dot{c}_b$ الگ کیا جا سکتا ہے:

$$c_a\langle\psi_b|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar}+c_b\langle\psi_b|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar}=i\hbar\dot{c}_be^{-iE_bt/\hbar}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\dot{c}_b=-\frac{i}{\hbar}\left[c_bH'_{bb}+c_aH'_{ba}e^{i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۱}$$

مساوات ۹.۱۰ اور مساوات ۹.۱۱ مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کا تعین کرتے ہیں؛ یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی (تابع وقت) مساوات شروڈنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے:

$$H'_{aa}=H'_{bb}=0 \tag{۹.۱۲}$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ:

$$\dot{c}_a=-\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0t}c_b,\qquad \dot{c}_b=-\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0t}c_a \tag{۹.۱۳}$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$\omega_0\equiv\frac{E_b-E_a}{\hbar} \tag{۹.۱۴}$$

(میں $E_b\geq E_a$ فرض کرتا ہوں، لہٰذا $\omega_0\geq 0$ ہو گا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو (تابع وقت) برقی میدان $\boldsymbol{E}=E(t)\boldsymbol{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $(n=1)$ اور (چار گنا انحطاطی) پہلے ہیجان حالات $(n=2)$ کے بیچ اضطراب $H'=eEz$ کے چاروں قالبی ارکان H'_{ij} تلاش کریں۔ دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے $H'_{ii}=0$ ہو گا۔ تبصرہ: محور z کے لحاظ سے **طاق پن**[۳] کو بروئے کار لاتے ہوئے، صرف ایک تکمل حل کرنے کی ضرورت ہو گی؛ اس روپ کا اضطراب زمینی حال سے $n=2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے، لہٰذا یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا؛ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ بلند ہیجان حالات تک تحویل نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0)=1$ اور $c_b(0)=0$ لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ تصدیق کریں کہ $1=|c_a(t)|^2+|c_b(t)|^2$ ہے۔ تبصرہ: بظاہر یہ نظام "خالص ψ_a" اور "کسی ψ_b" کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں تحویل نہیں ہو گی؟ جی نہیں، لیکن اس کی وجہ کچھ لطیف ہے: یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں؛ توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر، تابع وقت نظریہ اضطراب میں ہم عموماً اضطراب چالو کر کے کچھ دورانیہ کے بعد بند

[۳] oddness

کرتے ہیں۔ آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے، اور صرف اس سیاق و سباق میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نظام ایک سے دوسرے میں تحویل ہوا۔ یوں، موجودہ مسئلے میں، فرض کریں کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر بند کیا جاتا ہے؛ اس سے حساب پر کوئی فرق نہیں پڑے گا، تاہم یہ نتائج کی معقول تشریح ممکن بناتی ہے۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کا روپ (وقت کا) δ تفاعل ہے۔

$$H' = U\delta(t)$$

فرض کریں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ اور $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$ ہے۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں، $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ تلاش کریں، اور تصدیق کریں کہ $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہے۔ تحویل ہونے کا خالص احتمال ($t \to \infty$ کے لیے $P_{a\to b}$) کیا ہو گا؟ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کے تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

جواب: $P_{a\to b} = \sin^2(|\alpha|/\hbar)$

۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل ٹھیک رہا ہے: ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا۔ لیکن، "چھوٹے" H' کی صورت میں ہم مساوات ۹.۱۳ کو (درج ذیل) یکے بعد دیگر تخمین سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال:

$$c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0 \tag{۹.۱۵}$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں (صفر رتبی میں) رہے گا۔

صفر رتبی:

$$c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0 \tag{۹.۱۶}$$

(میں تخمین کے رتبہ کو زیر بالا میں قوسین میں لکھتا ہوں۔ یوں $c_a^{(0)}(t)$ میں "0" رتبہ صفر کو ظاہر کرتا ہے۔)

ہم مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں رتبہ صفر قیمتیں پُر کر کے اول رتبی تخمین حاصل کرتے ہیں۔

اول رتبی:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}c_a^{(1)}}{\mathrm{d}t} &= 0 \to c_a^{(1)}(t) = 1\\ \frac{\mathrm{d}c_b^{(1)}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0 t} \to c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{۹.۱۷}$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ میں پُر کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

دوم رتبی:

$$\frac{\mathrm{d}c_a^{(2)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' \rightarrow$$
$$c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t H'_{ab}(t')e^{-i\omega_0 t'}\left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'')e^{i\omega_0 t''}\,\mathrm{d}t''\right]\mathrm{d}t' \tag{۹.۱۸}$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا ($c_b^{(2)}(t) = c_b^{(1)}(t)$)۔ (دھیان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبی جزو بھی شامل ہے؛ دوم رتبی تصحیح صرف تکملی حصہ ہو گا۔)

اصولاً، ہم اسی طرح چلتے ہوئے n رتبی تخمین کو مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $(n+1)$ رتبی تخمین کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ صفر رتبی میں H' کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا، اول رتبی تصحیح میں H' کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے، دوم رتبی تصحیح میں H' کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں، وغیرہ۔[۵] اول رتبی تخمین میں سہو $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے (ٹھیک عددی سروں کو یقیناً مساوات ۹.۵ پر پورا اترنا ہو گا)۔ ہاں H' میں اول رتبہ تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2$ کی قیمت 1 ہو گی؛ اول رتبی تخمین سے اتنی ہی توقع کی جا سکتی ہے۔ یہی کچھ زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیے بھی ہو گا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ نہیں لیتے۔

ا. صورت $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ کے لئے اول رتبی نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ H' میں اول رتبہ تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$ ہو گا۔

ب. اس مسئلے کو بہتر انداز میں نمٹا جا سکتا ہے۔ درج ذیل لیکر

$$d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{aa}(t')\,\mathrm{d}t'}c_a, \qquad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{bb}(t')\,\mathrm{d}t'}c_b \tag{۹.۱۹}$$

دکھائیں کہ

$$\dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar}e^{i\phi}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}d_b; \qquad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar}e^{-i\phi}H'_{ba}e^{i\omega_0 t}d_a \tag{۹.۲۰}$$

ہو گا، جہاں درج ذیل ہے۔

$$\phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')]\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۲۱}$$

---

[۵] دھیان رہے کہ ہر جفت رتبہ میں c_a، اور ہر طاق رتبہ میں c_b تبدیل ہوتا ہے؛ اگر نظام ان دو حالات کے خطی جوڑ سے آغاز کرے، یا اضطراب میں وتری ارکان پائے جائیں، تب ایسا نہیں ہو گا۔

یوں (H' کے ساتھ چسپاں اضافی جزو ضرب $e^{i\phi}$ کے علاوہ) d_a اور d_b کی مساواتیں، ساخت کے لحاظ سے مساوات ۹.۱۳ کی متماثل ہیں۔

ج. اول رتبی نظریہ اضطراب سے، جزو-ب کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں، اور اپنے جواب کا جزو-الف کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں فرق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0) = a$ ، $c_b(0) = b$ کے لیے نظریہ اضطراب میں مساوات ۹.۱۳ کو دوم رتبہ تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب (سوال ۹.۲) کے لیے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو دوم رتبہ تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائن نما اضطراب

فرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائن نما ہو:

$$H'(\boldsymbol{r},t) = V(\boldsymbol{r})\cos(\omega t) \tag{۹.۲۲}$$

تب

$$H'_{ab} = V_{ab}\cos(\omega t) \tag{۹.۲۳}$$

ہو گا، جہاں V_{ab} درج ذیل ہے۔

$$V_{ab} \equiv \langle\psi_a|V|\psi_b\rangle \tag{۹.۲۴}$$

(عملاً، تقریباً ہر صورت میں وتری قالبی ارکان صفر ہوتے ہیں، لہٰذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ وتری قالبی ارکان صفر ہیں۔) اول رتبہ تک (یہاں سے آگے، ہم صرف اول رتبہ تک کام کریں گے، لہٰذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی)) درج ذیل ہو گا (مساوات ۹.۱۷)۔

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar}V_{ba}\int_0^t \cos(\omega t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' = -\frac{iV_{ba}}{2\hbar}\int_0^t \left[e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'}\right]\mathrm{d}t' \\ &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right] \end{aligned} \tag{۹.۲۵}$$

یہی جواب ہے، لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہو گا۔ جبری تعدد (ω) کو تحویلی تعدد (ω_0) کے بہت قریب رہنے کا پابند بنانے سے، چونکہ قوسین میں دوسرا جزو غالب ہو گا، جس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں؛ بالخصوص ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega| \tag{۹.۲۶}$$

یہ بہت بڑی پابندی نہیں ہے، چونکہ کسی دوسرے تعدد پر تحویل کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہے۔[۶] پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_b(t) \cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0-\omega}\left[e^{i(\omega_0-\omega)t/2}-e^{-i(\omega_0-\omega)t/2}\right]$$
$$= -i\frac{V_{ba}}{\hbar}\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{\omega_0-\omega}e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \tag{۹.۲۷}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کرکے لمحہ t پر حال ψ_b میں پایا جاتا ہو، کے تحویل کا احتمال، جس کو **تحویلی احتمال**[۷] کہتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$P_{a\to b}(t) = \left|c_b(t)\right|^2 \cong \frac{\left|V_{ab}^2\right|}{\hbar^2}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۲۸}$$

اس نتیجے کا دلچسپ پہلو یہ ہے کہ، وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال سائن نما ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2/\hbar^2(\omega_0 - \omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر، جو لازماً 1 سے بہت کم ہے (ورنہ ہم اضطراب کو چھوٹا فرض نہیں کر پائیں گے) یہ واپس گر کر صفر ہوتا ہے! لمحات $t_n = 2n\pi/|\omega_0-\omega|$ پر، جہاں $n = 1, 2, 3, \ldots$ ہے، ذرہ لازماً نچلے حال میں ہوگا۔ اگر آپ تحویل کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں، اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے چالو نہ رکھیں؛ بہتر ہوگا کہ آپ وقت $\pi/|\omega_0-\omega|$ پر اضطراب کو بند کرکے نظام کو بالائی حال میں "پانے" کی امید کریں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ تحویل، نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں، بلکہ ٹھیک حال میں بھی ایسا ہی ہوگا، اگرچہ تحویلی تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

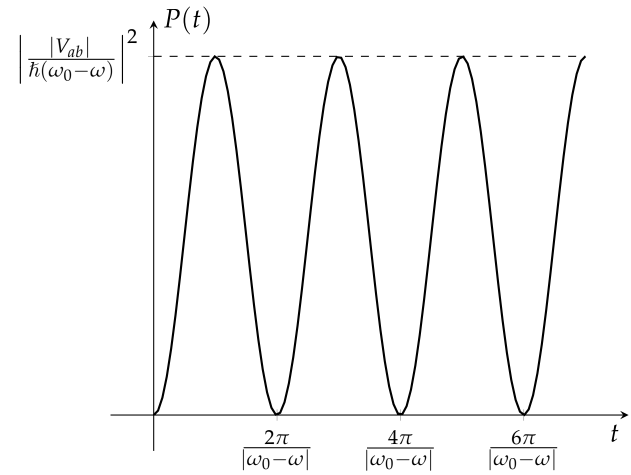
جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، تحویل کا احتمال اس صورت سب سے زیادہ ہوگا جب جبری تعدد قدرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a\to b}$ ترسیم کرکے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی بلندی $(|V_{ab}|t/2\hbar)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi/t$ ہے؛ ظاہر ہے کہ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اس کی بلندی بڑھتی اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ (بظاہر، زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کی بتدریج بڑھتی ہے۔ تاہم 1 تک پہنچنے سے بہت پہلے چھوٹے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے، لہٰذا ہم نسبتاً کم t کے لیے اس نتیجے پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ ٹھیک نتیجہ 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔)

سوال ۹.۷: مساوات ۹.۲۵ میں پہلا جزو $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t}/2$ حصے سے، اور دوسرا $e^{-i\omega t}/2$ سے آتا ہے۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے، یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں۔

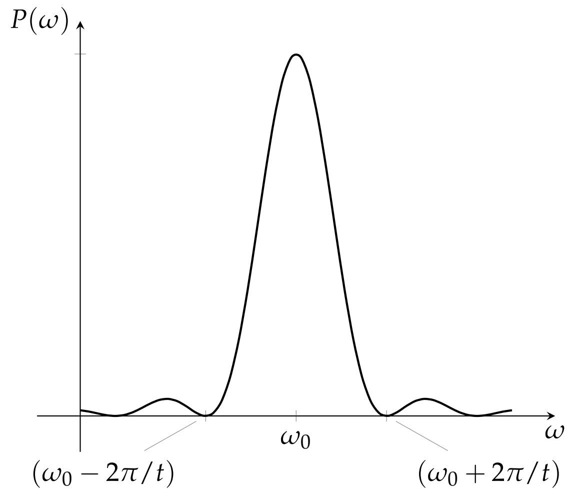
$$H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2}e^{-i\omega t}, \qquad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2}e^{i\omega t} \tag{۹.۲۹}$$

[۶] آنے والے حصوں میں ہم اس نظریے کا اطلاق روشنی پر کریں گے، جس کا $\omega \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ ہے، لہٰذا دونوں اجزاء میں نسب نما انتہائی بڑا ہوگا، ماسوائے ω_0 کے قریب (دوسرے جزو میں)۔

[۷] transition probability



شکل ۹.۱: سائن نما اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات ۹.۲۸)۔



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالمقابل متحرک تعدد (مساوات ۹.۲۸)۔

(ہیملٹنی قالب کو ہر مشی بنانے کی خاطر موخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں کہ ہم $c_a(t)$ کے لیے مساوات ۹.۲۵ کی طرح کلیہ میں غالب جزو منتخب کرتے ہیں۔) اس کو **گھومتی موج تخمین**[۸] کہتے ہیں۔ جناب **رابی** نے دیکھا کہ حساب کے آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ کو، نظریہ اضطراب استعمال کیے بغیر اور میدان کے زور کے بارے میں کچھ فرض کیے بغیر، بالکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے۔

ا. عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1$ ، $c_b(0) = 0$ کے لیے گھومتی موج تخمین (مساوات ۹.۲۹) لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ اپنے جوابات ($c_a(t)$ اور $c_b(t)$) کو **رابی پلٹنی تعدد:**[۹]

$$\omega_r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + (|V_{ab}|/\hbar)^2} \tag{۹.۳۰}$$

کی صورت میں لکھیں۔

ب. تحویلی احتمال $P_{a\to b}(t)$ کا تعین کریں، اور دکھائیں کہ یہ کبھی بھی 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔

ج. تصدیق کریں کہ "کم" اضطراب کی صورت میں $P_{a\to b}(t)$ نظریہ اضطراب کا نتیجہ (مساوات ۹.۲۸) دے گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں "کم" سے مراد V پر عائد کیا پابندی ہے۔

د. نظام پہلی مرتبہ اپنے ابتدائی حال میں کس وقت واپس آئے گا؟

۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج (جس کو میں روشنی کہوں گا، اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خرد امواج، ایکس رے، وغیرہ ہو سکتی ہے؛ جن میں صرف تعدد کا فرق ہے) عرضی (اور باہم قائمہ) ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر، گزرتی ہوئی بصری موج کی برقی جزو کو، بنیادی طور پر رد عمل کرتا ہے۔ اگر طول موج (جوہر کی جسامت کے لحاظ سے) لمبا ہو، ہم میدان کے **فاصلاتی** تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔[۱۰] تب جوہر سائن نما ارتعاشی برقی میدان:

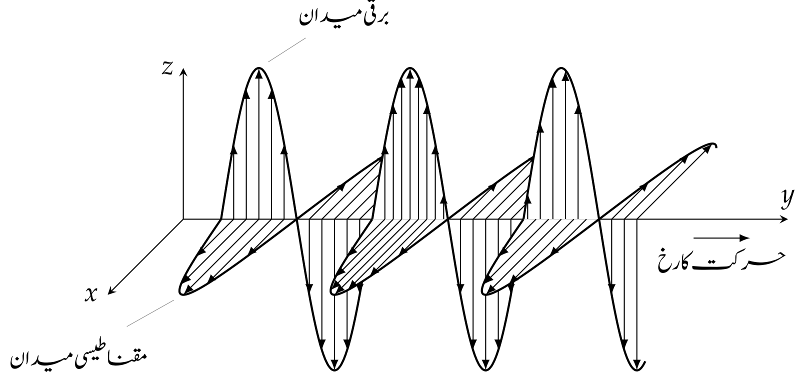
$$\boldsymbol{E} = E_0\cos(\omega t)\,\boldsymbol{k} \tag{۹.۳۱}$$

---

[۸] rotating wave approximation

[۹] Rabi flopping frequency

[۱۰] بصری روشنی کے لئے $\lambda \sim 500\,\mathrm{nm}$ جبکہ جوہر کا قطر $0.1\,\mathrm{nm}$ کے لگ بھگ ہے، لہٰذا یہ تخمین معقول ہے؛ تاہم ایکس رے کے لئے ایسا نہیں ہوگا۔ سوال ۹.۲۱ میدان کے فاصلاتی تغیر پر غور کرتا ہے۔



شکل ۹.۳: برقناطیسی موج۔

کے زیر اثر ہو گا (فی الحال میں روشنی کو یک رنگی اور z رخ تقطیب شدہ فرض کرتا ہوں)۔ اضطرابی ہیملٹنی[۱۱] درج ذیل ہو گی، جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔[۱۲]

$$H' = -qE_0 z\cos(\omega t) \tag{۹.۳۲}$$

بظاہر درج ذیل ہو گا۔[۱۳]

$$H'_{ba} = -\wp E_0\cos(\omega t), \qquad \wp \equiv q\langle\psi_b|z|\psi_a\rangle \tag{۹.۳۳}$$

عمومی طور پر، ψ متغیر z کا جفت یا طاق تفاعل ہو گا؛ دونوں صورتوں میں $z|\psi|^2$ طاق ہو گا، جس کا تکمل صفر ہو گا (چند مثالوں کے لئے سوال ۹.۱ دیکھیں)۔ اسی کی بنا پر ہم فرض کرتے ہیں کہ H' کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں

$$V_{ba} = -\wp E_0 \tag{۹.۳۴}$$

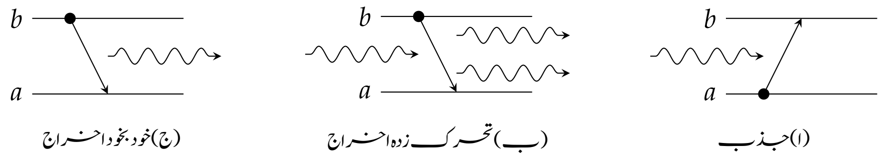
لیتے ہوئے، روشنی اور مادے کا باہم عمل ٹھیک اُسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہو گا جس پر ہم نے حصہ ۹.۱.۳ میں غور کیا۔

---

[۱۱] ساکن میدان $\boldsymbol{E}$ میں بار q کی توانائی $-q\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ ہو گی۔ آپ تابع وقت (یعنی غیر ساکن) میدان کے لئے برقی سکونیات کے کلیہ کے استعمال پر ناراض ہو سکتے ہیں۔ میں بغیر کہے، فرض کرتا ہوں کہ (جوہر کے اندر) الیکٹران کو حرکت کرنے کے لئے درکار وقت سے ارتعاش کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

[۱۲] ہمیشہ کی طرح ہم فرض کرتے ہیں کہ مرکزہ بھاری اور ساکن ہے؛ ہمیں یہاں الیکٹران کے تفاعل موج سے غرض ہے۔

[۱۳] حرف $\wp$ کے استعمال سے آپ کو **برقی جفت قطب کا معیار اثر** یاد دلایا جاتا ہے (جس کے لئے برقی حرکیات میں حرف p مستعمل ہے؛ یہاں اسے ٹیڑھا $\wp$ لکھا گیا ہے تا کہ معیار حرکت کے ساتھ غلط فہمی پیدا نہ ہو۔) درحقیقت، جفت قطب معیار حرکت عامل، $q\boldsymbol{r}$، کے z جزو کا، $\wp$ غیر وتری قالبی رکن ہے۔ برقی جفت قطب معیار حرکات کے ساتھ وابستگی کی بنا پر، ایسا اخراج جو مساوات ۹.۳۳ کے تحت ہو **برقی جفت قطب اخراج** کہلاتا ہے۔ یہ، کم از کم بصری خطہ میں، غالب قسم ہے۔ عمومیت اور اصطلاحات کے لئے سوال ۹.۲۱ دیکھیں۔



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود با خود اخراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیریں حال ψ_a میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالا حال ψ_b میں تحویل کا احتمال مساوات ۹.۲۸ دیتی ہے جو (مساوات ۹.۳۴ کو مد نظر رکھتے ہوئے) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a\to b}(t) = \left(\frac{|\wp|\,E_0}{\hbar}\right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۵}$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس نے "ایک نوریہ جذب کیا" (شکل ۹.۴-ا)۔ (جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، لفظ "نوریہ" در حقیقت **کوانٹائی برقی حرکیات**[14] [برقناطیسی میدان کی کوانٹائی نظریہ] سے تعلق رکھتا ہے، جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اُس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرے مطلب نہ لیں۔)

یقیناً، میں بالا حال ($c_a(0) = 0$ اور $c_b(0) = 1$) سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ چاہیں تو ایسا کر سکتے ہیں؛ نتیجہ بالکل وہی ہوگا؛ البتہ اس مرتبہ $P_{b\to a} = |c_a(t)|^2$ حاصل ہوگا، جو نیچے زیریں سطح میں تحویل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b\to a}(t) = \left(\frac{|\wp|\,E_0}{\hbar}\right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۶}$$

(چونکہ ہم a اور b کو آپس میں بدل ($a \leftrightarrow b$) رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے، لہٰذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ مساوات ۹.۲۵ پر پہنچ کر اب ہم پہلا جز چنتے ہیں جس کے نسب نما میں $-\omega_0 + \omega$ ہوگا، باقی حساب پہلے کی طرح ہے۔) لیکن اگر آپ رک کر سوچیں تو یہ ایک حیرت انگیز نتیجہ ہے: بالا حال میں پائے جانے والے ذرے پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں تحویل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالا حال تحویل کا ہے۔ اس عمل کو **تحرک زدہ اخراج**[15] کہتے ہیں، جس کی پیشنگوئی آئنسٹائن نے کی تھی۔

---

[14] quantum electrodynamics
[15] stimulated emission

تحریک زدہ اخراج کی صورت میں برقناطیسی میدان جوہر سے $\hbar\omega_0$ توانائی کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریے (ایک اصل جس نے تحویل پیدا کی اور دوسرا جو تحویل کی بدولت پیدا ہوا) باہر نکلے (شکل ۹.۴-ب)۔ اس طرح **افزائش**[۱۶] کا امکان پیدا ہوتا ہے، چونکہ ایک بوتل میں بہت سارے جوہر، جو بالا حال میں ہوں، کو ایک آمدی نوریہ **متحرک**[۱۷] کر کے **مسلسل تعامل**[۱۸] پیدا کریگا؛ یوں پہلا نوریہ 2 نوریے پیدا کرے گا، یہ نوریے 4 پیدا کریں گے، وغیرہ۔ **لیزر**[۱۹] کا اصول یہی ہے۔ دھیان رہے کہ (لیزر عمل کے لیے) ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت بالا حال میں پہنچائی جائے (جسے **آبادی الٹنا**[۲۰] کہتے ہیں)؛ چونکہ انجذاب (جو ایک نوریہ کم کرتا ہے) اور تحریک زدہ اخراج (جو ایک پیدا کرتا ہے) بالمقابل ہوں گے، لہٰذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کر کے افزائش پیدا نہیں کی جا سکتی۔

(انجذاب اور تحریک شدہ اخراج کے علاوہ) روشنی اور مادے کے باہم عمل کا تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے؛ اس کو **خود با خود اخراج**[۲۱] کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان، جو اخراج پیدا کر سکتا تھا، کی عدم موجودگی میں ہیجان جوہر زیریں حال میں تحویل ہو کر ایک نوریہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے جوہر کا زمینی حال میں تنزل عموماً اسی ذریعہ سے ہوتا ہے۔ پہلی نظر میں واضح نہیں کہ خود باخود اخراج کیوں کر ہو گا۔ ساکن حال (اگرچہ ہیجان) جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال میں تحویل ہو، اسے وہیں عمر بھر رہنا چاہیے۔ درحقیقت، جوہر وہیں رہتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ البتہ، کوانٹائی برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر نہیں ہوتے؛ جیسا (مثال کے طور پر) ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی $(\hbar\omega/2)$ کا حامل ہے۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں، کمرے کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں، تب بھی کچھ برقناطیسی شعاع پائی جائے گی، اور یہی "صفر نقطی" اخراج خود باخود اخراج کا سبب بنتا ہے۔ اگر جڑ سے دیکھا جائے تو تمام اخراج تحریک شدہ اخراج ہو گا۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہو گا کہ آیا آپ میدان فراہم کر رہے ہیں یا قدرتی میدان پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی اخراجی عمل کے بالکل اُلٹ ہے، جہاں تمام اخراج خود باخود ہوتا ہے اور تحریک شدہ اخراج کا تصور نہیں پایا جاتا۔

کوانٹائی برقی حرکیات اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے،[۲۲] تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں (انجذاب، تحریک شدہ اخراج اور خود باخود اخراج) کا تعلق پیش کرتی ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود اخراج کی وجہ (زمینی حال برقناطیسی میدان کا اضطراب) پیش نہیں کی، تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود اخراج کا حساب کرنے کا مجاز بناتی ہے، جس سے ہیجان جوہری حال کا قدرتی عرصہ حیات تلاش کیا جا سکتا ہے۔[۲۳] البتہ ایسا کرنے سے پہلے، ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتفاقی برقناطیسی امواج کی آمد (جیسا

---

[۱۶] amplification
[۱۷] trigger
[۱۸] chain reaction
[۱۹] laser
[۲۰] population inversion
[۲۱] spontaneous emission
[۲۲] آئنسٹائن کا مقالہ مساوات شروڈنگر کی آمد سے قبل 1917 میں شائع ہوا۔ اس دلیل میں پلانک سیاہ جسمی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳)، جو 1900 میں منظر عام پر آیا، کے ذریعہ کوانٹائی حرکیات داخل ہوتی ہے۔
[۲۳] متبادل اشتقاق کے لئے سوال ۹.۸ دیکھیں۔

حقیقت میں ہوگا) سے جوہر کے ردعمل پر بات کرتے ہیں؛ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے، جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیطہ ہے۔[۲۴]

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{۹.۳۷}$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال (مساوات ۹.۳۶) میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$P_{b \to a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \tag{۹.۳۸}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر **یک رنگی**[۲۵] موج کے لیے درست ہوگا۔ عملی استعمال کے کئی نظاموں پر وسیع تعددی سعت کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں $u \quad \to \quad \rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ہوگا، جہاں $\rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ تعددی سعت $\mathrm{d}\omega$ میں کثافت توانائی ہے، اور خالص تحویلی احتمال درج ذیل تکمل کا روپ اختیار کرے گا۔[۲۶]

$$P_{b \to a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}\,\mathrm{d}\omega \tag{۹.۳۹}$$

لہریا قوسین میں جزو کی ω_0 پر نوکدار چوٹی پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲)، جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہوگا، لہٰذا ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے تکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$P_{b \to a}(t) \cong \frac{2|\wp|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}\,\mathrm{d}\omega \tag{۹.۴۰}$$

---

[۲۴] برقناطیسی میدان میں فی اکائی حجم توانائی درج ذیل ہے۔

$$u = (\epsilon_2/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2$$

برقناطیسی موج کے لئے برقی اور مقناطیسی حصے برابر ہوں گے، لہٰذا

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

ہوگا، اور چونکہ $\cos^2$ (یا $\sin^2$) کا اوسط $1/2$ ہے لہٰذا ایک مکمل پھیرے پر اوسط $(\epsilon_0/2)E_0^2$ ہوگا۔

[۲۵] monochromatic

[۲۶] مساوات ۹.۳۹ فرض کرتی ہے کہ مختلف تعدد پر تحویل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں، لہٰذا کل تحویلی احتمال ان انفرادی احتمالات کا مجموعہ ہوگا۔ اگر مختلف حصے **اتساقی** ہوں، تب ہمیں حیطوں $(c_b(t))$ نہ کہ احتمالات $(|c_b(t)|^2)$ کا مجموعہ لینا ہوگا، اور اس میں حیطوں کے مربعوں کے علاوہ حاصل ضرب بھی پائے جائیں گے۔ ہم عملی استعمال میں ہر مرتبہ فرض کرتے ہیں کہ اضطراب غیر اتساقی ہے۔

متغیرات کو تبدیل کرکے $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$ لکھ کر (اور چونکہ بنیادی طور پر متکمل باہر صفر ہی ہے) تکمل کی حدوں کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر، اور قطعی تکمل کو جدول سے دیکھ کر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \tag{۹.۴۱}$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{\pi|\wp|^2}{\epsilon_0\hbar^2}\rho(\omega_0)t \tag{۹.۴۲}$$

اس مرتبہ تحویلی احتمال t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس، غیر اتفاقی وسیع تعدد کی شعاع پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتی۔ بالخصوص، **تحویلی شرح**[۲۷] $(R \equiv \mathrm{d}P/\,\mathrm{d}t)$ اب ایک مستقل ہوگا۔

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{\epsilon_0\hbar^2}|\wp|^2\,\rho(\omega_0) \qquad \text{(مستقل تحویلی شرح)} \tag{۹.۴۳}$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تقطیب شدہ ہے۔ لیکن ہم اُس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو، اور اس میں ہر ممکنہ تقطیب پائی جاتی ہو؛ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں $|\wp|^2$ کے بجائے $|\boldsymbol{\wp}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہوگی، جہاں (مساوات ۹.۳۳ کو عمومیت دیتے ہوئے) درج ذیل ہوگا،

$$\boldsymbol{\wp} \equiv q\langle\psi_b|\boldsymbol{r}|\psi_a\rangle \tag{۹.۴۴}$$

اور اوسط تمام تقطیب اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔

اوسط درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے: کروی محددیوں منتخب کریں کہ شعاع کی حرکت کا رخ z محور پر ہو (تاکہ تقطیب xy سطح میں ہو) اور (اٹل) سمتیہ $\boldsymbol{p}$ سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔[۲۸]

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \cos\phi\,\boldsymbol{i} + \sin\phi\,\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{\wp} = \wp\sin\theta\,\boldsymbol{j} + \wp\cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{۹.۴۵}$$

---

[۲۷] transition rate

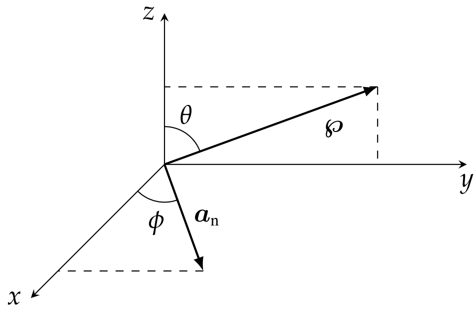
[۲۸] میں $\wp$ کو حقیقی کی طرح تصور کرتا ہوں، اگرچہ یہ عموماً مخلوط ہوگا۔ درج ذیل کی بنا پر

$$|\boldsymbol{\wp}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|^2 = |(\boldsymbol{\wp}_{\text{حقیقی}})\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} + i(\boldsymbol{\wp}_{\text{خیالی}})\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|^2 = |(\boldsymbol{\wp}_{\text{حقیقی}})\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|^2 + |(\boldsymbol{\wp}_{\text{خیالی}})\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|^2$$

ہم حقیقی اور خیالی حصوں کا حساب علیحدہ علیحدہ کرکے نتائج جمع کر سکتے ہیں۔ مساوات ۹.۴۷ میں مطلق قیمت علامت دو کام کر رہی ہے، یہ سمتیہ کی مقدار اور مخلوط حیطہ:

$$|\boldsymbol{\wp}|^2 = |\wp_x|^2 + |\wp_y|^2 + |\wp_z|^2$$

ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|\wp \cdot \boldsymbol{a}_\text{n}|^2$ کی اوسط زنی۔

تب

$$\wp \cdot \boldsymbol{a}_\text{n} = \wp \sin\theta \sin\phi$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|\wp \cdot \boldsymbol{a}_\text{n}|^2_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{4\pi}\int |\wp|^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{|\wp|^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}|\wp|^2\end{aligned} \tag{۹.۴۶}$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر تقطیبی، غیر اتفاقی شعاع کے زیر اثر حال b سے حال a میں تحریک شدہ اخراج کی تحویلی شرح درج ذیل ہو گی،

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|\wp|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۷}$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت قطب معیار اثر کا قالبی رکن $\wp$ ہو گا (مساوات ۹.۴۴) اور $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$ پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہو گی۔[۲۹]

۹.۳ خود باخود اخراج

۹.۳.۱ آئنشٹائن عددی سر A اور B

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالا حال ψ_b میں N_b جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود اخراجی شرح کو A لیتے ہوئے،[۳۰] اکائی وقت میں بالا حال سے N_bA ذرات خود باخود عمل کے ذریعہ

[۲۹] یہ تابع وقت نظریہ اضطراب کے فرمی کے سنہرا قانون کی ایک مخصوص صورت ہے، جو کہتا ہے کہ تحویلی شرح، اضطرابی مخفیہ کے قالبی ارکان کے مربع اور تحویلی تعدد پر اضطراب کے زور کا راست متناسب ہو گا۔

[۳۰] میں عام طور پر تحویلی شرح کے لئے علامت R استعمال کرتا ہوں، لیکن اس سیاق و سباق میں، باقی لوگوں کی طرح، میں بھی آئنشٹائن کی علامتیت استعمال کروں گا۔

نکلیں گے۔[31] جیسا ہم (مساوات ۹.۴۷) دیکھ چکے ہیں تحریک شدہ اخراج کی تحویلی شرح برقناطیسی میدان کی کثافت توانائی، $B_{ab}\rho(\omega_0)$ ، کے راست متناسب ہو گی؛ یوں بالا حال سے تحریک شدہ اخراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات نکلیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح $\rho(\omega_0)$ کی راست متناسب ہے، جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں؛ لہٰذا اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالا حال میں شامل ہوں گے۔ ان تمام کو یکجا کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}t} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۸}$$

فرض کریں یہ جوہر محیط میدان کے ساتھ حراری توازن میں ہیں، لہٰذا ہر سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہو گی۔ یوں $\mathrm{d}N_b/\mathrm{d}t = 0$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۴۹}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ، درجہ حرارت T پر حراری توازن میں، توانائی E کے حامل ذرات، کی تعداد **بولٹزمن جزو ضربی**[32] $e^{(-E/k_BT)}$ کے راست متناسب ہو گی؛ یوں

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_BT}}{e^{-E_b/k_BT}} = e^{\hbar\omega_0/k_BT} \tag{۹.۵۰}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_BT}B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۵۱}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳) ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} \tag{۹.۵۲}$$

ان دونوں ریاضی فقروں کا موازنہ کرنے سے

$$B_{ab} = B_{ba} \tag{۹.۵۳}$$

اور درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$A = \frac{\omega_0^3\hbar}{\pi^2c^3}B_{ba} \tag{۹.۵۴}$$

---

[31] ذرات کی تعداد N_a اور N_b بہت بڑی تصور کریں، لہٰذا ہم انہیں وقت کے استمراری تفاعلات تصور کر کے شماریاتی اتار چھڑاؤ نظر انداز کرتے ہیں۔

[32] Boltzmann factor

مساوات ۹.۵۳ اُس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے تھے: تحریک شدہ اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجذاب کی ہے۔ 1907 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنشٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحریک شدہ اخراج کا تصور پیدا کرے۔ تاہم ہم یہاں مساوات ۹.۵۴ میں دلچسپی رکھتے ہیں، جو ہمیں تحریک شدہ اخراجی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$، جسے ہم پہلے سے جانتے ہیں، کی صورت میں خود باخود اخراجی شرح (A) دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات ۹.۴۷ سے

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|\wp|^2 \tag{۹.۵۵}$$

لیتے ہیں، لہٰذا خود باخود اخراجی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$A = \frac{\omega_0^3|\wp|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{۹.۵۶}$$

سوال ۹.۸: نیچے کی طرف تحویل میں خود باخود اخراج اور حراری تحریک شدہ اخراج (وہ تحریک شدہ اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا پر ہو) میں مقابلہ ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $(T = 300\,\mathrm{K})$ پر $5\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت کم تعددوں پر حراری تحریک شدہ اخراج غالب ہو گا، جبکہ $5\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت زیادہ تعددوں پر خود باخود اخراج غالب ہو گا۔ بصری روشنی کے لیے کونسا غالب ہو گا؟

سوال ۹.۹: برقناطیسی میدان کی زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود اخراجی شرح درحقیقت تحریک شدہ اخراجی شرح (مساوات ۹.۴۷) ہو گی، لہٰذا آئنشٹائن عددی سر A اور B جانے بغیر آپ خود باخود اخراجی شرح (مساوات ۹.۵۶) اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہو گی، تاہم اگر آپ یہ قبول کریں کہ زمینی حال میں ایک نوریہ فی انداز پایا جاتا ہے، تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہو گا:

ا. مساوات ۵.۱۱۱ کی جگہ $N_\omega = d_k$ پُر کر کے $\rho_0(\omega)$ اخذ کریں (زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہو گا ورنہ کل "خلائی توانائی" لامتناہی ہو گی؛ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں)۔

ب. اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات ۹.۴۷ استعمال کر کے خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات ۹.۵۶ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات ۹.۵۶ ہمارا بنیادی نتیجہ ہے: یہ تحریک شدہ اخراج کی تحویلی شرح دیتا ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ خود باخود اخراج کے نتیجے میں، وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی؛ بالخصوص، دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں جوہروں کی تعداد میں $A\,\mathrm{d}t$ کمی ہو گی:

$$\mathrm{d}N_b = -AN_b\,\mathrm{d}t \tag{۹.۵۷}$$

(جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید جوہر ہیجان انگیز نہیں کیے جا رہے ہیں)۔[۳۳] اس کو $N_b(t)$ کے لیے حل کرتے ہیں:

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \tag{۹.۵۸}$$

بظاہر، ہیجان حال میں تعداد، قوت نمائی طور پر وقتی مستقل:

$$\tau = \frac{1}{A} \qquad \text{(عرصہ حیات)} \tag{۹.۵۹}$$

کے ساتھ کم ہو گی، جسے اس حال کا **عرصہ حیات**[۳۴] کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت ابتدائی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ گنا ہو گی۔

میں اب تک فرض کرتا آ رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں، تاہم علامتیت سادہ رکھنے کی خاطر ایسا کیا گیا؛ تحرک شدہ اخراج کا کلیہ (مساوات ۹.۵۶)، دیگر قابل رسائی حالات سے قطع نظر، $\psi_b \rightarrow \psi_a$ کی تحویلی شرح دیتا ہے (سوال ۹.۱۵ دیکھیں)۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف **انداز تنزل**[۳۵] ہوں گے (یعنی: ψ_b کا تنزل بہت سارے زیریں توانائی حالات ψ_{a1} ، ψ_{a2} ، ψ_{a3} ، وغیرہ میں ہو سکتا ہے)۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرحیں جمع ہو کر درج ذیل خالص عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots} \tag{۹.۶۰}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال $|n\rangle$ (مساوات ۲.۶۷) سے آغاز کر کے خود باخود اخراج کے ذریعے حال $|n'\rangle$ کو پہنچتا ہے۔ مساوات ۹.۴۴ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\wp = q\langle n|x|n'\rangle \hat{i}$$

آپ نے سوال ۳.۳۳ میں x کے قالبی ارکان:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

تلاش کئے، جہاں مرتعش کا قدرتی تعدد ω ہے۔ (مجھے تحرک شدہ اخراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔) ہم اخراج کی بات کر رہے ہیں لہٰذا n' لازماً n سے نیچے ہو گا؛ یوں ہمارے اس مقصد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\wp = q\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}\delta_{n',n-1}\,\hat{i} \tag{۹.۶۱}$$

---

[۳۳] یہ حراری توازن نہیں ہے جس پر گزشتہ حصے میں بات کی گئی۔ یہاں ہم فرض کر رہے ہیں کہ جوہروں کو ہیجان حال میں اٹھایا گیا ہے اور یہ اب واپس توازنی سطحوں کو لوٹ رہے ہیں۔

[۳۴] lifetime

[۳۵] decay modes

بظاہر "سیڑھی" پر صرف ایک پایہ نیچے تحویل ممکن ہے $(n - n' = 1)$؛ اور اخراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E_n'}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega \tag{۹.۶۲}$$

کوئی حیرانی کی بات نہیں، نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر شعاع ریز ہے۔ تحویلی شرح (مساوات ۹.۵۶) درج ذیل

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \tag{۹.۶۳}$$

اور n ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہو گا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \tag{۹.۶۴}$$

چونکہ، ہر ایک اخراجی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے، لہٰذا اشعاعی طاقت $A\hbar\omega$ ہو گی

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(n\hbar\omega)$$

یا، n ویں حال میں مرتعش کی توانائی $E = (n+1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گی۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}\left(E - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \tag{۹.۶۵}$$

(ابتدائی) توانائی E کے کوانٹائی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت اتنی ہو گی۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت کا تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار q کی اشعاعی طاقت **کلیہ لارمر**:[۳۶]

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{۹.۶۶}$$

دیتا ہے۔ ہارمونی مرتعش $(x(t) = x_0\cos(\omega t)$ کا حیطہ x_0، اور اسراع $a = -x_0\omega^2\cos(\omega t)$ ہو گا۔ ایک مکمل پھیرے پر اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2x_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

---

[۳۶] Larmor formula

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2 x_0^2$ ہے، لہٰذا $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہو گا، جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}E \tag{۹.۶۷}$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی اشعاعی طاقت دے گا۔ کلاسیکی حد $(\hbar \to 0)$ میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں؛[۳۷] البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ (مساوات ۹.۶۵) تحفظ دیتا ہے: اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش شعاع ریز نہیں ہو گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی **نصف حیات**[۳۸] $(t_{1/2})$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بڑی تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحویل کرتے ہوں۔ نصف حیات $t_{1/2}$ اور (حال کے) "عرصہ حیات" τ کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں $n = 2$ حالات کے لیے عرصہ حیات (سیکنڈوں میں) تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو $\langle\psi_{100}|x|\psi_{200}\rangle$، $\langle\psi_{100}|y|\psi_{211}\rangle$، وغیرہ طرز کے قالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر تکملات صفر کے برابر ہیں، لہٰذا حساب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔

جواب: سوائے ψ_{200} جو لامتناہی ہے، باقی تمام کے لیے 1.60×10^{-9} سیکنڈ ہو گا۔

۹.۳.۳ قواعد انتخاب

خود باخود اخراجی شرح درج ذیل روپ کے قالبی ارکان معلوم کر کے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\langle\psi_b|\boldsymbol{r}|\psi_a\rangle$$

اگر آپ نے سوال ۹.۱۱ حل کیا ہو (اگر حل نہیں کیا، اسی وقت پہلے اس کو حل کریں!) تو آپ نے دیکھا ہو گا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں، اور کیا بہتر ہو گا اگر ہم پہلے سے جان سکیں کہ کون سے تکملات صفر دیں گے، تا کہ ہم اپنا وقت غیر ضروری تکملات حل کرنے میں ضائع نہ کریں۔ فرض کریں ہم ہائیڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں، جس کی ہیملٹنی کروی تشاکلی ہے۔ ایسی صورت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹائی اعداد n، ℓ، اور m سے ظاہر کر سکتے ہیں اور قالبی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n'\ell'm'|\boldsymbol{r}|n\ell m\rangle$$

زاویائی معیاری حرکت مقلبیت رشتے اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہرمشی پن مل کر اس مقدار پر طاقتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

---

[۳۷] درحقیقت، P کو زمینی حال سے زائد توانائی کی صورت میں لکھیں تو دونوں کلیات متماثل ہوں گے۔

[۳۸] half-life

انتخابی قواعد برائے m اور m':

ہم پہلے x ، y ، اور z کے ساتھ L_z کے مقالب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب ۴ میں حاصل کیا گیا (مساوات ۴.۱۲۲ دیکھیں)۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0 \tag{۹.۶۸}$$

ان میں تیسرے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 = \langle n'\ell'm'|[L_z, z]|n\ell m\rangle &= \langle n'\ell'm'|L_z z - zL_z|\, n\ell m\rangle \\ &= \langle n'\ell'm'|[(m'\hbar)z - z(m\hbar)]|n\ell m\rangle = (m'-m)\hbar\langle n'\ell'm'|z|n\ell m\rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$\text{یا} \quad m' = m \quad \text{یا پھر} \quad \langle n'\ell'm'|z|n\ell m\rangle = 0 \tag{۹.۶۹}$$

لہٰذا، ماسوائے $m' = m$ کی صورت میں، z کے قالبی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔

ساتھ ہی، x کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} \langle n'\ell'm'|[L_z, x]|n\ell m\rangle &= \langle n'\ell'm'|(L_z x - xL_z)|n\ell m\rangle \\ &= (m'-m)\hbar\langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle = i\hbar\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(m'-m)\langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle = i\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle \tag{۹.۷۰}$$

یوں، آپ y کے قالبی ارکان کو x کے مطابقتی قالبی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں، اور آپ کو کبھی بھی y کے قالبی ارکان کے حساب کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

اور آخر میں، y کے ساتھ L_z کا مقلب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle n'\ell'm'|[L_z, y]|n\ell m\rangle &= \langle n'\ell'm'|(L_z y - yL_z)|n\ell m\rangle \\ &= (m'-m)\hbar\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle = -i\hbar\langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(m'-m)\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle = -i\langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle \tag{۹.۷۱}$$

بالخصوص، مساوات ۹.۷۰ اور مساوات ۹.۷۱ کو ملا کر:

$$(m'-m)^2\langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle = i(m'-m)\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle = \langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle$$

لہٰذا،

$$(m'-m)^2=1 \quad \text{یا} \quad \langle n'\ell'm'|x|n\ell m\rangle=\langle n'\ell'm'|y|n\ell m\rangle=0 \quad \text{یا پھر} \tag{۹.۷۲}$$

ہو گا۔ مساوات ۹.۶۹ اور مساوات ۹.۷۲ سے ہمیں m کے **انتخابی قواعد:**[۳۹]

$$\text{تحویل صرف اس صورت ہو گی جب یہ ہو:} \quad \Delta m=1,0,-1 \tag{۹.۷۳}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے۔ آپ کو یاد ہو گا، نوریہ چکر 1 کا حامل ہے، لہٰذا اس کی m قیمت 1، 0، یا -1 ہو سکتی ہے؛[۴۰] زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے کر جاتا ہے، جوہر اتنا کچھ کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے ℓ اور ℓ':

آپ سے سوال ۹.۱۲ میں درج ذیل مقلبیت رشتہ اخذ کرنے کا کہا گیا۔

$$\left[L^2,[L^2,\boldsymbol{r}]\right]=2\hbar^2(\boldsymbol{r}L^2+L^2\boldsymbol{r}) \tag{۹.۷۴}$$

ہمیشہ کی طرح، ہم اس مقلب کو $\langle n'\ell'm'|$ اور $|n\ell m\rangle$ کے بیچ لپیٹ کر انتخابی قواعد اخذ کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\langle n'\ell'm'|[L^2,[L^2,\boldsymbol{r}]]|n\ell m\rangle &= 2\hbar^2\langle n'\ell'm'|(\boldsymbol{r}L^2+L^2\boldsymbol{r})|n\ell m\rangle\\
&= 2\hbar^4[\ell(\ell+1)+\ell'(\ell'+1)]\langle n'\ell'm'|\boldsymbol{r}|n\ell m\rangle\\
&= \langle n'\ell'm'|(L^2[L^2,\boldsymbol{r}]-[L^2,\boldsymbol{r}]L^2)|n\ell m\rangle\\
&= \hbar^2[\ell'(\ell'+1)-\ell(\ell+1)]\langle n'\ell'm'|[L^2,\boldsymbol{r}]|n\ell m\rangle\\
&= \hbar^2[\ell'(\ell'+1)-\ell(\ell+1)]\langle n'\ell'm'|(L^2\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}L^2)|n\ell m\rangle\\
&= \hbar^4[\ell'(\ell'+1)-\ell(\ell+1)]^2\langle n'\ell'm'|\boldsymbol{r}|n\ell m\rangle
\end{aligned} \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ:

$$\begin{aligned}
&\text{یا} \quad 2[\ell(\ell+1)+\ell'(\ell'+1)]=[\ell'(\ell'+1)-\ell(\ell+1)]^2\\
&\text{یا پھر} \quad \langle n'\ell'm'|\boldsymbol{r}|n\ell m\rangle=0
\end{aligned} \tag{۹.۷۶}$$

ہو گا، لیکن

$$[\ell'(\ell'+1)-\ell(\ell+1)]=(\ell'+\ell+1)(\ell'-\ell)$$

---

[۳۹] selection rules

[۴۰] جب قطبی محور حرکت کے رخ کے ساتھ ساتھ ہو، درمیانی قیمت نہیں پائی جاتی، اور اگر آپ غیر تابع نوری حالات کی تعداد میں دلچسپی رکھتے ہوں، تو جواب 2 نہ کہ 3 ہے۔ البتہ، اگر یہاں ضروری نہیں کہ نوریہ z محور کے رخ حرکت کرتا ہو، لہٰذا تینوں قیمتیں ممکن ہیں۔

اور

$$2[\ell(\ell+1)+\ell'(\ell'+1)] = (\ell'+\ell+1)^2 + (\ell'-\ell)^2 - 1$$

لکھے جا سکتے ہیں، لہٰذا مساوات ۹.۷۶ میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$[(\ell'+\ell+1)^2-1][(\ell'-\ell)^2-1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا (بایاں) جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے (ماسوائے اُس صورت جب $\ell' = \ell = 0$ ہو؛ اس "کمزوری" سے سوال ۹.۱۳ میں چھٹکارا حاصل کیا گیا ہے)، لہٰذا یہ شرط $\ell' = \ell \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں ℓ کے انتخابی قواعد:

$$\text{تحویل صرف اُس صورت ہو گا جب یہ ہو:}\quad \Delta\ell = \pm 1 \tag{۹.۷۸}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے، لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر 1 کا حامل ہے، لہٰذا زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد $\ell' = \ell + 1$ ، $\ell' = \ell$ ، یا $\ell' = \ell - 1$ کی اجازت دیں گے (برقی جفت قطبی اشعاع کے لیے درمیانی صورت نہیں پائی جاتی، اگرچہ زاویائی معیار حرکت کی بقا اس کی اجازت دیتی ہے)۔

یوں ظاہر ہے کہ خود باخود اخراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہو گی' ان میں سے کئی انتخابی قواعد کے تحت ممنوع ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے ابتدائی چار بوہر سطحوں کے لیے اجازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ $2S$ حال (ψ_{200}) اسی جگہ "پھنسا" ہے گا: چونکہ $\ell = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا، لہٰذا یہ تنزل پذیر نہیں ہو گا۔ اس کو **نازک مستحکم**[۴۱] حال کہتے ہیں، اور یقیناً اس کا عرصہ حیات ، مثلاً، $2P$ حالات (ψ_{211}, ψ_{210} اور ψ_{21-1}) سے، کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصادم کی بنا پر، یا (جنہیں گمراہ کن نام دیا گیا ہے) **ممنوعہ تحویلات**[۴۲] کی بنا پر (سوال ۹.۲۱)، یا متعدد نوری اخراج کی بنا پر، تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات ۹.۷۴ میں دی گئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

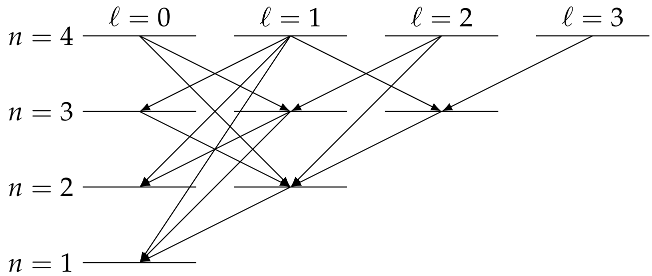
اس کے ساتھ $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = 0$ استعمال کرکے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2 z)$$

z سے $\boldsymbol{r}$ تک عمومیت دینا ایک آسان کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ $\ell' = \ell = 0$ کی صورت میں $\langle n'\ell'm'|\boldsymbol{r}|n\ell m\rangle = 0$ ہو گا۔ یوں مساوات ۹.۷۸ میں درپیش "کمزوری" ختم ہوتی ہے۔

[۴۱] metastable
[۴۲] forbidden transitions



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کا اجازتی تنزل۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے $n = 3$، $\ell = 0$، $m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک (برقی جفت قطبی) تحویلی تسلسل کے ذریعے پہنچتا ہے۔

ا. اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \to |n\ell m\rangle \to |n'\ell' m'\rangle \to \cdots \to |100\rangle$$

ب. اگر آپ کے پاس، اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ایک بوتل ہو، تب ہر راہ سے کتنا حصہ گزرے گا؟

ج. اس حال کا عرصہ حیات کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہو گا، لہٰذا ہر تسلسل کا صرف پہلا قدم، عرصہ حیات کے حصول میں کام آئے گا۔ متعدد تحویلی راستوں کی صورت میں تمام تحویلی شرحوں کا مجموعہ لینا ہو گا۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات ۹.۱ اور مساوات ۹.۲

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \quad \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} \tag{۹.۷۹}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں؛ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہو گی۔

$$H = H_0 + H'(t) \tag{۹.۸۰}$$

ا. مساوات ۹.۶ کو درج ذیل تعمیمی روپ دیں

$$\Psi(t) = \sum c_n(t)\psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۹.۸۱}$$

اور دکھائیں کہ

$$\dot{c}_m = -\frac{i}{\hbar}\sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \tag{۹.۸۲}$$

ہوگا، جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے۔

$$H'_{mn} \equiv \langle \psi_m \left| H' \right| \psi_n \rangle \tag{۹.۸۳}$$

ب. اگر نظام حال ψ_N سے آغاز کرے، تو دکھائیں کہ (اول رتبی نظریہ اضطراب میں)

$$c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{NN}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۸۴}$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t'/\hbar}\,\mathrm{d}t' \qquad (m \neq N) \tag{۹.۸۵}$$

ج. فرض کریں، (لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منقطع کرنے کے علاوہ) H' مستقل ہے۔ حال N سے حال M جہاں $N \neq M$ ہے، میں تحویل کے احتمال کو t کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$4\left|H'_{MN}\right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t/2\hbar]}{(E_N - E_M)^2} \tag{۹.۸۶}$$

د. فرض کریں H' وقت کا سائن نما تفاعل: $H' = V\cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$P_{N\to M} = \left|V_{MN}\right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2} \tag{۹.۸۷}$$

ہ. فرض کریں کہ متعدد سطحی نظام پر غیر اتفاقی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ ۹.۲.۳ کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ تحریک شدہ اخراج کی تحویلی شرح وہی دو سطحی نظام کا کلیہ (مساوات ۹.۴۷) دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اول تک سوال ۹.۱۵ کے جزو-ج اور جزو-د کے لیے تلاش کریں۔ معمول زنی شرط:

$$\sum_m \left|c_m(t)\right|^2 = 1 \tag{۹.۸۸}$$

کی تصدیق کرکے، تضاد اگر موجود ہو، پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں؛ کیا $\left|c_N(t)\right|^2$ یا $1-\sum_{m\neq N}\left|c_m(t)\right|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہو گا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ N ویں حال میں وقت $t=0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی ستہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہو گی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0)=V_0(T)=0$ ہو گا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دکھائیں کہ تفاعل موج کی حیط زاویائی دور تبدیل ہو گا لیکن تحویل نہیں ہو گی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیط، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اُس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل نہ کہ t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کمیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t=0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0<<E_1$ ہے۔

$$V(x)=\begin{cases}V_0 & 0\leq x\leq a/2 \text{ جب}\\ 0 & a/2<x\leq a \text{ جب}\\ \infty & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحریک شدہ اخراج، تحریکی انجذاب اور خود باخود اخراج دیکھ چکے ہیں۔ خود باخود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0\boldsymbol{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت γ ہولار مسر تعدد $\omega_0=\gamma B_0$ مثال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf}[\cos(\omega t)\boldsymbol{i}-\sin(\omega t)\boldsymbol{j}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B=B_{rf}\cos(\omega t)\boldsymbol{i}-B_{rf}\sin(\omega t)\boldsymbol{j}+B_0\boldsymbol{k} \tag{۹.۸۹}$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیملٹنی قالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$\dot{a} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a\right) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b\right) \tag{۹.۹۰}$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[a_0(\omega_0 - \omega) + b_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\} e^{i\omega t/2}$$
$$b(t) = \left\{b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[b_0(\omega - \omega_0) + a_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۱}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تفاعل تلاش کریں۔

جواب: $P(t) = \{\Omega^2/[(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\}\sin^2(\omega' t/2)$

(و) منحنی گمک

$$P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۲}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرک تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لہٰذا ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں نوریہ کا g جز وضربی ایک ٹسلا کے ساکن میدان اور ایک مائیکر وٹسلا حیطہ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں فرض کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$E(r,t) = E_0 \cos(k.r - \omega t) \tag{۹.۹۳}$$

اگر جوہر کا مرکز مبدا پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r << 1$ $(|k| = 2\pi/\lambda$, لہٰذا $k.r \sim r/\lambda << 1)$ ہو گا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اول درستگی۔

$$E(r,t) = E_0[\cos(\omega t) + (k.r)\sin(\omega t)] \tag{۹.۹۴}$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ اجازتی برقی جفت کتب تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی جا چکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تحویل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود با خود اخراجی شرح حاصل کریں اس کی تقطیب اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہو گا۔ جواب:

$$R_{b\to a} = \frac{q^2\omega^5}{\pi\epsilon_0\hbar c^5}|\langle a|(\boldsymbol{a}_{\text{n}}.r)(\boldsymbol{k}.r)|b\rangle|^2 \tag{۹.۹۵}$$

(ب) دکھائیں کہ ایک بُعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ تحویلات سطح n سے سطح $n-2$ میں ہو گی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت $\boldsymbol{a}_{\text{n}}$ اور $\boldsymbol{k}$ پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہو گا۔

$$R = \frac{\hbar q^2\omega^3 n(n-1)}{15\pi\epsilon_0 m^2c^5} \tag{۹.۹۶}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد نوریہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ اجازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کی نسبت تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی $2S \to 1S$ کی اجازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیے بھی درست ہو گا غالب تنزل دو نوریہ اخراج کی بنا پر ہو گا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دسواں حصہ ہو گا۔

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ n, ℓ سے n', ℓ' میں تحویل کے لیے ہائیڈروجن کا خود با خود اخراجی شرح مساوات ۹.۵۶ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{e^2\omega^3 I^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{\ell+1}{2\ell+1}, & \ell' = \ell+1 \text{ جب} \\ \frac{\ell}{2\ell-1}, & \ell' = \ell-1 \text{ جب} \end{cases} \tag{۹.۹۷}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{n\ell}(r)R_{n'\ell'}(r)\,\mathrm{d}r \tag{۹.۹۸}$$

جوہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m' = m+1, m,$ یا $m-1$ کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $\ell' = \ell + 1$

صورت کے لیے $\langle n\ell m|$ اور $|n'\ell'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر صفر قالبی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', \ell+1, m+1|r|\,n\ell m\rangle|^2 + |\langle n', \ell+1, m|r|\,n\ell m\rangle|^2 + |\langle n', \ell+1, m-1|r|\,n\ell m\rangle|^2$$

یہی کچھ $\ell' = \ell - 1$ کے لیے بھی کریں۔

جوابات

فرہنگ