کوانٹم میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر:

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0 \tag{۶.۱}$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

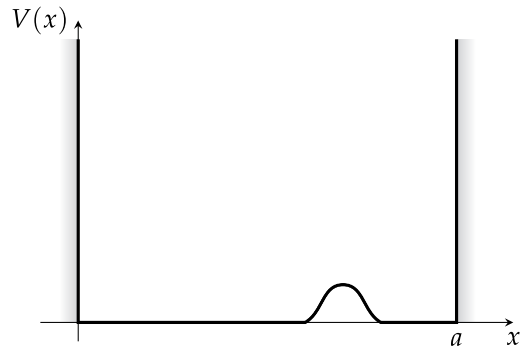
$$\langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm} \tag{۶.۲}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑا ڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے

$$H\psi_n = E_n \psi_n \tag{۶.۳}$$

تاہم ہماری خوش قسمتی کے علاوہ ایسی کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک حل کر پائیں۔ **نظریہ اضطراب**، غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر، قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے۔ ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ:

$$H = H^0 + \lambda H' \tag{۶.۴}$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

لکھ کر آغاز کرتے ہیں، جہاں H' اضطراب ہے (زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے)۔ ہم وقتی طور پر λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں؛ بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی، اور H اصل ہیملٹنی ہو گی۔ اگلے قدم میں، ہم ψ_n اور E_n کو λ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots \tag{۶.۵}$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots \tag{۶.۶}$$

یہاں n ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اول رتبی تصحیح** کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اول رتبی تصحیح** کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے؛ اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبی تصحیح ہوں گی، وغیرہ۔ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$(H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$
$$= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$

یا (λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$H^0\psi_n^0 + \lambda(H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0) + \lambda^2(H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1) + \cdots$$
$$= E_n^0\psi_n^0 + \lambda(E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0) + \lambda^2(E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0) + \cdots$$

کمتر رتبہ (λ^0) کی صورت میں اس سے[1] $H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے، جو نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱)۔ رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہو گا۔

$$H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0 \tag{۶.۷}$$

[1] ہمیشہ کی طرح، طاقتی تسلسل پھیلاو کی یکتائی ضمانت دیتی ہے کہ ایک جیسی طاقت کے عددی سر ایک جتنے ہوں گے۔

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1 = E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0 \tag{۶.۸}$$

وغیرہ۔ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا؛ اب اس کی کوئی ضرورت نہیں لہٰذا اس کی قیمت ایک، 1 ، کر دیں۔)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں (یعنی $^*(\psi_n^0)$ سے ضرب دے کر تکمل لیتے ہیں)۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

تاہم H^0 ہرمشی ہے لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle$$

ہو گا، جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا۔ مزید $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہو گا۔[۲]

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \tag{۶.۹}$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے؛ بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹائی میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے۔ یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت، توانائی کی اول رتبی تصحیح ہو گی۔

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کے غیر مضطرب تفاعلات موج (مساوات ۲.۲۸) درج ذیل ہیں۔

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی "تہہ" (زمین) کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں (شکل ۶.۲)۔ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں۔

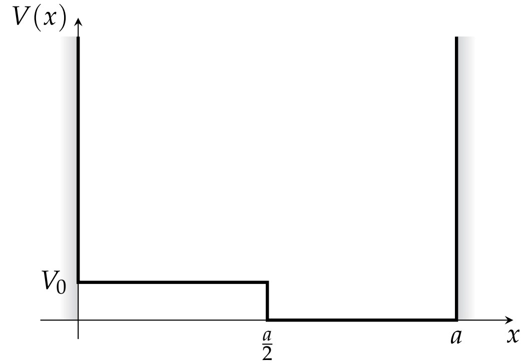
حل: یہاں $H' = V_0$ ہو گا لہٰذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہو گی۔

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|V_0|\psi_n^0\rangle = V_0\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گی؛ جی ہاں، تمام V_0 مقدار اوپر اٹھتی ہیں۔ یہاں حیرانگی کی بات صرف یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی

[۲] موجودہ سیاق و سباق میں $\langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle$ یا $\langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle$ (جہاں اضافی انتصابی لکیر شامل کی گئی ہے) لکھنے میں کوئی فرق نہیں، چونکہ ہم حال کو تفاعل موج کے لحاظ سے "نام" دیتے ہیں۔ لیکن موخر الذکر علامتی اظہار زیادہ بہتر ہے، چونکہ یہ ہمیں اس روایت سے آزاد کرتا ہے۔

شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی۔[۳] اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت (شکل ۶.۳) میں درج ذیل ہو گا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے۔ یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں، تاہم اول رتبی تخمین کے نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

[۳] یہاں کوئی ی چیز لامتناہی چوکور کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے، لہٰذا ایہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہو گا۔

مساوات ۶.۹ ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے؛ تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم مساوات ۶.۷ کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے۔

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \tag{۶.۱۰}$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے، لہٰذا یہ ψ_n^1 کی غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہٰذا (کسی بھی تفاعل کی طرح) ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ:

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۱}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ψ_n^1 مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتے ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha\psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے، لہٰذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں؛ ایسا ہی کرتے ہوئے مساوات ۶.۱۱ کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا۔ عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۶.۱۰ میں مساوات ۶.۱۱ پر کرتے ہوئے، اور یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب مساوات شروڈنگر (مساوات ۶.۱) کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\psi_m^0 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\langle\psi_l^0|\psi_m^0\rangle = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle + E_n^1\langle\psi_l^0|\psi_n^0\rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہو گا اور ہمیں دوبارہ مساوات ۶.۹ ملتی ہے؛ اگر $l \neq n$ ہو تو

$$(E_l^0 - E_n^0)c_l^{(n)} = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۲}$$

ہو گا، لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{(E_n^0 - E_m^0)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۳}$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انحطاطی ہو، نسب نما کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $n = m$ نہیں ہو گا)۔ ہاں اگر دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک جتنی ہوں (مساوات ۶.۱۲ کے نسب نما میں صفر پایا جائے گا) تب نسب نما ہمیں مصیبت میں ڈالتا ہے؛ ایسی صورت میں **انحطاطی نظریہ اضطراب**[۴] کی ضرورت پیش آئے گی، جس پر حصہ ۶.۲ میں غور کیا جائے گا۔

یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے۔ توانائی کی اول رتبی تصحیح، E_n^1، مساوات ۶.۹ دیتی ہے، اور تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح، ψ_n^1، مساوات ۶.۱۳ دیتی ہے۔ میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی انتہائی درست قیمتیں دیتا ہے (یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہو گی)، اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں۔

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں δ تفاعلی موڑا:

$$H' = \alpha\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ڈالتے ہیں، جہاں α ایک مستقل ہے۔

ا. اجازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ بتائیں جفت n کی صورت میں توانائیاں کیوں مضطرب نہیں۔

ب. زمینی حال کی تصحیح، ψ_1^1، کی اتساع (مساوات ۶.۱۳) کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے۔ اب فرض کریں مقیاس لچک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے: $k \to (1 + \epsilon)k$، (جس سے اسپرنگ کی لچک کم ہو گی)۔

ا. نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک قیمتیں حاصل کریں (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں۔

ب. اب مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں۔ یہاں H' کیا ہو گا؟ اپنے نتیجے کا جزو-ا کے ساتھ موازنہ کریں۔ اشارہ: یہاں کسی نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نہ ضرورت اور نہ اجازت ہے۔

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں۔ یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

(جہاں V_0 ایک مستقل جس کا بعد توانائی ہے اور a کنویں کی چوڑائی ہے) کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں۔

---

[۴] degenerate perturbation theory

ا. پہلے قدم میں، ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے، زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں۔

ب. زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کی توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمین اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں۔

۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

اسی طرح بڑھتے ہوئے، ہم ψ_n^0 اور دور تبی مساوات (مساوات ۶.۸) کا اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^2\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کے ہرمشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں:

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^2\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^2\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^2\rangle$$

لہٰذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ ساتھ ہی $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ ہے لہٰذا E_n^2 کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle - E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle \tag{۶.۱۴}$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|\psi_m^0\rangle = 0$$

ہو گا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^1\rangle = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\langle\psi_n^0|H'|\psi_m^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۵}$$

ہو گا۔ یہ دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل موج (ψ_n^2) کی دوم رتبی تصحیح، توانائی کی سوم رتبی تصحیح، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں، لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات ۶.۱۵ تک استعمال کرنا سودمند ہو گا۔[5]

سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۱ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۲ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجے کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چالو کرتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دوم رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۳.۳۳ دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں مساوات شروڈنگر کو بلاواسطہ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہیں۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں؛ یعنی، دو (یا دو سے زیادہ) منفرد حالات (ψ_a^0 اور ψ_b^0) کی توانائیاں ایک جیسی ہوں، تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا، چونکہ $c_a^{(b)}$ (مساوات ۶.۱۲) اور E_a^2 (مساوات ۶.۱۵) بے قابو بڑھتے ہیں (ماسوائے اس صورت میں جب شمار کنندہ صفر ہو: $\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = 0$؛ اس پوشیدہ صورت کو ہم بعد میں استعمال کریں گے)۔ یوں انحطاطی صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہو گا۔

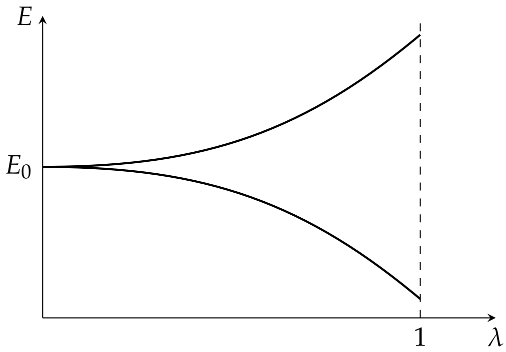
۶.۲.۱ دوہرا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \tag{۶.۱۶}$$

[5] مختصر انداز لکھائی میں $V_{mn} \equiv \langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle$، $\Delta_{mn} \equiv E_m^0 - E_n^0$ اور n ویں توانائی کی پہلی تین تصحیح درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n^1 = V_{nn}, \quad E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}}, \quad E_n^3 = \sum_{l,m\neq n}\frac{V_{nl}V_{lm}V_{mn}}{\Delta_{nl}\Delta_{nm}} - V_{nn}\sum_{m\neq n}\frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}^2}$$



شکل ۶.۴: انحطاط کا خاتمہ بذریعہ اضطراب۔

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \tag{۶.۱۷}$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا اور اس کی امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہو گی۔

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0 \tag{۶.۱۸}$$

عام طور پر اضطراب (H') انحطاط کو "توڑے" (یا "منسوخ" کرے) گا: جیسے جیسے ہم λ کی قیمت (0 سے 1 کی طرف) بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی (شکل ۶.۴)۔ مخالف رخ چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند (یعنی صفر) کر دیں تب "بالائی" حال کا تخفیف، ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں جبکہ "زیریں" حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا، تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے کہ یہ "**موزوں**"[۶] خطی جوڑ کیا ہوں گے۔ چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے، لہٰذا ہم اول رتبی توانائیوں (مساوات ۶.۹) کا حساب نہیں کر سکتے۔

اسی لیے، ہم ان "موزوں" غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ (مساوات ۶.۱۷) میں لکھتے ہیں، جہاں α اور β قابل تغیر ہوں گے۔ ہم مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi \tag{۶.۱۹}$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \cdots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda\psi^1 + \lambda^2\psi^2 + \cdots \tag{۶.۲۰}$$

---

[۶] good linear combinations

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں۔ انہیں مساوات ۶.۱۹ میں ڈال کر (ہمیشہ کی طرح) λ کی ایک جیسی طاقتیں اکٹھی کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \cdots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \cdots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ (مساوات ۶.۱۸) کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے، جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0 \tag{۶.۲۱}$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle\psi_a^0|H^0\psi^1\rangle + \langle\psi_a^0|H'\psi^0\rangle = E^0\langle\psi_a^0|\psi^1\rangle + E^1\langle\psi_a^0|\psi^0\rangle$$

چونکہ H^0 ہرمشی ہے، لہٰذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ مساوات ۶.۱۷ کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط (مساوات ۶.۱۶) کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha\langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle + \beta\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \tag{۶.۲۲}$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ij} \equiv \langle\psi_i^0|H'|\psi_j^0\rangle, \quad (i, j = a, b) \tag{۶.۲۳}$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا۔

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \tag{۶.۲۴}$$

دھیان رہے کہ (اصولاً) ہمیں تمام W معلوم ہیں، چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان قالب ہیں۔ مساوات ۶.۲۴ کو W_{ab} سے ضرب دے کر، مساوات ۶.۲۲ استعمال کرتے ہوئے βW_{ab} کو خارج کر کے، درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\alpha[W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \tag{۶.۲۵}$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات ۶.۲۵ ہمیں E^1 کی مساوات دیگی۔

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \tag{۶.۲۶}$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور (مساوات ۶.۲۳ سے) جانتے ہوئے کہ $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہو گا، ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\,\right] \tag{۶.۲۷}$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے، جہاں دو جذر دو مضطرب توانائیاں ہیں۔

لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہو گا؟ ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہو گا، لہٰذا مساوات ۶.۲۲ کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات ۶.۲۴ کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہو گا۔ یہ درحقیقت عمومی نتیجہ (مساوات ۶.۲۷) میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے (مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہو گا)۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل ہوتے (مساوات ۶.۹)۔ یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے: حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے "موزوں" خطی جوڑ تھے۔ کیا اچھا ہوتا، اگر ہم آغاز سے ہی "موزوں" حالات جان پاتے؛ تب ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے۔ حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں۔

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہرمشی عامل ہے، جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے۔ اگر (H^0 کے انحطاطی امتیازی تفاعلات) ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں، جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں،

$$A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0 \quad \text{اور} \quad \mu \neq \nu \quad \text{ہو}$$

تب $W_{ab} = 0$ ہو گا (لہٰذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں قابل استعمال، "موزوں" حالات ہوں گے)۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے کہ $[A, H'] = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\langle \psi_a^0 | [A, H'] \psi_b^0 \rangle &= 0 \\
&= \langle \psi_a^0 | A H' \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A \psi_b^0 \rangle \\
&= \langle A\psi_a^0 | H' \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' \nu \psi_b^0 \rangle \\
&= (\mu - \nu)\langle \psi_a^0 | H' \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab}
\end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہٰذا $W_{ab} = 0$ ہو گا۔

سبق: اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو، ایسا ہرمشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو؛ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائیں۔ ایسے عامل کی تلاش میں ناکامی کی صورت میں آپ کو مساوات ۶.۲۷ استعمال کرنا ہو گا، جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے۔

□

سوال ۶.۶: دو "موزوں" غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^{0} = \alpha_{\pm}\psi_{a}^{0} + \beta_{\pm}\psi_{b}^{0}$$

لیں، جہاں $\alpha_{\pm}$ اور $\beta_{\pm}$ کو (معمول زنی تک) مساوات ۶.۲۲ (یا مساوات ۶.۲۴) تعین کرتا ہے۔ صریحاً درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\psi_{\pm}^{0}$ عمودی ہیں: $(\langle\psi_{+}^{0}|\psi_{-}^{0}\rangle = 0)$؛

ب. $\langle\psi_{+}^{0}|H'|\psi_{-}^{0}\rangle = 0$؛

ج. $\langle\psi_{\pm}^{0}|H'|\psi_{\pm}^{0}\rangle = E_{\pm}^{1}$ جہاں $E_{\pm}^{1}$ کی قیمت مساوات ۶.۲۷ دیتی ہے۔

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ، جس کی کمیت m ہے، ایک بند یک بعدی تار، جس کی لمبائی L ہے، پر آزادی سے حرکت کرتا ہے (سوال ۲.۴۶)۔

ا. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{2\pi i n x/L}, \qquad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $(n = 0)$ کے علاوہ تمام حالات دوہرے انحطاطی ہیں۔

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہے۔ (یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں ایک ٹویا پیدا کرتا ہے، گویا تار کو مروڑ کر پکڑ بنایا گیا ہو۔) مساوات ۶.۲۷ استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمل کی حدوں کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm\infty$ رکھیں۔

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کے "موزوں" خطی جوڑ کیا ہوں گے؟ دکھائے کہ ان حالات کو لے کر، مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے، اول رتبی تصحیح حاصل ہو گی۔

د. ایسا ہرمشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو، اور دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہیں جنہیں آپ نے جزو-ج میں استعمال کیا۔

۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط

گزشتہ حصہ میں انحطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا، تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶.۲۲ اور مساوات ۶.۲۴ کو ہم قالبی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{۶.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ E^1 W ، قالب کے امتیازی اقدار ہیں۔ مساوات ۶.۲۶ اس قالب کی امتیازی مساوات ہے، اور غیر مضطرب حالات کے "موزوں" خطی جوڑ $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم n پڑتا انحطاط کی صورت میں $n \times n$ قالب:

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle \tag{۶.۲۹}$$

کے امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ الجبرا کی زبان میں "موزوں" غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسی اساس تیار کرنا ہے جو قالب $\mathbf{W}$ کو وتری بناتی ہو۔ یہاں بھی اگر آپ ایسا عامل A تلاش کر سکیں، جو H' کا مقلوبی ہو، اور A اور H' کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر سکیں تو قالب W خود بخود وتری ہو گا، لہٰذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی۔[۷] (اگر آپ کو میری دو پڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تو سوال ۶.۱۰ حل کر کے اپنی تسلی کر لیں۔)

مثال ۶.۲: تین ابعادی لامتناہی کعبی کنویں (سوال ۴.۲):

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۰}$$

پر غور کریں۔ ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$\psi^0_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right) \tag{۶.۳۱}$$

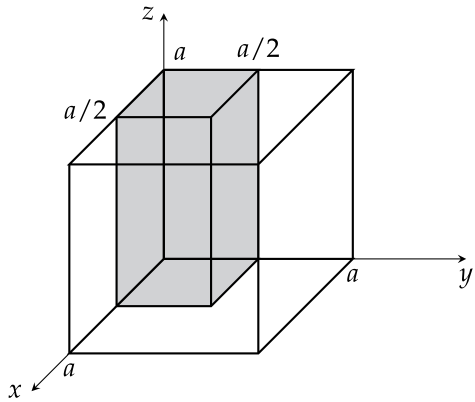
جہاں n_x ، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں۔ ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں۔

$$E^0_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{۶.۳۲}$$

دھیان رہے کہ زمینی حال (ψ_{111}) غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے۔

$$E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \tag{۶.۳۳}$$

[۷] انحطاطی نظریہ اضطراب، در حقیقت، ہیملٹنی کے انحطاطی حصہ کو وتری بنانے کے مترادف ہے۔ قوالب کا وتری بنانا (اور مقلوبی قوالب کا بیک وقت وتری بنانا) ضمیمہ کے حصہ ا.۵ میں سکھایا گیا ہے۔



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

تاہم پہلا ہیجان حال (تہرا) انحطاطی ہے:

$$\psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211} \tag{۶.۳۴}$$

اور ان تینوں کی توانائی:

$$E_1^0 \equiv 3\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} \tag{۶.۳۵}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۶}$$

جو ڈبے کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات ۶.۹ دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle\psi_{111}|H'|\psi_{111}\rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4}V_0 \end{aligned} \tag{۶.۳۷}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔

اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہو گی۔ پہلے قدم میں ہم قالب $\mathbf{W}$ تیار کرتے ہیں۔ اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں (سوائے اس بات کے، کہ ان میں

سے ایک سائن کا دلیل دگنا ہے)؛ آپ درج ذیل کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4}V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہیں۔

$$W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z$$

تاہم z تکمل صفر ہوگا (جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا)، لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z = \frac{16}{9\pi^2}V_0$$

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے۔

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \tag{۶.۳۸}$$

قالب $\mathbf{W}$ بلکہ $4\,\mathbf{W}\,/\,V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات (ضمیمہ ا.۵ کے تحت):

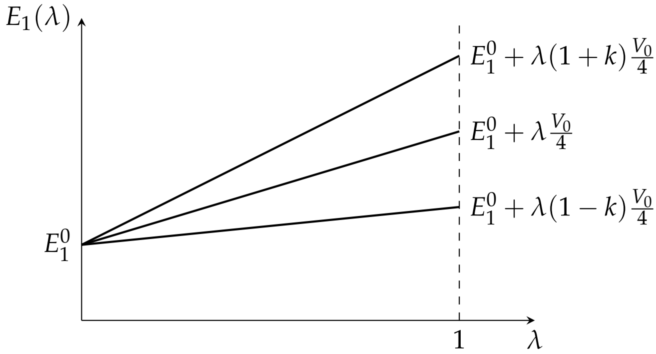
$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگی۔

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1+\kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1-\kappa \approx 0.2795$$



شکل ۶.۲: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہو گا

$$E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases} \tag{۶.۳۹}$$

جہاں E_1^0 (مشترکہ) غیر مضطرب توانائی (مساوات ۶.۳۵) ہے۔ یہ اضطراب، توانائی E_1^0 کو تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے (شکل ۶.۲ دیکھیں)۔ اگر ہم بھول کر اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) تینوں حالات کے لئے ایک جتنی اور $V_0/4$ کے برابر ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے۔

مزید "موزوں" غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہوں گے

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c \tag{۶.۴۰}$$

جہاں عددی سر (α، β اور γ) قالب $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1$، $\beta = \gamma = 0$؛ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0$، $\beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$

حاصل ہوتے ہیں۔ (میں نے ان کی قیمتیں معمول شدہ کی ہیں۔) یوں "موزوں" حالات درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{۶.۴۱}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں مساوات 30.6 میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تفاعلی موڑا:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4)\delta(y - a/2)\delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انحطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں فرض کریں قالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے اور ϵ کوئی چھوٹا عدد $(\epsilon \ll 1)$ ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی $(\epsilon = 0)$ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. قالب $\mathbf{H}$ کے بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا جزو-ا کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح قالب W کے امتیازی اقدار ہوں گے میں نے دعویٰ کیا کہ یہ $n = 2$ صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی

قدموں پر چل کر درج ذیل سے آغاز کرکے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات 22.6 کے مماثل کا مفہوم قالب $\mathbf{W}$ کی امتیازی قدر مساوات لیا جا سکتا ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۶.۴۲}$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولمب مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے جو در حقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر و مدار ربط، کی بنا پر پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت α^2 گنا کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \tag{۶.۴۳}$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی α گنا چھوٹا لیمب انتقال ہے جو بھر کی میدان کی کوانٹازنی سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیم ی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی mc^2 کی صورت میں لکھیں

ب. ϵ_0 ، e ، $\hbar$ اور c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ خالص بے بعدی بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی مستقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نوبیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{۶.۴۴}$$

جس میں باضابطہ متبادل $p \rightarrow (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہو گا

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{۶.۴۵}$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \tag{۶.۴۶}$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال غرض بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جا سکتا ہے ہمیں سمتی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۶.۴۷}$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہو گا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1-(v/c)^2]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

ہو گا جس کی بنا پر درج ذیل ہو گا

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \tag{۶.۴۸}$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} T &= mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1\right] = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{mc}\right)^4 \cdots - 1\right] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots . \end{aligned} \tag{۶.۴۹}$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2} \tag{۶.۵۰}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہو گی مساوات 9.6

$$E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\psi | p^2\psi \rangle \tag{۶.۵۱}$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شروڈنگر مساوات کہتی ہے

$$p^2\psi = 2m(E-V)\psi \tag{۶.۵۲}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle (E-V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2}[E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle] \tag{۶.۵۳}$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\left[E_n^2 + 2E_n\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle\right] \tag{۶.۵۴}$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال ψ_{nlm} مساوات 89.4 میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a} \tag{۶.۵۵}$$

جہاں a رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا اتنا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3a^2} \tag{۶.۵۶}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\left[E_n^2 + 2E_n\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{n^2a} + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(l+1/2)n^3a^2}\right]$$

یا مساوات 72.4 استعمال کرتے ہوئے a کو خارج کر کے باقی کو E_n مساوات 70.4 کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big[\frac{4n}{l+1/2} - 3\Big] \tag{۶.۵۷}$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2\times 10^{-5}$ گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات 51.6 یہاں اضطراب کروی تشاکلی ہے لہٰذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہو گا مزید کسی E_n کے n^2 حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی اقدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں n ، l اور m موزوں کوانٹم اعداد ہیں لہٰذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست تھا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل سوال 40.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات 55.6 ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال 43.4 میں حال ψ_{321} کے لیے r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر سا کام)، $s = -1$ مساوات 55.6 $s = -2$ مساوات 56.6 اور $s = -3$ مساوات 64.6 کے لیے کریں $s = -7$ کی صورت میں کیا ہو گا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: یک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال 5.2 میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہرمشی ہے لیکن p^4 ہرمشی نہیں ہے ان حالات کے لئے ψ متغیرات θ اور ϕ کا غیر تابع ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big)$$

مساوات 13.4 تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

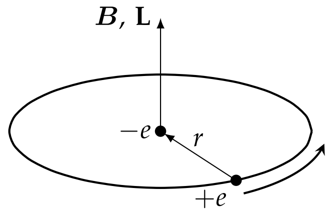
$$\langle f|p^2 g\rangle = -4\pi\hbar^2\Big(r^2 f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - r^2 g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\Big)\Big|_0^\infty + \langle p^2 f|g\rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہو گا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}}e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں اور دکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہو گا

$$\langle\psi_{n00}|p^4\psi_{m00}\rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4}\frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4\psi_{n00}|\psi_{m00}\rangle$$



شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

۶.۳.۲ چکر ومدار ربط

مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوکٹ میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر μ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیملٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہو گی

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{۶.۵۸}$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر $\boldsymbol{\mu}$ درکار ہو گا

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو بایوٹ وسیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

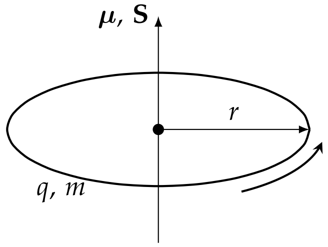
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے جہاں e پروٹان کے بار کو اور T دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوکٹ میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ ہو گا مزید $\boldsymbol{B}$ اور $\mathbf{L}$ دونوں کا رخ ایک جیسا ہو گا شکل ۶.۷ میں اوپر جانب لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\,\mathbf{L} \tag{۶.۵۹}$$

جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب ممکن مقناطیسی مثبت ہو گا جس کا سامنا ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

اخذ کریں ایک ایسا بار q جس کی لپائی رداس r کے چھلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلا کی کمیت m ہو جمودی معیار اثر mr^2 ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہو گا

$$S = \frac{2\pi m r^2}{T}$$

اس تشکیل کے لیے ظاہر ہے کہ مسکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہو گا دھیان رہے کہ یہ r اور T کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کمیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تا کہ بار اور کمیت کا نسبت یکساں ہو ہر چھلے کا اور لہٰذا پوری جسم کا مسکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہو گا مزید $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کے رخ ایک جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہونگے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right)\mathbf{S}$$

یہ خالصتاً کلاسیکی حساب ہے درحقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m}\mathbf{S} \tag{۶.۶۰}$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے

ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$$

اس حساب میں ایک فریب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہٰذا یہ اسراع پذیر ہوگا اس حساب میں مجرد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے قبول کیا جا سکتا ہے جو حساب میں جزو ضربی $1/2$ شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \tag{۶.۶۱}$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ مسکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت جزو ضربی جو اتفاقاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبعی طور پر یہ الیکٹران کے لحاتی ساکن چھوکٹ میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت مروڑ کی بدولت ہے۔

اب کوانٹم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں L اور S کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہٰذا چکر اور دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ H'_{so} مقلوب ہوگا L^2، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L}+\mathbf{S} \tag{۶.۶۲}$$

لہٰذا یہ مقداریں بقائی ی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ L^2، S^2، J^2، اور J_z کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (\mathbf{L}+\mathbf{S})\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \tag{۶.۶۳}$$

ہوگا لہٰذا $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6(ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$\langle 1/r^3\rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \tag{۶.۶۴}$$

لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{so} = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{(\hbar^2/2)[j(j+1)-l(l+1)-3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہیں

$$E^1_{so} = \frac{(E_n)^2}{mc^2}\left\{\frac{[j(j+1)-l(l+1)-3/4]}{l(l+1/2)(l+1)}\right\} \tag{۶.۶۵}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چکر و دائری ربط ایک جتنا رتبہ (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کرکے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

$$E^1_{fs} = \frac{(E_n)^2}{2mc^2}\left(3 - \frac{4n}{j+1/2}\right) \tag{۶.۶۶}$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ چھوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2}\right)\right] \tag{۶.۶۷}$$

مہین ساخت l میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک n کیلئے l کی مختلف اجازتی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہونگی تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری و چکر زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی اقدار m_l اور m_s اب موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کوانٹم اعداد n، l، s، j، اور m_j ہونگے سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{L}]$، (ب) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{S}]$، (ج) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \mathbf{J}]$، (د) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, L^2]$، (ہ) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, S^2]$، (و) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, J^2]$؛ اشارہ: $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ ہے مثبت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے موئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو قریب قریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہو گی اور ان کے بیچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے eV میں E^1_{fs} تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے

$n=2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں نوریہ کی صورت میں توانائی کا اخراج $(E_3-E_2)+\Delta E$ ہو گا جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت ΔE کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں نوریہ تعدد میں تبدیل کر کے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بیچ فاصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ نہیں ہو گا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ ہو گا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) (???) $j=(???)$ سے $j=(???)$ 2، $j=(???)$ سے $j=(???)$، ... ہونگے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بیچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بیچ فاصلہ ??? Hz ہے ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر ڈیراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj}=mc^2\Big\{\Big[1+\Big(\frac{\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}}\Big)^2\Big]^{-1/2}-1\Big\}$$

یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $\alpha \ll 1$ ہے اس کو a^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

۶.۴ زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_{ext}$ میں رکھنے سے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زیمان اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہو گا

$$H'_z=-(\mu_1+\mu_2)\cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۶۸}$$

جہاں

$$\mu_s=-\frac{e}{m}\,\mathbf{S} \tag{۶.۶۹}$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1=-\frac{e}{2m}\,\mathbf{L} \tag{۶.۷۰}$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہو گا

$$H'z=\frac{e}{2m}(\mathbf{L}+2\,\mathbf{S})\cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۷۱}$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر $B_{int} \ll B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور H' کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے جبکہ $B_{int} \gg B_{ext}$ کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زیمان میدان کتنا ہوگا

۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر $B_{int} \gg B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہوگی اور موزوں کوانٹم اعداد n ، l ، j ، اور m_j ہونگے تاہم چکر و مدار ربط کی موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے لہٰذا m_l اور m_s موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے رتبہ اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زیمان تصحیح درج ذیل ہوگی

$$H_Z^1 = \langle nljm_j | H_Z' | nljm_j \rangle = \frac{e}{2m} \boldsymbol{B}_e xt \cdot \langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \rangle \tag{۶.۷۲}$$

اب $\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$ ہوگا بدقسمتی سے ہمیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقہ سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)۔ اس مقررہ سمتیہ کے گرد $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص $\mathbf{J}$ پر $\mathbf{S}$ کی قائمہ تظلیل $\mathbf{S}$ کی وقتی اوسط قیمت ہوگا

$$\mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{j^2} \mathbf{J} \tag{۶.۷۳}$$

لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$ ہے لہٰذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\,\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ ہوگا لہٰذا

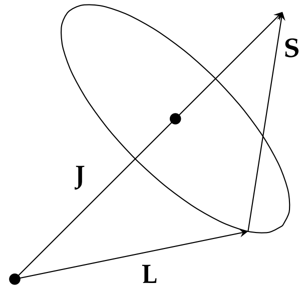
$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \tag{۶.۷۴}$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \rangle = \langle \Big(1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{J^2}\Big) \mathbf{J} \rangle = \Big[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\Big] \langle \mathbf{J} \rangle \tag{۶.۷۵}$$

چوکور قوسین میں بند رکن کو لنڈے g جزو ضرب کہتے ہیں جس کو g_j سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور z کو $\boldsymbol{B}_{ext}$ کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہوگا

$$E_Z^1 = \mu_B g_J B_{ext} m_j \tag{۶.۷۶}$$



شکل ۶.۹: چکر و مدار ارتباط کی عدم موجودگی میں **L** اور **S** علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت **J** کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔

جہاں

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5}\,\text{eV/T} \tag{۶.۷۷}$$

بوہر مقناطیسہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زیمان کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال $n = 1$، $l = 0$، $j = 1/2$ لہٰذا $g_j = 2$ دو سطحوں میں بٹ جائے گا

$$-13.6\,\text{eV}(1+\alpha^2/4) \pm \mu_B B_{ext} \tag{۶.۷۸}$$

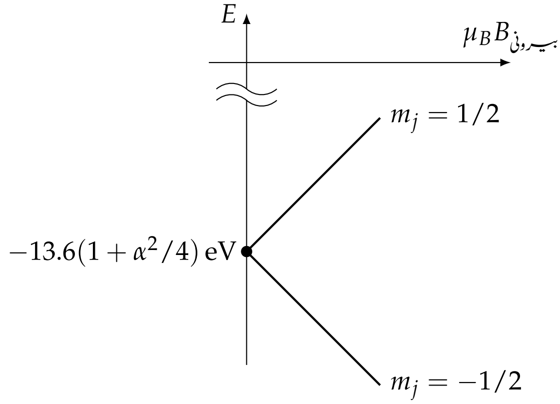
جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہو گی ان توانائیوں کو B_{ext} کے تفاعل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں کمزور میدان زیمان بٹنے کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں B_{ext} بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر

اگر $B_{ext} \gg B_{int}$ ہو تب زیمان اثر غالب ہو گا میدان B_{ext} کو z محور پر رکھ کر موزوں کوانٹم اعداد n، l، m_l، اور m_s ہونگے جبکہ j اور m_j نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت مروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہو گا جبکہ L_z اور S_z ہونگے زیمان ہیملٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{ext}(L_z + 2S_z)$$



شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی کمزور میدانی زیمان بٹوارا؛ بالائی لکیر $(m_j = 1/2)$ کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر $(m_j = -1/2)$ کی ڈھلوان -1 ہے۔

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہو گی

$$E_{nmlms} = -\frac{13.6\,\text{electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext}(m_l + 2m_s) \tag{۶.۷۹}$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہو گا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہو گی

$$E^1_{fs} = \langle nlm_lm_s|(H_r' + H_s'o)|\rangle nlm_lm_s\rangle \tag{۶.۸۰}$$

اضافیتی حصہ وہی ہو گا جو پہلے تھا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہو گا

$$\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\rangle = \langle S_x\rangle\langle L_x\rangle + \langle S_y\rangle\langle L_y\rangle + \langle S_z\rangle\langle L_y\rangle = \hbar^2 m_l m_s \tag{۶.۸۱}$$

دھیان رہے کہ S_z اور L_z کہ امتیازی تفاعلات کے لیے $\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = \langle L_x\rangle = \langle Ly\rangle = 0$ ہو گا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{fs} = \frac{13.6\,\text{eV}}{n^3}\alpha^2\Big\{\frac{3}{4n} - \Big[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)}\Big]\Big\} \tag{۶.۸۲}$$

چوکور قوسین کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہو گا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زیمان حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کرکے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 181.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_jm_s\rangle$ پر غور کریں طاقتور میدان زیمان بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو بوہر توانائی l^2 کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B_{ext}$ کے براہ راست متناسب زیمان حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہوگی اور ان کے انحطاط کیا ہونگے

سوال ۶.۲۴: اگر $0 = l$ ہو تب $s = j$ ، $m_s = m_j$ ہوگا لہذا کمزور اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے E_Z^1 اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کرکے میدان کی طاقت سے قطع نظر $0 = l$ کیلئے زیمان اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کے درمیانی چوکور قوسین رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نہ H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہوگا لہذا ہمیں دونوں کو ایک نظر سے دیکھ کر بوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہوگا

$$H' = H'_Z + H'_{fs} \tag{۶.۸۳}$$

$n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف l ، j ، اور m_j بیان کرتی ہے کو انحطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیبش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہوگا

$$l=0\begin{cases}\psi_1 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

$$l=1\begin{cases}\psi_3 \equiv |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفر قالبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے وتر پر پائے جاتے ہیں

H'_Z کے حپار غیسر وتری ارکان پائے حباتے ہیں اور $\mathbf{W}$ $-$ کا مکمسل وتالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہو گا

$$\begin{array}{cccc}
5\gamma-\beta 0 & 00 & 00 & 00 \\
05\gamma+\beta & 00 & 00 & 00 \\
00 & \gamma-2\beta 0 & 00 & 00 \\
00 & 0\gamma+2\beta & 00 & 00 \\
00 & 00 & \gamma-\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma-\frac{1}{3}\beta & 00 \\
00 & 00 & 00 & \gamma+\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\
00 & 00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma+\frac{1}{3}\beta
\end{array}$$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6\,\text{eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B \boldsymbol{B}_{ext}$$

ابتدائی حپار امتیازی اقدار پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں اب صرف دو 2×2 ڈبوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے ان مسیں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

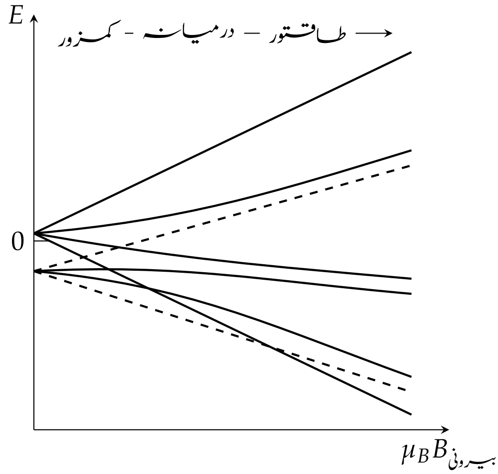
جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \tag{۶.۸۴}$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی لیکن اسس مسیں β کی عسلامت الٹ ہو گی ان آٹھ توانائیوں کو حبدول 2.6 مسیں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۶.۱۱ مسیں B_{ext} کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفسر میدان حد $\beta = 0$ مسیں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمسزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت مسیں یہ سوال 21.6 مسیں حاصل نتائج دیتی ہے طاقتور میدان $\gamma \ll \beta$ کی صورت مسیں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہوں گے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 مسیں پیشگوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طاقتور میدانوں مسیں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۶.۲۵: وتالبی ارکان H'_Z اور H'_{fs} دریافت کر کے $2 = n$ کے لئے مستن مسیں دیا گیا وتالب W مسرتب کریں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $3 = n$ حسالات کے لیے کمسزور، طاقتور اور درمیانی میدان خطوں کے لیے زیمان اثر کا تجزیہ کریں حبدول 2.6 کی طسرز پر توانائیوں کا حبدول تیار کر کے انہیں بیسرونی میدان کے تفاعسل کے طور پر ترسیم کریں جیسا شکل 12.6 مسیں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیانے میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں مسیں تخفیف ہو کر درست قیمتیں دیتی ہے



شکل ۶.۱۱: کمزور، درمیانہ اور طاقتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیمان بٹوارا۔

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت کتب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا پر اس کا جفت کتب معیار اثر الیکٹران کے جفت کتب معیار اثر سے بہت کم ہو گا مساوات 60.6

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p}\,\mathbf{S}_p, \quad \boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e}\,\mathbf{S}_e \tag{۶.۸۵}$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہٰذا اس کا ممکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی ممکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہو گا جس کی بنا پر صریحی g جزب ضربی g_p لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت کتب μ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۶}$$

یوں پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا مساوات 58.6

$$H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\frac{[3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\,\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\,\delta^3((\boldsymbol{r})) \tag{۶.۸۷}$$

نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف مساوات 6.9 اس طرح بھی ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت ہو گی

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \boldsymbol{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \boldsymbol{a}_r - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e)}{r^3}\right\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e\rangle |\psi(0)|^2 \tag{۶.۸۸}$$

زمینی حال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو تفاعل موج کروی تشاکلی ہو گا لہٰذا اول توقعاتی قیمت صفر ہو گی سوال 6.27 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 4.80 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہو گا لہٰذا زمینی حال میں درج ذیل ہو گا

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3}\langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e\rangle \tag{۶.۸۹}$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کو چکر چکر ربط کہتے ہیں جیسا چکر مدار ربط میں $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ پایا جاتا ہے چکر چکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چکر زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل چکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p \tag{۶.۹۰}$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2) \tag{۶.۹۱}$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چکر ایک بٹا دو ہے لہٰذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہو گا سہ تا حال تمام چکر متوازی میں کل چکر ایک ہو گا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہو گا یکتا حال میں کل چکر صفر لہٰذا $S^2 = 0$ ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

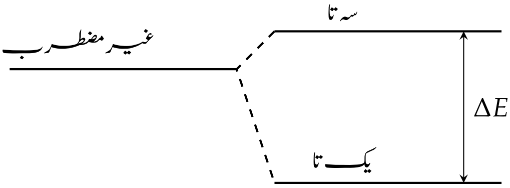
$$E^1_{hf} = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4}\begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases} \tag{۶.۹۲}$$

چکر چکر ربط زمینی نچال کے چکر انحطاط کو توڑ کر سہ تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV} \tag{۶.۹۳}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج نوریہ کا تعدد درج ذیل ہو گا

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420\,\mathrm{MHz} \tag{۶.۹۴}$$



شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بٹوارا۔

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21\,\mathrm{cm}$ ہو گی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے یہ کائنات میں اخراج کی صورت میں وہ مشہور 21 سینٹی میٹر تخفی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے

سوال ۶.۲۷: فرض کریں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{۶.۹۵}$$

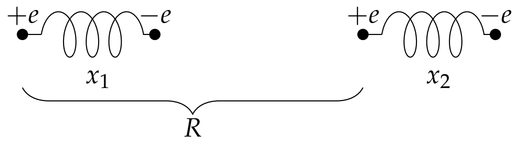
تکمل ہمیشہ کی طرح $0<\theta<\pi$ ، $0<\phi<2\phi$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l=0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\langle\frac{3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})-\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e}{r^3}\rangle = 0$$

اشارہ: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلیہ میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں الیکٹران کی بجائے میون ہو گا جس کا بار اور g جزو ضرب الیکٹرون کے بار اور g جزو ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیٹران ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور g جزو ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیئم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہو گا جس کی کمیت اور g جزو ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیق شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا یہ گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب $4.85\times10^{-4}\,\mathrm{eV}$ تجرباتی حاصل قیمت $8.41\times10^{-4}\,\mathrm{eV}$ سے بہت مختلف ہے اس فرق کی وجہ نابودی جفت $e^+ + e^- \to \gamma+\gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیئم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی متناہی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازا قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس b کا یکساں بار دار کروی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہو گی یہ در حقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ



شکل ۶.۱۳: دو قابل تقطیب قریبی جوہر (سوال 31.6)۔

ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم b/a کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں a رداس بوہر ہے صرف ابتدائی جزو رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتیں تعین کرنی ہے آخر میں $b \approx 10e - 15\text{meter}$ جو تقریباً پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سمتی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مرتعش سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 yz$$

جہاں λ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں

ا. زمینی حال

ب. سہتا انحطاطی پہلی ہیجان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندر والز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہٰذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ کابل تقطیب ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت m اور بار $-e$ ہو ایک مرکزہ بار $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس لچک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{۶.۹۶}$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہو گا

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2}\right) \tag{۶.۹۷}$$

ا. مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \tag{۶.۹۸}$$

ب. دکھائیں کے کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دو ہارمونی مرتعش ہیملٹن یوں

(۶.۹۹)
$$H = \Big[\frac{1}{2m}p_+^2 + \frac{1}{2}\Big(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\Big)x_+^2 big\Big] + \Big[\frac{1}{2m}p_-^2 + \frac{1}{2}\Big(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\Big)x_-^2 big\Big]$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$X\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2), \quad \text{جس میں}\; p\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \tag{۶.۱۰۰}$$

علیحدہ ہو گا

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں RL}\,\omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \tag{۶.۱۰۱}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہو تا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2 \frac{1}{R^6} \tag{۶.۱۰۲}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بیچ کششی مخفیہ پایا جاتا ہے جو ان کے بیچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بیچ وندر وال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دورتبی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہو گی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا مرتعش تفاعل موج ہے جہاں m کمیت اور مقیاس لچک k ہو گا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دورتبی تخفیف ΔV ہو گی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال 32.6:
فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم λ کا تفعال ہو. $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور

امتیازی تفاعلات (λ) E_n اور (λ) ψ_n لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \right| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \left| \psi_n \right\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انحطاطی امتیازی تفاعلات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جز و الف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 9.6 استعمال کریں۔)

(جز و ب): درج ذیل یک بعدی ہارمونی مدار اس کا اطلاق کریں۔

ایک)

$\lambda = \omega$

لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہو گا۔

دو)

$\lambda = \hbar$

لیں جو $\langle T \rangle$ دے گا اور

تین)

$\lambda = m$

جو $\langle T \rangle$ اور $\langle V \rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موازنا کریں۔

سوال 33.6:

مسلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہائڈروجن کے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تعین کی جا سکتی ہیں رداسی تفاعلات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r}$$

اور امتیازی اقدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہوں گے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max}+l+1)^2}$$

(جز و الف):

مسلہ Feynman-Hellmann میں $\lambda = e$ استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔

(جز و ب):

$\lambda = l$ کو استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔

سوال 34.6:

رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s \rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle n + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0$$

ثابت کریں جو ہائڈروجن کے حال ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1$, اور $(2-s$ کا۔ تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رداسی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\right]u.$$

bilhisis کے ذریعے دوہرا تفرق $\int(ur^s u'')dr$ کو $\langle r^s\rangle$، $\langle r^{s-1}\rangle$، $\langle r^{s-2}\rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل۔
کو بیٹھائیں۔ دیکھائیں کے

$$\int(ur^s u') = -(s/2) < r^{s-1} >$$

اور

$$\int(u'r^s u')dr = -[2/(s+1)]\int(u''r^{s+1}u')dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)
سول 35.6
(جزوالف):
رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s=0, s=1, s=2$ اور $s=3$ ڈال کے $\langle r^2\rangle, \langle r\rangle, \langle r^{-1}\rangle$ اور $\langle r^3\rangle$
کے قلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے
قلیہ دریافت کر سکتے ہیں۔
(جزوب):
دوسرے رخ آپکو مثلا درپیش ہوگا آپ $s = -1$ پر کر کے دیکھیں کے آپکو صرف $\langle r^{-2}\rangle$ اور $\langle r^{-3}\rangle$ کے بیچ رشتہ
حاصل ہوگا۔
جزوج:
اگر آپ کسی طریقہ سے $\langle r^{-2}\rangle$ دریافت کر پایں تب آپ رشتہ Kramers' استعمال کر کے باکی تمام منفی قوعتوں
کے لئے قلیات دریافت کر سکتے ہیں۔
مساوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوے $\langle r^{-3}\rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی
تصدیق مساوات 64.6 کے ساتھ کریں۔
سوال 36.6:
ایک جوہر کو یقسا بیرونی برقی میدان E_{ext} میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو
zemann اثر کا برقی مماسل ہے اس سوال میں ہم ھائےڈروجن کے $n=1$ اور $n=2$ حالات کے لئے سٹارک
اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r\cos\theta$$

اسکو hamiltonian bohr مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا
اسے نظر انداز کرتے ہوے عمدہ ساخت کو رعد کریں۔
(جزوالف):
اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔
(جزوب):
پہلا ھیجان حال 4 پرتہ، ψ_{200}، ψ_{211}، ψ_{210}، ψ_{21-1} انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوے، توانائی کی
رتبہ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟
(جزوج):
درج بالہ جزوب میں موضوع تفعالات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جوعف
قطب میعار اثر $(p_e = -er)$ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابع

نہیں ہونگے اسس طسرح ظاہر ہے کے پہلی ہیجان حسال مسیں ھائے ڈروجن برقی جوعفت قطب معیارِ اثر کاحاسل ہوگا۔اشارہ:اسس سوال مسیں بہت سارے تاکملات پائے حباتے ہیں تاہم تقسریبن تمام کی قیمت سِفر ہے لہذا حساب سے قبل غور کریں اگر ϕ تکمل سفسر ہو تب r اور θ تکملات حسل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی حبزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفسر ہیں۔)

سوال37.6: ھائے ڈروجن کی $n = 3$ حسالات کے لئے سٹارک اثر سوال36.6 پر غور کریں ابتدائی طور پر حپکر کو نظسر انداز کرتے ہوئے اب انحطاطی حسالات ψ_{3lm} ہونگے اور اب ہم z رخ برقی میدان حپالو کرتے ہیں۔

(حبزوالف):

اضطسرابی hamiltonian کو ظاہر کرنے والا 9×9 کا کالم تیار کریں

حبزوی جواب

$$\langle 300|z|310\rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320\rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31\pm1|z|32\pm1\rangle = -(9/2)a.$$

(حبزوب):

امتیازی اقتدار اور انکی انحطاط دریافت کریں.

سوال38.6: ڈوٹرئم کی زمینی حسال مسیں نہایت موحسین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طولِ موج مسیں تلاش کریں ۔ڈوٹرئم درحقیقت بھاری ھائے ڈروجن ہے جسکے مسرکز مسیں ایک اضافی نوٹران پایا حباتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ حبڑ کر ڈوٹرئم بناتے ہیں جسکا حپکر ایک مقناطیسی دارِ اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹرئم کا g-حبزو1.71 ہے۔

سوال39.6:

ایک کالم مسیں قسریبی باردارا کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطسرب کرتا ہے۔ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۴) فسرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوسس مسیں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای حباتی ہیں۔(چونکے اسس۔سوال کے ساتھ حپکر کا کوئی۔واستہ نہیں ہے لہذا اسے نظسرانداز کریں)

(حبزوالف):

درج ذیل

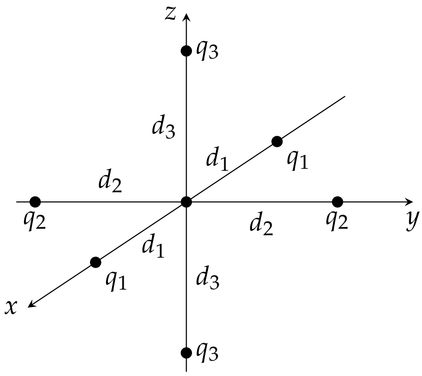
$$r << d_1, r << d_2, and r << d_3,$$

کی صورت مسیں دیکھائے

$$H' = V_o + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon}\frac{\eta_i}{d_i^3},$$



شکل ۶.۱۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (قلمی حال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

اور

$$V_o = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جزو ب):
زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔
(جزو ج):
پہلی۔ ہیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں یہ چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بٹے گا۔
ایک) کابی تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی۔ صورت میں۔
دو) چوں زاویہ تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔
تین) آر تھو ھامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔
سوال 40.6:
بازاوقات ψ_n^1 کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلہ واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔
(الف)
ایک) ھائے ڈروجن کی زمینی حال میں سٹارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان E_{ext} کی۔ موجودگی میں ھائے ڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال 36.6 stark اثر دیکھیں۔)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n}cos\theta;$$

استعمال کر کے دیکھیں اپ نے مستقلات $A, B,$ اور C کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔
دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف صفر ہو گی۔ جواب:

$$-m(3a^2eE_{ext}/2\hbar)^2.$$

(جزو ب)
اگر پروٹان کا برقی جست قطب معیار اثر p ہو تا تب ھائیڈروجن کے الیکٹرانکی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{epcos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
دو) دیکھائیں کہ رتبہ تک جوہر کا قل برقی جو عفت قطب معیار اثر حیرت کی۔ بات ہے صفر ہو گا۔
تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہو گا؟

جوابات

فرہنگ