کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۴ دسمبر ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۵

متماثل ذرات

۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذرہ کے لیے (فی الحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ فضائی محدد، $\boldsymbol{r}$، اور وقت، t، کا تفاعل ہو گا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے محدد، $(\boldsymbol{r}_1)$، دوسرے ذرے کے محدد، $(\boldsymbol{r}_2)$، اور وقت کا تابع ہو گا۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t) \tag{۵.۱}$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi \tag{۵.۲}$$

کے تحت ارتقا کرے گا جہاں H مکمل نظام کا ہیملٹنی ہے۔

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2+V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t) \tag{۵.۳}$$

ذرہ 1 اور ذرہ 2 کے محدد کے لحاظ سے تفرقات کو ∇ کے زیر نوشت میں بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ذرہ 1 کا حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}_1$ اور ذرہ 2 کا حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}_2$ میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا:

$$\left|\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t)\right|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2 \tag{۵.۴}$$

جہاں شماریاتی مفہوم معمول کے مطابق کارآمد ہو گا۔ ظاہر ہے کہ Ψ کو درج ذیل کے تحت معمول پر لانا ہو گا۔

$$\int\left|\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,t)\right|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2=1 \tag{۵.۵}$$

غیر تابع وقت مخفیہ کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) e^{-iEt/\hbar} \tag{۵.۶}$$

حاصل ہو گا جہاں فضائی تفاعل موج (ψ) غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات:

$$-\frac{\hbar}{2m_1}\nabla_1^2\psi - \frac{\hbar}{2m_2}\nabla_2^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۵.۷}$$

کو مطمئن کرتا ہے جس میں E نظام کی کل توانائی ہے۔

سوال ۵.۱: عام طور پر باہم عمل مخفیہ کا انحصار صرف دو ذرات کے بیچ سمتیہ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ پر ہو گا۔ ایسی صورت میں متغیرات $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ کی جگہ نئے متغیرات $\boldsymbol{r}$ اور (مرکز کمیت) $\boldsymbol{R} \equiv \frac{(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)}{m_1+m_2}$ کے استعمال سے مساوات شروڈنگر دو حصوں میں علیحدہ ہو گی۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r}$$
$$\nabla_1 = \frac{\mu}{m_2}\nabla_R + \nabla_r, \qquad \nabla_2 = \frac{\mu}{m_1}\nabla_R - \nabla_r$$

جہاں

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{۵.۸}$$

نظام کی تخفیف شدہ کمیت[1] ہے۔

ب. دکھائیں کہ (غیر تابع وقت) شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_R^2\psi - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\psi + V(\boldsymbol{r})\psi = E\psi$$

ج. متغیرات کو $\psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = \psi_R(\boldsymbol{R})\psi_r(\boldsymbol{r})$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ψ_R یک ذرہ شروڈنگر مساوات، جس میں کمیت m کی بجائے کل کمیت $(m_1 + m_2)$، مخفیہ صفر ہو اور نظام کی توانائی E_R ہو، کو مطمئن کرتا ہے جبکہ ψ_r یک ذرہ شروڈنگر مساوات، جس میں کمیت m کی بجائے تخفیف شدہ کمیت، مخفیہ $V(\boldsymbol{r})$ اور توانائی E_r ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ کل توانائی ان کا مجموعہ: $E = E_R + E_r$ ہو گا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کمیت ایک آزاد ذرہ کی مانند حرکت کرتا ہے اور (ذرہ 1 کے لحاظ سے ذرہ 2 کی) نسبتی حرکت ایسی ہو گی جیسا مخفیہ V میں تخفیف شدہ کمیت کا ایک ذرہ کرتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں بالکل یہی تحلیل ہو گی جو دو جسمی مسئلہ کو معادل یک جسمی مسئلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

---

[1] reduced mass

سوال ۵.۲: یوں ہائیڈروجن کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم الیکٹران کی کمیت کی جگہ تخفیف شدہ کمیت استعمال کرتے ہیں (سوال ۵.۱)۔

ا. ہائیڈروجن کی بندشی توانائی (مساوات ۴.۷۷) جاننے کی خاطر μ کی جگہ m استعمال کرنے سے پیدا فی صد سہو دو بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔

ب. ہائیڈروجن اور ڈیوٹریم کے لیے سرخ بالمر لکیروں $(n = 3 \rightarrow n = 2)$ کے طول موج کے بیچ فاصلہ (فرق) تلاش کریں۔

ج. **پازیٹرانیم** [۲] کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران رکھنے سے پازیٹرانیم پیدا ہوگا۔ ضد الیکٹران کی کمیت الیکٹران کی کمیت کے برابر جبکہ اس کا بار الیکٹران کے بار کے مخالف ہے۔

د. فرض کریں آپ **میونی ہائیڈروجن** [۳] (جس میں الیکٹران کی جگہ ایک میون ہوگا) کی وجودیت کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ میون کا بار الیکٹران کے بار کے برابر ہے، تاہم اس کی کمیت الیکٹران سے 206.77 گنا زیادہ ہے۔ آپ لیمان α لکیر $n = 2 \rightarrow n = 1$ کے لیے کس طول موج پر نظر رکھیں گے؟

سوال ۵.۳: کلورین کے قدرتی دو ہم جا Cl^{35} اور Cl^{37} پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCl کا لرزشی طیف قریب قریب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا جن میں فاصلہ $\Delta v = 7.51 \times 10^{-4} v$ ہوگا جہاں v خارجی نور سے کا تعدد ہے۔ (اشارہ: اس کو ایک ہارمونی مرتعش تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{mu}}$ ہوگا جہاں μ تخفیف شدہ کمیت (مساوات ۵.۸) ہے جبکہ دونوں ہم جا کے لیے k ایک دوسرے جیسا تصور کریں۔)

۵.۱.۱ بوزان اور فرمیان

فرض کریں ذرہ ایک یک ذرہ حال $\psi_a(r)$ اور ذرہ دو حال $\psi_b(r)$ میں پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ یہاں میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں ایسی صورت میں $\psi(r_1, r_2)$ سادہ حاصل ضرب ہوگا

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \tag{۵.۹}$$

ایسا کہتے ہوئے ہم یہ فرض کر رہے ہیں کہ ہم ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچان سکتے ہیں ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ ایک حال ψ_a میں اور ذرہ دو حال ψ_b میں ہے بے معنی ہوتا اور ہم بغیر جانے کے کونسا ذرہ ایک اور کونسا ذرہ دو ہے یہ کہتے کہ ایک ذرہ ψ_a میں اور دوسرا ذرہ ψ_b میں پایا جاتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ ایک بے وقعت اعتراض ہوتا۔ اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دے کر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات میں صورت حال بنیادی طور پر مختلف ہے۔ آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل متماثل ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے قاصر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ یہ الیکٹران اور وہ الیکٹران کوانٹم میکانیات میں بے معنی ہیں ہم صرف ایک الیکٹران کی بات

---

[۲] positronium
[۳] muonic hydrogen

کر سکتے ہیں۔ اصولی طور پر غیر ممیز ذرات کی موجودگی کو کوانٹم میکانیات خوش اسلوبی سے سموتی ہے۔ ہم ایک ایسا غیر مشروط تفاعل موج تیار کرتے ہیں جو اس کی بات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے۔ ایسا دو طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔

$$\psi \pm (r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)] \tag{۵.۱۰}$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے متماثل ذرات کا حامل ہوگا بوزان جن کے لئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور فرمیان جن کے لئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزان کی مثال نوریہ اور میزون ہے جبکہ فرمیان کی مثال پروٹان اور الیکٹران ہے ایسے ہے کہ

$$\begin{cases} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزان جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیان ہوں گے} \end{cases} \tag{۵.۱۱}$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق جیسا ہم دیکھیں گے فرمیان اور بوزان کی شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوتے ہیں کو اضافی کوانٹم میکانیات میں ثابت کیا جا سکتا ہے۔ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔

اس سے بالخصوص اب یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ دو متماثل فرمیان مثلاً سو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_-(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_a(r_2) - \psi_a(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا کوئی موج تفاعل نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ پالی اصول مناعت کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے بلکہ یہ دو ذراتی تفاعلی امواج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے جس کا اطلاق تمام متماثل فرمیان پر ہوگا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے یہ فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال ψ_a میں اور دوسرا حال ψ_b میں پایا جاتا ہے لیکن اس مسئلہ کو زیادہ عمومی اور زیادہ نفیس طریقے سے وضح کیا جا سکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ P متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے

$$Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1) \tag{۵.۱۲}$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہوگا لہٰذا تصدیق کیجیے گا کہ P کے امتیازی اقدار ± 1 ہوں گے۔ اب اگر دو ذرات متماثل ہوں تب لازمی ہے کہ ہیملٹنی ان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتے گا $m_1 = m_2$ اور $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ اس طرح P اور H ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہوں گے

$$[P, H] = 0 \tag{۵.۱۳}$$

لہٰذا ہم دونوں کے بیک وقت امتیازی حالات کے تفاعلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیرِ مبادلہ

$$\psi(r_1, r_2) = \pm\psi(r_2, r_1) \tag{۵.۱۴}$$

مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشاکلی امتیازی قدر $+1$ یا غیر تشاکلی امتیازی قدر -1 ہوں۔ مزید ایک نظام جو اس حال سے آغاز کرے اسی حال میں برقرار رہتا ہے متماثل ذرات کا ایک نیا قاعدہ جس کو میں ضرورت تشاکلیت کہتا ہوں کے تحت تفاعل موج کو مساوات 5.14 پر صرف پورا اترنے کی ضرورت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یہاں بوزان کے لئے مثبت علامت اور فرمیان کے لئے منفی علامت استعمال ہوگا۔ یہ ایک عمومی فقرہ ہے جس کی مساوات 5.10 ایک مخصوص صورت ہے۔

مثال ۵.۱: فرض کریں ایک لامتناہی چکور کنواں میں کمیت M کے باہم غیر متعامل دو ذرات جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں پائے جاتے ہیں۔ آپکو فکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً کیسے کیا جا سکتا ہے۔ یک ذرہ حالات درج ذیل ہوں گے۔ جہاں $K = \frac{(\pi)^2(\hbar)^2}{2m(a)^2}$ ہے۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n(\Pi)}{a}x), \quad E_n = n^2K$$

یہ ذرات قابل ممیز ہونے کی صورت میں جہاں ذرہ 1 حال n_1 میں اور ذرہ 2 حال n_2 میں ہو مرکب تفاعل موج سادہ حاصل ضرب ہوگا۔

$$\psi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1n_2} = ((n_1)^2 + (n_2)^2)K.$$

مثال کے طور پر زمینی حال

$$\psi_{11} = \frac{2}{a}\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a}), \quad E_{11} = 2K;$$

پہلا ہیجان حال دو چند انحطاطی

$$\psi_{12} = \frac{2}{a}\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}), \quad E_{12} = 5K,$$
$$\psi_{21} = \frac{2}{a}\sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a}), \quad E_{21} = 5K;$$

ہوگا وغیرہ وغیرہ۔ دونوں ذرات متماثل بوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم پہلا ہیجان حال جس کی توانائی اب بھی 5K ہوگی غیر انحطاطی ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a}[\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}) + \sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a})]$$

اور اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں تب کوئی حال بھی 2K توانائی کا نہیں ہوگا۔ جبکہ زمینی حال جس کی توانائی 5K ہوگی۔ درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a}[\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{2\pi x_2}{a}) - \sin(\frac{2\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{a})],$$

□

سوال ۵.۴:

(جزو الف) اگر Ψ_b اور Ψ_a عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات 10.5 میں مستقل 'A' کیا ہو گا؟

(جزو ب) اگر $\Psi_b = \Psi_a$ ہوں اور یہ معمول شدہ ہوں تب 'A' کیا ہو گا؟ (یہ صورت صرف بوزان کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

(جزو الف) لامتناہی چکور کنواں میں باہم غیر متعامل دو متماثل ذرات کا ہیملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال 1.5 میں دیا گیا فرمیان کا زمینی حال 'H' کا مناسب امتیازی قدر والا امتیازی تفاعل ہو گا۔

(جزو ب) مثال 1.5 میں دیے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو حالات تفاعل موج اور توانائیاں تینوں صورتوں میں قابل ممیز، متماثل بوزان، متماثل فرمیان حاصل کریں۔

۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشاکلیت کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہو اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہوں اگر یہ ذرات قابلِ ممیز ہوں اور ذرہ ایک حال ψ_a میں ہو تب ان کا مجموعی تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \tag{۵.۱۵}$$

اگر یہ متماثل بوزان ہوں تب ان کا مرکب تفاعل موج سوال 5.4 معمول زنی کے لئے دیکھیں درج ذیل ہو گا

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۶}$$

اور اگر یہ متماثل فرمیان ہوں تب درج ذیل ہو گا

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۷}$$

آئیں ان ذرات کے بیچ علیحدگی کے فاصلہ کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle \tag{۵.۱۸}$$

پہلی صورت: قابلِ ممیز ذرات۔ مساوات 5.15 میں دی گئی تفاعل موج کے لئے ایک ذرہ حال ψ_a میں x^2 کی توقعاتی قیمت

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 \, dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 \, dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

$$\langle x_2^2\rangle = \int \left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2^2 \left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 = \langle x^2\rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2\rangle = \int x_1 \left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2 \left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 = \langle x\rangle_a \langle x\rangle_b$$

یوں اس صورت درج ذیل ہو گا

$$\langle (x_1 - x_2)^2\rangle_d = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a \langle x\rangle_b \tag{۵.۱۹}$$

یہی جواب ذرہ ایک حال ψ_b میں اور ذرہ دو حال ψ_a میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔

دوم صورت: متماثل ذرات۔ مساوات 5.16 اور 5.17 کے تفاعل امواج کے لئے

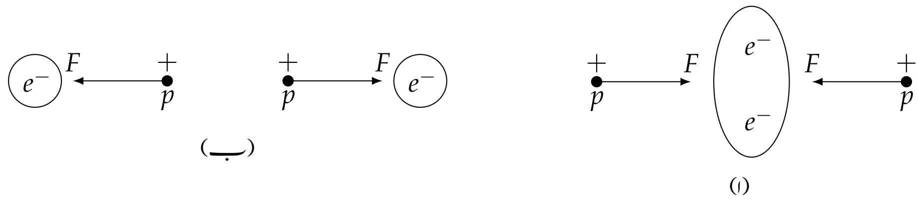
$$\begin{aligned}
\langle x_1^2\rangle =& \frac{1}{2}\Big[\int x_1^2 \left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int \left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 \\
&+ \int x_1^2 \left|\psi_b(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int \left|\psi_a(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 \\
&\pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&\pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a * x_1\,\mathrm{d}x_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \Big] \\
=& \frac{1}{2}\Big[\langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b \pm 0 \pm 0\Big] = \frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b\Big)
\end{aligned}$$

بالکل اسی طرح

$$\langle x_2^2\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_b + \langle x^2\rangle_a\Big)$$

ظاہر ہے $\langle x_2^2\rangle = \langle x_1^2\rangle$ ہو گا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_2\rangle =& \frac{1}{2}\Big[\int x_1 \left|\psi_a(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2 \left|\psi_b(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 \\
&+ \int x_1 \left|\psi_b(x_1)\right|^2 \mathrm{d}x_1 \int x_2 \left|\psi_a(x_2)\right|^2 \mathrm{d}x_2 \\
&\pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&\pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \Big] \\
=& \frac{1}{2}\left(\langle x\rangle_a \langle x\rangle_b + \langle x\rangle_b \langle x\rangle_a \pm \langle x\rangle_{ab} \langle x\rangle_{ba} \pm \langle x\rangle_{ba} \langle x\rangle_{ab}\right) \\
=& \langle x\rangle_a \langle x\rangle_b \pm \left|\langle x\rangle_{ab}\right|^2
\end{aligned}$$



شکل ۵.۱: شریک گرفتی بندھ کی نقشہ کشی: (ا) تشاکل تشکیل قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکل تشکیل قوت دفع پیدا کرتی ہے۔

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\langle x\rangle_{ab} \equiv \int x\psi_a(x)^*\psi_b(x)\,\mathrm{d}x \tag{۵.۲۰}$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا

$$\langle(x_1-x_2)^2\rangle_\pm = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \mp 2\big|\langle x\rangle_{ab}\big|^2 \tag{۵.۲۱}$$

مساوات 5.19 اور 5.21 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ فرق صرف آخری جزو میں پایا جاتا ہے۔

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_\pm = \langle(\Delta x)^2\rangle_d \mp 2\big|\langle x\rangle_{ab}\big|^2 \tag{۵.۲۲}$$

قابل ممیز ذرات کے لحاظ سے انہی دو حالات کے متماثل بوزان بالائی علامت نسبتاً ایک دوسرے کے زیادہ قریب جبکہ متماثل فرمیان زیریں علامت نسبتاً ایک دوسرے سے زیادہ دور ہوں گے۔ دھیان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعل امواج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں $\langle x\rangle_{ab}$ صفر ہو گا غیر صفر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ صفر ہو تب مساوات 5.20 میں تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_a ظاہر کرتا ہو جبکہ صوابی (میرے آبائی ضلع) میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو ψ_b ظاہر کرتا ہو تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی فرق نہیں پڑے گا یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعل امواج غیر منطبق ہوں کو آپ قابل ممیز ہونے کا ڈھونگ رچا سکتے ہیں۔ درحقیقت اسی کی بنا پر ماہر طبیعیات اور کیمیادان آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً کائنات میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ تفاعل امواج کے ذریعہ عدم تشاکلی کی بنا جڑا ہے اور اگر اس سے کوئی فرق پڑتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے۔

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتی ہے جب انکے موجی تفاعلات جزوی منطبق ہوں۔ ایسی صورت میں نظام کا رویہ کچھ یوں ہو گا جیسا متماثل بوزان کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہو جو انہیں قریب کھینچتی ہے جبکہ متماثل فرمیان کے بیچ قوت دفع پائی جاتی ہے جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتی ہیں۔ یاد رہے کہ ہم فی الحال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں۔ ہم اس کو قوت مبادلہ کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک وقت نہیں ہے کوئی بھی چیز ان ذرات کو دھکیل نہیں رہی ہے یہ صرف ضرورت تشاکلیت کی جیومیٹریائی نتیجہ ہے ساتھ ہی یہ کوانٹم میکانی

مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکانیات میں کوئی مماثل نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہائیڈروجن سالمہ H_2 پر غور کریں انداز اً بات کرتے ہوئے مرکزہ ایک پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمینی حال مساوات 4.80 میں ایک الیکٹران اور مرکزہ دو پر وسط رکھے ہوئے جوہری زمین حال دو میں ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہو گا اگر الیکٹران بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت یا اگر آپ قوت مبادلہ پسند کرتے ہیں کوشش کرتے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کریں (شکل ۵.۱-ا) نتیجتاً منفی بار کا انبار دونوں پروٹان کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا جو شریک گرفتی بندھ کا سبب ہوتا۔ بدقسمتی سے الیکٹران در حقیقت فرمیان ہیں نہ کہ بوزان جس کی بنا منفی بار اطراف کی جانب منتقل ہوتا ہے (شکل ۵.۱-ب) جو سالمہ کو توڑنے کی کوشش کرتا ہے۔

ذرا رکیے گا اب تک ہم نے چکر کو نظر انداز کیا ہے الیکٹران کے مکمل حال کو نہ صرف الیکٹران کا مقام تفاعل موج بلکہ الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرنے والا چکر کار تعین کرتے ہیں

$$\psi(r)\chi(s) \tag{۵.۲۳}$$

دو الیکٹران حال مرتب کرتے ہوئے ہمیں صرف فضائی جزو کو مبادلہ کے لحاظ سے عدم تشاکلی بنانا ہو گا بلکہ پورے کو عدم تشاکلی بنانا ہو گا۔ مرکب چکری حال مساوات 4.177 اور 4.178 پر نظر یں ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یکتا ملاپ خلاف تشاکل ہے لہٰذا اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہو گا جبکہ تین سہ تا حالات تشاکلی ہیں لہٰذا انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہو گا۔ ظاہر ہے کہ یوں یکتا حال بندھ پیدا کرے گا جبکہ سہ تا حال خلاف بندھ ہو گا۔ یقیناً کیمیادان ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گرفتی بندھ کے لئے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران یکتا حال کے مکین ہوں جہاں ان کا کل چکر صفر ہو گا۔

سوال ۵.۶: لامتناہی چکور کنواں میں دو باہم غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال Ψ_n مساوات 28.2 اور دوسرا حال Ψ_l ۔ $n \neq l$ میں ہے۔ $(x_1 - x_2)^2$ کا حساب اس صورت لگائیں کہ (الف) یہ غیر قابل ممیز ہوں۔ (ب) یہ متماثل بوزان ہوں اور (ج) یہ متماثل فرمیان ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال Ψ_a دوسرا حال Ψ_b اور تیسرا حال Ψ_c میں پائے جاتے ہیں۔ حالات Ψ_a ، Ψ_b اور Ψ_c کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے مساوات 15.5، 16.5 اور 17.5 کی طرز پر تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) قابل ممیز ذرات کو (ب) متماثل بوزان کو اور (ج) متماثل فرمیان کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہوتا ہو گا۔ جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہو گا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکل تفاعل امواج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ سلیٹر مقطع تیار کریں جس کی پہلی صف $\Psi_a(x_1)$ ، $\Psi_b(x_1)$ ، $\Psi_c(x_1)$ وغیرہ پر مشتمل ہو۔ اس کی دوسری صف $\Psi_a(x_2)$ ، $\Psi_b(x_2)$, $\Psi_c(x_2)$ وغیرہ پر مشتمل ہو گی اور اسی طرح اس کے بقایا صف ہوں گے۔ یہ نقطہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہو گا۔

۵.۲ جوہر

ایک معادل جوہر جس کا جوہری عدد Z ہو ایک بھاری مرکزہ جس کا بار Ze ہو اور جس کی کمیت M اور بار e کے Z الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہو گا۔

$$H = \sum_{j=1}^{z} -\frac{h^2 \, \triangle_j^2}{2m} - \left(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\right)\frac{Ze^2}{r_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\right)\sum_{j\neq 1}^{z}\frac{e^2}{|r_j - r_k|}. \tag{۵.۲۴}$$

قوسین میں بند ہر ایک جز و مرکزہ کے برقی میدان میں j الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ دوسرا جز و جو ماسوائے $k = j$ تمام j اور k مجموعہ پر ہے۔ الیکٹران میں باہمی قوت دفع کی بنا مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دو بار گنا جاتا ہے۔ ہمیں تفاعل موج $\Psi(r_1, r_2, ... r_z)$ کیلئے درج ذیل شروڈنگر مساوات حل کرنی ہو گی:

$$H\Psi = E\Psi \tag{۵.۲۵}$$

چونکہ الیکٹران متماثل فرمیان ہیں لہٰذا تمام حل قابل قبول نہیں ہوں گے۔ صرف وہ حل قابل قبول ہوں گے جن کا مکمل حال، مقام اور چکر

$$\Psi(r_1, r_2, ..., r_z)\chi(s_1, s_2, ..., s_z), \tag{۵.۲۶}$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکل ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ بد قسمتی سے ماسوائے سادہ ترین صورت $z = 1$ ہائیڈروجن کیلئے مساوات 24.5 میں دی گئی ہیملٹنی کی شروڈنگر مساوات ٹھیک حل نہیں کی جا سکتی ہے۔ کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے بابوں میں غور کیا جائے گا۔ ابھی میں الیکٹران کی قوت دفاع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ 1.2.5 میں ہم ہیلیم کی زمینی حال اور ہیجان حالات پر غور کریں گے۔ جبکہ حصہ 2.2.5 میں ہم بالا جوہروں کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات 24.5 میں دی گئی ہیملٹنی کے لیے آپ شروڈنگر مساوات 25.5 کا حل $\Psi(r_1, r_2, r_3, ... r_z)$ حاصل کر پائیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تشاکل تفاعل ایک مکمل خلاف تشاکل تفاعل کس طرح بنا پائیں گے جو شروڈنگر مساوات کو کسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے زیادہ جوہر ہیلیم $Z = 2$ ہے۔ اس کا ہیملٹنی

$$H = -\frac{h^2 \, \triangle_1^2}{2m} - \frac{1}{4\Pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1} + -\frac{h^2 \, \triangle_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|r_1 - r_2|}, \tag{۵.۲۷}$$

بار Ze کے مسرکزہ کے دو ہائیڈروجن نما ہیملٹنی الیکٹران 1 اور دوسرا الیکٹران 2 کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دفاع پر مشتمل ہو گا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر قابل علیحدگی ہو گا۔ اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس مساوات 72.4 اور چار گنا بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے وجہ نہ سمجھنے کی صورت میں سوال 16.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_{nlm}(r_1)\Psi_{n'l'm'}(r_2), \quad [5.28] \tag{۵.۲۸}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہو گی جہاں $E_n = -13.6/n^2 eV$ ہو گا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}), \quad [5.29] \tag{۵.۲۹}$$

بالخصوص زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi_0(r_1, r_2) = \Psi_{100}(r_1)\Psi_{100}(r_2) = \frac{8e^-2(r_1 + r_2)/a}{\pi a^3}, \tag{۵.۳۰}$$

مساوات 80.4 دیکھیں اور اس طرح کی توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$E_0 = 8(-13.6eV) = -109eV. \quad [5.31] \tag{۵.۳۱}$$

چونکہ ψ_0 تشاکل تفاعل ہے لہٰذا چکر حال کو خلاف تشاکل ہونا ہو گا اور یوں ہیلیم کے زمینی حال کا یک تا تشکیل ہو گا۔ جس میں چکر ایک دوسرے کے مخالف صف بند ہوں گے۔ حقیقت میں ہیلیم کا زمینی حال یقیناً یکتا ہے۔ لیکن اس کی توانائی تجرباتی طور پر $-78.975eV$ حاصل ہوتی ہے۔ جو مساوات 31.5 سے کافی مختلف ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کہ ہم نے الیکٹران کی توانائی دفاع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار ہے۔ مساوات 27.5 دیکھیں۔ جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی ‎-109‎ کی بجائے ‎-79eV‎ ہو گی۔ سوال 11.5 دیکھیں۔ ہیلیم ہیجان حالات

$$\Psi_{nlm}\Psi_{100}. \quad [5.32] \tag{۵.۳۲}$$

ہائیڈروجن زمینی حال میں ایک الیکٹران اور دوسرا ہیجان حال پر مشتمل ہو گا۔ دونوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں لے جاتے ہی ایک فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر پھینکتا ہے۔ $(E > 0)$ ۔ یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہیلیم باردار یہ (He^+) حاصل ہو گا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں۔ سوال 9.5 دیکھیں۔ ہم ہمیشہ کی طرح تشاکل اور خلاف تشاکل حالات تیار کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.5؛ اول الذکر خلاف تشاکل چکر تشکیل (یک تا) کے ساتھ جائے گا۔ جنہیں نزداہیلیم کہتے ہیں۔ جبکہ موخر الذکر کو تشاکل چکر تشکیل (سہ تا) درکار ہو گی اور انہیں اور ہیلیم پرست کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً نزداہیلیم ہو گا جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ 2.1.5 میں دریافت کیا۔ تشاکل فضائی حال الیکٹران کو قریب لاتا ہے۔ جس کی بنا ہم توقع کرتے ہیں کہ نزداہیلیم کی باہم متعامل توانائی زیادہ ہو گی۔ یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ ہیلیم پرست کے لحاظ سے نزداہیلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے۔ شکل 2.5 دیکھیں۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہیلیم ایٹم کے دونوں الیکٹران کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں۔ خارج الیکٹران کی توانائی کیا ہو گی۔

ب. ہیلیم باردار یہ He^+ کے طیف پر مقداری تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہیلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں کیفی تجزیہ کریں۔ (الف) اگر الیکٹران متماثل بوزان ہوتے۔ (ب) اگر الیکٹران قابل ممیز ہوتے۔ جبکہ ان کی کمیت اور بار نہ ہوتا۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے لہٰذا چکر تشکیل یکتا اور سہ تا ہو گا۔

سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات 30.5 میں دی گئی حال Ψ_0 کیلئے $\langle \frac{1}{|r_1-r_2|)} \rangle$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کروی محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو r_1 پر رکھتے ہوئے تا کہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}. \tag{۵.۳۳}$$

ہو۔ پہلے d^3r_2 کا تکمل حل کریں۔ زاویہ θ_2 کے لحاظ سے تکمل آسان ہے۔ بس اتنا یاد رکھیں کہ آپ کو مثبت جزو لینا ہو گا۔ آپ کو r_2 تکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہو گا۔ پہلا صفر سے r_1 تک اور دوسرا r_1 سے ∞ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$ -

ب. جزو الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہیلیم کی زمینی حال میں الیکٹران کا باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔ اور اس کو E_0 مساوات 31.5 کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمین حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں۔ لہٰذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہو گا۔

۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹرانی تشکیل اسی طرح جوڑ کر حاصل کی جاتی ہے۔ پہلی تخمین کی حد میں انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے بار Z_e کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذرہ ہائیڈروجن حالات (n, l, m) جنہیں مدارچے کہتے ہیں کہ انفرادی الیکٹران مکین ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان یا قابلِ ممیز ذرات ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ گر جاتے اور کیمیا اتنی دلچسپ نہ ہوتی۔ حقیقت میں الیکٹران متماثل فرمیان ہے جن پر پالی اصول مناعت لاگو ہوتا ہے لہٰذا کسی ایک مدارچہ میں صرف دو الیکٹران رہ سکتے ہیں ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان بلکہ یہ کہنا زیادہ درست کہ یکتا تشکیل میں الیکٹران رہ سکتے ہیں۔ کسی بھی n کی قیمت کے لئے n^2 ہائیڈروجنی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی توانائی E_n ہو گی یوں $n = 1$ خول میں دو الیکٹرانوں کی جگہ $n = 2$ خول میں آٹھ $n = 3$ میں اٹھارہ اور n ویں خول میں $2n^2$ الیکٹرانوں کی جگہ ہو گی۔ کیفی طور پر بات کرتے ہوئے دوری جدول کے افقی صف انفرادی خول کو

بھرنے کے مترادف ہے اگرچہ یہ پوری کہانی نہیں ہے چونکہ ایسا ہونے کی صورت میں انکی لمبائیاں $2, 8, 18, 32, 50,$ وغیرہ ہوتی ناکہ $2, 8, 8, 18, 18$ وغیرہ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹرانوں کی باہمی توانائی دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے۔

ہیلیم کا $n = 1$ خول مکمل طور پر بھرا ہو گا لہٰذا اگلا جوہر لتھیم $Z = 3$ کو ایک الیکٹران $n = 2$ خول میں رکھنا ہو گا۔ اب $n = 2$ کی صورت میں $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے۔ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ چونکہ بوہر توانائی n پر منحصر ہوتی ہے ناکہ l پر لہٰذا الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا الیکٹران کی توانائی دفع l کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیار حرکت الیکٹران کو بیرونی رخ دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا زیادہ مرکزہ سے دور ہو گا اتنا مرکزہ، اندرونی الیکٹرانوں کے زیادہ پس پردہ ہو کر اوجھل ہو گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا Ze نظر آتا ہے جبکہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے e سے زیادہ موثر نظر آتا ہے۔ یوں کسی بھی ایک خول میں کم سے کم توانائی کا حال یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران $l = 0$ ہو گا۔ اور بڑھتے l کے ساتھ توانائی بڑھے گی اس طرح لتھیم میں تیسرا الیکٹران مدارچہ $(2, 0, 0)$ کا مقید ہو گا۔ اگلا جوہر بیریلیم جس کا $Z = 4$ ہے اسی حال میں ہو گا لیکن اس کا چکر مخالف رخ ہو گا لیکن بوران $Z = 5$ کو $l = 1$ استعمال کرنا ہو گا۔

اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون $Z = 10$ تک پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ خول مکمل بھرا ہو گا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ خول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ آغاز میں دو جوہر سوڈیم اور مگنیشیم ہیں جن کا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد سلور سے آرگن تک چھ ایسے جوہر ہیں جن کے لیے $L = 1$ ہو گا۔ آرگن کے بعد ہم توقع کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہو گا البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران کا مرکزہ کو پس پردہ کرنے کا اثر اتنا زور پکڑ تا ہے کہ اگلا خول بھی اس کے نظر ہو جاتا ہے (یعنی یہ خول بھی اوجھل ہو جاتا ہے) لہٰذا پوٹاشیم $(Z = 19)$ اور کلشیم $(Z = 20)$، $(n = 3), (l = 2)$ کی بجائے $(n = 4), (L = 0)$ منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم نیچے اتر کر اسکینڈیم سے جست تک کے جوہر اٹھاتے ہیں جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہو گا۔ اس کے بعد گیلیم سے کرپٹان تک $n = 4l = 1$ ہو گا جس کے آخر میں ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف $n = 5$ کو چھلانگ لگاتے ہیں اور بعد میں واپس اتر کر $n = 4$ خول کے۔ وہ مدارجے جن کے لیے $l = 2l = 3$ ہوں پر کرتے ہیں۔ یہاں جوہری حالات کے تسمیہ جس کو تمام کیمیادان اور ماہر طبیعیات استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہو گا اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے تیز پیمائی کاروں کو معلوم ہو گا کہ $l = 0$ کو s کہتے ہیں $l = 1$ کو p کہتے ہیں، $l = 2$ کو d کہتے ہیں اور $l = 3$ کو f کہتے ہیں۔ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راس پر آ گئے اور انہوں نے حروف تہجی کے تحت $(g, h, i, , k, l)$ وغیرہ نام دینا شروع کیا۔ انہوں نے ہماری ناک میں دم کرنے کی خاطر j کو نظر انداز کیا۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو (n, l) کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں عدد n حال کو اور حرف l مدارجی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ کوانٹم عدد m کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نما میں حال کے مکین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تشکیل

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^2 \tag{۵.۳۴}$$

کہتی ہے کہ مدارچہ $(1, 0, 0)$ میں 2 الیکٹران، مدارچہ $(2, 0, 0)$ میں 2 جبکہ مدارجے $(2, 1, 1)$ ،

$(2,1,0)$ اور $(2,1,-1)$ کے کسی ملاپ میں 2 الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حال ہے۔

اس مثال میں 2 الیکٹران ایسے پائے جاتے ہیں جن کے مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد ایک ہے لہٰذا مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد ایک ہے لہٰذا کل مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹم نمبر l کسی ایک ذرہ کی جب L کل قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک، دو یا صفر ہو سکتا ہے۔ جبکہ $(1s)$ کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یکتا حال بندھن میں ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہو گا۔ یہی کچھ $(2S)$ کے دو الیکٹران کے لئے بھی ہو گا لیکن $(2p)$ کے دو الیکٹران یا تو یکتا نظام اور یا سہ تا نظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کوانٹم عدد S کل کو ظاہر کرنے کے لئے بڑا حرف استعمال ہو گا۔ جس کی قیمت ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے میزان کل مدارچی جمع چکر J کی قیمت تین، دو، ایک یا صفر ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو قواعد ہن (سوال 1.5 دیکھیں) سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$^{2S+1}L_J \tag{۵.۳۵}$$

جہاں J اور S اعداد جبکہ L ایک حرف ہو گا اور چونکہ ہم کل کی بات کر رہے ہیں لہٰذا یہ بڑا حرف ہو گا کاربن کا زمینی حال 3D ہے جس کا کل چکر ایک ہے جس کی بنا 3 لکھا گیا ہے کل مدارچی زاویائی معیار حرکت ایک ہے لہٰذا $1p$ لکھا گیا ہے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے لہٰذا صفر لکھا گیا ہے۔ جدول ۵.۱ میں دوری جدول کے ابتدائی چار صف کے لئے انفرادی تشکیلات اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات 34.5 کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔

سوال ۵.۱۲: جزو الف: دوری جدول کے ابتدائی دو صف کے لئے نیون تک مساوات 33.5 کی روپ میں الیکٹران تشکیلات پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۵.۱ کے ساتھ کریں۔
جزب: ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات 34.5 کی روپ میں ان کا مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائیٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳: جزو الف: ہن کا پہلا قاعدہ کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسا ہونے کے لیے صورت میں وہ حال جس کا کل چکر زیادہ سے زیادہ ہو گی کم سے کم توانائی ہو گی۔ ہیلیم کے ہیجان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔
جزو ب: ہن کا دوسرا قاعدہ کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو۔ وہ حال جس کی مدارچی زاویائی معیار حرکت L1 زیادہ سے زیادہ ہو گی توانائی کم سے کم ہو گی۔ کاربن کے لئے L=2 کیوں نہیں ہو گا؟ اشارہ سیڑھی کا بالائی سر $(M_L = L)$ تشاکلی ہے۔
جزو ج: ہن کا تیسرا قاعدہ کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول (n,l) نصف سے زیادہ بھرا نا ہو تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L-S|$ ہو گا۔ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L + S$ کی توانائی کم سے کم ہو گی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال 12.5 ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کرے۔
جزو د: قواعد ہن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ حال خلاف تشاکلی مقام کے ساتھ خلاف تشاکل چکر حال استعمال ہو گا۔ سوال 12.5 ب میں کاربن اور نائیٹروجن میں در پیش مشکلات سے چھٹکارا حاصل کریں۔ اشارہ کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر سیڑھی کے بالائی سر سے آغاز کریں۔

سوال ۵.۱۴: دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر 66 ڈسپروزیم کا زمینی حال $^5I_8$ ہے۔ اس کے کل چکر کل

جدول ۵.۱: دوری جدول کے اولین چار قطاروں کے الیکٹران تشکیلات

Z	عنصر	تشکیل	
1	H	$(1s)$	$^2S_{1/2}$
2	He	$(1s)^2$	$^1S_0$
3	Li	$(\text{He})(2s)$	$^2S_{1/2}$
4	Be	$(\text{He})(2s)^2$	$^1S_0$
5	B	$(\text{He})(2s)^2(2p)$	$^2P_{1/2}$
6	C	$(\text{He})(2s)^2(2p)^2$	$^3P_0$
7	N	$(\text{He})(2s)^2(2p)^3$	$^4S_{3/2}$
8	O	$(\text{He})(2s)^2(2p)^4$	$^3P_2$
9	F	$(\text{He})(2s)^2(2p)^5$	$^2P_{3/2}$
10	Ne	$(\text{He})(2s)^2(2p)^6$	$^1S_0$
11	Na	$(\text{Ne})(3s)$	$^2S_{1/2}$
12	Mg	$(\text{Ne})(3s)^2$	$^1S_0$
13	Al	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)$	$^2P_{1/2}$
14	Si	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^2$	$^3P_0$
15	P	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^3$	$^4S_{3/2}$
16	S	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^4$	$^3P_2$
17	Cl	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^5$	$^2P_{3/2}$
18	Ar	$(\text{Ne})(3s)^2(3p)^6$	$^1S_0$
19	K	$(\text{Ar})(4s)$	$^2S_{1/2}$
20	Ca	$(\text{Ar})(4s)^2$	$^1S_0$
21	Sc	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)$	$^2D_{3/2}$
22	Ti	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^2$	$^3F_2$
23	V	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^3$	$^4F_{3/2}$
24	Cr	$(\text{Ar})(4s)(3d)^5$	$^7S_3$
25	Mn	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^5$	$^6S_{5/2}$
26	Fe	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^6$	$^5D_4$
27	Co	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^7$	$^4F_{9/2}$
28	Ni	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^8$	$^3F_4$
29	Cu	$(\text{Ar})(4s)(3d)^{10}$	$^2S_{1/2}$
30	Zn	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}$	$^1S_0$
31	Ga	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)$	$^2P_{1/2}$
32	Ge	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^2$	$^3P_0$
33	As	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^3$	$^4S_{3/2}$
34	Se	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^4$	$^3P_2$
35	Br	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^5$	$^2P_{3/2}$
36	Kr	$(\text{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6$	$^1S_0$

مدار چے اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم کل حالات کیا ہوں گے۔ ڈسپروزیم کے الیکٹران تشکیل کا خاکہ کیا ہو سکتا ہے۔

۵.۳ ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گرفتی الیکٹرانوں میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص "موروثی" مرکزہ کے کولمب میدان سے آزاد، تمام قلمی جال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرنا شروع کرتے ہے اس حصہ میں ہم انتہائی سادہ نمونوں پر غور کریں گے۔ پہلا نمونہ الیکٹران گیس نظریہ ہے جو سمرفلڈ نے پیش کیا اس نمونے میں سرحد کے اثرات کے علاوہ باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور الیکٹرانوں کو لامتناہی چکور کنواں کے تین آبادی مماثل کی طرح ڈبے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے۔ دوسرا نمونہ نظریہ بلوخ کہلاتا ہے الیکٹران کی باہمی دفع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے، یہ نمونے ٹھوس اجسام کی کوانٹم نظریے کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں۔ اس کے باوجود یہ پالی حصول مناعت کا جمود میں گہرا کردار اور موصل، غیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتی ہے۔

۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس

فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اضلاع l_x ، l_y اور l_z ہے اور فرض کرے کے اس کے اندر الیکٹران پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہو سکتی ماسوائے ناقابلِ گزر دیواروں کے۔

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & otherwise \end{cases} \tag{۵.۳۶}$$

شروڈنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \tag{۵.۳۷}$$

$$\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{۵.۳۸}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z \tag{۵.۳۹}$$

اور

$$E = E_x + E_y + E_z \tag{۵.۴۰}$$

درج ذیل لیتے ہوئے،

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar} \tag{۵.۴۱}$$

ہم عمومی حل حاصل کرتے ہے۔

$$X(x) = A_x \sin(K_x x) + B_x \cos(K_x x) \quad Y(y) = A_y \sin(K_y y) + B_y \cos(K_y y) Z(z) = A_z \sin(K_z z) - \tag{۵.۴۲}$$

سرحدی شرائط کے تحت

$$X(0) = Y(0) = Z(0), B_x = B_y = B_z = 0, X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0 \tag{۵.۴۳}$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$k_x l_x = n_x \pi, k_y l_y = n_y \pi, k_z l_z = n_z \pi \tag{۵.۴۴}$$

جہاں ہر n ایک مثبت عدد صحیح ہے۔

$$n_x = 1, 2, 3, \ldots \quad n_y = 1, 2, 3, \ldots \quad n_z = 1, 2, 3, \ldots \tag{۵.۴۵}$$

معمول شدہ تفاعلات موج درج ذیل ہونگے۔

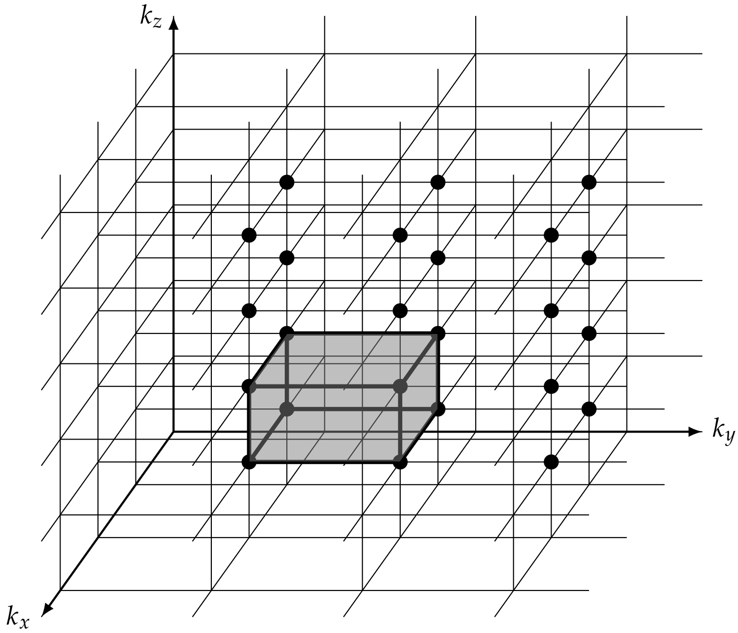
$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right) \tag{۵.۴۶}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہونگی۔

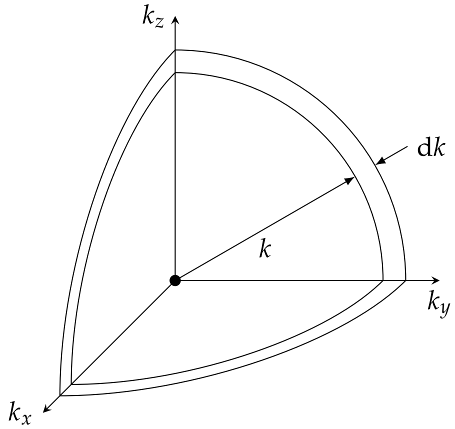
$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2}\right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{۵.۴۷}$$

جہاں سمتیہ موج، $k \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مطلق قیمت K ہوگی۔

اگر آپ ایک تین آبادی فضا کا تصویر کرے جس کے محور $k_x k_y k_z$ ہو اور جس پر $k_x = (\pi/l_x)(2\pi/l_x)(3\pi/l_x)\ldots$ اور $k_y = (\pi/l_y)(2\pi/l_y)(3\pi/l_y)\ldots$ اور $k_z =$



شکل ۵.۲: آزاد الیکٹران گیس۔ جال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک "ڈبا" کو سیاہ دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبے کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔



شکل ۵.۳: کروی پوست کا k فضا میں ایک مثمن۔

$\dots(3\pi/l_z)(2\pi/l_z)(\pi/l_z)$ پر سیدھے سطحیں پائے جاتے ہو تب ہر انفرادی نقطہ تقاطع، منفرد یک ذراسا کن حال دیگا (شکل ۵.۲)۔ اس حال میں ہر ایک خانہ لہٰذا ہر ایک حال کی فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم ہے۔

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V} \tag{۵.۴۸}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں N جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے q آزاد الیکٹران دیتا ہو۔ عملاً کسی بھی کلاں بنی جسامت کے چیز کے لئے N کی قیمت بہت بڑی ہو گی جس کی گنتی ایوگادرو عدد میں کی جائے گی جبکہ q ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہو گا۔ اگر الیکٹران بوزان یا قابل ممیز ذرات ہوتے تب وہ زمینی حال ψ_{111} میں سکونیت اختیار کرتے حقیقتاً الیکٹران متماثل فرمیان ہیں جن پر پالی اصول مناعت کا اطلاق ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی حال کی مکین صرف دو الیکٹران ہو سکتے ہیں۔ یہ k فضا میں ایک کرہ کا ایک مثمن رداس k_F تک بھرے گی جس کو اس حقیقت سے تعین کیا جا سکتا ہے کہ الیکٹران کی ہر ایک جوڑی کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہو گا (مساوات 40.5)۔

$$\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right) = \frac{Nq}{2}\left(\frac{\pi^3}{V}\right)$$

یوں

$$k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tag{۵.۴۹}$$

جہاں

$$\rho \equiv \frac{Nq}{V} \tag{۵.۵۰}$$

آزاد الیکٹران کثافت ہے (آزاد حجم میں الیکٹرانوں کی تعداد)۔

k فضا میں مکین اور غیر مکین حالات کی سرحد کو **فرمی سطح** کہتے ہیں (اسی کی بنا پر زیر نوشت میں F لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقتی توانائی کو **فرمی توانائی** E_F کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$E_F = \frac{h^2}{2m}(3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}} \tag{۵.۵۱}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے. ایک خول جس کی موٹائی $\mathrm{d}k$ شکل ۵.۳ ہو کا حجم

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2)dk$$

لہٰذا اس خول میں الیکٹران حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی

$$\frac{2[(\frac{1}{2})\pi k^2\,\mathrm{d}k]}{\pi^3/V} = \frac{V}{\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k$$

ان میں سی ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ مساوات 5.39 لہٰذا خول کی توانائی

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\frac{V}{\pi^2}k^2 dk \tag{۵.۵۲}$$

اور کل توانائی درج ذیل ہو گی

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m}\int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2(3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m}V^{\frac{-2}{3}} \tag{۵.۵۳}$$

کوانٹم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا سادہ گیس میں اندرونی حراری توانائی U کا ہوتا ہے۔ بالخصوص یہ دیواروں پر ایک دباو پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں dV کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کمی رونما ہو گی

$$dE_{tot} = -\frac{2}{3}\frac{\hbar^2(3\pi^2 Nq)^{\frac{5}{3}}}{10\pi^2 m}V^{\frac{5}{3}}dV = -\frac{2}{3}E_{tot}\frac{dV}{V}$$

جو بیرون پر کوانٹم دباو P کا کیا ہوا کام $dW = PdV$ نظر آتا ہے

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_{tot}}{V} = \frac{2}{3}\frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar^2}{5m}\rho^{\frac{5}{3}} \tag{۵.۵۴}$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس جسم اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا۔ ایک اندرونی کوانٹم میکانی دباو توازن برقرار رکھتی ہے جس کا الیکٹران کے باہمی دفع جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں یا حراری حرکت جس کو ہم خارج کر چکے ہیں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے۔ بلکہ جو متماثل فرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات انحطاطی دباو کہتے ہیں اگرچہ مناعتی دباو بہتر اصطلاح ہو گی۔

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹران کی اوسط توانائی $\frac{E_{tot}}{Nq}$ کو فرمی توانائی کے قصر کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\frac{3}{5}E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبا کی کثافت $8.96\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے جبکہ اس کا جوہری وزن $63.5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ہے۔

(الف) مساوات 5.43 استعمال کرتے ہوئے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی فرمی توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) الیکٹران کی مطابقتی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ اشارہ: $E_F = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$ لیں۔ کیا تانبا میں الیکٹران کو غیر اضافی تصور کرنا خطرے سے باہر ہو گا؟

(ج) تانبا کے لئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حراری توانائی k_BT جہاں k_B بولٹزمن مستقل اور T کیلون حرارت ہے فرمی توانائی کے برابر ہو گا؟ تبصرہ: اس کو فرمی حرارت کہتے ہیں۔ جب تک حقیقی حرارت فرمی حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو ٹھنڈا تصور کیا جا سکتا ہے اور اس میں الیکٹران نچلے ترین قابلِ پہنچ حال میں ہوں گے۔ چونکہ تانبا $1356\,\mathrm{K}$ پر پگھلتا ہے لہٰذا ٹھوس تانبا ہر صورت ٹھنڈا ہو گا۔

(د) الیکٹران گیس نمونہ میں تانبا کے لئے انحطاطی دباو مساوات 5.46 کا حساب لگائیں۔

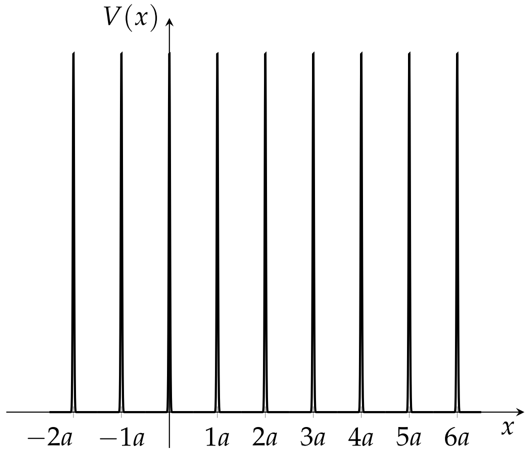
سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباو میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نسبتی اضافہ کے تناسب کو جسم مقیاس کہتے ہیں۔

$$B = -V\frac{dP}{dV}$$

دکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $B = \frac{5}{3}P$ ہو گا اور سوال (د) 5.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبا کے لئے جسیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربہ سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں چونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ ایک حیران کن نتیجہ ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم فاصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کا رویہ نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل و صورت مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جس سے یک بُعدی ڈیراک کنگھی کہتے ہیں اور جو ایک جتنے برابر فاصلوں پر نوکیلی



شکل ۵.۴: ڈیراک کنگھی۔ مساوات 57.5

ڈیلٹا تفاعلات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۴)۔ لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت سادہ بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ a کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

$$V(x+a) = V(x) \tag{۵.۵۵}$$

مسئلہ بلوخ کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لئے مساوات شروڈنگر،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{۵.۵۶}$$

کے حل سے مراد وہ تفاعل لیا جا سکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

$$\psi(x+a) = e^{iKa}\psi(x) \tag{۵.۵۷}$$

جہاں K ایک مستقل ہے۔ یہاں مستقل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو x کا تابع نہیں ہے اگرچہ یہ E کا تابع ہو سکتا ہے۔

ثبوت: مان لیں کے D ایک ہٹاو عامل ہے:

$$Df(x) = f(x+a) \tag{۵.۵۸}$$

دوری مخفیہ مساوات 5.47 کی صورت میں D ہیملٹنی کا مقلوبی ہو گا:

$$[D, H] = 0 \tag{۵.۵۹}$$

لہٰذا ہم H کے ایسے امتیازی تفاعلات چن سکتے ہیں جو بیک وقت D کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں: $D\psi = \lambda\psi$ یا

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \tag{۵.۶۰}$$

یہاں λ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اگر یہ صفر ہو تب چونکہ مساوات 5.52 تمام x کے لئے مطمئن ہو گا لہٰذا ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ کسی بھی غیر مخلوط عدد کی طرح اس کو قوت نمائی روپ میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\lambda = e^{iKa} \tag{۵.۶۱}$$

جہاں K ایک مستقل ہو گا۔

اس مقام پر مساوات 5.53 امتیازی قدر λ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ K حقیقی ہے اور یوں اگرچہ $\psi(x)$ از خود غیر دوری ہے $\left|\psi(x)\right|^2$ جو درج ذیل ہے۔

$$\left|\psi(x+a)\right|^2 = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{۵.۶۲}$$

دوری ہو گا جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی حقیقی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لئے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سر حد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاں بین سطح کے قلم میں کئی ایوگادرو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور الیکٹران پر سطحی اثر قابل نظر انداز ہو گا۔ ہم مسئلہ بلوخ پر پورا اترنے کی خاطر x کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تا کہ اس کا سر بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد اس کے دم پر پایا جاتا ہو؛ باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط مسلط کرتے ہیں۔

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \tag{۵.۶۳}$$

یوں مساوات 5.49 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$e^{iNKa}\psi(x) = \psi(x)$$

لہٰذا $e^{iNKa} = 1$ یا $NKa = 2\pi n$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{۵.۶۴}$$

یہاں K لازماً حقیقی ہو گا مسئلہ بلوخ کی افادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ مثلاً $(0 \leq x < a)$ کے وقفہ پر مسئلہ شروڈنگر حل کرنا ہو گا مساوات 5.49 کی بار بار اطلاق سے ہر جگہ کے حالات حاصل ہوں گے۔

اب فرض کریں کے مخفیہ در حقیقت نوکیلی ڈیلٹا تفاعلات ڈیراک کنگھی پر مشتمل ہو:

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \tag{۵.۶۵}$$

شکل 5.5 میں آپ تصور کریں گے کہ محور x کو یوں دائروی شکل میں گھمایا گیا ہے کہ N ویں نوکیلی تفاعل در حقیقت نقطہ $x = -a$ پر پایا جاتا ہے۔ اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے لیکن یاد رہے ہمیں دوریت سے دلچسپی ہے۔ کلاسیکی طور پر دہراتا ہوا مستطیلی مخفیہ استعمال کیا گیا جو اب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے خطہ $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہو گا لہٰذا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi,$$

ہو گا۔

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \tag{۵.۶۶}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), (0 < x < a). \tag{۵.۶۷}$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبدا کے بالکل بائیں ہاتھ پہلے خانہ میں تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = e^{-iKa}[A\sin k(x+a) + B\cos k(x+a)], (-a < x < 0). \tag{۵.۶۸}$$

نقطہ $x = 0$ پر ψ لازماً استمراری ہو گا لہٰذا

$$B = e^{-iKa}[A\sin(ka) + B\cos(ka)]; \tag{۵.۶۹}$$

اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفاعل کی زور کے براہ راست متناسب عدم استمرار پائے جائے گی مساوات 2.125 جس میں α کی علامت الٹ ہو گی چونکہ یہاں کنواں کی بجائے نوکیلی تفاعل پایا جاتا ہے

$$kA - e^{-iKa}k[A\cos(ka) - B\sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}B \tag{۵.۷۰}$$

مساوات 5.61 کو $A\sin(ka)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$A\sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)]B \tag{۵.۷۱}$$

اس کو مساوات 5.62 میں پُر کرتے ہوئے اور k_B کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa}\cos(ka)] + e^{-iKa}\sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka)$$

حاصل ہو گا۔

جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے

$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka) \tag{۵.۷۲}$$

یہ ایک بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرانگ وپنی مخفیہ حاشیہ 18 دیکھیں کے لئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہو گا لیکن جو خدوخال ہم دیکھنے جا رہے ہیں وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

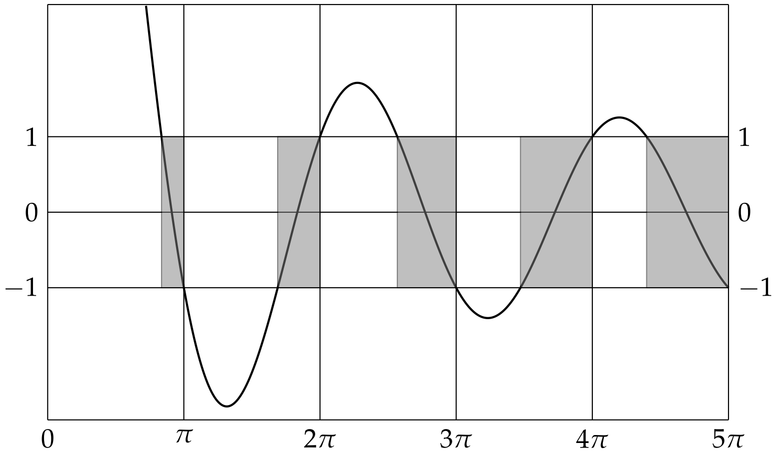
مساوات 5.64 k کی ممکنات قیمتیں لہٰذا اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہیں۔ علامتیت کو سادہ بنانے کی نقطہ نظر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$z \equiv ka, \text{and} \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \tag{۵.۷۳}$$

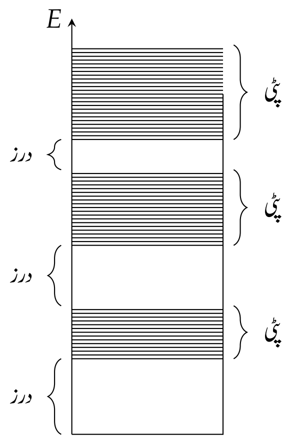
جس سے مساوات 5.64 کا دایاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$f(z) \equiv \cos(z) + \beta\frac{\sin(z)}{z} \tag{۵.۷۴}$$

مستقل β بُعدی ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی زور کی ناپ ہے شکل ۵.۵ میں میں نے $10 \quad = \quad \beta$ کے لئے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ $f(z)$ ساتھ $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے اور چونکہ $|\cos(Ka)|$ کی قیمت کسی صورت ایک سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے لہٰذا ایسی خطوں میں مساوات 5.64 کا حل نہیں پایا جائے گا۔ یہ درز ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہے انکے بیچ اجازتی توانائیوں کی پٹیاں پائی جاتی ہیں مساوات 5.56 کے تحت $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہے لہٰذا n کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی اجازتی ہو گی۔ آپ تصور میں شکل ۵.۵ پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے فاصلوں پر $+1(n = 0)$ سے لے کر نیچے $-1(n = \frac{N}{2})$ تک اور واپس تقریباً $+1(n = N - 1)$ تک جہاں بلوخ جزو ضربی e^{iKa} دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لہٰذا n کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حل حاصل نہیں ہو گا لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ان لکیروں میں ہر ایک کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع ایک اجازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں N حالات پائے جاتے ہیں جو ایک دوسرے کے اتنے قریب ہیں کہ کسی بھی نقطہ نظر سے انہیں ایک مسلسل خطہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل ۵.۶)۔



شکل ۵.۵: تفاعل $f(z)$ (مساوات 66.5) کو $\beta = 10$ کے لئے ترسیم کر کے اجازتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درز (جہاں $1 < |f(z)|$ ہو گا) پائے جاتے ہیں۔



شکل ۵.۶: دوری مخفیہ کی اجزاتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

ہم نے ابھی تک اپنے مخفیہ میں ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں Nq الیکٹران ہوں گے جہاں ہر ایک جوہر q تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصول مناعت کے بنا صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل کریں گے اگر $q = 3$ ہو یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے وغیرہ وغیرہ۔ تین ابعاد میں اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے لیکن اجازتی پٹیاں جن کے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں تب بھی ہو گا۔ دوری مخفیہ کی نشانی بھی پٹی ہے۔

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو ممنوع خطہ سے گزرتے ہوئے اگلی پٹی تک چھلانگ کے لئے ایک الیکٹران کو نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہو گی ایسا مادہ برقی طور پر غیر موصل ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری ہوئی نہیں ہے تب ایک الیکٹران کو بہت معمولی توانائی درکار ہو گی کہ وہ ہیجان ہو سکے اس طرح کا مادہ عموماً موصل ہو گا۔ ایک غیر موصل میں بڑے یا کم q کے چند جوہر کی ملاوٹ سے اگلی بلند پٹی میں چند اضافی الیکٹران رکھ دیے جاتے ہیں پہلے سے مکمل پُر پٹی میں خول پیدا کیے جاتے ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے اور ایسے اشیاء نیم موصل کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً بہت اچھا موصل ہونا چاہیئے تھا چونکہ انکے اجازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ فرق صرف نظریہ پٹی کی مدد سے سمجھا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

(الف) مساوات 5.59 اور مساوات 5.63 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تفاعل مخفیہ میں ایک ذرے کی تفاعل موج درج ذیل روپ میں لکھی جا سکتی ہے

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa}\sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

معمول زنی مستقل C تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(ب) البتہ پٹی کے بالائی سر پر جہاں z π کا عدد صحیح مضرب ہو گا شکل 5.6 (الف) سے $\psi(x) = 0$ حاصل ہو گا ایسی صورت میں درست تفاعل موج تلاش کریں دیکھیئے گا کہ ہر ایک ڈیلٹا تفاعل پر ψ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی اجازتی پٹی کے نچلے نقطہ پر $\beta = 10$ کی صورت میں توانائی کی قیمت تین بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ $\frac{\alpha}{a} = 1\ \text{eV}$ ہو گا۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیلٹا تفاعل سوزن کے بجائے ڈیلٹا تفاعل کنواں پر غور کر رہے ہیں یعنی مساوات 5.57 میں α کی علامت تبدیل کریں۔ ایسی صورت میں شکل 5.6 اور 5.7 کی طرح کے اشکال بنائیں۔ مثبت توانائی حلوں کے لئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے بس مساوات 5.66 میں موضوع تبدیلیاں لائیں لیکن منفی توانائی حلوں کے لئے آپ کو کام کرنا ہو گا اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیے گا جو اب $-z$ تک وسیع ہو گا۔ پہلی اجازتی پٹی میں اب کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دکھائیں کہ مساوات 5.64 میں حاصل زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہے۔ کن صورتوں میں ایسا نہیں ہے؟ اشارہ: $(N = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ لیتے ہوئے دیکھیے گا کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی

کیا ممکنہ قیمتیں ہوں گی؟

۵.۴ کوانٹم شماریاتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم اجازتی توانائی تشکیل کا مکین ہو گا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کے بنا ہیجانی حالات ابھرنے شروع ہوں گے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر T درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد N کے ذرات پائے جاتے ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی E_j ؟ ہو گی دھیان رہے کہ اس احتمال کا کوانٹم عدم تعین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بالکل یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لئے منظور ہو گا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہو گی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہو گا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھ سکیں چاہے یہ قابلِ تعین ہو یا نہ ہوں۔

شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک جیسی کل توانائی E ہو ایک جتنا محتمل ہو گا۔ بلا واسطہ حراری حرکت کی بنا مستقل طور پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرا ذرہ ایک روپ حرکی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہو گی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقا توانائی کی بنا کل مقررہ ہو گا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی لگاتار نئی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے قابل ہے درجہ حرارت T حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹم میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لہٰذا یہ کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہو گا کہ یہ ذرات قابلِ ممیز، متماثل بوزان یا متماثل فرمیان ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لہٰذا میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کروں گا تا کہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چکور کنواں حصہ 2.2 میں کمیت m کے صرف تین باہم غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہو گی مساوات 2.27 دیکھیں

$$E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_A^2 + n_B^2 + n_C^2) \tag{۵.۷۵}$$

جہاں n_A ، n_B اور n_C مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ $E = 363(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2})$ یعنی درج ذیل

$$n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363. \tag{۵.۷۶}$$

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیرہ ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہو گا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیرہ اور ایک پانچ جو تین مرتب اجتماعات میں ہو گا ایک عدد انیس اور دو ایک یہاں بھی تین مرتب اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک سات اور ایک پانچ چھ مرتب اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں n_A, n_B, n_C درج ذیل میں سے ایک ہو گا:

$$
\begin{aligned}
&(11, 11, 11)\\
&(13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13)\\
&(1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1)\\
&(5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5).
\end{aligned}
$$

اگر یہ ذرات قابلِ ممیز ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کوانٹم حال کو ظاہر کرے گا اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حراری توازن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کونسا ذرہ کس یک ذرہ حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال ψ_n کی تعداد مکین N_n۔ ہم اس دن ذرہ حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو تشکیل کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال ψ_{11} میں ہوں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \tag{۵.۷۷}
$$

یعنی $N_{11} = 3$ باقی تمام صفر اگر دو حال ψ_{13} میں اور ایک ψ_5 میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots) \tag{۵.۷۸}
$$

یعنی $N_5 = 1, N_{13} = 2$ باقی تمام صفر اگر دو ψ_1 میں ایک ψ_{19} میں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$
(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \tag{۵.۷۹}
$$

یعنی $N_1 = 2, N_{19} = 1$ باقی تمام صفر اور اگر ایک ذرہ ψ_5 میں ایک ψ_7 میں اور ایک ψ_{17} میں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \tag{۵.۸۰}
$$

یعنی $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$, باقی تمام صفر ان تمام میں آخری تشکیل زیادہ سے زیادہ محتمل ہو گی چونکہ اسکو چھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجازتی توانائی E_n حاصل کرنے کا احتمال P_n کیا ہو گا؟ توانائی E_1 صرف اس صورت حاصل ہو گا جب ذرہ تیسری تشکیل مساوات 5.71 میں ہو اس تشکیل میں نظام ہونے کا اتفاق تیرہ میں سے تین ہے اور اس تشکیل میں

E_1 کے حصول کا احتمال $\frac{2}{3}$ لہٰذا $P_1 = \left(\frac{3}{13}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$ ۔ آپ E_5 کو تشکیل دو مساوات 5.70 تیرہ میں سے تین کا امکان جس کا احتمال $\frac{1}{3}$ یا تشکیل چار مساوات 5.72 تیرہ میں سے چھ امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ لہٰذا $P_5 = \left(\frac{3}{13}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{13}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{13}$ ۔ آپ E_7 کو صرف چار سے حاصل کر سکتے ہیں لہٰذا $P_7 = \left(\frac{6}{13}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ ۔ اسی طرح E_{11} صرف پہلی تشکیل سے مساوات 5.69 سے تیرہ میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہوگا لہٰذا $P_{11} = \left(\frac{1}{13}\right)$ ہوگا۔ اسی طرح $P_{13} = \left(\frac{3}{13}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{13}$ ، $P_{17} = \left(\frac{6}{13}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{13}$ اور $P_{19} = \left(\frac{3}{13}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{13}$ ہوگا۔ انکی تصدیق درج ذیل سے ہوگی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{2}{13}+\frac{1}{13}+\frac{2}{13}+\frac{2}{13}+\frac{1}{13} = 1.$$

یہ قابلِ ممیز ذرات کے لئے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات متماثل فرمیان ہوتے اپنی آسانی کے لئے چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پہلی تین تشکیلات جو دو یا اس سے بھی برا تین ذرات کے ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں خارج امکان ہوں گے لہٰذا چوتھی تشکیل میں صرف ایک حال ہوگا سوال 5.22الف دیکھیں۔ متماثل فرمیان کے لئے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات متماثل بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت ہر تشکیل میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22ب دیکھیں۔ لہٰذا $P_1 = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ، $P_5 = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ، $P_7 = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ، $P_{11} = \left(\frac{1}{4}\right)\times(1) = \frac{1}{4}$ ، $P_{13} = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$ ، $P_{17} = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ اور $P_{19} = \left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$ ہوتا۔ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح منحصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورت حال سے جہاں N ایک بہت بڑا عدد ہوگا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھا۔ چونکہ N کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو قابلِ ممیز ذرات کے لئے اس مثال میں $N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہوجائے گا کہ کسی بھی شماریاتی نقطہ نظر سے باقی تمام امکانات کو رد کیا جا سکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم درحقیقت انکی زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل میں تقسیم ہے۔ اگر یہ $N = 3$ کے لئے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم قابلِ ممیز ذرات کے لئے $N = 3$ کی صورت میں اخذ کرتے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عمومیت دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال ψ_5 میں ایک حال ψ_7 میں ایک اور حال ψ_{17} میں ایک متماثل تین فرمیان کا مکمل خلاف تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

(ب) تین متماثل بوزان کے لئے مکمل تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (ا) تینوں حال ψ_{11} میں ہوں، (ب) اگر دو ψ_1 اور ایک ψ_{19} میں ہو، (ج) اگر ایک حال ψ_5 ایک حال

ψ_7 اور ایک حال ψ_{17} میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں یک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات ہیں جو حراری توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی $E = \left(\frac{9}{2}\right)\hbar\omega$ ہے۔

(الف) اگر یہ تمام ایک جیسی کمیت کے قابل ممیز ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تشکیلات ہوں گے اور ہر ایک کے لئے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تشکیل کیا ہو گی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پیمائش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہو گا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیا ہو گی؟

(ب) یہی کچھ متماثل فرمیان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج) یہی کچھ متماثل بوزان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیں اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرا توانائیاں E_1 E_2 E_3 $\ldots$ انحطاط d_1 d_2 d_3 $\ldots$ ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد d_n جن کی توانائیاں E_n ہیں فرض کریں ہم کمیت m کے N ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تشکیل N_1 N_2 N_3 $\ldots$ میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں N_1 ذرات کی توانائی E_1 N_2 ذرات کی توانائی E_2 وغیرہ وغیرہ ہے سوال یہ کتنے مختلف طریقوں سے کیا جا سکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ اس مخصوص تشکیل کی مطابقتی کتنے منفرد حالات ہونگے اس کا جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \ldots)$ اس بات پر منحصر ہو گا کہ آیا ذرات قابل ممیز متماثل فرمیان یا متماثل بوزان ہے لہٰذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات قابل ممیز ہیں دستیاب N ذرات میں سے کتنے طریقوں سے N_1 کو منتخب کر کے پہلا ٹوکرا میں رکھا جا سکتا ہے جواب: ثنائی عددی سر N_1 کو N میں سے منتخب کرتا ہے

$$\binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \tag{۵.۸۱}$$

پہلا ذرہ N مختلف طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے جس کے بعد $(N - 1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N - 1$ مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-N_1+1) = \frac{N!}{(N-N_1)!}$$

لیکن یہ N_1 ذرات کے $N_1!$ مختلف مرتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہٰذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی ٹوکرا میں ان N_1 ذرات کو کتنی مختلف طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے چونکہ پہلے ٹوکرا میں d_1 حالات ہیں لہٰذا ہر ایک ذرہ کو d_1 مختلف طریقوں سے

چنانچہ جا سکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہونگے اس طرح ایک ٹوکرا جس میں d_1 منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی N میں سے N_1 ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہونگے

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}$$

دوسرے ٹوکرے میں صرف $(N-N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1,N_2,N_3,\dots) \tag{۵.۸۲}$$

$$=\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}\frac{(N-N_1-N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!}\dots \tag{۵.۸۳}$$

$$=N!\frac{d_1^{N_1}d_2^{N_2}d_3^{N_3}\dots}{N_1!N_2!N_3!\dots}=N!\prod_{n=1}^{infty}\frac{d_n^{N_n}}{N_n!} \tag{۵.۸۴}$$

یہاں رک کر اس نتیجہ کی تصدیق کیجیے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں متماثل فرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کے کونسا ذرا کس حال میں ہے ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص ایک ذرہ حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک N ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہذا N ویں ٹوکرا میں N_n بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1,N_2,N_3,\dots)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}_n!}{N_n!(\mathrm{d}_n-N_n)!} \tag{۵.۸۵}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر متماثل بوزان کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذرہ حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک N ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذرہ حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں N وی ٹوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم متماثل N_n ذرات کو d_n مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر مرتب احتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر $d_n=5$ اور $N_n=7$ کی صورت میں

$$\bullet\quad\bullet\quad\times\quad\bullet\quad\times\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\times\quad\bullet\quad\times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذرہ تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرا نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد N_n اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہیں جو ان نقطوں کو d_n گروہ میں خانہ بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جا سکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک دوسرے جیسے ہیں اور ان کو $N_n!$ مختلف مرتب اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف مرتب اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں N وی ٹوکرا میں d_n یک ذرہ حالات کو N_n ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقے ہوں گے

$$\frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n} \tag{۵.۸۶}$$

جس کی بنا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} \tag{۵.۸۷}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ

سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 75.574.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجیے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو الکراجی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتب اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ d ٹوکریوں میں N متماثل گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے زیر نوشت میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام N کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صریحاً $N = 1$، $N = 2$، $N = 3$، اور $N = 4$ کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل

حراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک دوسرے جتنا ہوگا یوں زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل $N_1, N_2, N_3, \dots$ وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تشکیل ہوگی جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N \tag{۵.۸۸}$$

اور

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E \tag{۵.۸۹}$$

پر پورا اترے اور جس کی $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ، $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت لگرانج مضرب کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \tag{۵.۹۰}$$

متعارف کر کے اس کے تمام تفرقات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0 \tag{۵.۹۱}$$

موجودہ صورت میں Q کی بجائے Q کی لوگارتھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگارتھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہٰذا Q کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جائے گی لہٰذا ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$G \equiv \ln(Q) + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۹۲}$$

جہاں α اور β لگرانج مضرب ہیں α اور β کے لحاظ سے تفرقات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں N_n کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے اگر ذرات قابل ممیز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دے گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty}[N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۹۳}$$

ہم مطابقتی تعداد مکین N_n کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین

$$\ln(z!) \approx z\ln(z) - z \qquad z \ll 1 \tag{۵.۹۴}$$

بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty}[N_n \ln(d_n)] - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n] + \ln(N!) + \alpha N + \beta E \tag{۵.۹۵}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۹۶}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لیے حل کرتے ہوئے ہم قابل ممیز ذرات کی زیادہ سے زیادہ محتمل تعداد ممکین حاصل کرتے ہیں

$$N_n = d_n e^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۹۷}$$

اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں تب Q کی قیمت مساوات 75.5 دیگی لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۹۸}$$

یہاں ہم N_n کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $N_n \gg d_n$ بھی فرض کرتے ہیں لہٰذا سٹرلنگ تخمین دونوں اجزاء کے لیے قابل استعمال ہو گی ایسی صورت میں

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n)\ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n\Big] + \tag{۵.۹۹}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۱۰۰}$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے N_n کے لیے حل کر کے ہم متماثل فرمیان کی تعداد ممکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمتیں N_n حاصل کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n}{e}^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۱۰۱}$$

آخر میں اگر ذرات متماثل بوسن ہوں تب Q کی قیمت مساوات 77.5 دیگی اور درج ذیل ہو گا

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۱۰۲}$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $N_n \gg 1$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین استعمال کرتے ہوئے

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{(N_n + d_n - 1)\ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha \tag{۵.۱۰۳}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۱۰۴}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر N_n کے لئے حل کرتے ہوئے ہم متماثل بوزان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha+\beta E_n)} - 1} \tag{۵.۱۰۵}$$

فرمیان کی صورت میں استعمال کرتا تخمین کو استعمال کرتے ہوئے شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا سوال ۵.۲۶: ترخیم $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر زیادہ سے زیادہ رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں لگرانج مضرب کی ترکیب سے تلاش کریں اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا

سوال ۵.۲۷:

ا. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فی صد خلل کتنا ہو گا

ب. خلل کو ایک فی صد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح z کی کم سے کم قیمت کیا ہو گی

۵.۴.۴ α اور β کے طبعی اہمیت

لگرانج مضرب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے منسلک بالترتیب مقدار معلوم α اور β پائے گئے ریاضیاتی طور پر تعداد مکین مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو واپس ملط شرائط مساوات 78.5 اور 79.5 میں پر کرتے ہوئے تعین کیا جاتا ہے البتہ کسی مخفیہ کے لیے مجموعہ کے حصول میں ہمیں اجازتی توانائیاں (E_n) اور ان کی انحطاط (d_n) کا معلوم ہونا ضروری ہے میں سہ آبادی لامتناہی چکور کنواں میں ایک جتنی کمیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعامل ذرات کی کامل گیس کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں اس سے ہم پر α اور α کی طبعی مفہوم عیاں ہوں گی حصہ 1.3.5 میں ہم نے اجازتی توانائیاں اخذ کی مساوات 39.5

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \tag{۵.۱۰۶}$$

جہاں درج ذیل تھا

$$\boldsymbol{k} = \left(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z}\right)$$

پہلے کی طرح یہاں بھی ہم مجموعہ کو تکمل میں بدلتے ہیں جہاں $\boldsymbol{k}$ ایک استمراری متغیر ہے اور جہاں $\boldsymbol{k}$ فضا کے π^3/V حجم میں ایک حال یا چکر s کی صورت میں $2s+1$ حالات پائے جاتے ہیں مثمن اول میں

کروی خولوں کو اپنی ٹوکریاں تصور کرتے ہوئے شکل 4.5 انحطاط یعنی ہر ٹوکری میں حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی

$$d_k = \frac{1}{8}\frac{4\pi k^2\,\mathrm{d}k}{8(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۰۷}$$

قابل ممیز ذرات مساوات 87.5 کیلئے پہلی مطلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^2\,\mathrm{d}k = Ve^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\Big(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}\Big)^{3/2} \tag{۵.۱۰۸}$$

دوسری مطلط شرط مساوات 79.5 درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^4\,\mathrm{d}k = \frac{3V}{2\beta}e^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

جس میں مساوات 98.5 سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E = \frac{3N}{2\beta} \tag{۵.۱۰۹}$$

اگر آپ مساوات 97.5 میں جزو چکر $2s+1$ شامل کریں تو وہ اسی نقطے پر حذف ہو جاتا ہے لہٰذا مساوات 99.5 تمام چکر کے لیے درست ہو گا مساوات 99.5 ہمیں درجہ حرارت T پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ کا یاد دلاتی ہے

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}k_BT \tag{۵.۱۱۰}$$

جہاں k_B بولٹزمن مستقل ہے یہ ہمیں β اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے

$$\beta = \frac{1}{k_BT} \tag{۵.۱۱۱}$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین آبادی لامتناہی چکور کنواں میں موجود ممیز ذرات کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہو گا کہ مختلف اشیاء کے لئے جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں β کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی یہ دلیل کی کتابوں میں دیا گیا ہے جس کو میں یہاں پیش نہیں کرتا میں مساوات 101.5 کو T کی تعریف مان لیتا ہوں روایتی طور پر α جو مساوات 98.5 کی مخصوص صورت سے ظاہر ہے کہ T کا تفاعل ہے کی جگہ کیمیاوی مخفیہ

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_BT \tag{۵.۱۱۲}$$

استعمال کر کے مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی ϵ کے کسی ایک مخصوص یک ذرا حال میں ذرات کی بلند تر محتمل عدد دے کسی ایک توانائی کے حامل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حامل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے خاطر صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہو گا

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسول وبولٹزمن تقسیم} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}+1} & \text{فرمی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}-1} & \text{بوس و آئنسٹائن} \end{cases} \tag{۵.۱۱۳}$$

قابل ممیز ذرات پر میکسویل وبولٹزمن تقسیم، متماثل فرمیان پر فرمی وڈیراک تقسیم اور متماثل بوزان پر بوس و آئنسٹائن تقسیم کا اطلاق ہو گا فرمی ڈیراک تقسیم $T0$ پر خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتا ہے

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \tag{۵.۱۱۴}$$

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہونگے ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی مخفیہ عین فرمی توانائی ہو گی

$$\mu(0) = E_F \tag{۵.۱۱۵}$$

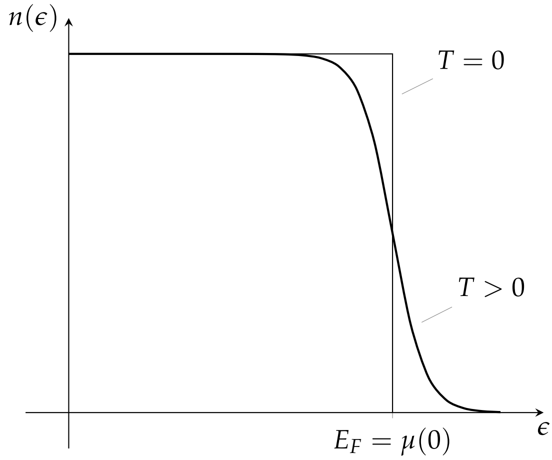
درجہ حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فرمی ڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے شکل ۵.۷ ہم قابل ممیز ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت T پر کل توانائی مساوات 99.5 درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \tag{۵.۱۱۶}$$

جبکہ مساوات 98.5 کے تحت کیمیاوی مخفیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\mu(T) = k_B T \Big[\ln\Big(\frac{N}{V}\Big) + \frac{3}{2} \ln\Big(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\Big) \Big] \tag{۵.۱۱۷}$$

میں مساوات 87.5 کی بجائے مساوات 91.5 اور 95.5 استقبال کرتے ہوئے متماثل فرمیان اور متماثل بوزان کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل



شکل ۵.۷: فرمی وڈیراک تقسیم برائے $T = 0$ اور صفر سے کچھ زیادہ T کے لئے۔

روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2}{e^{(h^2k^2/2m)-\mu}/k_BT \pm 1}\,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۱۸}$$

جہاں مثبت علامت فرمیان کو اور منفی علامت بوزان کو ظاہر کرتی ہے دوسری مسلط پابندی مساوات 79.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \frac{k^4}{e^{(h^2k^2/2m)-\mu}/k_BT \pm 1}\,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۱۹}$$

ان میں سے پہلا $\mu(T)$ اور دوسرا $E(T)$ تعین کرتا ہے مثلاً موخر الذکر سے ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E/\partial T$ حاصل کرتے ہیں بد قسمتی سے ان تکملات کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے چھوڑتا ہوں تاکہ آپ ان پر مزید غور کر سکیں سوال 28.5 اور 29.5 دیکھیں سوال ۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر متماثل فرمیان کے لیے مساوات 108.5 اور 109.5 کے تکملات کی قیمتیں حاصل کریں اپنے نتائج کا موازنہ مساوات 43.5 اور 45.5 کے ساتھ کریں دھیان رہے کہ مساوات 108.5 اور 109.5 میں الیکٹرانوں کے لیے اضافی جزو ضربی دو (2) پایا جاتا ہے جو چکر انحطاط کو ظاہر کرتی ہے

سوال ۵.۲۹:

ا. بوزان کے لیے دکھائیں کے کیمیاوی مخفیہ ہر صورت میں کم سے کم احازتی توانائی سے کم ہوگا اشارہ: $n(\epsilon)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے

ب. بالخصوص تمام T کے لیے کامل بوس گیس کے لیے $\mu(T) < 0$ ہوگا ایسی صورت میں N اور V کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کے T کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات 108.5 پر نظر ڈالیں

ج. حرارت T کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحران پیدا ہوتا ہے جسے بوس انجماد کہتے ہیں جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے تکمل کی قیمت $\mu = 0$ کے لیے حاصل کرتے ہوئے اس فاصل حرارت کسی کا کلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا اس فاصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہٰذا غیر مسلسل مجموعہ مساوات 78.5 کی جگہ استمراری تکمل مساوات 108.5 کا استعمال بے معنی ہو جائے گا اشارہ:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, \mathrm{d}X = \Gamma(s)\zeta(s) \tag{۵.۱۲۰}$$

جہاں Γ کو یولر کا γ تفاعل اور ζ کو ریمان زیٹا تفاعل کہتے ہیں ان کی موضوع اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں

د. ہیلیم کے لیے حرارت فاصل تلاش کریں اس درج حرارت پر اس کی کثافت $0.15\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہو گی تبصرہ ہیلیم کی تجرباتی حاصل حرارت فاصل کی قیمت $2.17K$ ہے

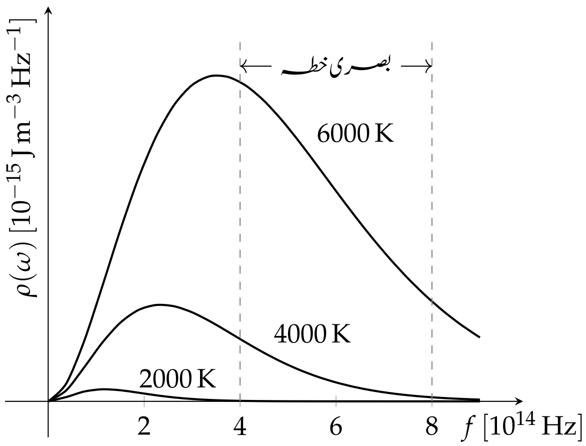
۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف

نوریہ برقناطیسی میدان کے کوانٹا ایک چکر کے متماثل بوزان ہوتے ہیں تاہم ان کی خاصیت یہ ہے کہ یہ بے کمیت ذرات ہیں جس کی بنا یہ قدرتی طور پر اضافیتی ہیں ہم درج ذیل چار دعوے جو غیر اضافی کوانٹم میکانیات کا حصہ نہیں ہے کو قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں (1) نوریہ کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = h\nu = \hbar\omega$ دیتی ہے (2) عدد موج کے اور تعدد کا تعلق $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ہے جہاں c روشنی کی رفتار ہے (3) چکر کے صرف دو حالات ہو سکتے ہیں کوانٹم عدد m کی قیمت $+1$ یا منفی 1 ہو سکتی ہے تاہم یہ صفر نہیں ہو سکتی ہے (4) نوریوں کی تعداد بقائی مقدار نہیں ہے درجہ حرارت بڑھانے سے فی حجم نوریوں کی تعداد بڑھتی ہے جزو 4 کی موجودگی میں پہلی مطلع پابندی مساوات 78.5 کا اطلاق یہاں نہیں ہوگا ہم مساوات 82.5 اور اس کی سادگی باقی آنے والی مساواتوں میں $\alpha \to 0$ پر کر کے جزو 4 کا اطلاق کر سکتے ہیں یوں نوریہ کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد مکین مساوات 95.5 درج ذیل ہوگا

$$N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{۵.۱۲۱}$$

ایک ڈبہ جس کا حجم V ہو میں آزاد نوریوں کے لیے d_k کی قیمت مساوات 97.5 کو چکر جزو 3 کی بنا دو سے ضرب دے کے حاصل ہوگا جس کو k جزو 2 کی بجائے ω کی صورت میں لکھتے ہیں

$$d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^3\, \mathrm{d}\omega \tag{۵.۱۲۲}$$



شکل ۵.۸: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات 113.5

یوں تعددی سعت $d\omega$ میں کثافت توانائی $N_\omega \hbar\omega / V$ کی قیمت $\rho(\omega)\,d\omega$ ہو گی جہاں $\rho\omega$ درج ذیل ہیں

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)} \tag{۵.۱۲۳}$$

یہ سیاہ جسم طیف کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو مقناطیسی میدان کی حرارت T پر توازن صورت میں فی اکائی حجم فی اکائی تعدد توانائی دیتی ہے اس کو تین مختلف حراروں پر شکل ۵.۸ میں ترسیم کیا گیا ہے

سوال ۵.۳۰:

ا. مساوات 113.5 استعمال کرتے ہوئے طول موج ساتھ $d\lambda$ میں کثافت توانائی تعین کریں اشارہ: $\rho(\omega)d\omega = \bar{\rho}(\pi)d\lambda$ لے کر $\bar{\rho}(\pi)$ کے لیے حل کریں

ب. وائن قانون ہٹاو اخذ کریں جو وہ طول موج دیتا ہے جس پر سیاہ جسم کی کثافت توانائی کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی

$$\lambda_{\text{بلندتر}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} m\boldsymbol{K}}{T} \tag{۵.۱۲۴}$$

اشارہ: آپ کو کیلکولیٹر یا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ماورائی مساوات $5e^{-x} = (5 - x)$ حل کرکے اعدادی جواب تین بامعنی ہندسوں تک حاصل کرنا ہو گا

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسم اخراج میں کل کثافت توانائی کا سٹیفن و بولٹزمن کلیہ اخذ کریں

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}\right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-3}) T^4 \tag{۵.۱۲۵}$$

اشارہ مساوات 110.5 کو استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں یاد رہے کہ $z(4) = \pi^4/90$ ہو گا

سوال ۵.۳۲: فرض کریں یک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ مساوات 43.2 میں دو غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت m ہے فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلی ہیجان حال میں پایا جاتا ہے درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں (الف) ذرات قابل ممیز ہے (ب) یہ متماثل بوزان ہے (ج) یہ متماثل فرمیان ہے چکر کو نظر انداز کریں اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر حال میں تصور کریں

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہوں اور تین منفرد یک ذرہ حالات $\psi_a(x)$ ، $\psi_b(x)$ ، اور $\psi_c(x)$ دستیاب ہوں ایک دونوں سے مختلف کتنے تین ذرہ حالات درج ذیل صورت میں تیار کیے جا سکتے ہیں (الف) اگر رات قابل ممیز ہو (ب) اگر یہ متماثل بوزان ہو (ج) اگر یہ متماثل فرمیان ہوں ضروری نہیں کہ ذرات مختلف حالات میں ہوں قابل ممیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے

سوال ۵.۳۴: دو آبادی لامتناہی چکور کنواں میں غیر متعامل الیکٹرانوں کی فرمی توانائی کا حساب کریں فی اکائی رقبہ الیکٹرانوں کی تعداد σ لیں

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے جنہیں سفید بونا کہتے ہیں کو تجاذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباو روکتی ہے مساوات 46.5 مستقل کثافت فرض کرتے ہوئے ایسے جسم کا رداس R درج ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے

ا. کل الیکٹران توانائی مساوات 45.5 کو رداس مرکزہ پروٹان جمع نیوٹران N فی مرکزہ الیکٹران کی تعداد q اور الیکٹران کی کمیت m کی صورت میں لکھیں

ب. ایک یکساں کثافت کرہ کی تجاذبی توانائی تلاش کریں اپنے جواب کو عالمگیر تجاذبی مستقل G ، R ، N ، اور مرکزہ کی کمیت M کی صورت میں لکھیں آپ دیکھیں گے کہ تجاذبی توانائی منفی ہو گی

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر جزو (الف) اور جزو (ب) کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2N^{1/3}}$$

دھیان رہے کہ کمیت بڑھنے سے رداس گھٹ رہا ہے ماسوائے N کے تمام مستقلات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں حقیقت میں جوہری عدد بڑھتے ہوئے q کی قیمت معمولی سی کم ہوتی ہے لیکن ہمارے لئے یہی کافی ہے جواب: $R = 7.6 \times 10^25 N^{-1/3}$

د. ہماری سورج کے برابر کمیت کے سفید بونا کا رداس کلومیٹروں میں حاصل کریں

ھ. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ جزو (د) میں سفید بونا کی فرمی توانائی کو الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے موازنہ کریں آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے سوال 36.5 دیکھیے گا

سوال۵.۳۶: ہم کلاسیکی حرکی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0^2$ پر کرتے ہوئے حصہ 1.3.5 کی آزاد الیکٹران گیس نظریہ کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ ہوگا بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہوگا

ا. مساوات 44.5 میں $\hbar^2k^2/2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فقرہ $\hbar ck$ پر کر کے E_{tot} کل حاصل کریں

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کے لئے سوال 35.5 کے جزو (الف) اور (ب) کو دوبارہ حل کریں آپ دیکھیں گے کہ R کی قیمت سے قطع نظر کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائے جائے گی اگر کل توانائی مثبت ہو تب انحطاطی قوتیں تجاذبی قوت سے تجاوز کرے گی جس کی بنا ستارہ پھولے گا اس کے برعکس اگر کل منفی ہو تب تجاذبی قوتیں جیتی ہیں جس کی بنا ستارہ منہدم ہوگا مرکزویہ کی وہ فاصل تعداد ہندسی معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تجاذبی انہدام واقع ہو اس کو چندر شیکھر حد کہتے ہیں جواب: 2.4×10^{57} مطابقتی ستارہ کی کمیت کیا ہوگی اپنے جواب کو سورج کی کمیت کے مضرب کے صورت میں لکھیں اس سے بھاری ستارے سفید بونا نہیں بناتے بلکہ مزید منہدم ہو کر اگر حالات درست ہو نیوٹران ستارہ کو جنم دیتے ہیں

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر مخالف β تحلیل $e^- + p^+ \rightarrow n + v$ تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے جس کی بنا نیوٹرینو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں آخر کار نیوٹران انحطاطی دباو انہدام کو روکتا ہے جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران انحطاطی قوتوں نے کیا سوال 35.5 دیکھیں ہماری سورج کے برابر کمیت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں ساتھ ہی نیوٹران فرمی توانائی کا حساب کر کے ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جا سکتا ہے

سوال۵.۳۷:

ا. تین ابعادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ سوال 38.4 قابل ممیز ذرات کا کیمیاوی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں یہاں مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جا سکتی ہیں یاد رہے کہ لامتناہی چکور کنواں کی مثال میں تکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا تھا ہندسی تسلسل

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{۵.۱۲۶}$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{x}{1-x}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

حاصل ہوگا اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں جواب

$$E = \frac{3}{2}N\hbar\omega\Big(\frac{1+e^{-\hbar\omega/k_BT}}{1-e^{-\hbar\omega/k_BT}}\Big) \tag{۵.۱۲۷}$$

ب. تحدیدی حد $k_B T \ll \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں

ج. مسئلہ مساوی خانہ بندی کی روشنی میں کلاسیکی حد $k_B T \gg \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں تین ابعادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے درجات آزادی کتنے ہوں گے

جوابات

فرہنگ