کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

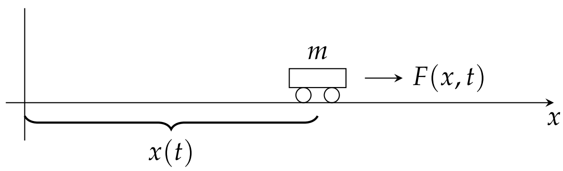
28 اکتوبر 2011

باب ۱

تفاعل موج

۱.۱ مساوات شروڈنگر

فرض کریں محور x پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $F(x,t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت t پر متعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کا اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں، متعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے متعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خورد بینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو مخفی توانائی[1] پر تفرق لکھا جا سکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$، لہٰذا نیوٹن کا قانون $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے ذریعہ ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک "ذرہ" ایک بُعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

[1] مقناطیسی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہو گا لیکن یہاں ہم ان کا تذکرہ نہیں کر رہے ہیں۔ نیز، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی $(v \ll c)$ تصور کریں گے۔

کوانٹائی میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کے **تفاعل موج**[2]، جس کی علامت $\Psi(x, t)$ ہے، کو **مساوات شروڈنگر**[3]:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2} + V\Psi \tag{۱.۱}$$

حل کر کے حاصل کرتے ہیں جہاں i منفی ایک (-1) کا جذر اور $\hbar$ پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم 2π ہو گا۔

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,572 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \tag{۱.۲}$$

شروڈنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات (عموماً $\Psi(x, 0)$) استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x, t)$ کا تعین کرتی ہے، جیسے کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے قاعدہ نیوٹن $x(t)$ متعین کرتا ہے۔

۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں؟ ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج (جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے) فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے t پر یہ x کا تفاعل ہو گا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کا **شماریاتی مفہوم**[4] پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحہ t پر نقطہ x پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x, t)|^2$ ہو گا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ[5] درج ذیل ہے۔

$$\int_a^b \left|\Psi(x, t)\right|^2 \mathrm{d}x = \begin{cases} \text{لمحہ } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ} \\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا} \\ \text{احتمال} \end{cases} \tag{۱.۳}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبے کے برابر ہو گا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ A پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ B پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا پر اس نظریے سے ذرے کے بارے میں تمام قابل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جاننے کے باوجود ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے قاصر رہتے ہیں۔ کوانٹائی میکانیات ہمیں تمام ممکنہ نتائج کی صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔

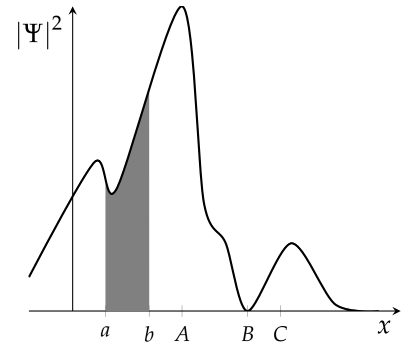
---

[2] wave function

[3] Schrodinger align

[4] statistical interpretation

[5] تفاعل موج خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$ (جہاں Ψ^* تفاعل موج Ψ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔



شکل ۲.۱: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ a اور b کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ A کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ B کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

یوں کوانٹائی میکانیات میں **عدم تعین**[6] کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹائی میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتا ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹائی میکانی نظریے میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام C پر پایا[7] جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹائی عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقات فکر کے بارے میں علم حاصل ہو گا۔

1) **حقیقت پسند**[8] سوچ: ذرہ مقام C پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن شٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹائی میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گی کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ C پر ہی تھا اور کوانٹائی میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے قاصر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعیّنیت فطرتاً نہیں پائی جاتی بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے مطابق کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں تھا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں Ψ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (**خفیہ متغیرات**[9] کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

2) **تقلید پسند**[10] سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ ایک مقام پر "ظاہر ہو جائے" (ہمیں اس بارے میں سوال کرنے کی اجازت نہیں کہ ذرہ مقام C کو کیوں منتخب کرتا ہے)۔ مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل ڈالتا ہے بلکہ یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی

indeterminacy[6]

[7] ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی خلل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ C کے قریب پایا گیا۔

realist[8]

hidden variables[9]

orthodox[10]

عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرے کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے ہیں۔ "یہ تصور جو **کوپن ہیگن مفہوم**[11] کہلاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہرین طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ تصور درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھا عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصے کے بحث مباحثوں کے بعد بھی واضح نہیں۔

3) **انکاری**[12] سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حال نہیں بتا پاتا لہٰذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبقات فکر کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرے کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربے پر قابل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جا سکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی علمی فکر اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جان بل کی دلیل سمجھ میں آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں[13]۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطے پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتا ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کے عائد کردہ شماریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرے پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربے میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے جیسا کہ شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر **منہدم**[14] کر کے اس کو سوزن بننے پر مجبور کرتا ہے (جس کے بعد تفاعل موج مساوات شروڈنگر کے تحت ارتقا پائے گا لہٰذا دوسری پیمائش جلد کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دو بہت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں: پہلے میں تفاعل موج وقت کے ساتھ مساوات شروڈنگر کے تحت

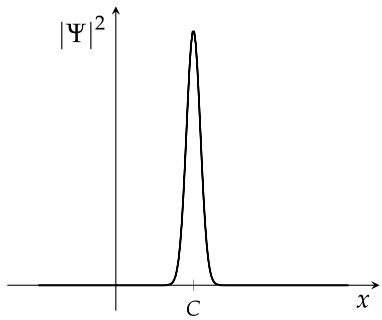
---

[11] Copenhagen interpretation

[12] agnostic

[13] یہ فقرہ کچھ زیادہ مثالی ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں باب ۱۲ میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر مقامی خفیہ متغیر نظریات اور دیگر بناوٹیں مثلاً **متعدد دنیاوں جیسی** تشریح موجود ہیں جن کی تینوں سوچوں کے ساتھ مطابقت نہیں ہے۔ بہر حال، فی الحال بہتر ہے کہ ہم کوانٹائی نظریے کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کے مسائل پر فکر کریں۔

[14] collapses



شکل ۱.۳: تفاعل موج کا انہدام: اس لمحے کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

ارتقا پاتا ہے، اور دوسرا جس میں پیمائش Ψ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر منہدم کرتی ہے[۱۵]۔

۱.۳ احتمال

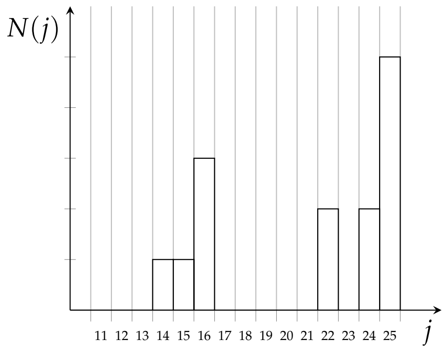
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹائی میکانیات کی شماریاتی تشریح کی جاتی ہے لہٰذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامات اور اصطلاحات سیکھنی ہوں گی جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔

فرض کریں ایک کمرہ میں 14 افراد موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک فرد،
- 15 سال عمر کا ایک فرد،
- 16 سال عمر کے تین افراد،
- 22 سال عمر کے دو افراد،
- 24 سال عمر کے دو افراد،
- 25 سال عمر کے پانچ افراد۔

[۱۵] کوانٹائی میکانیات میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور حیران کن ہے کہ انسان سوچ میں پڑ جاتا ہے کہ پیمائش در حقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خورد بینی (کوانٹائی) نظام اور کلاں بینی (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسے بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسے ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مدہوش "مشاہدہ کار" کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسے وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس کٹھن مسئلہ پر دوبارہ باب ۱۲ میں بات کروں گا؛ ابھی کے لئے ہم سادہ سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنسدان تجربہ گاہ میں فیتا، گھڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔)



شکل ۱.۴: مستطیلی ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ دکھائی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تو یوں لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
N(14) &= 1 \\
N(15) &= 1 \\
N(16) &= 3 \\
N(22) &= 2 \\
N(24) &= 2 \\
N(25) &= 5
\end{aligned}$$

جبکہ، مثال کے طور پر، $N(17)$ کی قیمت صفر ہوگی۔ کمرے میں افراد کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j) \tag{۱.۴}$$

(اس مثال میں، ظاہر ہے کہ، $N = 14$ ہوگا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ابھرتے ہیں۔

سوال 1: اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک فرد منتخب کریں تو اس بات کا کیا **احتمال** ہوگا کہ اس فرد کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 افراد ہیں اور ہر ایک فرد کے انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہٰذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کے فرد کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تو $P(14) = 1/14$، $P(15) = 1/14$، $P(16) = 3/14$، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$P(j) = \frac{N(j)}{N} \tag{۱.۵}$$

دھیان رہے کہ چودہ یا پندرہ سال عمر کے فرد کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کے انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہو گا۔ واضح رہے کہ تمام احتمالات کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہو گا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1 \tag{۱.۶}$$

سوال 2: کونسی عمر سب سے **زیادہ محتمل**[۱۶] ہے؟ جواب: 25 ، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عمومی طور پر سب سے زیادہ احتمال کا j وہی j ہو گا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3: **وسطانیہ**[۱۷] عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہٰذا جواب 23 ہو گا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ j کی وہ قیمت ہو گی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کا احتمال ایک جیسا ہو۔)

سوال 4: ان کی **اوسط**[۱۸] عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14)+(15)+3(16)+2(22)+2(24)+5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر j کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہو گی۔

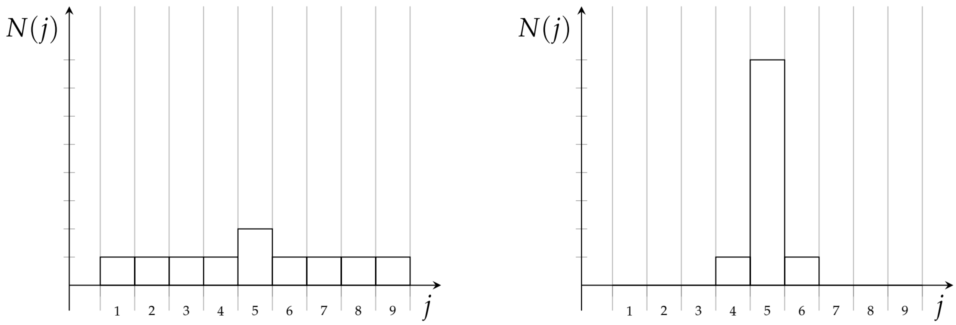
$$\langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j) \tag{۱.۷}$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹائی میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو **توقعاتی قیمت**[۱۹] کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5: عمروں کے مربعوں کی اوسط کیا ہو گی؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $15^2 = 225$ ، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $16^2 = 256$ ، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ان کے مربعوں کی اوسط درج ذیل ہو گی۔

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j) \tag{۱.۸}$$

[۱۶] most probable
[۱۷] median
[۱۸] mean
[۱۹] expectation value



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیمات میں وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے اور سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے، تاہم ان ترسیمات میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر j کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle f(j)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P(j) \tag{۱.۹}$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) یاد رہے کہ مربع کی اوسط $\langle j^2\rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j\rangle^2$ کے برابر نہیں ہو گی۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرے میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہوں تب $\langle x^2\rangle = 5$ جبکہ $\langle x\rangle^2 = 4$ ہو گا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورت میں واضح فرق پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے، وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے اور اجزاء کی تعداد ایک جیسی ہے۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے قریب نوکیلے ابھار جیسی ہے جبکہ دوسری شکل افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل کی مانند ہو گی جبکہ دیہاتی علاقے میں ایک ہی کمرے پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل سے ظاہر ہو گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے کسی بھی مقدار کی تقسیم کی "وسعت"، عددی صورت میں درکار ہو گی۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا فرق

$$\Delta j = j - \langle j\rangle \tag{۱.۱۰}$$

لے کر تمام Δj کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned}\langle\Delta j\rangle &= \sum \left(j - \langle j\rangle\right) P(j) = \sum jP(j) - \langle j\rangle \sum P(j)\\ &= \langle j\rangle - \langle j\rangle = 0\end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j \rangle$ مستقل ہے لہٰذا اس کو مجموعے کی علامت سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔) اس مسئلے سے چھٹکارا حاصل کرنے کے لئے آپ Δj کی مطلق قیمتوں کی اوسط لے سکتے ہیں لیکن Δj کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے نجات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \tag{۱.۱۱}$$

اس قیمت کو تقسیم کی **تغیریت**[20] کہتے ہیں جبکہ تغیریت کے جذر σ کو **معیاری انحراف**[21] کہتے ہیں۔ روایتی طور پر σ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد وسعت کی پیمائش مانا جاتا ہے۔

ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\
&= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\
&= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\
&= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2
\end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \tag{۱.۱۲}$$

عملی استعمال میں σ اس کلیے سے بہت آسانی سے حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے فرق کا جذر لے لیں۔ جیسا کہ میں ذکر کر چکا ہوں $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا کہ آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں σ^2 غیر منفی ہو گا، لہٰذا مساوات ۱.۱۲ سے مراد درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \tag{۱.۱۳}$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت میں برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی وسعت نہ پائی جاتی ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آئے ہیں جن کی قیمتیں جداگانہ ہوتی ہیں (گزشتہ مثال میں ہم نے افراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے، لہٰذا j عدد صحیح تھا)۔ تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے

[20] variance
[21] standard deviation

اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کے 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال دو دن کے بیچ عمر کا احتمال، 16 سال اور 16 سال ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگنا ہو گا۔ (سوائے ایسی صورت کے جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچے پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس قاعدے کے اطلاق کے نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ، یا زیادہ محفوظ رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی کم وقفے کی بات کر رہے ہیں۔) لہٰذا یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\rho(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{بلا منصوب منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x+\mathrm{d}x) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \qquad (۱.۱۴)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ **کثافت احتمال**[22] کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ a تا b کے بیچ x پائے جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا تکمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x \qquad (۱.۱۵)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (۱.۱۶)$$

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (۱.۱۷)$$

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (۱.۱۸)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \qquad (۱.۱۹)$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی h ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچی جاتی ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہو گی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کی وقتی اوسط کیا ہو گی؟[23]

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہو گا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ t پر فاصلہ x

[22] probability density

[23] ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہو گا کہ میں متناہی نمونے (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر "اصلی" اوسط میں فرق نہیں کر پا رہا۔ یہ تجربہ کرنے والے کے لئے مصیبت پیدا کر سکتا ہے، خصوصاً جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے غرض ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تخمین ہے۔

درج ذیل ہو گا۔

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

اس کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt$ ہو گی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہو گا۔ وقفہ $\mathrm{d}t$ میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{\mathrm{d}t}{T}$ ہو گا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سعت $\mathrm{d}x$ میں فاصلہ دے درج ذیل ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہو گی۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \qquad (0 \le x \le h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہو گی۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\,\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے ہم اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x\rangle = \int_0^h x\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\,\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے، جیسے کہ ہمیں متوقع تھا۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال خود لامتناہی ہو سکتی ہے جبکہ احتمال (یعنی ρ کا تکمل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم) ہو گا۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳.۱ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

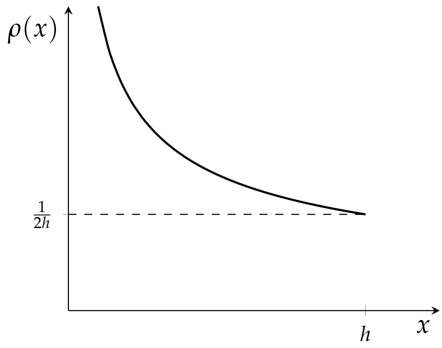
ا. اوسط کا مربع $\langle j\rangle^2$ اور مربعوں کا اوسط $\langle j^2\rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر j کے لیے Δj دریافت کریں، اور مساوات ۱.۱۱ کو استعمال کر کے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزو-الف اور جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

ا. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔



شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

ب. بلاواسطہ منتخب کردہ تصویر میں، اوسط سے ایک معیاری انحراف (کے برابر فاصلہ) سے زیادہ دور، x پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں، جہاں A ، a اور λ حقیقی مثبت مستقلات ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ تکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

ا. مساوات ۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے A کی قیمت کا تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط $\langle x^2 \rangle$ اور معیاری انحراف σ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

۱.۴ معمول زنی

ہم تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ t پر ایک ذرے کا نقطہ x پر پائے جانے کی کثافت احتمال $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ ہو گی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت $|\Psi|^2$ کا تکمل 1 کے برابر ہو گا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{۱.۲۰}$$

اس حقیقت کے بغیر شماریاتی مفہوم بے معنی ہو گا۔

البتہ، یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونی چاہیے۔ تفاعل موج کا تعین مساوات شروڈنگر کرتی ہے اور Ψ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت میں جائز ہو گا جب ان دونوں میں اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x,t)$ حل ہو تب $A\Psi(x,t)$ بھی حل ہو گا، جہاں A کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی **معمول زنی**[۲۴] کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کی **معمول زنی** کریں۔ مساوات شروڈنگر کے بعض حلوں کا تکمل لامتناہی ہو گا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا۔ یہی کچھ مہمل حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہو گا۔ ایسا تفاعل موج جو **ناقابل معمول زنی**[۲۵] ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا، لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، مساوات شروڈنگر کے **مربع متکامل**[۲۶] حل ہونگے۔[۲۷]

یہاں رک کر غور کریں! فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر ایک تفاعل موج کی معمول زنی کی جاتی ہے۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ Ψ ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گا؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کی معمول زنی کریں چونکہ ایسی صورت میں A وقت t کا تابع تفاعل ہو گا نا کہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ مساوات شروڈنگر کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شروڈنگر کی یہ خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شروڈنگر اور شماریاتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹائی نظریہ بے معنی ہو گا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے، لہٰذا ہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x \tag{۱.۲۱}$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، تکمل صرف t کا تفاعل ہے، لہٰذا میں نے پہلے فقرہ میں کل تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ متکمل t اور x دونوں کا تفاعل ہے لہٰذا میں نے یہاں جزوی تفرق $\partial/\partial t$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) = \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi \tag{۱.۲۲}$$

اب مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar}V\Psi \tag{۱.۲۳}$$

---

[۲۴] normalization
[۲۵] non-normalizable
[۲۶] square-integrable
[۲۷] ظاہر ہے کہ $|x| \to \infty$ کی صورت میں $\Psi(x,t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہو گا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کی ہیئت غیر معین رہتی ہے۔ تاہم جیسے ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی۔

ہو گا اور ساتھ ہی (مساوات ۲۳.۱ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^* \tag{۱.۲۴}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi^*\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi^2\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\Big)\Big] \tag{۱.۲۵}$$

مساوات ۲۱.۱ میں تکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \big|\Psi(x,t)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \tag{۱.۲۶}$$

یاد رہے کہ **قابل معمول زنی**[۲۸] ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \to \pm\infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x,t)$ صفر[۲۹] کو پہنچتا ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \big|\Psi(x,t)\big|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{۱.۲۷}$$

لہٰذا تکمل (وقت کا غیر تابع) مستقل ہو گا؛ لمحہ $t = 0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔

سوال ۴.۱: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے جہاں A ، a اور b مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\frac{x}{a} & 0 \le x \le a \\ A\frac{(b-x)}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ا. تفاعل موج Ψ کی معمول زنی کریں (یعنی a اور b کی صورت میں A تلاش کریں)۔

ب. متغیر x کے لحاظ سے $\Psi(x,0)$ ترسیم کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر کس نقطے پر ذرہ پائے جانے کا احتمال سب سے زیادہ ہو گا؟

د. نقطہ a کے بائیں جانب ذرہ پائے جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $b = a$ اور $b = 2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ھ. متغیر x کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

[۲۸] normalizable

[۲۹] ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی گھمبیر مثالیں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے؛ اور لامتناہی پر تفاعلات موج ہر صورت صفر کو پہنچتے ہیں۔

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں A ، λ اور ω مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا **مخفیہ**[۳۰] V ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

ا. تفاعل موج Ψ کی معمول زنی کریں۔

ب. متغیرات x اور x^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر x کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر x کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x\rangle + \sigma)$ اور $(\langle x\rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے x کی "پھیل" کو σ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہو۔ ذرہ اس سعت سے باہر پائے جانے کا احتمال کتنا ہو گا؟

۱.۵ معیار حرکت

حال Ψ میں پائے جانے والے ذرے کے مقام x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \tag{۱.۲۸}$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x|\Psi|^2\,\mathrm{d}x$ حاصل ہو گی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ بلا تعیین ہے) اس قیمت پر تفاعل موج کو سوزن پر منہدم کرے گی جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو دوبارہ وہی نتیجہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں $\langle x\rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کا اوسط ہو گا جو یکساں حال Ψ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرے کو دوبارہ ابتدائی حال Ψ میں لائیں گے یا آپ متعدد ذرات کے **فرقہ**[۳۱] کو ایک ہی حال Ψ میں لا کر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x\rangle$ ہو گا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار میں شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں، اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال Ψ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے قریب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرے کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا مستطیلی ترسیم $|\Psi|^2$ کے لگ بھگ ہو گا، جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x\rangle$ ہو گی۔ (چونکہ ہم متناہی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہٰذا یہ توقع نہیں کی جا سکتی کہ جوابات عین درست حاصل ہوں گے، لیکن

---

[۳۰] potential
[۳۱] ensemble

بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ قریب حاصل ہوں گے۔)) مختصراً، توقعاتی قیمت ذرات کے فرق پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہو گی نہ کہ کسی ایک ذرے پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ Ψ وقت اور مقام کا تابع ہے لہٰذا وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $\langle x \rangle$ تبدیل ہو گا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل[32] لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} = \int x \frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\right) \mathrm{d}x \tag{۱.۲۹}$$

تکمل بالحصص[33] کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\right) \mathrm{d}x \tag{۱.۳۰}$$

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا پر رد کیا کہ $(\pm)$ لامتناہی پر Ψ کی قیمت 0 ہو گی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ تکمل بالحصص لاگو کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۱}$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ x کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے نہ کہ ذرے کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرے کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جا سکتی۔ کوانٹائی میکانیات میں ذرے کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام بلا تعیین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی بلا تعیین ہو گی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم Ψ جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرے کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہو گی۔

$$\langle v \rangle = \frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} \tag{۱.۳۲}$$

---

[32] چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں تکمل کی حدود نہیں لکھ رہا ہوں۔

[33] قاعدہ ضرب کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g$$

ہو گا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g\,\mathrm{d}x + fg\big|_a^b$$

یوں تکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جزو سے تفرق اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت آپ کو منفی علامت اور اضافی سرحدی جزو کی صورت میں ادا کرنی ہو گی۔

مساوات ۱.۳۱ ہمیں Ψ سے بلاواسطہ $\langle v \rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے **معیار حرکت**[۳۴] $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$\langle p \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} = -i\hbar \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \tag{۱.۳۳}$$

میں $\langle x \rangle$ اور $\langle p \rangle$ کو زیادہ معنی خیز انداز میں پیش کرتا ہوں۔

$$\langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi \, \mathrm{d}x \tag{۱.۳۴}$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \Big(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\Big) \Psi \, \mathrm{d}x \tag{۱.۳۵}$$

کوانٹائی میکانیات میں مقام کو **عامل**[۳۵] x "بیان" کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ "بیان" کرتا[۳۶] ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بیچ لکھ کر تکمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر مقداروں کا کیا ہو گا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جا سکتا ہے (جہاں یک بُعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا)۔ کسی بھی مقدار، مثلاً $Q(x, p)$، کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر p کی جگہ $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ پُر کر کے حاصل عامل کو Ψ^* اور Ψ کے بیچ لکھ کر درج ذیل تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q\Big(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Big) \Psi \, \mathrm{d}x \tag{۱.۳۶}$$

مثال کے طور پر حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x \tag{۱.۳۷}$$

---

[۳۴] momentum

[۳۵] operator

[۳۶] ایک "عامل" آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تفاعل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہو گا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ x سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ x کے لحاظ سے تفرق لیں (اور نتیجہ کو $-i\hbar$ سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات ($\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ ، $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$ ، $\partial^2/\partial x \partial y$ ، وغیرہ) یا ضرب کار (2 ، i ، x^2 ، وغیرہ)، اور یا ان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

حال Ψ میں ایک ذرے کی کسی بھی حرکی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہو گی۔ مساوات ۱.۳۴ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ بوہر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے، مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ حقیقتاً یہ (کلاسیکی میکانیات کے لحاظ سے) کام کرنے کا اتنا نیا انداز ہے کہ بہتر ہو گا آپ اس کے استعمال کی مشق کریں؛ ہم (باب ۳ میں) اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر قائم کریں گے۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر تکمل بالحصص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو x کے اوپر سے گزار کر، یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو گا؟

سوال ۱.۷: $\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔ جواب:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \tag{۱.۳۸}$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ **مسئلہ اہرنفسٹ**[۳۷] کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

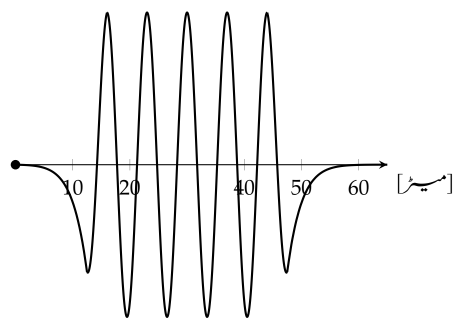
سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو x اور t کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہو گا البتہ کوانٹائی میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب $e^{-iV_t/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہو گا؟

۱.۶ اصول عدم یقینیت

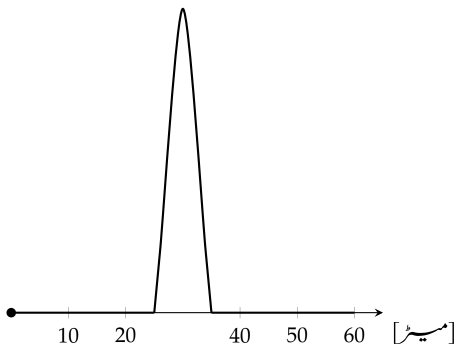
فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سرا اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے قاصر ہوں گے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر **طول موج**[۳۸] پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھٹکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہو گی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہٰذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہو گا۔ اب آپ طول موج بتانے سے قاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام بتانا ممکن ہو گا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہو گا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہو گا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج خاصی حد تک قابل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہو گا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم قابل تعین ہو گا۔ فوریئر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

---

[۳۷] Ehrenfest's theorem
[۳۸] wavelength



شکل ۱.۷: اس موج کا طول موج اچھا خاصا معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصا معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹائی میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے Ψ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق **کلیہ ڈی بروگ لی**[۳۹]

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \tag{۱.۳۹}$$

پیش[۴۰] کرتا ہے۔ یوں طول موج میں وسعت معیار حرکت میں وسعت کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہو گا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔ اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۱.۴۰}$$

جہاں σ_x اور σ_p بالترتیب x اور p کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور **اصول عدم یقینیت**[۴۱] ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں "وسعت" سے مراد یہ ہے کہ یکساں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو (Ψ کو نوکیلی بنا کر) ایسا

[۳۹] De Broglie formula

[۴۰] میں اس کا ثبوت جلد پیش کروں گا۔ بعض مصنفین کلیہ ڈی بروگ لی کو ایک مسلمہ لے کر عامل $\frac{\hbar}{i}\partial/\partial x$ سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے دھیان ہٹاتی ہے۔

[۴۱] uncertainty principle

حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں قریب قریب نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اسی طرح آپ چاہیں تو (Ψ کو ایک لمبی سائن نما موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے قریب قریب ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نا ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۴۰ در حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں σ_x اور σ_p کی جسامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ Ψ کو ایک لمبی بلدار لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی تواتر نہ پایا جاتا ہو، σ_x اور σ_p کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

جہاں A اور a مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. مستقل A تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے Ψ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. x ، x^2 ، p اور p^2 کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. σ_x اور σ_p کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل π کے ہندسی توسیع کے اولین 25 ہندسوں $(3,1,4,1,5,9,\cdots)$ پر غور کریں۔

ا. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہر ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہو گا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہو گا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہو گا؟ اوسط قیمت کیا ہو گی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہو گا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیما کی خراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے ٹکرا کر 0 اور π زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

ا. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہو گا؟ اشارہ: زاویہ θ اور $(\theta + \mathrm{d}\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ متغیر θ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں ρ صفر ہو گا)۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہو گا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle\theta\rangle$ ، $\langle\theta^2\rangle$ اور σ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle\sin\theta\rangle$ ، $\langle\cos\theta\rangle$ اور $\langle\cos^2\theta\rangle$ تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیما کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے x محدد (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

ا. $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟ x کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا $+2r$ ترسیم کریں جہاں r سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ: x اور $(x + \mathrm{d}x)$ کے بیچ ψ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x)\,\mathrm{d}x$ ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں θ کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ $\mathrm{d}\theta$ کا مطابقتی $\mathrm{d}x$ کیا ہو گا؟

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ اور σ تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو (ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ L رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر L لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہو گا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹھہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ t پر $(a < x < b)$ کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}P_{ab}}{\mathrm{d}t} = J(a,t) - J(b,t)$$

جہاں

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Big)$$

ہے۔ $J(x,t)$ کی اکائی کیا ہو گی؟ تبصرہ: چونکہ J آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ x پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے لہٰذا J کو **رو احتمال**[۴۲] کہتے ہیں۔ اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب خطہ کے ایک سر میں احتمال کے آمد خطہ کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہو گا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال ρ کیا ہو گا؟ (یہ زیادہ مزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک **غیر مستحکم ذرہ**[۴۳] کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا "عرصہ حیات" τ ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (ممکنہ طور پر) قوت نمائی گھٹے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big|\Psi(x,t)\big|^2 \,\mathrm{d}x = e^{-t/\tau}$$

---

[۴۲] probability current
[۴۳] unstable particle

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۴ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی V ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں V کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں V_0 حقیقی مخفی توانائی اور Γ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

ا. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}p$$

ب. $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات Γ کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شروڈنگر کے کسی بھی دو عدد (قابل معمول زنی) حل Ψ_1 ، Ψ_2 کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\Psi_2\,\mathrm{d}x = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \le x \le +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ا. **معمول زنی مستقل**[۴۴] A تلاش کریں۔

ب. لمحہ $t = 0$ پر x کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر p کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو $P = m\,\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د. x^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ھ. p^2 کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و. $x\,(\sigma_x)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز. $p\,(\sigma_p)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

---

[۴۴] normalization constant

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹائی میکانیات اس وقت کارآمد ہو گی جب ذرے کاڈی بروگلی طول موج $(\hbar/p)$ نظام کی جسامت (d) سے زیادہ ہو۔ درجہ T (کیلون) پر حراری توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکی توانائی درج ذیل ہو گی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_b T$$

جہاں k_b بولٹزمن مستقل ہے لہٰذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹائی میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہو گا۔

ا. **ٹھوس اجسام:** فاصلہ جال ٹھوس اجسام میں تقریباً $d = 0.3\,\text{nm}$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران [45] کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مراکزہ کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ (**سوڈیم** [46] کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹائی میکانی ہوں گے جبکہ جوہری مراکزہ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹائی میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مائع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہو گا) ماسوائے $4\,\text{K}$ سے کم درجہ حرارت پر موجود **ہیلیم** [47] کے لئے۔

ب. **گیس**: میکانی دباو P پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون $(PV = Nk_B T)$ استعمال کر کے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب: $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5}P^{2/5}$؛ ظاہر ہے ہم m کو چھوٹے سے چھوٹا اور P کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیس کو کوانٹائی میکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباو پر ہیلیم کے اعداد پر کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا **بیرونی فضا** [48] میں (جہاں درجہ حرارت $3\,\text{K}$ اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً $1\,\text{cm}$ ہے) ہائیڈروجن کوانٹائی میکانی ہو گا؟

---

[45] ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مرکزہ سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کا رداس ہو گا۔ اس کے برعکس، بیرون ترین الیکٹران کہیں نہیں جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے فاصلہ جال کو موزوں فاصلہ لیا جا سکتا ہے۔ یہ مسئلہ بیرونی الیکٹران کے لئے ہے۔

[46] sodium

[47] helium

[48] outer space

جوابات

فرہنگ