# کوانٹم میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

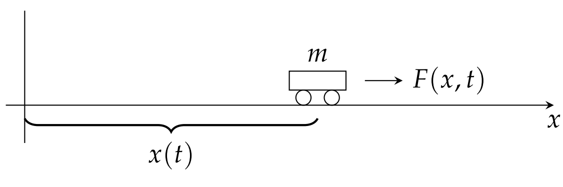
28 اکتوبر 2011

# باب ۱

# تفاعل موج

## ۱.۱ شروڈنگر مساوات

فرض کریں محور $x$ پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہو پر قوت $F(x,t)$ عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام $x(t)$ کسی بھی وقت $t$ پر متعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کا اسراع، سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$، معیار حرکت $p = mv$ یا حرکی توانائی $T = \frac{1}{2}mv^2$ یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں، متعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم $x(t)$ کیسے متعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون $F = ma$ بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو مخفی توانائی[1] پر تفرق لکھا جا سکتا ہے $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$، لہٰذا نیوٹن کا قانون $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جائے گا۔) ابتدائی معلومات، جو عموماً لمحہ $t = 0$ پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے ذریعہ ہم $x(t)$ دریافت کر سکتے ہیں۔




شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک "ذرہ" ایک بُعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

[1] مقناطیسی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہو گا لیکن یہاں ہم ان کا تذکرہ نہیں کر رہے ہیں۔ نیز، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی $(v \ll c)$ تصور کریں گے۔

کوانٹم میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کے **تفاعل موج**[۲]، جس کی علامت $\Psi(x,t)$ ہے، کو **شروڈنگر مساوات**[۳]:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}+V\Psi \tag{1.1}$$

حل کرکے حاصل کرتے ہیں جہاں $i$ منفی ایک $(-1)$ کا جذر اور $\hbar$ پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم $2\pi$ ہوگا۔

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.054\,572\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \tag{1.2}$$

شروڈنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مماثل کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات (عموماً $\Psi(x,0)$) استعمال کرتے ہوئے شروڈنگر مساوات، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے، $\Psi(x,t)$ کا تعین کرتی ہے، جیسے کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے قاعدہ نیوٹن $x(t)$ متعین کرتا ہے۔

## ۱.۲ شماریاتی مفہوم

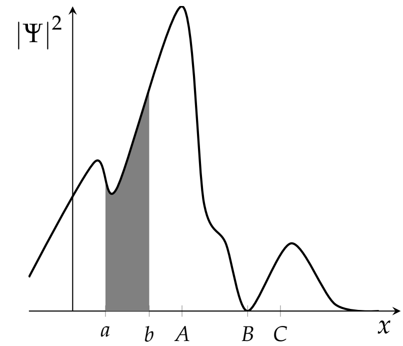
تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جانتے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں؟ ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج (جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے) فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے $t$ پر یہ $x$ کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کا **شماریاتی مفہوم**[۴] پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحہ $t$ پر نقطہ $x$ پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال $|\Psi(x,t)|^2$ ہوگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ[۵] درج ذیل ہے۔

$$\int_a^b\left|\Psi(x,t)\right|^2\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{لمحہ } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ}\\ \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا}\\ \text{احتمال}\end{cases} \tag{1.3}$$

احتمال $|\Psi|^2$ کی ترسیم کے نیچے رقبے کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ $A$ پر پایا جائے گا جہاں $|\Psi|^2$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ نقطہ $B$ پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا پر اس نظریے سے ذرے کے بارے میں تمام قابل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جاننے کے باوجود ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے قاصر رہتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات ہمیں تمام ممکنہ نتائج کی صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔ یوں کوانٹم

[۲] wave function
[۳] Schrodinger align
[۴] statistical interpretation
[۵] تفاعل موج خود مخلوط ہے لیکن $|\Psi|^2=\Psi^*\Psi$ (جہاں $\Psi^*$ تفاعل موج $\Psi$ کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔




شکل ۲.۱: ایک عمومی تفاعل موج۔ نقطہ $a$ اور $b$ کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ $A$ کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ $B$ کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

میکانیات میں **عدم تعین**[6] کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبعیات اور فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتا ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹم میکانی نظریے میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام $C$ پر پایا[7] جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹم عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقات فکر کے بارے میں علم حاصل ہو گا۔

1) **حقیقت پسند**[8] سوچ: ذرہ مقام $C$ پر تھا۔ یہ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹم میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گی کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ $C$ پر ہی تھا اور کوانٹم میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے قاصر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعیّنیت فطرتاً نہیں پائی جاتی بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے مطابق کسی بھی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں تھا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں تھا۔ یوں $\Psi$ مکمل کہانی بیان نہیں کرتا اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (**خفیہ متغیرات**[9] کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

2) **تقلید پسند**[10] سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں تھا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ ایک مقام پر "ظاہر ہو جائے" (ہمیں اس بارے میں سوال کرنے کی اجازت نہیں کہ ذرہ مقام $C$ کو کیوں منتخب کرتا ہے)۔

---

[6] indeterminacy

[7] ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی خلل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ $C$ کے قریب پایا گیا۔

[8] realist

[9] hidden variables

[10] orthodox

مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل ڈالتا ہے بلکہ یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرے کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے ہیں۔" یہ تصور جو **کوپن ہیگن مفہوم**[11] کہلاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہرین طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ تصور درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھا عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصے کے بحث مباحثوں کے بعد بھی واضح نہیں۔

3) **انکاری**[12] سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بیوقوفانہ نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حال نہیں بتا پاتا لہٰذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبقات فکر کے حامی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرے کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربے پر قابل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے بیچ فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربہ کر کے کیا جا سکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی علمی فکر اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جان بل کی دلیل سمجھ میں آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں[13]۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطے پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتا ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کے عائد کردہ شماریاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام $C$ دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرے پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام $C$ کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربے میں مقام $C$ ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت $C$ قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج $C$ پر نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے جیسا کہ شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ $C$ پر **منہدم**[14] کر کے اس کو سوزن بننے پر مجبور کرتا ہے (جس کے بعد تفاعل موج شروڈنگر مساوات کے تحت ارتقا پائے گا لہٰذا دوسری پیمائش جلد کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دو بہت مختلف طبیعی اعمال پائے جاتے ہیں: پہلے میں تفاعل موج وقت کے ساتھ شروڈنگر مساوات کے تحت

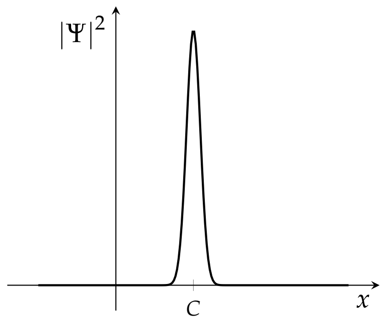
---

[11] Copenhagen interpretation

[12] agnostic

[13] یہ فقرہ کچھ زیادہ مثالی ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں باب ۱۲ میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر مقامی خفیہ متغیر نظریات اور دیگر بناوٹیں مثلاً **متعدد دنیاوں جیسی** تشریح موجود ہیں جن کی تینوں سوچوں کے ساتھ مطابقت نہیں ہے۔ بہر حال، فی الحال بہتر ہے کہ ہم کوانٹم نظریے کی بنیاد سیکھیں اور بعد میں اس طرح کے مسائل پر فکر کریں۔

[14] collapses




شکل ۱.۳: تفاعل موج کا انہدام: اس لمحے کے فوراً بعد $|\Psi|^2$ کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ $C$ پر پایا گیا ہو۔

ارتقا پاتا ہے، اور دوسرا جس میں پیمائش $\Psi$ کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر منہدم کرتی ہے[۱۵]۔

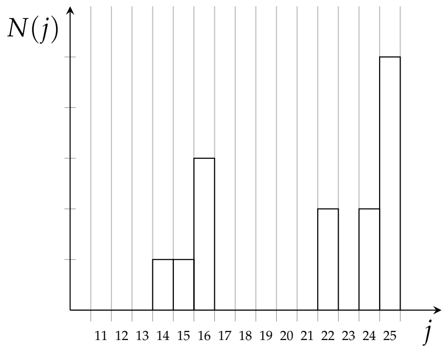
## ۱.۳ احتمال

### ۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات

چونکہ کوانٹم میکانیات کی شماریاتی تشریح کی جاتی ہے لہٰذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامتیں اور اصطلاحات سیکھنا ہو گا جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔ فرض کریں ایک کمرہ میں 14 حضرات موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

14 سال عمر کا ایک شخص،
15 سال عمر کا ایک شخص،
16 سال عمر کے تین اشخاص،
22 سال عمر کے دو اشخاص،
24 سال عمر کے دو اشخاص،
25 سال عمر کے پانچ اشخاص۔

[۱۵]کوانٹم میکانیات میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور حیران کن ہے کہ انسان سوچ میں پڑ جاتا ہے کہ پیمائش درحقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خوردبینی (کوانٹائی) نظام اور کلاں بینی (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسے بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسے ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مدہوش "مشاہدہ کار" کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسے وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس کٹھن مسئلہ پر دوبارہ باب ۱۲ میں بات کروں گا؛ ابھی کے لئے ہم سادہ سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنسدان تجربہ گاہ میں فیتا، گھڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔)




شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر $j$ کے لحاظ سے تعداد $N(j)$ ترسیم کی گئی ہے۔

اگر $j$ عمر کے لوگوں کی تعداد کو $N(j)$ لکھا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
N(14) &= 1\\
N(15) &= 1\\
N(16) &= 3\\
N(22) &= 2\\
N(24) &= 2\\
N(25) &= 5
\end{aligned}$$

جبکہ $N(17)$، مثال کے طور پر، صفر ہو گا۔ کمرہ میں لوگوں کی کل تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j) \tag{۱.۴}$$

(اس مثال میں ظاہر ہے کہ $N = 14$ ہو گا۔) شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ہیں۔

سوال 1 اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک شخص منتخب کریں تو اس بات کا کیا **احتمال** ہو گا کہ اس شخص کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہو گا کیونکہ کل 14 اشخاص ہیں اور ہر ایک شخص کی انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہٰذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہو گا۔ اگر $j$ عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال $P(j)$ ہو تب $P(14) = 1/14$، $P(15) = 1/14$، $P(16) = 3/14$، وغیرہ ہو گا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$P(j) = \frac{N(j)}{N} \tag{۱.۵}$$

دھیان رہے کی چودہ یا پندرہ سال عمر کا شخص کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کی انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی $\frac{1}{7}$ ہو گا۔ بالخصوص تمام احتمال کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہو گا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1 \tag{1.6}$$

سوال 2 کونسی عمر سب سے **زیادہ محتمل**[16] ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عموماً سب سے زیادہ احتمال کا $j$ وہی $j$ ہو گا جس کے لئے $P(j)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

سوال 3 **وسطانیہ**[17] عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہٰذا جواب 23 ہو گا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ $j$ کی وہ قیمت ہو گی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کے احتمال ایک جیسے ہوں۔)

سوال 4 ان کی **اوسط**[18] عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر $j$ کی اوسط قیمت جس کو ہم $\langle j \rangle$ لکھتے ہیں، درج ذیل ہو گی۔

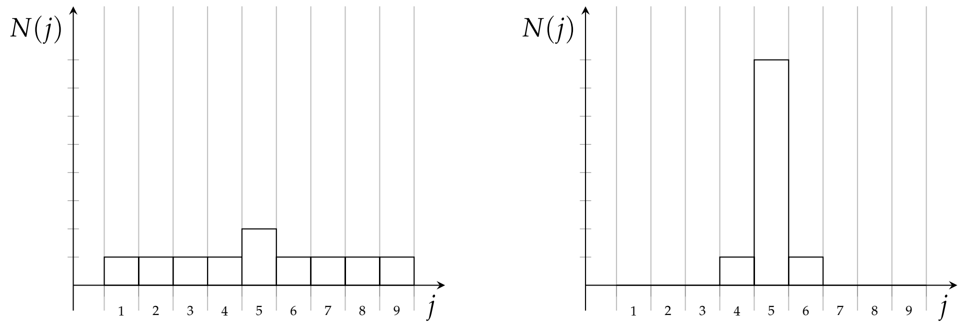
$$\langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j) \tag{1.7}$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو **توقعاتی قیمت**[19] کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5 عمروں کے مربعوں کا اوسط کیا ہو گا؟ جواب: آپ $\frac{1}{14}$ احتمال سے $14^2 = 196$ حاصل کر سکتے ہیں، یا $\frac{1}{14}$ احتمال سے $15^2 = 225$، یا $\frac{3}{14}$ احتمال سے $16^2 = 256$ حاصل کر سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ان کے مربعوں کا اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j) \tag{1.8}$$

[16] most probable
[17] median
[18] mean
[19] expectation value




شکل ۵.۱: دونوں مستطیل ترسیمات میں ایک جیسا وسطانیہ، اوسط اور سب سے زیادہ محتمل قیمتیں ہیں تاہم ان میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر $j$ کے کسی بھی تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle f(j)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P(j) \tag{۱.۹}$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) دھیان رہے کہ مربع کا اوسط $\langle j^2\rangle$ عموماً اوسط کے مربع $\langle j\rangle^2$ کے برابر نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرہ میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں $1$ اور $3$ ہو تب $\langle x^2\rangle = 5$ جبکہ $\langle x\rangle^2 = 4$ ہو گا۔

شکل ۵.۱ کی شکل و صورتوں میں واضح فرق پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط قیمت، وسطانیہ، بلند تر قیمت احتمال اور اجزاء کی تعداد ایک جیسے ہیں۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے قریب نوکیلی صورت رکھتی ہے جبکہ دوسری افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل مانند ہو گی جبکہ دیہاتی علاقہ میں ایک ہی کمرہ پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل ظاہر کرے گی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے، کسی بھی مقدار کے تقسیم کا پھیلاو، عددی صورت میں درکار ہو گا۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا فرق

$$\Delta j = j - \langle j\rangle \tag{۱.۱۰}$$

لے کر تمام $\Delta j$ کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned}\langle \Delta j\rangle &= \sum \left(j - \langle j\rangle\right) P(j) = \sum jP(j) - \langle j\rangle \sum P(j)\\ &= \langle j\rangle - \langle j\rangle = 0\end{aligned}$$

(چونکہ $\langle j\rangle$ مستقل ہے لہٰذا اس کو مجموعہ کی علامت سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔) اس مسئلہ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر آپ $\Delta j$ کی مطلق قیمتوں کا اوسط لے سکتے ہیں لیکن $\Delta j$ کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا

مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے نجات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \tag{۱.۱۱}$$

اس قیمت کو تقسیم کی **تغیریت**[20] کہتے ہیں جبکہ تغیریت کا جذر $\sigma$ کو **معیاری انحراف**[21] کہتے ہیں۔ روایتی طور پر $\sigma$ کو اوسط $\langle j \rangle$ کے گرد پھیلاو کی پیمائش مانا جاتا ہے۔
ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\
&= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\
&= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\
&= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2
\end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \tag{۱.۱۲}$$

عملی استعمال میں $\sigma$ اس کلیے سے بہت جلد حاصل ہو گا۔ آپ $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ معلوم کر کے ان کے فرق کا جذر لیں گے۔ جیسا آپکو یاد ہو گا میں نے ذکر کیا $\langle j^2 \rangle$ اور $\langle j \rangle^2$ عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں $\sigma^2$ غیر منفی ہو گا لہٰذا مساوات ۱.۱۲ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \tag{۱.۱۳}$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب $\sigma = 0$ ہو، جو تب ممکن ہو گا جب تقسیم میں کوئی پھیلاو نہ پایا جاتا ہو یعنی ہر جز و ایک ہی قیمت کا ہو۔

### ۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آ رہے ہیں جن کی قیمتیں الگ تھلگ ہوتی ہیں۔ (گزشتہ مثال میں ہم نے افراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے لہٰذا $j$ عدد صحیح تھا۔) تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کا 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال جمع دو دنوں

[20] variance
[21] standard deviation

کے بیچ عمر کا احتمال 16 سال اور 16 سال جمع ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دگنا ہو گا۔ (ماسوائے ایسی صورت میں جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچے پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس قاعدہ کی اطلاق کی نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا، زیادہ محفوظ طرف رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی چھوٹے وقفہ کی بات کر رہے ہیں۔) اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\rho(x)dx = \begin{cases} \text{بلا منصوب منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + \mathrm{d}x) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases}$$ (۱.۱۴)

اس مساوات میں تناسبی مستقل $\rho(x)$ **کثافت احتمال**[22] کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ $a$ تا $b$ کے بیچ $x$ پایا جانے کا احتمال $\rho(x)$ کا تکمل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$$ (۱.۱۵)

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x,$$ (۱.۱۶)

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,\mathrm{d}x,$$ (۱.۱۷)

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x,$$ (۱.۱۸)

$$\sigma^2 \equiv \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$ (۱.۱۹)

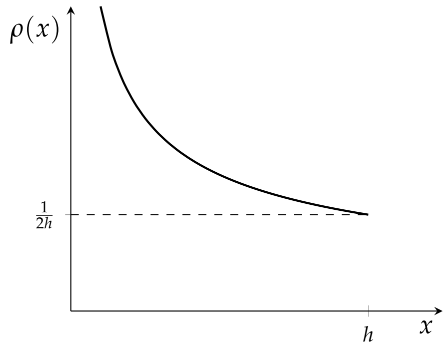
مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی $h$ ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچی جاتی ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہو گی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کا وقتی اوسط کیا ہو گا؟[23]

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ $\frac{h}{2}$ سے کم ہو گا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ $t$ پر فاصلہ $x$ درج ذیل ہو گا۔

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

[22] probability density

[23] ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہو گا کہ میں متناہی نمونہ (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر "اصلی" اوسط میں فرق نہیں کر پا رہا ہوں۔ یہ ایک تجربہ کرنے والے کے لئے مصیبت پیدا کر سکتی ہے، خاص کر جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے غرض ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تخمین ہے۔




شکل ۱.۶: کثافت احتمال برائے مثال ۱.۱: $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

اس کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt$ ہو گی اور پرواز کا دورانیہ $T = \sqrt{2h/g}$ ہو گا۔ وقفہ $\mathrm{d}t$ میں تصویر کھینچنے کا احتمال $\frac{\mathrm{d}t}{T}$ ہو گا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سعت $\mathrm{d}x$ میں فاصلہ دے درج ذیل ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \qquad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہو گا۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x\rangle = \int_0^h x\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو $\frac{h}{2}$ سے کچھ کم ہے جیسا کہ ہم توقع کرتے ہیں۔

شکل ۱.۶ میں $\rho(x)$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال خود لامتناہی ہو سکتا ہے جبکہ احتمال (یعنی $\rho$ کا تکمل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم ہو گا)۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳.۱ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

ا. اوسط کا مربع $\langle i \rangle^2$ اور مربع کا اوسط $\langle j^2 \rangle$ تلاش کریں۔

ب. ہر $j$ کے لیے $\Delta j$ دریافت کریں اور مساوات ۱.۱۱ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. جزوا اور ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

ا. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔

ب. بلا واسطہ منتخب تصویر میں اوسط فاصلے سے، ایک معیاری انحراف کے برابر، دور فاصلہ $x$ پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں جہاں $A$ ، $a$ اور $\lambda$ مستقل ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ تکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

ا. مساوات ۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے $A$ کی قیمت تعین کریں۔

ب. اوسط $\langle x \rangle$، مربعی اوسط $\langle x^2 \rangle$ اور معیاری انحراف $\sigma$ تلاش کریں۔

ج. $\rho(x)$ کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

## ۱.۴ معمول زنی

ہم تفاعل موج کے شماریاتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ $t$ پر ایک ذرے کا نقطہ $x$ پر پائے جانے کی کثافت احتمال $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ ہو گی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت $|\Psi|^2$ کا تکمل $1$ کے برابر ہو گا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 = 1 \tag{۱.۲۰}$$

اس حقیقت کے بغیر شماریاتی مفہوم بے معنی ہو گی۔

البتہ یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونا چاہیے۔ تفاعل موج کو مساوات شروڈنگر تعین کرتی ہے اور $\Psi$ پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت جائز ہو گا جب ان دونوں کے بیچ اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\Psi(x,t)$ حل ہو تب $A\Psi(x,t)$ بھی حل ہو گا، جہاں $A$ کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم یہ کر سکتے ہیں کہ نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کریں

کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی **معمول زنی**[۲۴] کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کو معمول پر لایا گیا ہے۔ مساوات شروڈنگر کے بعض حلوں کا تکمل لامتناہی ہو گا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو $1$ کے برابر نہیں کر سکتا ہے۔ یہی کچھ غیر اہم حل $\Psi = 0$ کے لیے بھی درست ہے۔ ایسا تفاعل موج جو معمول پر لانے کے قابل نہ ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا ہے لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، شروڈنگر مساوات کے **مربع متکامل**[۲۵] حل ہونگے۔[۲۶]

یہاں رک کر ذرا غور کریں! فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر میں ایک تفاعل موج کو معمول پر لاتا ہوں۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ $\Psi$ ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گی؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے ہیں کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کو معمول پر لائیں چونکہ ایسی صورت میں $A$ وقت $t$ کا تابع تفاعل ہو گا نا کہ ایک مستقل، اور $A\Psi$ شروڈنگر مساوات کا حل نہیں رہے گا۔) خوش قسمتی سے مساوات شروڈنگر کی یہ ایک خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شروڈنگر اور شماریاتی مفہوم غیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹم نظریہ بے معنی ہو گا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے لہٰذا ہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(x,t)\right|^2\,\mathrm{d}x \tag{۱.۲۱}$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، تکمل صرف $t$ کا تفاعل ہے لہٰذا میں نے پہلے فقرہ میں کل تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ متکمل $t$ اور $x$ دونوں کا تفاعل ہے لہٰذا میں نے یہاں جزوی تفرق $\partial/\partial t$ استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi| = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) = \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi \tag{۱.۲۲}$$

اب مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar}V\Psi \tag{۱.۲۳}$$

ہو گا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}V\Psi^* \tag{۱.۲۴}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\right] \tag{۱.۲۵}$$

---

[۲۴] normalization
[۲۵] square-integrable
[۲۶] ظاہر ہے کہ $|x| \to \infty$ کی صورت میں $\Psi(x,t)$ کو $1/\sqrt{|x|}$ سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہو گا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کا ہیّت غیر معین رہتا ہے۔ تاہم جیسا ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مساوات ۱.۲۱ میں تکمل کی قیمت اب صریحاً معلوم کی جا سکتی ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \tag{۱.۲۶}$$

یاد رہے کہ معمول پر لانے کے قابل ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $x \to \pm\infty$ کرتے ہوئے $\Psi(x,t)$ صفر[۲۷] کو پہنچتی ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x=0 \tag{۱.۲۷}$$

لہٰذا تکمل (وقت کا غیر تابع) مستقل ہو گا؛ لمحہ $t=0$ پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔

سوال ۱.۴: لمحہ $t=0$ پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتی ہے جہاں $A$ ، $a$ اور $b$ مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,0)=\begin{cases} A\frac{x}{a} & 0\le x\le a\\ A\frac{(b-x)}{(b-a)} & a\le x\le b\\ 0 & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

ا. تفاعل موج $\Psi$ کو معمول پر لائیں (یعنی $a$ اور $b$ کی صورت میں $A$ تلاش کریں)۔

ب. متغیر $x$ کے لحاظ سے $\Psi(x,0)$ ترسیم کریں۔

ج. لمحہ $t=0$ پر کس نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال زیادہ سے زیادہ ہو گا؟

د. نقطہ $a$ کے بائیں جانب ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق $b=a$ اور $b=2a$ کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ھ. متغیر $x$ کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں $A$ ، $\lambda$ اور $\omega$ مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x,t)=Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا **مخفیہ**[۲۸] $V$ ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

ا. تفاعل موج $\Psi$ کو معمول پر لائیں۔

[۲۷] ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی گھمبیر مثالیں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں؛ اور لامتناہی پر تفاعلات موج ہر صورت صفر کو پہنچتے ہیں۔
[۲۸] potential

ب. متغیرات $x$ اور $x^2$ کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر $x$ کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر $x$ کے لحاظ سے $|\Psi|^2$ ترسیم کر کے اس پر نقاط $(\langle x\rangle + \sigma)$ اور $(\langle x\rangle - \sigma)$ کی نشاندہی کریں جس سے $x$ کی "پھیل" کو $\sigma$ سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہو گی۔ اس سعت سے باہر ذرہ پایا جانے کا احتمال کتنا ہو گا؟

## ۱.۵ معیار حرکت

حال $\Psi$ میں پائے جانے والے ذرہ کے مقام $x$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \tag{۱.۲۸}$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا مقام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت $\int x|\Psi|^2\,\mathrm{d}x$ حاصل ہو گی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ غیر متعیین ہے) تفاعل موج کو اس قیمت پر بیٹھنے پر مجبور کرے گا جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو وہی نتیجہ دوبارہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں $\langle x\rangle$ ان ذرات کی پیمائشوں کی اوسط ہو گی جو یکساں حال $\Psi$ میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرہ کو دوبارہ ابتدائی حال $\Psi$ میں لائیں گے اور یا آپ متعدد ذرات کی **سگرا**[۲۹] کو ایک ہی حال $\Psi$ میں لا کر تمام کے مقام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط $\langle x\rangle$ ہو گا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار پر شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال $\Psi$ میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے قریب ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرہ کا مقام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا مستطیلی ترسیم تقریباً $|\Psi|^2$ دیگا جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً $\langle x\rangle$ ہو گی۔ (چونکہ ہم متناہی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہٰذا یہ توقع نہیں کیا جا سکتا ہے کہ جوابات بالکل حاصل ہوں گے لیکن بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ قریب حاصل ہوں گے۔)) مختصراً توقعاتی قیمت ذرات کے سگرا پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہو گی نہ کہ کسی ایک ذرہ پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ $\Psi$ وقت اور مقام کا تابع ہے لہٰذا وقت گزرنے کا ساتھ ساتھ $\langle x\rangle$ تبدیل ہو گا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل[۳۰] لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \int x\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2\,\mathrm{d}x = \frac{i\hbar}{2m}\int x\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x \tag{۱.۲۹}$$

---

[۲۹] ensemble

[۳۰] چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں تکمل کے حد نہیں لکھ رہا ہوں۔

تکمل بالحصص[۳۱] کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{2m}\int\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x \tag{۱.۳۰}$$

(میں نے یہاں $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا پر رد کیا کہ $(\pm)$ لامتناہی پر $\Psi$ کی قیمت 0 ہو گی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ تکمل بالحصص لاگو کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{m}\int \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۱}$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ $x$ کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے نا کہ ذرہ کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرہ کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جا سکتی ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ذرہ کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام غیر تعیین ہوتب اس کی سمتی رفتار بھی غیر تعیین ہو گی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم $\Psi$ جانتے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ کرنا باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرہ کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہو گا۔

$$\langle v\rangle = \frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} \tag{۱.۳۲}$$

مساوات ۱.۳۱ ہمیں $\Psi$ سے بلاواسطہ $\langle v\rangle$ دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے **معیار حرکت**[۳۲] $p = mv$ کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -i\hbar\int\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \tag{۱.۳۳}$$

میں $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ کو زیادہ معنی خیز طرز میں پیش کرتا ہوں۔

$$\langle x\rangle = \int \Psi^*(x)\Psi\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۴}$$

$$\langle p\rangle = \int \Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۵}$$

---

[۳۱] قاعدہ ضرب کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g\,\mathrm{d}x + fg\Big|_a^b$$

یوں تکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جزو سے تفرق اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت منفی علامت اور اضافی سرحدی جزو کی صورت میں آپ کو ادا کرنی ہو گی۔

[۳۲] momentum

کوانٹم میکانیات میں مقام کو **عامل**[۳۳] $x$ "ظاہر" کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ "ظاہر" کرتا[۳۴] ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو $\Psi^*$ اور $\Psi$ کے بیچ لکھ کر تکمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر مقداروں کا کیا ہو گا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جا سکتا ہے (جہاں یک بعدی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا ہے)۔ کسی بھی مقدار مثلاً $Q(x,p)$ کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر $p$ کی جگہ $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ پر کر کے حاصل عامل کو $\Psi^*$ اور $\Psi$ کے بیچ لپیٹ کر درج ذیل تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int \Psi^* Q\Big(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Psi\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۶}$$

مثال کے طور پر حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int \Psi^* \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \tag{۱.۳۷}$$

حال $\Psi$ میں ایک ذرہ کی کسی بھی حرکی مقدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہو گی۔ مساوات ۱.۳۴ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ جناب بوہر کی شماریاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ، حقیقتاً یہ کلاسیکی میکانیات سے بہت مختلف انداز سے کام کرنے کا۔ ہم باب ۳ میں اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر کھڑا کریں گے، جب تک آپ اس کے استعمال کی مشق کریں۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسلمہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرہ پر تکمل بالحصص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو $x$ کے اوپر سے گزار کر، یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو گا؟

سوال ۱.۷: $\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔ جواب:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \Big\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\Big\rangle \tag{۱.۳۸}$$

---

[۳۳] operator

[۳۴] ایک "عامل" آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تفاعل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہو گا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ $x$ سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ $x$ کے لحاظ سے تفرق لیں (اور نتیجہ کو $-i\hbar$ سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات ($\mathrm{d}/\mathrm{d}t$، $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$، $\partial^2/\partial x\partial y$، وغیرہ) یا ضرب کار ($2$، $i$، $x^2$، وغیرہ)، اور یا ان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ **مسئلہ اہرنفسٹ**[۳۵] کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میرا مراد ایسا مستقل ہے جو $x$ اور $t$ کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا البتہ کوانٹم میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب $e^{-iV_t/\hbar}$ ضرب کرتا ہے جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟

## ۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا بایاں سرا اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج ٹھیک کہاں پائی جاتی ہے تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے قاصر ہونگے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر **طول موج**[۳۶] پوچھی جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھٹکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہو گی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہٰذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے قاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام بتانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج خاصی حد تک قابل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج کم سے کم بتانا ممکن ہوگا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج کم سے کم قابل تعین ہوگا۔ فوریئر تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھڑا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کیفی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹم میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے $\Psi$ کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق **کلیہ ڈی بروگلی**[۳۷]

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \tag{۱.۳۹}$$

پیش[۳۸] کرتا ہے۔ یوں طول موج میں پھیلاو معیار حرکت میں پھیلاو کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہوگا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کی معیار حرکت کم سے کم جان سکتے ہیں۔

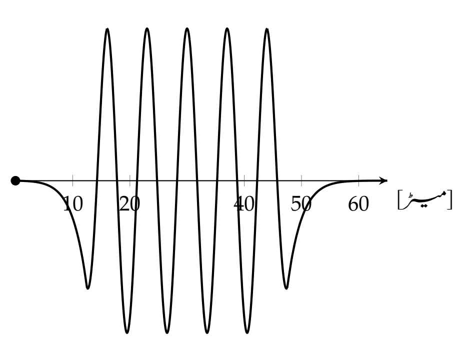
---

[۳۵] Ehrenfest's theorem

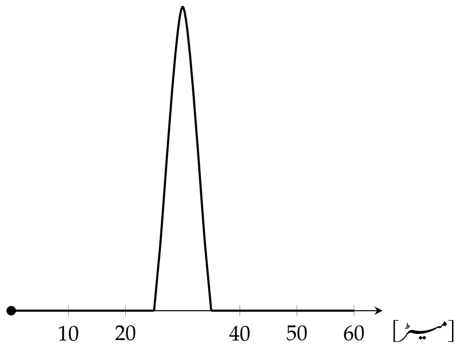
[۳۶] wavelength

[۳۷] De Broglie formula

[۳۸] میں اس کا ثبوت جلد پیش کروں گا۔ بعض مصنفین کلیہ ڈی بروگلی کو ایک مسلمہ لے کر عامل $\frac{\hbar}{i}\partial/\partial x$ سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے دھیان ہٹاتی ہے۔




شکل ۱.۷: اس موج کا طول موج اچھا خاصا معین جبکہ مقام غیر معین ہے۔




شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھا خاصا معین جبکہ طول موج غیر معین ہے۔

اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۱.۴۰}$$

جہاں $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ بالترتیب $x$ اور $p$ کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ جناب ہیزنبرگ کا مشہور **اصول عدم یقینیت**[۳۹] ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کو یہاں اس لئے متعارف کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال کرنا سیکھیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ کو اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ آ گیا ہے۔ مقام کی پیمائش کی ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں "پھیلاو" سے مراد یہ ہے کہ یکساں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو ( $\Psi$ کو نوکیلی بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں قریب قریب نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گی۔ اس طرح آپ چاہیں تو ( $\Psi$ کو ایک لمبی سائن نما موج بنا کر) ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے قریب قریب ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اور ہاں آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ تو مقام اور نا ہی معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱.۴۰ در حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ کی جسامت پر کوئی حد مقرر نہیں ہے۔ آپ $\Psi$ کو ایک لمبی بلدار لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے ابھار اور گڑھے پائے جاتے ہوں اور جس میں کوئی تواتر نہ پایا جاتا ہو، $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

[۳۹] uncertainty principle

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

جہاں $A$ اور $a$ مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. مستقل $A$ تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل $V(x)$ کے لیے $\Psi$ شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟

ج. $x$ ، $x^2$ ، $p$ اور $p^2$ کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د. $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتے ہیں؟

سوال ۱.۱۰: مستقل $\pi$ کے ہندسی پھیلاو کے اولین 25 ہندسوں $(3, 1, 4, 1, 5, 9, \cdots)$ پر غور کریں۔

ا. اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہر ہندسہ کے انتخاب کا احتمال کیا ہو گا؟

ب. کسی ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہو گا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہو گا؟ اوسط قیمت کیا ہو گی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہو گا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کی رفتار پیما کی خراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکا کے بعد یہ اطراف سے ٹکرا کر 0 اور $\pi$ زاویوں کے بیچ آ کر رک جاتی ہے۔

ا. کثافت احتمال $\rho(\theta)$ کیا ہو گا؟ اشارہ: زاویہ $\theta$ اور $(\theta + \mathrm{d}\theta)$ کے بیچ سوئی رکنے کا احتمال $\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ متغیر $\theta$ کے لحاظ سے $\rho(\theta)$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے جہاں $\rho$ صفر ہو گا)۔ دھیان رہے کہ کل احتمال 1 ہو گا۔

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle\theta\rangle$ ، $\langle\theta^2\rangle$ اور $\sigma$ تلاش کریں۔

ج. اسی طرح $\langle\sin\theta\rangle$ ، $\langle\cos\theta\rangle$ اور $\langle\cos^2\theta\rangle$ تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیما کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے $x$ محدد (یعنی افقی لکیر پر سوئی کے سایہ) میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں۔

ا. $\rho(x)$ کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟ $x$ کے لحاظ سے $\rho(x)$ کو $-2r$ تا $+2r$ ترسیم کریں جہاں $r$ سوئی کی لمبائی ہے۔ تصدیق کر لیں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ: $x$ اور $(x+\mathrm{d}x)$ کے بیچ $\psi$ کی موجودگی کا احتمال $\rho(x)\,\mathrm{d}x$ ہے۔ آپ سوال ۱.۱۱ سے کسی مخصوص خطہ میں $\theta$ کا احتمال جانتے ہیں؛ سوال یہ ہے کہ $\mathrm{d}\theta$ کا مطابقتی $\mathrm{d}x$ کیا ہو گا؟

ب. اس تقسیم کے لیے $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ اور $\sigma$ تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جز و(ج) سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے بیچ فاصلہ $L$ رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر $L$ لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہو گا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحہ پر آن ٹھہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ $t$ پر $(a < x < b)$ کے بیچ ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $P_{ab}(t)$ ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}P_{ab}}{\mathrm{d}t} = J(a,t) - J(b,t)$$

جہاں

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

ہے۔ $J(x,t)$ کی اکائی کیا ہو گی؟ تبصرہ: چونکہ $J$ آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ $x$ پر احتمال کس رفتار سے گزرتا ہے لہٰذا $J$ کو **رو احتمال**[40] کہتے ہیں۔ اگر $P_{ab}(t)$ بڑھ رہا ہو تب خطہ کے ایک سر میں احتمال کے آمد خطہ کے دوسرے سر سے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہو گا۔

ب. سوال ۱.۹ میں تفاعل موج کا احتمال $\rho$ کیا ہو گا؟ (یہ زیادہ مزیدار مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: فرض کریں آپ ایک **غیر مستحکم ذرہ**[41] کے بارے میں بات کرنا چاہیں جس کا خود بخود ٹکڑے ہونے کا "عرصہ حیات" $\tau$ ہے۔ ایسی صورت میں کہیں پر ذرہ پایا جانے کا کل احتمال مستقل نہیں بلکہ وقت کے ساتھ (ممکنہ طور پر) قوت نمائی گھٹے گا۔ ہے۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = e^{-t/\tau}$$

اس نتیجے کو (غیر نفیس طریقہ) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۴ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ مخفی توانائی $V$ ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی بقا احتمال پیدا ہوتی ہے۔ آئیں $V$ کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں۔

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں $V_0$ حقیقی مخفی توانائی اور $\Gamma$ مثبت حقیقی مستقل ہے۔

ا. دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}p$$

---

[40] probability current
[41] unstable particle

ب. $P(t)$ کے لیے حل کریں اور ذرے کا عرصہ حیات $\Gamma$ کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شروڈنگر کے کسی بھی دو عدد (معمول پر لانے کے قابل) حل $\Psi_1$ ، $\Psi_2$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^*\Psi_2\,\mathrm{d}x = 0$$

سوال ۱.۱۷: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرے کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

ا. معمول زنی مستقل $A$ تلاش کریں۔

ب. لمحہ $t = 0$ پر $x$ کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t = 0$ پر $p$ کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ آپ اس کو $P = m\,\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ سے حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟

د. $x^2$ کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ھ. $p^2$ کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و. $x(\sigma_x)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز. $p(\sigma_p)$ میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹم میکانیات اس وقت کارآمد ہو گی جب ذرے کا ڈی بروگلی طول موج $(\hbar/p)$ نظام کی جسامت $(d)$ سے زیادہ ہو۔ درجہ $T$ (کیلون) پر حراری توازن میں ایک ذرہ کی اوسط حرکی توانائی درج ذیل ہو گی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_bT$$

جہاں $k_b$ بولٹزمن مستقل ہے لہٰذا ڈی بروگلی طول موج درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_BT}}$$

ہم نے معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹم میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہو گا۔

ا. **ٹھوس اجسام:** فاصلہ جال ٹھوس اجسام میں تقریباً $d = 0.3\,\text{nm}$ ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران[۴۲] کوانٹم میکانی ہوں گے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری مراکزہ کوانٹم میکانی ہوں گے۔ (**سوڈیم**[۴۳] کو مثال لیں۔) سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹم میکانی ہوں گے جبکہ جوہری مراکزہ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹم میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مائع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلے اتنا ہی ہوگا) ماسوائے $4\,\text{K}$ سے کم درجہ حرارت پر موجود **ہیلیم**[۴۴] کے لئے۔

ب. **گیس:** میکانی دباو $P$ پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کوانٹم میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون $(PV = Nk_BT)$ استعمال کرکے جوہروں کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔ جواب: $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5}P^{2/5}$؛ ظاہر ہے ہم $m$ کو چھوٹے سے چھوٹا اور $P$ کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیس کو کوانٹم میکانی خواص رکھے)۔ زمینی ہوا دباو پر ہیلیم کے اعداد پر کرکے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا **بیرونی فضا**[۴۵] میں (جہاں درجہ حرارت $3\,\text{K}$ اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً $1\,\text{cm}$ ہے) ہائیڈروجن کوانٹم میکانی ہوگا؟

---

[۴۲] ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مرکزہ سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کا رداس ہوگا۔ اس کے برعکس، بیرون ترین الیکٹران کہیں نہیں جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے فاصلہ جال کو موزوں فاصلہ لیا جا سکتا ہے۔ یہ مسئلہ بیرونی الیکٹران کے لئے ہے۔

[۴۳] sodium

[۴۴] helium

[۴۵] outer space

# باب ۲

# غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

## ۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف مقداروں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفیہ[۱] $V(x,t)$ کی لئے شروڈنگر مساوات:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \tag{۲.۱}$$

حل کرتے ہوئے $\Psi(x,t)$ حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ $V$ وقت $t$ کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں شروڈنگر مساوات کو **علیحدگی متغیرات**[۲] کے طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے، جو ماہرین طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t) \tag{۲.۲}$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $\psi$ صرف $x$ اور $\varphi$ صرف $t$ کا تفاعل ہے۔ بظاہر، شروڈنگر مساوات کے کسی حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست نظر نہیں آتا ہے، تاہم حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً کیا جاتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے

---

[۱] بار بار "مخفی توانائی تفاعل" کہنا انسان کو تھکا دیتا ہے، لہٰذا لوگ $V$ کو صرف "مخفیہ" پکارتے ہیں، اگرچہ ایسا کرنے سے برقی مخفیہ کے ساتھ غلطی پیدا ہو سکتی ہے جو دراصل فی اکائی بار مخفی توانائی ہوتی ہے۔

[۲] separation of variables

حاصل شدہ حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ قابل علیحدگی حلوں کیلئے

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Psi}{dx^2}\varphi$$

ہوگا جو سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar\psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 \psi}{dx^2}\varphi + V\psi\varphi$$

دونوں اطراف کو $\psi\varphi$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$i\hbar \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \tag{۲.۳}$$

اب بایاں تفاعل صرف $t$ کا تابع ہے جبکہ دایاں تفاعل صرف $x$ کا تابع [3] ہے۔ یاد رہے اگر $V$ خود $x$ اور $t$ دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہو گا۔ صرف $t$ تبدیل ہونے سے دایاں تفاعل کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں اور دایاں تفاعل لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں، لہٰذا $t$ تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہو گا۔ اسی طرح صرف $x$ تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہٰذا $x$ تبدیل کرنے سے دایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہو گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم **علیحدگی مستقل** [4] کہتے ہیں جس کو ہم $E$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۳ کو

$$i\hbar \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = E$$

یا

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\varphi \tag{۲.۴}$$

اور

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V = E$$

یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \tag{۲.۵}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دو سادہ تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کر دیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے:

[3] دھیان رہے کہ اگر $V$ خود $x$ کے ساتھ ساتھ $t$ کا بھی تفاعل ہوتا تب ایسا ممکن نہ ہوتا۔

[4] separation constant

دونوں اطراف کو $\mathrm{d}t$ سے ضرب دیتے ہوئے اس کا تکمل لیں۔ یوں عمومی حل $Ce^{-iEt/\hbar}$ حاصل ہو گا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب $\psi\varphi$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا ہم مستقل $C$ کو $\psi$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar} \tag{۲.۶}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو **غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات**[۵] کہتے ہیں۔ مخفی توانائی $V$ کو پوری طرح جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ خفی توانائیوں کیلئے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات میں ایسی کیا خاص بات ہے؟ بہر حال تابع وقت شروڈنگر مساوات کے زیادہ تر حل $\psi(x)\varphi(t)$ کی صورت میں نہیں لکھے جا سکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہو گا۔

1) یہ **ساکن حالات**[۶] ہیں۔ اگرچہ تفاعل موج خود:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{۲.۷}$$

وقت $t$ کا تابع ہے لیکن کثافت احتمال:

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^* e^{+iEt/\hbar}\psi e^{-iEt/\hbar} = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{۲.۸}$$

وقت کا تابع نہیں ہے؛ تابعیت وقت مساوات میں سے ختم ہو جاتی[۷] ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب کرنے میں ہو گا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کر لے گی۔

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int \psi^* Q\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi\,\mathrm{d}x \tag{۲.۹}$$

ہر توقعاتی قیمت وقت میں مستقل ہو گی؛ ہم $\varphi(t)$ کو نکال کر $\Psi$ کی جگہ $\psi$ استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات $\psi$ کو ہی تفاعل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسائل پیدا ہو سکتے ہیں۔ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تفاعل موج ہر صورت میں تابع وقت ہو گا۔ بالخصوص $\langle x\rangle$ مستقل ہو گا، لہٰذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت) $\langle p\rangle = 0$ ہو گا۔ ساکن حال میں کبھی بھی کچھ نہیں ہوتا ۔

2) یہ غیر مبہم کل توانائی سے متعلق حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حرکی جمع مخفیہ) کو

---

[۵] time-independent Schrodinger align

[۶] stationary states

[۷] معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ $E$ حقیقی ہو (سوال ۱.۲-ا دیکھیں)۔

**ہیملٹنی**[۸] کہتے ہیں جس کو $H$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$H(x,p)=\frac{p^2}{2m}+V(x) \tag{۲.۱۰}$$

اس کا مطابقتی ہیملٹنی عامل، ضابطے کے تحت $p$ کو $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$ سے تبدیل کرکے $(p \rightarrow (\hbar/i)(\partial/\partial x))$، درج ذیل[۹] حاصل ہوگا۔

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{۲.۱۱}$$

یوں غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کرلے گی

$$\hat{H}\psi=E\psi \tag{۲.۱۲}$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle H\rangle=\int \psi^*\hat{H}\psi\,\mathrm{d}x=E\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x=E\int|\Psi|^2\,\mathrm{d}x=E \tag{۲.۱۳}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\Psi$ کی معمول زنی، $\psi$ کی معمول زنی کے مترادف ہے۔ مزید

$$\hat{H}^2\psi=\hat{H}(\hat{H}\psi)=\hat{H}(E\psi)=E(\hat{H}\psi)=E^2\psi$$

کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2\rangle=\int\psi^*\hat{H}^2\psi\,\mathrm{d}x=E^2\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x=E^2$$

یوں $H$ کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$\sigma_H^2=\langle H^2\rangle-\langle H\rangle^2=E^2-E^2=0 \tag{۲.۱۴}$$

یاد رہے کہ $\sigma=0$ کی صورت میں نمونہ کے تمام ارکان کی قیمت ایک جیسی ہوگی (تقسیم کا پھیلاؤ صفر ہوگا)۔ نتیجتاً قابل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً قیمت $E$ دے گی۔ (اسی بنا پر ہم نے علیحدگی مستقل کو $E$ سے ظاہر کیا تھا۔)

(3) عمومی حل قابل علیحدگی حلوں کا **خطی جوڑ**[۱۰] ہوگا۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل $(\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\cdots)$ دے گی جہاں ہر

[۸] Hamiltonian

[۹] جہاں غلط فہمی پیدا ہونے کی گنجائش ہو وہاں میں عامل پر ٹوپی (^) کا نشان ڈال کر اس کو اس تغیر پذیر متغیر سے علیحدہ رکھوں گا جس کو یہ ظاہر کرتا ہو۔

[۱۰] linear combination

ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل $(E_1, E_2, E_3, \cdots)$ منسلک ہوگا لہٰذا ہر **اجازتی توانائی**[11] کا ایک منفرد تفاعل موج پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x,t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}, \quad \Psi_2(x,t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \cdots$$

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑ[12] خود ایک حل ہوتا ہے۔ ایک مرتبہ قابل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۲.۱۵}$$

حقیقتاً تابع وقت شروڈنگر مساوات کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل $(c_1, c_2, \cdots)$ تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط پوری کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کرتے ہیں۔ باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک مرتبہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں بہت کچھ کہا جا چکا ہے۔ میں ان کو مختصراً اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ میں آپ کے سامنے ایک عمومی مسئلہ رکھتا ہوں: آپ کو (غیر تابع وقت) مخفیہ $V(x)$ اور ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام $t$ کیلئے $\Psi(x,t)$ تلاش کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلا قدم[13] یہ ہو گا کہ آپ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \cdots)$ حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی $(E_1, E_2, E_3, \cdots)$ ہو گی۔ تفاعل $\Psi(x,0)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x) \tag{۲.۱۶}$$

---

[11] allowed energy

[12] تفاعلات $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ ، وغیرہ کے خطی جوڑ سے مراد درج ذیل روپ کا فقرہ ہے جہاں $c_1$ ، $c_2$ ، وغیرہ کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتے ہیں۔

$$f(z) = c_1f_1(z) + c_2f_2(z) + \cdots$$

[13] بعض اوقات آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو بغیر علیحدگی متغیرات حل کر لیتے ہیں (سوال ۲.۴۹ اور سوال ۲.۵۰ دیکھیں)۔ تاہم ایسی صورتیں بہت کم پائی جاتی ہیں۔

کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت میں مستقل $c_1, c_2, c_3, \cdots$ دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج $\Psi(x,t)$ تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت $e^{-iE_nt/\hbar}$ چسپاں کریں گے۔

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Psi_n(x,t) \tag{۲.۱۷}$$

چونکہ قابل علیحدگی حل

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۲.۱۸}$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تابع وقت ہوں گی لہٰذا یہ خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۷) یہ خاصیت نہیں رکھتا؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیوں کے ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر $|\Psi|^2$ کا حساب کرتے ہوئے قوت نمائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتے۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ کے ابتدائی حال کو دو ساکن حالات کے خطی جوڑ سے ظاہر کیا گیا ہے:

$$\Psi(x,0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کے مستقل $c_n$ اور حالات $\psi_n(x)$ حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت $t$ کیلئے تفاعل موج $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا؟ کثافت احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔

حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

جہاں $E_1$ اور $E_2$ بالترتیب تفاعل $\psi_1$ اور $\psi_2$ کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں $|\Psi|^2$ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|\Psi(x,t)\right|^2 &= \left(c_1\psi_1e^{iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2e^{iE_2t/\hbar}\right)\left(c_1\psi_1e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}\right)\\ &= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + 2c_1c_2\psi_1\psi_2\cos[(E_2-E_1)t/\hbar]\end{aligned}$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر **کلیہ یولر** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ استعمال[۱۴] کیا۔) ظاہر ہے کہ کثافت احتمال زاویائی تعدد $\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right)$ کے ساتھ سائن نما ارتعاش پذیر ہے لہٰذا یہ ہر گز ساکن حال نہیں ہو گا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعل کے خطی جوڑنے یہ حرکت پیدا کی ہے۔ □

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

[۱۴] Euler's formula

ا. قابل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل $E$ لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۷ میں $E$ کو $E_0 + i\Gamma$ لکھ کر (جہاں $E$ اور $\Gamma$ حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام $t$ کے لئے مساوات ۲.۲۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب $\Gamma$ صفر ہو۔

ب. غیر تابع وقت تفاعل موج $\psi(x)$ ہر موقع پر حقیقی لیا جا سکتا ہے (جبکہ تفاعل موج $\Psi(x,t)$ لازماً مخلوط ہوتا ہے)۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تابع شروڈنگر مساوات کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (اتنی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی $\psi$ ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص $E$ کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ $(\psi + \psi^*)$ اور $i(\psi - \psi^*)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

ج. اگر $V(x)$ **جفت تفاعل**[۱۵] ہو (یعنی $V(x) = V(-x)$) تب $\psi(x)$ کو ہمیشہ جفت یا طاق لیا جا سکتا ہے۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص $E$ کے لئے $\psi(x)$ مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب $\psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ $\psi(x) \pm \psi(-x)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے ہر اس حل کے لئے، جس کو معمول پر لایا جا سکتا ہو، $E$ کی قیمت لازماً $V(x)$ کی کم سے کم قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مماثل کیا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi$$

دکھائیں کہ $E < V_{کمتر}$ کی صورت میں $\psi$ اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوگا۔

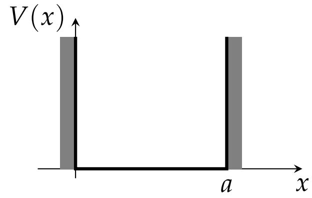
## ۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں

فرض کریں

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۲.۱۹}$$

(شکل ۲.۱)۔ اس مخفیہ میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی $x = 0$ اور $x = a$ پر، جہاں ایک لامتناہی قوت اس کو فرار ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ کنویں میں بے رگڑ راستے پر چلتا ہوا جسم ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا ہے؛ دیوار کے ساتھ ٹکراؤ مکمل لچکدار ہے۔ (اگرچہ یہ ایک فرضی مخفیہ ہے لیکن آپ اس کو اہمیت دیں۔ باوجود اس کے کہ یہ انتہائی سادہ نظر آتا ہے، یہ بہت ساری معلومات فراہم کرتا ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

[۱۵] even function




شکل ۲.۱: لامتناہی چوکور کنواں مخفیہ (مساوات ۲.۱۹)

کنویں سے باہر $\psi(x) = 0$ ہو گا (لہٰذا یہاں ذرے کے پائے جانے کا احتمال صفر ہو گا)۔ کنویں کے اندر، جہاں $V = 0$ ہے، غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{۲.۲۰}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi, \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۲۱}$$

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں خاموشی سے $E \geq 0$ فرض کرتا ہوں۔ ہم سوال ۲.۲ سے جان چکے ہیں کہ $E < 0$ سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲۱ کلاسیکی **سادہ ہارمونی مرتعش**[16] کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{۲.۲۲}$$

جہاں $A$ اور $B$ اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقلات کو مسئلہ کے **سرحدی شرائط**[17] متعین کرتے ہیں۔ $\psi(x)$ کے لئے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً $\psi$ اور $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہو گا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور $V = \infty$ کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کہی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل $\psi(x)$ کے استمراری شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \tag{۲.۲۳}$$

تاکہ کنویں کے باہر اور کنویں کے اندر حل ایک ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں $A$ اور $B$ کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B$$

---

[16] simple harmonic oscillator
[17] boundary conditions

پس $B=0$ لہٰذا ہے

$$\psi(x)=A\sin kx \tag{۲.۲۴}$$

ہوگا۔ یوں $\psi(a)=A\sin ka$ کے تحت $A=0$ (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل $\psi(x)=0$ ملتا ہے جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے) یا $\sin ka=0$ ہوگا، جس کا نتیجہ درج ذیل ہوگا۔

$$ka=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots \tag{۲.۲۵}$$

اب $k=0$ بھی $\psi(x)=0$ دیتا ہے جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ کی بنا پر $k$ کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہٰذا ہم منفی کی علامت کو $A$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج ذیل ہوں گے۔

$$k_n=\frac{n\pi}{a},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{۲.۲۶}$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ $x=a$ پر سرحدی شرط عائد کرنے سے مستقل $A$ کے بجائے مستقل $k$ متعین ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں $E$ کی اجازتی قیمتیں:

$$E_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{۲.۲۷}$$

حاصل ہو جائیں گی۔ کلاسیکی صورت کے برعکس لامتناہی چوکور کنویں میں کوانٹم ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص **اجازتی**[18] قیمتوں[19] میں سے ہونا ہوگا۔ مستقل $A$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے $\psi$ کو معمول پر لانا ہوگا:

$$\int_0^a|A|^2\sin^2(kx)\,\mathrm{d}x=|A|^2\frac{a}{2}=1,\quad\implies\quad|A|^2=\frac{2}{a}$$

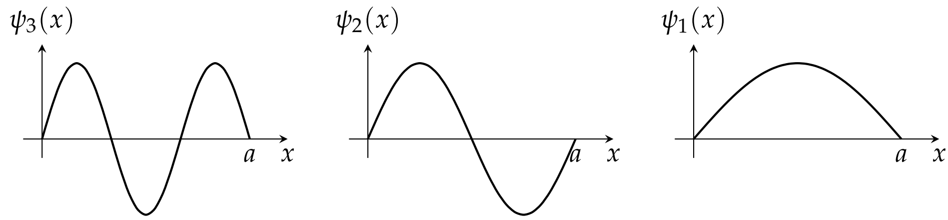
یہ صرف $A$ کی مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر $A=\sqrt{2/a}$ منتخب کرنا بہتر ہوگا (کیونکہ $A$ کا زاویہ کوئی طبیعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنویں کے اندر شروڈنگر مساوات کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{۲.۲۸}$$

جیسا کہ وعدہ تھا (ہر مثبت عدد صحیح $n$ کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات نے حلوں کا ایک لامتناہی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ یہ

[18] allowed

[19] دھیان رہے کہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کو حل کرتے ہوئے سرحدی شرائط عائد کرنے سے اجازتی توانائیوں کی کوانٹازنی شرط محض تکنیکی وجوہات کی بنا پر ابھرتا ہے۔




شکل ۲.۲: لامتناہی چوکور کنویں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸)۔

ایک دھاگے، جس کی لمبائی $a$ ہو، پر بننے والی ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل $\psi_1$ جو **زمینی حال**[۲۰] کہلاتا ہے کی توانائی کم سے کم ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں $n^2$ کے براہ راست بڑھتی ہیں **ہیجان حالات**[۲۱] کہلاتے ہیں۔ تفاعلات $\psi_n(x)$ چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

ا. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری **جفت** اور **طاق** ہیں۔ $\psi_1$ جفت ہے، $\psi_2$ طاق ہے، $\psi_3$ جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔[۲۲]

ب. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے **عقدوں**[۲۳] (**صفر مقام انقطاع**[۲۴]) کی تعداد میں ایک $(1)$ کا اضافہ ہو گا۔ (چونکہ سروں پر پائے جانے والے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہٰذا) $\psi_1$ میں کوئی عقدہ نہیں ہے، $\psi_2$ میں ایک ہے، $\psi_3$ میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

ج. یہ تمام تفاعل درج ذیل معنوں میں باہم **عمودی**[۲۵] ہیں جہاں $m \neq n$ ہے۔

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{۲.۲۹}$$

[۲۰] ground state
[۲۱] excited states
[۲۲] اس تشاکلی کو زیادہ وضاحت سے پیش کرنے کی خاطر بعض مصنفین کنویں کے مرکز کو مبدا پر رکھتے ہیں (یوں کنواں $-a$ تا $+a$ رکھا جاتا ہے)۔ تب جفت تفاعلات کوسائن جبکہ طاق تفاعلات سائن ہوں گے۔ سوال ۲.۳۶ دیکھیں۔
[۲۳] nodes
[۲۴] zero-crossing
[۲۵] orthogonal

ثبوت:

$$\begin{aligned}\int \psi_m(x)^*\psi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}\int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \left\{\frac{1}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right)-\frac{1}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right\}\Bigg|_0^a\\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)}-\frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)}\right\}=0\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $m = n$ کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہو گی؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں ناقابل قبول ہو گی؟) ایسی صورت میں معمول پر لانے کا عمل اس تکمل کی قیمت 1 کر دے گا۔ در حقیقت، عمودیت اور معمول زنی کو ایک فقرے میں سمویا جا سکتا ہے:[۲۶]

$$\int \psi_m(x)^*\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{۲.۳۰}$$

جہاں $\delta_{mn}$ **کرونیکر ڈیلٹا**[۲۷] کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{۲.۳۱}$$

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام) $\psi$ **معیاری عمودی**[۲۸] ہیں۔

د. یہ **مکمل**[۲۹] ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تفاعل $f(x)$ کو ان کے خطی جوڑ سے بنایا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{۲.۳۲}$$

میں تفاعلات $\sin\frac{n\pi x}{a}$ کی مکملیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اگر آپ اعلیٰ علم الاحصاء سے واقف ہیں تو آپ پہچان سکتے ہیں کہ مساوات ۲.۳۲ اور کچھ نہیں بلکہ $f(x)$ کا **فوریئر تسلسل**[۳۰] ہے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جا سکتا ہے، بعض اوقات **مسئلہ ڈرشلے**[۳۱] کہلاتا ہے۔[۳۲]

---

[۲۶] یہاں تمام $\psi$ حقیقی ہیں لہٰذا $\psi_m$ پر * ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقبل کی ضرورتوں کا لحاظ کرتے ہوئے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔

[۲۷] Kronecker delta

[۲۸] orthonormal

[۲۹] complete

[۳۰] Fourier series

[۳۱] Dirichlet's theorem

[۳۲] تفاعل $f(x)$ میں متناہی تعداد کے عدم استمرار پائے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی دیے گئے تفاعل $f(x)$ کے لئے عددی سروں $c_n$ کو $\{\psi_n\}$ کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو $\psi_m(x)$ سے ضرب دے کر تکمل لیں۔

$$\int \psi_m(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m \tag{۲.۳۳}$$

(کرونیکر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دے گا ماسوائے اس جزو کو جس کے لئے $n = m$ ہو۔) یوں تفاعل $f(x)$ کے پھیلاو کے $n$ ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہو گا۔[۳۳]

$$c_n = \int \psi_n(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۳۴}$$

درج بالا چار خواص انتہائی کارآمد ہیں جن کی افادیت صرف لامتناہی چوکور کنواں تک محدود نہیں ہیں۔ پہلی خاصیت ہر اس صورت میں کارآمد ہو گی جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسری خاصیت مخفیہ کی شکل وصورت سے قطع نظر، ایک عالمگیر خاصیت ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ عمومیت ان تمام مخفیہ کے لئے برقرار رہتی ہے جو ہمیں درپیش ہو سکتے ہیں لیکن اس بات کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ مجھے خدشہ ہے کہ زیادہ تر ماہرین طبیعیات عام طور پر عمومیت فرض کر لیتے ہیں اور امید رکھتے ہیں کہ ایسا ہی ہو گا۔

لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t} \tag{۲.۳۵}$$

میں نے دعویٰ کیا تھا (مساوات ۲.۱۷) کہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہو گا۔

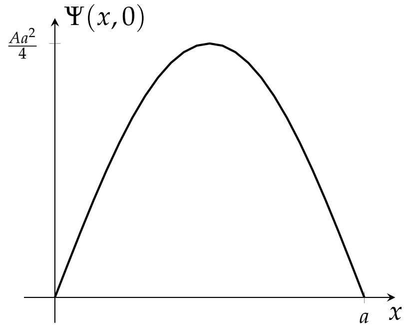
$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t} \tag{۲.۳۶}$$

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج $\psi(x,0)$ پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موزوں عددی سر $c_n$

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

درکار ہوں گے۔ تفاعلات $\psi$ کی کملیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشلے کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر $\psi(x,0)$ کو ہر صورت میں اس طریقے سے لکھ سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا پر $c_n$ کو

[۳۳] آپ یہاں نقلی متغیر کے لئے $m$ یا $n$ یا کوئی تیسرا حرف استعمال کر سکتے ہیں (بس اتنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کیا جائے)، اور ہاں یاد رہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔




شکل ۲.۳: ابتدائی تفاعل موج برائے مثال ۲.۲۔

فوریئر تسلسل سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x,0)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۳۷}$$

دی گئی ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ کے لئے ہم سب سے پہلے پھیلاو کے عددی سروں $c_n$ کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں ڈال کر $\Psi(x,t)$ حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج معلوم ہو جائے تو ہم دلچسپی کی کسی بھی حرکی مقدار کا حساب، باب ا میں مستعمل تراکیب استعمال کرتے ہوئے، کر سکتے ہیں۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہو گی؛ صرف $\psi$ کی تفاعلی شکل اور اجازتی توانائیوں کی مساوات مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جس میں $A$ ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x), \qquad (0 \leq x \leq a)$$

کنویں سے باہر $\psi = 0$ ہے۔ $\Psi(x,t)$ معلوم کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$1 = \int_0^a \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_0^a x^2(a-x)^2\,\mathrm{d}x = |A|^2\,\frac{a^5}{30}$$

$A$ متعین کرتے ہیں۔

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

مساوات ۲.۳۷ کے تحت $n$ واں عددی سر درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sqrt{\frac{30}{a^5}}x(a-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[a\int_0^a x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x - \int_0^a x^2\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\Big\{a\,\left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]\Big|_0^a \\
&\quad - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2-2}{(n\pi/a)^3}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]\Big|_0^a\Big\} \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[-\frac{a^3}{n\pi}\cos(n\pi) + a^3\frac{(n\pi)^2-2}{(n\pi)^3}\cos(n\pi) + a^3\frac{2}{(n\pi)^3}\cos(0)\right] \\
&= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\left[\cos(0)-\cos(n\pi)\right] \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
\end{aligned}
$$

یوں تفاعل موج درج ذیل ہو گا (مساوات ۲.۳۶)۔

$$
\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5\cdots}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}
$$

□

سرسری طور پر ہم کہتے ہیں کہ $c_n$، "تفاعل $\Psi$ میں $\psi_n$ کی مقدار" کو ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ $|c_n|^2$ ویں ساکن حال میں ایک ذرے کے پائے جانے کا احتمال $n$ ہے جو درست نہیں، چونکہ ذرہ حال $\Psi$ میں ہے ناکہ حال $\psi_n$ میں؛ ویسے بھی، تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرے کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی قابل مشاہدہ مقدار کی پیمائش کرتے ہیں، جس کا نتیجہ ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا کہ آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیمائش سے $E_n$ قیمت حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ (کوئی بھی پیمائش، "اجازتی" قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت دے گی، اسی لئے انہیں اجازتی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت $E_n$ حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ $1$ ہونا چاہیے،

$$
\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = 1 \tag{۲.۳۸}
$$

جس کا ثبوت $\Psi$ کی عمود زنی سے حاصل ہو گا (چونکہ تمام $c_n$ غیر تابع وقت ہیں لہٰذا میں $t = 0$ پر اس کا ثبوت پیش کرتا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے تشویش ہو تو آپ با آسانی اس ثبوت کی تعمیم کسی بھی $t$ کے لئے کر سکتے ہیں۔)۔

$$
\begin{aligned}
1 &= \int \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = \int \Big(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m(x)\Big)^* \Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^*\psi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2
\end{aligned}
$$

(یہاں بھی $m$ پر مجموعہ میں کرونیکر ڈیلٹا جزو $m = n$ کو چنتا ہے۔)

مزید یہ کہ توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً

$$
\langle H\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n \tag{۲.۳۹}
$$

ہو گی جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جا سکتی ہے: غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۱۲) کہتی ہے کہ

$$
H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۲.۴۰}
$$

لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= \int \Psi^* H\Psi\,\mathrm{d}x = \int \Big(\sum c_m\psi_m\Big)^* H\Big(\sum c_n\psi_n\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum\sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^*\psi_n\,\mathrm{d}x = \sum |c_n|^2 E_n
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابع وقت ہو گا اور یوں $H$ کی توقعاتی قیمت حتماً غیر تابع وقت ہو گی۔ کوانٹم میکانیات میں یہ **بقا توانائی**[۳۴] کا ظہور ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تفاعل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال $\psi_1$ (شکل ۲.۲) کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $|c_1|^2$ غالب ہو گا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$
|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 = 0.998555\ldots
$$

[۳۴] conservation of energy

باقی تمام عددی سر مل کر درج ذیل فرق دیتے ہیں۔[۳۵]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت

$$\langle H\rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\right)^2 \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{480\hbar^2}{\pi^4 ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2}$$

ہو گی جو کہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ کے بہت قریب، مگر ہیجان حالتوں کی شمولیت کی بنا پر تھوڑی زیادہ ہے۔ □

سوال ۲.۳: یہ دکھائیں کہ لامتناہی چوکور کنویں کے لئے $E = 0$ یا $E < 0$ کی صورت میں غیر تابع وقت شرودنگر مساوات کا کوئی بھی قابل قبول حل نہیں پایا جاتا۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے، لیکن اس مرتبہ شرودنگر مساوات کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط کو پورا نہیں کر سکتے۔)

سوال ۲.۴: لامتناہی چوکور کنویں کے $n$ ویں ساکن حال کیلئے $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle p^2\rangle$ ، $\sigma_x$ ، اور $\sigma_p$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال عدم یقینیت کی حد کے قریب ترین ہو گا؟

سوال ۲.۵: لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج، پہلے دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لائیں۔ (یعنی $A$ تلاش کریں۔ آپ $\psi_1$ اور $\psi_2$ کی معیاری عمودیت کا فائدہ اٹھاتے ہوئے با آسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ $t = 0$ پر $\Psi$ کو معمول پر لانے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا؛ اگر آپ کو شک ہو تو جزو-ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریحاً تصدیق کریں۔)

ب. $\Psi(x,t)$ اور $|\Psi(x,t)|^2$ تلاش کریں۔ موخر الذکر کو وقت کے سائن نما تفاعل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا ہے۔ نتائج کی تسہیل کے لئے $\omega \equiv \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$ لیں۔

---

[۳۵] آپ درج ذیل تسلسل کسی ریاضی کی کتاب سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960}$$
$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

ج. $\langle x \rangle$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت میں ارتعاش پذیر ہے۔ اس ارتعاش کا زاویائی تعدد کتنا ہو گا؟ ارتعاش کا حیطہ کیا ہو گا؟ (اگر حیطہ $\frac{a}{2}$ سے زیادہ نکل آئے تو آپ سیدھا قید خانے چلے جائیں۔)

د. $\langle p \rangle$ تلاش کریں (اور اس پر زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ھ. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش کی جائے تو کون کون سی قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہو گا؟ $H$ کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ $E_1$ اور $E_2$ کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگرچہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (کیونکہ یہ کسی بھی قابل پیمائش مقدار کا حساب کرتے ہوئے منسوخ ہو جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ہم سوال ۲.۵ میں $\psi_1$ اور $\psi_2$ کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کر دیتے ہیں:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

یہاں $\phi$ کوئی مستقل ہے۔ $\Psi(x,t)$ ، $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ اور $\langle x \rangle$ تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص $\phi = \pi/2$ اور $\phi = \pi$ کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔[۳۶]

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le a/2 \\ A(a-x), & a/2 \le x \le a \end{cases}$$

ا. $\Psi(x,0)$ کا خاکہ کھینچیں اور مستقل $A$ کی قیمت تعین کریں۔

ب. $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ $E_1$ ہونے کا احتمال کتنا ہو گا؟

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے ابتدا $(t=0)$ میں لامتناہی چوکور کنویں (چوڑائی $a$) کے نصف بائیں حصے میں پایا جاتا ہے جہاں ہر نقطے پر اس کے ہونے کا امکان ایک جیسا ہے۔

ا. اس کا ابتدائی تفاعل موج $\Psi(x,0)$ تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے۔ اسے معمول پر لانا مت بھولیں۔)

ب. توانائی کی پیمائش کے نتیجے میں $\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ملنے کا احتمال کیا ہو گا؟

---

[۳۶] اصولی طور پر ابتدائی تفاعل موج کی شکل پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی، جب تک کہ وہ معمول پر لانے کے قابل رہے۔ بالخصوص، ضروری نہیں کہ $\Psi(x,0)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہو؛ بلکہ تفاعل کا خود استمراری ہونا بھی ضروری نہیں ہے۔ تاہم، اگر آپ $\langle H \rangle$ کی قیمت کو $\int \Psi(x,0)^* H\Psi(x,0)\,\mathrm{d}x$ سے معلوم کرنا چاہیں گے تو آپ کو تکنیکی مشکلات کا سامنا کرنا پڑے گا، اس لئے کہ $\Psi(x,0)$ کا دوم تفرق بد معین ہے۔ سوال ۲.۹ میں ایسا کرنا اس لئے ممکن ہوا کہ عدم استمرار آخری سروں پر پائے گئے جہاں تفاعل خود صفر ہے۔ سوال ۲.۷ کی طرح کے مسائل کو حل کرنا آپ سوال ۲.۴۸ میں دیکھیں گے۔

سوال ۲.۹: لمحہ $t=0$ پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے $H$ کی توقعاتی قیمت "پرانے دقیانوسی طریقہ":

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x,0)^* \hat{H}\, \Psi(x,0)\, \mathrm{d}x$$

سے حاصل کریں۔ مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔ توجہ کریں: کیونکہ $H$ غیر تابع وقت ہے لہٰذا $t=0$ لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

## ۲.۳ ہارمونی مرتعش

کلاسیکی ہارمونی مرتعش ایک لچک دار اسپرنگ جس کا مقیاس لچک $k$ ہو اور کمیت $m$ پر مشتمل ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت **قانون ہک**[37]

$$F = -kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

کے تحت ہو گی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

ہو گا جہاں

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۲.۴۱}$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

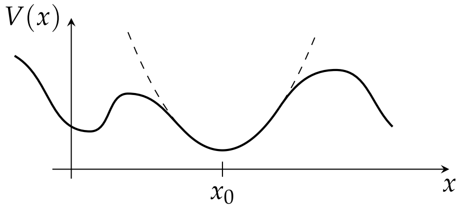
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{۲.۴۲}$$

ہو گی جس کی ترسیم قطع مکافی ہے۔

حقیقت میں کامل ہارمونی مرتعش نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور قانون ہک اس سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہو گا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، مقامی کم سے کم نقطہ کی پڑوس میں تخمیناً قطع مکافی ہو گا (شکل ۲.۴)۔ مخفی توانائی $V(x)$ کے کم سے کم نقطہ $x_0$ کے لحاظ سے $V(x)$ کو **ٹیلر تسلسل**[38] کے لحاظ سے پھیلا کر

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

[37] Hooke's law
[38] Taylor series




شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے مقامی کم سے کم قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکافی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

اس سے $V(x_0)$ منفی کرکے (ہم $V(x)$ سے کوئی بھی مستقل بغیر خطرہ و فکر منفی کر سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے قوت تبدیل نہیں ہوگا) اور یہ جانتے ہوئے کہ $V'(x_0) = 0$ ہوگا (چونکہ $x_0$ کم سے کم نقطہ ہے)، ہم تسلسل کے بلند رتبی ارکان رد کرتے ہوئے (جو $(x - x_0)$ کی قیمت کم ہونے کی صورت میں قابل نظر انداز ہونگے) درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2$$

جو نقطہ $x_0$ پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش بیان کرتا ہے جس کا موثر مقیاس لچک $k = V''(x_0)$ ہو۔[39] یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا پر سادہ ہارمونی مرتعش اتنا اہم ہے: تقریباً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا حیطہ کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوگا۔

کوانٹم میکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{۲.۴۳}$$

کے لیے شروڈنگر مساوات حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس لچک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کی جاتی ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \tag{۲.۴۴}$$

حل کریں۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے دو بالکل مختلف طریقے اپنائے جاتے ہیں۔ پہلی میں تفرقی مساوات کو "**طاقتی تسلسل**"[40] کے ذریعہ حل کرنے کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے، جو دیگر مخفیہ کے لیے بھی کارآمد ثابت ہوتا ہے (اور جسے استعمال کرتے ہوئے ہم باب ۴ میں کولمب مخفیہ کے لیے حل تلاش کریں گے)۔ دوسری ترکیب ایک شیطانی الجبرائی تکنیک ہے جس میں **عاملین سیڑھی** استعمال ہوتے ہیں۔ میں آپ کی

[39] چونکہ ہم فرض کر رہے ہیں کہ $x_0$ کم سے کم نقطہ ہے لہٰذا $V''(x_0) \geq 0$ ہوگا۔ صرف اس نایاب صورت میں ارتعاش تخمینی طور پر بھی سادہ ہارمونی نہیں ہوگا جب $V''(x_0) = 0$ ہو۔

[40] power series

واقفیت پہلے الجبرائی تکنیک کے ساتھ پیدا کرتا ہوں جو زیادہ سادہ، زیادہ دلچسپ (اور حل جلدی دیتا)[41] ہے۔ اگر آپ طاقتی تسلسل کی ترکیب یہاں استعمال نہ کرنا چاہیں تو آپ ایسا کر سکتے ہیں لیکن کہیں نہ کہیں آپکو یہ ترکیب سیکھنی ہو گی۔

### ۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتدا کرتے ہیں

$$\frac{1}{2m}[p^2+(m\omega x)^2]\psi = E\psi \tag{۲.۴۵}$$

جہاں $p \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{d}{\mathrm{d}x}$ معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$H = \frac{1}{2m}[p^2+(m\omega x)^2] \tag{۲.۴۶}$$

کو اجزائے ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عدد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2+v^2 = (iu+v)(-iu+v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ $p$ اور $x$ عاملین ہیں اور عاملین عموماً **مقلوب**[42] نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ $xp$ سے مراد $px$ نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل مقداروں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$a\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip+m\omega x) \tag{۲.۴۷}$$

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب $a_-a_+$ کیا ہو گا؟

$$\begin{aligned} a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(ip+m\omega x)(-ip+m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2+(m\omega x)^2 - im\omega(xp-px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو $(xp - px)$ پایا جاتا ہے جس کو ہم $x$ اور $p$ کا **مقلب**[43] کہتے ہیں اور جو ان کی آپس میں مقلوب نہ ہونے کی پیمائش ہے۔ عمومی طور پر عامل $A$ اور عامل $B$ کا مقلب (جسے چوکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہو گا۔

$$[A,B] \equiv AB - BA \tag{۲.۴۸}$$

[41] یہی تراکیب زاویائی معیار حرکت کے نظریہ (باب ۴) میں مستعمل ہیں اور انہیں عمومیت دیتے ہوئے **عمدہ تشاکلی کوانٹم میکانیات** کے مخفیہ کی وسیع جماعت کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

[42] commute

[43] commutator

اس علامتیت کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$a_-a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar}[x, p] \tag{۲.۴۹}$$

ہمیں $x$ اور عددی p کا مقلب دریافت کرنا ہو گا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہو گا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل $f(x)$ عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آخر میں اس پر کھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$[x, p]f(x) = \left[x\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f) - \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf)\right] = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\right) = -i\hbar f(x) \tag{۲.۵۰}$$

پر کھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$[x, p] = i\hbar \tag{۲.۵۱}$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے **باضابطہ مقلبیت رشتہ**[۴۴] کہلاتا[۴۵] ہے۔
اسے کے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$a_-a_+ = \frac{1}{\hbar\omega}H + \frac{1}{2} \tag{۲.۵۲}$$

یا

$$H = \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right) \tag{۲.۵۳}$$

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیملٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا اور دائیں ہاتھ اضافی $-\frac{1}{2}$ ہو گا۔ یاد رہے گا یہاں $a_+$ اور $a_-$ کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ $a_+$ کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a_+a_- = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \tag{۲.۵۴}$$

بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$[a_-, a_+] = 1 \tag{۲.۵۵}$$

---

[۴۴] canonical commutation relation

[۴۵] گہری نظر سے دیکھا جائے تو کوانٹم میکانیات کے تمام طلسمات کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ مقام اور معیار حرکت آپس میں مقلوب نہیں ہیں۔ بعض مصنفین باضابطہ مقلبیت رشتہ کو مسلمہ لیتے ہوئے $p = (\hbar/i)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ اخذ کرتے ہیں۔

یوں ہیملٹنی کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$H = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right) \tag{۲.۵۶}$$

ہارمونی مرتعش کی شروڈنگر مساوات[46] کو $a_\pm$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hbar\omega\left(a_\pm a_\mp \pm \frac{1}{2}\right) = E\psi \tag{۲.۵۷}$$

(اس طرح کی مساوات میں آپ یا تو بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو اور یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔)

ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی $E$ کی شروڈنگر مساوات کو $\psi$ مطمئن کرتا ہو $(H\psi = E\psi)$ تب توانائی $(E + \hbar\omega)$ کی شروڈنگر مساوات کو $a_+\psi$ مطمئن کرے گا: $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
H(a_+\psi) &= \hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2})(a_+\psi) = \hbar\omega(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+)\psi \\
&= \hbar\omega a_+(a_-a_+ + \tfrac{1}{2})\psi = a_+\left[\hbar\omega(a_+a_- + 1 + \tfrac{1}{2})\psi\right] \\
&= a_+(H + \hbar\omega)\psi = a_+(E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)
\end{aligned}$$

(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے $a_-a_+$ کی جگہ $a_+a_- + 1$ استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ $a_+$ اور $a_-$ کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے، $a\pm$ اور کسی بھی مستقل، مثلاً $\hbar$ ، $\omega$ اور E، کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہو گا۔)

اسی طرح حل $a_-\psi$ کی توانائی $(E - \hbar\omega)$ ہو گی۔

$$\begin{aligned}
H(a_-\psi) &= \hbar\omega(a_-a_+ - \tfrac{1}{2})(a_-\psi) = \hbar\omega a_-\,(a_+a_- - \tfrac{1}{2})\psi \\
&= a_-\left[\hbar\omega(a_-a_+ - 1 - \tfrac{1}{2})\psi\right] = a_-(H - \hbar\omega)\psi = a_-(E - \hbar\omega)\psi \\
&= (E - \hbar\omega)(a_-\psi)
\end{aligned}$$

یوں ہم نے ایک ایسی خودکار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جانتے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $a\pm$ کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہٰذا انہیں ہم **عاملین سیڑھی**[47] پکارتے ہیں: $a_+$ **عامل رفعت**[48] اور $a_-$ **عامل تقلیل**[49] ہے۔ حالات کی "سیڑھی" کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

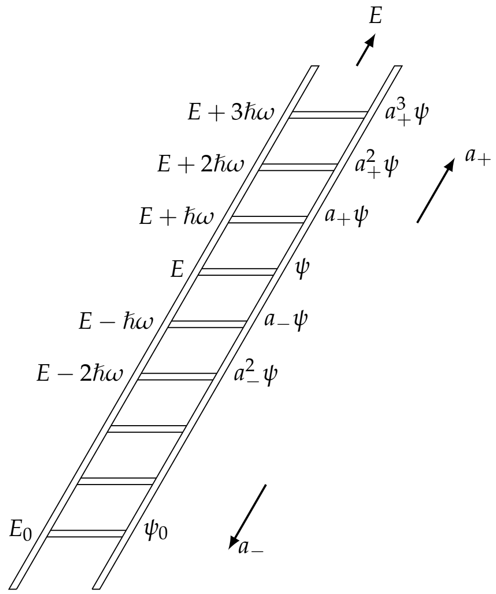
---

[46] میں بار بار "غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات" کہہ کر تھک گیا ہوں لہٰذا جہاں متن سے واضح ہو کہ میں کس قسم کی مساوات کی بات کر رہا ہوں، میں اس کو "شروڈنگر مساوات" پکاروں گا۔

[47] ladder operators

[48] raising operator

[49] lowering operator




شکل ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے حالات کی "سیڑھی"۔

ذرا رکیے! عامل تقلیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حل حاصل ہو گا جس کی توانائی صفر سے کم ہو گی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے۔) نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہو گی۔ ایسا کیوں کر ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $a_-\psi$ شروڈنگر مساوات کا ایک نیا حل ہو گا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جا سکتی ہے کہ یہ معمول پر لانے کے قابل بھی ہو گا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مربع تکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہو گا: سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ (جس کو ہم $\psi_0$ کہتے ہیں) پر درج ذیل ہو گا۔

$$a_-\psi_0 = 0 \tag{۲.۵۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\psi_0(x)$ تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)\psi_0 = 0$$

سے تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0$$

لکھی جا سکتی ہے جسے با آسانی حل کیا جا سکتا ہے:

$$\int \frac{\mathrm{d}\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x\,\mathrm{d}x \implies \ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + C$$

($C$ مستقل ہے۔) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_0(x) = Ae^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ہم اس کو یہیں معمول پر لاتے ہیں:

$$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}\,\mathrm{d}x = |A|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}$$

لہٰذا $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{۲.۵۹}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) شرودُنگر مساوات میں پر کر کے $\hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$ حاصل کرتے ہیں اور یہ جانتے ہوئے کہ $a_-\psi_0 = 0$ ہو گا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{۲.۶۰}$$

سیڑھی کے نچلا پایہ (جو کوانٹم مرتعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جا سکتے ہیں[۵۰] جہاں ہر قدم پر توانائی میں $\hbar\omega$ کا اضافہ ہو گا۔

$$\psi_n(x) = A_n(a_+)^n\psi_0(x), \qquad E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \tag{۲.۶۱}$$

یہاں $A_n$ مستقل معمول زنی ہے۔ یوں $\psi_0$ پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی مرتعش کے تمام[۵۱] ساکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسا کیے بغیر ہم تمام اجازتی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

**مثال ۲.۴:** ہارمونی مرتعش کا پہلا ہیجان حال تلاش کریں۔

---

[۵۰] ہارمونی مرتعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے ہٹ کر، حالات کی شمار $n = 1$ کی بجائے $n = 0$ سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۱۷ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔

[۵۱] دھیان رہے کہ ہم اس ترکیب سے (معمول پر لانے کے قابل) تمام حل حاصل کرتے ہیں۔ اب اگر کسی وجہ کی بنا پر دیگر حل بھی پائے جاتے تب ہم عامل رفعت اور عامل تقلیل استعمال کرتے ہوئے دوسری سیڑھی حاصل کر سکتے ہیں، تاہم اس سیڑھی کے سب سے نچلے پایہ کو مساوات ۲.۵۸ مطمئن کرنا ہو گا، جس سے ہم لازماً مساوات ۲.۵۹ تک پہنچتے ہیں۔ یوں نچلے پایہ ایک جیسے ہوں گے لہٰذا دونوں سیڑھیاں در حقیقت یکساں ہوں گی۔

حل: ہم مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\Big(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\Big)\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\ &= A_1\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\end{aligned} \tag{۲.۶۲}$$

ہم اس کو قلم و کاغذ کے ساتھ معمول پر لاتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2\,\mathrm{d}x = |A_1|^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\Big(\frac{2m\omega}{\hbar}\Big)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\,\mathrm{d}x = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $A_1 = 1$ ہو گا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے $\psi_{50}$ حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجان حالات کو معمول پر بھی لا سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محتاط چلنا ہو گا لہٰذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ $a_\pm\psi_n$ اور $\psi_{n\pm1}$ ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$a_+\psi_n = c_n\psi_{n+1}, \qquad a_-\psi_n = d_n\psi_{n-1} \tag{۲.۶۳}$$

تناسبی مستقل $c_n$ اور $d_n$ کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لیے درج ذیل ہو گا۔ (ظاہر ہے کہ تکملات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کو لازماً صفر پہنچنا ہو گا۔)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(a_\mp f)^* g\,\mathrm{d}x \tag{۲.۶۴}$$

(خطی الجبرا کی زبان میں $a_\mp$ اور $a_\pm$ ایک دوسرے کے **ہرمشی جوڑی دار**[۵۲] ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*\Big(\mp\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\Big)g\,\mathrm{d}x$$

تکمل بالحصص کے ذریعے $\int f^*\big(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\big)\,\mathrm{d}x$ سے $-\int\big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big)^* g\,\mathrm{d}x$ حاصل ہو گا (جہاں $\pm\infty$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا پر سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_\pm g)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\Big(\pm\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\Big)f\Big]^* g\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(a_\mp f)^* g\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

[۵۲] Hermitian conjugate

اور بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a_{\pm}\psi_n)^*(a_{\pm}\psi_n)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}(a_{\mp}a_{\pm}\psi_n)^*\psi_n\,\mathrm{d}x$$

مساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$a_+a_-\psi_n=n\psi_n,\qquad a_-a_+\psi_n=(n+1)\psi_n \tag{۲.۶۵}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(a_+\psi_n)^*(a_+\psi_n)\,\mathrm{d}x&=|c_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_{n+1}\right|^2\mathrm{d}x=(n+1)\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_n\right|^2\mathrm{d}x\\ \int_{-\infty}^{\infty}(a_-\psi_n)^*(a_-\psi_n)\,\mathrm{d}x&=|d_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_{n-1}\right|^2\mathrm{d}x=n\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_n\right|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

چونکہ $\psi_n$ اور $\psi_{n\pm1}$ معمول شدہ ہیں، لہٰذا $|c_n|^2=n+1$ اور $|d_n|^2=n$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$a_+\psi_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1},\qquad a_-\psi_n=\sqrt{n}\,\psi_{n-1} \tag{۲.۶۶}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}&\psi_1=a_+\psi_0,\quad \psi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}a_+\psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_+)^2\psi_0,\\ &\psi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}a_+\psi_2=\frac{1}{\sqrt{3\cdot2}}(a_+)^3\psi_0,\quad \psi_4=\frac{1}{\sqrt{4}}a_+\psi_3=\frac{1}{\sqrt{4\cdot3\cdot2}}(a_+)^4\psi_0,\end{aligned}$$

دیگر تفاعلات بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n\psi_0 \tag{۲.۶۷}$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی $A_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}$ ہو گا۔ (بالخصوص $A_1=1$ ہو گا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*\psi_n\,\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{۲.۶۸}$$

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دو بار مساوات ۲.۶۴ استعمال کرکے پہلے $a_+$ اور بعد میں $a_-$ اپنی جگہ سے ہلا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(a_+a_-)\psi_n \,\mathrm{d}x &= n\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*\psi_n \,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_-\psi_m)^*(a_-\psi_n)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+a_-\psi_m)^*\psi_n \,\mathrm{d}x\\ &= m\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*\psi_n \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

جب تک $m = n$ نہ ہو $\int \psi_m^*\psi_n \,\mathrm{d}x$ لازماً صفر ہو گا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم $\psi(x,0)$ کو ساکن حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عددی سر مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت $E_n$ حاصل ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے $n$ ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\langle V\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2\psi_n \,\mathrm{d}x$$

اس قسم کے تکملات جن میں $x$ یا $p$ کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات $x$ اور $p$ کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تقلیل کی روپ میں لکھیں:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-); \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_+ - a_-) \tag{۲.۶۹}$$

اس مثال میں ہم $x^2$ میں دلچسپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}[(a_+)^2 + (a_+a_-) + (a_-a_+) + (a_-)^2]$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\int \psi_n^*\Big[(a_+)^2 + (a_+a_-) + (a_-a_+) + (a_-)^2\Big]\psi_n \,\mathrm{d}x$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے) $(a_+)^2\psi_n$ تفاعل $\psi_{n+2}$ کو ظاہر کرتا ہے جو $\psi_n$ کو عمودی ہے۔ یہی کچھ $(a_-)^2\psi_n$ کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے جو $\psi_{n-2}$ کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کرکے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(n+n+1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\Big(n+\frac{1}{2}\Big)$$

جیسا آپ نے دیکھا مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حرکی توانائی ہے)۔ جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی مرتعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔ □

سوال ۲.۱۰:

ا. $\psi_2(x)$ تیار کریں۔

ب. $\psi_0$ ، $\psi_1$ اور $\psi_2$ کا خاکہ کھینچیں۔

ج. $\psi_0$ ، $\psi_1$ اور $\psi_2$ کی عمودیت کی تصدیق تکمل لے کر صریحاً کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک تکمل حل کرنا ہو گا۔

سوال ۲.۱۱:

ا. حالات $\psi_0$ (مساوات ۲.۵۹) اور $\psi_1$ (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح تکملات لے کر $\langle x\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، اور $\langle p^2\rangle$ کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی مرتعش کے مسائل میں متغیر $\xi \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}x$ اور مستقل $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حرکی توانائی $\langle T\rangle$ اور اوسط مخفی توانائی $\langle V\rangle$ کی قیمتیں حاصل کریں۔ (آپکو نیا تکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے!) کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی مرتعش کے $n$ ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $\langle x\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، $\langle p^2\rangle$ اور $\langle T\rangle$ تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی مرتعش مخفی قوہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x,0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

ا. $A$ تلاش کریں۔

ب. $\Psi(x,t)$ اور $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ تیار کریں۔

ج. $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں $\psi_1(x)$ کی بجائے $\psi_2(x)$ دیتا تب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ اہرنفسٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد $\omega$ پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس لچک 4 گنا ہو جاتا ہے لہٰذا $\omega' = 2\omega$ ہو گا جبکہ ابتدائی تفاعل موج تبدیل نہیں ہو گا (یقیناً ہیملٹنی

تبدیل ہونے کے بنا پر $\Psi$ اب مختلف انداز سے ارتقا پائے گا)۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی $\hbar\omega/2$ قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ $\hbar\omega$ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

### ۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی مرتعش کی شروڈنگر مساوات کو دوبارہ لوٹ کر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi=E\psi \tag{۲.۷۰}$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلاواسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{۲.۷۱}$$

شروڈنگر مساوات اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}=(\xi^2-K)\psi \tag{۲.۷۲}$$

جہاں $K$ توانائی ہے جس کی اکائی $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ہے۔

$$K\equiv\frac{2E}{\hbar\omega} \tag{۲.۷۳}$$

ہم نے مساوات ۲.۷۲ کو حل کرنا ہوگا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں $K$ اور (یوں $E$) کی "اجازتی" قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔

ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں $\xi$ کی قیمت (یعنی $x$ کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں $\xi^2$ کی قیمت $K$ کی قیمت سے بہت زیادہ ہو گی لہٰذا مساوات ۲.۷۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}\approx\xi^2\psi \tag{۲.۷۴}$$

جس کا تخمینی حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے گا)۔

$$\psi(\xi)\approx Ae^{-\xi^2/2}+Be^{+\xi^2/2} \tag{۲.۷۵}$$

اس میں $B$ کا جزو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے (چونکہ $|x|\to\infty$ کرنے سے اس کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے)۔ طبعی طور پر قابل قبول حل درج ذیل متقارب صورت کا ہوگا۔

$$\psi(\xi)\to(\quad)e^{-\xi^2/2} \qquad \text{(}\xi\text{ کی بڑی قیمت کے لئے)} \tag{۲.۷۶}$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت نما حصہ کو "چھیلنا" چاہیے،

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/2} \tag{۲.۷۷}$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے، $h(\xi)$، اس کی صورت $\psi(\xi)$ سے سادہ ہو۔[۵۳] ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفرقات

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = \Big(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} - \xi h\Big)e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} = \Big(\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + (\xi^2 - 1)h\Big)e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہٰذا شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + (K-1)h = 0 \tag{۲.۷۸}$$

ہم **ترکیب فروبنیوس**[۵۴] استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل $\xi$ کے طاقتی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi^j \tag{۲.۷۹}$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفرقات

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j\xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\xi^2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3\xi + 3\cdot 4a_4\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_{j=0}^{\infty}[(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j]\xi^j = 0 \tag{۲.۸۰}$$

---

[۵۳] اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمین سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ہے۔ تفرقی مساوات کے طاقتی تسلسل حل میں متقاربی جزو کا چھیلنا عموماً پہلا قدم ہوتا ہے۔

[۵۴] Frobenius method

طاقتی تسلسل پھیلاو کے یکتائی کی بنا پر $\xi$ کے ہر طاقت کا عددی سر صفر ہو گا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)}a_j \tag{۲.۸۱}$$

یہ **کلیہ توالی**[۵۵] شروڈنگر مساوات کا مکمل مبدل ہے جو $a_0$ سے ابتداء کرتے ہوئے تمام جفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2}a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12}a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24}a_0, \cdots$$

اور $a_1$ سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6}a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20}a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120}a_1, \cdots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi) \tag{۲.۸۲}$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + \cdots$$

متغیر $\xi$ کا جفت تفاعل ہے جو خود $a_0$ پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1\xi + a_3\xi^3 + a_5\xi^5 + \cdots$$

طاق تفاعل ہے جو $a_1$ پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات $a_0$ اور $a_1$ کی صورت میں $\xi$ تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $j$ کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توالی (تخمیناً) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j}a_j$$

جس کا تخمینی حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$

---

[۵۵] recursion formula

ہو گا جہاں $C$ ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی $\xi$ کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!}\xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!}\xi^{2j} \approx Ce^{\xi^2}$$

اور اب اگر $h$ کی قیمت $e^{\xi^2}$ کے لحاظ سے بڑھے تب $\psi$ (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں) $e^{\xi^2/2}$ (مساوات ۲.۷۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متقاربی روپ[56] ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ معمول پر لانے کے قابل حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طاقتی تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر $j$ کی ایک ایسی بلند ترین قیمت، $n$، پائی جائے گی جو $a_{n+2} = 0$ دیتی ہو (یوں $h_{\text{جفت}}$ تسلسل یا $h_{\text{طاق}}$ تسلسل اختتام پذیر ہو گا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہو گا؛ جفت $n$ کی صورت میں $a_1 = 0$ ہو گا جبکہ طاق $n$ کی صورت میں $a_0 = 0$ ہو گا)۔ یوں قابل قبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$K = 2n + 1$$

جہاں $n$ کوئی غیر منفی عدد صحیح ہو گا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۷۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{۲.۸۳}$$

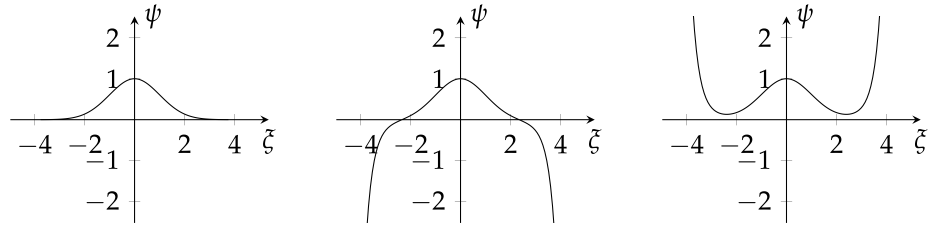
یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹازنی شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹازنی، شروڈنگر مساوات کے طاقتی تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً $E$ کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۷۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر $E$ کے لیے اس کے دو خطی غیر تابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی $x$ پر، بے قابو قوت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنا پر یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں رہتے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم $E$ کی کسی ایک اجازتی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً $0.49\hbar\omega$) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-ا)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب $E$ کی قیمت کسی ایک اجازتی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً $0.51\hbar\omega$) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم[57] دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-ب)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت 0.49 اور 0.51 کے بیچ چھوٹے چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ 0.50 سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک 0.50 پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر معمول زنی کے قابل حل دے گی (شکل ۲.۶-ج)۔

کلیہ توالی $K$ کی اجازتی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j \tag{۲.۸۴}$$

[56] یہ حیرت کی بات نہیں کہ مساوات ۲.۸۱ میں بدخو حل بھی شامل ہے۔ یہ کلیہ توالی ہر لحاظ سے شروڈنگر مساوات کا معادل ہے لہٰذا اس میں لازماً وہ دونوں متقاربی حل شامل ہوں گے جنہیں ہم نے مساوات ۲.۷۵ میں حاصل کیا۔

[57] ہم اس کو **دم ہلانے** (wag the tail) کی ترکیب کہہ سکتے ہیں۔ جب بھی دم ہلے، آپ جان جائیں کہ آپ اجازتی توانائی پر سے گزرے ہیں۔ سوال ۲.۵۴ تا سوال ۲.۵۶ دیکھیں۔




(ج) (ب) (ا)

شکل ۲.۶: شروڈنگر مساوات کی (ا) $E = 0.49\hbar\omega$، (ب) $E = 0.51\hbar\omega$ اور (ج) $E = \hbar\omega$ صورت میں حل۔

اگر $n = 0$ ہو تب تسلسل میں ایک جزو پایا جائے گا (ہمیں $a_1 = 0$ لینا ہو گا تاکہ $h_{\text{طاق}}$ خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 0$ سے $a_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہٰذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم $n = 1$ کے لیے $a_0 = 0$ لیں گے[58]، اور مساوات ۲.۸۴ میں $j = 1$ سے $a_3 = 0$ حاصل ہو گا، لہٰذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہو گا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم $n = 2$ کے لیے $j = 0$ لے کر $a_2 = -2a_0$ اور $j = 2$ لے کر $a_4 = 0$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا۔) عمومی طور پر $h_n(\xi)$ متغیر $\xi$ کا $n$ درجی کثیر رکنی ہو گا، جو جفت عدد صحیح $n$ کی صورت میں

[58] دھیان رہے کہ $n$ کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں $a_j$ کا ایک منفرد سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمائٹ کثیر رکنیاں $H_n(\xi)$

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 1\\
H_1 &= 2\xi\\
H_2 &= 4\xi^2-2\\
H_3 &= 8\xi^3-12\xi\\
H_4 &= 16\xi^4-48\xi^2+12\\
H_5 &= 32\xi^5-160\xi^3+120\xi
\end{aligned}
$$

جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح $n$ کی صورت میں طاق طاقتوں کا کثیر رکنی ہو گا۔ جز و ضربی $a_0$ اور $a_1$ کے علاوہ یہ عین **ہرمائٹ کثیر رکنی**[59] $H_n(\xi)$ ہیں[60]۔ جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جز و ضربی یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ $\xi$ کے بلند تر طاقت کا عددی سر $2^n$ ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی مرتعش کے معمول شدہ[61] ساکن حالات درج ذیل ہوں گے

$$\psi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2} \tag{۲.۸۵}$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶۷ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

سوال ۲.۱۵: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں کلاسیکی اجازتی خطے کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین بامعنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک مرتعش کی توانائی $E=(1/2)ka^2=(1/2)m\omega^2a^2$ ہو گی جہاں $a$ حیطہ ہے۔ یوں توانائی $E$ کے مرتعش کا "کلاسیکی اجازتی خطا" $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ تا $+\sqrt{2E/m\omega^2}$ ہو گا۔ تکمل کی قیمت "عمومی تقسیم" یا "تفاعل خلل" کی جدول سے دیکھیں۔

سوال ۲.۱۶: کلیہ توالی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے $H_5(\xi)$ اور $H_6(\xi)$ تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر $\xi$ کی بلند تر طاقت کا عددی سر روایت کے تحت $2^n$ لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہم ہرمائٹ کثیر رکنی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

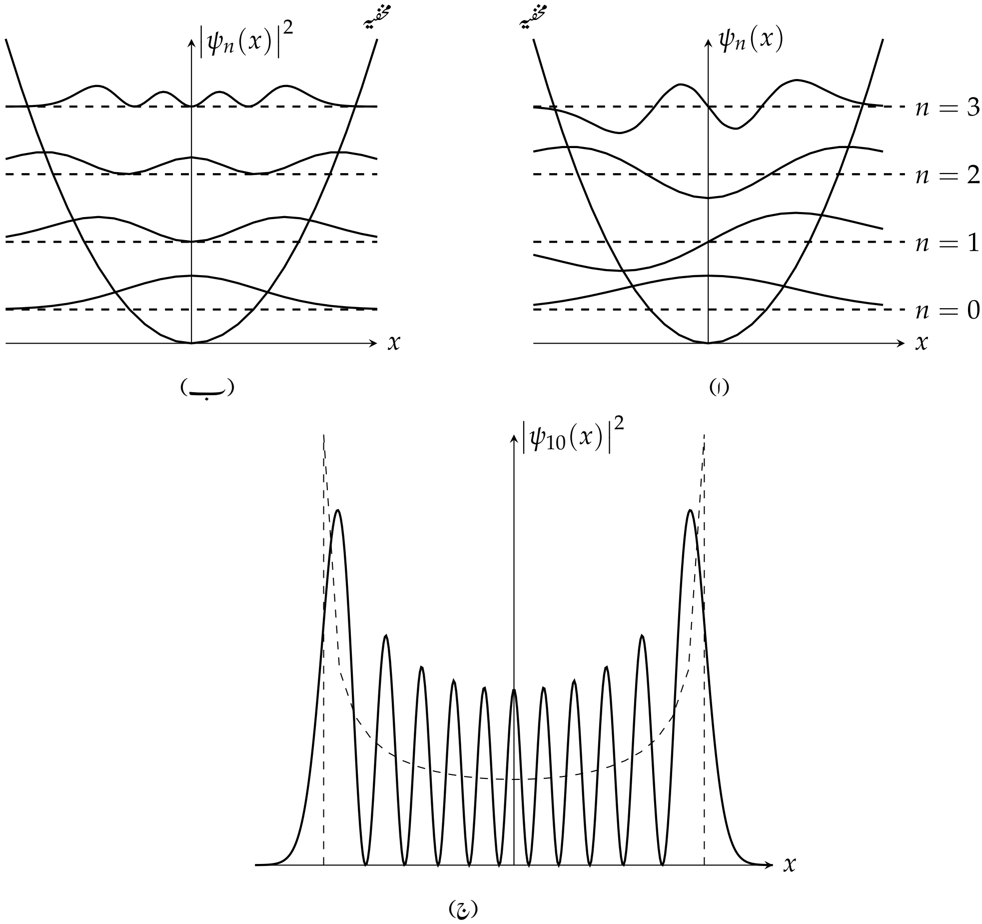
ا. **کلیہ روڈریگیس**[62] درج ذیل کہتا ہے۔

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} \tag{۲.۸۶}$$

اس کو استعمال کر کے $H_3$ اور $H_4$ اخذ کریں۔

---

[59] Hermite polynomials
[60] ہرمائٹ کثیر رکنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔
[61] میں یہاں معمول زنی مستقلات حاصل نہیں کروں گا۔
[62] Rodrigues formula




شکل ۲.۷: ہارمونی مرتعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

ب. درج ذیل کلیہ توالی گزشتہ دو ہرمائٹ کثیر رکنیوں کی صورت میں $H_{n+1}$ دیتا ہے۔

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi) \tag{۲.۸۷}$$

اس کو جزو-ا کے نتائج کے ساتھ استعمال کرکے $H_5$ اور $H_6$ تلاش کریں۔

ج. اگر آپ $n$ رتبی کثیر رکنی کا تفرق لیں تو آپکو $n-1$ رتبی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ ہرمائٹ کثیر رکنیوں کے لیے درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}\xi} = 2nH_{n-1}(\xi) \tag{۲.۸۸}$$

جس کی تصدیق ہرمائٹ کثیر رکنی $H_5$ اور $H_6$ کے لئے کریں۔

د. **پیداکار تفاعل**[۴۳] $e^{-z^2+2z\xi}$ کا $z=0$ پر $n$ واں تفرق $H_n(\xi)$ ہو گا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر پھیلاو میں یہ $z^n/n!$ کا عددی سر ہو گا۔

$$e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) \tag{۲.۸۹}$$

اس کو استعمال کرکے $H_0$، $H_1$ اور $H_2$ دوبارہ اخذ کریں۔

## ۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے ہر جگہ $V(x) = 0$ ہو گا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہونی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہو گی، لیکن کوانٹم میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ذیل

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{۲.۹۰}$$

یا ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۹۱}$$

یہاں تک یہ لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوہ صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوت نما (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر جلد عیاں ہو گی۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{۲.۹۲}$$

[۴۳] generating function

لامتناہی چوکور کنویں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو $k$ (اور یوں $E$) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہٰذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حامل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تابعیت وقت $e^{-iEt/\hbar}$ جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) = Ae^{ik(x-\frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x+\frac{\hbar k}{2m}t)} \tag{۲.۹۳}$$

ایسا کوئی بھی تفاعل جو $x$ اور $t$ متغیرات کی مخصوص جوڑ $(x \pm vt)$ کا تابع ہو (جہاں $v$ مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو $v$ رفتار سے $\mp x$ رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ) تفاعل کے دلیل[۶۴] کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہو گا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x = \mp vt + \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہٰذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو بائیں رخ حرکت کرتی (اتنی ہی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں فرق صرف $k$ کی علامت کا ہے لہٰذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Psi_k(x,t) = Ae^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)} \tag{۲.۹۴}$$

جہاں $k$ کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہو گی۔

$$k \equiv \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases} \tag{۲.۹۵}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے "ساکن حالات" حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج $\lambda = 2\pi/|k|$ ہو گا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہو گا۔

$$p = \hbar k \tag{۲.۹۶}$$

ان امواج کی رفتار (یعنی $t$ کا عددی سر تقسیم $x$ کا عددی سر) درج ذیل ہو گا۔

$$v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}} \tag{۲.۹۷}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی $E$ ہو (جو خالصتاً حرکی ہو گی چونکہ $V = 0$ ہے) کی کلاسیکی رفتار $E = (1/2)mv^2$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}} \tag{۲.۹۸}$$

---

[۶۴] argument

ظاہری طور پر کوانٹم میکانی تفاعل موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k \,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = |A|^2\,(\infty) \tag{۲.۹۹}$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں قابل علیحدگی حل طبعی طور پر قابل قبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جا سکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ قابل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل اب بھی قابل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ $n$ پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر $k$ کے لحاظ سے تکمل ہوگا)۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} \,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۰}$$

(ہم $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ کو اپنی آسانی کیلئے تکمل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر $c_n$ کی جگہ یہاں $(1/\sqrt{2\pi})\phi(k)\,\mathrm{d}k$ کردار ادا کرتا ہے۔) اب اس تفاعل موج کو (موزوں $\phi(k)$ کیلئے) معمول پر لایا جا سکتا ہے۔ تاہم اس میں $k$ کی قیمتوں کی سعت پائی جائے گی، لہٰذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سعت پائی جائیں گی۔ ہم اس کو **موجی اکھٹ**[۶۵] کہتے ہیں۔[۶۶]

عمومی کوانٹم مسئلہ میں ہمیں $\Psi(x,0)$ فراہم کر کے $\Psi(x,t)$ تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} \,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۱}$$

پر پورا اترتا ہوا $\psi(k)$ کیسے تعین کیا جائے؟ یہ فوریئر تجزیہ کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب **مسئلہ پلانشرال**[۶۷]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} \,\mathrm{d}k \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۰۲}$$

---

[۶۵] wave packet

[۶۶] سائن نما امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتی ہے اور یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تباہ کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بنا پر مقام بندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

[۶۷] Plancherel's theorem

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰ دیکھیں)۔ $F(k)$ کو $f(x)$ کا **فوریئر بدل**[68] کہا جاتا ہے جبکہ $f(x)$ کو $F(k)$ کا **الٹ فوریئر بدل**[69] کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نما کی علامت کا فرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، اجازتی تفاعل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: تکمل کا موجود[70] ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقاصد کے لئے، تفاعل $\Psi(x,0)$ پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹم مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہوگا جہاں $\phi(k)$ درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \tag{۲.۱۰۳}$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جو ابتدائی طور پر خطہ $-a \leq x \leq a$ میں رہنے کا پابند ہو کو وقت $t = 0$ پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں $A$ اور $a$ مثبت حقیقی مستقل ہیں۔ $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,0)\right|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x = 2a\,|A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

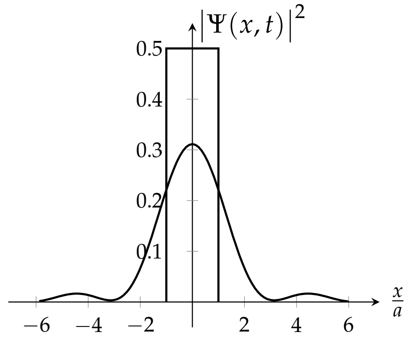
اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے $\psi(k)$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\phi(k) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-a}^{a} \\ =& \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k}\end{aligned}$$

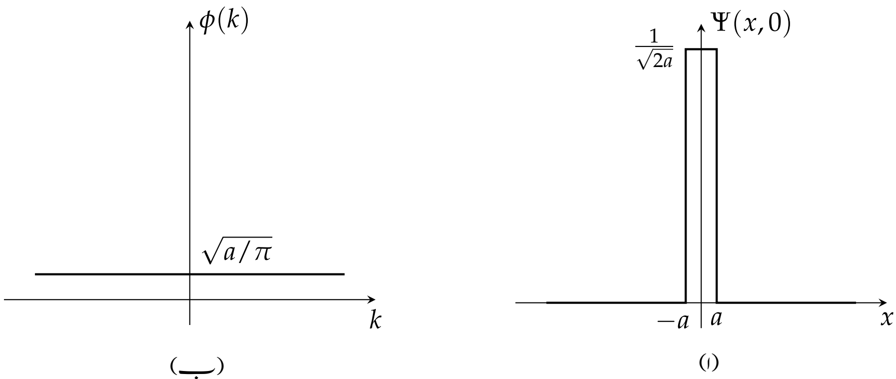
آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} \, \mathrm{d}k \tag{۲.۱۰۴}$$

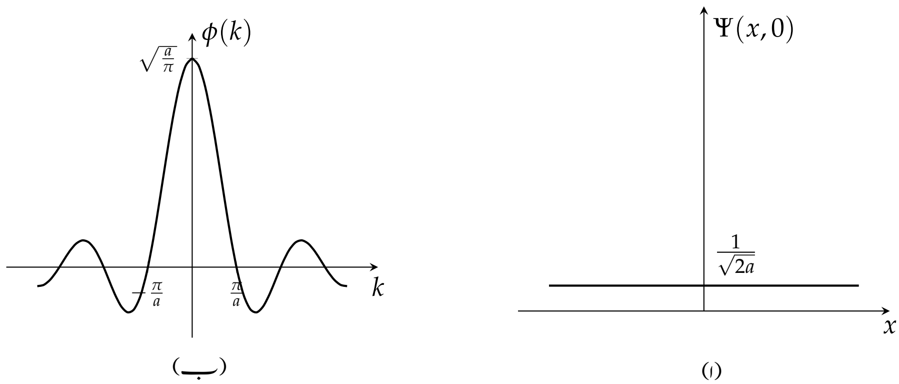
بدقسمتی سے اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقتاً پائی جاتی ہیں جن کے لئے $\Psi(x,t)$ کا تکمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)




شکل ۲.۸: تفاعل $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ کی لمحہ $t = 0$ پر مستطیل اور $t = ma^2/\hbar$ پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۴)۔




شکل ۲.۹: چھوٹے $a$ کے لئے مثال ۲.۶۔(ا) $\Psi(x,0)$ کی ترسیم؛ (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم۔




شکل ۲.۱۰: بڑی $a$ کے لئے (ا) $\Psi(x,0)$ کی ترسیم، (ب) $\phi(k)$ کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر $a$ کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹-ا)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمیناً $\sin ka \approx ka$ لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

جو $k$ کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا پر افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں پھیلاو کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہٰذا $k$، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کا پھیلاو لازماً زیادہ ہو گا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی $a$) کی صورت میں مقام کا پھیلاو زیادہ ہو گا (شکل ۲.۱۰) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{\sin ka}{ka}$$

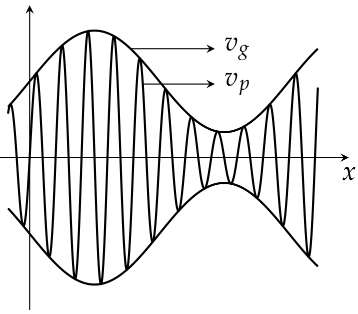
اب $\sin z/z$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر $z = \pm\pi$ (جو یہاں $k = \pm\pi/a$ کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی $a$ کیلئے $k = 0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ $\square$

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل $\Psi_k(x,t)$، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقتاً

[۶۸] Fourier transform

[۶۹] inverse Fourier transform

[۷۰] تفاعل $f(x)$ پر عائد لازم اور کافی پابندی یہ ہے کہ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ متناہی ہو۔ (ایسی صورت میں $\int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2\,\mathrm{d}k$ بھی متناہی ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں تکملات کی قیمتیں ایک جتنی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)




شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ "غلاف" گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ $\Psi_k$ طبعی طور پر قابل حصول حل نہیں ہے۔ بہر حال آزاد ذرے کی تفاعل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سموئی سمتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصور کچھ یوں ہے: سائن نما تفاعلات کا خطی میل جس کے حیطہ کو $\phi$ ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہو گا؛ یہ "غلاف" میں ڈھانکے ہوئے "لہروں" پر مشتمل ہو گا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو **دوری سمتی رفتار**[41] $(v_p)$ کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ غلاف کی رفتار، جس کو **گروہی سمتی رفتار**[42] $(v_g)$ کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہو گی۔ غلاف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہو گی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھاگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہو گی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہو گا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا حیطہ بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پہنچ کر اس کا حیطہ گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے۔) یہاں میں نے دکھانا ہو گا کہ کوانٹم میکانیات میں آزاد ذرے کے تفاعل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہو گی۔

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx-\omega t)} \, \mathrm{d}k$$

(یہاں $\omega = (\hbar k^2/2m)$ ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے **انتشاری رشتہ**[43] ($\omega$ کا متغیر $k$ کے لحاظ سے کلیہ) سے قطع نظر، درست ہو گا۔) ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی $k_0$ پر $\phi(k)$ نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا $k$ بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار

[41] phase velocity
[42] group velocity
[43] dispersion relation

سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنا پر یہ موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل وصورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ $k_0$ سے دور متکمل قابل نظر انداز ہے لہٰذا ہم تفاعل $\omega(k)$ کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega_0'(k - k_0)$$

جہاں نقطہ $k_0$ پر $k$ کے لحاظ سے $\omega$ کا تفرق $\omega_0'$ ہے۔

(تکمل کے وسط کو $k_0$ پر منتقل کرنے کے غرض سے) ہم متغیر $k$ کی جگہ متغیر $s = k - k_0$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0+s)x - (\omega_0 + \omega_0' s)t]} \, \mathrm{d}s$$

وقت $t = 0$ پر

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0+s)x} \, \mathrm{d}s$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega_0' t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0+s)(x - \omega_0' t)} \, \mathrm{d}s$$

ماسوائے $x$ کو $(x - \omega_0' t)$ منتقل کرنے کے یہ $\Psi(x,0)$ میں پایا جانے والا تکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(x,t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega_0')t} \, \Psi(x - \omega_0' t, 0) \tag{۲.۱۰۵}$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں $|\Psi|^2$ کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہو گا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار $\omega_0'$ سے حرکت کرے گا:

$$v_{\text{گروہی}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{۲.۱۰۶}$$

(جس کی قیمت کا حساب $k = k_0$ پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$v_{\text{دوری}} = \frac{\omega}{k} \tag{۲.۱۰۷}$$

یہاں $\omega = (\hbar k^2/2m)$ یعنی $\omega/k = (\hbar k/2m)$ ہے جبکہ $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k = (\hbar k/m)$ ہے جو دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار نا کہ ساکن حالات کی دوری سمتی رفتار کلاسیکی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$v_{\text{کلاسیکی}} = v_{\text{گروہی}} = 2v_{\text{دوری}} \tag{۲.۱۰۸}$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر $x$ کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$ اور $[C\cos kx + D\sin kx]$ ہیں۔ مستقلات $C$ اور $D$ کو مستقلات $A$ اور $B$ کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقلات $A$ اور $B$ کو مستقلات $C$ اور $D$ کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کوانٹم میکانیات میں جب $V = 0$ ہو، قوت نمائی تفاعل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ $\sin$ اور $\cos$ ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامتناہی چوکور کنویں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال رو $J$ تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے بہاو کا رخ کیا ہو گا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ متناہی وقفہ کے فوریئر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامتناہی تک بڑھاتے گے۔

ا. مسئلہ ڈرشلے کہتا ہے کہ وقفہ $[-a, +a]$ پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو فوریئر تسلسل کے پھیلاو سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

$a_n$ اور $b_n$ کی صورت میں $c_n$ کیا ہو گا؟

ب. فوریئر تسلسل کے عددی سروں کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} \, \mathrm{d}x$$

ج. $n$ اور $c_n$ کی جگہ نئے متغیرات $k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)$ اور $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a c_n$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جزو-ا اور جزو-ب درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x,$$

جہاں ایک $n$ سے اگلی $n$ تک $k$ میں تبدیلی $\Delta k$ ہے۔

د. حد $a \to \infty$ لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ: $F(k)$ کی صورت میں $f(x)$ اور $f(x)$ کی صورت میں $F(k)$ کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوئیں۔ اس کے باوجود حد $a \to \infty$ کی صورت میں ان دونوں کی ساخت مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x,0) = Ae^{-a|x|}$$

جہاں $A$ اور $a$ مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\phi(k)$ تلاش کریں۔

ج. $\Psi(x,t)$ کو تکمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں $a$ بہت بڑا ہو، اور جہاں $a$ بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: **گاوسی موجی اکٹھ** ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}$$

جہاں $A$ اور $a$ مستقلات ہیں ($a$ حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لائیں۔

ب. $\Psi(x,t)$ تلاش کریں۔ اشارہ: "مربع مکمل کرتے ہوئے" درج ذیل روپ کے تکمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x$$

مان لیں $y \equiv \sqrt{a}[x+(b/2a)]$ ہے۔ یوں $(ax^2+bx) = y^2-(b^2/4a)$ ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج. $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar at/m)^2}}$$

وقت $t=0$ پر $|\Psi|^2$ کا خاکہ (بطور $x$ کا تفاعل) بنائیں۔ کسی بڑے $t$ پر دوبارہ خاکہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ $|\Psi|^2$ کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں $\langle x\rangle$ ، $\langle p\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ ؛ اور احتمالات $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ تلاش کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2\rangle = a\hbar^2$ ، تاہم جواب کو اس سادہ روپ میں لانے کیلئے آپ کو کافی الجبرا کرنا ہوگا۔

ہ. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کار آمد ہے؟ کس لمحہ $t$ پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

## ۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ

### ۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات

ہم غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چوکور کنواں اور ہارمونی مرتعش کے حل معمول پر لانے کے قابل تھے اور انہیں غیر مسلسل اشاریہ $n$ کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں اور انہیں استمراری متغیر $k$ کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبیعی طور پر قابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تابع وقت شروڈنگر مساوات کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ ($n$ پر لیا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ ($k$ پر) تکمل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبیعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تابع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر $V(x)$ ذرے کی کل توانائی $E$ سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-ا) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنویں میں "پھنسا" رہے گا: یہ **واپسی نقاط**[۷۴] کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنویں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی فراہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **مقید حال**[۷۵] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر $E$ ایک (یا دونوں) جانب $V(x)$ سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں۔) ہم اسے **بکھراو حال**[۷۶] کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی مرتعش)؛ بعض صرف بکھراو حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پہاڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقسام کے حال پیدا کرتی ہیں۔

شروڈنگر مساوات کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھراو حال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹم کے دائرہ کار میں یہ فرق اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں **سرنگ زنی**[۷۷] (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی متناہی مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہٰذا مخفیہ کی قیمت صرف لامتناہی پر اہم ہوگی (شکل ۲.۱۲-د)۔

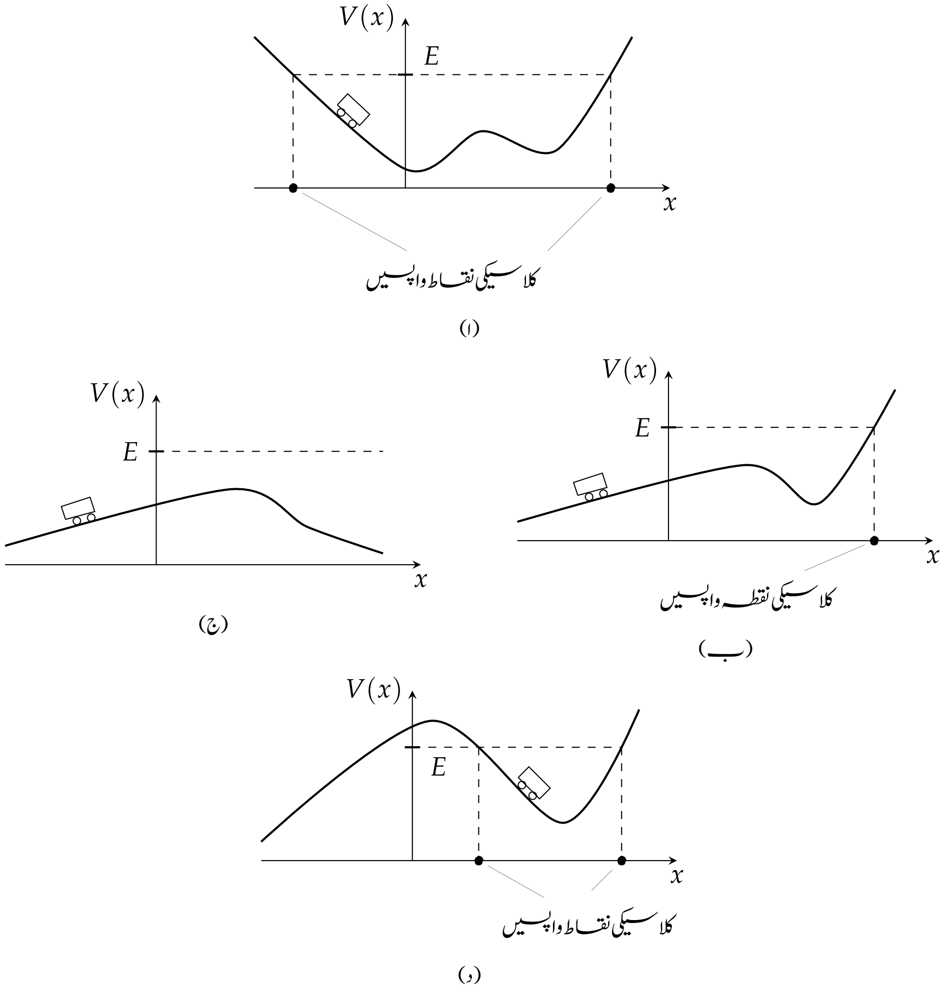
$$\begin{cases} E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \tag{۲.۱۰۹}$$

"روزمرہ زندگی" میں لامتناہی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں مسلمہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

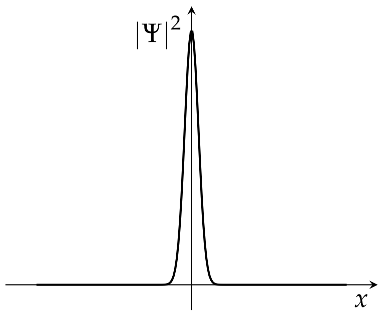
$$\begin{cases} E < 0 \Rightarrow \text{مقید حال} \\ E > 0 \Rightarrow \text{بکھراو حال} \end{cases} \tag{۲.۱۱۰}$$

---

[۷۴] turning points
[۷۵] bound state
[۷۶] scattering state
[۷۷] tunneling




شکل ۲.۱۲: (ا) مقید حال، (ب، ج) بکھراو حالات، (د) کلاسیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بکھراو حال۔




شکل ۲.۱۳: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل (مساوات ۲.۱۱۱)

چونکہ $x \to \pm\infty$ پر لامتناہی چوکور کنویں اور ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہٰذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہٰذا یہ صرف بکھراو حال[۷۸] پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

### ۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں

مبدا پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا تفاعل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل 13.2) **ڈیلٹا تفاعل**[۷۹] کہلاتا ہے۔

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{۲.۱۱۱}$$

نقطہ $x = 0$ پر یہ تفاعل متناہی نہیں ہے لہٰذا تکنیکی طور پر اس کو تفاعل کہنا غلط ہو گا (ریاضی دان اسے **متعمم تفاعل**[۸۰] یا **متعمم تقسیم**[۸۱] کہتے ہیں)۔[۸۲] تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت بار ایک ڈیلٹا تفاعل ہو گا۔) آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\delta(x-a)$ نقطہ $a$ پر اکائی رقبہ کا نوکیلی تفاعل ہو گا۔ چونکہ $\delta(x-a)$ اور ایک سادہ تفاعل $f(x)$ کا حاصل ضرب نقطہ $a$ کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہو گا لہٰذا $\delta(x-a)$ کو $f(x)$ سے ضرب دینا، اسے $f(a)$

[۷۸] آپ کو یہاں پریشانی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے $E > V_{کمتر}$ درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھراو حال، جو معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں، پر لاگو نہیں ہو گا۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں ہیں تب $E \leq 0$ کے لئے شروڈنگر مساوات کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

[۷۹] Dirac delta function

[۸۰] generalized function

[۸۱] generalized distribution

[۸۲] ڈیلٹا تفاعل کو ایسے مستطیل (یا مثلث) کی تحدیدی صورت تصور کیا جا سکتا ہے جس کی چوڑائی بتدریج کم اور قد بتدریج بڑھتا ہو۔

سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \tag{۲.۱۱۲}$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو ڈیلٹا تفاعل کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a) \tag{۲.۱۱۳}$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ $a$ پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت "اٹھاتا" ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ ہو، صرف اتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ $a$ شامل ہو لہٰذا $a-\epsilon$ تا $a+\epsilon$ تکمل لینا کافی ہوگا جہاں $\epsilon > 0$ ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں $\alpha$ ایک مثبت مستقل ہے۔[۸۳]

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \tag{۲.۱۱۴}$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامتناہی چوکور کنویں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو کم سے کم تحلیلی پریشانیاں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا تفاعل کنویں کے لیے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi \tag{۲.۱۱۵}$$

جو مقید حالات $(E < 0)$ اور بکھراو حالات $(E > 0)$ دونوں پیدا کرتی ہے۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ $x < 0$ میں $V(x) = 0$ ہوگا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = k^2\psi \tag{۲.۱۱۶}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $k$ درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے $E$ منفی ہوگا لہٰذا $k$ حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۱۷}$$

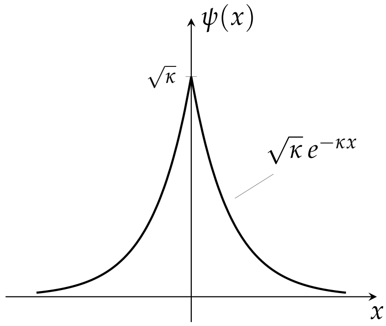
مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \tag{۲.۱۱۸}$$

ہوگا جہاں $x \to -\infty$ پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $A = 0$ منتخب کرنا ہوگا:

$$\psi(x) = Be^{kx}, \qquad (x < 0) \tag{۲.۱۱۹}$$

[۸۳] ڈیلٹا تفاعل کی اکائی ایک بٹا لمبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہٰذا $\alpha$ کا بُعد توانائی ضرب لمبائی ہوگا۔




شکل ۲.۱۴: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

خطہ $x > 0$ میں بھی $V(x)$ صفر ہے اور عمومی حل $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$ ہو گا؛ اب $x \to +\infty$ پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہٰذا $G = 0$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل لیا جائے گا۔

$$\psi(x) = Fe^{-kx}, \qquad (x > 0) \tag{۲.۱۲۰}$$

ہمیں نقطہ $x = 0$ پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک ساتھ جوڑنا ہو گا۔ میں $\psi$ کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

$$\begin{cases} 1. \quad \psi & \text{لازماً استمراری} \\ 2. \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} & \text{استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفیہ لامتناہی ہو} \end{cases} \tag{۲.۱۲۱}$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت $F = B$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases} \tag{۲.۱۲۲}$$

تفاعل $\psi(x)$ کو شکل ۲.۱۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لامتناہی چوکور کنویں کی طرح) جوڑ پر مخفیہ لامتناہی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ $x = 0$ پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلٹا تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\psi$ کے تفرق میں عدم استمرار یہی ڈیلٹا تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = E\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲.۱۲۳}$$

پہلا تکمل در حقیقت دونوں آخری نقاط پر $\frac{d\psi}{dx}$ کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری تکمل اس پٹی کا رقبہ ہو گا، جس کا قد متناہی، اور $\epsilon \to 0$ کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہٰذا یہ تکمل صفر ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x)\,dx \tag{۲.۱۲۴}$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہو گا لہٰذا $\frac{d\psi}{dx}$ عموماً استمراری ہو گا۔ لیکن جب سرحد پر $V(x)$ لامتناہی ہو تب یہ دلیل قابل قبول نہیں ہو گی۔ بالخصوص $V(x) = -\alpha\delta(x)$ کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \tag{۲.۱۲۵}$$

یہاں درج ذیل ہو گا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x>0) \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{+} = -Bk \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x<0) \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہٰذا $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$ ہو گا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = B$ ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$k = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \tag{۲.۱۲۶}$$

اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$E = -\frac{\hbar^2k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{۲.۱۲۷}$$

آخر میں $\psi$ کو معمول پر لاتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi(x)\right|^2 dx = 2|B|^2\int_0^{\infty} e^{-2kx}\,dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذر کا انتخاب کرکے) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \tag{۲.۱۲۸}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلٹا تفاعل، کی "زور" $\alpha$ کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \qquad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{۲.۱۲۹}$$

ہم $E > 0$ کی صورت میں بکھراو حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ شروڈنگر مساوات $x < 0$ کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$$

جہاں

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۳۰}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{۲.۱۳۱}$$

جہاں کوئی بھی جزو بے قابو نہیں بڑھتا ہے لہٰذا انہیں رد نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح $x > 0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \tag{۲.۱۳۲}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کی بنا پر درج ذیل ہو گا۔

$$F + G = A + B \tag{۲.۱۳۳}$$

تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), \quad (x > 0), \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), \quad (x < 0), \implies \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$

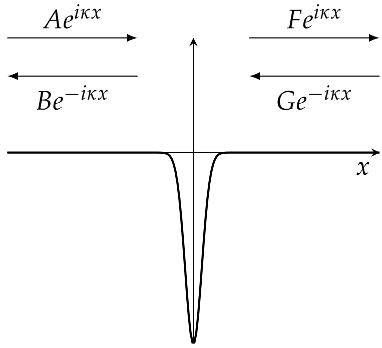
لہٰذا $\Delta(\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x) = ik(F - G - A + B)$ ہو گا۔ ساتھ ہی $\psi(0) = (A + B)$ ہو گا لہٰذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B) \tag{۲.۱۳۴}$$

یا مختصراً:

$$F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \qquad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \tag{۲.۱۳۵}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات $A$، $B$، $C$ اور $D$ بلکہ $k$ شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ معمول پر لانے کے قابل حال نہیں ہے لہٰذا معمول پر لانا مددگار ثابت نہیں ہو گا۔ بہتر ہو گا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انفرادی




شکل ۲.۱۵: ڈیلٹا تفاعل کنویں سے بکھراو۔

طبعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ $e^{ikx}$ (کے ساتھ تابع وقت جزو ضربی $e^{-iEt/\hbar}$ منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا تفاعل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح $e^{-ikx}$ بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل $A$ بائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے، $B$ بائیں رخ واپس لوٹتے ہوئے موج کا حیطہ ہے، $F$ (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا حیطہ جبکہ $H$ دائیں سے آمدی موج کا حیطہ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بکھراو کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا حیطہ صفر ہو گا:

$$G = 0, \quad \text{بائیں سے بکھراو} \tag{۲.۱۳۶}$$

**آمدی موج**[۸۴] کا حیطہ $A$ ، **منعکس موج**[۸۵] کا حیطہ $B$ جبکہ **ترسیلی موج**[۸۶] کا حیطہ $F$ ہو گا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو $B$ اور $F$ کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$B = \frac{i\beta}{1-i\beta}A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta}A \tag{۲.۱۳۷}$$

(اگر آپ دائیں سے بکھراو کا مطالعہ کرنا چاہیں تب $A = 0$ ہو گا؛ $G$ آمدی حیطہ، $F$ منعکس حیطہ، اور $B$ ترسیلی حیطہ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال $|\psi|$ ہوتا ہے لہٰذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی[۸۷] احتمال درج ذیل ہو گا

[۸۴] incident wave
[۸۵] reflected wave
[۸۶] transmitted wave
[۸۷] یہ معمول پر لانے کے قابل تفاعل نہیں ہے لہٰذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہو گا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمالات کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \tag{۲.۱۳۸}$$

جہاں $R$ کو **شرح انعکاس**[۸۸] کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو $R$ آپ کو بتائے گا کہ ٹکرانے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہو گا جسے **شرح ترسیل**[۸۹] کہتے ہیں۔

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \tag{۲.۱۳۹}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک $(1)$ ہو گا۔

$$R + T = 1 \tag{۲.۱۴۰}$$

دھیان رہے کہ $R$ اور $T$ متغیر $\beta$ کے اور لہٰذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵) $E$ کے تفاعل ہوں گے۔

$$R = \frac{1}{1+\frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \qquad T = \frac{1}{1+\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}} \tag{۲.۱۴۱}$$

توانائی جتنی زیادہ ہو، ترسیل کا احتمال اتنا ہی زیادہ ہو گا (جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے)۔

یہاں تک باقی سب ٹھیک ہے تاہم ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ بکھراو موج کے تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں لہٰذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم ہم اس مسئلے کا حل جانتے ہیں۔ جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا، ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہونگے جو معمول پر لائے جانے کے قابل ہوں۔ حقیقی طبعی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھ ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا سادہ اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہاں سے آگے مسئلے کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کرنا بہتر ہو گا۔[۹۰] چونکہ توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کو معمول پر نہیں لایا جا سکتا ہے لہٰذا $R$ اور $T$ کو (بالترتیب) $E$ کے قریب ذرات کی تخمینی شرح انعکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

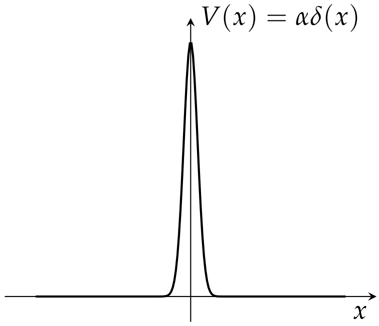
یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم لب لباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بکھر کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور، ساکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مساوات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں) $\psi$ ایک مخلوط، غیر تابع وقت، سائن نما تفاعل ہے جو (مستقل حیطہ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھ سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انعکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری فضا میں پھیلے ہوئے، حقیقتاً حقیر تابعیت وقت کے تفاعل موج کے خطی جوڑ لے کر ایک (حرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے (سوال ۲.۴۳)

---

[۸۸] reflection coefficient

[۸۹] transmission coefficient

[۹۰] کنواں اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھ کے بکھراو کے اعدادی مطالعے دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔




شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف $\alpha$ کی علامت تبدیل کرنی ہو گی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انعکاس اور شرح ترسیل جو $\alpha^2$ پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنویں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی قد کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بکھراو غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E > V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب $R = 0$ اور $T = 1$ ہو گا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا؛ اگر $E < V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب $T = 0$ اور $R = 1$ ہو گا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بکھراو زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر $E < V_{\text{بلند تر}}$ ہو تب بھی ایک ذرے کا مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہو گا۔ اس مظہر کو **سرنگ زنی**[91] کہتے ہیں جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کا سبب بنا ہے۔ اس کے برعکس $E > V_{\text{بلند تر}}$ کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہو گا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کود دیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹم میکانیات آپ کی جان بچا پائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے گا)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\int_{-3}^{+1}(x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\delta(x+2)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_{0}^{\infty}[\cos(3x) + 2]\delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x$

ج. $\int_{-1}^{+1} e^{(|x|+3)}\delta(x-2)\,\mathrm{d}x$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا تفاعلات زیر علامت تکمل رہتے ہیں اور دو فقرے $D_1(x)$ اور $D_2(x)$ جو ڈیلٹا تفاعل پر

[91] tunneling

مبنی ہیں صرف درج صورت میں برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)D_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)D_2(x)\,\mathrm{d}x$$

جہاں $f(x)$ کوئی بھی سادہ تفاعل ہو سکتا ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x) \tag{۲.۱۴۲}$$

جہاں $c$ ایک حقیقی مستقل ہے۔(منفی $c$ کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. **سیڑھی تفاعل**[۹۲] $\theta(x)$ درج ذیل ہے۔

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{۲.۱۴۳}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم $\theta(0)$ کی تعریف $\frac{1}{2}$ کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = \delta(x)$ ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پر کھیں۔ اشارہ چونکہ $\psi$ کے تفرق کا $x = 0$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے لہٰذا $\langle p^2 \rangle$ کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب: $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل $\delta(x)$ کا فوریئر تبادل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

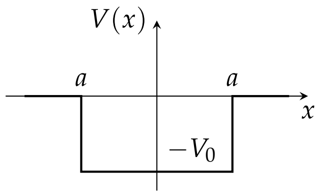
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{۲.۱۴۴}$$

تبصرہ: اس کلیہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگرچہ $x = 0$ کے لئے یہ تکمل لامتناہی ہے اور $x \neq 0$ کی صورت میں چونکہ متکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہٰذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوندکاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم $-L$ تا $+L$ تکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو، $L \to \infty$ کرتے ہوئے متناہی تکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع متکاملیت) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا تفاعل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۳ پر مربع متکاملیت کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲۷: درج ذیل جڑواں ڈیلٹا تفاعل مخفیہ پر غور کریں جہاں $\alpha$ اور $a$ مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

[۹۲] step function




شکل ۲.۱۷: متناہی چوکور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵)۔

ا. اس مخفیہ کا خاکہ کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟ $\alpha = \hbar^2/ma$ اور $\alpha = \hbar^2/4ma$ کیلئے اجازتی توانائیاں تلاش کریں اور تفاعلات موج کا خاکہ کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: جڑواں ڈیلٹا تفاعل کے مخفیہ (سوال ۲.۲۷) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

## ۲.۶ متناہی چوکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر متناہی چوکور کنویں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{۲.۱۴۵}$$

لیتے ہیں جہاں $V_0$ ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۲.۱۷)۔ ڈیلٹا تفاعل کنویں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں $E < 0$ ہوگا) کے ساتھ ساتھ بکھراو حالات (جہاں $E > 0$ ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خطہ $x < -a$ میں جہاں مخفیہ صفر ہے، شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \kappa^2\psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۴۶}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$ ہے لیکن $x \to -\infty$ کے صورت میں اس کا پہلا جزو بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا (ہمیشہ طرح؛ مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر قابل قبول

حل درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Be^{kx}, \qquad x < -a \tag{۲.۱۴۷}$$

خطہ $-a < x < a$ میں جہاں $V(x) = -V_0$ ہے شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -V_0\psi \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -l^2\psi$$

جہاں $l$ درج ذیل ہے۔

$$l \equiv \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \tag{۲.۱۴۸}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے $E$ منفی ہے تاہم کمتر $E > V$ کی بنا پر (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو $-V_0$ سے بڑا ہونا ہو گا؛ لہٰذا $l$ بھی حقیقی اور مثبت ہو گا۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا[۹۳]

$$\psi(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx), \qquad -a < x < a \tag{۲.۱۴۹}$$

جہاں $C$ اور $D$ اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خطہ $a > x$ جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے؛ عمومی حل $\psi(x) = Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x}$ ہو گا تاہم $\infty \to x$ کی صورت میں دوسرا جزو بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا قابل قبول حل درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Fe^{-\kappa x}, \qquad x > a \tag{۲.۱۵۰}$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط مسلط کرنے ہوں گے: $\psi$ اور $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ نقاط $-a$ اور $+a$ پر استمراری ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دیا گیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق ہوں گے (سوال ۲.۱-ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً $+a$) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ $\psi(-x) = \pm\psi(x)$ ہے لہٰذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہو گا۔ میں جفت حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق حل تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔ cos جفت ہے (جبکہ sin طاق ہے) لہٰذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-\kappa x} & x > a \\ D\cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases} \tag{۲.۱۵۱}$$

نقطہ $x = a$ پر $\psi(x)$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے

$$Fe^{-\kappa a} = D\cos(la) \tag{۲.۱۵۲}$$

---

[۹۳] آپ چاہیں تو عمومی حل کو قوت نمائی روپ $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$ میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی وہی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشاکلی مخفیہ کی بنا پر ہم جانتے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور sin اور cos کا استعمال اس حقیقت کو بلاواسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔

جبکہ $\frac{d\psi}{dx}$ کی استمرار درج ذیل کہتی ہے۔

$$-\kappa F e^{-\kappa a} = -lD\sin(la) \tag{۲.۱۵۳}$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\kappa = l\tan(la) \tag{۲.۱۵۴}$$

چونکہ $\kappa$ اور $l$ دونوں $E$ کے تفاعل ہیں لہٰذا اس کلیہ سے اجازتی توانائیاں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اجازتی توانائی $E$ کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} \tag{۲.۱۵۵}$$

مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$ ہو گا لہٰذا $\kappa a = \sqrt{z_0^2 - z^2}$ ہو گا اور مساوات ۲.۱۵۴ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \tag{۲.۱۵۶}$$

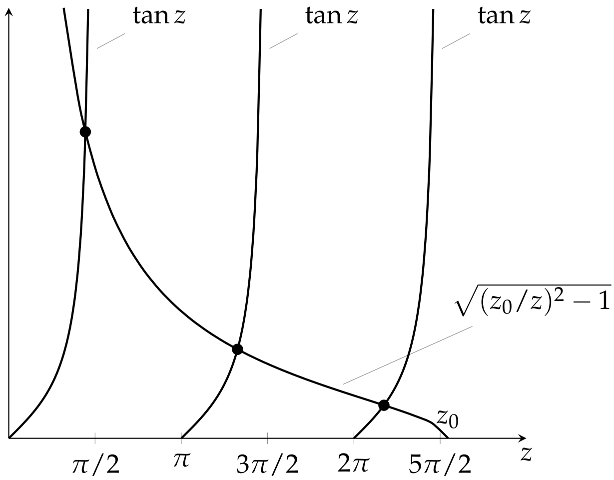
یہ $z$ (لہٰذا $E$) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر $z_0$ ہے (جو کنویں کی "جسامت" کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقہ سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جا سکتا یا $\tan z$ اور $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے (شکل ۲.۱۸)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

ا. **چوڑا اور گہرا کنواں۔** بہت بڑی $z_0$ کی صورت میں طاق $n$ کے لئے نقاط تقاطع $z_n = n\pi/2$ سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \tag{۲.۱۵۷}$$

اب $E + V_0$ کنویں کی تہہ سے زیادہ توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں $2a$ چوڑائی کے لامتناہی چوکور کنویں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)؛ بلکہ $n$ یہاں طاق ہے لہٰذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہو گی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفاعل موج سے حاصل ہو گی۔) یوں $V_0 \to \infty$ کرنے سے متناہی چوکور کنواں سے لامتناہی چوکور کنواں حاصل ہو گا؛ تاہم کسی بھی متناہی $V_0$ کی صورت میں مقید حالات کی تعداد متناہی ہو گی۔

ب. **کم گہرا، کم چوڑا کنواں۔** جیسے جیسے $z_0$ کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے حتٰی کہ آخر کار ($z_0 < \pi/2$ کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا) صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی "کمزور" کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔




شکل ۲.۱۸: ترسیمی حل برائے مساوات ۲.۱۵۶ جہاں $z_0 = 8$ لیا گیا ہے (جفت حالات)۔

اگر آپ $\psi$ (مساوات ۲.۱۵۱) کو معمول پر لانے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراو حالات ($E > 0$) کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ بائیں ہاتھ جہاں $V(x) = 0$ ہے درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۲.۱۵۸}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۵۹}$$

کنویں کے اندر جہاں $V(x) = -V_0$ ہے درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx) \qquad (-a < x < a) \tag{۲.۱۶۰}$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$l \equiv \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \tag{۲.۱۶۱}$$

دائیں جانب، جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی، درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Fe^{ikx} \tag{۲.۱۶۲}$$

یہاں آمدی حیطہ $A$، انعکاسی حیطہ $B$ اور ترسیلی حیطہ $F$ ہے۔[۹۴]
یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ $-a$ پر $\psi(x)$ کے استمرار کے تحت درج ذیل ہو گا

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C\sin(la) + D\cos(la) \tag{۲.۱۶۳}$$

نقطہ $-a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C\cos(la) + D\sin(la)] \tag{۲.۱۶۴}$$

نقطہ $+a$ پر $\psi(x)$ کا استمرار درج ذیل دے گا

$$C\sin(la) + D\cos(la)] = Fe^{ika} \tag{۲.۱۶۵}$$

اور $+a$ پر $\frac{d\psi}{dx}$ کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$l[C\cos(la) - D\sin(la)] = ikFe^{ika} \tag{۲.۱۶۶}$$

ہم ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے $C$ اور $D$ خارج کر کے باقی دو کو $B$ اور $F$ کے لئے حل کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے گا)۔

$$B = i\frac{\sin(2la)}{2kl}(l^2 - k^2)F \tag{۲.۱۶۷}$$

$$F = \frac{e^{-2ika}A}{\cos(2la) - i\frac{(k^2+l^2)}{2kl}\sin(2la)} \tag{۲.۱۶۸}$$

شرح ترسیل $(T = |F|^2 / |A|^2)$ کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

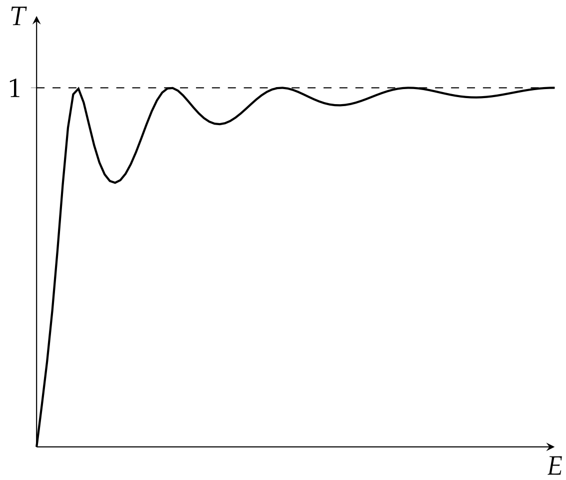
$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\right) \tag{۲.۱۶۹}$$

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں $n$ عدد صحیح ہے

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi \tag{۲.۱۷۰}$$

وہاں $T = 1$ (اور کنواں "مکمل شفاف") ہو گا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$E_n + V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \tag{۲.۱۷۱}$$




شکل ۲.۱۹: ترسیلی مستقل بطور توانائی کا تفاعل (مساوات ۲.۱۶۹)۔

جو عین لامتناہی چوکور کنویں کی اجازتی توانائیاں ہیں۔ شکل ۲.۱۹ میں توانائی کے لحاظ سے $T$ ترسیم کیا گیا ہے۔[۹۵]

سوال ۲.۲۹: متناہی چوکور کنویں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ اجازتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیمی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیا گیا $\psi(x)$ معمول پر لا کر مستقل $D$ اور $F$ تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جا سکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی $(1)$ رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور قد لامتناہی تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) لامتناہی گہرا ہونے کے باوجود $z_0 \rightarrow 0$ کی بنا پر ایک "کمزور" مخفیہ ہے۔ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ کو متناہی چوکور کنویں کی تحدیدی صورت لیتے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے $C$ اور $D$ کو $F$ کی صورت

---

[۹۴] مقید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفاعلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بکھراو میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہٰذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشاکلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حرکت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نمائی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔

[۹۵] اس حیرت کن مظہر کا مشاہدہ تجربہ گاہ میں بطور **رمزاور وٹاونسنڈ اثر** (Ramsauer–Townsend effect) کیا گیا ہے۔

میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i\frac{k}{l}\cos(la)]e^{ika}F; \qquad D = [\cos(la) - i\frac{k}{l}\sin(la)]e^{ika}F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیلی رکاوٹ (جسے خطہ $-a < x < a$ میں $V_(x) = +V_0 > 0$ لیتے سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعین کریں۔ تین صورتوں $E < V_0$، $E = V_0$ اور $E > v_0$ کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تفاعل موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب: $E < V_0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔[۹۶]

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس $E < V_0$ صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس $E > V_0$ صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہو گی لہٰذا شرح ترسیل $|F|^2/|A|^2$ نہیں ہو گی (جہاں $A$ آمدی حیطہ اور $F$ ترسیلی حیطہ ہے)۔ دکھائیں کہ $E > V_0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}\frac{|F|^2}{|A|^2} \tag{۲.۱۷۲}$$

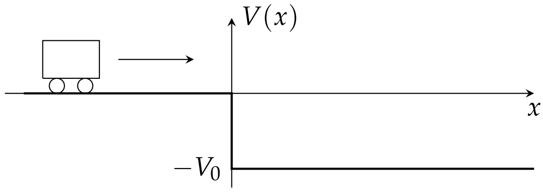
اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رو (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ $E < V_0$ کی صورت میں $T$ کیا ہو گا؟

د. صورت $E > V_0$ کے لیے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے $T + R = 1$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ اور حرکی توانائی $E > 0$ ہو مخفیہ کی ایک اچانک گہرائی (شکل ۲.۲۰) کی طرف بڑھتا ہے۔

ا. صورت $E = V_0/3$ میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہو گا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳۴ کی طرح ہے، بس یہاں سیڑھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

[۹۶] یہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔




شکل ۲.۲۰: عمودی چٹان سے بکھراو (سوال ۲.۳۵)۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکرا کر واپس لوٹنے کا احتمال جزو-ا کے نتیجہ سے بہت کم ہو گا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل ۲.۲۰ میں جیسے ہی گاڑی نقطہ $x = 0$ پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی عدم استمرار کے ساتھ گر کر $-V_0$ ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئی گاڑی کے لیے درست ہو گا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کمی محسوس کرتا ہے۔ باہر $V = 0$ جبکہ مرکزہ کے اندر $V = -12\,\text{MeV}$ ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ انشقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی $4\,\text{MeV}$ ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا انشقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟ اشارہ: آپ نے جزو-ا میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ $T = 1 - R$ استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

## مزید سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبدا پر $-a < x < +a$ کے بیچ لامتناہی چوکور کنویں کے اندر $V(x) = 0$ اور اس کے باہر $V(x) = \infty$ ہے۔ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری $\psi$ (مساوات ۲.۲۸) میں $x \to (x+a)/2$ پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام $\psi$ حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنویں کی چوڑائی $2a$ ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x,0) = A\sin^3(\pi x/a) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل $A$ تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے $\langle x \rangle$ کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: $\sin^n\theta$ اور $\cos^n\theta$ کو تخفیف کے بعد $\sin(m\theta)$ اور $\cos(m\theta)$ کے خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ہو گا۔

سوال ۲.۳۸: کمیت $m$ کا ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔

اچانک کنویں کا دایاں دیوار $a$ سے $2a$ منتقل ہوتا ہے جس سے کنویں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لمحاتی طور پر اس عمل سے تفاعل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

ا. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہو گا؟

ب. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہو گا؟

ج. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامتناہی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

ا. دکھائیں کہ لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرہ کا تفاعل موج کوانٹائی **تجدیدی عرصہ**[۹۷] $T = 4ma^2/\pi\hbar$ کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے $\Psi(x,T) = \Psi(x,0)$ ہوتا ہے۔

ب. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی $E$ ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہو گا؟

ج. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصے ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟[۹۸]

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے درج ذیل مخفی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2/ma^2 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

ا. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہو گی؟

ب. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنویں کے باہر ($x > a$) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا؟ جواب: 0.542 ، اگرچہ یہ کنویں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنویں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے ہارمونی مرتعش کی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے جہاں $A$ کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x,0) = A\left(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ا. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

---

[۹۷] revival time

[۹۸] یہ غور طلب تضاد ہے کہ کلاسیکی اور کوانٹائی تجدیدی عرصوں کا بظاہر ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور کوانٹائی تجدیدی عرصہ توانائی پر منحصر بھی نہیں ہے۔)

ب. مستقبل کے لمحہ $T$ پر تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\Psi(x,T) = B\left(1+2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

جہاں $B$ کوئی مستقل ہے۔ لمحہ $T$ کی کم سے کم ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی مرتعش کی اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا اسپرنگ جس کو کھینچا تو جا سکتا ہے لیکن دبایا نہیں جا سکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح مغز ماری کرنی ہو گی جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہو گی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}e^{ilx}$$

جہاں $l$ ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبدا پر لامتناہی چوکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حل کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

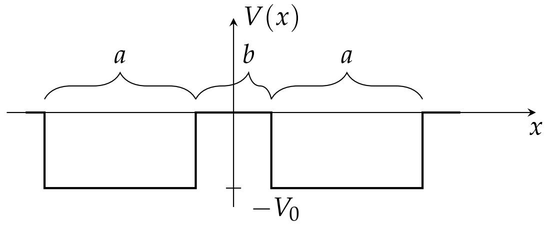
جفت اور طاق تفاعل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں ہے۔ اجازتی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترسیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تفاعل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تفاعل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں $a \to 0$ اور $a \to \infty$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کے منفرد[99] حل جن کی توانائی $E$ ایک جیسی ہو کو **انحطاطی**[100] کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو معمول پر لانے کے قابل ہوں اور یہ محض ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بعدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے جاتے ہیں۔[101]

[99] ایسے دو حل جن میں صرف جز و ضربی کا فرق پایا جاتا ہو (جن میں ایک مرتبہ معمول پر لانے کے بعد صرف دوری جزو $e^{i\phi}$ کا فرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جا سکتا ہے۔ یہاں "منفرد" سے مراد "خطی طور پر غیر تابع" ہے۔

[100] degenerate

[101] جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاط عام پائی جاتی ہیں۔ فرض کریں کہ مخفیہ علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے بیچ خطہ میں $V = \infty$ ہو۔ مثلاً دو تنہا لامتناہی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنویں میں پایا جائے گا۔




شکل ۲.۲۱: دوہرا چوکور کنواں (سوال ۲.۴۷)۔

اشارہ: فرض کریں $\psi_1$ اور $\psi_2$ ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی، $E$، ایک جیسی ہو۔ حل $\psi_1$ کی شروڈنگر مساوات کو $\psi_2$ سے ضرب دیں اور اس سے $\psi_2$ کی شروڈنگر مساوات کو $\psi_1$ سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ $\psi_2 \, d\psi_1/dx - \psi_1 \, d\psi_2/dx$ ایک مستقل ہو گا۔ اب $\pm\infty$ پر معمول پر لائے جانے کے قابل ہر حل $\psi \to 0$ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل در حقیقت صفر ہو گا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\psi_2$ دراصل $\psi_1$ کا مضرب ہے لہٰذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: فرض کریں کمیت $m$ کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط $L$ ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں $\psi(x+L) = \psi(x)$ ہو گا۔) اس کے ساکن حال تلاش کر کے انہیں معمول پر لائیں اور ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی $E_n$ کے لئے دو آپس میں غیر تابع حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا اخلاف گھڑی حرکت کے لیے ہو گا، جنہیں آپ $\psi_n^+(x)$ اور $\psi_n^-(x)$ کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۴۵ کے مسئلہ کو مدنظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کارآمد کیوں نہیں ہے)؟

سوال ۲.۴۷: آپ کو صرف کیفی تجزیہ کی اجازت ہے حساب کر کے نتیجہ اخذ کرنے کی اجازت نہیں ہے۔ شکل ۲.۲۱ میں دکھائے گئے "دوہرا چوکور کنواں" پر غور کریں جہاں گہرائی $V_0$ اور چوڑائی $a$ مقررہ ہیں جو اتنے بڑے ضرور ہیں کہ کئی مقید حال ممکن ہوں۔

ا. زمینی تفاعل موج $\psi_1$ اور پہلا ہیجان حال $\psi_2$ کا خاکہ درج ذیل صورت میں کھینچیں۔

۱. $b = 0$، ۲. $b \approx a$، ۳. $b \gg a$

ب. $b$ کی قیمت صفر سے لامتناہی تک بڑھتے ہوئے مطابقتی توانائیاں ($E_1$ اور $E_2$) کس طرح تبدیل ہوتی ہیں، اس کا کیفی جواب دیں۔ $E_1(b)$ اور $E_2(b)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. دو جوہری سالمہ میں الیکٹران پر اثر انداز مخفی توانائی کا تاریخی یک دوری نمونہ دوہرا کنواں پیش کرتا ہے (مرکزوں کی قوت کشش کو دو کنویں ظاہر کرتی ہیں)۔ اگر مراکزے آزادی سے حرکت کر سکتے ہوں تب یہ کم سے کم توانائی تشکیل اختیار کریں گے۔ جزو-(ب میں حاصل نتائج کے تحت کیا الیکٹران ان مرکزوں کو ایک

دوسرے کے قریب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور رہنے پر مجبور کرے گا۔ (اگرچہ دو مرکزوں کے بیچ قوت دفع بھی پایا جاتا ہے تاہم اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔)

سوال ۲.۴۸: آپ نے مساوات ۲.۳۹ کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال ۲.۷-د میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں حاشیہ میں آپ کو میں نے آگاہ کیا کہ اس کو $\langle H\rangle = \int \psi(x,0)^* H\psi(x,0)\,\mathrm{d}x$ کے پرانے طریقہ سے حاصل نہ کریں چونکہ $\psi(x,0)$ کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ تکمل بالحصص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈیراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھا مسائل حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ فراہم کرتا ہے۔

ا. آپ سوال ۲.۷ میں $\psi(x,0)$ کا پہلا تفرق حاصل کر کے اس کو سیڑھی تفاعل $\theta(x - a/2)$ کی صورت میں لکھیں جسے مساوات ۲.۱۴۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ (آخری سروں کی فکر نہ کریں، صرف اندرونی خطہ $0 < x < a$ کے لیے لکھیں۔)

ب. ابتدائی موجی تفاعل $\psi(x,0)$ کے دوہرا تفرق کو سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

ج. تکمل $\int \psi(x,0)^* H\psi(x,0)\,\mathrm{d}x$ کو حل کر کے اس کی قیمت حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ پہلے حاصل کر چکے ہیں۔

سوال ۲.۴۹:

ا. دکھائیں کہ ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائی (مساوات ۲.۴۳) کے لئے

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+\frac{a^2}{2}(1+e^{-2i\omega t})+\frac{i\hbar t}{m}-2axe^{-i\omega t}\right)}$$

تابع وقت شروڈنگر مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں $a$ ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔[۱۰۲]

ب. $|\psi(x,t)|^2$ تلاش کریں اور موجی اکٹھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

ج. $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ کا حساب لگائیں اور دیکھیں آیا مسئلہ اہرنفسٹ (مساوات ۱.۳۸) پر یہ پورا اترتے ہیں۔

سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کنویں پر غور کریں

$$V(x,t) = -\alpha\delta(x - vt)$$

جہاں کنویں کی (غیر تغیر) سمتی رفتار کو $v$ ظاہر کرتا ہے۔

ا. دکھائیں کہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2}e^{-i[(E+(1/2)mv^2)t-mvx]/\hbar}$$

[۱۰۲] تابع وقت شروڈنگر مساوات کے ٹھیک ٹھیک بند روپ میں حل کی یہ ایک نایاب مثال ہے۔

جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ساکن ڈیلٹا تفاعل کے مقید حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو شروڈنگر مساوات میں پُر کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔ سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔

ب. اس حال میں ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت تلاش کر کے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۵۱: درج ذیل مخفیہ پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m}\operatorname{sech}^2(ax)$$

جہاں $a$ ایک مثبت مستقل ہے۔

ا. اس مخفیہ کو ترسیم کریں۔

ب. تصدیق کریں کہ اس مخفیہ کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A\operatorname{sech}(ax)$$

اور اسکی توانائی تلاش کریں۔ $\psi_0$ کو معمول پر لا کر اس کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

ج. دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کسی بھی (مثبت) توانائی $E$ کے لیے شروڈنگر مساوات کو حل کرتا ہے (جہاں ہمیشہ کی طرح $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے)۔

$$\psi_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx}$$

چونکہ $z \to -\infty$ کرنے سے $\tanh z \to -1$ ہو گا لہٰذا $x$ کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا

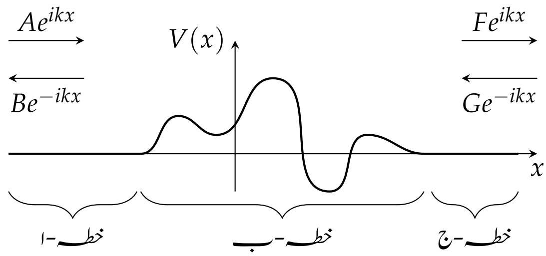
$$\psi_k(x) \approx Ae^{ikx} \quad \text{بڑی منفی } x \text{ کے لیے}$$

جو $e^{-ikx}$ کی عدم موجودگی کی بنا، بائیں سے آمد ایک موج کو ظاہر کرتا ہے جس میں کوئی انعکاسی موج نہیں پائی جاتی ہے۔ $x$ کی بڑی مثبت قیمتوں کے لیے $\psi_k(x)$ کی متقاربی روپ کیا ہو گی؟ اس مخفیہ کے لیے $R$ اور $T$ کیا ہوں گے؟ تبصرہ: یہ **بلا انعکاس مخفیہ**[103] کی ایک بہت مشہور مثال ہے؛ ہر ذرہ، اس سے قطع نظر کہ اس کی توانائی کتنی ہے، اس مخفیہ سے سیدھا گزرتا ہے۔

سوال ۲.۵۲: **قالب بکھراو**۔[104] مقامی مخفیہ کے لیے بکھراو کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے (شکل ۲.۲۲)۔ بائیں ہاتھ خطہ-ا میں $V(x) = 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad \text{جہاں } k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۲.۱۷۳}$$

[103] reflectionless potential
[104] scattering matrix




شکل ۲.۲۲: مقامی اختیاری مخفیہ (جو خطہ-2 کے علاوہ $V(x)=0$ ہے) سے بکھراو (سوال ۲.۵۲)۔

دائیں ہاتھ خطہ-ج میں بھی $V(x)=0$ ہے لہٰذا یہاں درج ذیل ہو گا

$$\psi(x)=Fe^{ikx}+Ge^{-ikx} \tag{۲.۱۷۴}$$

ان دونوں کے بیچ خطہ-ب میں مخفیہ جانے بغیر میں آپ کو $\psi$ کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا، تاہم چونکہ شروڈنگر مساوات خطی اور دو رتبی تفرقی ہے لہٰذا اس کا عمومی حل لازماً درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(x)=Cf(x)+Dg(x)$$

جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ دو خطی غیر تابع مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد سرحدی شرائط ہوں گے جن میں سے دو خطہ-ا اور ب کو جوڑیں گے اور باقی دو خطہ-ب اور ج کو جوڑیں گے۔ ان میں سے دو کو استعمال کرکے $C$ اور $D$ کو خارج کرتے ہوئے باقی دو کو حل کرکے $A$ اور $G$ کی صورت میں $B$ اور $F$ تلاش کیے جا سکتے ہیں:

$$B=S_{11}A+S_{12}G, \qquad F=S_{21}A+S_{22}G$$

یہ چار عددی سر $S_{ij}$ جو $k$ (لہٰذا $E$) پر منحصر ہیں $2\times 2$ قالب $\mathbf{S}$ دیتے ہیں جس کو **قالب بکھراو**[۱۰۵] یا مختصراً **قالب $\mathbf{S}$**[۱۰۶] کہتے ہیں۔ قالب $S$ آپ کو آمدی حیطوں ($A$ اور $G$) کی صورت میں رخصتی حیطوں ($B$ اور $F$) کی قیمت دیتا ہے:

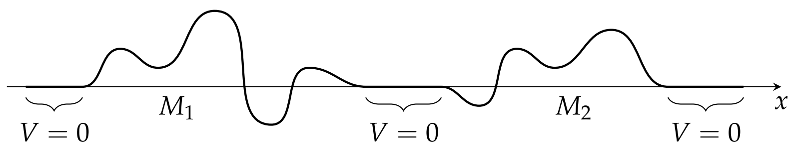
$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} \tag{۲.۱۷۵}$$

بائیں سے بکھراو کی صورت میں $G=0$ ہو گا لہٰذا انعکاسی اور ترسیلی شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$R_l=\left.\frac{|B|^2}{|A|^2}\right|_{G=0}=|S_{11}|^2, \qquad T_l=\left.\frac{|F|^2}{|A|^2}\right|_{G=0}=|S_{21}|^2 \tag{۲.۱۷۶}$$

---

[۱۰۵] scattering matrix
[۱۰۶] S-matrix




شکل ۲.۲۳: دو تنہا حصوں پر مبنی مخفیہ (سوال ۲.۵۳)۔

دائیں سے بکھراو کی صورت میں $A=0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہوں گے۔

$$R_r = \left.\frac{|F|^2}{|G|^2}\right|_{A=0} = |S_{22}|^2, \qquad T_r = \left.\frac{|B|^2}{|G|^2}\right|_{A=0} = |S_{12}|^2 \tag{۲.۱۷۷}$$

ا. ڈیلٹا تفاعل کنویں (مساوات ۲.۱۱۴) کے لیے بکھراو کا قالب $S$ تیار کریں۔

ب. لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۴۵) کے لیے قالب $S$ تیار کریں۔ اشارہ: مسئلہ کی تشاکلی پن بروئے کار لائیں۔ نئے کام کی ضرورت نہیں ہو گی۔

سوال ۲.۵۳: **قالب ترسیل**[107] قالب $S$ (سوال ۲.۵۲) آپ کو رخصتی حیطوں ($B$ اور $F$) کو آمدی حیطوں ($A$ اور $G$) کی صورت میں پیش کرتا ہے (مساوات ۲.۱۷۵)۔ بعض اوقات ترسیلی قالب $M$ کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفیہ کے دائیں جانب حیطوں ($F$ اور $G$) کو بائیں جانب حیطوں ($A$ اور $B$) کی صورت میں پیش کرتا ہے:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{۲.۱۷۸}$$

ا. قالب $S$ کے اجزاء کی صورت میں قالب $M$ کے چار اجزاء تلاش کریں۔ اسی طرح قالب $M$ کے چار اجزاء کی صورت میں قالب $S$ کے اجزاء تلاش کریں۔ مساوات ۲.۱۷٦ اور مساوات ۲.۱۷۷ میں دیے گئے $R_l, T_l, R_r$ اور $T_r$ کو $\mathbf{M}$ قالب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

ب. فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسا مخفیہ ہو جو دو تنہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو (شکل ۲.۲۳)۔ دکھائیں کہ اس پورے نظام کا $M$ قالب ان دو حصوں کے انفرادی $M$ قالب کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_2\,\mathbf{M}_1 \tag{۲.۱۷۹}$$

(ظاہر ہے کے آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفیہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ یہی $M$ قالب کی اہمیت کا سبب ہے۔)

ج. نقطہ $a$ پر (درج ذیل) واحد ایک ڈیلٹا تفاعل مخفیہ سے بکھراو کا $M$ قالب تلاش کریں۔

$$V(x) = -\alpha\delta(x-a)$$

[107] transfer matrix

د. جزو-ب کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دوہرا ڈیلٹا تفاعل

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

کے لیے $M$ قالب تلاش کریں۔ اس مخفیہ کی ترسیلی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۲.۵۴: **دم ہلانے کی ترکیب** سے ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائیوں کو پانچ معنی خیز ہندسوں تک تلاش کریں۔ یعنی $K$ کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۲ کو اعدادی طریقہ سے یوں حل کریں کہ $\xi$ کی بڑی قیمت کے لیے حاصل تفاعل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کرے۔ ماتھیمٹیکا میں درج ذیل پُر کرنے سے ایسا ہو گا

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[u[x]\,/.\text{NDSolve}[u''[x] - (x^2 - K)^* u[x] == 0, u[0] == 1, u'[0] == 0,$$
$$u[x], x, 10^{-8}, 10, \text{MaxSteps}-> 10\,000]], x, a, b, \text{PlotRange}-> c, d]$$

یہاں $a, b$ ترسیم کی افقی سعت ہے (ابتدا $a = 0$، $b = 10$، $c = -10$ اور $d = 10$ سے کریں)۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا درست جواب $K = 1$ ہے لہٰذا آپ $K = 0.9$ سے شروع کر سکتے ہیں۔ تفاعل موج کی "دم" پر نظر رکھیں۔ اب $K = 1.1$ لیں، آپ دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف پلٹ جائے گی۔ ان دونوں کے بیچ کہیں درست حل موجود ہے۔ $K$ کی قیمت کو درست قیمت کے دونوں اطراف قریب سے قریب لانے سے درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ (سوال ۲.۵۴) استعمال کرتے ہوئے ہارمونی مرتعش کے ہیجان حال توانائی کو پانچ بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیے آپ کو $u[0] == 0$ اور $u'[0] == 1$ لینا ہو گا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامتناہی چوکور کنویں کی اولین چار توانائیوں کی قیمتیں پانچ بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۲.۵۴ کی تفرقی مساوات میں درکار تبدیلیاں لائیں۔ اس بار آپ کو $u(1) = 0$ چاہتے ہیں۔

# باب ۳

# قواعد و ضوابط

## ۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کے "ناگہاں" خدوخال تھے (مثلاً ہارمونی مرتعش میں توانائی کی سطح میں جفت فاصلے) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔ یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دارومدار تفاعل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تفاعل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ قابل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ تفاعل موج، ریاضیاتی طور پر، تصوراتی **سمتیات**[۱] کی تعریفی شرائط پر پورے اترتے ہیں؛ جبکہ عاملین ان پر **خطی تبادلہ**[۲] کا عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی قدرتی زبان **خطی الجبرا**[۳،۴] ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ $|\alpha\rangle$ کو $N$ بُعدی فضا میں کسی مخصوص

---

[۱] vectors

[۲] linear transformations

[۳] linear algebra

[۴] آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے $N$ عدد اجزاء $\{a_n\}$ سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔

$$|\alpha\rangle \to \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۱}$$

دو سمتیات کا **اندرونی ضرب**[۵] $\langle\alpha|\beta\rangle$ (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسعت دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہو گا۔

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_N^* b_N \tag{۳.۲}$$

خطی تبادلہ، $T$، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) **قالب**[۶] سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو قالبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$|\beta\rangle = T|\alpha\rangle \to \mathbf{b} = \mathbf{T}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۳}$$

کوانٹم میکانیات میں پائے جانے والے "سمتیات" در حقیقت (زیادہ تر) تفاعلات ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں $N$ اجزائی قالبی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہو گا اور متناہی ابعاد میں سمجھ آنے والی ٹھیک وضاحتیں، لامتناہی ابعاد میں پریشان کن ثابت ہو سکتی ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ مساوات ۳.۲ کا متناہی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، البتہ، لامتناہی مجموعہ یا تکمل، عدم مرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو گی لہٰذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہو گی۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علامتیت سے آپ واقف ہوں گے، بہر حال ہوشیار رہنا بہتر ہو گا۔

متغیر $x$ کے تمام تفاعلات مل کر سمتی فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکنہ طبیعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل موج $\Psi$ معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

کسی مخصوص وقفے[۷] پر تمام **مربع متکامل تفاعلات**[۸]

$$f(x) \quad \text{جہاں} \quad \int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \quad \text{ہو} \tag{۳.۴}$$

---

[۵] inner product
[۶] matrices
[۷] ہمارے لئے حدود ($a$ اور $b$) تقریباً ہر مرتبہ $\pm\infty$ ہوں گی، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہو گا۔
[۸] square-integrable functions

مل کر (اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۱.۳-ا دیکھیں)۔ ریاضی دان اسے $L_2(a,b)$ جبکہ ماہر طبیعیات اسے **ہلبرٹ فضا**[۹] کہتے[۱۰] ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات میں

**تفاعلات موج ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں۔** (۳.۵)

**دو تفاعلات کی اندرونی ضرب** کی تعریف درج ذیل ہے جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ تفاعلات ہیں۔

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۶}$$

اگر $f$ اور $g$ دونوں مربع متکامل ہوں (یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کی اندرونی ضرب موجود ہو گی (مساوات ۳.۶ کا تکمل ایک متناہی عدد[۱۱] پر مرکوز ہو گا)۔ ایسا **شوارز عدم مساوات**[۱۲] کے درج ذیل تکملی روپ[۱۳] کے پیش نظر ہو گا۔

$$\left|\int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x} \tag{۳.۷}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پوری اترتی ہے (سوال ۱.۳-ب)۔ بالخصوص درج ذیل مساوات میں ہم دیکھ سکتے ہیں۔

$$\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^* \tag{۳.۸}$$

مزید $f(x)$ کی اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{۳.۹}$$

---

[۹] Hilbert space

[۱۰] تکنیکی طور پر، ہلبرٹ فضا سے مراد **مکمل اندرونی ضرب فضا** ہے، اور مربع متکامل تفاعلات کا ذخیرہ ہلبرٹ فضا کی فقط ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر متناہی ابعادی سمتی فضا ایک بے وقعت ہلبرٹ فضا ہو گی۔ چونکہ $L_2$ کوانٹم میکانیات کا اکھاڑا ہے لہٰذا ماہر طبیعیات اسی کو "ہلبرٹ فضا" کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ **مکمل** سے مراد یہ ہے کہ ہلبرٹ فضا کے کسی بھی تفاعل کی کوشی ترتیب جس تفاعل پر مرکوز ہو، وہ اسی فضا میں پایا جائے۔ اس میں کوئی "سوراخ" نہیں پایا جاتا، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پایا جاتا (اس کے برعکس، مثلاً، تمام کثیر رکنیوں کی فضا میں اور تمام ناطق اعداد کے سلسلہ میں یقیناً سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا تفاعلات کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ (ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعلات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

[۱۱] باب ۲ میں بعض اوقات ہمیں مجبوراً معمول پر نہ لانے کے قابل تفاعلات کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبرٹ فضا سے باہر بستے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنی ہو گی۔ ابھی کے لئے میں فرض کرتا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں۔

[۱۲] Schwarz inequality

[۱۳] متناہی ابعادی سمتی فضا میں شوارز عدم مساوات $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \le \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$ کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۴۳۰ پر سوال ۱.۲ دیکھیں)۔ تاہم یہ ثبوت فرض کرتا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہو گی؛ یہ صرف اس صورت[۱۴] میں صفر ہو گی جب $f(x) = 0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت میں **معمول شدہ**[۱۵] کہلاتا ہے جب اس کی اپنی ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک $(1)$ کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت میں **عمودی**[۱۶] ہوں گے جب ان کی اندرونی ضرب صفر $(0)$ ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ $\{f_n\}$ اس صورت میں **معیاری عمودی**[۱۷] ہو گا جب تمام تفاعلات (درج ذیل دیکھیں) معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں۔

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \tag{۳.۱۰}$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت میں **مکمل**[۱۸] ہو گا جب (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت (درج ذیل دیکھیں) میں لکھا جا سکے۔

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{۳.۱۱}$$

معیاری عمودی تفاعلات $\{f_n(x)\}$ کے عددی سر، فوریئر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$c_n = \langle f_n | f \rangle \tag{۳.۱۲}$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸) وقفہ $(0, a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ یا مساوات ۲.۸۵) وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱:

ا. ظاہر کریں کہ تمام مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ سمتی فضا دے گا (صفحہ ۴۲۹ پر ضمیمہ ا.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہو گا کے دو مربع متکامل تفاعلات کا مجموعہ خود مربع متکامل تفاعل ہو گا۔ مساوات ۳.۷ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ سمتی فضا ہو گا؟

ب. ظاہر کریں کہ مساوات ۳.۶ کا تکمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ ا.۲) کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے۔

---

[۱۴] ایسے تفاعل کے لئے کیا کہا جا سکتا ہے جو چند مخصوص تنہا نقاط کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوں؟ اگرچہ تفاعل معدوم نہیں ہے لیکن تکمل (مساوات ۳.۹) اب بھی معدوم ہو گا۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تو آپ کو ریاضی پڑھنی چاہیے۔ طبیعیات میں ایسے گھمبیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم ہلبرٹ فضا میں ایسے دو تفاعلات، جن کے مربع تکمل برابر ہوں، کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر ہلبرٹ فضا میں ترسیمات درحقیقت تفاعلات کی **تعادلی جماعتوں** کو ظاہر کرتی ہیں۔)

[۱۵] normalized

[۱۶] orthogonal

[۱۷] orthonormal

[۱۸] complete

سوال ۳.۲:

ا. وقفہ $(0,1)$ کے بیچ، متغیر $v$ کے کس خطے پر، تفاعل $f(x) = x^{v}$ ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟ فرض کر لیں کہ $v$ حقیقی تاہم ضروری نہیں کہ مثبت ہو۔

ب. کیا $v = \frac{1}{2}$ کی مخصوص صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تفاعل $xf(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تفاعل $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

## ۳.۲ قابل مشاہدہ

### ۳.۲.۱ ہرمشی عاملین

قابل مشاہدہ $Q(x,p)$ کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب علامتیت[۱۹]:

$$\langle Q\rangle = \int \Psi^{*}\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x = \langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle \tag{۳.۱۳}$$

کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے۔ اب پیمائش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہو گا، لہٰذا بہت ساری پیمائشوں کی اوسط بھی حقیقی (درج ذیل دیکھیں) ہو گی۔

$$\langle Q\rangle = \langle Q\rangle^{*} \tag{۳.۱۴}$$

لیکن اندرونی ضرب کا **مخلوط جوڑی دار** ترتیب کو الٹ دیتا ہے (مساوات ۳.۸) لہٰذا ہماری مساوات درج ذیل ہو جائے گی

$$\langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle\hat{Q}\Psi|\Psi\rangle^{*} \tag{۳.۱۵}$$

جو لازماً کسی بھی تفاعل موج $\Psi$ کے لئے درست ہو گی۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین میں درج ذیل اہم خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle\hat{Q}f|f\rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ کے لئے} \tag{۳.۱۶}$$

ایسے عاملین کو ہم **ہرمشی**[۲۰] کہتے ہیں۔

---

[۱۹] یاد رہے کہ $x$ پر کر کے $p \to \hat{p} = (\hbar/i)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ سے عامل $\hat{Q}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے **خطی** ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $a$ اور $b$ اور تفاعل $f$ اور $g$ کے لئے $\hat{Q}[af(x) + bg(x)] = a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x)$ ہو گا۔ یہ تمام تفاعلات کی فضا پر خطی تبادلہ (ضمیمہ ۳.۱) قائم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر کے تفاعل کو باہر کے تفاعل میں لے جاتے ہیں (سوال ۳.۲-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آ سکتی ہے۔

[۲۰] hermitian

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط عائد کی جاتی ہے۔

$$\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے} \tag{۳.۱۷}$$

تاہم مختلف نظر آنے کے باوجود، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کی عین معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نکتہ یہ ہے کہ ہرمشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کوانٹم میکانیات میں ہرمشی عاملین اسی لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

$$\text{قابل مشاہدہ کو ہرمشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔} \tag{۳.۱۸}$$

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیار حرکت کا عامل ہرمشی ہے؟

$$\langle f \mid \hat{p}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\hbar}{i}f^*g\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big)^* g\,\mathrm{d}x = \langle \hat{p}f \mid g\rangle \tag{۳.۱۹}$$

میں نے تکمل بالحصص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ مربع متکامل ہیں لہٰذا $\pm\infty$ پر ان دونوں کو صفر تک جا پہنچنا چاہیے[21] جس کی بنا پر تکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ تکمل بالحصص سے پیدا منفی کی علامت کو $i$ کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (جس میں $i$ نہیں پایا جاتا) غیر ہرمشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: ظاہر کریں کہ اگر (ہلبرٹ فضا میں) تمام تفاعل $h$ کے لیے $\langle h \mid \hat{Q}h\rangle = \langle \hat{Q}h \mid h\rangle$ ہو تب تمام $f$ اور $g$ کے لیے $\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$ ہوگا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہرمشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے $h = f + g$ اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہرمشی عاملین کا مجموعہ خود بھی ہرمشی ہوگا۔

ب. فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے اور $\alpha$ ایک مخلوط عدد ہے۔ $\alpha$ پر کیا شرائط عائد کرنے سے $\alpha\hat{Q}$ بھی ہرمشی ہوگا؟

ج. دو ہرمشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہرمشی ہوگا؟

د. دکھائیں کہ عامل مقام $(\hat{x} = x)$ اور ہیملٹنی عامل $(\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + V(x))$ ہرمشی ہیں۔

---

[21] حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے گھمبیر تفاعلات پائے جاتے ہیں جو مربع متکامل ہونے کے باوجود لامتناہی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تفاعلات طبیعیات میں نہیں پائے جاتے، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے تو ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کر دیتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ متناہی وقفے پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان دینا ہوگا کیونکہ $(-\infty,\infty)$ پر ہرمشی عامل، $(0,\infty)$ یا $(-\pi,\pi)$ پر غیر ہرمشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامتناہی چوکور کنویں کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تفاعلات موج لامتناہی لکیر پر پائے جاتے ہیں؛ جو کسی وجہ سے $(0,a)$ کے باہر صفر ہیں۔

سوال ۳.۵: عامل $\hat{Q}$ کا **ہرمشی جوڑی دار**[۲۲] یا **شریک عامل**[۲۳] $\hat{Q}^\dagger$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f \mid g\rangle \quad (\text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے}) \tag{۳.۲۰}$$

یوں ہرمشی عامل اپنے ہرمشی جوڑی دار کے برابر $(\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger)$ گا۔

ا. $x, i$ اور $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ کے ہرمشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی مرتعش کے عامل رفت $a_+$ (مساوات ۲.۴۷) کا ہرمشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$ ہوگا۔

### ۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کے فرق، جس میں تمام $\psi$ ایک حال میں ہوں، پر قابل مشاہدہ $Q$ کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کوانٹم میکانیات کی عدم تعیینیت[۲۴]۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہو گا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں $Q$ کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم $q$ کہہ لیں) دے؟ اس کو آپ قابل مشاہدہ $Q$ کا **تعیین حال**[۲۵] کہہ سکتے ہیں۔ (در حقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات، ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال $\Psi_n$ میں ایک ذرے کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی "اجازتی" توانائی $E_n$ دیگی۔)

تعیین حال میں $Q$ کا معیاری انحراف صفر ہو گا جسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2 = \langle(\hat{Q} - \langle Q\rangle)^2\rangle = \langle\Psi \mid (\hat{Q} - q)^2\Psi\rangle = \langle(\hat{Q} - q)\Psi \mid (\hat{Q} - q)\Psi\rangle = 0 \tag{۳.۲۱}$$

(اب اگر ہر پیمائش $q$ دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی $q$ ہوگی: $\langle Q\rangle = q$۔ چونکہ $\hat{Q}$ ہرمشی ہے لہٰذا $\hat{Q} - q$ بھی ہرمشی عامل ہو گا؛ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے میں نے اندرونی ضرب کے ایک جزو ضربی $(\hat{Q} - q)$ کو بائیں منتقل کیا ہے۔) تاہم ایسا واحد تفاعل جس کی خود اپنے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو جاتی ہو، $0$ ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi \tag{۳.۲۲}$$

یہ عامل $\hat{Q}$ کی **امتیازی قدر مساوات**[۲۶] ہے؛ $\hat{Q}$ کا **امتیازی تفاعل**[۲۷] $\Psi$ اور مطابقتی **امتیازی قدر**[۲۸] $q$ ہے۔ یوں درج ذیل

---

[۲۲] hermitian conjugate

[۲۳] adjoint

[۲۴] ظاہر ہے، میں درست پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی غلطی کی بنا پر غلط پیمائش کی بات نہیں کی جا رہی ہے، جس کو کوانٹم میکانیات سے نہیں جوڑا جا سکتا

[۲۵] determinate state

[۲۶] eigenvalue equation

[۲۷] eigenfunction

[۲۸] eigenvalue

ہو گا۔

$$\text{تعیین حالات } \hat{Q} \text{ کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔} \tag{۳.۲۳}$$

ایسے حال پر $Q$ کی پیمائش لازماً امتیازی قدر $q$ دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی قدر ایک عدد ہے (نہ کہ عامل یا تفاعل)۔ امتیازی تفاعل کو کسی مستقل سے ضرب دینے سے امتیازی تفاعل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کی امتیازی قدر وہی ہو گی۔ صفر کو امتیازی تفاعل نہیں لیا جا سکتا؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تفاعلات میں شامل نہیں کرتے؛ ورنہ کسی بھی عامل $\hat{Q}$ اور تمام $q$ کے لیے $\hat{Q}0 = q0 = 0$ ہو گا جس کی بنا پر ہر عدد ایک امتیازی قدر ہو گا)۔ ہاں امتیازی قدر کے صفر ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا **طیف**[۲۹] حاصل ہو گا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تابع امتیازی تفاعلات کی امتیازی قدر ایک جتنی ہو گی؛ ایسے طیف کو **انحطاطی**[۳۰] طیف کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، کل توانائی کے تعیین حالات، ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے:

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{۳.۲۴}$$

جو بالکل غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ہے۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی قدر کے لیے حرف $E$ اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف) $\psi$ استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ $e^{-iEt/\hbar}$ چسپاں کر کے $\Psi$ حاصل کیا جا سکتا ہے؛ جو اب بھی $H$ کا امتیازی تفاعل ہو گا)۔

**مثال ۳.۱:** درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں $\phi$، ہمیشہ کی طرح، دو ابعادی قطبی محدد کا متغیر ہے۔

$$\hat{Q} \equiv i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} \tag{۳.۲۵}$$

(یہ عامل سوال ۲.۴۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا۔) کیا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

**حل:** یہاں ہم متناہی وقفہ $0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر تفاعلات $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں $\phi$ اور $\phi + 2\pi$ ایک ہی طبعی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \tag{۳.۲۶}$$

تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے یہ نتیجہ ملے گا

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \int_0^{2\pi} f^*\Big(i\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\Big)\,\mathrm{d}\phi = if^*g\big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i\Big(\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}\phi}\Big)g\,\mathrm{d}\phi = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$$

---

[۲۹] spectrum
[۳۰] degenerate

لہٰذا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا پر سرحدی جزو خارج ہو جائے گا)۔

امتیازی قدر مساوات:

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}f(\phi) = qf(\phi) \tag{۳.۲۷}$$

کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f(\phi) = Ae^{-iq\phi} \tag{۳.۲۸}$$

$q$ کی ممکنہ قیمتیں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{۳.۲۹}$$

اس عامل کا طیف تمام صحیح اعداد پر مشتمل ہو گا اور یہ غیر انحطاطی ہے۔ □

سوال ۳.۶: عامل $\hat{Q} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\phi^2$ پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور $\phi$ قطبی محدد میں اسمتی زاویہ ہے۔ کیا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔ عامل $\hat{Q}$ کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انحطاطی ہے؟

## ۳.۳ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہرمشی عاملین کے امتیازی تفاعل (جو طبیعی طور پر قابل مشاہدہ کے تعیین حالات ہیں) کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف **غیر مسلسل**[۳۱] ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبیعی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف **استمراری**[۳۲] ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہو گی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہو گا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہو گا (مثلاً آزاد ذرے کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہو گا (مثلاً متناہی چوکور کنویں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کی متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گی؛ درحقیقت یہ متناہی ابعادی نظریے (ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات) سے بہت مشابہت رکھتا ہے۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

---

[۳۱] discrete

[۳۲] continuous

## ۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل میں دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کی امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو(یعنی $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل $f$ اور امتیازی قدر $q$ ہو) اور [۳۳]

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$$

ہو( $\hat{Q}$ ہرمشی ہے)۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$q\langle f\,|f\rangle = q^*\langle f\,|f\rangle$$

(چونکہ $q$ ایک عدد ہے لہٰذا اس کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات ۳.۶) لہٰذا دائیں طرف $q$ بھی جوڑی دار ہو گا)۔ تاہم $\langle f|f\rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قانون کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا) لہٰذا $q = q^*$ یعنی $q$ حقیقی ہو گا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعین حال میں ایک ذرے کے قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: منفرد امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں:

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

اور $\hat{Q}$ ہرمشی ہو، تب $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle$ ہو گا، لہٰذا

$$q'\langle f|g\rangle = q^*\langle f|g\rangle$$

ہو گا۔ (یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کی اندرونی ضربیں موجود ہوں گی۔) اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) $q$ حقیقی ہے، لہٰذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f|g\rangle = 0$ ہو گا۔

□

[۳۳] یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دوسری صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتی ہے۔

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چوکور کنویں یا مثال کے طور پر ہارمونی مرتعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعیین حالات کی بھی ہو گی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انحطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک جیسی امتیازی قدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قدر والا امتیازی حال ہو گا (سوال ۳.۷-ا) اور ہم **گرام شمد ترکیب عمودیت**[۳۴] (صفحہ ۴۲۹ پر سوال ا.۱) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات مرتب کر سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہو گا، تاہم (اللہ کا شکر ہے) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹم میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اساسی تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

متناہی بعدی سمتی فضا میں ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیے تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹم میکانیات کی اندرونی ثبات کیلئے لازمی ہے لہٰذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہرمشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

**مسلمہ**: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔[۳۵]

سوال ۳.۷:

ا. فرض کریں کہ عامل $\hat{Q}$ کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر $q$ ہے۔ دکھائیں کہ $f$ اور $g$ کا ہر خطی جوڑ خود $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل ہو گا اور اس کا امتیازی قدر $q$ ہو گا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^{x}$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک جیسا ہے۔ تفاعل $f$ اور $g$ کے ایسے دو خطی جوڑ مرتب کریں جو وقفہ $(-1,1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہرمشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

---

[۳۴] Gram-Schmidt orthogonalization process

[۳۵] چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جا سکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں قابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

### ۳.۳.۲ استمراری طیف

ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہٰذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پراسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہو گا۔

مثال ۳.۲: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

**حل:** فرض کریں کہ $p$ امتیازی قدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x) = pf_p(x) \tag{۳.۳۰}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f_p(x) = Ae^{ipx/\hbar}$$

چونکہ $p$ کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع متکامل نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی اقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل "معیاری عمودیت" حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x)f_p(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\,\mathrm{d}x = |A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p') \tag{۳.۳۱}$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar} \tag{۳.۳۲}$$

لہٰذا

$$\langle f_{p'}|f_p\rangle = \delta(p-p') \tag{۳.۳۳}$$

ہو گا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک جیسا نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو **ڈیراک معیاری عمودیت**[۳۶] کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب تکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (مربع متکامل) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا

[۳۶] Dirac orthonormality

ہے۔

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \tag{۳.۳۴}$$

پھیلاو عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہو گا) کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle\,\mathrm{d}p = \int_{\infty}^{\infty} c(p)\delta(p - p')\,\mathrm{d}p = c(p') \tag{۳.۳۵}$$

چونکہ یہ پھیلاو (مساوات ۳.۳۴) درحقیقت ایک فوریئر تبادل ہے لہٰذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن نما ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{۳.۳۶}$$

یہ وہ ڈی بروگ لی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگ لی کے تصور سے زیادہ پر اسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعیین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ مرتب کر سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگ لی کا تعلق لاگو ہو گا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ $\hat{p}$ کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) قریبی "مضافات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا ایک بعدی بکھراو پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔[۳۷]

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

**حل:** فرض کریں کہ $y$ امتیازی قدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$x g_y(x) = y g_y(x) \tag{۳.۳۷}$$

---

[۳۷] غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ یہ نا صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے قابو بڑھتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں "مضافات" کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (متناہی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا $\hat{p}$ کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہو گا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہرمشی ہو گا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک $f$ ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہو گا جب $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل $g$ ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل $\hat{p}$ کا امتیازی قدر ہو گا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہرمشی عامل $\hat{p}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں $\hat{p}$ ہرمشی ہو۔

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) $y$ ایک مقررہ عدد، جبکہ $x$ استمراری متغیر ہے۔ متغیر $x$ کا ایسا کون سا تفاعل ہو گا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے $x$ سے ضرب دینا، اس کو $y$ سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $y = x$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہو گا؛ در حقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہو گا۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہو گا؛ امتیازی تفاعلات مربع متکامل نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y')\delta(x - y)\,\mathrm{d}x = |A|^2\delta(y - y') \tag{۳.۳۸}$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$g_y(x) = \delta(x - y) \tag{۳.۳۹}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y') \tag{۳.۴۰}$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\delta(x - y)\,\mathrm{d}y, \tag{۳.۴۱}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$c(y) = f(y) \tag{۳.۴۲}$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریئر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہٰذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر $p$ یا یہاں پیش مثالوں میں $y$، اور بعد ازاں عموماً $z$ سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب تکمل ہو گا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی مرتعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (متناہی چوکور کنویں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۱۰: کیا لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

## ۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی قابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب **متعمم شماریاتی مفہوم**[۳۸] پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے قابل بناتی ہے۔ متعمم شماریاتی مفہوم اور شروڈنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقا کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کوانٹم میکانیات کی بنیاد ہے۔

**متعمم شماریاتی مفہوم:** حال $\Psi(x,t)$ میں ایک ذرے کی ایک قابل مشاہدہ $Q(x,P)$ کی پیمائش ہر صورت ہرمشی عامل $\hat{Q}(x,-i\hbar\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}x)$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی۔ اگر $\hat{Q}$ کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قدر $q_n$ کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \quad \text{ہو گا جہاں} \quad c_n = \langle f_n|\Psi\rangle \quad \text{ہے۔} \tag{۳.۴۳}$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی اقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سعت $\mathrm{d}z$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2\,\mathrm{d}z \quad \text{ہو گا جہاں} \quad c(z) = \langle f_z|\Psi\rangle \quad \text{ہو گا۔} \tag{۳.۴۴}$$

پیمائشی عمل کے بنا پر تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر **منہدم**[۳۹] ہوتا ہے۔[۴۰]

شماریاتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہو گا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہٰذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n f_n(x) \tag{۳.۴۵}$$

---

[۳۸] generalized statistical interpretation
[۳۹] collapse
[۴۰] استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گردونواح میں، پیمائشی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود سعت پر، تفاعل موج منہدم ہو گا۔

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو با آسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جا سکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہٰذا ان کے عددی سر کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔[41]

$$c_n = \langle f_n|\Psi\rangle = \int f_n(x)^*\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۴۶}$$

کیفی طور پر "$\Psi$ میں $f_n$ کی مقدار" کو $c_n$ ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش $\hat{Q}$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر $q_n$ کے حصول کا احتمال $\Psi$ میں "$f_n$ کی مقدار" پر منحصر ہو گا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہٰذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت $|c_n|^2$ ہو گی۔ متعمم شماریاتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔[42]

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہو گا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \tag{۳.۴۷}$$

جو یقیناً تفاعل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle\Psi|\Psi\rangle &= \Big\langle \Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big)\Big|\Big(\sum_n c_n f_n\Big)\Big\rangle = \sum_{n'}\sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'}|f_n\rangle \\ &= \sum_{n'}\sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \tag{۳.۴۸}$$

اسی طرح تمام ممکنہ امتیازی اقدار کو انفرادی طور ہر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے $Q$ کی توقعاتی قیمت حاصل ہو گی۔

$$\langle Q\rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \tag{۳.۴۹}$$

یقیناً درج ذیل ہو گا

$$\langle Q\rangle = \langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \Big\langle \Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big)\Big|\Big(\hat{Q}\sum_n c_n f_n\Big)\Big\rangle \tag{۳.۵۰}$$

---

[41] دھیان رہے کہ تابعیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں $c_n(t)$ لکھنا چاہیے۔

[42] یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ "اس ذرے کا حال $f_n$ میں پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے۔" ایسا کہنا بالکل غلط ہو گا۔ صرف یہ کہنا درست ہو گا کہ ذرہ حال $\Psi$ میں ہے۔ ہاں $Q$ کی پیمائش سے قیمت $q_n$ کے حصول کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفاعل موج $f_n$ پر منہدم کرتی ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال $\Psi$ میں ہے، اس کا $Q$ کی پیمائش کے بعد حال $f_n$ میں ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جسے $\hat{Q}f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_{n} c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_{n} c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n'n} \sum_{n} q_n |c_n|^2. \tag{۳.۵۱}$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آ رہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چوہا مارنے والی بات ہو گی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال $\Psi$ میں ایک ذرے کے لیے $x$ کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی قدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد $y$ متغیر $x$ کا امتیازی قدر ہو گا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل $g_y(x) = \delta(x-y)$ ہو گا۔ ظاہراً درج ذیل ہو گا

$$c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) \Psi(x,t)\,\mathrm{d}x = \Psi(y,t) \tag{۳.۵۲}$$

لہٰذا سعت $\mathrm{d}y$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y,t)|^2$ ہو گا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہو گا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(ipx/\hbar)}$ ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۵۳}$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو **معیار حرکی فضا تفاعل موج**[۴۳] پکارا اور $\Phi(p,t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x,t)$ کا فوریئر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فوریئر بدل ہے ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\, \Psi(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{۳.۵۴}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar}\, \Phi(p,t)\,\mathrm{d}p, \tag{۳.۵۵}$$

متعمم شماریاتی مفہوم کے تحت سعت $\mathrm{d}p$ میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\Phi(p,t)\right|^2 \mathrm{d}p \tag{۳.۵۶}$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے ڈیلٹا تفاعل کنواں $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

---

[۴۳] momentum space wave function

**حل:** اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکی فضا تفاعل موج درج ذیل ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2+p_0^2)^2} \, \mathrm{d}p &= \frac{1}{\pi} \Big[ \frac{p p_0}{p^2+p_0^2} + \tan^{-1}\Big(\frac{p}{p_0}\Big) \Big] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

(اور یہاں بھی میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ □

سوال ۳.۱۱: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فضا تفاعل موج $\Phi(p,t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے $p$ کی پیمائش کا کلاسیکی سعت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو بامعنی ہندسوں تک) کیا ہو گا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے "عمومی تقسیم" یا "تفاعل خلل" کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle x \rangle = \int \Phi^* \Big( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \Big) \Phi \, \mathrm{d}p. \tag{۳.۵۷}$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p})e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل مقام $i\hbar\partial/\partial p$ ہو گا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\langle Q(x,p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi \, \mathrm{d}x, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}, p\right) \Phi \, \mathrm{d}p, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases} \tag{۳.۵۸}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہو گا)۔

## ۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہٰذا توجہ رکھیں۔

### ۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی قابل مشاہدہ $A$ کے لیے درج ذیل ہوگا (مساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے قابل مشاہدہ $B$ کے لیے

$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle$ ہوگا جہاں $g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi$ ہے۔

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \tag{۳.۵۹}$$

اب کسی بھی مخلوط عدد $z$ کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$|z|^2 = [(z)_{\text{حقیقی}}]^2 + [(z)_{\text{خیالی}}]^2 \geq [(z)_{\text{خیالی}}]^2 = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2 \tag{۳.۶۰}$$

یوں $z = \langle f | g \rangle$ لیتے ہوئے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}[\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle]\right)^2 \tag{۳.۶۱}$$

ہوگا لیکن $\langle f | g \rangle$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \hat{B}\langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle)\Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B}\Psi \rangle - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A}\Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B}\Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\
&= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\
&= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\langle g|f\rangle = \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

لہٰذا

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle \hat{A}\hat{B}\rangle - \langle \hat{B}\hat{A}\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle,$$

ہو گا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقلب ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2 \tag{۳.۶۲}$$

یہ **اصول عدم یقینیت**[۴۴] کی **عمومی** صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہرمشی عاملین کے مقلب میں بھی $i$ کا جذر پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود $i$ کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔[۴۵]

مثال کے طور پر، فرض کریں مقام $(\hat{A} = x)$ پہلا اور معیار حرکت $(\hat{B} = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ دوسرا قابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقلب

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہٰذا

$$\sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i}i\hbar\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{h}{2} \tag{۳.۶۳}$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو قابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر مقلوب ہوں کے لیے ایک عدد "اصول عدم یقینیت" پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں **غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ**[۴۶] کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے

---

[۴۴] uncertainty principle

[۴۵] یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دو ہرمشی عاملین کا مقلب خود خلاف ہرمشی $(\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q})$ ہو گا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہو گی (سوال ۳.۲۶)۔

[۴۶] incompatible observables

جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہو گا (سوال ۱۵.۳ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (مقلوب) قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔[47]

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا $z$ جزو باہمی ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی اقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ مقام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہٰذا مقام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کوانٹم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماریاتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا مقام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا مقام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریئر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسیع وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہٰذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہو گی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائن نما موج پر منہدم ہو گا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن مقام پہلی پیمائش سے مختلف ہو گا۔[48] مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر مستعمل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہو گی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں قابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہو گا)۔ تاہم ایسا عموماً تب ممکن ہو گا جب دونوں قابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۱۳.۳:

ا. درج ذیل مماثل مقلوب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{۳.۶۴}$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے پر درج ذیل ہو گا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{۳.۶۵}$$

[47] یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر مقلوب قالبوں کو بیک وقت وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے (یعنی، انہیں ایک جیسی مشابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہرمشی قالبوں کو بیک وقت وتری بنایا جا سکتا ہے۔ حصہ ۵.۱ دیکھیں۔

[48] جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) $x$ کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود $p$ کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریدا جائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے نور یہ اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے قابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا مقام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

سوال ۳.۱۴: مقام $(A = x)$ میں عدم یقینیت اور توانائی $(B = p^2/2m + V)$ میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m}|\langle p \rangle|$$

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر $\hat{P}$ اور $\hat{Q}$ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $[\hat{P}, \hat{Q}]f = 0$ ہو گا۔

### ۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی مرتعش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$ کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہو گا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۹ اور مساوات ۳.۶۰۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ $\Psi$ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = cf(x)$، جہاں $c$ کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۰ میں $z$ کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 = (z)$ حقیقی ہو، یعنی جب

$$\langle f|g\rangle_{\text{حقیقی}} = (c\langle f|f\rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f\rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہٰذا مستقل $c$ لازماً خالص خیالی ہو گا؛ جسے ہم $ia$ لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہو گا۔

$$g(x) = iaf(x), \quad a \text{ حقیقی} \tag{۳.۶۶}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle p\rangle\right)\Psi = ia(x - \langle x\rangle)\Psi \tag{۳.۶۷}$$

جو متغیر $x$ کے تفاعل $\Psi$ کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = Ae^{-a(x-\langle x\rangle)^2/2\hbar}e^{i\langle p\rangle x/\hbar} \tag{۳.۶۸}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ درحقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھے۔[۴۹]

سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۷ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ مستقلات ہیں۔

### ۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۶۹}$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے $\Delta x$ (متغیر $x$ کی "عدم یقینیت") لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۹ کی طرح کا **توانائی و وقت اصول عدم یقینیت**[۵۰] درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۰}$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں $x$ اور $t$ (بلکہ $ct$) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں $p$ اور $E$ (بلکہ $E/c$) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہٰذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۰ اور مساوات ۳.۶۹ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شروڈنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ $t$ اور $x$ کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفرقی مساوات $t$ میں یک رتبی جبکہ $x$ میں دو رتبی ہے)، اور مساوات ۳.۶۹ سے قطعاً مساوات ۳.۷۰ مراد نہیں لی جا سکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے قابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاعلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو $\Delta t$ ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام "کافی زیادہ" تبدیل ہوتا ہے۔

---

[۴۹] دھیان رہے کہ صرف $\Psi$ کو $x$ کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ "مستقلات" $A$، $a$، $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ $\Psi$ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اتنا دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحہ پر تفاعل موج $x$ کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحہ پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہوگا۔

[۵۰] energy–time uncertainty principle

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی قابل مشاہدہ $Q(x,p,t)$ کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t}|\hat{Q}\Psi\Big\rangle + \Big\langle \Psi|\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\Psi\Big\rangle + \Big\langle \Psi|\hat{Q}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\Big\rangle$$

اب مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle \hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle \Psi|\hat{Q}\hat{H}\Psi\rangle + \Big\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\Big\rangle$$

اب $\hat{H}$ ہرمشی ہے لہٰذا $\langle \hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle \Psi|\hat{H}\hat{Q}\Psi\rangle$ اور یوں ادرج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle + \Big\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\Big\rangle \tag{۳.۷۱}$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کار آمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۷ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہو گا،[15] یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقلب تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر $\hat{H}$ اور $\hat{Q}$ آپس میں قابل تبدل ہوں، تب $\langle Q\rangle$ مستقل ہو گا، اور اس نقطہ نظر سے $Q$ بقائی مقدار ہو گا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ $Q$ صریحاً $t$ کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2\sigma_Q^2 \geq \Big(\frac{1}{2i}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

ہو گا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma_H\sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big| \tag{۳.۷۲}$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$\Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|\,\mathrm{d}\langle Q\rangle/\,\mathrm{d}t|} \tag{۳.۷۳}$$

[15] وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا عموماً $\partial\hat{Q}/\partial t = 0$ ہو گا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال لینے کی خاطر ایک ایسے ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقیاس لچک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجہ حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لچکدار ہو جاتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2x^2$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۴}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں $\Delta t$ کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} \right| \Delta t,$$

ہے لہٰذا $\Delta t$ اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں $Q$ کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص $\Delta t$ اس قابل مشاہدہ $Q$ پر منحصر ہو گی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی $\Delta E$ کی صورت میں تمام قابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہو گی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہو گی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکتا طور پر معین ہو گی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مساوات ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x,t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر $a$ ، $b$ ، $\psi_1$ اور $\psi_2$ حقیقی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|\Psi(x,t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$$

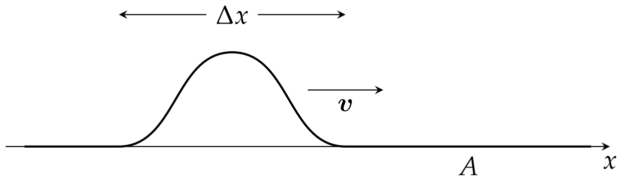
ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar/(E_2-E_1)$ ہو گا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً $\geq \hbar/2$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$ ہو گا لیکن $E = p^2/2m$ ہے، لہٰذا $\Delta E = p\Delta p/m$ ہو گا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m}\frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$




شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ $A$ کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔

□

مثال ۳.۷: ذرہ $\Delta$ تقریباً $10^{-23}$ سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کمیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جرس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232\,\mathrm{MeV}/c^2$ پر اور چوڑائی تقریباً $120\,\mathrm{MeV}/c^2$ ہوگی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی ( $mc^2$ ) کیوں بعض اوقات $1232$ سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی خلل کے بنا پر ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

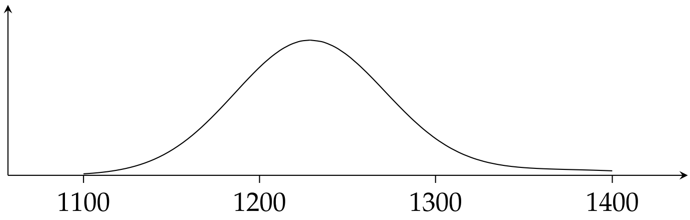
$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2}\mathrm{MeV}\right)(10^{-23}\,\mathrm{s}) = 6 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$$

ہے جبکہ $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$ ہے۔ یوں کمیت میں پھیلاؤ اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت اجازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کمیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔[۵۲] □

ان مثالوں میں ہم نے جزو $\Delta t$ کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مراد طول موج تھا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مراد وہ دورانیہ تھا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں $\Delta t$ اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں "کافی زیادہ" تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا پر کوانٹم میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی $\Delta E$ "ادھار" لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar/(2\Delta E)$ کے اندر "واپس" کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب

[۵۲] حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ $10^{-23}$ سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کمیتی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الٹ رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ فرض کریں کہ $\Delta$ تقریباً ایک پروٹان ( $\sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$ ) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً $10^{-23}$ سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ فرض کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔




شکل ۳.۲: کمیت $\Delta$ کی پیمائشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی جائز مطلب لیے جا سکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹم میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی غلط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ غلط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۷: درج ذیل ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷۱ کی اطلاق کریں۔

ا. $Q = 1$ ب. $Q = H$ ج. $Q = x$ د. $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲۷، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

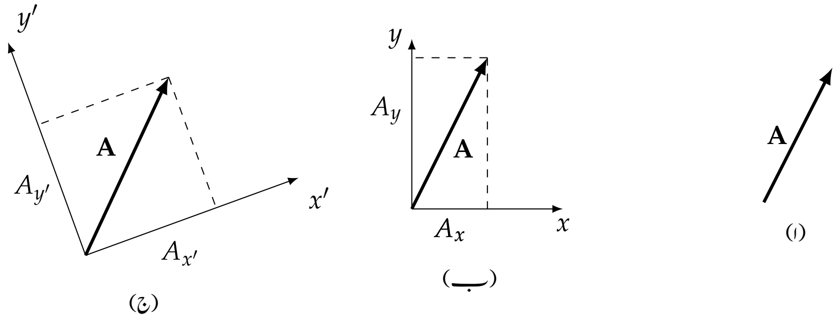
سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف $\sigma_H$ ، $\sigma_x$ اور $\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تفاعل موج اور قابل مشاہدہ $x$ کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پرکھیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف $\sigma_H$ ، $\sigma_x$ اور $\mathrm{d}\langle x\rangle / \mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ $x$ کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پرکھیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ $x$ کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۴ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

## ۳.۶ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ $\mathbf{A}$ پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہو گا کہ آپ $x$ اور $y$ محدد کا ایک کارتیسی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ $\mathbf{A}$ کے




شکل ۳.۳: (ا) سمتیہ $\mathbf{A}$، (ب) $xy$ محدد سے لحاظ سے $\mathbf{A}$ کے اجزاء، (ج) $x'y'$ محدد کے لحاظ سے $\mathbf{A}$ کے اجزاء

اجزاء: $A_x = \hat{\imath} \cdot \mathbf{A}$ اور $A_y = \hat{\jmath} \cdot \mathbf{A}$ وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام قائم کرے جس کے محدد $x'$ اور $y'$ ہوں؛ وہ سمتیہ $\mathbf{A}$ کے اجزاء $A_x' = \hat{\imath}' \cdot \mathbf{A}$ اور $A_y' = \hat{\jmath}' \cdot \mathbf{A}$ پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس ($\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$) اور ($\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$) کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ خود "باہر فضا" میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

یہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہو گا۔ اس کو سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو "باہر ہلبرٹ فضا" میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ در حقیقت امتیازی تفاعل مقام کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو کا عددی سر موجی تفاعل $\Psi(x,t)$ ہو گا:

$$\Psi(x,t) = \langle x|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۵}$$

(جہاں $\hat{x}$ کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت $x$ ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے)[۵۳]، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو، مقام و معیار حرکت موجی تفاعل $\Phi(p,t)$ ہے:

$$\Phi(p,t) = \langle p|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۶}$$

(جہاں $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت $p$ ہے کو سمتیہ $|p\rangle$ ظاہر کرتا ہے)۔[۵۴] ہم $|\mathcal{S}\rangle$ کے پھیلاو کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر

[۵۳] میں اس کو $g_x$ (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس مقام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھٹکارا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ ہلبرٹ فضا کو، $x$ پر، بطور مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس مقام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

[۵۴] مقامی فضا میں یہ $f_p(x)$ ہو گا (مساوات ۳.۳۲)۔

رہے ہیں):

$$c_n(t) = \langle n|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۷}$$

(جہاں $\hat{H}$ کے $n$ ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $\langle n|$ ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات ۳.۴۶۔ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات $\Psi$ اور $\Phi$، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \int \Psi(y,t)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int \Phi(p,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \\ &= \sum c_n e^{-iE_nt/\hbar}\psi_n(x)\end{aligned} \tag{۳.۷۸}$$

(قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا "تبادلہ" دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle \tag{۳.۷۹}$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$، [۵۵] کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle = \sum_n a_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n|\alpha\rangle \quad \text{ہے، اور} \\ |\beta\rangle = \sum_n b_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n\langle e_n\beta\rangle \quad \text{ہے} \end{aligned} \tag{۳.۸۰}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبی ارکان**[۵۶،۵۷]

$$\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \equiv Q_{mn} \tag{۳.۸۱}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\sum_n b_n|e_n\rangle = \sum_n a_n\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۲}$$

یا، سمتیہ $\langle e_m|$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$\sum_n b_n\langle e_m|e_n\rangle = \sum_n a_n\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۳}$$

---

[۵۵] میں فرض کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں $n$ استمراری ہوگا اور مجموعات کی جگہ تکملات ہوں گے۔

[۵۶] matrix elements

[۵۷] یہ اصطلاح متناہی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس "قالب" کے اراکین کی تعداد اب لامتناہی ہو گی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn} a_n \tag{۳.۸۴}$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں قالبی ارکان معلومات فراہم کرتے ہے۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہو گا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد متناہی عدد $(N)$ ہو گا۔ سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ ایسی صورت میں $N$ ابعادی سمتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، $(N)$ اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ عاملین $(N \times N)$ سادہ قالب کا روپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامتناہی آبادی سمتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔[۵۸]

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathcal{S}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$ ہو گا جہاں $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہے۔

ہیملٹنی کو ایک (ہرمشی) قالب کے روپ میں لکھا جا سکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں $g$ اور $h$ حقیقی مستقل ہیں۔ اگر ($t = 0$ پر) یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت $t$ پر اس کا حال کیا ہو گا؟

**حل:** (تابع وقت) شروڈنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\mathcal{S}\rangle = H|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۵}$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شروڈنگر

$$H|\mathcal{S}\rangle = E|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۶}$$

[۵۸] یہاں "مساوات" کی نشان سے مراد "ظاہر کرتا ہے" لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علامتیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم $H$ کی امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h - E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اجازتی توانائیاں $(h+g)$ اور $(h-g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm\alpha$$

لہٰذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{S}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathcal{S}_+\rangle + |\mathcal{S}_-\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_n t/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(h+g)t/\hbar} |\mathcal{S}_+\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\mathcal{S}_-\rangle] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \left[ e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i\sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t = 0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) **ارتعاش نیوٹرینو**[۵۹] کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ **الیکٹران نیوٹرینو**[۶۰]، اور $|2\rangle$ **میوان نیوٹرینو**[۶۱] کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں خلاف وتر جزو $(g)$ غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میون نیوٹرینو میں اور میون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

---

[۵۹] neutrino oscillations
[۶۰] electron neutrino
[۶۱] muon neutrino

کوانٹم میکانیات میں اندرونی ضرب کو **ڈیراک علامتیت**[۶۲] سے ظاہر کیا جاتا ہے جو تکونی قوسین، $\rangle$ اور $\langle$، اور افقی لکیر $|$، پر مشتمل ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں تکونی قوسین کو قوسین نہیں بلکہ عاملین تصور کریں۔ اندرونی ضرب $\langle\alpha|\beta\rangle$ کو دو حصوں $|\alpha\rangle$ اور $\langle\beta|$ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں بالترتیب **تفاعلیہ**[۶۳] اور **سمتاویہ**[۶۴] کہتے ہیں۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہو گا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک تفاعلیہ کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) جیسا آپ دیکھیں گے کوانٹم میکانیات میں تفاعلیہ کو ایک قالب اور سمتاویہ کو سمتیہ کی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ڈیراک علامتیت کو **تفاعلیہ و سمتاویہ علامتیت**[۶۵] بھی کہتے ہیں۔ ایک تفاعلی فضا میں تفاعلیہ کو تکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جا سکتا ہے:

$$\langle f| = \int f^*[\cdots]\, dx$$

جہاں چوکور قوسین $[\cdots]$ میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو تفاعلیہ کے دائیں ہاتھ سمتاویہ میں موجود ہو گا۔ ایک متناہی ابعادی سمتی فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{۳.۸۷}$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی تفاعلیہ ایک سمتیہ صف

$$\langle\alpha| = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \tag{۳.۸۸}$$

ہو گا۔ تمام تفاعلیہ کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتی فضا حاصل ہو گا جس کو **دوہری فضا**[۶۶] کہتے ہیں۔

تفاعلیہ کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{۳.۸۹}$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا وہ حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے "ساتھ ساتھ" پایا جاتا ہو:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle;$$

---

[۶۲] Dirac notation
[۶۳] bra
[۶۴] ket
[۶۵] bra-ket notation
[۶۶] dual space

ہم اس کو $\langle\alpha|$ کے احاطہ کیے گئے یک بعدی ذیلی فضا پر **عامل تظلیل**[۶۷] کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \tag{۳.۹۰}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \tag{۳.۹۱}$$

(جو عامل مماثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاو کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \tag{۳.۹۲}$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z|e_{z'}\rangle = \delta(z-z') \tag{۳.۹۳}$$

ہو، تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int |e_z\rangle\langle e_z|\,\mathrm{d}z = 1 \tag{۳.۹۴}$$

مساوات ۳.۹۱ اور مساوات ۳.۹۴ تکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تظلیل **یک طاقتی**[۶۸] ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہو گا۔ $\hat{P}$ کے امتیازی اقدار تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ سمتاویہ $|\alpha\rangle$ اور سمتاویہ $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ کو (دوہری اساس $\langle 1|$ ، $\langle 2|$ ، $\langle 3|$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle\alpha|\beta\rangle$ اور $\langle\beta|\alpha\rangle$ تلاش کریں اور $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $\hat{A} \equiv |\alpha\rangle\langle\beta|$ کے نو ارکان قالب تلاش کر کے قالب $\mathbf{A}$ تیار کریں۔ کیا یہ ہرمشی ہے؟

---

[۶۷] projection operator
[۶۸] idempotent

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

جہاں $\langle 2|, |1\rangle$ معیاری عمودی اساس اور $E$ ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی اقدار اور ( $|1\rangle$ اور $|2\rangle$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ) امتیازی تفاعل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے $\hat{H}$ کا قالب $\mathbf{H}$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل $\hat{Q}$ کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ $\hat{Q}$ کو اس کے **طیفی تحلیل**[69]

$$\hat{Q} = \sum_n q_n|e_n\rangle\langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہٰذا کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہو گا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{\sum_n q_n|e_n\rangle\langle e_n|\right\}|\alpha\rangle$$

## مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: **لیژانڈر کثیر رکنیاں**۔ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تفاعلات $1$ ، $x$ ، $x^2$ اور $x^3$ کو گرام و شمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال A.4 دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پہچان پائیں؛ (معیاری عمودزنی کے علاوہ)[70] یہ لیژانڈر کثیر رکنیاں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک **خلاف ہرمشی**[71] (یا **منحرف ہرمشی**[72]) عامل اپنے ہرمشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q} \tag{۳.۹۵}$$

[69] spectral decomposition

[70] لیژانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کونسی روایت بہتر ثابت ہو گی۔ انہوں نے مجموعی جزو ضربی یوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تفاعلات $1$ کے برابر ہوں؛ ہم اس بد قسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

[71] anti-hermitian

[72] skew-hermitian

ا. دکھائیں کہ خلاف ہرمشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہو گی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہرمشی عاملین کا مقلب خلاف ہرمشی ہو گا۔ دو عدد خلاف ہرمشی عاملین کے مقلب کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ۳.۲۷: **ترتیبی پیمائشیں**[۴۳]: قابل مشاہدہ $A$ کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{A}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات $\psi_1$ اور $\psi_2$، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب $a_1$ اور $a_2$ ہیں، پائے جاتے ہیں۔ قابل مشاہدہ $B$ کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{B}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات $\phi_1$ اور $\phi_2$ اور بالترتیب امتیازی اقدار $b_1$ اور $b_2$ ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. قابل مشاہدہ $A$ کی پیمائش $a_1$ قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فوراً) بعد یہ نظام کس حال میں ہو گا؟

ب. اب اگر $B$ کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. قابل مشاہدہ $B$ کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ $A$ کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ $a_1$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو $B$ کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳.۲۸: لامتناہی چوکور کنویں کے $n$ ویں ساکن حال کی معیار حرکت و فضا تفاعل موج $\Phi_n(p,t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p,t)|^2$ اور $|\Phi_2(p,t)|^2$ کو $p$ کے تفاعل کے طور پر ترسیم کریں (نقاط $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p,t)$ کو استعمال کرتے ہوئے $p^2$ کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۲.۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۲۹: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں $n$ کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تفاعل خالص سائن نما ہے (جس کا طول موج $\lambda$ ہے) تاہم چونکہ یہ تفاعل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہٰذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سعت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فضا تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x,0)|^2$ اور $|\Phi(p,0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفروں کے بیچ) چوڑائیاں $\omega_x$ اور $\omega_p$ تعین کریں۔ دیکھیں کہ $n \to \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہو گا؟ $\omega_x$ اور $\omega_p$ کو $\Delta x$ اور $\Delta p$ کی اندازاً قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ $\sigma_p$ کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنا ہو گا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

---

[۴۳] sequential measurements

سوال ۳.۳۰: درج ذیل فرض کریں

$$\Psi(x,0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں $A$ اور $a$ مستقلات ہیں۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے $A$ تعین کریں۔

ب. (لمحہ $t = 0$ پر) $\langle x \rangle$ ، $\langle x^2 \rangle$ اور $\sigma_x$ تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت وفضائی تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p,0)$ استعمال کرتے ہوئے (لمحہ $t = 0$ پر) $\langle p \rangle$ $\langle p^2 \rangle$ اور $\sigma_p$ کا حساب کریں۔

ھ. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: **مسئلہ وریل۔** درج ذیل مساوات ۳.۷۱ کی مدد سے دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle xp \rangle - 2\langle T \rangle - \left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle \tag{۳.۹۶}$$

جہاں $T$ حرکی توانائی $(H = T + V)$ ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہو گا (ایسا کیوں ہے؟) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$2\langle T \rangle = \left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle \tag{۳.۹۷}$$

اس کو **مسئلہ وریل**[۴۷] کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ ہو گا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی ووقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau/\pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x,0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x,t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت $\tau$ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کا تفاعل موج $\Psi(x,0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں قالبی ارکان $\langle n|x|n'\rangle$ اور $\langle n|p|n'\rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں قالبی وتری رکن $n = n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامتناہی) قالب $\mathbf{X}$ اور $\mathbf{P}$ مرتب کریں۔ دکھائیں کہ اس اساس میں $\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 = \mathbf{H}$ وتری ہو گا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جزوی جواب:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) \tag{۳.۹۸}$$

---

[۴۷] virial theorem

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک جتنے احتمال کے ساتھ، $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p \rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x, t)$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3
**ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات۔** ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات $(|n\rangle = \psi_n(x)$، مساوات ۲.۶۷) میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x\sigma_p = \hbar/2)$ پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x\sigma_p = (2n+1)\hbar/2$ ہو گا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں **اتساقی حالات**[45] کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل[46] کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی قدر $\alpha$ کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x \rangle$، $\langle x^2 \rangle$، $\langle p \rangle$، $\langle p^2 \rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ $a_-$ کا ہرمشی جوڑی دار $a_+$ ہے۔ فرض نہ کریں کہ $\alpha$ حقیقی ہو گا۔

ب. $\sigma_x$ اور $\sigma_p$ تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$ ہو گا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتساقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاو

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاو کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے $c_0$ تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$

ہ. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \to e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

---

[45] coherent states

[46] عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

شامل کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی $a_-$ کا امتیازی حال ہو گا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی قدر ارتقا پذیر ہو گا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha$$

یوں اتفاقی حال ہمیشہ اتفاقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال $|n = 0\rangle$ خود اتفاقی حال ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہو گا۔

سوال ۳.۳۶: **مبسوط اصول عدم یقینیت۔** متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}\langle C^2\rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A},\hat{B}]$ ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}(\langle C\rangle^2 + \langle D\rangle^2) \tag{۳.۹۹}$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A\rangle\langle B\rangle$ ہو گا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۰ میں $z$ کا حقیقی جزو $\mathrm{Re}(z)$ جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۹ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہٰذا معیاری عدم یقینیت اصول یہاں بے وقعت ہے؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل قالب دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں $a$، $b$ اور $c$ حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل قالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو قابل مشاہدہ $A$ اور $B$ کو درج ذیل قالب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $\omega$ ، $\lambda$ اور $\mu$ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

ا. $\mathbf{H}$ ، $\mathbf{A}$ اور $\mathbf{B}$ کے امتیازی اقدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔ لمحہ t=0 پر $H$ ، $A$ اور $B$ کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ $t$ پر $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟ لمحہ $t$ پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ انہیں سوالات کے جوابات $B$ اور $A$ کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

ا. ا) ایک تفاعل $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں $x_0$ کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا پر $\hat{p}/\hbar$ کو **فضا میں انتقال کا پیدا کار**[77] کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نما کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شروڈنگر مساوات کو $\Psi(x,t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x,t)$$

(جہاں $t_0$ کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا پر $-\hat{H}/\hbar$ کو **وقت میں انتقال کا پیدا کار**[78] کہتے ہیں۔

ج. دکھائیں لمحہ $t + t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x,p,t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔[79]

$$\langle Q\rangle_{t+t_0} = \langle\Psi(x,t)|e^{i\hat{H}t_0/\hbar}\hat{Q}(x,p,t+t_0)e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}|\Psi(x,t)\rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۱ حاصل کریں۔ اشارہ: $t_0 = dt$ لے کر $dt$ میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

ا. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شروڈنگر مساوات کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب: ($e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p,0)$)

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p,0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p,t)$ مرتب کریں۔ ساتھ ہی $|\Phi(p,t)|^2$ مرتب کریں جو تابع وقت نہیں ہو گا۔

ج. $\Phi$ پر مبنی موزوں تکملات حل کرتے ہوئے $\langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں $\langle H\rangle = \langle p\rangle^2/2m + \langle H\rangle_0$ ہو گا (جہاں زیر نوشت میں $0$ ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

---

[77] generator of translation in space

[78] generator of translation in time

[79] بالخصوص $t = 0$ لے کر، $t_0$ کی زیر نوشت میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t)\rangle = \langle\Psi(x,t)|\hat{Q}|\Psi(x,t)\rangle = \langle\Psi(x,0)|\hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U}|\Psi(x,0)\rangle$$

ہو گا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں $Q$ کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ $\hat{Q}$ کو $\Psi(x,t)^*$ اور $\Psi(x,t)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو تفاعل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U}$ کو $\Psi(x,0)^*$ اور $\Psi(x,0)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو **شروڈنگر نقطہ نظر** جبکہ موخر الذکر کو **ہیزنبرگ نقطہ نظر** کہتے ہیں۔

# باب ۴

# تین ابعادی کوانٹم میکانیات

## ۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر

تین ابعاد تک توسیع با آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شروڈنگر

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = H\Psi \tag{۴.۱}$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق ($x$ کے ساتھ ساتھ $y$ اور $z$ پر بھی) کرتے ہوئے:

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۴.۲}$$

ہیملٹنی اعامل $H$ کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{۴.۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{۴.۴}$$

---

[1] جہاں کلاسیکی قابل مشاہدہ اور عامل میں فرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عامل پر "ٹوپی" کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہٰذا یہاں سے عاملین پر "ٹوپی" کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۴.۵}$$

کارتیسی محدد میں **لاپلاسی**[۲] ہے۔

مخفی توانائی $V$ اور تفاعل موج $\Psi$ اب $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ اور $t$ کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $\left|\Psi(\boldsymbol{r}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}$ ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہو گی

$$\int |\Psi|^2 \,\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} = 1 \tag{۴.۶}$$

جہاں تکمل کو پوری فضا پر لینا ہو گا۔ اگر مخفیہ وقت کے تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۷}$$

جہاں فضائی تفاعل موج $\psi_n$ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۴.۸}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۹}$$

جہاں مستقلات $c_n$ ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\boldsymbol{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ **استمراریہ**[۳] حالات دیتا ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے تکمل ہو گا۔)

سوال ۴.۱:

۱. عاملین $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{p}$ کے تمام **باضابطہ مقلبیت رشتے**[۴]: $[x, y]$، $[x, p_y]$، $[x, p_x]$، $[p_y, p_z]$، وغیرہ، حاصل کریں۔

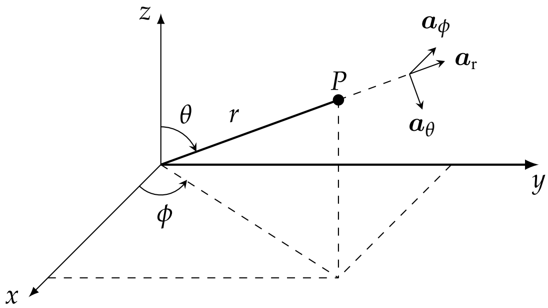
جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{۴.۱۰}$$

جہاں اشاریہ $x$، $y$ اور $z$ کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔

---

[۲] Laplacian
[۳] continuum
[۴] canonical commutation relations




شکل ۴.۱: کروی محدد: رداس $r$، قطبی زاویہ $\theta$، اور سمتی زاویہ $\phi$ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہرنفسٹ کی تصدیق کریں:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle \boldsymbol{p}\rangle \tag{۴.۱۱}$$

(ان میں سے ہر ایک در حقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جزو کے لیے ہو گی۔)
اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات ۳.۷۱ تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۲}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x\sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

### ۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبدا سے فاصلہ کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں **کروی محدد**[۵] $(r, \theta, \phi)$ کا استعمال بہتر ثابت ہو گا (شکل ۴.۱)۔ کروی محدد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big) \tag{۴.۱۳}$$

---

[۵] spherical coordinates

یوں کروی محدد میں غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\Big] + V\psi = E\psi \tag{۴.۱۴}$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi) \tag{۴.۱۵}$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے؛

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big]+VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو $RY$ سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\Big\{\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\Big\} + \frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف $r$ کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف $\theta$ اور $\phi$ کا تابع ہے؛ لہٰذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہو گی۔[6]

$$\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E] = l(l+1) \tag{۴.۱۶}$$

$$\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\} = -l(l+1) \tag{۴.۱۷}$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی چوکور کنواں (یا ڈبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x، y \text{ اور } z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

[6] ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں $l$ کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ $l$ کو لازماً عدد صحیح ہونا ہو گا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو $E_1$ ، $E_2$ ، $E_3$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرکے $E_1$ تا $E_6$ تلاش کریں۔ ان کی انحطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انحطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال ۲.۴۵)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی $E_{14}$ کی انحطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

### ۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات $\theta$ اور $\phi$ پر $\psi$ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y\sin^2\theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=-l(l+1)Y\sin^2\theta \tag{۴.۱۸}$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانتے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{۴.۱۹}$$

استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس کو پر کرکے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کرکے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Big\{\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta\Big\}+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

پہلا جزو صرف $\theta$ کا تفاعل ہے، جبکہ دوسرا صرف $\phi$ کا تفاعل ہے، لہٰذا ہر جزو ایک مستقل ہو گا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل[7] کو $m^2$ لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big]+l(l+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{۴.۲۰}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2 \tag{۴.۲۱}$$

متغیر $\phi$ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2\Phi \implies \Phi(\phi)=e^{im\phi} \tag{۴.۲۲}$$

---

[7] یہاں بھی ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ $m$ کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ $m$ کو عدد صحیح ہونا ہو گا۔ انتباہ: اب حرف $m$ دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہو گی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$، تاہم $m$ کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جا سکتا ہے جسے ہم $\Theta$ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مخفیہ لازماً حقیقی ہوں گے لہٰذا برقی حرکیات میں اسّمتی تفاعل $(\Phi)$ کو سائن اور کوسائن کی صورت میں لکھا جاتا ہے نہ کہ قوت نمائی صورت میں۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی $\phi$ کی قیمت میں $2\pi$ کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل ۴.۱ دیکھیں) لہٰذا درج ذیل شرط[8] عائد کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \tag{۴.۲۳}$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہو گا جس کے تحت $m$ لازماً عدد صحیح ہو گا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{۴.۲۴}$$

مساوات $\theta$

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) + [l(l+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta = 0 \tag{۴.۲۵}$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = A P_l^m(\cos\theta) \tag{۴.۲۶}$$

جہاں $P_l^m$ **شریک لیژانڈر تفاعل**[9] ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{|m|} P_l(x) \tag{۴.۲۷}$$

اور $l$ ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے[10] جس کی تعریف **کلیہ روڈریگیز**[11]:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l (x^2-1)^l \tag{۴.۲۸}$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{4\cdot 2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر $x$ کی

[8] یہ بظاہر سادہ شرط اتنی سادہ نہیں ہے۔ یاد رہے کہ $m$ کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کثافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ ۴.۳ میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے $m$ پر عائد شرط حاصل کریں گے۔

[9] associated Legendre function

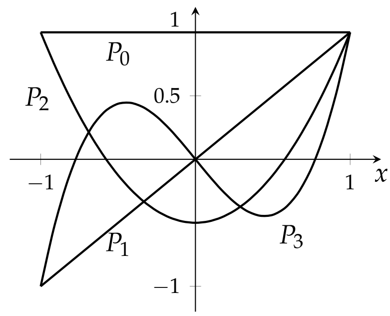
[10] دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہو گا۔

[11] Rodrigues formula

جدول ۱.۴: چند ابتدائی لیژانڈر کثیر رکنیاں $P_l(x)$۔ (ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات۔

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1\\
P_1 &= x\\
P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5 &= \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
$$

(ا)




(ب)

درجہ $l$ کثیر رکنی ہے، اور $l$ کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت یا طاق ہو گی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیر رکنی نہیں ہو گا؛ اور طاق $m$ کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$
P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3x\sqrt{1-x^2},
$$
$$
P_2^2(x) = (1-x^2)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3(1-x^2),
$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_l^m(\cos\theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ہوتا ہے لہٰذا $P_l^m(\cos\theta)$ ہر صورت $\cos\theta$ کا کثیر رکنی ہو گا جسے طاق $m$ کی صورت میں $\sin\theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۲.۴ میں $\cos\theta$ کے چند شریک لیژانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح $l$ کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہو گا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۲۷.۴ کے تحت $P_l^m = 0$ ہو گا۔ یوں $l$ کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے $m$ کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

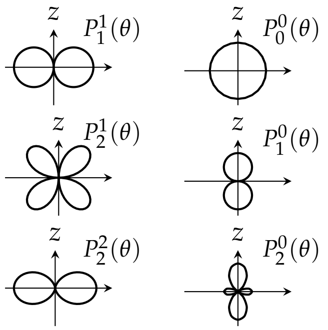
$$
l = 0,1,2,\ldots; \quad m = -l, -l+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots l-1, l \tag{۲۹.۴}
$$

ذرا رکیے! مساوات ۲۵.۴ دو رتبی تفرقی مساوات ہے: $l$ اور $m$ کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے، تاہم $\theta = 0$ اور (یا) $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے قابو بڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدد میں حجمی رکن درج ذیل ہو گا

$$
\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۳۰.۴}
$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیژانڈر تفاعلات $P_l^m(\cos\theta)$: (ا) تفاعلی روپ، (ب) ترسیمات برائے $r = P_l^m(\cos\theta)$ (ان ترسیمات میں $r$ آپ کو $\theta$ رخ تفاعل کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو $z$ محور کے گرد گھمائیں۔)




(ب)

| | |
|---|---|
| $P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ | $P_0^0 = 1$ |
| $P_3^3 = 15\sin\theta(1-\cos^2\theta)$ | $P_1^1 = \sin\theta$ |
| $P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta$ | $P_1^0 = \cos\theta$ |
| $P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$ | $P_2^2 = 3\sin^2\theta$ |
| $P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$ | $P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta$ |

(ا)

لہٰذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int |R|^2 r^2 \,\mathrm{d}r \int |Y|^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1$$

یہاں $R$ اور $Y$ کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 \,\mathrm{d}r = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi}\int_0^\pi |Y|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1 \tag{۴.۳۱}$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات[12] کو **کروی ہارمونیات**[13] کہتے ہیں:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta \tag{۴.۳۲}$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہو گا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروی ہارمونیات عمودی ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi [Y_l^m(\theta,\phi)]^*[Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۳۳}$$

[12] معمول زنی مستقل کو سوال ۴.۵۴ میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علامتیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر $\epsilon$ (جس کی قیمت 1 یا $-1$ ہو گی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m(Y_l^m)^*$ ہو گا۔

[13] spherical harmonics

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta,\phi)$

| | |
|---|---|
| $Y_2^{\pm 2} = (\frac{15}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$ | $Y_0^0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/2}$ |
| $Y_3^0 = (\frac{7}{16\pi})^{1/2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$ | $Y_1^0 = (\frac{3}{4\pi})^{1/2}\cos\theta$ |
| $Y_3^{\pm 1} = \mp(\frac{21}{64\pi})^{1/2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\phi}$ | $Y_1^{\pm 1} = \mp(\frac{3}{8\pi})^{1/2}\sin\theta e^{\pm i\phi}$ |
| $Y_3^{\pm 2} = (\frac{105}{32\pi})^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$ | $Y_2^0 = (\frac{5}{16\pi})^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$ |
| $Y_3^{\pm 3} = \mp(\frac{35}{64\pi})^{1/2}\sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$ | $Y_2^{\pm 1} = \mp(\frac{15}{8\pi})^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$ |

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر $l$ کو **اسمتی کوانٹائی عدد**[14] جب کہ $m$ کو **مقناطیسی کوانٹائی عدد**[15] کہتے ہیں۔

سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۷، ۴.۲۸ اور ۴.۳۲ استعمال کرکے $Y_0^0$ اور $Y_2^1$ تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A\ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات $\theta$ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) ناقابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کرکے $Y_l^l(\theta,\phi)$ اور $Y_3^2(\theta,\phi)$ مرتب کریں۔ (آپ $P_3^2$ کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ $P_l^l$ آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے مرتب کرنا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ $l$ اور $m$ کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کرکے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{2l+1}\right)\delta_{ll'} \tag{۴.۳۴}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: تکمل بالحصص استعمال کریں۔)

[14] azimuthal quantum number
[15] magnetic quantum number

### ۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$، ایک دوسرے جیسا ہو گا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$، پر اثر انداز ہو گی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r) - E]R = l(l+1)R \tag{۴.۳۵}$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r) \equiv rR(r) \tag{۴.۳۶}$$

$R = u/r$، $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r = [r(\mathrm{d}u/\mathrm{d}r) - u]/r^2$، $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[r^2(\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)] = r\,\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu \tag{۴.۳۷}$$

اس کو **رداسی مساوات**[16] کہتے ہیں[17] جو شکل و صورت کے لحاظ سے یک بعدی شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں **موثر مخفیہ**[18] درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{۴.۳۸}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو **مرکز گریز جزو**[19] کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدا سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2\,\mathrm{d}r = 1 \tag{۴.۳۹}$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

**مثال ۴.۱:** درج ذیل لامتناہی کروی کنویں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \tag{۴.۴۰}$$

---

[16] radial equation

[17] یہاں $m$ کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل $m$ نہیں پایا جاتا ہے۔

[18] effective potential

[19] centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنویں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنویں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\Big]u \tag{۴.۴۱}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۴.۴۲}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مسلط کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = -k^2 u \implies u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \to 0$ کی صورت مسیں $[\cos(kr)]/r$ بے قابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب[20] کرنا ہو گا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہٰذا $ka = n\pi$ ہو گا جہاں $n$ عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۴.۴۳}$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنویں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہو گا۔ زاویائی جزو (جو $Y_0^0(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ ہے لہٰذا اس کی شمولیت یہاں ایک حقیر سا کام ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \tag{۴.۴۴}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین **کوانٹائی اعداد**[21] $n$ ، $l$ اور $m$ استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nml}(r,\theta,\phi)$؛ جبکہ توانائی، $E_{nl}$، صرف $n$ اور $l$ پر منحصر ہو گی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح $l$ کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \tag{۴.۴۵}$$

---

[20] در حقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ متناہی ہو: مساوات ۴.۳۱ مسیں $r^2$ کی بنا پر مبدا پر $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے قابل ہے۔

[21] quantum numbers

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$؛ چھوٹی $x$ کے لئے متقاربی روپ۔

| | |
|---|---|
| $n_0 = -\frac{\cos x}{x}$ | $j_0 = \frac{\sin x}{x}$ |
| $n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$ | $j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$ |
| $n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$ | $j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$ |
| $n_l \to -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$ | $j_l \to \frac{2^l l!}{(2l+1)!}x^l$ |

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ $l$ کا **کروی بیسل تفاعل**[۲۲] ہے اور $n_l(x)$ رتبہ $l$ کا **کروی نیومن تفاعل**[۲۳] ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\cos x}{x} \tag{۴.۴۶}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\\
j_1(x) &= (-x)\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x};\\
j_2(x) &= (-x)^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\sin x}{x} = x^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\\
&= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

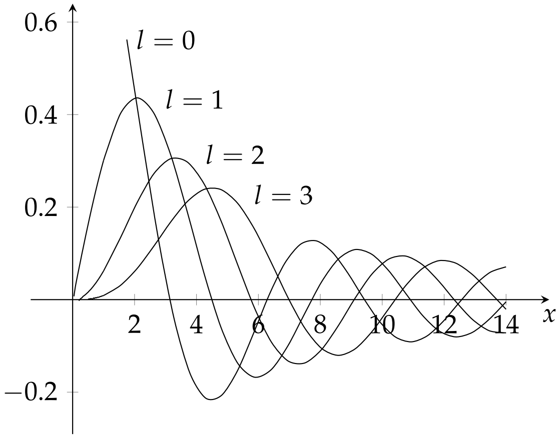
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر $x$ کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

[۲۲] spherical Bessel function
[۲۳] spherical Neumann function




شکل ۴.۲: ابتدائی چار کروی بیسل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات متناہی ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے قابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$R(r) = Aj_l(kr) \tag{۴.۴۷}$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ $k$ کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہو گا

$$j_l(ka) = 0 \tag{۴.۴۸}$$

یعنی $l$ رتبی کروی بیسل تفاعل کا $(ka)$ ایک صفر ہو گا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۴.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بدقسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط $n$ یا نقاط $n\pi$، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہو گا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{1}{a}\beta_{nl} \tag{۴.۴۹}$$

جہاں $\beta_{nl}$ رتبہ $l$ کروی بیسل تفاعل کا $n$ واں صفر ہو گا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{nl}^2. \tag{۴.۵۰}$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = A_{nl}j_l(\beta_{nl}r/a)Y_l^m(\theta,\phi). \tag{۴.۵۱}$$

جہاں مستقل $A_{n1}$ کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ $l$ کی ہر ایک قیمت کے لئے $m$ کی $(2l+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا توانائی کی ہر سطح $(2l+1)$ گنا انحطاطی ہو گی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $x \gg 1$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر بے قابو بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r)=0$ اور $l=1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروی کنویں کیلئے $l=1$ کی صورت میں اجازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ $n$ کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$ ہو گا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x)=0 \implies x=\tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد $x$ اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے کو متناہی کروی کنواں:

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & r\leq a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l=0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0a^2<\pi^2\hbar^2/8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

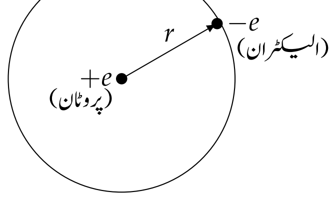
## ۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار $e$ کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ قانون کولمب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہو گی

$$V(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۴.۵۲}$$

لہٰذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u=Eu \tag{۴.۵۳}$$




شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے اجازتی توانائیاں $E$ تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہٰذا میں اس کو، ہارمونی مرتعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراو کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہے، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

### ۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے $e$ منفی ہونے کی وجہ سے $\kappa$ حقیقی ہو گا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۴.۵۴}$$

مساوات ۴.۵۳ کو $E$ سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2}\Big]u$$

حاصل ہو گا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa} \tag{۴.۵۵}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \Big[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\Big]u \tag{۴.۵۶}$$

اس کے بعد ہم حالات کی متقاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \to \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہو گا لہٰذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{۴.۵۷}$$

تاہم ($\rho \to \infty$ کی صورت میں) $e^{\rho}$ بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $B = 0$ لینا ہو گا۔ یوں $\rho$ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \tag{۴.۵۸}$$

اس کے برعکس $\rho \to 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہو گا؛[۲۴] لہٰذا تخمیناً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2}u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \to 0$ کی صورت میں) $\rho^{-l}$ بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا $D = 0$ ہو گا۔ یوں $\rho$ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \tag{۴.۵۹}$$

اگلے قدم پر متقاربی رویے کو چھیلنے کی خاطر نیا تفاعل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۶۰}$$

اس امید سے متعارف کرتے ہے کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہو گا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \rho^l e^{-\rho}\Big[(l+1-\rho)v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\Big]$$

[۲۴] یہ دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہو گی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علامتیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \rho^l e^{-\rho}\Big\{\Big[-2l-2+\rho+\frac{l(l+1)}{\rho}\Big]v + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2}\Big\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \tag{۴.۶۱}$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$، کو $\rho$ کا طاقتی تسلسل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \tag{۴.۶۲}$$

ہمیں عددی سر ($c_0$، $c_1$، $c_2$، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعہ میں "فرضی اشاریہ" $j$ کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپکو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ نیا مجموعہ $j=-1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جزو ضربی $(j+1)$ اس جزو کو ختم کرتا ہے لہٰذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j \\ -2\sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)]\sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j = 0$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(l+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(l+1)]c_j = 0$$

یا

$$c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j \tag{۴.۶۳}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ توالی عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم $c_0$ سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کا روپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے $c_1$ تعین کرتے ہے؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے $c_2$ تعین ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔[۲۵]

آئے $j$ کی بڑی قیمت (جو $\rho$ کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھے۔ یہاں کلیہ توالی درج ذیل کہتا ہے۔[۲۶]

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!} c_0 \tag{۴.۶۴}$$

لہٰذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \tag{۴.۶۵}$$

جو $\rho$ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے قابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نما وہی غیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

---

[۲۵] آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متقاربی رویہ کو کیوں (جزو ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جزو ضربی $\rho^{l+1}$ باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر $c_{l+1}$ ہو گا)؛ $\rho^{l+1}$ باہر نکالنے سے تسلسل کا پہلا جزو $\rho^0$ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس جزو ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے $c_{j+2}$، $c_{j+1}$ اور $c_j$ پر مشتمل تین اجزائی کلیہ توالی حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

[۲۶] آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $2(l+1) - \rho_0$ اور نسب نما میں $2l + 2$ رد کرنے کی طرح $j + 1$ میں $1$ کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جا سکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہو گا۔ آپ $1$ کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہو گا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، $j_{\text{بلند تر}}$، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلند تر}}+1)} = 0 \tag{۴.۶۶}$$

(یوں کلیہ توالی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$2(j_{\text{بلند تر}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

**صدر کوانٹم عدد**[۲۷]

$$n \equiv j_{\text{بلند تر}} + l + 1 \tag{۴.۶۷}$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\rho_0 = 2n \tag{۴.۶۸}$$

اب $E$ کو $\rho_0$ تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon^2\hbar^2\rho^2} \tag{۴.۶۹}$$

لہٰذا اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴.۷۰}$$

یہ مشہور زمانہ **کلیہ بوہر**[۲۸] ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شروڈنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔)

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \tag{۴.۷۱}$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10}\,\text{m} \tag{۴.۷۲}$$

---

[۲۷] principal quantum number
[۲۸] Bohr formula

**رداس بوہر**[۲۹] کہلاتا[۳۰] ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \tag{۴.۷۳}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تفاعلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد ( $n$ ، $l$ اور $m$ ) استعمال کرکے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۴.۷۴}$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۷۵}$$

ہو گا جبکہ $v(\rho)$ متغیر $\rho$ میں درجہ $n-l-1 = j_{\text{بلند تر}}$ کا کثیر رکنی ہو گا، جس کے عددی سر درج ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تفاعل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)}c_j \tag{۴.۷۶}$$

**زمینی حال**[۳۱] (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہو گا؛ طبعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$E_1 = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] = -13.6\,\text{eV} \tag{۴.۷۷}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی **بندشی توانائی**[۳۲] (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) $13.6\,\text{eV}$ ہے۔ مساوات ۴.۶۷ کے تحت $l = 0$ لہٰذا $m = 0$ ہو گا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi) \tag{۴.۷۸}$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہٰذا $v(\rho)$ ایک مستقل $(c_0)$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a}e^{-r/a} \tag{۴.۷۹}$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{|c_0|^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-2r/a}r^2\,\mathrm{d}r = |c_0|^2\frac{a}{4} = 1$$

[۲۹] Bohr radius

[۳۰] رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: $a_0$، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہٰذا میں اس کو صرف $a$ لکھوں گا۔

[۳۱] ground state

[۳۲] binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہو گا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہٰذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{۴.۸۰}$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6\,\text{eV}}{4} = -3.4\,\text{eV} \tag{۴.۸۱}$$

ہو گی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بند شی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہو گا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے یا $m$ کی قیمت $-1$ ، $0$ یا $+1$ ہو گی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہو گی۔ کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) $l = 0$ کے لئے $j = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہٰذا $v(\rho) = c_0(1-\rho)$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \tag{۴.۸۲}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد $l$ اور $n$ کے لئے پھیلاو عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہ توالی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \tag{۴.۸۳}$$

(ہر منفرد صورت میں $c_0$ معمول زنی سے تعین ہو گا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری $n$ کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) $l$ کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۴.۸۴}$$

جبکہ ہر $l$ کے لئے $m$ کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہو گی (مساوات ۴.۲۹)، لہٰذا $E_n$ سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہو گی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \tag{۴.۸۵}$$

کثیر رکنی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہو گی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \tag{۴.۸۶}$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

| |
|---|
| $L_0 = 1$ |
| $L_1 = -x + 1$ |
| $L_2 = x^2 - 4x + 2$ |
| $L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$ |
| $L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$ |
| $L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$ |
| $L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$ |

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگیغ کثیر رکنیاں، $L^p_{q-p}(x)$

| | |
|---|---|
| $L^2_0 = 2$ | $L^0_0 = 1$ |
| $L^2_1 = -6x + 18$ | $L^0_1 = -x + 1$ |
| $L^2_2 = 12x^2 - 96x + 144$ | $L^0_2 = x^2 - 4x + 2$ |
| $L^3_0 = 6$ | $L^1_0 = 1$ |
| $L^3_1 = -24x + 96$ | $L^1_1 = -2x + 4$ |
| $L^3_2 = 60x^2 - 600x + 1200$ | $L^1_2 = 3x^2 - 18x + 18$ |

جہاں

$$L^p_{q-p}(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^p L_q(x) \tag{۴.۸۷}$$

ایک **شریک لاگیغ کثیر رکنی**[۳۳] ہے جبکہ

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^q (e^{-x} x^q) \tag{۴.۸۸}$$

$q$ ویں **لاگیغ کثیر رکنی**[۳۴] ہے۔[۳۵] (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ

[۳۳] associated Laguerre polynomial

[۳۴] Laguerre polynomial

[۳۵] دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۴.۷: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاعلات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

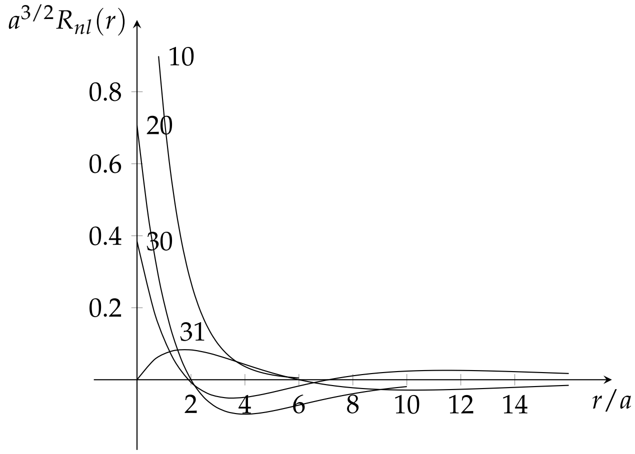
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$




شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تفاعل موج $R_{nl}(r)$ کی ترسیمات۔

ذیل ہیں۔

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\, e^{-r/na}\left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)]Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۴.۸۹}$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف $n$ تعین کرتا ہے۔ یہ کولمب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنویں میں توانائیاں $l$ پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$\int \psi_{nlm}^{*}\psi_{n'l'm'} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۹۰}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں $H$ کی منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا پر ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج $R_{30}$ ، $R_{31}$ اور $R_{32}$ حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے $R_{20}$ کو معمول پر لا کر $\psi_{200}$ تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے $R_{21}$ کو معمول پر لا کر $\psi_{211}$ ، $\psi_{210}$ اور $\psi_{21-1}$ تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگیغ کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n=5$ ، $l=2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n=5$ ، $l=2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا تکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2+y^2+z^2$ ہو گا، اور زمینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n=2$، $l=1$، $m=1$ کے لیے $\langle x^2\rangle$ تلاش کریں۔انتباہ: یہ حال $x$، $y$ اور $z$ کے لحاظ سے تشاکلی نہیں ہے۔یہاں $x=r\sin\theta\cos\phi$ استعمال کرنا ہو گا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں $r$ کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہو گی۔(اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہو گا کہ $r$ اور $r+\mathrm{d}r$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہو گا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n=2$، $l=1$، $m=1$ اور $n=2$، $l=1$، $m=-1$ کے درج ذیل خطی مجموعہ سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211}+\psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ تیار کریں۔اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت ی $\langle V\rangle$ تلاش کریں۔(کیا یہ $t$ کی تابع ہو گی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

### ۴.۲.۴ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال $\psi_{nlm}$ میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں **عبور**[36] کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقناطیسی نوریہ کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔[37] عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہٰذا عبور (جنہیں "کوانٹم چھلانگ" کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا پر ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (نوریہ) خارج ہو گی جس کی تونائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma=E_i-E_f=-13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^2}\right) \tag{۴.۹۱}$$

کے برابر ہو گا۔

اب **کلیہ پلانک**[38,39] کے تحت نوریہ کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہو گی:

$$E_\gamma=h\nu \tag{۴.۹۲}$$

---

[36] transition

[37] فطرتاً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

[38] Planck's formula

[39] نوریہ درحقیقت برقناطیسی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات قابل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر نوریہ کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ **طول موج** $\lambda = c/\nu$ ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R\Big(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\Big) \tag{۴.۹۳}$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}\Big)^2 = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \tag{۴.۹۴}$$

**رڈبرگ مستقل**[۴۰] کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا **کلیہ رڈبرگ**[۴۱] ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقلات کی صورت میں $R$ کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال $(n_f = 1)$ میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کار **لیمان تسلسل**[۴۲] کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال $(n_f = 2)$ میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**[۴۳] کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، **پاشن تسلسل**[۴۴] دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: **ہائیڈروجنی جوہر**[۴۵] $Z$ پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ **ہیلیم**[۴۶] میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ **لتھیم**[۴۷] میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$، بندشی توانائی $E_1(Z)$، رداس بوہر $a(Z)$، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقناطیسی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \to Ze^2$ ہوگا لہٰذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

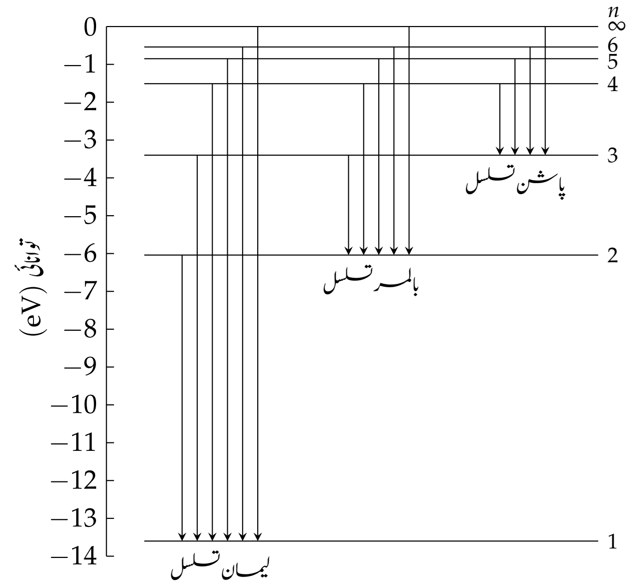
سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت $m$ جبکہ سورج کی کمیت $M$ لیں۔)

ب. اس نظام کا "رداس بوہر" $a_g$ کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

---

[۴۰] Rydberg constant
[۴۱] Rydberg formula
[۴۲] Lyman series
[۴۳] Balmer series
[۴۴] Paschen series
[۴۵] hydrogenic atom
[۴۶] Helium
[۴۷] Lithium




شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوط توانائیاں اور تحویلات۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس $r_0$ کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو $E_n$ کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد $n$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہوگا؟ جواب جاول میں دیں۔ خارج نوریہ (یا زیادہ ممکنہ طور پر **گریویٹان**[۴۸]) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

## ۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد $n$، $l$ اور $m$ کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد $(n)$ حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ $l$ اور $m$ مدار چی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

---

[۴۸] graviton

کلاسیکی طور پر (مبدا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{۴.۹۵}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{۴.۹۶}$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x$ ، $p_y \to -i\hbar\partial/\partial y$ ، $p_z \to -i\hbar\partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجازتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

### ۴.۳.۱ امتیازی اقدار

عاملین $L_x$ اور $L_y$ آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ در حقیقت درج ذیل ہو گا۔[۴۹]

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]\end{aligned} \tag{۴.۹۷}$$

باضابطہ مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف $x$ اور $p_x$ ، $y$ اور $p_y$ ، $z$ اور $p_z$ عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \tag{۴.۹۸}$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل $(x \to y, y \to z, z \to x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{۴.۹۹}$$

جو زاویائی معیار حرکت کے **بنیادی مقلبیت رشتے**[۵۰] ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ $L_x$ $L_y$ اور $L_z$ غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

[۴۹] کوانٹم میکانیات میں تمام عاملین قانون جزئیتی تقسیم: $AB + AC = (B + C)$ پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۱۷ پر حاشیہ ۳۴ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A + C]$ ہو گا۔
[۵۰] fundamental commutation relations

یا

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right| \tag{۴.۱۰۰}$$

ہو گا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو $L_x$ اور $L_y$ کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہو گا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{۴.۱۰۱}$$

عامل $L_x$ کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

(مقالب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہو گا۔) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $L_y$ اور $L_z$ کے ساتھ بھی $L^2$ مقلوب ہو گا

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \tag{۴.۱۰۲}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \tag{۴.۱۰۳}$$

اس طرح $\mathbf{L}$ کے ہر جزو کے ساتھ $L^2$ ہم آہنگ ہو گا اور ہم $L^2$ کا (مثلاً) $L_z$ کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f \tag{۴.۱۰۴}$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$L\pm \equiv L_x \pm iL_y \tag{۴.۱۰۵}$$

$L_z$ کے ساتھ مقلب درج ذیل ہو گا

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہٰذا

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{۴.۱۰۶}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہو گا۔

$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{۴.۱۰۷}$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر $L^2$ اور $L_z$ کا امتیازی تفاعل $f$ ہو تب $L_\pm(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہو گا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۸}$$

لہٰذا اسی امتیازی قدر $\lambda$ کے لیے $L_\pm f$ بھی $L^2$ کا امتیازی تفاعل ہو گا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_\pm f) &= (L_z L_\pm - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \end{aligned} \tag{۴.۱۰۹}$$

لہٰذا نئے امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے $L_z$ کا $L_\pm f$ امتیازی تفاعل ہو گا۔ ہم $L_+$ کو **عامل رفعت**[۵۱] کہتے ہیں چونکہ یہ $L_z$ کے امتیازی قدر کو $\hbar$ بڑھاتا ہے جبکہ $L_-$ **عامل تقلیل**[۵۲] کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو $\hbar$ کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں $\lambda$ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے، جس کا ہر پایہ قریبی پایہ سے $L_z$ کی امتیازی قدر کے لحاظ سے $\hbar$ کی ایک اکائی فاصلہ پر ہو گا (شکل ۴.۶)۔ سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفعت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچیں گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہو گا جو ایک ناممکن صورت[۵۳] ہے۔ لازماً سیڑھی کا ایسا "بالاترین پایہ" $f_t$، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن[۵۴] کرے گا۔

$$L_+ f_t = 0 \tag{۴.۱۱۰}$$

فرض کریں اس بالاترین پایہ پر $L_z$ کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو (حرف "$l$" کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

$$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \tag{۴.۱۱۱}$$

اب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} L_\pm L_\mp &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z) \end{aligned}$$

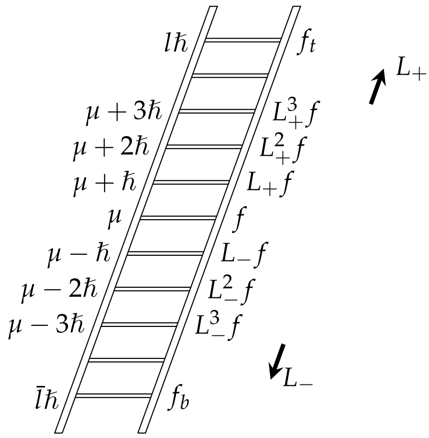
---

[۵۱] raising operator

[۵۲] lowering operator

[۵۳] باضابطہ طور پر $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ ہو گا، لیکن $\langle L_x^2 \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle = \langle L_x f | L_x f \rangle \geq 0$ ہے (اور $L_y$ کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا) لہٰذا $\lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہو گا۔

[۵۴] درحقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ $L_+ f_t$ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے؛ اس کا معیار صفر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔ سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔




شکل ۴.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی "سیڑھی"۔

یا دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہو گا۔

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z \tag{۴.۱۱۲}$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \tag{۴.۱۱۳}$$

یہ ہمیں $L_z$ کی امتیازی قدر کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں $L^2$ کی امتیازی قدر دیتی ہے۔

ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ $f_b$ بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

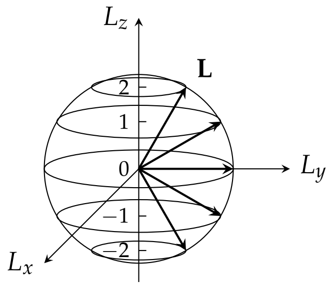
$$L_- f_b = 0 \tag{۴.۱۱۴}$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر $L_z$ کا امتیازی قدر $\hbar \bar{l}$ ہو:

$$L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \tag{۴.۱۱۵}$$

مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) f_b$$




شکل ۷.۴: زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \tag{۴.۱۱۶}$$

مساوات ۴.۱۱۳ اور مساوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $l(l+1) = \bar{l}(\bar{l}-1)$ ہو گا لہٰذا یا $\bar{l} = l + 1$ ہو گا (جو بے معنی ہے، چونکہ نچلا ترین پایہ، بالاترین پایہ سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{l} = -l \tag{۴.۱۱۷}$$

ظاہر ہے کہ $L_z$ کے امتیازی اقدار $m\hbar$ ہونگے، جہاں $m$ (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت $N$ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-l$ تا $+l$ ہو گی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ یعنی $l = N/2$ ہو گا، لہٰذا $l$ لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہو گا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد $l$ اور $m$ کرتے ہیں:

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \tag{۴.۱۱۸}$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \tag{۴.۱۱۹}$$

$l$ کی کسی ایک قیمت کے لیے $m$ کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی سیڑھی کے $2l + 1$ پائے ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیر کے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں $\hbar$ کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l+1)}$ ہو گی جو (یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے) جبکہ ان کے $z$ اجزاء $m$ کی اجازتی قیمتیں ($-2$، $-1$، $0$، $1$، $2$) ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کا رداس)، $z$ جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑا ہے! (ماسوائے $l = 0$ کی "حقیر" صورت میں، عموماً $\sqrt{l(l+1)} > l$ ہو گا۔) آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار

حرکت کو سیدھا $z$ رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ "کیا میں $z$ محدد کو زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟" اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقاً $z$ محدد کو $\mathbf{L}$ کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ $\mathbf{L}$ کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعیین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت تعیین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $L_z$ کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب $L_x$ اور $L_y$ ہم نہیں جان سکتے ہیں شکل ۷.۴ میں سمتیات گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ $L_x$ اور $L_y$ غیر تعیین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، $L^2$ اور $L_z$ کے امتیازی اقدار تعیین کیے۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہو گا۔ میں کانٹے کی بات $f_l^m = Y_l^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ $L^2$ اور $L_z$ کے امتیازی تفاعلات وہی کروی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حروف $l$ اور $m$ استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی اقدار کے ہرمشی عاملین ($L^2$ اور $L_z$) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل $m$ کی قیمت ایک $(1)$ سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_\pm f_l^m = (A_l^m) f_l^{m\pm 1} \tag{۴.۱۲۰}$$

جہاں $A_l^m$ کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر $A_l^m$ کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ $L_\pm$ اور $L_\mp$ ایک دوسرے کے ہرمشی جوڑی دار ہیں (چونکہ $L_x$ اور $L_y$ قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہرمشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)} \tag{۴.۱۲۱}$$

دیکھیے گا کہ سیڑھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہو گا (جب آپ $f_l^l$ پر $L_+$ یا $f_l^{-l}$ پر $L_-$ لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

ا. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات ۴.۱۰ سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل مقالب حاصل کریں۔

$$\begin{gathered}[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0\end{gathered} \tag{۴.۱۲۲}$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. مقالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ہیں) تلاش کریں۔

د. اگر $V$ صرف $r$ کا تابع ہو تب دکھائیں کے ہیملٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل $\mathbf{L}$ کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں $H$ ، $L^2$ اور $L_z$ باہمی ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفیہ $V(\boldsymbol{r})$ میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت $\mathbf{L}$ کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathbf{L}\rangle = \langle \mathbf{N}\rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہر نفسٹ کا مماثل گھومتا تعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشاکلی مخفیہ کے لیے $\mathrm{d}\langle \mathbf{L}\rangle\, \mathrm{d}t = 0$ ہوگا۔ (یہ **زاویائی معیار حرکت کی بقا**[۵۵] کا کوانٹم میکانی روپ ہے۔)

### ۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے $L_x$ ، $L_y$ اور $L_z$ کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا اب $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla})$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{a}_{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{۴.۱۲۳}$$

جہاں $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\Big[r(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\frac{\partial}{\partial r} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\theta})\frac{\partial}{\partial \theta} + (\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big]$$

اب $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) = 0$ ، $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\theta}) = \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_{\phi}) = -\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\Big(\boldsymbol{a}_{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \boldsymbol{a}_{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big) \tag{۴.۱۲۴}$$

---

[۵۵] conservation of angular momentum

اکائی سمتیات $a_\theta$ اور $a_\phi$ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$a_\theta = (\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} - (\sin\theta)\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۲۵}$$

$$a_\phi = -(\sin\phi)\boldsymbol{i} + (\cos\phi)\boldsymbol{j} \tag{۴.۱۲۶}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}[(-\sin\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\phi\,\boldsymbol{j})\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\phi}]$$

ہو گا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۷}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\Big(+\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۸}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{۴.۱۲۹}$$

ہمیں عامل رفت اور عامل تقلیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i}\Big[(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

تاہم $\cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$ ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۰}$$

بالخصوص (سوال ۴.۲۱-ا) درج ذیل

$$L_+L_- = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۱}$$

لہٰذا (سوال ۴.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$L^2 = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big] \tag{۴.۱۳۲}$$

ہم اب $f_l^m(\theta,\phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ $L^2$ کا امتیازی تفاعل ہے، جس کا امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے۔

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]f_l^m = \hbar^2 l(l+1)f_l^m$$

یہ ٹھیک "زاویائی مساوات" (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ $L_z$ کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قدر $m\hbar$ ہو گا:

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو اُمّتی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروی ہارمونیات $Y_l^m(\theta,\phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $L^2$ اور $L_z$ کے امتیازی تفاعلات کروی ہارمونیات ہونگے. حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقلوبی عاملین $H$ $L^2$ اور $L_z$ کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \tag{۴.۱۳۳}$$

ہم مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات ۴.۱۴ کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2}\Big[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + L^2\Big]\psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورت حال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح $l$ قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہوئیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، $l$ کی (اور لہٰذا $m$ کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: پرکھی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہٰذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_l^l$ کیا ہو گا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جزو-ا کا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $L_z Y_l^l = \hbar l Y_l^l$ ہو گا، $Y_l^l(\theta,\phi)$ کی قیمت معمول زنی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلاواسطہ تکمل کے ذریعے معمول زنی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجے کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۳ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{15/8\pi}\,\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

عامل رفعت کا $Y_2^2(\theta,\phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی $a$ ہے، کے دونوں سروں پر کمیت $m$ کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

ا. دکھائیں کہ اس بے لچک پھرکی[56] کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی $n$ وی توانائی سطح کی انحطاطیت کیا ہو گی؟

## ۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے **مداری**[57] $(\mathbf{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم **چکر**[58] $(\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega})$ کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا پر زمین کا مدارچی زاویائی معیار حرکت ہو گا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنا پر اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہو گا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ فرق محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی "مداری" زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ $\mathbf{S}$ کے برابر ہو گا۔ کوانٹم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی فرق پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنا پر مدارچی زاویائی معیار حرکت (جسے کروی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو مقام کے متغیرات $r$ $\theta$ اور $\phi$ سے بیان نہیں کیا جا سکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہٰذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطی ذرا ہے، لہٰذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدارچی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہو گا کہ بنیادی ذرات **غیر خلقی**[59] زاویائی معیار حرکت $\mathbf{L}$ کے ساتھ ساتھ **خلقی**[60] زاویائی معیار حرکت $\mathbf{S}$ بھی رکھتے ہیں۔

---

[56] rigid rotor
[57] orbital
[58] spin
[59] extrinsic
[60] intrinsic

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبیت رشتوں[۶۱] سے شروع کرتے ہیں۔

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \tag{۴.۱۳۴}$$

یوں (پہلے کی طرح) $S^2$ اور $S_z$ کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات[۶۲]

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \tag{۴.۱۳۵}$$

اور

$$S_\pm|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\,|s(m\pm 1)\rangle \tag{۴.۱۳۶}$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_\pm \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات ($\theta$ اور $\phi$ کے تفاعل نہیں ہیں) لہٰذا یہ کروی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنا پر ہم $s$ اور $m$ کی نصف عدد صحیح قیمتوں

(۴.۱۳۷)

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے $s$ کی ایک مخصوص اور ناقابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) **چکر**[۶۳] کہتے ہیں: $\pi$ میزان کا چکر $0$ ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$؛ پروٹان کا چکر $1$؛ ڈیلٹا کا چکر $3/2$؛ گریویٹان کا چکر $2$؛ وغیرہ وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران کا) مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l$ کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حامل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہو گا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا $s$ اٹل ہو گا، جس کی بنا پر نظریہ چکر نسبتاً سادہ ہے۔[۶۴]

---

[۶۱] ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ مداری زاویائی معیار حرکت کے مماثل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ نفیس انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماو کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقلوبی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکری، مداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ مداری شامل ہوں گے۔

[۶۲] چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے "سمتاویہ" علامتیت استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے $Y_l^m$ کو $|lm\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہٰذا میں $S_z$ کے امتیازی قدر کے لئے $m$ استعمال کروں گا، جیسا میں نے $L_z$ کے لئے بھی کیا (بعض مصنفین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں $m_l$ اور $m_s$ لکھتے ہیں)۔

[۶۳] spin

[۶۴] یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے $1/2$ چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ پیچیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی ہلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُعدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ $2 \times 2$ قالب اور $2$ رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مصنفین کوانٹم میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی سادگی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

سوال۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{۴.۱۳۸}$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنشٹائن کلیہ $E = mc^2$ سے **کلاسیکی الیکٹران رداس**[۶۵]، $r_c$، حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب "خط استوا" پر کسی نقطے کی رفتار ($\mathrm{m\,s^{-1}}$ میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (در حقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس $r_c$ سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید غلط قرار دیتا ہے۔)

## چکر 1/2

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ **کوارک**[۶۶] اور تمام **لیپٹان**[۶۷] کیلئے $s = \frac{1}{2}$ ہو گا لہٰذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف "دو" امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر $\uparrow$) ہے جو **ہم میدان چکر**[۶۸] پکارا جاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو **مخالف میدان چکر**[۶۹] ($\downarrow$) کہلاتا ہے۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو رکنی قالب قطار (یا **چکر کار**[۷۰]) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \tag{۴.۱۳۹}$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۰}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۱}$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[۶۵] classical electron radius
[۶۶] quarks
[۶۷] leptons
[۶۸] spin up
[۶۹] spin down
[۷۰] spinor

ساتھ ہی، عاملین چکر $2 \times 2$ قالب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر $\chi_+$ اور $\chi_-$ پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2\,\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2\,\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \tag{۴.۱۴۲}$$

ہم $\mathbf{S}^2$ کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا قالب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہو گا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۳}$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z\,\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\,\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{۴.۱۴۴}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۵}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$\mathbf{S}_+\,\chi_- = \hbar\chi_+, \quad \mathbf{S}_-\,\chi_+ = \hbar\chi_-, \quad \mathbf{S}_+\,\chi_+ = \mathbf{S}_-\,\chi_- = 0,$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۶}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$ ہے لہٰذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۷}$$

چونکہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں زیادہ صاف روپ $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۸}$$

یہ **پالی قالب چکر**[۴۱] ہیں۔ دھیان رکھیں کہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ اور $\mathbf{S}^2$ تمام ہرمشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس $\mathbf{S}_+$ اور $\mathbf{S}_-$ غیر ہرمشی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔

یقیناً $\mathbf{S}_z$ کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۴۹}$$

عمومی حال $\chi$ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی $S_z$ کی پیمائش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $+\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا (یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہو گا)۔[۴۲]

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{۴.۱۵۰}$$

تاہم اس کی بجائے آپ $S_x$ کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شماریاتی مفہوم کے تحت ہمیں $\mathbf{S}_x$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ $S_x$ کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو $S_z$ کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

---

[۴۱] Pauli spin matrices

[۴۲] لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہتے ہیں کہ اگر $S_z$ کی پیمائش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہو گا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۴۲ دیکھیں۔)

لہٰذا $\beta = \pm\alpha$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{S}_x$ کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(+\frac{\hbar}{2} \text{امتیازی قدر}\right); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(-\frac{\hbar}{2} \text{امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۵۱}$$

بطور ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات سے فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار $\chi$ (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\chi = \Big(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_+^{(x)} + \Big(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\Big)\chi_-^{(x)} \tag{۴.۱۵۲}$$

اگر آپ $S_x$ کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a + b|^2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a-b|^2$ ہو گا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ $S_z$ اور $S_x$ کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

**حل:** یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہٰذا $S_z$ کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہو گا۔ اسی طرح $S_x$ کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6 = (1/2)\Big|(3+i)/\sqrt{6}\Big|^2$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $1/6 = (1/2)\Big|(-1+i)/\sqrt{6}\Big|^2$ ہو گا۔ اتفاقاً $S_x$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6}\Big(+\frac{\hbar}{2}\Big) + \frac{1}{6}\Big(-\frac{\hbar}{2}\Big) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلاواسطہ درج ذیل طریقے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \, \mathbf{S}_x \, \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک فرضی پیمائشی تجربے سے گزارتا ہوں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ فرض کریں ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال $\psi_+$ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، "اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا $z$ جزو کیا ہے؟"، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہے؛ چونکہ $S_z$ کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، "اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا $x$ جزو کیا ہوگا؟"، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ $S_x$ کی پیمائش سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ گر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) "حقیقت پسند" ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: "کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟" نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو $\psi_+$ ہے۔ "تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا $x$ جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟" اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص $x$ جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر $S_x$ اور $S_z$ کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا $x$ جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ فرض کریں وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھتا ہے) "اس ذرے کی $S_x$ قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔" جی آپ درست فرما رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔ "ظاہر ہے، آپ بال کی کھال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بنا؟ میں اب $S_x$ اور $S_z$ دونوں کو جانتا ہوں۔" جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے $S_x$ کی قیمت جانتے ہیں جبکہ $S_z$ کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔ "لیکن $S_x$ کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون خراب نہ ہو۔" اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ $S_z$ کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: "اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک مقام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا $x$ جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے"، ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹم میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تقریباً ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب $1/2$ چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹم میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

ا. تصدیق کیجیے گا کہ چکری قالب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

ب. دکھائیں کہ پالی چکری قالب (مساوات ۴.۱۴۸) قاعدہ ضرب

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \tag{۴.۱۵۳}$$

کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ $x$ ، $y$ اور $z$ کو ظاہر کرتے ہیں، اور $\epsilon_{jkl}$ علامت **لوی و چویتا**[۴۳] ہے، جس کی قیمت $jkl = 123$ یا 231 یا 312 کی صورت میں $+1$ جبکہ $jkl = 132$ یا 213 یا 321 کی صورت میں $-1$ اور دیگر صورت 0 ہو گی۔

سوال ۴.۲۷: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

ا. معمول زنی مستقل $A$ تعین کریں۔

ب. $S_x$ ، $S_y$ ، اور $S_z$ کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. "عدم یقینیت" $\sigma_{S_x}$ ، $\sigma_{S_y}$ اور $\sigma_{S_z}$ تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں $\sigma$ سے مراد معیار انحراف ہے نا کہ پالی قالب!)

د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکردار ترتیبی مرتب اجتماعات جہاں $L$ کی جگہ $S$ ہو گا) کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چکر کار $\chi$ (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے $\langle S_x\rangle$ ، $\langle S_y\rangle$ ، $\langle S_z\rangle$ ، $\langle S_x^2\rangle$ ، $\langle S_y^2\rangle$ ، اور $\langle S_z^2\rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ $\langle S^2\rangle = \langle S_x^2\rangle + \langle S_y^2\rangle + \langle S_z^2\rangle$ ہے۔

سوال ۴.۲۹:

ا. $S_y$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار تلاش کریں۔

ب. عمومی حال $\chi$ (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے $S_y$ کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہو گا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ $a$ اور $b$ غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!

ج. $S_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

[۴۳] Levi-Civita

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ $\boldsymbol{a}_r$ کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا قالب $\mathbf{S}_r$ تیار کریں۔ کروی محدد استعمال کریں جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}_r = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۵۴}$$

قالب $\mathbf{S}_r$ کے امتیازی اقدار اور (معمول شدہ) امتیازی چکر کار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \tag{۴.۱۵۵}$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری جزو ضرب، مثلاً $e^{i\phi}$، سے ضرب دے سکتے ہو لہٰذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چکر ایک $(1)$ ہے کے لیے چکری قالب ($\mathbf{S}_x$، $\mathbf{S}_y$ اور $\mathbf{S}_z$) تیار کریں۔ اشارہ: $S_z$ کے کتنے امتیازی حالات ہوں گے؟ ہر (ان) حال پر $S_z$، $S_+$ اور $S_-$ کا عمل تعین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

### ۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چکر کاٹتا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا **مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر**[۴۴] $\boldsymbol{\mu}$، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت $\mathbf{S}$ کا راست متناسب ہو گا:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\,\mathbf{S} \tag{۴.۱۵۶}$$

جہاں تناسبی مستقل $\gamma$ **مسکن مقناطیسی نسبت**[۴۵] کہلاتا[۴۶] ہے۔ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت مروڑ $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت مروڑ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{۴.۱۵۷}$$

---

[۴۴] magnetic dipole moment

[۴۵] gyromagnetic ratio

[۴۶] کلاسیکی طور پر ایک جسم، جس میں بار $q$ اور کمیت $m$ کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت $q/2m$ ہو گی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریہ سے ممکن ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کلاسیکی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی $(\gamma = -e/m)$ ہے۔

لہٰذا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں، ایک مقام پر ساکن[77]، باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی۔

$$H = -\gamma \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{S} \tag{۴.۱۵۸}$$

مثال ۴.۳: **لارمر استقبالی حرکت:** فرض کریں $z$ رخ یکساں مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{k} \tag{۴.۱۵۹}$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ قالبی روپ میں ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہو گی۔

$$\mathbf{H} = -\gamma B_0 \, \mathbf{S}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۰}$$

ہیملٹنی $\mathbf{H}$ کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو $\mathbf{S}_z$ کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \tag{۴.۱۶۱}$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہو گی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیملٹنی غیر تابع وقت ہے لہٰذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{H} \chi \tag{۴.۱۶۲}$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} a e^{i\gamma B_0 t/2} \\ b e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات $a$ اور $b$ کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

---

[77] اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہو گی، اور مزید اس کو قوت لورنز $(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ کا بھی سامنا ہو گا، جس کو مخفی توانائی تفاعل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے، لہٰذا اس کو (اب تک متعارف) شروڈنگر مساوات میں نسب نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (سوال ۴.۵۹)، تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن دیگر صورت ساکن ہے۔

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ہو گا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \qquad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں[78] جہاں $\alpha$ ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۳}$$

آئیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle =& \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_x \, \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ & \times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ =& \frac{\hbar}{2} \sin\alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \tag{۴.۱۶۴}$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_y \, \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin\alpha \sin(\gamma B_0 t) \tag{۴.۱۶۵}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger \, \mathbf{S}_z \, \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos\alpha \tag{۴.۱۶۶}$$

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۸) محور $z$ کے ساتھ $\langle \mathbf{S} \rangle$ مستقل زاویہ $\alpha$ پر رہتے ہوئے محور کے گرد **لارمر تعدد**[79]

$$\omega = \gamma B_0 \tag{۴.۱۶۷}$$

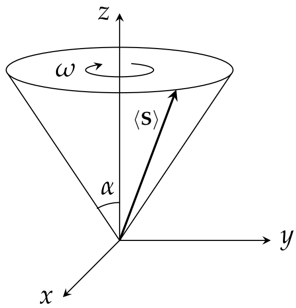
سے استقبالی حرکت[80] کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہرنفسٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle \mathbf{S} \rangle$ ارتقا پائے گا۔ بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سیاق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

---

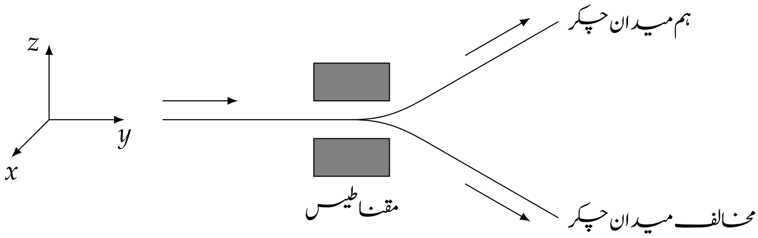
[78] یہاں $a$ اور $b$ کو حقیقی فرض کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو $t$ کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔

[79] Larmor frequency

[80] کلاسیکی صورت میں صرف توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقناطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔




شکل ۴.۸: یکساں مقناطیسی میدان میں $\langle \mathbf{S} \rangle$ کی استقبالی حرکت۔




شکل ۴.۹: شٹرن وگرلاخ آلہ۔

مثال ۴.۴: **تجربہ شٹرن و گرلاخ:**[81] ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت مروڑ بلکہ قوت:[82]

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۶۸}$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقہ سے علیحدہ کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تعدیلی[83] جوہروں کی شعاع $y$ رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان:

$$\boldsymbol{B}(x, y, z) = -\alpha x \boldsymbol{i} + (B_0 + \alpha z)\boldsymbol{k} \tag{۴.۱۶۹}$$

کے خطہ سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹)، جہاں $B_0$ ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل $\alpha$ میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف $z$ جزو سے غرض ہے، لیکن بد قسمتی

---

[81] Stern–Gerlach experiment

[82] توانائی (مساوات ۴.۱۵۷) کی منفی ڈھلوان کے برابر قوت $\boldsymbol{F}$ ہو گی۔

[83] ہم تعدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت لورنز کی بنا پر شعاع کے جھکنے سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تا کہ ہم مقامی موجی اکٹھ مرتب کر کے حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عملاً، شٹرن و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہو گا۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقناطیسی قانون $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں $x$ جزو بھی پایا جائے گا۔) ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{F} = \gamma\alpha(-S_x\boldsymbol{i} + S_z\boldsymbol{k})$$

تاہم $B_0$ کے گرد لارمر استقبالی حرکت کی بنا، $S_x$ تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اوسط قیمت دیگا، لہٰذا $z$ رخ خالص قوت درج ذیل ہو گی

$$F_z = \gamma\alpha S_z \tag{۴.۱۷۰}$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے $z$ جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ $S_z$ کوانٹاشدہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ $z$ محور پر شعاع کی لپائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s+1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹازنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مدارچی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہٰذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہو گا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی۔)

اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل خالصتاً کلاسیکی تھا جبکہ کوانٹم میکانیات میں "قوت" کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہٰذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوکٹ کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوکٹ میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت $T$ (جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{۴.۱۷۱}$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں $\boldsymbol{B}$ کے $x$ جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \qquad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} \qquad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت)

$$E_\pm = \mp\gamma(B_0 + \alpha z)\frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۲}$$

ہو گا لہٰذا ( $t \geq T$ کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$\chi(t) = \left(ae^{i\gamma TB_0/2}\chi_+\right)e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(be^{-i\gamma TB_0/2}\chi_-\right)e^{-i(\alpha\gamma T/2)z} \tag{۴.۱۷۳}$$

ان دونوں اجزاء کا اب $z$ رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مساوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہو گا

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۴}$$

اور یہ مثبت $z$ رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان جزو کا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی $z$ رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہو گی۔ (چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہٰذا مساوات ۴.۱۷۴ پہلے حاصل کردہ نتیجہ (مساوات ۴.۱۷۰) کے مطابق ہے۔)

کوانٹم میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گرلاخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جا سکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر تقطیب شدہ شعاع کو شٹرن و گرلاخ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا $z$ جزو جاننا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گرلاخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

ا. وقت $t$ پر چکری زاویائی معیار حرکت کی $x$ رخ جزو کا پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

ب. $y$ رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہو گا؟

ج. $z$ رخ اسی سوال کا جواب کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \cos(\omega t)\,\boldsymbol{k}$$

جہاں $B_0$ اور $\omega$ مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

ا. اس نظام کا ہیملٹنی قالب تیار کریں۔

ب. محور $x$ کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹران ہم میدان حال (یعنی $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے، لہٰذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلاواسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج. $S_x$ کی پیمائش سے $\hbar/2$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟ جواب:

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$

د. $S_x$ کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم درکار میدان $(B_0)$ کتنا ہو گا؟

### ۴.۴.۴ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال[۸۴] میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہٰذا کل چار ممکنات ہوں گی:[۸۵]

$$\uparrow\uparrow,\quad \uparrow\downarrow,\quad \downarrow\uparrow,\quad \downarrow\downarrow \tag{۴.۱۷۵}$$

جہاں پہلا تیر کا نشان (یعنی بایاں تیر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہو گا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)} \tag{۴.۱۷۶}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک، $S_z$ کا امتیازی حال ہو گا؛ ان کے $z$ اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقہ سے جمع ہوتے ہیں:

$$\begin{aligned}S_z\chi_1\chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)})\chi_1\chi_2 = (S_z^{(1)}\chi_1)\chi_2 + \chi_1(S_z^{(2)}\chi_2)\\ &= (\hbar m_1\chi_1)\chi_2 + \chi_1(\hbar m_2\chi_2) = \hbar(m_1+m_2)\chi_1\chi_2\end{aligned}$$

---

[۸۴] میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ نا تو مدارچی زاویائی معیار حرکت ہو اور نا ہی ہمیں اس کے بارے میں فکر مند ہونے کی ضرورت ہو۔

[۸۵] یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہو گا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہو گا۔

دیتے ہیں۔ یاد رہے $\mathbf{S}^{(1)}$ صرف $\chi_1$ پر عمل کرتا ہے اور $\mathbf{S}^{(2)}$ صرف $\chi 2$ پر عمل کرتا ہے۔ یہ علامتیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد $m$ یہاں $m_1 + m_2$ ہو گا:

$$
\begin{aligned}
\uparrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\\
\uparrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\\
\downarrow\uparrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0\\
\downarrow\downarrow: &\quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1
\end{aligned}
$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے: $m$ کو چاہیے کہ $-s$ تا $+s$ عدد صحیح قدموں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ $s = 1$ ہے لیکن یہاں ایک "اضافی" حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ لاگو کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)}\uparrow)\uparrow + \uparrow(S_-^{(2)}\uparrow)\\
&= (\hbar\downarrow)\uparrow + \uparrow(\hbar\downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات ( $|sm\rangle$ علامتی روپ میں) درج ذیل ہوں گے۔

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
|11\rangle & =\uparrow\uparrow\\
|10\rangle & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\\
|1-1\rangle & =\downarrow\downarrow
\end{array}
\right\} \quad s = 1 \; (\text{سہ تا}) \tag{۴.۱۷۷}
$$

(تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-ا دیکھیں۔) اسی بنا پر اسے سہ تا[86] ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو $s = 0$ کا حاصل ہو گا۔

$$
\{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \qquad s = 0 \; (\text{یک تا}) \tag{۴.۱۷۸}
$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے صفر حاصل ہو گا (سوال ۴.۳۴-ب دیکھیں۔)

یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک $(1)$ یا صفر $(0)$ ہو گا، جو اس پر منحصر ہو گا کہ آیا وہ سہ تا یا یک تا تنظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہو گا کہ سہ تا حالات، $S^2$ کے امتیازی

[86] triplet

سمتیات ہیں جن کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہے، اور یک تا حالات، $S^2$ کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قدر صفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\,\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} \tag{۴.۱۷۹}$$

مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}(\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)}\uparrow)(S_x^{(2)}\downarrow) + (S_y^{(1)}\uparrow)(S_y^{(2)}\downarrow) + (S_z^{(1)}\uparrow)(S_z^{(2)}\downarrow)\\
&= \Big(\frac{\hbar}{2}\downarrow\Big)\Big(\frac{\hbar}{2}\uparrow\Big) + \Big(\frac{i\hbar}{2}\downarrow\Big)\Big(\frac{-i\hbar}{2}\uparrow\Big) + \Big(\frac{\hbar}{2}\uparrow\Big)\Big(\frac{-\hbar}{2}\downarrow\Big)\\
&= \frac{\hbar^2}{4}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow)
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}(2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}\,|10\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}|10\rangle \tag{۴.۱۸۰}$$

اور

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}\,|00\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle \tag{۴.۱۸۱}$$

ہوں گے۔

مساوات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور مساوات ۴.۱۴۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$S^2|10\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\Big)|10\rangle = 2\hbar^2|10\rangle \tag{۴.۱۸۲}$$

ہے لہٰذا $|10\rangle$ یقیناً $S^2$ کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہو گا؛ اور

$$S^2|00\rangle = \Big(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\Big)|00\rangle = 0 \tag{۴.۱۸۳}$$

ہے لہٰذا $|00\rangle$ یقیناً $S^2$ کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر $0$ ہو گا۔ (میں آپ کے لئے سوال ۴.۳۴-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہو گی کہ $|11\rangle$ اور $|1\quad-\quad1\rangle$ موزوں امتیازی قدر کے، $S^2$ کے امتیازی تفاعلات ہیں۔)

ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر $1$ چکر اور $0$ چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ $s_1$ چکر اور $s_2$ چکر کو ملائیں تب کل چکریں $s$ کیا حاصل ہوں گے؟[87] اس کا جواب[88] ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_2 > s_1$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک؛ اور $s_1 > s_2$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک، نیچے آتے ہوئے ہر چکر:

$$s = (s_1 + s_2),\ (s_1 + s_2 - 1),\ (s_1 + s_2 - 2),\ \ldots,\ |s_1 - s_2| \tag{۴.۱۸۴}$$

حاصل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، زیادہ سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہو گا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صف بند ہوں، اور کم سے کم اس صورت ہو گا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ $2$ چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو $7/2$، $5/2$، $3/2$، یا $1/2$ کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تشکیل پر منحصر ہو گا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال $\psi_{nlm}$ کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا خالص زاویائی معیار حرکت (چکر جمع مدارچی) $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ ہو گا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l + 1$، $l$ یا $l - 1$ ہو گا (جہاں $l$ کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہو گا کہ آیا کہ الیکٹران خود $l + 1/2$ تشکیل یا $l - 1/2$ تشکیل میں ہے)۔

(چونکہ $z$ اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہٰذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہٰذا) مجموعی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر $s$ ہو اور $z$ جزو $m$ ہو، مرکب حالات $|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle \tag{۴.۱۸۵}$$

ہو گا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامتیت $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \uparrow$، $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle = \downarrow$ استعمال کیا ہے)۔ مستقلات $C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}$ کو **کلیبش وگورڈن عددی سر**[89] کہتے ہیں۔ جدول ۴.۸ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر $2 \times 1$ جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1 -1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2 -1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈبہ میں ($2$ چکر اور $1$ چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر $3$، اور $z$ جزو $0$ ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش ($1/5$ احتمال کے ساتھ) $\hbar$ یا ($3/5$ احتمال کے ساتھ) $0$ یا ($1/5$ احتمال کے ساتھ) $-\hbar$ قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ $1$ ہے۔ (کلیبش وگورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے مربعوں کا مجموعہ $1$ ہو گا۔)

---

[87] میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یا دونوں) مدارچی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم حرف $l$ استعمال کرتے)۔

[88] ثبوت کے لئے آپ کو اعلیٰ نصاب دیکھنا ہو گا۔

[89] Clebsch-Gordon coefficients

ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle = \sum_s C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}|sm\rangle \tag{۴.۱۸۶}$$

بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $3/2 \times 1$ جدول میں سایہ دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|10\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{5}}|\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{15}}|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور $1$ چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لئے $m_2 = 0$ ہے ($m$ لازماً $1/2$ ہوگا) اور آپ کل چکر $s$ کی پیمائش کریں تب آپ ($3/5$ احتمال کے ساتھ) $5/2$ یا ($1/15$ احتمال کے ساتھ) $3/2$ یا ($1/3$ احتمال کے ساتھ) $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ $1$ ہوگا (کلیبش و گورڈن جدول میں ہر صف کے مربع کا مجموعہ $1$ ہوگا)۔

یہاں آپ کا کوئی قصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیبش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ **عملی گروہی نظریہ**[90] کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے $|10\rangle$ پر $S_-$ کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ $\sqrt{2}\hbar|1\,-1\rangle$ حاصل ہوگا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں $|00\rangle$ پر $S_\pm$ کا اطلاع کر کے تصدیق کیجیے کہ $0$ حاصل ہوگا۔

ج. دکھائی کہ $|11\rangle$ اور $|1\,-1\rangle$ (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے) $S^2$ کے موزوں امتیازی قدر والے امتیازی تفاعلات ہیں۔

سوال ۴.۳۵: **کوارک**[91] کا چکر $1/2$ ہے۔ تین کوارک کے مل کر ایک **بیریان**[92] مرتب کرتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کوارک کے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک) مل کر ایک **میزان**[93] مرتب کرتے ہیں (مثلاً **پایان**[94] یا **کایان**[95])۔ فرض کریں یہ کوارک کے زمینی حال میں ہیں (لہٰذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا)۔

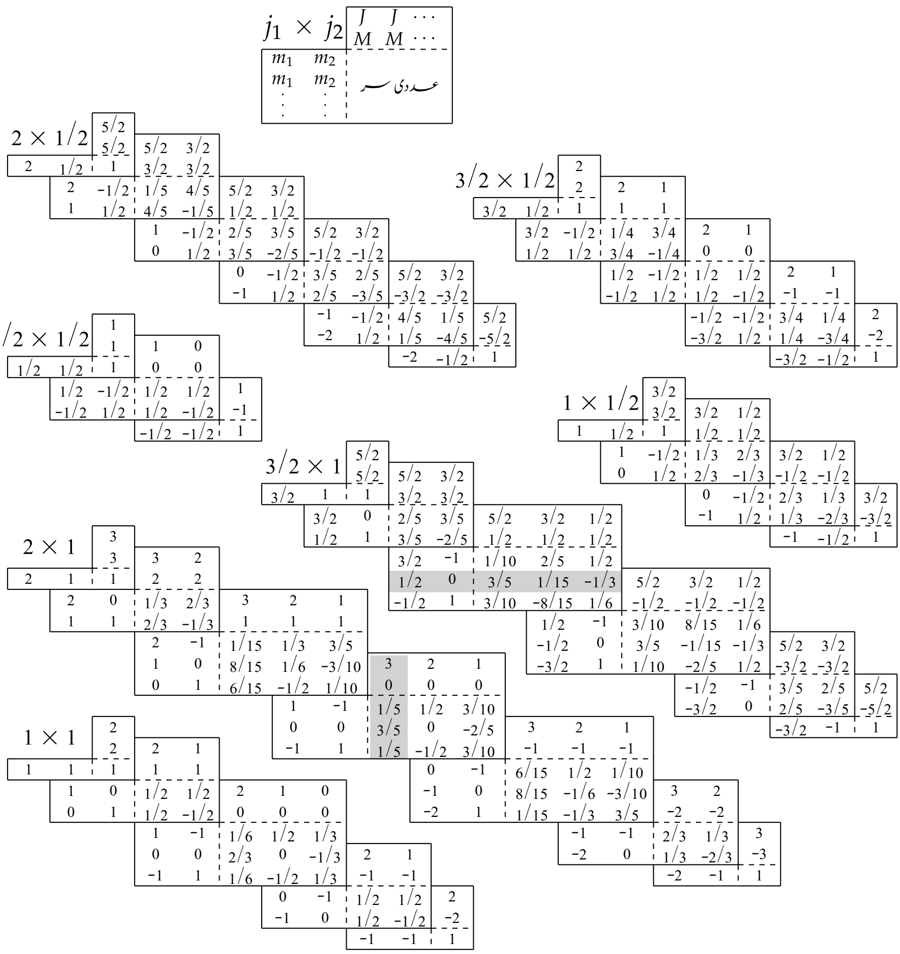
ا. بیریان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

ب. میزان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

[90] group theory
[91] quark
[92] baryon
[93] meson
[94] pion
[95] kion

جدول ۴.۸: کلیبش و گورڈن عددی سر۔ در حقیقت ہر عددی سر در، جذر کی علامت کے اندر ہوگا اور منفی عددی سر کی صورت میں منفی کی علامت جذر کے باہر ہوگی۔ یوں $-1/3$ سے مراد $-\sqrt{1/3}$ ہوگا۔



ا. چکر $1$ کا ایک ساکن ذرہ اور چکر $2$ کا ایک ساکن ذرہ اس تشکیل میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر $3$، اور $z$ جزو $\hbar$ ہے۔ چکر $2$ ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے $z$ جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہو گا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال $\psi_{510}$ میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۷: $S^2$ اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں (جہاں $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ ہو گا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, \mathbf{S}^{(1)}] = 2i\hbar(\mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)}) \tag{۴.۱۸۷}$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور $S^2$ آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہٰذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں $S^2$ کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیبش و گورڈن عددی سر یہی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $S^2$ کے ساتھ مجموعہ $\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ مقلوبی ہو گا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

## باب ۴ کے لئے اضافی سوالات

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے **تین ابعادی ہارمونی مرتعش**[۹۲] پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{۴.۱۸۸}$$

ا. کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بعدی مرتعش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، اجازتی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \tag{۴.۱۸۹}$$

ب. $E_n$ کی انحطاطیت $d_{(n)}$ تعین کریں۔

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ میں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی مرتعش مخفیہ کروی تشاکلی ہے لہٰذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدد کے علاوہ کروی محدد میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جا سکتا ہے۔ طاقتی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداسی مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے اجازتی توانائیاں تعین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

---

[۹۲] three-dimensional harmonic oscillator

ا. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل **تین ابعادی مسئلہ وریل**[۹۷] ثابت کریں۔

$$2\langle T\rangle = \langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla V\rangle \tag{۴.۱۹۰}$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T\rangle = -E_n;\quad \langle V\rangle = 2E_n \tag{۴.۱۹۱}$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونی مرتعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T\rangle = \langle V\rangle = E_n/2 \tag{۴.۱۹۲}$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۱۴ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی **رو احتمال**[۹۸] کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi\right) \tag{۴.۱۹۳}$$

ا. دکھائے کہ $\mathbf{J}$ **استمراری مساوات**[۹۹]:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 \tag{۴.۱۹۴}$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مقامی **بقا احتمال**[۱۰۰] کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاو کے تحت) درج ذیل ہو گا

$$\int_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V |\Psi|^2\,\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۵}$$

جہاں $V$ ایک مقررہ حجم اور $S$ اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ میں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہو گا۔

ب. حال $n = 2$، $l = 1$، $m = 1$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے $\mathbf{J}$ تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a}\sin\theta\,\boldsymbol{a}_\phi$$

---

[۹۷] three-dimensional virial theorem
[۹۸] probability current
[۹۹] continuity equation
[۱۰۰] conservation of probability

ج. اگر ہم کمیت کے بہاو کو $m\mathbf{J}$ سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{L} = m \int (\boldsymbol{r} \times \mathbf{J})\, \mathrm{d}^3\, \boldsymbol{r}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال $\psi_{211}$ کے لیے $L_z$ کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تابع وقت) **معیار حرکی فضا تفاعل موج**[۱۰۱] کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۳.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})/\hbar}\psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3\, \boldsymbol{r} \tag{۴.۱۹۶}$$

ا. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حر کی فضا تفاعل موج تلاش کریں۔ اشارہ: کروی محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو $\boldsymbol{p}$ کے رخ رکھیں اور $\theta$ کا تکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2a}{\pi}\Big)^{3/2}\frac{1}{[1+(ap/\hbar)^2]^2} \tag{۴.۱۹۷}$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ $\phi(\boldsymbol{p})$ معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے $\psi(\boldsymbol{p})$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حر کی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کو $E_1$ کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ وریل (مساوات ۴.۱۹۱) کا بلا تضاد ہے۔

سوال ۴.۴۳:

ا. حال $n = 3$ ، $l = 2$ ، $m = 1$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل موج $(\psi)$ تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف $r$ ، $\theta$ ، $\phi$ اور $a$ (رداس بوہر) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر ($\rho$ ، $z$ ،وغیرہ) یا تفاعلات ($Y$ ، $v$ ،وغیرہ) یا مستقلات ($A$ ، $c_0$ ،وغیرہ) یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں $\pi$ $e$ اور 2 ،وغیرہ استعمال کیے جا سکتے ہیں)۔

ب. $r$ ، $\theta$ اور $\phi$ کے لحاظ سے موزوں تکملات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں $r^s$ کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ $s$ کی کس سعت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب متناہی ہو گا؟

سوال ۴.۴۴:

ا. حال $n = 4$ ، $l = 3$ ، $m = 3$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو کروی محدد $r$ ، $\theta$ اور $\phi$ کا تفاعل لکھیں۔

ب. اس حال میں $r$ کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ (تکملات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

---

[۱۰۱] momentum space wave function

ج. اس حال میں ایک جوہر کے قابل مشاہدہ $L_x^2 + L_y^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہو گا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج (مساوات ۴.۸۰) $r = 0$ تک درست ہے اور مرکزہ کا رداس $b$ لیتے ہوئے بالکل ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $\epsilon \equiv 2b/a$ کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ کم سے کم رتبی جزو کعبی: $P \approx (4/3)(b/a)^3$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $b \ll a$ کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہو گی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہو گا لہٰذا $P \approx (4/3)\pi b^3 \left|\psi(0)\right|^2$ لیا جا سکتا ہے۔ تصدیق کیجیے گا کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہو گا۔

د. $a \approx 0.5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ اور $b \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$ لیتے ہوئے $P$ کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہو گا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴۶:

ا. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں رداسی تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ تکمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی $N_n$ تعین کریں۔

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r \rangle^2$ کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کے ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں "عدم یقینیت" $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہو گی۔ دھیان رہے کہ $n$ بڑھانے سے $r$ میں نسبتی پھیلاو گھٹتا ہے (یوں $n$ کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آنا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پہچانے جا سکتے ہیں)۔ رداسی تفاعل امواج کا خاکہ، $n$ کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۷: **ہم مکانی طیفی خطوط:** کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے صدر کوانٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو $\lambda$ کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہو گی۔

سوال ۴.۴۸: قابل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں۔

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

ب. حال $\psi_{nlm}$ میں ہائیڈروجن کے لیے $\sigma_B$ کی قیمت معلوم کریں۔

ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

ا. $\chi$ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل $A$ تعین کریں۔

ب. اس الیکٹران کے $S_z$ کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ $S_z$ کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

ج. اس الیکٹران کے $S_x$ کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتیں متوقع ہونگی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ $S_x$ کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

د. اس الیکٹران کے $S_y$ کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ $S_y$ کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات یکتا تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\text{a}}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_a^{(1)}$ ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\text{b}}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جزو $S_b^{(2)}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں $\boldsymbol{a}_{\text{a}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{b}}$ کے بیچ زاویہ $\theta$ ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta \tag{۴.۱۹۸}$$

سوال ۴.۵۱:

ا. کلیبش گورڈن عددی سر کو، $s_1 = 1/2$ اور $s_2$ کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں $A$ اور $B$ عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $S^2$ کا امتیازی حال $|sm\rangle$ ہو۔

$$|sm\rangle = A|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|s_2(m-\tfrac{1}{2})\rangle + B|\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\rangle|s_2(m+\tfrac{1}{2})\rangle$$

مساوات ۴.۱۷۹ تا مساوات ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ (مثلاً) $S_x^{(2)}$ حال $|s_2 m_2\rangle$ کو کیا کرتا ہے، تب مساوات ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مساوات ۴.۱۴۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2+1}}; \qquad B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2+1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۸ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: (ہمیشہ کی طرح $S_z$ کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے) $3/2$ چکر ذرہ کے لیے قالب $S_x$ تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے $S_x$ کے امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷ میں $1/2$ چکر، سوال ۴.۳۱ میں $1$ چکر، اور سوال ۴.۵۲ میں $3/2$ چکر کے قالبوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری $s$ چکر کے لیے چکری قالب تلاش کریں۔ جواب:

$$\boldsymbol{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j \equiv \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہے۔

سوال ۴.۵۴: کروی ہارمونیات کے لیے معمول زنی ضربیہ درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ ۴.۱.۲ سے درج ذیل جانتے ہیں۔

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

آپ کو جزو $B_l^m$ تعین کرنا ہو گا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات ۴.۳۲ میں کیا)۔ مساوات ۴.۱۲۰، مساوات ۴.۱۲۱، اور مساوات ۴.۱۳۰ استعمال کرتے ہوئے $B_l^m$ کی صورت میں $B_l^{m+1}$ کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو $m$ کے ریاضی ماخوذ کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے $B_l^m$ کو مجموعی مستقل $C(l)$

تک حل کریں۔ آخر میں سوال ۴.۲۲ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کی قیمت تلاش کریں۔ شریک لیژانڈر تفاعل کے تفرق کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1} - mxP_l^m \tag{۴.۱۹۹}$$

سوال ۴.۵۵: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے۔

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi_-)$$

ا. مدارچی زاویائی معیار حرکت کے مربع $(L^2)$ کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

ب. یہی کچھ مدارچی زاویائی معیار حرکت کے $z$ جزو $(L_z)$ کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع $(S^2)$ کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے $z$ جزو $(S_z)$ کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$ لیں۔

ھ. آپ $J^2$ کی پیمائش کرتے ہیں۔ آپ کیا قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

و. یہی کچھ $J_z$ کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس کی $r$ ، $\theta$ ، $\phi$ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟

ح. آپ چکر کا $z$ جزو اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں)۔ ایک ذرے کا رداس $r$ پر اور ہم میدان ہونے کی کثافت احتمال کیا ہو گی؟

سوال ۴.۵۶:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو ٹیلر تسلسل میں پھیلایا جا سکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہو گا

$$f(\phi+\varphi) = e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}}f(\phi)$$

(جہاں $\varphi$ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا پر $L_z/\hbar$ کو $z$ کے گرد **گھومنے کا پیداکار**[102] کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۲۹ استعمال کریں اور سوال ۳.۳۹ سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{n}/\hbar$ ہو گا جو $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ رخ گھومنے کا پیداکار ہے، یعنی $e^{(i\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{n}\varphi/\hbar)}$ محور $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ کے گرد (دائیں ہاتھ سمت میں) زاویہ $\varphi$ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیداکار $\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{n}/\hbar$ ہو گا۔ بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{n})\varphi/2}\chi \tag{۴.۲۰۰}$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

[102] generator of rotation

ب. محور $x$ کے لحاظ سے $180^\circ$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا $(2 \times 2)$ قالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ، ہماری توقعات کے عین مطابق، ہم میدان $(\chi_+)$ کو خلاف میدان $(\chi_-)$ میں تبدیل کرتا ہے۔

ج. محور $y$ کے لحاظ سے $90^\circ$ گھومنے والا قالب تیار کریں اور $(\chi_+)$ پر اس کا اثر دیکھیں؟

د. محور $z$ کے لحاظ سے $360^\circ$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ھ. درج ذیل دکھائیں۔

$$e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\boldsymbol{a}_{\text{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\varphi/2) \tag{۴.۲۰۱}$$

سوال ۴.۵۷: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتے (مساوات ۴.۹۹) امتیازی اقدار کی (عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ) نصف عدد صحیح قیمتوں کی اجازت دیتے ہیں، جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ خصوصی روپ $\mathbf{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ پر ضرور کوئی اضافی شرط مسلط ہے جو نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتی ہے۔ ہم مستقل $a$ جس کا بُعد لمبائی ہو (مثلاً، ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر) لیتے ہوئے درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں۔

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; \qquad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; \qquad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y]$$

ا. تصدیق کیجیے کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$؛ $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ ہیں۔ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں کو تمام $q$ اور $p$ مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج. تصدیق کیجیے کہ ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کمیت $m = \hbar/a^2$ اور تعدد $\omega = 1$ ہو کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ ہوگا جہاں $H$ ہیملٹنی ہیں۔

د. ہم جانتے ہیں ہارمونی مرتعش ہیملٹنی کے امتیازی اقدار $(n + 1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ہو گا (حصہ ۲.۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کے روپ اور باضابطہ مقلبیت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا)۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کریں کہ $L_z$ کے امتیازی اقدار لازماً عدد صحیح ہوں گے۔

سوال ۴.۵۸: عمومی حال (مساوات ۴.۱۳۹) میں $1/2$ چکر کے $S_z$ اور $S_y$ کی کم سے کم عدم یقینیت کے لئے شرط معلوم کریں (یعنی، فقرہ $\sigma_{S_x}\sigma_{S_y} \geq (\hbar/2)|\langle S_z\rangle|$ میں مساوی $(=)$ صورت تلاش کریں)۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر ہم $a$ کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں؛ تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت حاصل ہو گی جب $b$ خالص حقیقی یا خالص خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۹: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ، جس کا بار $q$ ہو اور جو برقی میدان $\boldsymbol{E}$ اور مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جسے **لورینز قوت کا قانون**[۱۰۳]:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{۴.۲۰۲}$$

پیش کرتا ہے۔ اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ (مساوات ۱.۱) میں اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے۔ تاہم اس کا نفیس روپ:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{۴.۲۰۳}$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتا ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہو گی

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \tag{۴.۲۰۴}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مخفیہ $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ اور $\varphi$ غیر سمتی مخفیہ $(\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ ہے، لہٰذا شروڈنگر مساوات (باضابطہ متبادل $(\boldsymbol{p} \to ((\hbar/i)\nabla)$ پر کر کے) درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Big[\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi\Big]\Psi \tag{۴.۲۰۵}$$

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\langle r\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\langle(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\rangle \tag{۴.۲۰۶}$$

ب. ہمیشہ کی طرح (مساوات ۱.۳۲ دیکھیں) ہم $\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{r}\rangle}{\mathrm{d}t}$ کو $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$m\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{v}\rangle}{\mathrm{d}t} = q\langle\boldsymbol{E}\rangle + \frac{q}{2m}\langle(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{p})\rangle - \frac{q^2}{m}\langle(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\rangle \tag{۴.۲۰۷}$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$m\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{v}\rangle}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \langle\boldsymbol{v}\rangle\times\boldsymbol{B}) \tag{۴.۲۰۸}$$

---

[۱۰۳] Lorentz force law

اس طرح $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی، جیسا ہم مسئلہ اہر نفسٹ کے تحت توقع کر سکتے تھے۔

سوال ۴.۶۰: [پس منظر جاننے کے لیے سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] فرض کریں

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B_0}}{2}(x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}) \quad \text{اور} \quad \varphi = Kz^2$$

ہیں جہاں $B_0$ اور $K$ مستقلات ہیں۔

ا. میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ تلاش کریں۔

ب. ان میدان اس ذرہ کے امتیازی تفاعلات اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں جس کی کمیت $m$ اور بار $q$ ہو۔
جواب:

$$E(n_1, n_2) = (n_1 + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \tfrac{1}{2})\hbar\omega, \qquad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{۴.۲۰۹}$$

جہاں $q\boldsymbol{B_0}/m \equiv \omega_1$ اور $\sqrt{2qKm} \equiv \omega_2$ ہیں۔ تبصرہ: $K = 0$ کی صورت میں یہ **سائیکلوٹران حرکت**[104] کا کوانٹائی مماثل ہوگا؛ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد $\omega_1$ ہوگا اور یہ $z$ رخ میں آزاد ذرہ ہوگا۔ اجازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1$ **لنڈو سطحیں**[105] کہلاتی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: [پس منظر جاننے کی خاطر سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفیے $\boldsymbol{A}$ اور $\varphi$ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جا سکتے ہیں؛ طبعی مقداریں میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہوں گے۔

ا. دکھائیں کہ مخفیے

$$\varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۴.۲۱۰}$$

(جہاں $\Lambda$ مقام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان دیتے ہیں جو $\varphi$ اور $\boldsymbol{A}$ دیتے ہیں۔ مساوات ۴.۲۱۰ **ماپ تبادلہ**[106] کہلاتی ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ **ماپ غیر متغیر**[107] ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفیہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ ماپ غیر متغیر رہتا ہے یا نہیں۔ دکھائیں کہ ماپ تبادلہ مخفیے $\varphi'$ اور $\boldsymbol{A}$ لیتے ہوئے درج ذیل

$$\Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi \tag{۴.۲۱۱}$$

شروڈنگر مساوات (مساوات ۴.۲۰۵) کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ $\Psi$ اور $\Psi'$ میں صرف ہیّتی جزو ضربی کا فرق

---

[104] cyclotron motion
[105] Landau Levels
[106] gauge transformation
[107] gauge invariant

پایا جاتا ہے لہٰذا یہ ایک ہی طبعی حال[۱۰۸] کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ ماپ غیر متغیر ہو گا (مزید معلومات کے لیے حصہ ۳.۲.۱۰ سے رجوع کیجیے گا)۔

[۱۰۸] یعنی $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ ، $\mathrm{d}\langle \boldsymbol{r} \rangle / \mathrm{d}t$ ، وغیرہ تبدیل نہیں ہوں گے۔ چونکہ $\Lambda$ مقام کا تابع ہے، $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ (جہاں $\boldsymbol{p}$ کو عامل $(\hbar/i)\nabla$ ظاہر کرتا ہے) تبدیل ہو گا، تاہم جیسا ہم نے مساوات ۴.۲۰۶ میں دیکھا، $\boldsymbol{p}$ موجودہ سیاق و سباق میں میکانی معیار حرکت $(m\boldsymbol{v})$ کو ظاہر نہیں کرتا ہے (لگرانج میکانیات میں اس کو **باضابطہ معیار حرکت** کہتے ہیں)۔

# باب ۵

# متماثل ذرات

## ۵.۱ دو ذراتی نظام

ایک ذروی کے لیے (فی الحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ فضائی محدد، $\boldsymbol{r}$، اور وقت، $t$، کا تفاعل ہو گا۔ دو ذراتی نظام کا حال پہلے ذرے کے محدد، $(\boldsymbol{r}_1)$، دوسرے ذرے کے محدد، $(\boldsymbol{r}_2)$، اور وقت کا تابع ہو گا۔

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) \tag{۵.۱}$$

ہمیشہ کی طرح یہ وقت کے لحاظ سے شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{۵.۲}$$

کے تحت ارتقا کرے گا جہاں $H$ مکمل نظام کا ہیملٹنی ہے۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) \tag{۵.۳}$$

ذرہ 1 اور ذرہ 2 کے محدد کے لحاظ سے تفرقات کو $\nabla$ کے زیر نوشت میں بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ذرہ 1 کا حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}_1$ اور ذرہ 2 کا حجم $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}_2$ میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا:

$$\left|\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2 \tag{۵.۴}$$

جہاں شماریاتی مفہوم معمول کے مطابق کارآمد ہو گا۔ ظاہر ہے کہ $\psi$ کو درج ذیل کے تحت معمول پر لانا ہو گا۔

$$\int\left|\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)\right|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2 = 1 \tag{۵.۵}$$

غیر تابع وقت مخفیہ کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)e^{-iEt/\hbar} \tag{۵.۶}$$

حاصل ہو گا جہاں فضائی تفاعل موج $(\psi)$ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات:

$$-\frac{\hbar}{2m_1}\nabla_1^2\psi - \frac{\hbar}{2m_2}\nabla_2^2\psi + V\psi = E\psi \tag{۵.۷}$$

کو مطمئن کرتا ہے جس میں $E$ نظام کی کل توانائی ہے۔

سوال ۵.۱: عام طور پر باہم عمل مخفیہ کا انحصار صرف دو ذرات کے بیچ سمتیہ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ پر ہو گا۔ ایسی صورت میں متغیرات $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ کی جگہ نئے متغیرات $\boldsymbol{r}$ اور (مرکز کمیت) $\boldsymbol{R} \equiv \frac{(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2)}{m_1+m_2}$ کے استعمال سے مساوات شروڈنگر دو حصوں میں علیحدہ ہو گی۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r}$$
$$\nabla_1 = \frac{\mu}{m_2}\nabla_R + \nabla_r, \qquad \nabla_2 = \frac{\mu}{m_1}\nabla_R - \nabla_r$$

جہاں

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{۵.۸}$$

نظام کی **تخفیف شدہ کمیت**[1] ہے۔

ب. دکھائیں کہ (غیر تابع وقت) شروڈنگر مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_R^2\psi - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\psi + V(\boldsymbol{r})\psi = E\psi$$

ج. متغیرات کو $\psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = \psi_R(\boldsymbol{R})\psi_r(\boldsymbol{r})$ لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\psi_R$ ایک ذروی شروڈنگر مساوات، جس میں کمیت $m$ کی بجائے کل کمیت $(m_1 + m_2)$، مخفیہ صفر ہو اور نظام کی توانائی $E_R$ ہو، کو مطمئن کرتا ہے جبکہ $\psi_r$ ایک ذروی شروڈنگر مساوات، جس میں کمیت $m$ کی بجائے تخفیف شدہ کمیت، مخفیہ $V(\boldsymbol{r})$ اور توانائی $E_r$ ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ کل توانائی ان کا مجموعہ: $E = E_R + E_r$ ہو گا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کمیت ایک آزاد ذرہ کی مانند حرکت کرتا ہے اور (ذرہ 1 کے لحاظ سے ذرہ 2 کی) نسبتی حرکت ایسی ہو گی جیسا مخفیہ $V$ میں تخفیف شدہ کمیت کا ایک ذروی کرتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں بالکل یہی تحلیل ہو گی جو دو جسمی مسئلہ کو معادل یک جسمی مسئلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

---

[1] reduced mass

سوال ۵.۲: یوں ہائیڈروجن کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم الیکٹران کی کمیت کی جگہ تخفیف شدہ کمیت استعمال کرتے ہیں (سوال ۵.۱)۔

ا. ہائیڈروجن کی بندشی توانائی (مساوات ۴.۷۷) جاننے کی خاطر $\mu$ کی جگہ m استعمال کرنے سے پیدا فی صد سہو دو بامعنی ہندسوں تک تلاش کریں۔

ب. ہائیڈروجن اور ڈیوٹریم کے لیے سرخ بالمر لکیروں $(n = 3 \rightarrow n = 2)$ کے طول موج کے بیچ فاصلہ (فرق) تلاش کریں۔

ج. **پازیٹرانیم**[۲] کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران رکھنے سے پازیٹرانیم پیدا ہو گا۔ ضد الیکٹران کی کمیت الیکٹران کی کمیت کے برابر جبکہ اس کا بار الیکٹران کے بار کے مخالف ہے۔

د. فرض کریں آپ **میونی ہائیڈروجن**[۳] (جس میں الیکٹران کی جگہ ایک میون ہو گا) کی وجودیت کی تصدیق کرنا جانتے ہیں۔ میون کا بار الیکٹران کے بار کے برابر ہے، تاہم اس کی کمیت الیکٹران سے 206.77 گنا زیادہ ہے۔ آپ لیمان $\alpha$ لکیر $n = 2 \rightarrow n = 1$ کے لیے کس طول موج پر نظر رکھیں گے؟

سوال ۵.۳: کلورین کے قدرتی دو ہم جا $Cl^{35}$ اور $Cl^{37}$ پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ HCl کا لرزشی طیف قریب قریب جوڑیوں پر مشتمل ہو گا جن میں فاصلہ $\Delta\nu = 7.51 \times 10^{-4}\nu$ ہو گا جہاں $\nu$ خارجی نور سے کا تعدد ہے۔ (اشارہ: اس کو ایک ہارمونی مرتعش تصور کریں جہاں $\omega = \sqrt{\frac{k}{mu}}$ ہو گا جہاں $\mu$ تخفیف شدہ کمیت (مساوات ۵.۸) ہے جبکہ دونوں ہم جا کا $k$ ایک جیسا تصور کریں۔)

### ۵.۱.۱ بوزان اور فرمیان

فرض کریں ذرہ 1 (ایک ذروی حال) $\psi_a(\boldsymbol{r})$ اور ذرہ 2 حال $\psi_b(\boldsymbol{r})$ میں پائے جاتے ہیں۔ (یاد رہے، میں یہاں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں۔) ایسی صورت میں $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ سادہ حاصل ضرب ہو گا۔[۴]

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi_a(\boldsymbol{r}_1)\psi_b(\boldsymbol{r}_2) \tag{۵.۹}$$

ہم یہاں فرض کر رہے ہیں ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچانا جا سکتا ہے؛ ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ 1 حال $\psi_a$ اور ذرہ 2 حال $\psi_b$ میں ہے بے معنی ہو گا؛ ہم صرف اتنا کہہ پاتے کہ ایک ذرہ حال $\psi_a$ اور دوسرا ذرہ حال $\psi_b$ میں پایا جاتا ہے، تاہم ہم نہیں جان پاتے کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ ایک بے

---

[۲] positronium

[۳] muonic hydrogen

[۴] در حقیقت، ضروری نہیں کہ ہر دو ذروی تفاعل موج دو ایک ذروی تفاعلات موج کا حاصل ضرب ہو۔ ایسے حال جنہیں **ہمبستہ حال** (entangled states) کہتے ہیں کو اس طرح دو حصوں میں علیحدہ نہیں کیا جا سکتا ہے۔ تاہم اگر ذرہ 1 حال $a$ اور ذرہ 2 حال $b$ میں ہوں، تب دو ذروی حال حاصل ضرب ہو گا۔ میں جانتا ہوں، آپ سوچ رہے ہیں: "ذرہ 1 کیسے کسی حال میں اور ذرہ 2 کسی دوسرے حال میں نہیں ہوں گے؟" اس کی کلاسیکی مثال یک تا چکری تشاکل ہے (مساوات ۴.۱۷۸)؛ میں آپ کو اکیلے ذرہ 1 کا حال نہیں بتا سکتا ہوں، چونکہ یہ ذرہ 2 کے حال کے ساتھ ہمبستہ ہے۔ اگر 2 کی پیمائش کی جائے اور نتیجہ ہم میدان چکر ہو تب 1 ہم میدان چکر اور 2 مخالف میدان چکر ہو گا۔

وقوفانہ اعتراض ہو گا: اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دے کر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹم میکانیات میں صورت حال بنیادی طور پر مختلف ہے: آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں۔ حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل متماثل ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء اتنی یکسانیت کبھی نہیں رکھ سکتے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے قاصر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ "یہ" الیکٹران اور "وہ" الیکٹران کہنا کوانٹم میکانیات میں بے معنی ہیں؛ ہم صرف "ایک" الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔

ایسے ذرات کی موجودگی کو، جو اصولاً غیر ممیز ہوتے ہیں، کوانٹم میکانیات خوش اسلوبی سے سموتی ہے: ہم ایسا غیر مشروط تفاعل موج تیار کرتے ہیں جو یہ بات نہیں کرتا کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ ایسا دو (ذیل) طریقوں سے کرنا ممکن ہے۔

$$\psi_{\pm}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = A[\psi_a(\boldsymbol{r}_1)\psi_b(\boldsymbol{r}_2) \pm \psi_b(\boldsymbol{r}_1)\psi_a(\boldsymbol{r}_2)] \tag{۵.۱۰}$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے متماثل ذرات کا حامل ہو گا: **بوزان**[۵] جن کے لئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور **فرمیان**[۶] جن کے لئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوزان کی مثالیں نوریہ اور میزون ہیں جبکہ فرمیان کی مثالیں پروٹان اور الیکٹران ہیں۔ ایسا ہے کہ

$$\left.\begin{array}{l}\text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات بوزان جبکہ}\\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیان ہوں گے۔}\end{array}\right\} \tag{۵.۱۱}$$

**چکر** اور **شماریات** کے مابین یہ تعلق (جیسا ہم دیکھیں گے فرمیان اور بوزان کی شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوتے ہیں) کو اضافی کوانٹم میکانیات میں ثابت کیا جا سکتا ہے؛ غیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔[۷]

اس سے بالخصوص ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ دو متماثل فرمیان (مثلاً دو الیکٹران) ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر $\psi_a = \psi_b$ ہو تب

$$\psi_{-}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = A[\psi_a(\boldsymbol{r}_1)\psi_a(\boldsymbol{r}_2) - \psi_a(\boldsymbol{r}_1)\psi_a(\boldsymbol{r}_2)] = 0$$

کی بنا پر کوئی تفاعل موج[۸] نہیں ہو گا۔ یہ مشہور نتیجہ **پالی اصول مناعت**[۹] کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں ہے جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہے، بلکہ یہ دو ذروی تفاعلات موج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے، جس کا اطلاق تمام متماثل فرمیان پر ہو گا۔

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال $\psi_a$ اور دوسرا حال $\psi_b$ میں پایا جاتا ہے، تاہم اس مسئلہ کو زیادہ عمومی (اور زیادہ نفیس طریقے سے) وضع کیا جا سکتا ہے۔ ہم **عامل مبادلہ**[۱۰]، $P$،

[۵] bosons
[۶] fermions
[۷] اضافیت کے اثرات یہاں پائے جانا عجیب سی بات ہے۔
[۸] یاد رہے کہ میں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے الجھن ہو (کیونکہ بغیر چکر فرمیان خود ایک تضاد ہے)، فرض کریں تمام الیکٹران کے چکر ایک جیسے ہیں۔ میں جلد چکر کو بھی شامل کروں گا۔
[۹] Pauli exclusion principle
[۱۰] exchange operator

متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے۔

$$Pf(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = f(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \tag{۵.۱۲}$$

صاف ظاہر ہے کہ $P^2 = 1$ ہو گا لہٰذا (تصدیق کیجیے گا کہ) $P$ کے امتیازی اقدار $\pm 1$ ہوں گے۔ اب اگر یہ دونوں ذرات متماثل ہوں، تب لازماً ہیملٹنی ان کے ساتھ ایک جیسا رویہ برتے گا: ($m_1 = m_2$ اور $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = V(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)$)۔ اس طرح $P$ اور $H$ ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہوں گے:

$$[P, H] = 0 \tag{۵.۱۳}$$

لہٰذا ہم دونوں کے بیک وقت امتیازی حالات کے تفاعلوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ، مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو یا تشاکلی (امتیازی قدر $+1$) یا غیر تشاکلی (امتیازی قدر $-1$) ہوں۔

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \pm\psi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \tag{۵.۱۴}$$

مزید، ایک نظام جو اس طرح کے حال سے آغاز کرے، اسی حال میں برقرار رہتا ہے۔ متماثل ذرات کا نیا قاعدہ (جس کو میں **ضرورت تشاکلیت**[11] کہتا ہوں) کے تحت تفاعل موج کو مساوات ۵.۱۴ پر صرف پورا اترنے کی اجازت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو مطمئن کرتا ہو؛ بوزان کے لئے مثبت علامت اور فرمیان کے لئے منفی علامت ہو گی۔[12] یہ ایک عمومی فقرہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت مساوات ۵.۱۰ ہے۔

مثال ۵.۱: فرض کریں ایک لامتناہی چوکور کنویں (حصہ ۲.۲) میں کمیت $m$ کے باہم غیر متعامل دو ذرات (جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہیں) پائے جاتے ہیں؛ آپکو فکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً ایسا کیسے کیا جا سکتا ہے! ایک ذروی حالات درج ذیل ہوں گے (جہاں اپنی سہولت کے لئے ہم $K \equiv \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ لیتے ہیں)۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\tfrac{n\pi}{a}x), \quad E_n = n^2K$$

قابل ممیز ذرات کی صورت میں، جب ذرہ 1 حال $n_1$ میں اور ذرہ 2 حال $n_2$ میں ہو، مرکب تفاعل موج سادہ حاصل ضرب:

$$\psi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1n_2} = (n_1^2 + n_2^2)K.$$

[11] symmetrization requirement

[12] بعض اوقات اشارہ دیا جاتا ہے کہ $P$ اور $H$ کے باہمی مقلوبی ہونا ضرورت تشاکلیت (مساوات ۵.۱۴) کی پشت پر ہے۔ یہ بالکل غلط ہے: ہم دو قابل ممیز ذرات (مثلاً ایک الیکٹران اور ایک ضد الیکٹران) کا ایسا نظام تصور کر سکتے ہیں جس کا ہیملٹنی تشاکلی ہو، جس کے باوجود تفاعل موج کا تشاکلی (یا غیر تشاکلی) ہونے کی ضرورت نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس متماثل ذرات کو لازماً تشاکلی یا غیر تشاکلی حالات کا مکین ہونا ہو گا، اور یہ ایک بالکل نیا بنیادی قاعدہ ہے؛ جو شروڈنگر مساوات اور شماریاتی مفہوم جتنی اہمیت کا حامل ہے۔ اب، ایسا ضروری نہیں تھا کہ متماثل ذرات پائے جاتے؛ ایسا ہو سکتا تھا کہ ہر دو ذروں کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہوتا۔ کوانٹم میکانیات متماثل ذرات کے امکان کی اجازت دیتی ہے، اور قدرت نے اس موقع کو ہاتھ سے جانے نہیں دیا۔ (مجھے کوئی شکوہ نہیں ہے چونکہ اس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں!)

ہو گا۔ مثال کے طور پر زمینی حال:

$$\psi_{11} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K;$$

ہو گا اور پہلا ہیجان حال دو چند انحطاطی:

$$\psi_{12} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$
$$\psi_{21} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K;$$

ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔ دونوں ذرات متماثل بوزان ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہو گا، تاہم پہلا ہیجان حال:

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right]$$

(جس کی توانائی اب بھی $5K$ ہو گی) غیر انحطاطی ہو گا۔ اور اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں، تب $2K$ توانائی کا کوئی بھی حال نہیں ہو گا؛ زمینی حال جس کی توانائی $5K$ ہو گی درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)-\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right],$$

□

سوال ۵.۴:

ا. اگر $\psi_b$ اور $\psi_a$ عمودی ہوں اور دونوں معمول شدہ ہوں تب مساوات ۵.۱۰ میں مستقل $A$ کیا ہو گا؟

ب. اگر $\psi_a = \psi_b$ ہوں (اور یہ معمول شدہ ہوں) تب $A$ کیا ہو گا؟ (یہ صورت صرف بوزان کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

ا. لامتناہی چوکور کنویں میں باہم غیر متعامل دو متماثل ذرات کا ہیملٹنی لکھیں۔ تصدیق کیجیے کہ مثال ۵.۱ میں دیا گیا فرمیان کا زمینی حال $H$ کا مناسب امتیازی قدر والا امتیازی تفاعل ہو گا۔

ب. مثال ۵.۱ میں دیے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو تفاعل موج اور توانائیاں، تینوں صورتوں (قابل ممیز، متماثل بوزان، متماثل فرمیان) میں ہر ایک کے لئے حاصل کریں۔

### ۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشاکلیت کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ فرض کریں ایک ذرہ حال $\psi_a(x)$ میں اور دوسرا حال $\psi_b(x)$ میں ہے، اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول

شدہ ہیں۔ اگر دونوں ذرات قابل ممیز ہوں، اور ذرہ 1 حال $\psi_a$ میں ہو تب ان کا مجموعی تفاعل موج

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \tag{۵.۱۵}$$

ہو گا؛ اگر یہ متماثل بوزان ہوں تب ان کا مرکب تفاعل موج (معمول زنی کے لئے سوال ۵.۴ دیکھیں) درج ذیل ہو گا

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۶}$$

اور اگر یہ متماثل فرمیان ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)] \tag{۵.۱۷}$$

آئیں ان ذرات کے بیچ فاصلہ علیحدگی کے مربع کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔

$$\langle(x_1 - x_2)^2\rangle = \langle x_1^2\rangle + \langle x_2^2\rangle - 2\langle x_1x_2\rangle \tag{۵.۱۸}$$

**صورت اول: قابل ممیز ذرات۔** مساوات ۵.۱۵ میں دیے گئے تفاعل موج کے لئے

$$\langle x_1^2\rangle = \int x_1^2|\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1 \int |\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2 = \langle x^2\rangle_a$$

(ایک ذروی حال $\psi_a$ میں $x^2$ کی توقعاتی قیمت)،

$$\langle x_2^2\rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1 \int x_2^2|\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2 = \langle x^2\rangle_b$$

اور

$$\langle x_1x_2\rangle = \int x_1|\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1 \int x_2|\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2 = \langle x\rangle_a\langle x\rangle_b$$

ہوں گے۔ یوں اس صورت درج ذیل ہو گا۔

$$\langle(x_1 - x_2)^2\rangle_d = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \tag{۵.۱۹}$$

(اتفاقاً یہی جواب ذرہ 1 حال $\psi_b$ میں اور ذرہ 2 حال $\psi_a$ میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا۔)

**صورت دوم: متماثل ذرات۔** مساوات ۵.۱۶ اور مساوات ۵.۱۷ کے تفاعلات موج کے لئے

$$\begin{aligned}\langle x_1^2\rangle =&\frac{1}{2}\bigg[\int x_1^2|\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1\int|\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2\\&+\int x_1^2|\psi_b(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1\int|\psi_a(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2\\&\pm\int x_1^2\psi_a(x_1)^*\psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1\int\psi_b(x_2)^*\psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2\\&\pm\int x_1^2\psi_b(x_1)^*\psi_a(x_1)\,\mathrm{d}x_1\int\psi_a(x_2)^*\psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2\bigg]\\=&\frac{1}{2}\Big[\langle x^2\rangle_a+\langle x^2\rangle_b\pm0\pm0\Big]=\frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_a+\langle x^2\rangle_b\Big)\end{aligned}$$

اور بالکل اسی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\langle x_2^2\rangle=\frac{1}{2}\Big(\langle x^2\rangle_b+\langle x^2\rangle_a\Big)$$

(ظاہر ہے $\langle x_1^2\rangle=\langle x_2^2\rangle$ ہو گا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے ہیں۔) تاہم

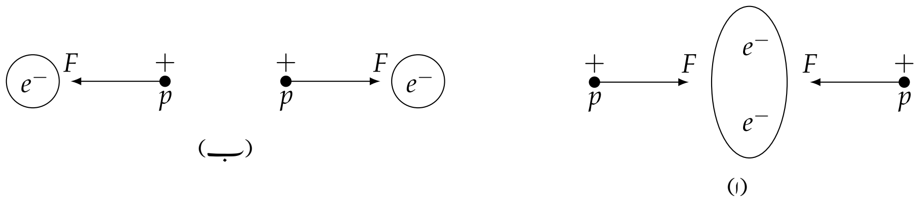
$$\begin{aligned}\langle x_1x_2\rangle =&\frac{1}{2}\bigg[\int x_1|\psi_a(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1\int x_2|\psi_b(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2\\&+\int x_1|\psi_b(x_1)|^2\,\mathrm{d}x_1\int x_2|\psi_a(x_2)|^2\,\mathrm{d}x_2\\&\pm\int x_1\psi_a(x_1)^*\psi_b(x_1)\,\mathrm{d}x_1\int x_2\psi_b(x_2)^*\psi_a(x_2)\,\mathrm{d}x_2\\&\pm\int x_1\psi_b(x_1)^*\psi_a(x_1)\,\mathrm{d}x_1\int x_2\psi_a(x_2)^*\psi_b(x_2)\,\mathrm{d}x_2\bigg]\\=&\frac{1}{2}\left(\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b+\langle x\rangle_b\langle x\rangle_a\pm\langle x\rangle_{ab}\langle x\rangle_{ba}\pm\langle x\rangle_{ba}\langle x\rangle_{ab}\right)\\=&\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b\pm\big|\langle x\rangle_{ab}\big|^2\end{aligned}$$

جہاں درج ذیل ہے ہو گا۔

$$\langle x\rangle_{ab}\equiv\int x\psi_a(x)^*\psi_b(x)\,\mathrm{d}x \tag{۵.۲۰}$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\langle(x_1-x_2)^2\rangle_\pm=\langle x^2\rangle_a+\langle x^2\rangle_b-2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b\mp2\big|\langle x\rangle_{ab}\big|^2 \tag{۵.۲۱}$$




شکل ۵.۱: شریک گرفتی بندھ کی نقشہ کشی: (ا) تشاکلی تشکیل قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکلی تشکیل قوت دفع پیدا کرتی ہے۔

مساوات ۵.۱۹ اور مساوات ۵.۲۱ کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ فرق صرف آخری جزو میں پایا جاتا ہے۔

$$\underbrace{\langle(\Delta x)^2\rangle_\pm}_{\text{متماثل}} = \underbrace{\langle(\Delta x)^2\rangle_d}_{\text{قابل ممیز}} \underbrace{\mp 2\left|\langle x\rangle_{ab}\right|^2}_{\text{فرق}} \tag{۵.۲۲}$$

قابل ممیز ذرات کے لحاظ سے متماثل بوزان (بالائی علامتیں) ایک دوسرے کے نسبتاً قریب جبکہ متماثل فرمیان (زیریں علامتیں) ایک دوسرے سے نسبتاً دور ہوں گے (جہاں ذرات ایک جیسے دو حالات میں ہوں)۔ دھیان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعلات موج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں، $\langle x\rangle_{ab}$ صفر ہوگا (غیر صفر $\psi_b(x)$ کی صورت میں جب بھی $\psi_a(x)$ صفر ہو تب مساوات ۵.۲۰ میں تکمل کی قیمت صفر ہوگی)۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو $\psi_a$ ظاہر کرتا ہو، جبکہ صوابی (میرے آبائی ضلع) میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو $\psi_b$ ظاہر کرتا ہو، تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعلات موج غیر منطبق ہوں کو آپ قابل ممیز تصور کرنے کا ڈھونگ رچا سکتے ہیں۔ (یقیناً اسی کی بنا پر ماہر طبیعیات اور کیمیا دان آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً کائنات میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ، ان کے تفاعلات موج کی عدم تشاکلیت کے ذریعہ، جڑا ہے اور اگر یہ واقعی اہمیت کا حامل ہوتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کیے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے!)

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتی ہے جب انکے تفاعلات موج جزوی منطبق ہوں۔ ایسی صورت میں نظام کا رویہ کچھ یوں ہوگا جیسے متماثل بوزان کے بیچ "قوت کشش" پائی جاتی ہو، جو انہیں قریب کھینچتی ہے، اور متماثل فرمیان کے بیچ "قوت دفع" پائی جاتی ہے، جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتے ہیں (یاد رہے کہ ہم فی الحال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں)۔ ہم اس کو **قوت مبادلہ**[13] کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک قوت نہیں ہے؛ کوئی بھی چیز ان ذرات کو دھکیل نہیں رہی ہے؛ یہ صرف ضرورت تشاکلیت کا ہندسی نتیجہ ہے۔ ساتھ ہی یہ کوانٹم میکانی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکانیات میں کوئی مماثل نہیں پایا جاتا ہے۔ بہر حال اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثلاً، ہائیڈروجن سالمہ $(\mathrm{H}_2)$ پر غور کریں۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، جوہری زمینی حال (مساوات ۴.۸۰) جس کا مرکز مرکزہ 1 پر واقع ہے، میں ایک الیکٹران اور جوہری زمینی حال جس کا مرکز مرکزہ 2 پر واقع ہے، میں

[13] exchange force

ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہو گا۔ اگر الیکٹران بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت (یا "قوت مبادلہ"، اگر آپ اسے پسند کرتے ہیں) کوشش کرتی ہے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کرے (شکل ۵.۱-ا)، نتیجتاً منفی بار کا انبار دونوں پروٹان کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا ہے، جو **شریک گرفتی بندھ**[14] کا سبب بنتا۔[15] بد قسمتی سے الیکٹران در حقیقت فرمیان ہیں نہ کہ بوزان جس کی بنا پر منفی بار اطراف پر انبار ہو گا (شکل ۵.۱-ب) جو سالمہ کو ٹکڑے ٹکڑے کر دے گا!

ذرا رکیے گا! ہم چکر کو نظر انداز کرتے رہے ہیں۔ الیکٹران کا مقامی تفاعل موج اور چکر دار (جو الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرتا ہے) مل کر اس کا (درج ذیل) مکمل حال دیں گے۔[16]

$$\psi(\boldsymbol{r})\chi(s) \tag{۵.۲۳}$$

دو الیکٹرانی حال مرتب کرتے ہوئے ہمیں مبادلہ کے لحاظ سے صرف فضائی جزو کو عدم تشاکلی نہیں بلکہ مکمل حال کو عدم تشاکلی بنانا ہو گا۔ مرکب چکری حالات (مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸) پر نظر ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یکتا ملاپ خلاف تشاکل ہے (لہٰذا اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہو گا) جبکہ تینوں سہ تا حالات تشاکلی ہیں (لہٰذا انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہو گا)۔ ظاہر ہے کہ یوں یکتا حال بندھ پیدا کرے گا جبکہ سہ تا حال خلاف بندھ ہو گا۔ یقیناً کیمیا دان ہمیں بتاتے ہیں کہ شریک گرفتی بندھ کے لئے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران یک تا حال کے مکین ہوں اور ان کا کل چکر صفر ہو۔[17]

سوال ۵.۶: لامتناہی چوکور کنویں میں دو غیر متعامل ذرات جن میں سے ہر ایک کی کمیت $m$ ہے پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال $\psi_n$ (مساوات ۲.۲۸) اور دوسرا حال $\psi_l$ $(l \neq n)$ میں ہے۔ $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب اس صورت لگائیں جب (الف) ذرات غیر قابل ممیز ہوں، (ب) ذرات متماثل بوزان ہوں اور (ج) ذرات متماثل فرمیان ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں جن میں سے ایک حال $\psi_a$، دوسرا حال $\psi_b$، اور تیسرا حال $\psi_c$ میں پایا جاتا ہے۔ حالات $\psi_a$، $\psi_b$، اور $\psi_c$ کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے (مساوات ۵.۱۵، ۵.۱۶ اور ۵.۱۷ کی طرز پر) تین ذرہ حالات تیار کریں جو (الف) قابل ممیز ذرات، (ب) متماثل بوزان اور (ج) متماثل فرمیان کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہونا ہو گا، جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہو گا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکلی تفاعلات موج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے۔ **مقطع سلیٹر**[18] تیار کریں جس کی پہلی صف $\psi_a(x_1)$، $\psi_b(x_1)$

---

[14] covalent bond

[15] مراکزہ کے بیچ شراکتی الیکٹران جمع ہو کر جوہروں کو قریب کھینچ کر شریک گرفتی بند پیدا کرتے ہیں۔ اس کے لئے دو عدد الیکٹران لازمی نہیں۔ ہم حصہ ۷.۳ میں صرف ایک الیکٹران پر مبنی شریک گرفتی بند دیکھیں گے۔

[16] چکر اور مقام کے بیچ عدم ارتباط کی صورت میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ چکر اور فضائی محدد میں حال کو علیحدہ کرنا ممکن ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ ہم میدان چکر حاصل کرنے کا احتمال، ذرے کے مقام پر منحصر نہیں ہو گا۔ ارتباط کی موجودگی میں عمومی حال، سوال ۴.۵۵ کی طرز پر، خطی ملاپ $\psi_+(\boldsymbol{r})\chi_+ + \psi_-(\boldsymbol{r})\chi_-$ کا روپ اختیار کرے گا۔

[17] بے احتیاطی میں ہم عموماً کہتے ہیں کہ الیکٹران ایک دوسرے کے مخالف صف بند ہیں (ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان)۔ یہ ضرورت سے زیادہ سادہ صورت ہو گی چونکہ یہی کچھ $m = 0$ سہ تا حال کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ درست فقرہ یہ ہو گا: "وہ یک تا تشکیل میں ہیں"۔

[18] Slater determinant

$\psi_c(x_1)$، وغیرہ ہو گی اور اسی طرح اس کے باقی صف ہوں گے (یہ طریقہ کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہے)۔ $\psi_a(x_2)$، $\psi_b(x_2)$، $\psi_c(x_2)$، وغیرہ ہو گی، اس کی دوسری صف

## ۵.۲ جوہر

ایک معادل جوہر جس کا جوہری عدد $Z$ ہو، ایک بھاری مرکزہ جس کا بار $Ze$ ہو اور جس کو (کمیت $m$ اور بار $-e$ کے) $Z$ الیکٹران گھیرتے ہوں پر مشتمل ہو گا۔ اس نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔[۱۹]

$$H = \sum_{j=1}^{Z}\left\{-\frac{h^2}{2m}\nabla_j^2 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{Ze^2}{r_j}\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\sum_{j\neq k}^{Z}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|} \tag{۵.۲۴}$$

قوسین میں بند جزو، مرکزہ کے برقی میدان میں $j$ ویں الیکٹران کی حرکی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے؛ دوسرا مجموعہ (جو ماسوائے $j = k$، تمام $j$ اور $k$ پر لیا گیا ہے) الیکٹرانوں کی باہمی قوت دفع سے وابستہ مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے (جہاں $\frac{1}{2}$ اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دو بار گنا گیا ہے)۔ ہمیں تفاعل موج $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots \boldsymbol{r}_Z)$ کیلئے درج ذیل شروڈنگر مساوات:

$$H\psi = E\psi \tag{۵.۲۵}$$

حل کرنی ہو گی۔ البتہ الیکٹران متماثل فرمیان ہیں، لہٰذا، تمام حل قابل قبول نہیں ہوں گے: صرف وہ حل قابل قبول ہوں گے جن میں مکمل حال (مقام اور چکر):

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_z)\chi(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \cdots, \boldsymbol{s}_Z), \tag{۵.۲۶}$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکلی ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے مکین نہیں ہو سکتے ہیں۔

بد قسمتی سے شروڈنگر مساوات کو مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیملٹنی کے لئے، ماسوائے سادہ ترین صورت $Z = 1$ (ہائیڈروجن)، ٹھیک حل نہیں کیا جا سکتا ہے (کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا ہے)۔ عملاً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے ابواب میں غور کیا جائے گا؛ ابھی میں الیکٹران کی قوت دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کیفی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ ۵.۲.۱ میں ہم ہیلیم کے زمینی حال اور ہیجان حالات پر غور کریں گے جبکہ حصہ ۵.۲.۲ میں ہم زیادہ بڑے جوہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

---

[۱۹] مرکزہ کو ساکن تصور کیا گیا ہے۔ مرکزہ کی حرکت کو تخفیف شدہ کمیت (سوال ۵.۱) کے ذریعہ شامل کرنا صرف دو جسمی نظام کے لئے ممکن ہے؛ خوش قسمتی سے مرکزہ کی کمیت الیکٹران کی کمیت سے اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ درکار درستگی، ہائیڈروجن کے لئے بھی، قابل نظر انداز ہوتی ہے (سوال ۵.۲-ا دیکھیں)، اور زیادہ بھاری جوہروں کے لئے یہ مزید کم ہو گی۔ مرکزہ کی متناہی جسامت، اضافیتی درستگیاں اور الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی باہم عمل کے زیادہ دلچسپ اثرات پائے جاتے ہیں۔ ان پر آنے والے ابواب میں غور کیا جائے گا، تاہم یہ تمام "خالص کولمب" جوہر، جسے مساوات ۵.۲۴ بیان کرتی ہے، میں انتہائی چھوٹی درستگیاں ہیں۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیملٹنی کے لیے آپ شروڈنگر مساوات (مساوات ۵.۲۵) کا حل $(\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, ... \boldsymbol{r}_Z))$ حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ اس سے ایک ایسا مکمل تشاکلی تفاعل اور ایک مکمل خلاف تشاکلی تفاعل کس طرح بنا پائیں گے جو شروڈنگر مساوات کو اسی توانائی کیلئے مطمئن کرتا ہو۔

### ۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے سادہ جوہر ہیلیم $(Z = 2)$ ہے۔ اس کا ہیملٹنی

$$H = \left\{ -\frac{h^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1} \right\} + \left\{ -\frac{h^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2} \right\} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \tag{۵.۲۷}$$

(بار $2e$ مرکزہ کے) دو ہائیڈروجنی ہیملٹنی، ایک الیکٹران 1 اور ایک الیکٹران 2، کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ توانائی دفع پر مشتمل ہو گا۔ یہ آخری جزو ہماری پریشانیوں کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر قابل علیحدگی ہو گی اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس (مساوات ۴.۷۲) اور چار گنا بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) [وجہ سمجھ نہ آنے کی صورت میں سوال ۴.۱۶ پر دوبارہ نظر ڈالیں] کے ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi_{nlm}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{n'l'm'}(\boldsymbol{r}_2) \tag{۵.۲۸}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہو گی جہاں $E_n = -13.6/n^2\,\text{eV}$ ہو گا۔

$$E = 4(E_n + E_{n'}) \tag{۵.۲۹}$$

بالخصوص زمینی حال

$$\psi_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi_{100}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{100}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3}e^{-2(r_1+r_2)/a} \tag{۵.۳۰}$$

ہو گا (مساوات ۴.۸۰ دیکھیں) اور اس کی توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$E_0 = 8(-13.6\,\text{eV}) = -109\,\text{eV} \tag{۵.۳۱}$$

چونکہ $\psi_0$ تشاکلی تفاعل ہے لہٰذا چکری حال کو خلاف تشاکلی ہونا ہو گا اور یوں ہیلیم کا زمینی حال یک تا تشکیل میں ہو گا، جس میں چکر ایک دوسرے کے "مخالف صف بند" ہوں گے۔ یقیناً حقیقت میں ہیلیم کا زمینی حال یک تا ہی ہے، تاہم اس کی تجرباتی حاصل توانائی $-78.975\,\text{eV}$ ہے جو مساوات ۵.۳۱ سے کافی مختلف ہے۔ یہ زیادہ حیرت کی بات نہیں ہے: ہم نے الیکٹران کی توانائی دفع کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو چھوٹی

مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار (مساوات ۵.۲۷ دیکھیں) ہے جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی کم ہو کر $-109\,\mathrm{eV}$ کی بجائے $-79\,\mathrm{eV}$ ہو جائے گی (سوال ۵.۱۱ دیکھیں)۔

ہیلیم کے ہیجان حالات:

$$\psi_{nlm}\psi_{100} \tag{۵.۳۲}$$

ہائیڈروجنی زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ہیجان حال میں دوسرے الیکٹران، پر مشتمل ہو گا۔ [دونوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں ڈالنے سے ایک الیکٹران فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے، جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر استمراریہ $(E > 0)$ میں دھکیلتا ہے، اور یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہیلیم باردار یہ $(He^{+})$ حاصل ہو گا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے ہیں؛ سوال ۵.۹ دیکھیں] ہم ہمیشہ کی طرح تشاکلی اور خلاف تشاکلی ملاپ تیار کر سکتے ہیں (مساوات ۵.۱۰)؛ اول الذکر خلاف تشاکلی چکر تشکیل (یک تا) کے ساتھ جائے گا، جنہیں **نزد ہیلیم**[20] کہتے ہیں، جبکہ موخر الذکر کو تشاکلی چکر تشکیل (سہ تا) درکار ہو گی اور انہیں **ہیلیم پرست**[21] کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً نزد ہیلیم ہو گا؛ جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ ۵.۱.۲ میں دریافت کیا، تشاکلی فضائی حال الیکٹرانوں کو قریب لاتا ہے، جس کی بنا پر ہم توقع کرتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی باہم متعامل توانائی زیادہ ہو گی، اور یقیناً تجربات سے تصدیق ہوتی ہے کہ ہیلیم پرست کے لحاظ سے نزد ہیلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے (شکل ۵.۲ دیکھیں)۔

سوال ۵.۹:

ا. فرض کریں کہ آپ ہیلیم جوہر کے دونوں الیکٹران کو $n = 2$ حال میں رکھتے ہیں؛ خارجی الیکٹران کی توانائی کیا ہو گی؟

ب. ہیلیم باردار یہ $He^{+}$ کے طیف پر (مقداری) تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہیلیم کی توانائیوں کی سطح پر درج ذیل صورت میں (کیفی) تجزیہ کریں۔ (ا) اگر الیکٹران متماثل بوزان ہوتے، (ب) اگر الیکٹران قابل ممیز ذرات ہوتے (لیکن ان کی کمیت اور بار ایک جیسے ہوں)۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی $\frac{1}{2}$ ہے لہٰذا چکری تشکیلات یک تا اور سہ تا ہوں گے۔

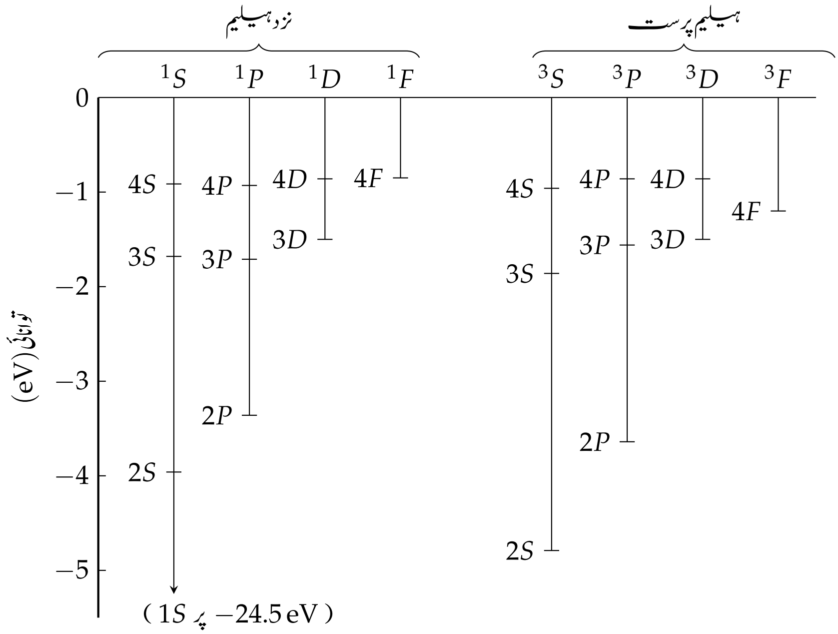
سوال ۵.۱۱:

ا. مساوات ۵.۳۰ میں دیے گئے حال $\psi_0$ کیلئے $\langle (1/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \rangle$ کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کروی محدد استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو $\boldsymbol{r}_1$ پر رکھیں تا کہ

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2}.$$

ہو۔ پہلے $\mathrm{d}^3\,\boldsymbol{r}_2$ کا تکمل حل کریں۔ زاویہ $\theta_2$ کے لحاظ سے تکمل آسان ہے، بس مثبت جذر لینا یاد رکھیں۔ آپ کو $r_2$ تکمل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہو گا؛ پہلا $0$ سے $r_1$ تک اور دوسرا $r_1$ سے $\infty$ تک۔ جواب: $\frac{5}{4a}$

[20] parahelium
[21] orthohelium




شکل ۵.۲: ہیلیم کی توانائیوں کے سطح (علامتیت کی وضاحت حصہ ۵.۲.۲ کی گئی ہے)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نزدہیلیم کی توانائیاں مطابقتی ہیلیم پرست سے زیادہ ہیں۔انتصابی پیمانہ بارداره ہیلیم کے زمینی حال ($He^+ \quad : \quad 4 \times (-13.6)\text{eV} \quad = \quad -54.4\,\text{eV}$) کے لحاظ سے ہیں۔؛ کسی بھی حال کی کل توانائی جاننے کی خاطر 54.4 eV منفی کریں۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہیلیم کے زمینی حال میں الیکٹران کی باہمی متعامل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں اور اس کو $E_0$ (مساوات ۵.۳۱) کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمین حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں، لہٰذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہو گا۔)

### ۵.۲.۲ دوری جدول

ہماری جوہروں کے زمینی حال الیکٹرانی تشکیل تقریباً اسی طرح جوڑ کر حاصل کیے جاتے ہیں۔ پہلی تخمین میں (انکی باہمی توانائی دفع کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے) بار $Z_e$ کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذروی ہائیڈروجنی حالات $(n, l, m)$، جنہیں **مدارچے**[۲۲] کہتے ہیں، کے انفرادی الیکٹران مکین ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوزان (یا قابل ممیز ذرات) ہوتے تب یہ زمینی حال $(1, 0, 0)$ میں گر جاتے اور کیمیا اتنا دلچسپ نہ ہوتا۔ حقیقت میں الیکٹران متماثل فرمیان ہیں، جن پر پالی اصول مناعت لاگو ہوتا ہے، لہٰذا کسی ایک مدارچہ کے صرف دو الیکٹران مکین ہو سکتے ہیں (ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان؛ بلکہ یہ کہنا زیادہ بہتر ہو گا، کہ یک تا تشکیل حال میں)۔ کسی بھی $n$ کی قیمت کے لئے $n^2$ ہائیڈروجنی تفاعلات موج پائے جاتے ہیں (جن میں سے ہر ایک کی توانائی $E_n$ ہو گی)، یوں $n = 1$ **خول**[۲۳] میں دو الیکٹرانوں کی جگہ ہو گی، $n = 2$ خول میں آٹھ، $n = 3$ میں اٹھارہ، اور $n$ ویں خول میں $2n^2$ الیکٹرانوں کی جگہ ہو گی۔ کیفی طور پر بات کرتے ہوئے **دوری جدول**[۲۴] کے افقی صف، ہر ایک انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے (اگرچہ یہ پوری کہانی نہیں ہے؛ اگر ایسا ہوتا، انکی لمبائیاں 2، 8، 18، 32، 50، وغیرہ ہوتیں نا کہ 2، 8، 8، 18، 18، وغیرہ؛ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹران کا باہم دفع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے)۔

ہیلیم میں، $n = 1$ خول بھرا ہو گا، لہٰذا اگلے جوہر لتھیم $(Z = 3)$ کو $n = 2$ خول میں ایک الیکٹران رکھنا ہو گا۔ اب $n = 2$ کے لئے $l = 0$ یا $l = 1$ ہو سکتا ہے؛ تیسرا الیکٹران ان میں سے کس ایک کا انتخاب کرے گا؟ (چونکہ بوہر توانائی $n$ پر منحصر ہوتی ہے نا کہ $l$ پر) لہٰذا الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک جیسی ہو گی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا پر الیکٹران کی توانائی دفع $l$ کی کم سے کم قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیار حرکت الیکٹران کو بیرونی رخ دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا زیادہ مرکزہ سے دور ہو گا اتنا مرکزہ، اندرونی الیکٹرانوں کے زیادہ **پس پردہ**[۲۵] ہو کر اوجھل ہو گا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا بار $Ze$ "نظر" آتا ہے جب کہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے $e$ سے کچھ زیادہ بار نظر آتا ہے۔) یوں کسی بھی ایک خول میں کم سے کم توانائی کا حال (یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران) $l = 0$ ہو گا، اور بڑھتے $l$ کے ساتھ توانائی بڑھے گی۔ اس طرح لتھیم میں تیسرا الیکٹران مدارچہ $(2, 0, 0)$ کا مکین ہو گا۔ اگلا جوہر (بیریلیم جس کا $Z = 4$ ہے) بھی اسی حال میں ہو گا (پس اس کا چکر "الٹ رخ" ہو گا) لیکن بوران $(Z = 5)$

[۲۲] orbitals
[۲۳] shell
[۲۴] periodic table
[۲۵] screened

کو $l = 1$ استعمال کرنا ہو گا۔

اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون $(Z = 10)$ کو پہنچتے ہیں جہاں $n = 2$ خول مکمل بھرا ہو گا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر $n = 3$ خول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ اس صف کے آغاز میں دو جوہر (سوڈیم اور مگنیشیم) کا $l = 0$ ہے اور اس کے بعد (سلور[۲۶] سے آرگن تک) چھ ایسے جوہر ہیں جن کا $l = 1$ ہو گا۔ آرگن کے بعد ہم "توقع" کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے $n = 3$ اور $l = 2$ ہو گا؛ البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران کا مرکزہ کو پس پردہ کرنے کا اثر اتنا زور پکڑ تا ہے کہ اگلا خول بھی اس کے نظر ہو جاتا ہے (یعنی یہ خول بھی اوجھل ہو جاتا ہے) لہٰذا پوٹاشیم $(Z = 19)$ اور کلشیم $(Z = 20)$، $n = 3$، $l = 2$ کی بجائے $n = 4$، $l = 0$ منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دوبارہ نیچے اتر کر $n = 3$ اور $l = 2$ (اسکینڈیم تا جست)، اور اس کے بعد $n = 4$، $l = 1$ (گیلیم تا کرپٹان) اٹھاتے ہیں، اور یہاں پہنچ کر ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف $(n = 5)$ میں چھلانگ لگا کر بعد میں $n = 4$ خول کے $l = 2$ اور $l = 3$ بھرتے ہیں۔

یہاں جوہری حالات کے تسمیہ جس کو تمام کیمیادان اور ماہر طبیعیات استعمال کرتے ہیں پر تبصرہ کرنا ضروری ہو گا۔ اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے طیف پیمائی کاروں کو معلوم ہو گی کہ $l = 0$ کو کیوں $s$ کہتے ہیں، $l = 1$ کو $p$، $l = 2$ کو $d$، اور $l = 3$ کو کیوں $f$ کہتے ہیں؛ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راس پر آ گئے اور انہوں نے لاطینی حروف تہجی کے تحت ($g$، $h$، $i$، اور $j$ کو نظر انداز کرتے ہوئے، $k$، $l$، وغیرہ)[۲۷] نام دیے۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو $nl$ کی جوڑی ظاہر کرتی ہے جہاں (عدد) $n$ حال کو اور (حرف) $l$ مدارچی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے؛ کوانٹم عدد $m$ کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نما میں حال کے مکین الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تشکیل

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^2 \tag{۵.۳۳}$$

کہتی ہے کہ مدارچہ $(1,0,0)$ میں دو الیکٹران، مدارچہ $(2,0,0)$ میں دو الیکٹران جبکہ مدارچہ $(2,1,1)$، $(2,1,0)$ اور $(2,1,-1)$ کے کسی ملاپ میں دو الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حال ہے۔

اس مثال میں دو الیکٹران ایسے ہیں جن کا مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد ایک (1) ہے، لہٰذا کل مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد $L$ (چھوٹے $l$ کی بجائے بڑا $L$ جو انفرادی ذرہ کی نہیں بلکہ کل کو ظاہر کرتا ہے) 2، 1، یا 0 ہو سکتا ہے۔ ساتھ ہی، $(1s)$ کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یکتا حال بندھن میں ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہو گا؛ یہی کچھ $(2s)$ کے دو الیکٹران کے لئے بھی ہو گا، لیکن $(2p)$ کے دو الیکٹران یا تو یکتا انتظام اور یا سہ تا انتظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کوانٹائی عدد $S$ (کل کو ظاہر کرنے کے لئے یہاں بھی بڑا حرف استعمال ہو گا) 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ میزان کل (مدارچی جمع چکر) $J$ کی قیمت 3، 2، 1، یا 0 ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو **قواعد ہنڈ**[۲۸] (سوال ۵.۱۳ دیکھیں) سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نتیجہ کو درجہ ذیل علامتی

---

[۲۶] aluminium

[۲۷] خول $n = 1$ کا نام $K$، $n = 2$ کا نام $L$، $n = 3$ کا نام $M$، وغیرہ رکھے گئے۔ خولوں کے نام $M$ سے شروع ہو کر لاطینی حروف تہجی کے ترتیب سے ہیں۔

[۲۸] Hund's Rules

روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$^{2S+1}L_J \tag{۵.۳۴}$$

(جہاں $S$ اور $J$ اعداد جبکہ $L$ (جو کل کو ظاہر کرتا ہے) بڑا حرف ہو گا۔ کاربن کا زمینی حال $^3P_0$ ہے؛ اس کا کل چکر 1 ہے (جس کی بنا پر 3 لکھا گیا ہے)، کل مداری زاویائی معیار حرکت 1 ہے (لہٰذا $P$ لکھا گیا ہے) اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے (لہٰذا 0 لکھا گیا ہے)۔ جدول ۵.۱ میں دوری جدول کے ابتدائی چار صف کے لئے انفرادی تشکیلات اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات ۵.۳۴ کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔[۲۹]

سوال ۵.۱۲:

ا. دوری جدول کے ابتدائی دو صف (نیون تک) کے لئے مساوات ۵.۳۳ کے روپ میں الیکٹران تشکیلات پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۵.۱ کے ساتھ کریں۔

ب. ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائیٹروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳:

ا. **ہنڈ کا پہلا قاعدہ**[۳۰] کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسی ہونے کی صورت میں وہ حال جس کا کل چکر $S$ زیادہ سے زیادہ ہو، کی توانائی کم سے کم ہو گی۔ ہیلیم کے ہیجان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔

ب. **ہنڈ کا دوسرا قاعدہ**[۳۱] کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہوا وہ حال جس کا زیادہ سے زیادہ کل مداری زاویائی معیار حرکت $L$ ہو، کی توانائی کم سے کم ہو گی۔ کاربن کے لئے $L = 2$ کیوں نہیں ہے؟ اشارہ: یاد رہے کہ "سیڑھی کا بالائی سر" $(M_L = L)$ تشاکلی ہے۔

ج. **ہنڈ کا تیسرا قاعدہ**[۳۲] کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول $(n, l)$ نصف سے زیادہ بھرا نا ہو، تب کم سے کم توانائی کی سطح کے لئے $J = |L - S|$ ہو گا؛ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب $J = L + S$ کی توانائی کم سے کم ہو گی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۱۲-ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کریں۔

د. قواعد ہن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ خلاف تشاکل مقام حال (اور خلاف تشاکل مقام حال کے ساتھ تشاکلی چکری حال) استعمال ہو گا، سوال ۵.۱۲-ب میں کاربن اور نائیٹروجن میں در پیش مشکلات سے چھٹکارا حاصل کریں۔ اشارہ: کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر "سیڑھی کے بالائی سر" کو دیکھیں۔

سوال ۵.۱۴: (دوری جدول کے چھٹے صف میں عنصر 66) ڈسپروزیم کا زمینی حال $^5I_8$ ہے۔ اس کے کل چکر، کل مدار چے، اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کے کوانٹائی اعداد کیا ہوں گے؟ ڈسپروزیم کے الیکٹران تشکیل کا خاکہ تجویز کریں۔

---

[۲۹] کرپٹان، عنصر 36 کے بعد، صورت حال زیادہ پیچیدہ ہو جاتی ہے (حالات کے ترتیب میں مہین ساخت زیادہ بڑا کردار ادا کرنے لگتا ہے) لہٰذا یہ صفحہ پر جگہ کی کمی نہیں تھی جس کی وجہ سے جدول کو یہاں اختتام پذیر کیا گیا۔

[۳۰] Hund's first rule

[۳۱] Hund's second rule

[۳۲] Hund's third rule

جدول ۵.۱: دوری جدول کے اولین چار قطاروں کے الیکٹران تشکیلات

| تشکیل | | عنصر | Z |
|---|---|---|---|
| $^2S_{1/2}$ | $(1s)$ | H | 1 |
| $^1S_0$ | $(1s)^2$ | He | 2 |
| $^2S_{1/2}$ | $(\mathrm{He})(2s)$ | Li | 3 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{He})(2s)^2$ | Be | 4 |
| $^2P_{1/2}$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)$ | B | 5 |
| $^3P_0$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)^2$ | C | 6 |
| $^4S_{3/2}$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)^3$ | N | 7 |
| $^3P_2$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)^4$ | O | 8 |
| $^2P_{3/2}$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)^5$ | F | 9 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{He})(2s)^2(2p)^6$ | Ne | 10 |
| $^2S_{1/2}$ | $(\mathrm{Ne})(3s)$ | Na | 11 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2$ | Mg | 12 |
| $^2P_{1/2}$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)$ | Al | 13 |
| $^3P_0$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)^2$ | Si | 14 |
| $^4S_{3/2}$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)^3$ | P | 15 |
| $^3P_2$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)^4$ | S | 16 |
| $^2P_{3/2}$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)^5$ | Cl | 17 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{Ne})(3s)^2(3p)^6$ | Ar | 18 |
| $^2S_{1/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)$ | K | 19 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2$ | Ca | 20 |
| $^2D_{3/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)$ | Sc | 21 |
| $^3F_2$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^2$ | Ti | 22 |
| $^4F_{3/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^3$ | V | 23 |
| $^7S_3$ | $(\mathrm{Ar})(4s)(3d)^5$ | Cr | 24 |
| $^6S_{5/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^5$ | Mn | 25 |
| $^5D_4$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^6$ | Fe | 26 |
| $^4F_{9/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^7$ | Co | 27 |
| $^3F_4$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^8$ | Ni | 28 |
| $^2S_{1/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)(3d)^{10}$ | Cu | 29 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}$ | Zn | 30 |
| $^2P_{1/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)$ | Ga | 31 |
| $^3P_0$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^2$ | Ge | 32 |
| $^4S_{3/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^3$ | As | 33 |
| $^3P_2$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^4$ | Se | 34 |
| $^2P_{3/2}$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^5$ | Br | 35 |
| $^1S_0$ | $(\mathrm{Ar})(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6$ | Kr | 36 |

## ۵.۳ ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گرفتی[۳۳] الیکٹران میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر کسی مخصوص "موروثی" مرکزہ کے کولمب میدان سے آزاد، تمام قلمی جال کے مخفیہ کے زیر اثر حرکت کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم دو انتہائی سادہ نمونوں پر غور کریں گے: پہلا نمونہ سمرفلڈ کا الیکٹران گیس نظریہ ہے جس میں (سرحد کے علاوہ) باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور ان الیکٹران کو (لامتناہی چوکور کنویں کے تین ابعادی مماثل کی طرح) ڈبے میں آزاد ذرات تصویر کیا جاتا ہے؛ اور دوسرا نمونہ نظریہ بلوخ ہے جو الیکٹران کے باہمی دفع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کی قوت کشش کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے۔ یہ نمونے ٹھوس اجسام کی کوانٹائی نظریے کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں، لیکن اس کے باوجود یہ "جمود" کے حصول میں پالی حصول مناعت کے گہرے کردار پر اور موصل، غیر موصل اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتے ہیں۔

### ۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس

فرض کرے ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اضلاع $l_x$ ، $l_y$ اور $l_z$ ہیں اور اس جسم کے اندر الیکٹران پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہوتی، ماسوائے ناقابل گزر دیواروں کے۔

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۵.۳۵}$$

شروڈنگر مساوات،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

کارتیسی محدد میں علیحدہ ہوتی ہے: $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ جہاں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = E_x X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = E_y Y; \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = E_z Z$$

اور $E = E_x + E_y + E_z$ ہوں گے۔ اب

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, \quad k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, \quad k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

[۳۳] valence

لکھ کر درج ذیل عمومی حل حاصل ہوں گے۔

$$X(x) = A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x), \quad Y(y) = A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y),$$
$$Z(z) = A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z)$$

سرحدی شرائط کے تحت $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$ لہٰذا $B_x = B_y = B_z = 0$ اور $X(l_x) = Y(l_y) = Z(l_z) = 0$ ہوں گے اور یوں

$$k_x l_x = n_x \pi, \quad k_y l_y = n_y \pi, \quad k_z l_z = n_z \pi \tag{۵.۳۶}$$

ہوں گے جہاں ہر $n$ ایک مثبت عدد صحیح ہو گا۔

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots \tag{۵.۳۷}$$

(معمول شدہ) تفاعلات موج:

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right) \tag{۵.۳۸}$$

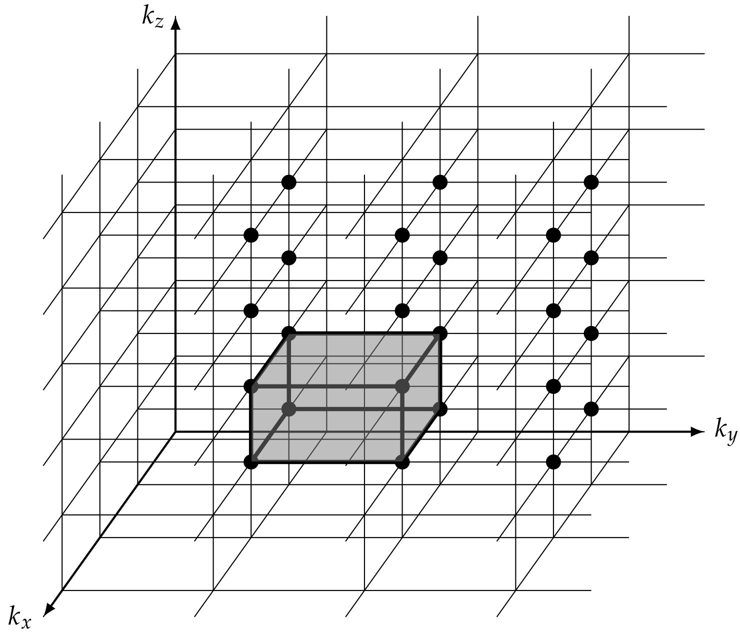
ہوں گے اور اجازتی توانائیاں:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2}\right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{۵.۳۹}$$

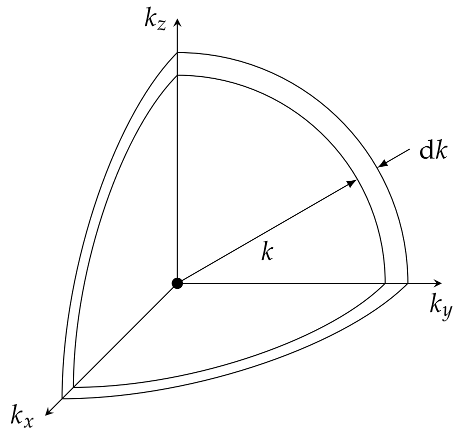
ہوں گی، جہاں **سمتیہ موج**[۳۴] $\boldsymbol{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ کی مقدار $k$ ہے۔
ایک تین ابعادی فضا جس کے محور $k_x$، $k_y$، $k_z$ ہوں کا تصور کریں جس میں

$$k_x = \frac{\pi}{l_x}, \frac{2\pi}{l_x}, \frac{3\pi}{l_x}, \dots$$
$$k_y = \frac{\pi}{l_y}, \frac{2\pi}{l_y}, \frac{3\pi}{l_y}, \dots$$
$$k_z = \frac{\pi}{l_z}, \frac{2\pi}{l_z}, \frac{3\pi}{l_z}, \dots$$

[۳۴] wave vector




شکل ۵.۳: آزاد الیکٹران گیس۔ جال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک ''ڈبا'' کو سیاہ دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبے کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔




شکل ۵.۴: کروی پوست کا $k$ فضا میں ایک مثمن۔

پر سیدھی سطحیں پائے جاتی ہوں؛ اس فضا میں ہر انفرادی نقطہ تقاطع، منفرد یک ذراتی حال دیگا (شکل ۵.۳)۔ اس حال کا ہر خانہ، اور یوں ہر حال، $k$ فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم $V \equiv l_x l_y l_z$ ہے۔

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V} \tag{۵.۴۰}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں $N$ جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے $q$ آزاد الیکٹران دیتا ہو۔ (عملاً، کسی بھی کلاں بین جسامت کے چیز کے لئے $N$ کی قیمت بہت بڑی ہو گی، جس کی گنتی ایوگادرو عدد میں کی جائے گی؛ جبکہ $q$ ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہو گا۔) اگر الیکٹران بوزان (یا قابل ممیز ذرات) ہوتے تب وہ زمینی حال $\psi_{111}$ میں سکونیت[۳۵] اختیار کرتے۔ تاہم حقیقت میں الیکٹران متماثل فرمیان ہیں جن پر پالی اصول مناعت کا اطلاق ہوتا ہے، لہٰذا کسی بھی حل کے صرف دو الیکٹران مکین ہو سکتے ہیں۔ یوں یہ الیکٹران $k$ فضا میں رداس $k_F$ کے کرہ کا ایک مثمن[۳۶] بھرتے ہیں؛ اس رداس کو اس حقیقت سے تعین کیا جا سکتا ہے کہ الیکٹران کے ہر ایک جوڑے کو $\frac{\pi^3}{V}$ حجم درکار ہو گا (مساوات ۵.۴۰)۔

$$\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right) = \frac{Nq}{2}\left(\frac{\pi^3}{V}\right)$$

[۳۵] میں یہاں فرض کر رہا ہوں کہ ایسا کوئی حراری یا دیگر اضطراب نہیں پایا جاتا جو ٹھوس جسم کو مجموعی زمینی حال سے اٹھاتا ہو۔ میں "ٹھنڈے" ٹھوس جسم کی بات کر رہا ہو، اگرچہ جیسا آپ سوال ۵.۱۶-ج میں دیکھیں گے، ٹھوس اجسام، رہائشی درجہ حرارت سے بہت زیادہ درجہ حرارت پر بھی موجودہ نقطہ نظر سے "ٹھنڈے" ہوتے ہیں۔

[۳۶] کیونکہ، $N$ بہت بڑا عدد ہے لہٰذا ہمیں حال کے اصل دنتی سطح اور کرہ کی اس ہموار سطح میں فرق کرنے کی ضرورت نہیں جو اس کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے۔

یوں

$$k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tag{۵.۴۱}$$

ہو گا جہاں

$$\rho \equiv \frac{Nq}{V} \tag{۵.۴۲}$$

**کثافت آزاد الیکٹران**[۳۷] (اکائی حجم میں آزاد الیکٹران کی تعداد) ہے۔

$k$ فضا میں آباد حالات (الیکٹران ان کے مکین ہیں) اور غیر آباد حالات (الیکٹران ان کے مکین نہیں ہیں) کی سرحد کو **فرمی سطح**[۳۸] کہتے ہیں (جس کی بنا پر زیر نوشت میں $F$ لکھا گیا)۔ اس سطح پر طاقتی توانائی کو **فرمی توانائی**[۳۹]، $E_F$ کہتے ہیں۔ آزاد الیکٹران گیس کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}} \tag{۵.۴۳}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے: ایک پوست جس کی موٹائی $\mathrm{d}k$ شکل ۵.۴ ہو کا حجم

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2)\,\mathrm{d}k$$

ہو گا، لہٰذا اس پوست میں الیکٹران حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{2[(1/2)\pi k^2\,\mathrm{d}k]}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی $\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ (مساوات ۵.۳۹) ہے لہٰذا پوست کی توانائی

$$\mathrm{d}E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{V}{\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k \tag{۵.۴۴}$$

اور کل توانائی درج ذیل ہو گی۔

$$E_{\text{کل}} = \frac{\hbar^2V}{2\pi^2m}\int_0^{k_F}k^4\,\mathrm{d}k = \frac{\hbar^2k_F^5V}{10\pi^2m} = \frac{\hbar^2(3\pi^2Nq)^{5/3}}{10\pi^2m}V^{-2/3} \tag{۵.۴۵}$$

---

[۳۷] free electron density
[۳۸] Fermi surface
[۳۹] Fermi energy

کوانٹم میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسا سادہ گیس میں اندرونی حراری توانائی $(U)$ کا ہوتا ہے۔ بالخصوص یہ دیواروں پر ایک دباو پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں $\mathrm{d}V$ کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کمی رونما ہو گی

$$\mathrm{d}E_{\text{کل}} = -\frac{2}{3}\frac{\hbar^2(3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m}V^{-5/3}\,\mathrm{d}V = -\frac{2}{3}E_{\text{کل}}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

جو بیرون پر کوانٹم دباو $P$ کا کیا ہوا کام $(\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}V)$ ہو گا۔ ظاہر ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{2}{3}\frac{E_{\text{کل}}}{V} = \frac{2}{3}\frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m}\rho^{5/3} \tag{۵.۴۶}$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس جسم اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا: ایک اندرونی کوانٹائی میکانی دباو توازن برقرار رکھتا ہے جس کا الیکٹران کے باہمی دفع (جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں) یا حراری حرکت (جس کو ہم خارج کر چکے ہیں) کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے، بلکہ جو متماثل فرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات **انحطاطی دباو**[40] کہتے ہیں اگرچہ "مناعتی دباو" بہتر اصطلاح ہو گی۔[41]

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹران کی اوسط توانائی $\frac{E_{\text{کل}}}{Nq}$ کو فرمی توانائی کی نسبت کی صورت میں لکھیں۔ جواب: $\frac{3}{5}E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبے کی کثافت $8.96\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے جبکہ اس کا جوہری وزن $63.5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ہے۔

ا. مساوات ۵.۴۳ استعمال کرکے $q = 1$ لیتے ہوئے تانبے کی فرمی توانائی کا حساب لگا کر نتیجہ کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں لکھیں۔

ب. الیکٹران کی مطابقتی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ اشارہ: $E_F = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$ لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹران کو غیر اضافیتی تصور کرنا خطرے سے باہر ہو گا؟

ج. تانبا کے لئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حراری توانائی ($k_B T$ جہاں $k_B$ بولٹزمن مستقل اور $T$ کیلون حرارت ہے)، فرمی توانائی کے برابر ہو گی؟ تبصرہ: اس کو **فرمی درجہ حرارت**[42] کہتے ہیں۔ جب تک اصل درجہ حرارت فرمی درجہ حرارت سے کافی کم ہو مادہ کو "ٹھنڈا" تصور کیا جا سکتا ہے اور اس میں الیکٹران نچلے ترین قابل پہنچ حال میں ہوں گے۔ کیونکہ تانبا $1356\,\mathrm{K}$ پر پگھلتا ہے لہٰذا ٹھوس تانبا ہر صورت ٹھنڈا ہو گا۔

د. الیکٹران گیس نمونہ میں تانبا کے لئے انحطاطی دباو (مساوات ۵.۴۶) کا حساب لگائیں۔

---

[40] degeneracy pressure

[41] ہم نے مساوات ۵.۴۱، مساوات ۵.۴۳، مساوات ۵.۴۵، اور مساوات ۵.۴۶ لامتناہی مستطیل جسم کے لئے اخذ کیے، تاہم یہ کسی بھی شکل کے ہر اس جسم کے لئے درست ہیں جس میں ذرات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔

[42] Fermi temperature

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباو میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نسبتی اضافہ کے تناسب کو **جسیم مقیاس**[43] کہتے ہیں۔

$$B = -V\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$$

دکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں $B = \frac{5}{3}P$ ہوگا اور سوال ۵.۱۶-د کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبے کے لئے جسیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربہ سے حاصل قیمت $13.4 \times 10^{10}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے؛ مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں، کیونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ حیرانی کی بات ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

### ۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم فاصلوں پر ساکن مثبت بار کے مرکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کا رویہ نمایاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں جسے یک بُعدی **ڈیراک کنگھی**[44] کہتے ہیں اور جو برابر فاصلوں پر ڈیلٹا تفاعل سوزنات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۵)۔[45] لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقتور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت آسان بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ $a$ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہو۔

$$V(x+a) = V(x) \tag{۵.۴۷}$$

**مسئلہ بلوخ**[46] کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لئے مساوات شروڈنگر،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{۵.۴۸}$$

کے حل سے مراد وہ تفاعل لیا جا سکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

$$\psi(x+a) = e^{iKa}\psi(x) \tag{۵.۴۹}$$

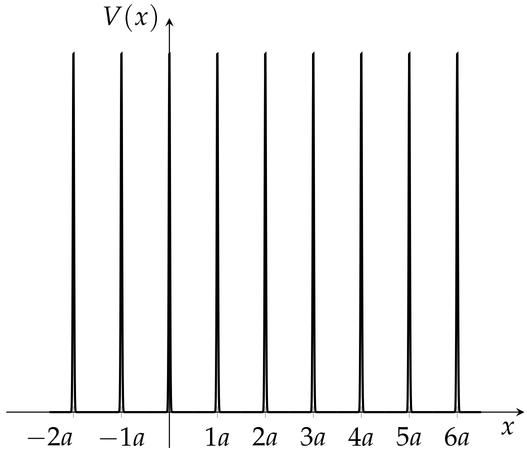
---

[43] bulk modulus

[44] Dirac comb

[45] ڈیلٹا تفاعلات کو نیچے رخ رکھنا زیادہ ٹھیک ہوتا، جو مرکزہ کے قوت کشش کو ظاہر کرتے؛ تاہم، ایسا کرنے سے مثبت توانائی حل کے ساتھ ساتھ منفی توانائی حل بھی حاصل ہوتے ہیں جس کی بنا پر حساب کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے (سوال ۵.۲۰ دیکھیں)۔ ہم یہاں مخفیہ کی دوریت کے اثرات میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ بظاہر کم معقول شکل منتخب کر کے مسئلے کا حل آسان ہوتا ہے؛ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ مراکزہ $\pm a/2$ ، $\pm 3a/2$ ، $\pm 5a/2$ ، وغیرہ پر پائے جاتے ہیں۔

[46] Bloch's theorem




شکل ۵.۵: ڈیراک کنگھی (مساوات ۵.۵۷)۔

جہاں $K$ ایک مستقل ہے (یہاں "مستقل" سے مراد ایسا تفاعل ہے جو $x$ کا تابع نہیں ہے؛ اگرچہ یہ $E$ کا تابع ہو سکتا ہے)۔

ثبوت: مان لیں کہ $D$ ایک "ہٹاو" عامل ہے:

$$Df(x) = f(x+a) \tag{۵.۵۰}$$

دوری مخفیہ مساوات ۵.۴۷ کی صورت میں $D$ ہیملٹنی کا مقلوبی ہو گا:

$$[D, H] = 0 \tag{۵.۵۱}$$

لہٰذا ہم $H$ کے ایسے امتیازی تفاعلات چن سکتے ہیں جو بیک وقت $D$ کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں: $D\psi = \lambda\psi$ یا درج ذیل۔

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \tag{۵.۵۲}$$

یہاں $\lambda$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا (اگر ایسا ہو تب چونکہ مساوات ۵.۵۲ تمام $x$ کے لئے مطمئن ہو گا لہٰذا ہمیں $\psi(x) = 0$ ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے)؛ کسی بھی غیر صفر مخلوط عدد کی طرح، اس کو قوت نمائی روپ میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\lambda = e^{iKa} \tag{۵.۵۳}$$

جہاں $K$ ایک مستقل ہو گا۔

□

اس مقام پر مساوات ۵.۵۳ امتیازی قدر $\lambda$ لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے، لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ $K$ "حقیقی" ہے اور یوں اگرچہ $\psi(x)$ خود غیر دوری ہے $\left|\psi(x)\right|^2$:

$$\left|\psi(x+a)\right|^2 = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{۵.۵۴}$$

دوری ہو گا، جیسا کہ ہم توقع کرتے آئے ہیں۔[47]

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لئے چلتا نہیں جائے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو $V(x)$ کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاں بین قلم میں کئی ایوگادرو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے، اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور، الیکٹران پر سطحی اثر قابل نظر انداز ہو گا۔ ہم مسئلہ بلوخ کو کارآمد رکھنے کی خاطر $x$ کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کا سر، بہت بڑی تعداد $N \approx 10^{23}$ دوری فاصلوں کے بعد، اس کے دم پر پایا جاتا ہو؛ باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط عائد کرتے ہیں۔

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \tag{۵.۵۵}$$

یوں (مساوات ۵.۴۹ کے تحت) درج ذیل ہو گا

$$e^{iNKa}\psi(x) = \psi(x)$$

لہٰذا $e^{iNKa} = 1$ یا $NKa = 2\pi n$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots) \tag{۵.۵۶}$$

(درج بالا مساوات میں حقیقتاً $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ ہو گا؛ تفصیل کے لئے مساوات ۵.۶۶ کے نیچے پیراگراف پڑھیں۔) موجودہ صورت میں $K$ لازماً حقیقی ہو گا۔ مسئلہ بلوخ کی افادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک خانہ (مثلاً $(0 \leq x < a)$ کے وقفہ) پر مسئلہ شروڈنگر حل کرنا ہو گا؛ مساوات ۵.۴۹ کی بار بار اطلاق سے باقی تمام جگہوں کے لئے حل حاصل ہو گا۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ در حقیقت (درج ذیل) نوکیلی ڈیلٹا تفاعل سوزنات (ڈیراک کنگھی) پر مشتمل ہو۔

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \tag{۵.۵۷}$$

(شکل ۵.۵ میں آپ تصور کریں گے کہ محور $x$ کو یوں دائروی شکل میں لپیٹا گیا ہے کہ $N$ ویں سوزن در حقیقت نقطہ $x = -a$ پر پائی جاتی ہے۔) اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے، لیکن یاد رہے، ہمیں دوریت کے اثرات

[47] یقیناً، آپ دلیل کو الٹ کر کے مساوات ۵.۵۴ سے آغاز کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ ثابت کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنا ممکن نہیں ہے، کیونکہ مساوات ۵.۴۹ کے پیچھے جزو ضربی کو $x$ کا تفاعل ہونے کی اجازت صرف مساوات ۵.۵۴ دیتی ہے۔

میں صرف دلچسپی ہے؛ کلاسیکی **کرانگ وپینی نمونہ**[۴۸] میں دہراتا ہوا مستطیل مخفیہ استعمال کیا گیا، جو اب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے۔ خطہ $(0 < x < a)$ میں مخفیہ صفر ہو گا لہٰذا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi,$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi,$$

ہو گا جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \tag{۵.۵۸}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \qquad (0 < x < a). \tag{۵.۵۹}$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبدا کے بائیں جانب پہلے خانہ میں تفاعل موج درج ذیل ہو گا۔

$$\psi(x) = e^{-iKa}[A\sin k(x+a) + B\cos k(x+a)], \qquad (-a < x < 0). \tag{۵.۶۰}$$

نقطہ $x = 0$ پر $\psi$ لازماً استمراری ہو گا لہٰذا

$$B = e^{-iKa}[A\sin(ka) + B\cos(ka)] \tag{۵.۶۱}$$

ہو گا؛ اس کے تفرق میں ڈیلٹا تفاعل کی زور کے براہ راست متناسب عدم استمرار پایا جائے گا (مساوات ۲.۱۲۵، جس میں $\alpha$ کی علامت اُلٹ ہو گی، چونکہ یہاں کنووں کی بجائے سوزنات پائے جاتے ہیں):

$$kA - e^{-iKa}k[A\cos(ka) - B\sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}B \tag{۵.۶۲}$$

مساوات ۵.۶۱ کو $A\sin(ka)$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

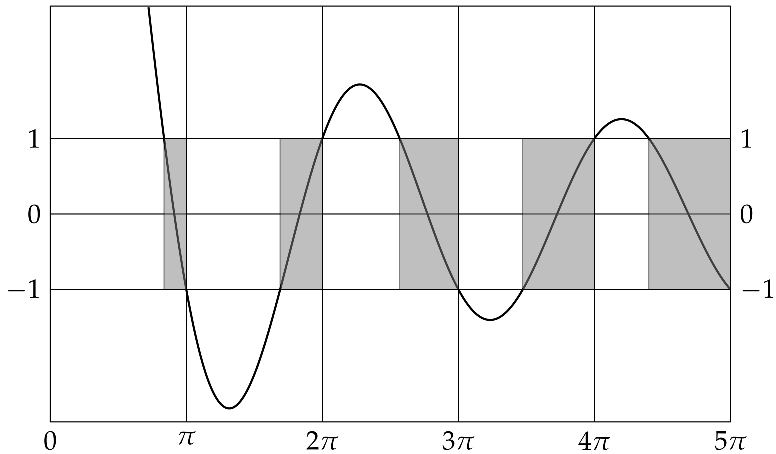
$$A\sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)]B \tag{۵.۶۳}$$

اس کو مساوات ۵.۶۲ میں پُر کر کے اور $k_B$ کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa}\cos(ka)] + e^{-iKa}\sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka)$$

---

[۴۸] Kronig-Penny model




شکل ۵.۶: تفاعل $f(z)$ (مساوات ۵.۶۶) کو $\beta = 10$ کے لئے ترسیم کر کے اجازتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درز (جہاں $|f(z)| > 1$ ہو گا) پائے جاتے ہیں۔

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka) \tag{۵.۶۴}$$

یہ وہ بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرانگ و پینی مخفیہ کے لئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہو گا، لیکن جو خدوخال ہم دیکھنے جا رہے ہیں، وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

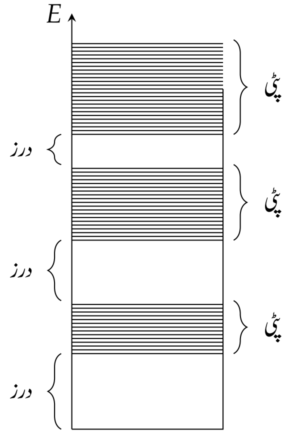
مساوات ۵.۶۴ متغیر $k$ کی ممکنہ قیمتیں، لہٰذا اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہے۔ علامتیت کو سادہ بنانے کی غرض سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$z \equiv ka, \quad \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \tag{۵.۶۵}$$

جس سے مساوات ۵.۶۴ کا دایاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$f(z) \equiv \cos(z) + \beta\frac{\sin(z)}{z} \tag{۵.۶۶}$$

مستقل $\beta$، ڈیلٹا تفاعل کے "زور" کا، بے بُعدی ناپ ہے۔ شکل ۵.۶ میں میں نے $\beta = 10$ کے لئے $f(z)$ کو ترسیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ $f(z)$ سعت $(-1, +1)$ سے باہر بھٹکتا ہے، اور چونکہ $|\cos(Ka)|$ کی قیمت کسی صورت بھی 1 سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے، لہٰذا ایسے خطوں میں مساوات




شکل ۵.۷: دوری مخفیہ کی اجازتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

۵.۶۴ کا حل نہیں پایا جائے گا۔ یہ **درز**[۴۹] ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہیں؛ انکے بیچ اجازتی توانائیوں کی **پٹیاں**[۵۰] پائی جاتی ہیں۔ مساوات ۵.۵۶ کے تحت، $Ka = \frac{2\pi n}{N}$ ہو گا، جہاں $N$ ایک بہت بڑا عدد ہے، لہٰذا $n$ کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی اجازتی ہو گی۔ آپ تصور میں شکل ۵.۶ پر $\cos(\frac{2\pi n}{N})$ قیمت کے فاصلوں پر $+1$ (یعنی $n = 0$) سے لے کر نیچے $-1$ (یعنی $n = \frac{N}{2}$) تک اور واپس تقریباً $+1$ (یعنی $n = N - 1$) تک (جہاں بلوخ جزو ضربی $e^{iKa}$ دوبارہ چکر شروع کرتا ہے لہٰذا $n$ کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حل حاصل نہیں ہو گا) لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ہر لکیر کا $f(z)$ کے ساتھ تقاطع، ایک اجازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں $N$ حالات پائے جاتے ہیں، جو ایک دوسرے کے اتنے قریب قریب ہیں کہ عموماً مقاصد کے لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ ایک استمراریہ پیدا کرتے ہیں (شکل ۵.۷)۔ (یوں مساوات ۵.۵۶ میں $n = 0, \pm 1, \cdots$ کی بجائے $n = 0, 1, \cdots, N - 1$ ہو گا۔)

اب تک ہم نے اپنے مخفیہ میں صرف ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں $Nq$ الیکٹران ہوں گے، جہاں ہر ایک جوہر $q$ تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصول مناعت کے بنا پر صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے مکین ہو سکتے ہیں، یوں $q = 1$ کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے، اگر $q = 2$ ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل بھریں گے، اگر $q = 3$ ہو تب یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (تین ابعاد میں، اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں، پٹیوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے، لیکن اجازتی پٹیاں جن کے بیچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں، تب بھی ہو گا؛ دوری مخفیہ کی نشانی ہی پٹی دار ساخت ہے۔)

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو، ممنوع خطہ سے گزر کر اگلی پٹی تک چھلانگ کے لئے ایک الیکٹران کو

[۴۹] gaps
[۵۰] bands

نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہو گی؛ ایسا مادہ برقی طور پر **غیر موصل**[۵۱] ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری نہ ہو تب ایک الیکٹران کو ہیجان[۵۲] کرنے کے لئے بہت کم توانائی درکار ہو گی؛ اس طرح کا مادہ عموماً **موصل**[۵۳] ہو گا۔ ایک غیر موصل میں، زیادہ یا کم $q$ والے، چند جوہر کی **ملاوٹ**[۵۴] سے، اگلی بالا پٹی میں چند اضافی الیکٹران آجاتے ہیں یا سابقہ بھری پٹی میں چند **خول**[۵۵] پیدا ہو جاتے ہیں؛ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے؛ ایسے اشیاء **نیم موصل**[۵۶] کہلاتے ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً اچھا موصل ہونا ہو گا چونکہ انکے اجازتی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا ہے۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ فرق صرف پٹی دار نظریہ کی مدد سے سمجھا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

ا. مساوات ۵.۵۹ اور مساوات ۵.۶۳ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیلٹا تفاعل مخفیہ میں ایک ذرے کا تفاعل موج درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa}\sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

(معمول زنی مستقل $C$ تعین کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔)

ب. البتہ پٹی کے بالائی سر پر جہاں $z$ مستقل $\pi$ کا عدد صحیح مضرب ہو گا (شکل ۵.۶) سے (الف) $\psi(x) = 0$ حاصل ہو گا۔ ایسی صورت میں درست تفاعل موج تلاش کریں۔ دیکھیں کہ ہر ایک ڈیلٹا تفاعل پر $\psi$ کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی اجازتی پٹی کی تہہ پر، $\beta = 10$ کی صورت میں توانائی کی قیمت، تین بامعنی ہندسوں تک، تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے $\frac{\alpha}{a} = 1\,\text{eV}$ تصور کریں۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیلٹا تفاعل سوزنات کے بجائے ڈیلٹا تفاعل کنووں پر غور کر رہے ہیں (یعنی مساوات ۵.۵۷ میں $\alpha$ کی علامت الٹ ہے)۔ ایسی صورت میں شکل ۵.۶ اور شکل ۵.۷ طرز کے اشکال بنا کر تجزیہ کریں۔ مثبت توانائی حلوں کے لئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے (بس مساوات ۵.۶۶ میں موزوں تبدیلیاں لائیں)، لیکن منفی توانائی حلوں کے لئے آپ کو کام کرنا ہو گا؛ اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیں (جواب منفی $z$ تک وسیع ہو گا)۔ پہلی اجازتی پٹی میں کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دکھائیں کہ مساوات ۵.۶۴ سے متعین زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہیں۔ کونسی توانائیاں ایسی نہیں ہیں؟ اشارہ: $N = 1, 2, 3, 4, \ldots$ لیتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں $\cos(Ka)$ کی کیا ممکنہ قیمتیں ہوں گی؟

---

[۵۱] insulator

[۵۲] غیر مکمل بھری پٹی میں الیکٹران کی موجودہ توانائی سے معمولی زیادہ توانائی والا حال دستیاب ہو گا جس میں الیکٹران ہیجان ہو کر داخل ہو سکتا ہے۔

[۵۳] conductor

[۵۴] dope

[۵۵] hole

[۵۶] semiconductors

## ۵.۴ کوانٹم شماریاتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنے کم سے کم اجازتی توانائی تشکیل کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھاتے ہوئے بلا منصوب حراری سرگرمیوں کے بنا پر ہیجانی حالات ابھرنے شروع ہونگے جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر $T$ درجہ حرارت پر حراری توازن میں ایک بڑی تعداد $N$ کے ذرات پائے جاتے ہوں تب اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ذروی جس کو بلا منصوب منتخب کیا گیا ہو کی مخصوص توانائی $E_j$ ؟ ہوگی دھیان رہے کہ اس احتمال کا کوانٹم عدم تعیین کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے بالکل یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لئے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی ہم بات کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی بڑی ہوگی کہ یہ کسی صورت ممکن نہیں ہوگا کہ ہم ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھ سکیں چاہے یہ قابلِ تعین ہو یا نہ ہوں۔

**شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ** یہ ہے کہ **حراری توازن**[۵۷] میں ہر وہ منفرد حال جس کی ایک جیسی کل توانائی $E$ ہو ایک جتنا محتمل ہوگا۔ بلاواسطہ حراری حرکت کی بنا پر توانائی ایک ذروی سے دوسرا ذرہ ایک روپ حرکی، گردشی، گھومتی وغیرہ سے دوسری روپ میں منتقل ہوگی لیکن بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں بقا توانائی کی بنا پر کل مقررہ ہوگا۔ یہاں مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی لگاتار نئی تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتا ہے۔ یہ ایک گہرا مفروضہ ہے جو سوچنے کے قابل ہے **درجہ حرارت**[۵۸] $T$ حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی بس پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹم میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے لیکن چونکہ حالات غیر مسلسل ہیں لہٰذا یہ کلاسیکی نظریہ سے زیادہ آسان ہے اور اس کا فیصلہ کن انحصار اس بات پر ہوگا کہ یہ ذرات قابلِ ممیز، متماثل بوزان یا متماثل فرمیان ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے لہٰذا میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کروں گا تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

### ۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں حصہ 2.2 میں کمیت $m$ کے صرف تین باہم غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ ان کی کل توانائی درج ذیل ہوگی مساوات 2.27 دیکھیں

$$E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_A^2 + n_B^2 + n_C^2) \tag{۵.۶۷}$$

جہاں $n_A$ ، $n_B$ اور $n_C$ مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ اب تبصرہ جاری رکھنے کی خاطر فرض کریں کہ $E = 363(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2})$ یعنی درج ذیل

$$n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363. \tag{۵.۶۸}$$

---

[۵۷] thermal equilibrium
[۵۸] temperature

جیسے آپ تصدیق کر سکتے ہیں ہمارے پاس تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیرہ ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہو گا: تینوں اعداد گیارہ ہو سکتے ہیں دو اعداد تیرہ اور ایک پانچ جو تین مرتب اجتماعات میں ہو گا ایک عدد انّیس اور دو ایک یہاں بھی تین مرتب اجتماعات میں یا ایک عدد سترہ ایک ساٹھ اعر ایک پانچ چھ مرتب اجتماعات میں ہو سکتے ہیں۔ یوں $n_A, n_B, n_C$ درج ذیل میں سے ایک ہو گا:

$$
\begin{aligned}
&(11, 11, 11)\\
&(13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13)\\
&(1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1)\\
&(5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5).
\end{aligned}
$$

اگر یہ ذرات قابلِ ممیز ہوں تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کوانٹم حال کو ظاہر کرے گا اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضہ کے تحت حراری توازن میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا ہوں کہ کونسا ذرہ کس یک ذروی حال میں پایا جاتا ہے بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں حال $\psi_n$ کی **تعداد مکین**[۵۹] $N_n$۔ ہم اس دن ذرہ حال کے تمام تعداد مکین کے اجتماع کو **تشکیل**[۶۰] کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال $\psi_{11}$ میں ہوں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \tag{۵.۶۹}$$

یعنی $N_{11} = 3$ باقی تمام صفر اگر دو حال $\psi_{13}$ میں اور ایک $\psi_5$ میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots) \tag{۵.۷۰}$$

یعنی $N_5 = 1, N_{13} = 2$ باقی تمام صفر اگر دو $\psi_1$ میں ایک $\psi_{19}$ میں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \tag{۵.۷۱}$$

یعنی $N_1 = 2, N_{19} = 1$ باقی تمام صفر اور اگر ایک ذروی $\psi_5$ میں ایک $\psi_7$ میں اور ایک $\psi_{17}$ میں تب تشکیل درج ذیل ہو گا

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \tag{۵.۷۲}$$

یعنی باقی تمام صفر $N_5 = N_7 = N_{17} = 1,$ ان تمام میں آخری تشکیل زیادہ سے زیادہ محتمل ہو گی چونکہ اسکو چھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص اجازتی توانائی $E_n$ حاصل کرنے کا احتمال $P_n$ کیا ہو گا؟ توانائی $E_1$ صرف اس صورت حاصل ہو گا جب ذرہ تیسری تشکیل

[۵۹] occupation number
[۶۰] configuration

مساوات 5.71 میں ہو اس تشکیل میں نظام ہونے کا اتفاق تیرہ میں سے تین ہے اور اس تشکیل میں $E_1$ کے حصول کا احتمال $\frac{2}{3}$ لہٰذا $\frac{2}{13} = (\frac{3}{13}) \times (\frac{2}{3}) = P_1$ ۔ آپ $E_5$ کو تشکیل دو مساوات 5.70 تیرہ میں سے تین کا امکان جس کا احتمال $\frac{1}{3}$ یا تشکیل چار مساوات 5.72 تیرہ میں سے چھ امکان اور احتمال $\frac{1}{3}$ لہٰذا $\frac{3}{13} = (\frac{3}{13}) \times (\frac{1}{3}) + (\frac{6}{13}) \times (\frac{1}{3}) = P_5$ ۔ آپ $E_7$ کو صرف چار سے حاصل کر سکتے ہیں لہٰذا $\frac{2}{13} = (\frac{6}{13}) \times (\frac{1}{3}) = P_7$ ۔ اسی طرح $E_{11}$ صرف پہلی تشکیل سے مساوات 5.69 سے تیرہ میں سے ایک امکان اور احتمال ایک کے ساتھ حاصل ہوگا لہٰذا $(\frac{1}{13}) = P_{11}$ ہوگا۔ اسی طرح $P_{13} = (\frac{3}{13}) \times (\frac{2}{3}) = \frac{2}{13}$ ، $P_{17} = (\frac{6}{13}) \times (\frac{1}{3}) = \frac{2}{13}$ اور $P_{19} = (\frac{3}{13}) \times (\frac{1}{3}) = \frac{1}{13}$ ہوگا۔ انکی تصدیق درج ذیل سے ہوگی

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1.$$

یہ قابلِ ممیز ذرات کے لئے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات متماثل فرمیان ہوتے اپنی آسانی کے لئے چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے یا اگر آپ چاہیں تو یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر حال میں ہیں ضرورت خلاف تشاکلیت کی بنا پر پہلی تین تشکیلات جو دو یا اس سے بھی برا تین ذرات کے ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں خارج امکان ہوں گے لہٰذا چوتھی تشکیل میں صرف ایک حال ہوگا سوال 5.22 الف دیکھیں۔ متماثل فرمیان کے لئے $\frac{1}{3} = P_{17} = P_7 = P_5$ ہوگا اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہے اس کے برعکس اگر ذرات متماثل بوزان ہوتے تب ضرورت تشاکلیت ہر تشکیل میں صرف ایک حال کی اجازت دیتا سوال 5.22 ب دیکھیں۔ لہٰذا $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{2}{3}) = P_1$ ، $P_5 = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_7$ ، $\frac{1}{4} = (\frac{1}{4}) \times (1) = P_{11}$ ، $\frac{1}{6} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{2}{3}) = P_{13}$ ، $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_{17}$ اور $\frac{1}{12} = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{3}) = P_{19}$ ہوتا۔ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دکھانا تھا کہ ذرات کی قسم پر حالات کی شمار کس طرح منحصر ہے۔ ایک لحاظ سے ایک حقیقی صورت حال سے جہاں $N$ ایک بہت بڑا عدد ہوگا سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھا۔ چونکہ $N$ کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تقسیم جو قابلِ ممیز ذرات کے لئے اس مثال میں $1 = N_{17} = N_7 = N_5$ ہے پائے جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شماریاتی نقطہ نظر سے باقی تمام امکانات کو رد کیا جا سکتا ہے۔ توازن کی صورت میں انفرادی ذرہ توانائیوں کی تقسیم درحقیقت انکی زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل میں تقسیم ہے۔ اگر یہ $N = 3$ کے لئے درست ہوتا جو کہ یہ نہیں ہے ہم قابلِ ممیز ذرات کے لئے $N = 3$ کی صورت میں اخذ کرتے $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$ میں حصہ 3.4.5 میں اس نقطہ پر دوبارہ آوں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عمومیت دیتے ہیں۔

سوال ۵.۲۲:

(الف) حال $\psi_5$ میں ایک حال $\psi_7$ میں ایک اور حال $\psi_{17}$ میں ایک متماثل تین فرمیان کا مکمل خلاف تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ تیار کریں۔

(ب) تین متماثل بوزان کے لئے مکمل تشاکل تفاعل موج $\psi(x_A, x_B, x_C)$ درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (ا)

تینوں حال $\psi_{11}$ میں ہوں،(ب)اگر دو $\psi_1$ اور ایک $\psi_{19}$ میں ہو،(ج)اگر ایک حال $\psi_5$ ایک حال $\psi_7$ اور ایک حال $\psi_{17}$ میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں یک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات ہیں جو حراری توازن میں پائے جاتے ہیں جن کی کل توانائی $E = \left(\frac{9}{2}\right)\hbar\omega$ ہے۔

(الف)اگر یہ تمام ایک جیسی کمیت کے قابل ممیز ذرات ہوں تب انکی کتنی عدد ممکن تشکیلات ہوں گے اور ہر ایک کے لئے کتنے منفرد تین ذرہ حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تشکیل کیا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذروی بلا منصوبہ منتخب کریں اور اسکی توانائی کی پیمائش کریں تب کیا قیمتیں متوقع ہوں گی؟ اور ہر ایک کا احتمال کیا ہوگا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیا ہوگی؟

(ب)یہی کچھ متماثل فرمیان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ 1.4.5 میں کیا۔

(ج)یہی کچھ متماثل بوزان کے لئے کریں چکر کو نظر انداز کریں۔

### ۵.۴.۲ عمومی صورت

آئیں اب ایک ایسی مخفیہ پر غور کریں جس کی یک ذرا توانائیاں $E_1$ $E_2$ $E_3$ ... انحطاط $d_1$ $d_2$ $d_3$ ... ہوں یعنی اس میں یک ذریں حالات کے تعداد $d_n$ جن کی توانائیاں $E_n$ ہیں فرض کریں ہم کمیت $m$ کے $N$ ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں ہم تشکیل $N_1$ $N_2$ $N_3$ ... میں دلچسپی رکھتے ہیں جہاں $N_1$ ذرات کی توانائی $E_1$ $N_2$ ذرات کی توانائی $E_2$ وغیرہ وغیرہ ہے سوال ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جا سکتا ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تشکیل کی مطابقتی کتنے منفرد حالات ہونگے اس کا جواب $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ اس بات پر منحصر ہوگا کہ آیا ذرات قابل ممیز متماثل فرمیان یا متماثل بوزان ہے لہٰذا ہم ان تینوں صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات قابل ممیز ہیں دستیاب $N$ ذرات میں سے کتنے طریقوں سے $N_1$ کو منتخب کر کے پہلا ٹوکرا میں رکھا جا سکتا ہے جواب: ثنائی عددی سر $N_1$ کو $N$ میں سے منتخب کرتا ہے

$$\binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \tag{۵.۷۳}$$

پہلا ذرہ $N$ مختلف طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے جس کے بعد $(N - 1)$ ذرات رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے $N - 1$ مختلف طریقے ہوں گے وغیرہ وغیرہ

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-N_1+1) = \frac{N!}{(N-N_1)!}$$

لیکن یہ $N_1$ ذرات کے $N_1!$ مختلف مرتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلی انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا لہٰذا ہم $N_1!$ سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات 73.5 حاصل ہوتا ہے اب پہلی ٹوکرا میں ان $N_1$ ذرات کو کتنی مختلف

طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے چونکہ پہلے ٹوکرا میں $d_1$ حالات ہیں لہٰذا ہر ایک ذروی کو $d_1$ مختلف طریقوں سے چنا جا سکتا ہے یوں ظاہر ہے کہ کل ممکنات $(d_1)^{N_1}$ ہونگے اس طرح ایک ٹوکرا جس میں $d_1$ منفرد متبادل ہوں میں کل آبادی $N$ میں سے $N_1$ ذرات منتخب کر کے رکھنے کے درج ذیل طریقے ہونگے

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}$$

دوسرے ٹوکرے میں صرف $(N-N_1)$ ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا

$$\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) \tag{۵.۷۴}$$
$$= \frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}\frac{(N-N_1-N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!}\dots \tag{۵.۷۵}$$
$$= N!\frac{d_1^{N_1}d_2^{N_2}d_3^{N_3}\dots}{N_1!N_2!N_3!\dots} = N!\prod_{n=1}^{infty}\frac{d_n^{N_n}}{N_n!} \tag{۵.۷۶}$$

یہاں رک کر اس نتیجہ کی تصدیق کیجیے گا مثال کے طور پر حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھیں متماثل فرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہٰذا اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کے کونسا ذرا کس حال میں ہے ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص ایک ذروی حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک $N$ ذرا حال ہوگا مزید واحد ایک ذروی کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے لہٰذا $N$ ویں ٹوکرا میں $N_n$ بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقے ہونگے اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{d_n!}{N_n!(d_n-N_n)!} \tag{۵.۷۷}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 دیکھ کر متماثل بوزان کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذروی حالات کہ ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک $N$ ذرہ حال ہوگا تاہم یہاں اس ایک ذروی حال کو بھرنے پر ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی یہاں $N$ وی ٹوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا ہم متماثل $N_n$ ذرات کو $d_n$ مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں غیر

مرتب اجتماعات کے سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے ہم ذرا کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں یوں مثال کے طور پر $d_n = 5$ اور $N_n = 7$ کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات دوسرے حال میں ایک ذروی تیسرے میں تین چوتھے میں ایک اور پانچویں میں کوئی ذرا نہیں پایا جاتا ہے دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد $N_n$ اور صلیبوں کی تعداد $d_n - 1$ ہیں جو ان نقطوں کو $d_n$ گروہ میں خانہ بند کرتے ہیں اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں $(N_n + d_n - 1)!$ مختلف طریقوں سے رکھا جا سکتا تھا تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک جیسے ہیں اور ان کو $N_n!$ مختلف مرتب اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا اسی طرح تمام صلیب معطل ہیں اور انہیں $(d_n - 1)!$ مختلف مرتب اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا یوں $N$ وی ٹوکرا میں $d_n$ یک ذروی حالات کو $N_n$ ذرات مختص کرنے کے درج ذیل منفرد طریقے ہونگے

$$\frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n} \tag{۵.۷۸}$$

جس کی بنا پر ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} \tag{۵.۷۹}$$

اس کی تصدیق کیجیے گا مثلاً حصہ 1.4.5 میں سوال 24.5 کے ساتھ

سوال ۵.۲۴: حصہ 1.4.5 میں مثال کے ساتھ مساوات 74.5، 75.5 اور 77.5 کی تصدیق کیجیے گا

سوال ۵.۲۵: مساوات 76.5 کو الکراجی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں غیر مرتب اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا آپ $d$ ٹوکریوں میں $N$ متماثل گیندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں اس سوال کی نقطہ نظر سے زیر نوشت میں ان کو نظر انداز کریں آپ تمام کے تمام $N$ کو تیسری ٹوکری میں یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسری ٹوکری میں یا تو کو پہلی اور تین کو تیسری ٹوکری میں اور باقی کو ساتویں ٹوکری میں وغیرہ وغیرہ رکھ سکتے ہیں اس کو صریحاً $N = 1$، $N = 2$، $N = 3$، اور $N = 4$ کی صورت میں دیکھیں یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے

### ۵.۴.۳ زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل

حراری توازن میں تمام حالات کا امکان ایک جتنا ہوگا یوں زیادہ سے زیادہ محتمل تشکیل $N_1, N_2, N_3, \dots$ وہ ہوگا جس کو سب سے زیادہ اعداد کی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو یہ وہ مخصوص تشکیل ہوگی جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N \tag{۵.۸۰}$$

اور

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E \tag{۵.۸۱}$$

پر پورا اترے اور جس کی $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو زیر شرائط $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$، $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت **لگرانج مضرب**[۶۱] کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے ہم ایک نیا تفاعل

$$G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \tag{۵.۸۲}$$

متعارف کر کے اس کے تمام تفرقات کو صفر کے برابر رکھتے ہیں

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0 \tag{۵.۸۳}$$

موجودہ صورت میں $Q$ کی بجائے $Q$ کی لوگارتھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے چونکہ لوگارتھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے لہٰذا $Q$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور $\ln(Q)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ایک ہی نقطہ پر پائے جائے گی لہٰذا ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$G \equiv \ln(Q) + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۸۴}$$

جہاں $\alpha$ اور $\beta$ لگرانج مضرب ہیں $\alpha$ اور $\beta$ کے لحاظ سے تفرقات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں یوں $N_n$ کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے اگر ذرات قابل ممیز ہوں تب مساوات 74.5 ہمیں کیوں دے گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} \big[N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)\big] + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big] \tag{۵.۸۵}$$

ہم مطابقتی تعداد مکین $N_n$ کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے **سٹرلنگ تخمین**[۶۲]

$$\ln(z!) \approx z\ln(z) - z \qquad\qquad z \ll 1 \tag{۵.۸۶}$$

بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \big[N_n \ln(d_n)\big] - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n\big] + \ln(N!) + \alpha N + \beta E \tag{۵.۸۷}$$

---

[۶۱] Lagrange multiplier

[۶۲] Stirling's approximation

یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۸۸}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر $N_n$ کے لیے حل کرتے ہوئے ہم قابل ممیز ذرات کی زیادہ سے زیادہ محتمل تعداد مکین حاصل کرتے ہیں

$$N_n = d_n e^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۸۹}$$

اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں تب $Q$ کی قیمت مساوات 75.5 دیگی لہٰذا درج ذیل ہو گا

(۵.۹۰)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big]$$

یہاں ہم $N_n$ کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ $N_n \gg d_n$ بھی فرض کرتے ہیں لہٰذا اسٹرلنگ تخمین دونوں اجزاء کے لیے قابل استعمال ہو گی ایسی صورت میں

(۵.۹۱)

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n)\ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n\Big] +$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۹۲}$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے $N_n$ کے لیے حل کر کے ہم متماثل فرمیان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمتیں $N_n$ حاصل کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n}{e}^{-(\alpha+\beta E_n)} \tag{۵.۹۳}$$

آخر میں اگر ذرات متماثل بوسن ہوں تب $Q$ کی قیمت مساوات 77.5 دیگی اور درج ذیل ہو گا

(۵.۹۴)

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!]\} + \alpha\Big[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n\Big] + \beta\Big[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n\Big]$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح $N_n \gg 1$ فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمین استعمال کرتے ہوئے

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty}\{(N_n + d_n - 1)\ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n-1)!] - \alpha N_n - \beta \tag{۵.۹۵}$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \tag{۵.۹۶}$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر $N_n$ کے لئے حل کرتے ہوئے ہم متماثل بوزان کی تعداد مکینوں کی زیادہ سے زیادہ محتمل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha+\beta E_n)} - 1} \tag{۵.۹۷}$$

فرمیان کی صورت میں استعمال کرتا تخمین کو استعمال کرتے ہوئے شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا سوال ۵.۲۶: ترخیم $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ کے اندر زیادہ سے زیادہ رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں لگرانج مضروب کی ترکیب سے تلاش کریں اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا

سوال ۵.۲۷:

ا. $z = 10$ کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فی صد خلل کتنا ہو گا

ب. خلل کو ایک فی صد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح $z$ کی کم سے کم قیمت کیا ہو گی

### ۵.۴.۴ $\alpha$ اور $\beta$ کے طبعی اہمیت

لگرانج مضروب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے منسلک بالترتیب مقدار معلوم $\alpha$ اور $\beta$ پائے گئے ریاضیاتی طور پر تعداد مکین مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو واپس ملط شرائط مساوات 78.5 اور 79.5 میں پر کرتے ہوئے تعین کیا جاتا ہے البتہ کسی مخفیہ کے لیے مجموعہ کے حصول میں ہمیں اجازتی توانائیاں $(E_n)$ اور ان کی انحطاط $(d_n)$ کا معلوم ہونا ضروری ہے میں سہ آبادی لامتناہی چوکور کنویں میں ایک جتنی کمیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعامل ذرات کی **کامل گیس**[۶۳] کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں اس سے ہم پر $\alpha$ اور $\alpha$ کی طبعی مفہوم عیاں ہوں گی

حصہ 1.3.5 میں ہم نے اجازتی توانائیاں اخذ کی مساوات 39.5

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \tag{۵.۹۸}$$

[۶۳] ideal gas

جہاں درج ذیل تھا

$$\boldsymbol{k} = \Big(\frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z}\Big)$$

پہلے کی طرح یہاں بھی ہم مجموعہ کو تکمل میں بدلتے ہیں جہاں $\boldsymbol{k}$ ایک استمراری متغیر ہے اور جہاں $\boldsymbol{k}$ فضا کے $\pi^3/V$ حجم میں ایک حال یا چکر $s$ کی صورت میں $2s+1$ حالات پائے جاتے ہیں مثمن اول میں کروی خولوں کو اپنی ٹوکریاں تصور کرتے ہوئے شکل 4.5 انحطاط یعنی ہر ٹوکری میں حالات کی تعداد درج ذیل ہو گی

$$d_k = \frac{1}{8}\frac{4\pi k^2\,\mathrm{d}k}{8(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2}k^2\,\mathrm{d}k \tag{۵.۹۹}$$

قابل ممیز ذرات مساوات 87.5 کیلئے پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^2\,\mathrm{d}k = Ve^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\Big(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}\Big)^{3/2} \tag{۵.۱۰۰}$$

دوسری مسلط شرط مساوات 79.5 درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2}e^{-\alpha}\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty e^{-\beta\hbar^2k^2/2m}k^4\,\mathrm{d}k = \frac{3V}{2\beta}e^{-\alpha}\Big(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\Big)^{3/2}$$

جس میں مساوات 98.5 سے $e^{-\alpha}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E = \frac{3N}{2\beta} \tag{۵.۱۰۱}$$

اگر آپ مساوات 97.5 میں جزو چکر $2s+1$ شامل کریں تو وہ اسی نقطہ پر حذف ہو جاتا ہے لہٰذا مساوات 99.5 تمام چکر کے لیے درست ہو گا مساوات 99.5 ہمیں درجہ حرارت $T$ پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ کا یاد دلاتی ہے

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}k_BT \tag{۵.۱۰۲}$$

جہاں $k_B$ بولٹزمن مستقل ہے یہ ہمیں $\beta$ اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے

$$\beta = \frac{1}{k_BT} \tag{۵.۱۰۳}$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین آبادی لامتناہی چوکور کنویں میں موجود ممیز ذرات کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ مختلف اشیاء کے لئے جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں $\beta$ کی قیمت ایک جیسی ہوگی یہ دلیل کی کتابوں میں دیا گیا ہے جس کو میں یہاں پیش نہیں کرتا میں مساوات 101.5 کو $T$ کی تعریف مان لیتا ہوں روایتی طور پر $\alpha$ جو مساوات 98.5 کی مخصوص صورت سے ظاہر ہے کہ $T$ کا تفاعل ہے کی جگہ **کیمیاوی مخفیہ**[۶۴]:

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \tag{۵.۱۰۴}$$

استعمال کرکے مساوات 87.5، 91.5، اور 95.5 کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی $\epsilon$ کے کسی ایک مخصوص یک ذرا حال میں ذرات کی بلند تر محتمل عدد دے کسی ایک توانائی کے حامل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حامل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے خاطر صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہوگا

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسول وبولٹزمن تقسیم} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}+1} & \text{فرمی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T}-1} & \text{بوس وآئنسٹائن} \end{cases} \tag{۵.۱۰۵}$$

قابل ممیز ذرات پر **میکسویل وبولٹزمن تقسیم**[۶۵]، متماثل فرمیان پر **فرمی وڈیراک تقسیم**[۶۶] اور متماثل بوزان پر **بوس وآئنسٹائن تقسیم**[۶۷] کا اطلاق ہوگا فرمی ڈیراک تقسیم $T0$ پر خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتا ہے

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

لہٰذا درج ذیل ہوگا

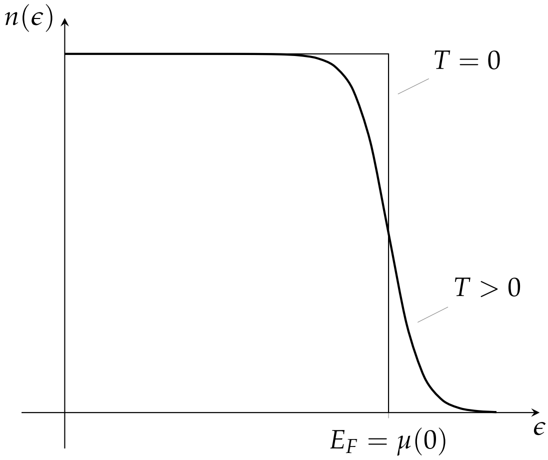
$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \tag{۵.۱۰۶}$$

توانائی $\mu(0)$ تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہونگے ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی مخفیہ عین فرمی توانائی ہوگی

$$\mu(0) = E_F \tag{۵.۱۰۷}$$

---

[۶۴] chemical potential
[۶۵] Maxwell-Boltzmann distribution
[۶۶] Fermi-Dirac distribution
[۶۷] Bose-Einstein distribution




شکل ۵.۸: فرمی و ڈیراک تقسیم برائے $T = 0$ اور صفر سے کچھ زیادہ $T$ کے لئے۔

درجہ حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فرمی ڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے شکل ۵.۸ ہم قابل ممیز ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت $T$ پر کل توانائی مساوات 99.5 درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \tag{۵.۱۰۸}$$

جبکہ مساوات 98.5 کے تحت کیمیاوی مخفیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\mu(T) = k_B T \Big[ \ln\Big(\frac{N}{V}\Big) + \frac{2}{3} \ln\Big(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\Big) \Big] \tag{۵.۱۰۹}$$

میں مساوات 87.5 کی بجائے مساوات 91.5 اور 95.5 استقبال کرتے ہوئے متماثل فرمیان اور متماثل بوزان کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا پہلی مسلط پابندی مساوات 78.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{(h^2k^2/2m)-\mu}/k_B T \pm 1} \,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۱۰}$$

جہاں مثبت علامت فرمیان کو اور منفی علامت بوزان کو ظاہر کرتی ہے دوسری مسلط پابندی مساوات 79.5 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{k^4}{e^{(h^2k^2/2m)-\mu}/k_B T \pm 1} \,\mathrm{d}k \tag{۵.۱۱۱}$$

ان میں سے پہلا $\mu(T)$ اور دوسرا $E(T)$ تعین کرتا ہے مثلاً موخر الذکر سے ہم مخصوص حراری استعداد $C = \partial E/\partial T$ حاصل کرتے ہیں بد قسمتی سے ان تکملات کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے چھوڑتا ہوں تاکہ آپ ان پر مزید غور کر سکیں سوال 28.5 اور 29.5 دیکھیں سوال

۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر متماثل فرمیان کے لیے مساوات 108.5 اور 109.5 کے تکملات کی قیمتیں حاصل کریں اپنے نتائج کا موازنہ مساوات 43.5 اور 45.5 کے ساتھ کریں دھیان رہے کہ مساوات 108.5 اور 109.5 میں الیکٹرانوں کے لیے اضافی جزو ضربی دو $(2)$ پایا جاتا ہے جو چکر انحطاط کو ظاہر کرتی ہے

سوال ۵.۲۹:

ا. بوزان کے لیے دکھائیں کے کیمیاوی مخفیہ ہر صورت میں کم سے کم اجازتی توانائی سے کم ہوگا اشارہ: $n(\epsilon)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے

ب. بالخصوص تمام $T$ کے لیے کامل بوس گیس کے لیے $\mu(T) < 0$ ہوگا ایسی صورت میں $N$ اور $V$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کے $T$ کم کرنے سے $\mu(T)$ یکسر بڑھے گا اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات 108.5 پر نظر ڈالیں

ج. حرارت $T$ کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحران پیدا ہوتا ہے جسے **بوس انجماد**[68] کہتے ہیں جب $\mu(T)$ صفر کو پہنچتا ہے تکمل کی قیمت $\mu = 0$ کے لیے حاصل کرتے ہوئے اس فاصل حرارت کسی کا کلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا اس فاصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہٰذا غیر مسلسل مجموعہ مساوات 78.5 کی جگہ استمراری تکمل مساوات 108.5 کا استعمال بے معنی ہو جائے گا اشارہ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}X = \Gamma(s)\zeta(s) \tag{۵.۱۱۲}$$

جہاں $\Gamma$ کو یولر کا **گیما تفاعل**[69] اور $\zeta$ کو **ریمان زیٹا تفاعل**[70] کہتے ہیں ان کی موضوع اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں

د. ہیلیم کے لیے حرارت فاصل تلاش کریں اس درج حرارت پر اس کی کثافت $0.15\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہوگی تبصرہ ہیلیم کی تجرباتی حاصل حرارت فاصل کی قیمت $2.17K$ ہے

### ۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف

نوریہ برقناطیسی میدان کے کوانٹا ایک چکر کے متماثل بوزان ہوتے ہیں تاہم ان کی خاصیت یہ ہے کہ یہ بے کمیت ذرات ہیں جس کی بنا پر یہ قدرتی طور پر اضافیتی ہیں ہم درج ذیل چار دعوے جو غیر اضافی کوانٹم میکانیات کا حصہ نہیں ہے کو قبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں (1) نوریہ کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک $E = h\nu = \hbar\omega$ دیتی ہے (2) عدد موج کے اور تعداد کا تعلق $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ہے جہاں $c$ روشنی

---

[68] Bose condensation
[69] gamma function
[70] Riemann zeta function

کی رفتار ہے (3) چکر کے صرف دو حالات ہو سکتے ہیں کوانٹم عدد $m$ کی قیمت $+1$ یا منفی $1$ ہو سکتی ہے تاہم یہ صفر نہیں ہو سکتی ہے (4) نوریوں کی تعداد بقائی مقدار نہیں ہے درجہ حرارت بڑھانے سے فی حجم نوریوں کی تعداد بڑھتی ہے جز و 4 کی موجودگی میں پہلی ملط پابندی مساوات 78.5 کا اطلاق یہاں نہیں ہوگا ہم مساوات 82.5 اور اس کی سادگی باقی آنے والی مساواتوں میں $0 \rightarrow \alpha$ پر کر کے جز و 4 کا اطلاق کر سکتے ہیں یوں نوریہ کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد مکین مساوات 95.5 درج ذیل ہوگا

$$N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} \tag{۵.۱۱۳}$$

ایک ڈبہ جس کا حجم $V$ ہو میں آزاد نوریوں کے لیے $d_k$ کی قیمت مساوات 97.5 کو چکر جز و 3 کی بنا پر دو سے ضرب دے کے حاصل ہوگا جس کو $k$ جز و 2 کی بجائے $\omega$ کی صورت میں لکھتے ہیں

$$d_k = \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^3\,\mathrm{d}\omega \tag{۵.۱۱۴}$$

یوں تعددی سعت $\mathrm{d}\omega$ میں کثافت توانائی $N_\omega\hbar\omega/V$ کی قیمت $\rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ہو گی جہاں $\rho\omega$ درج ذیل ہیں

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3(e^{\hbar\omega/k_BT} - 1)} \tag{۵.۱۱۵}$$

یہ **سیاہ جسم طیف**[۴۱] کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو مقناطیسی میدان کی حرارت $T$ پر توازن صورت میں فی اکائی حجم فی اکائی تعدد توانائی دیتی ہے اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل ۵.۹ میں ترسیم کیا گیا ہے

سوال ۵.۳۰:

ا. مساوات 113.5 استعمال کرتے ہوئے طول موج ساتھ $d\lambda$ میں کثافت توانائی تعین کریں اشارہ: $\bar{\rho}(\pi)d\lambda = \rho(\omega)d\omega$ لے کر $\bar{\rho}(\pi)$ کے لیے حل کریں

ب. **وائن قانون ہٹاو**[۴۲] اخذ کریں جو وہ طول موج دیتا ہے جس پر سیاہ جسم کی کثافت توانائی کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی

$$\lambda_{\text{بلند تر}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} m\boldsymbol{K}}{T} \tag{۵.۱۱۶}$$

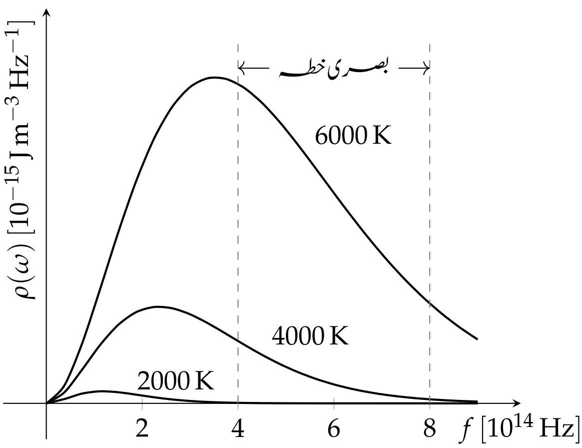
اشارہ: آپ کو کیلکولیٹر یا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ماورائی مساوات $5e^{-x} = (5 - x)$ حل کر کے اعدادی جواب تین بامعنی ہندسوں تک حاصل کرنا ہوگا

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسم اخراج میں کل کثافت توانائی کا **سٹیفن و بولٹزمن کلیہ**[۴۳] اخذ کریں

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{\pi^2k_B^4}{15\hbar^3c^3}\right)T^4 = (7.57 \times 10^{-16} Jm^{-3}K^{-3})T^4 \tag{۵.۱۱۷}$$

---

[۴۱] blackbody spectrum
[۴۲] Wien displacement law
[۴۳] Stefan–Boltzmann formula




شکل ۵.۹: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات 113.5

اشارہ مساوات 110.5 کو استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں یاد رہے کہ $z(4) = \pi^4/90$ ہو گا

سوال ۵.۳۲: فرض کریں یک بُعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ مساوات 43.2 میں دو غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت $m$ ہے فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلی ہیجان حال میں پایا جاتا ہے درج ذیل صورتوں میں $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ کا حساب کریں (الف) ذرات قابل ممیز ہے (ب) یہ متماثل بوزان ہے (ج) یہ متماثل فرمیان ہے چکر کو نظر انداز کریں اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چکر حال میں تصور کریں

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہوں اور تین منفرد یک ذروی حالات $\psi_a(x)$ ، $\psi_b(x)$ ، اور $\psi_c(x)$ دستیاب ہوں ایک دونوں سے مختلف کتنے تین ذرہ حالات درج ذیل صورت میں تیار کیے جا سکتے ہیں (الف) اگر رات قابل ممیز ہو (ب) اگر یہ متماثل بوزان ہو (ج) اگر یہ متماثل فرمیان ہوں ضروری نہیں کہ ذرات مختلف حالات میں ہوں قابل ممیز ذرات کی صورت میں $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے

سوال ۵.۳۴: دو آبادی لامتناہی چوکور کنویں میں غیر متعامل الیکٹرانوں کی فرمی توانائی کا حساب کریں فی اکائی رقبہ الیکٹرانوں کی تعداد $\sigma$ لیں

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے جنہیں **سفید بونا**[۴۷] کہتے ہیں کو تجاذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباو روکتی ہے مساوات 46.5 مستقل کثافت فرض کرتے ہوئے ایسے جسم کا رداس $R$ درج ذیل طریقے سے دریافت کیا جا سکتا ہے

ا. کل الیکٹران توانائی مساوات 45.5 کو رداس مرکزہ پروٹان جمع نیوٹران $N$ فی مرکزہ الیکٹران کی تعداد $q$ اور الیکٹران کی کمیت $m$ کی صورت میں لکھیں

---

[۴۷] white dwarf

ب. ایک یکساں کثافت کرہ کی تجاذبی توانائی تلاش کریں اپنے جواب کو عالمگیر تجاذبی مستقل $G$، $R$، $N$، اور مرکزہ کی کمیت $M$ کی صورت میں لکھیں آپ دیکھیں گے کہ تجاذبی توانائی منفی ہو گی

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر جزو (الف) اور جزو (ب) کی مجموعی توانائی کم سے کم ہو جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2N^{1/3}}$$

دھیان رہے کہ کمیت بڑھنے سے رداس گھٹ رہا ہے ماسوائے $N$ کے تمام مستقلات کی قیمتیں پر کریں اور $q = 1/2$ لیں حقیقت میں جوہری عدد بڑھتے ہوئے $q$ کی قیمت معمولی سی کم ہوتی ہے لیکن ہمارے لئے یہی کافی ہے جواب: $R = 7.6 \times 10^25N^{-1/3}$

د. ہماری سورج کے برابر کمیت کے سفید بونا کا رداس کلومیٹروں میں حاصل کریں

ھ. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ جزو (د) میں سفید بونا کی فرمی توانائی کو الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے موازنہ کریں آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے سوال 36.5 دیکھیے گا

سوال ۵.۳۶: ہم کلاسیکی حرکی توانائی $E = p^2/2m$ میں اضافیتی کلیہ $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0^2$ پر کرتے ہوئے حصہ 1.3.5 کی آزاد الیکٹران گیس نظریہ کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ ہو گا بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں $E \approx pc = \hbar ck$ ہو گا

ا. مساوات 44.5 میں $\hbar^2k^2/2m$ کی جگہ بالائے اضافیتی فقرہ $\hbar ck$ پر کر کے $E_{tot}$ کل حاصل کریں

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کے لئے سوال 35.5 کے جزو (الف) اور (ب) کو دوبارہ حل کریں آپ دیکھیں گے کہ $R$ کی قیمت سے قطع نظر کوئی مستحکم کم سے کم قیمت نہیں پائے جائے گی اگر کل توانائی مثبت ہو تب انحطاطی قوتیں تجاذبی قوت سے تجاوز کرے گی جس کی بنا پر ستارہ پھولے گا اس کے برعکس اگر کل منفی ہو تب تجاذبی قوتیں جیتی ہیں جس کی بنا پر ستارہ منہدم ہو گا مرکزویہ کی وہ فاصل تعداد ہندسی معلوم کریں جس کے لیے $N > N_c$ پر تجاذبی انہدام واقع ہوا اس کو **چندرشیکھر حد**[45] کہتے ہیں جواب: $2.4 \times 10^{57}$ مطابقتی ستارہ کی کمیت کیا ہو گی اپنے جواب کو سورج کی کمیت کے مضرب کے صورت میں لکھیں اس سے بھاری ستارے سفید بونا نہیں بناتے بلکہ مزید منہدم ہو کر اگر حالات درست ہوں **نیوٹران ستارے**[46] کو جنم دیتے ہیں

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر **مخالف بیٹا تحلیل**[47] $e^- + p^+ \rightarrow n + v$ تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے جس کی بنا پر نیوٹرینو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں آخر کار نیوٹران انحطاطی دباو انہدام کو روکتا ہے جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران انحطاطی قوتوں نے کیا سوال 35.5 دیکھیں ہماری سورج کے برابر کمیت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں ساتھ ہی نیوٹران فرمی توانائی کا حساب کر کے ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جا سکتا ہے

---

[45] Chandrasekhar limit
[46] neutron star
[47] inverse beta decay

سوال ۵.۳۷:

ا. تین ابعادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ سوال 38.4 قابل ممیز ذرات کا کیمیاوی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں یہاں مساوات 78.5 اور 79.5 میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک حاصل کی جا سکتی ہیں یاد رہے کہ لامتناہی چوکور کنویں کی مثال میں تکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا تھا ہندسی تسلسل[۷۸]

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{۵.۱۱۸}$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

حاصل ہو گا اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں جواب

$$E = \frac{3}{2}N\hbar\omega\left(\frac{1+e^{-\hbar\omega/k_BT}}{1-e^{-\hbar\omega/k_BT}}\right) \tag{۵.۱۱۹}$$

ب. تحدیدی حد $k_BT \ll \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں

ج. مسئلہ مساوی خانہ بندی[۷۹] کی روشنی میں کلاسیکی حد $k_BT \gg \hbar\omega$ پر تبصرہ کریں تین ابعادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے آزادی کے درجات[۸۰] کتنے ہوں گے

---

[۷۸] geometric series
[۷۹] equipartition theorem
[۸۰] degrees of freedom

# باب ٦

# غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

## ٦.١ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب

### ٦.١.١ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً یک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات:

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0 \tag{٦.١}$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $\psi_n^0$ کا مکمل سلسلہ

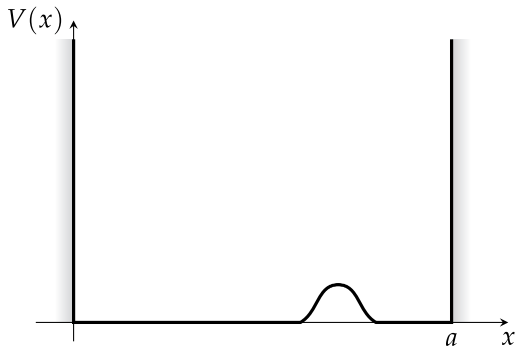
$$\langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm} \tag{٦.٢}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی اقدار $E_n^0$ حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑ ڈال کر؛ شکل ٦.١) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار جاننا چاہیں گے:

$$H\psi_n = E_n \psi_n \tag{٦.٣}$$

تاہم انتہائی خوش قسمتی کے علاوہ کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کے ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں گے۔ **نظریہ اضطراب** کو غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر قدم بقدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ لکھ کر آغاز کرتے ہیں

$$H = H^0 + \lambda H' \tag{٦.٤}$$




شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

جہاں $H'$ اضطراب ہے زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے ہم یہاں $\lambda$ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک $(1)$ کر دی جائے گی اور $H$ اصل ہیملٹنی ہو گا اس کے بعد ہم $\psi_n$ اور $E_n$ کو $\lambda$ کی طاقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots \tag{۶.۵}$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots \tag{۶.۶}$$

یہاں $n$ ویں امتیازی قدر کی قیمت میں **اول رتبی تصحیح** کو $E_n^1$ ظاہر کرتا ہے جبکہ $n$ ویں امتیازی تفاعل میں **اول رتبی تصحیح** کو $\psi_n^1$ ظاہر کرتا ہے اسی طرح $E_n^2$ اور $\psi_n^2$ دوم رتبی تصحیح ہوں گے وغیرہ وغیرہ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$(H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$
$$= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \cdots]$$

یا $\lambda$ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$H^0\psi_n^0 + \lambda(H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0) + \lambda^2(H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1) + \cdots$$
$$= E_n^0\psi_n^0 + \lambda(E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0) + \lambda^2(E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0) + \cdots$$

کمتر رتبہ $\lambda^0$ کی صورت میں اس سے $H^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے جو کوئی نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱) رتبہ اول $(\lambda^1)$ تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^1 + H'\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0 \tag{۶.۷}$$

رتبہ دوم $(\lambda^2)$ تک درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi_n^2 + H'\psi_n^1 = E_n^0\psi_n^2 + E_n^1\psi_n^1 + E_n^2\psi_n^0 \tag{۶.۸}$$

وغیرہ وغیرہ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے $\lambda$ استعمال کیا اب اس کی ضرورت نہیں رہی لہٰذا اس کی قیمت ایک، $1$، کر دیں)

### ۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مساوات ۶.۷ کا $\psi_n^0$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر تکمل لیتے ہیں

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle + \langle\psi_n^0|H'\psi_n^0\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^0|\psi_n^1\rangle + E_n^1\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle$$

تاہم $H^0$ ہرمشی ہے لہٰذا

$$\langle\psi_n^0|H^0\psi_n^1\rangle = \langle H^0\psi_n^0|\psi_n^1\rangle = E_n^0\langle\psi_n^0|\psi_n^1\rangle$$

ہو گا جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا مزید $\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہو گا

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \tag{۶.۹}$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹم میکانیات میں غالباً سب سے اہم مساوات ہے یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت توانائی کی اول رتبی تصحیح ہو گی

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کی غیر مضطرب تفاعلات موج مساوات 28.2 درج ذیل ہیں

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی تہہ کو مستقل مقدار $V_0$ اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں شکل ۶.۲ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں

حل: یہاں $H' = V_0$ ہو گا لہٰذا $n$ ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہو گی

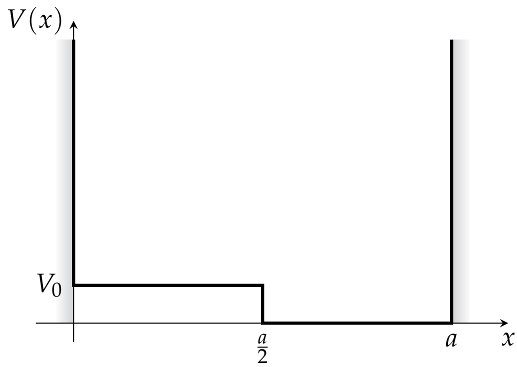
$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|V_0|\psi_n^0\rangle = V_0\langle\psi_n^0|\psi_n^0\rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہونگے جی ہاں تمام کی تمام $V_0$ مقدار سے اوپر اٹھتی ہیں یہاں حیرانگی کی بات یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی[1] اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت میں شکل ۶.۳ ہو گا۔

---

[1] یہاں کوئی ی چیز لامتناہی چوکور کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے لہٰذا یہی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہو گا


شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب




شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں ہے لیکن اول رتبہ تخمین کی نقطہ نظر سے معقول جواب ہے۔ □

مساوات 9.6 ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتی ہے تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی غرض سے ہم

مساوات 7.6 کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہے

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \tag{۶.۱۰}$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے لہذا یہ $\psi_n^1$ میں ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں لہذا کسی بھی تفاعل کی طرح $\psi_n^1$ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۱}$$

اگر $psi_n^1$ / مساوات 10.6 کو مطمئن کرتا ہوں تب کسی بھی مستقل $\alpha$ کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha\psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا لہذا ہم جزو $\psi_n^0$ کو منفی کر سکتے ہیں ایسے ہی کرتے ہوئے مساوات 11.6 کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں ہم مساوات 10.6 میں مساوات 11.6 پر کرتے ہوئے یہ جانتے ہوئے کہ غیر مضطرب شروڈنگر مساوات مساوات 1.6 کو $\psi_m^0$ مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\psi_m^0 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0$$

اس کا $\psi_l^0$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\sum_{m\neq n}(E_m^0 - E_n^0)c_m^{(n)}\langle\psi_l^0|\psi_m^0\rangle = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle + E_n^1\langle\psi_l^0|\psi_n^0\rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہو گا اور ہمیں دوبارہ مساوات 9.6 ملے گی اگر $l \neq n$ ہو تو درج ذیل ہو گا

$$(E_l^0 - E_n^0)c_l^{(n)} = -\langle\psi_l^0|H'|\psi_n^0\rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۲}$$

لہذا درج ذیل حاصل ہو گا

$$\psi_n^1 = \sum_{m\neq n}\frac{\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle}{(E_n^0 - E_m^0)}\psi_m^0 \tag{۶.۱۳}$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انحطاطی ہو نسب نما کوئی ی مسئلہ کھڑا نہیں کرے گا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہوتا) ہاں اس صورت میں جب دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں

ایک جفتی ہو تب مساوات 12.6 میں نسب نما میں صفر پایا جائے گا جو ہمیں مصیبت میں ڈالے گا ایسی صورت میں انحطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی جس پر حصہ 2.6 میں غور کیا جائے گا یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے توانائی کی اول رتبی تصحیح $E_n^1$ مساوات 9.6 دیتی ہے جبکہ تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح $\psi_n^1$ مساوات 13.6 دیتی ہے میں آپ کو یہاں یہ ضرور بتانا چاہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی بہت درست قیمتیں دیتا ہے یعنی $E_n^0 \quad + \quad E_n^1$ اصل قیمت $E_n$ کے بہت قریب ہے اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں $\delta$ تفاعلی موڑا ڈالتے ہیں

$$H' = \alpha\delta(x - \frac{a}{2})$$

جہاں $\alpha$ ایک مستقل ہے

ا. اجازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں بتائیں کہ جفت $n$ کی صورت میں توانائیاں مضطرب کیوں نہیں ہونگی

ب. زمینی حال کی تصحیح $\psi_1^1$ کی مساوات مساوات 13.6 کی پھیلاو میں ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جہاں $\omega \quad = \quad \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے اب فرض کرے مقیاس لچک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے $k \to (1+\epsilon)k$

ا. (الف) نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کرے (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک $\epsilon$ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں

ب. اب مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں یہاں $H'$ کیا ہو گا اپنے نتیجے کا جزو (الف) کے ساتھ موازنہ کرے اشارہ: نئے تکمل کی قیمت کے حصول کی نہ ضرورت اور نہ اجازت ہے

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں مساوات 19.2 میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

جہاں $V_0$ ایک مستقل ہے جس کا بعد توانائی ہے اور $a$ کنویں کی چوڑائی ہے کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں

ا. پہلی قدم میں ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں

ب. اول رتبی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمین اول رتبی نظریہ اضطراب سے دریافت کریں

### ۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں

یہاں بھی اسی طرح بڑھتے ہوئے ہم $\psi_n^0$ اور دور تبی مساوات مساوات 8.6 کا اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم $H^0$ کی ہرمشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہٰذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا ساتھ ہی $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$ ہو گا لہٰذا ہمارے پاس $E_n^2$ کا درج ذیل کلیہ رہ جاتا ہے

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle \tag{۶.۱۴}$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہٰذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہو گا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum m \neq n \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا آخر کار

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{\left| \langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \right|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{۶.۱۵}$$

ہو گا جو دور تبی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل موج کی دوم رتبی تصحیح $\psi_n^2$ توانائی کی سوم رتبی تصحیح وغیرہ وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات 15.6 تک استعمال کرنا سودمند ہو گا۔ سوال ۶.۴:

ا. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح $(E_n^2)$ سوال 1.6 کی مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق $n$ کیلئے $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح $E_n^2$ سوال 2.6 کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے گا کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو یک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان $(E)$ چالو کرتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ مقدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

ا. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دور تبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال 33.3 دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں شروڈنگر مساوات کو بلا واسطہ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہے۔

## ۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں یعنی دو یا دو سے زیادہ منفرد حالات $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ کی توانائیاں ایک جیسی ہوں تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہو گا چونکہ $c_a^{(b)}$ مساوات 12.6 اور $E_a^2$ مساوات 15.6 بے قابو بڑھتے ہیں شاید ماسوائے اس صورت جب شمار کنندہ صفر ہو $\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = 0$ اور جس کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انحطاط صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول

رتبی تصحیح مساوات 9.6 پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہو گا۔

### ۶.۲.۱ دوپڑتا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ معمول شدہ ہیں۔

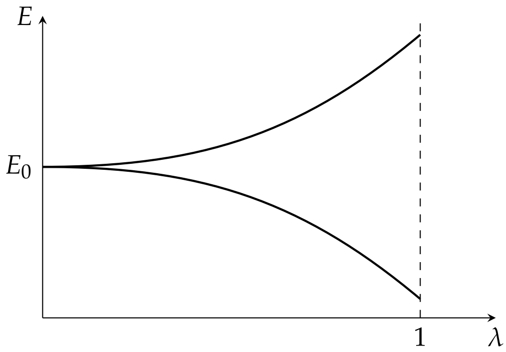
$$H^0\psi_a^0 = E^0\psi_a^0, \quad H^0\psi_b^0 = E^0\psi_b^0, \quad \langle\psi_a^0|\psi_b^0\rangle = 0 \tag{۶.۱۶}$$

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

$$\psi^0 = \alpha\psi_a^0 + \beta\psi_b^0 \tag{۶.۱۷}$$

بھی $H^0$ کا امتیازی حال ہو گا جس کا امتیازی قدر $E^0$ بھی وہی ہو گا

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0 \tag{۶.۱۸}$$




شکل ۶.۴: انحطاط کا خاتمہ بذریعہ اضطراب۔

عام طور پر اضطراب $(H')$ انحطاط کو "توڑے" (یا "منسوخ" کرے) گا جیسے جیسے ہم $\lambda$ کی قیمت صفر سے ایک کی طرف بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی $E^0$ دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گا (شکل ۶.۴) مخالف چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند یعنی صفر کر دیں تب بالائی حال کا تخفیف $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ کے ایک خطی جوڑ میں ہو گا جبکہ زیریں حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے ہیں کہ یہ موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے ہیں لہٰذا یہی وجہ ہے کہ ہم اول رتبی توانائیاں مساوات 9.6 کا حساب نہیں کر سکتے ہیں

اسی لیے ہم ان موزوں غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ مساوات 17.6 میں لکھتے ہیں جہاں $\alpha$ اور $\beta$ قابل تغیر ہوں گے ہم مساوات شروڈنگر

$$H\psi = E\psi \tag{۶.۱۹}$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \cdots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda\psi^1 + \lambda^2\psi^2 + \cdots \tag{۶.۲۰}$$

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں انہیں مساوات 19.6 میں پر کر کے پہلے کی طرح $\lambda$ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \cdots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \cdots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ مساوات 18.6 کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے جبکہ $\lambda^1$ رتبہ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0 \tag{۶.۲۱}$$

اس کا $\psi_a^0$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں

$$\langle\psi_a^0|H^0\psi^1\rangle + \langle\psi_a^0|H'\psi^0\rangle = E^0\langle\psi_a^0|\psi^1\rangle + E^1\langle\psi_a^0|\psi^0\rangle$$

چونکہ $H^0$ ہرمشی ہے لہٰذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا مساوات 17.6 کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط مساوات 17.6 کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha\langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle + \beta\langle\psi_a^0|H'|\psi_b^0\rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$\alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1 \tag{۶.۲۲}$$

حاصل ہو گا جہاں درج ذیل ہو گا

$$W_{ij} \equiv \langle\psi_i^0|H'|\psi_j^0\rangle, \quad (i, j = a, b) \tag{۶.۲۳}$$

اسی طرح $\psi_b^0$ کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا

$$\alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1 \tag{۶.۲۴}$$

دھیان رہے کہ اصولاً ہمیں تمام $W$ معلوم ہے چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ کے لحاظ سے $H'$ کے ارکان قالب ہیں مساوات 24.6 کو $W_{ab}$ سے ضرب دے کر مساوات 22.6 استعمال کر کے $\beta W_{ab}$ کو خارج کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\alpha[W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0 \tag{۶.۲۵}$$

غیر صفر $\alpha$ کی صورت میں مساوات 25.6 ہمیں $E^1$ کی مساوات دیگی

$$(E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0 \tag{۶.۲۶}$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 23.6 سے یہ جانتے ہوئے $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\right] \tag{۶.۲۷}$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے جہاں دو جذر دو مضطرب توانائیوں سے مطابقت رکھتے ہیں لیکن صفر $\alpha$ کی صورت میں کیا ہو گا ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہو گا لہٰذا مساوات 22.6 کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات 24.6 کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہو گا یہ درحقیقت مساوات 27.6 کے عمومی نتیجہ میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہو گا۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle\psi_a^0|H'|\psi_a^0\rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle\psi_b^0|H'|\psi_b^0\rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل کرتے ہیں مساوات 9.6 یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے حالات $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ پہلے سے موزوں خطی جوڑ تھے کیا اچھی بات ہوتی اگر ہم آغاز سے موزوں حالات جان

پاتے ایسی صورت میں ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں $A$ ایک ایسا ہرمشی عامل ہے جو $H^0$ اور $H'$ کے ساتھ مقلوبی ہے اگر $H^0$ کے انحطاطی امتیازی تفاعلات $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ عامل $A$ کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں جن کے منفرد امتیازی اقدار ہوں

$$A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0 \quad \text{اور} \quad \mu \neq \nu$$

تب $W_{ab} = 0$ ہو گا لہٰذا $\psi_a^0$ اور $\psi_b^0$ نظریہ اضطراب میں قابل استعمال موزوں حالات ہوں گے

ثبوت: ہم فرض کر چکے ہیں کہ $[A, H'] = 0$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}
\langle\psi_a^0|[A,H']\psi_b^0\rangle &= 0\\
&= \langle\psi_a^0|AH'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'A\psi_b^0\rangle\\
&= \langle A\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle - \langle\psi_a^0|H'\nu\psi_b^0\rangle\\
&= (\mu-\nu)\langle\psi_a^0|H'\psi_b^0\rangle = (\mu-\nu)W_{ab}
\end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہٰذا $W_{ab} = 0$ ہو گا

سبق اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو ایسا ہرمشی عامل $A$ تلاش کرنے کی کوشش کریں جو $H^0$ اور $H'$ کے ساتھ مقلوبی ہو $H^0$ اور $A$ کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو اپنے غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبی نظریہ اضطراب بروئے کار لائے ایسا عامل تلاش نہ کرنے کی صورت میں آپ کو مساوات 27.6 استعمال کرنا ہو گا جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے

□

سوال ۶.۶: فرض کریں دو موزوں غیر مضطرب حالات

$$\psi_\pm^0 = \alpha_\pm\psi_a^0 + \beta_\pm\psi_b^0$$

جہاں $\alpha_\pm$ اور $\beta_\pm$ کو معمول شدگی تک مساوات 22.6 یا مساوات 24.6 تعین کرتے ہیں صریحاً درج ذیل دکھائیں

ا. $\psi_\pm^0$ عمودی ہے $(\langle\psi_+^0|\psi_-^0\rangle = 0)$

ب. $\langle\psi_+^0|H'|\psi_-^0\rangle = 0$

ج. $\langle{}_\pm^0|H'|\psi_\pm^0\rangle = E_\pm^1$ جہاں $E^1$ کی قیمت مساوات 27.6 دیتی ہے

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ ہے اپنے آپ پر بند یک بعدی خطہ جس کی لمبائی $L$ ہے پر آزادی سے حرکت کرتا ہے

ا. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x/L}, \qquad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $n = 0$ کے علاوہ تمام حالات دہرا انحطاطی ہے

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \gg a$ ہو یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں معمولی جھکاوٹ پیدا کر تا گویا تار کو یہاں مروڑا گیا ہوں مساوات 27.6 استعمال کرتے ہوئے $E_n$ کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں اشارہ: چونکہ $H'$ خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $L \gg a$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت تکمل کی حدوں کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm\infty$ رکھیں

ج. اس مسئلہ کے لئے $\psi_n$ اور $\psi_{-n}$ کی موزوں خطی جوڑ کیا ہوں گے دکھائے کہ ان حالات کے ساتھ آپ کو مساوات 9.6 استعمال کرتے ہوئے اول رتبی تصحیح حاصل ہو گی

د. ایسا ہرمشی عامل $A$ تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو دکھائیں کہ $H^0$ اور $A$ کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہے جو آپ نے جزو-ج میں استعمال کیے

### ۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط

گزشتہ حصہ میں انحطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے مساوات 22.6 اور 24.6 کو ہم دوبارہ قالبی روپ میں لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{۶.۲۸}$$

ظاہر ہے کہ $E^1$ $W$ قالب کے امتیازی اقدار ہیں مساوات 26.6 اس قالب کی امتیازی مساوات ہے اور غیر مضطرب حالات کے موزوں خطی جوڑ $W$ کے امتیازی سمتیات ہوں گے

ہم $n$ پڑتا انحطاط کی صورت میں $n \times n$ قالب

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle \tag{۶.۲۹}$$

کے امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں الجبرا کی زبان میں موزوں غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انحطاطی ذیلی فضا میں ایسا اساس تیار کرنا ہے جو قالب $W$ کو وتری بناتا ہو یہاں بھی ایک ایسا عامل $A$ تلاش کر کے جو $H'$ کا مقلوبی ہو $A$ اور $H'$ کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر کے ہم قالب $W$ حاصل کریں گے جو از خود وتری ہو گا لہٰذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی اگر آپ کو میری دوپڑتا انحطاط کو عمومیت دیتے ہوئے $n$ پڑتا انحطاط پر یقین نہ ہو تب سوال 10.6 حل کر کے اپنی تسلی کر لیں

مثال ۶.۲: تین آبادی لامتناہی کعبی کنویں سوال 2.4 پر غور کریں

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۰}$$

ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$\psi^0_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right) \tag{۶.۳۱}$$

جہاں $n_x$ ، $n_y$ اور $n_z$ مثبت عدد صحیح ہیں ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E^0_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{۶.۳۲}$$

دھیان رہے کہ زمینی حال $\psi_{111}$ غیر انحطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے

$$E^0_1 \equiv 3\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \tag{۶.۳۳}$$

تاہم پہلا ہیجان حال تہرا انحطاطی ہیں

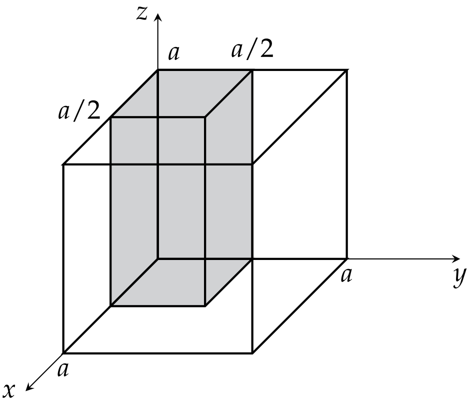
$$\psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211} \tag{۶.۳۴}$$

اور ان تینوں کی توانائی

$$E^0_1 \equiv 3\frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \tag{۶.۳۵}$$

ایک جیسی ہے۔ آیئے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۶.۳۶}$$




شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار $V_0$ بڑھاتا ہے۔

جو ڈبہ کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو $V_0$ مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبی تصحیح مساوات 9.6 دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned} \tag{۶.۳۷}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہو گی پہلے قدم میں ہم قالب $W$ تیار کرتے ہیں اس کے وتری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں ماسوائے ان میں سے ایک سائن جس کا دلیل دگنا ہے آپ درج ذیل کی خود تصدیق کر سکتے ہیں

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیر وتری ارکان زیادہ دلچسپ ہے

$$\begin{aligned} W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

تاہم $z$ تکمل صفر ہو گا جیسا $W_{ac}$ کے لیے بھی ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض درج ذیل ہو گا

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \mathrm{d}y \int_0^{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) \mathrm{d}z = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

یوں درج ذیل ہو گا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \tag{۶.۳۸}$$

قالب $\mathbf{W}$ بلکہ $4\mathbf{W}/V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات ضمیمہ ا.۵ کے تحت

$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہو گی جس کے امتیازی اقدار درج ذیل ہوں گے

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1+\kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1-\kappa \approx 0.2795$$

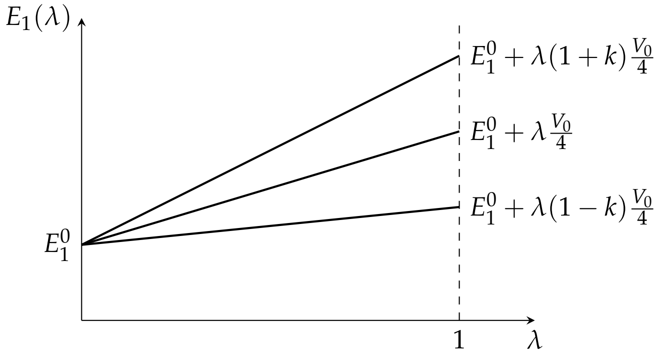
یوں $\lambda$ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہو گا

$$E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases} \tag{۶.۳۹}$$

جہاں $E_1^0$ مشترکہ غیر مضطرب توانائی مساوات 35.6 ہے اضطراب توانائی $E_1^0$ تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط ختم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ دھیان رہے اگر ہم بھولا پن میں اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبی تصحیح مساوات 9.6 تینوں حالات کے لئے ایک جیسی $V_0/4$ ہوتی جو در حقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے

مزید موزوں غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہوں گے

$$\psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c \tag{۶.۴۰}$$




شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

جہاں عددی سر ($\alpha$ ، $\beta$ اور $\gamma$) قالب $\mathbf{W}$ کے امتیازی سمتیات ہوں گے

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1$ ، $\beta = \gamma = 0$ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0$ ، $\beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں نے ان کی معمول شدہ قیمتیں چنی ہیں۔ یوں موزوں حالات درج ذیل ہوں گے

$$\psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c)/\sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{۶.۴۱}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں مساوات 30.6 میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلٹا تفاعلی موڑ:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4)\delta(y - a/2)\delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور تہرا انحطاطی اول ہیجان حالات کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح تلاش کریں

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف تین خطی غیر تابع حالات پائے جاتے ہوں

فرض کریں قالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں $V_0$ ایک مستقل ہے اور $\epsilon$ کوئی چھوٹا عدد $(\epsilon \ll 1)$ ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی $(\epsilon = 0)$ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں

ب. قالب $\mathbf{H}$ کے بالکل ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں ان میں سے ہر ایک کو $\epsilon$ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو $H^0$ کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے آپ نے جواب کا جزو-ا کے بالکل ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں

د. ابتدائی طور پر انحطاطی دو امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انحطاطی نظریائے اضطراب سے تلاش کریں بالکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ $n$ پڑتا انحطاطی توانائی کے اول رتبی تصحیح قالب $W$ کے امتیازی اقدار ہوں گے میں نے دعویٰ کیا کہ یہ $n = 2$ صورت کی قدرتی عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ 1.2.6 کی قدموں پر چل کر درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات 17.6 کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات 22.6 کے مماثل کا مفہوم قالب $\mathbf{W}$ کی امتیازی قدر مساوات لیا جا سکتا ہے۔

## ۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر کے مطالعہ کے دوران حصہ 2.4 ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۶.۴۲}$$

جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کولمب مخفی توانائی ہے۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے ہم $m$ کی بجائے تخفیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں زیادہ اہم مہین ساخت ہے

جو در حقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح اور چکر و مدار ربط، کی بنا پر پیدا ہوتا ہے۔ بوہر توانائیوں مساوات 70.4 کے لحاظ سے مہین ساخت $\alpha^2$ گنا کم نہایت چھوٹا اضطراب ہے جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \tag{۶.۴۳}$$

مہین ساخت مستقل کہلاتا ہے اس سے بھی $\alpha$ گنا چھوٹا لیمب انتقال ہے جو بھر کی میدان کی کوانٹازنی سے وابستہ ہے اور اس سے مزید کم نہایت مہین ساخت کہلاتا ہے جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول 1.6 میں پیش کیا گیا ہے اس حصہ میں ہم غیر تابع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے سوال ۶.۱۱:

ا. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی $mc^2$ کی صورت میں لکھیں

ب. $\epsilon_0$ ، $e$ ، $\hbar$ اور $c$ کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر مہین ساخت مستقل کی قیمت تلاش کریں تبصرہ پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ خالص بے بعدی بنیادی عدد ہے یہ برقناطیسیت الیکٹران کا بار اضافیت روشنی کی رفتار اور کوانٹم میکانیات پلانک مستقل کے بنیادی مستقلات کے بیچ رشتہ بیان کرتا ہے اگر آپ جزو-ب حل کر پائیں یقیناً آپ کو نوبیل انعام سے نوازا جائے گا البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس وقت اس پر بہت وقت ضائع نہ کریں بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں

### ۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا جزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{۶.۴۴}$$

جس میں باضابطہ متبادل $\boldsymbol{p} \to (\hbar/i)\nabla^2$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{۶.۴۵}$$

تاہم مساوات 44.6 حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \tag{۶.۴۶}$$

جہاں پہلا جزو کل اضافیتی توانائی ہے جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے اور جس سے ہمیں فی الحال غرض بھی نہیں ہے جبکہ دوسرا جزو ساکن توانائی ہے ان دونوں کے بیچ فرق کو حرکت سے منسوب کیا جا سکتا ہے ہمیں

سمتی رفتار کی بجائے اضافیتی معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۶.۴۷}$$

کی صورت میں $T$ کو لکھنا ہو گا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2c^2 + m^2c^4[1-(v/c)^2]}{1-(v/c)^2} = \frac{m^2c^4}{1-(v/c)^2} = (T+mc^2)^2$$

ہو گا جس کی بنا پر درج ذیل ہو گا

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \tag{۶.۴۸}$$

غیر اضافیتی حد $p \ll mc$ کی صورت میں حر کی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتائج مساوات 44.6 دیتی ہے ایک چھوٹا عدد $(p/mc)$ کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} T &= mc^2\Big[\sqrt{1+\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2} - 1\Big] = mc^2\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^2 - \frac{1}{8}\Big(\frac{p}{mc}\Big)^4 \cdots - 1\Big] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots . \end{aligned} \tag{۶.۴۹}$$

ہیملٹنی کی کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے

$$H'_r = -\frac{p^4}{8m^3c^2} \tag{۶.۵۰}$$

غیر مضطرب حال میں $H'$ کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں $E_n$ کی تصحیح ہو گی مساوات 9.6

$$E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^2\psi | p^2\psi \rangle \tag{۶.۵۱}$$

اب غیر مضطرب حالات کے لئے شروڈنگر مساوات کہتی ہے

$$p^2\psi = 2m(E-V)\psi \tag{۶.۵۲}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\langle (E-V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2}[E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle] \tag{۶.۵۳}$$

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $-(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle\Big] \tag{۶.۵۴}$$

جہاں $E_n$ زیر غور حال کی بوہر توانائی ہے یہ کام مکمل کرنے کی خاطر ہمیں غیر مضطرب حال $\psi_{nlm}$ مساوات 89.4 میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی پہلا آسان ہے سوال 12.6 دیکھیں

$$\Big\langle\frac{1}{r}\Big\rangle = \frac{1}{n^2a} \tag{۶.۵۵}$$

جہاں $a$ رداس بوہر مساوات 72.4 ہے دوسرا اتنا آسان نہیں ہے سوال 33.6 دیکھیں تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے

$$\Big\langle\frac{1}{r^2}\Big\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3a^2} \tag{۶.۵۶}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2}\Big[E_n^2 + 2E_n\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)\frac{1}{n^2a} + \Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big)^2\frac{1}{(l+1/2)n^3a^2}\Big]$$

یا مساوات 72.4 استعمال کرتے ہوئے $a$ کو خارج کر کے باقی کو $E_n$ مساوات 70.4 کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2}\Big[\frac{4n}{l+1/2} - 3\Big] \tag{۶.۵۷}$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار $E_n$ سے تقریباً $E_n/mc^2 = 2\times10^{-5}$ گنا کم ہے

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے اس کے باوجود میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا مساوات 51.6 یہاں اضطراب کروی تشاکلی ہے لہذا یہ $L^2$ اور $L_z$ کا مقلوب ہو گا مزید کسی $E_n$ کے $n^2$ حالات کے لئے ان (تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کے منفرد امتیازی اقدار ہوں گے۔ یوں خوش قسمتی سے تفاعلات $\psi_{nlm}$ اس مسئلہ کے موزوں حالات ہوں گے یا جیسا ہم کہتے ہیں $n$ ، $l$ اور $m$ موزوں کوانٹم اعداد ہیں لہذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال درست تھا

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل سوال 40.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات 55.6 ثابت کریں

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال 43.4 میں حال $\psi_{321}$ کے لیے $r^s$ کی توقعاتی قیمت حاصل کی اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر سا کام)، $s = -1$ مساوات 55.6، $s = -2$ مساوات 56.6 اور $s = -3$ مساوات 64.6 کے لیے کریں $s = -7$ کی صورت میں کیا ہو گا اس پر تبصرہ کریں

سوال ۶.۱۴: یک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے کم سے کم رتبی اضافیتی تصحیح تلاش کریں اشارہ: مثال 5.2 میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے $p^2$ ہرمشی ہے لیکن $p^4$ ہرمشی نہیں ہے ان حالات کے لئے $\psi$ متغیرات $\theta$ اور $\phi$ کا غیر تابع ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

مساوات 13.4 تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle f|p^2 g\rangle = -4\pi\hbar^2\left(r^2 f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - r^2 g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^\infty + \langle p^2 f|g\rangle$$

تصدیق کیجئے گا کہ $\psi_{n00}$ کے لیے، جو مبدا کے قریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جز وصفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}}e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ $p^4$ کے لئے کر کے دیکھیں اور لکھائی کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا

$$\langle\psi_{n00}|p^4\psi_{m00}\rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4}\frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4\psi_{n00}|\psi_{m00}\rangle$$

### ۶.۳.۲ چکر و مدار ربط

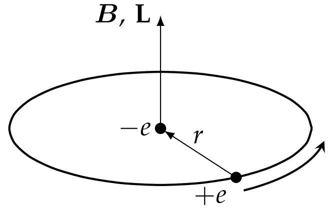
مرکزہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوکٹ میں مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے جو چکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر معیار قوت پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر $\mu$ کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے اس کی ہیملٹنی مساوات 157.4 درج ذیل ہوگی

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{۶.۵۸}$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر $\boldsymbol{\mu}$ درکار ہوگا

پروٹان کا مقناطیسی میدان ہم الیکٹران کی نقطہ نظر سے پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے اس کے مقناطیسی میدان کو بایوٹ وسیوارٹ قانون سے حاصل کرتے ہیں

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$




شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے جہاں $e$ پروٹان کے بار کو اور $T$ دائرے پر ایک چکر کے دوری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے اس کے برعکس مرکزہ کے ساکن چھوکٹ میں الیکٹران کا مداری زاویائی معیار حرکت $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ ہوگا مزید $\boldsymbol{B}$ اور $\mathbf{L}$ دونوں کا رخ ایک جیسا ہوگا شکل ۶.۷ میں اوپر جانب لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\,\mathbf{L} \tag{۶.۵۹}$$

جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے $\mu_0$ کی جگہ $\epsilon_0$ استعمال کیا ہے

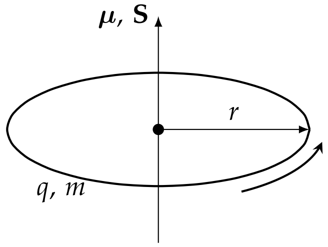
الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر: ایک چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر اس کے چکر زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے ان کے بیچ تناسبی جزو ضرب مسکن مقناطیسی مثبت ہوگا جس کا سامنا ہم حصہ 2.4.4 میں کر چکے ہیں آئیں اس مرتبہ کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے اسے اخذ کریں ایک ایسا بار $q$ جس کی لمبائی رداس $r$ کے چھلا پر کی گئی ہو اور جو محور کے گرد دوری عرصہ $T$ سے گھومتا ہو پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف رو $(q/T)$ ضرب رقبہ $(\pi r^2)$ ہے

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلا کی کمیت $m$ ہو جمودی معیار اثر $mr^2$ ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت ہوگا

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$

اس تشکیل کے لیے ظاہر ہے کہ مسکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہوگا دھیان رہے کہ یہ $r$ اور $T$ کا تابع نہیں ہے اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل و صورت کا جسم ہوتا مثلاً ایک کرہ صرف اتنا ضروری ہے کہ اپنے محور کے گرد گھومنے سے اس جسم کی شکل پیدا ہو میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے تمام سے پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کی قیمت معلوم کر پاتا جب تک کمیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو تاکہ بار اور کمیت کا




شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

نسبت یکساں ہو ہر چھلے کا اور لہٰذا پوری جسم کا مسکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہو گا مزید $\boldsymbol{\mu}$ اور $\mathbf{S}$ کے رخ ایک جیسے یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف ہونگے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right)\mathbf{S}$$

یہ خالصتاً کلاسیکی حساب ہے در حقیقت الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کے کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے

$$\boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m}\mathbf{S} \tag{۶.۶۰}$$

ڈیراک نے الیکٹران کی اضافیتی نظریہ میں اضافی جزو ضربی 2 کی وجہ پیش کی ہے
ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$$

اس حساب میں ایک فریب سے کام لیا گیا ہے میں نے الیکٹران کے ساکن چھوکٹ میں تجزیہ کیا جو ایک غیر جمودی نظام ہے چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے لہٰذا یہ اسراع پذیر ہو گا اس حساب میں مجرد حرکیات تصحیح جسے طامس استقبالی حرکت کہتے ہیں شامل کر کے قبول کیا جا سکتا ہے جو حساب میں جزو ضربی $1/2$ شامل کرتا ہے

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{m^2c^2r^3}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \tag{۶.۶۱}$$

یہ چکر و دائری باہم عمل ہے۔ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ مسکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبالی حرکت جزو ضربی جو اتفاقاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ (بھولی بھالی) کلاسیکی نمونہ سے حاصل کرتے۔ طبعی طور پر یہ الیکٹران کے لحاتی ساکن چھوکٹ میں پروٹان کی مقناطیسی میدان میں، چکر کاٹتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر قوت مروڑ کی بدولت ہے۔

اب کوانٹم میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں $L$ اور $S$ کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہو گا لہٰذا چکر اور دائری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں رہتے ہیں سوال 16.6 دیکھیں البتہ $H'_{so}$ مقلوب ہو گا $L^2$، $S^2$ اور کل زاویائی معیار حرکت کے ساتھ۔

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{۶.۶۲}$$

لہٰذا یہ مقداریں بقائی ی ہیں مساوات 71.3 دوسرے لفظوں میں $L_z$ اور $S_z$ کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے موزوں حالات نہیں ہیں جبکہ $L^2$، $S^2$، $J^2$، اور $J_z$ کے امتیازی حالات موزوں حالات ہیں اب

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \tag{۶.۶۳}$$

ہو گا لہٰذا $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

یہاں یقیناً $S = 1/2$ ہے مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت سوال 35.6(ج) دیکھیں درج ذیل ہے

$$\langle 1/r^3 \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \tag{۶.۶۴}$$

لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E^1_{so} = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا تمام کو $E_n$ کی صورت میں لکھتے ہیں

$$E^1_{so} = \frac{(E_n)^2}{mc^2}\left\{\frac{[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)}\right\} \tag{۶.۶۵}$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ بالکل مختلف طبعی پہلوؤں کے باوجود اضافیتی تصحیح اور چکر و دائری ربط ایک جتنا رتبہ $(E_n^2/mc^2)$ رکھتے ہیں ان دونوں کو جمع کرکے ہمیں مکمل مہین ساخت کا کلیہ سوال 17.6 دیکھیں حاصل ہوتا ہے

$$E^1_{fs} = \frac{(E_n)^2}{2mc^2}\left(3 - \frac{4n}{j+1/2}\right) \tag{۶.۶۶}$$

اس کو کلیہ بوہر کے ساتھ چھوڑ کر ہم ہائیڈروجن کی توانائی کی سطحوں کا عظیم نتیجہ حاصل کرتے ہیں جس میں مہین ساخت شامل ہے

$$E_{nj} = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2}\Big[1+\frac{\alpha^2}{n^2}\Big(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{2}\Big)\Big] \tag{۶.۶۷}$$

مہین ساخت $l$ میں انحطاط کو توڑتا ہے یعنی کسی ایک $n$ کیلئے $l$ کی مختلف احازتی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہونگی تاہم اب بھی یہ $j$ میں انحطاط برقرار رکھتا ہے شکل 9.6 دیکھیں دائری وچکر زاویائی معیار حرکت کے $z$ جزو امتیازی اقدار $m_l$ اور $m_s$ اب موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے۔ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے۔ موزوں کوانٹم اعداد $n$ ، $l$ ، $s$ ، $j$ ، اور $m_j$ ہونگے سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقلب کی قیمتیں تلاش کریں (الف) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{L}]$ ، (ب) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{S}]$ ، (ج) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},\mathbf{J}]$ ، (د) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},L^2]$ ، (ہ) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},S^2]$ ، (و) $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},J^2]$ ؛ اشارہ: $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 اور 134.4 کو مطمئن کرتے ہیں تاہم یہ ایک دوسرے کے ساتھ غیر مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح مساوات 57.6 اور چکر دائری ربط مساوات 65.6 سے مہین ساخت کلیہ مساوات 66.6 اخذ کریں اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ ہے مثبت علامت اور منفی علامت کو باری باری لے کر دیکھیں آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں آخری نتیجہ ایک دوسروں جیسا ہوگا

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن کے مرئی طیف کی سرخ بالمر لکیر نمایاں ہے جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد بوہر نظریہ سے تعین کریں مہین ساخت اس لکیر کو قریب قریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتا ہے اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہو گی اور ان کے بیچ فاصلہ کتنا ہوگا اشارہ: پہلے قدم میں معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا اور ہر ایک کے لیے eV میں $E^1_{fs}$ تلاش کریں یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بنا کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں نوریہ کی صورت میں توانائی کا اخراج $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ مہین ساخت کی بدولت $\Delta E$ کی قیمت ایک منتقلی سے دوسرے منتقلی بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے $\Delta E$ کو eV میں تلاش کریں آخر میں انہیں نوریہ تعدد میں تبدیل کرکے ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بیچ فاصلہ Hz کی صورت میں تعین کریں یہ غیر مضطرب لکیر اور ہر ایک طیفی لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ نہیں ہوگا جو یقیناً قابل مشاہدہ نہیں ہے بلکہ یہ ہر لکیر اور اگلے لکیر کے بیچ تعددی فاصلہ ہوگا آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $(???)\ j=$ سے $(???)\ j=$ ، (2) $(???)\ j=$ سے $(???)\ j=$ ، ... ہونگے لکیر 1 اور لکیر 2 کے بیچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے لکیر 2 اور لکیر 3 کے بیچ فاصلہ ??? Hz ہے ...

سوال ۶.۱۹: نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر ڈیراک مساوات سے ہائیڈروجن کی مہین ساخت کا ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$E_{nj} = mc^2\Big\{\Big[1+\Big(\frac{\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}}\Big)^2\Big]^{-1/2}-1\Big\}$$

سے ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $\alpha \ll 1$ ہے اس کو $a^4$ رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ آپ مساوات 67.6 دوبارہ حاصل کرتے ہیں

## ۶.۴ زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_{ext}$ میں رکھنے سے اس کی توانائی کی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس مظہر کو زیمان اثر کہتے ہیں واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_1 + \mu_2) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۶۸}$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m}\,\mathbf{S} \tag{۶.۶۹}$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت کتب معیار اثر اور

$$\mu_1 = -\frac{e}{2m}\,\mathbf{L} \tag{۶.۷۰}$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت کتب معیار اثر ہے یوں درج ذیل ہوگا

$$H'z = \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\,\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{B}_{est} \tag{۶.۷۱}$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان مساوات 59.6 جو چکر مدار ربط پیدا کرتا ہے کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگا اگر $B_{int} \ll B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت غالب ہوگا اور $H'$ کو ایک چھوٹی اضطراب تصور کیا جا سکتا ہے جبکہ $B_{int} \gg B_{ext}$ کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا اور مہین ساخت خود اضطراب تصور کی جائے گی ان دو خطوں کے بیچ جہاں دونوں میدان مقلوب ہے ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی اور ہم پر لازم ہوگا کہ ہم ہیملٹنی کی متعلقہ حصے کو ہاتھ سے وتری بنائیں درج ذیل حصوں میں ہم ان تین صورتوں پر ہائیڈروجن کے لیے غور کریں گے سوال ۶.۲۰: مساوات 59.6 استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت تلاش کر کے بتائیں کہ طاقتور اور کمزور زیمان میدان کتنا ہوگا

### ۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر $B_{int} \gg B_{ext}$ ہو تب مہین ساخت مساوات 67.6 غالب ہوگی اور موزوں کوانٹم اعداد $n$ ، $l$ ، $j$ ، اور $m_j$ ہونگے تاہم چکر و مدار ربط کی موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے لہٰذا $m_l$ اور $m_s$ موزوں کوانٹم اعداد نہیں ہونگے رتبہ اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زیمان تصحیح درج ذیل ہوگی

$$H_Z^1 = \langle nljm_j | H'_Z | nljm_j \rangle = \frac{e}{2m}\boldsymbol{B}_e xt \cdot \langle \mathbf{L} + 2\,\mathbf{S} \rangle \tag{۶.۷۲}$$

اب $\mathbf{J}+\mathbf{S} = \mathbf{L}+2\,\mathbf{S}$ ہو گا بد قسمتی سے ہمیں $\mathbf{S}$ کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے لیکن ہم درج ذیل طریقے سے اسے جان سکتے ہیں کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)۔ اس مقررہ سمتیہ کے گرد $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں بالخصوص $\mathbf{J}$ پر $\mathbf{S}$ کی قائمہ تظلیل $\mathbf{S}$ کی وقتی اوسط قیمت ہو گا

$$\mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})}{j^2}\,\mathbf{J} \tag{۶.۷۳}$$

لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J}-\mathbf{S}$ ہے لہذا $L^2 = J^2+S^2-2\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$ ہو گا لہذا

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2+S^2-L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)] \tag{۶.۷۴}$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\langle \mathbf{L}+2\,\mathbf{S}\rangle = \Big\langle\Big(1+\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}}{J^2}\Big)\mathbf{J}\Big\rangle = \Big[1+\frac{j(j+1)-l(l+1)+3/4}{2j(j+1)}\Big]\langle\mathbf{J}\rangle \tag{۶.۷۵}$$

چوکور قوسین میں بند رکن کو لنڈے $g$ جزو ضرب کہتے ہیں جس کو $g_j$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم محور $z$ کو $\boldsymbol{B}_{ext}$ کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں تب درج ذیل ہو گا

$$E_Z^1 = \mu_B g_J B_{ext} m_j \tag{۶.۷۶}$$

جہاں

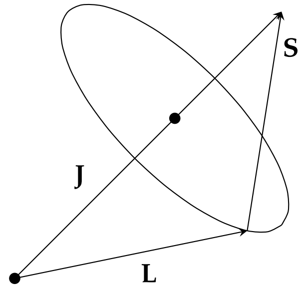
$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788\times10^{-5}\,\mathrm{eV/T} \tag{۶.۷۷}$$

بوہر مقناطیسہ کہلاتا ہے مہین ساخت کا حصہ مساوات 67.6 اور زیمان کا حصہ مساوات 76.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا مثال کے طور پر زمینی حال $n = 1$، $l = 0$، $j = 1/2$ لہذا $g_j = 2$ دو سطحوں میں بٹ جائے گا

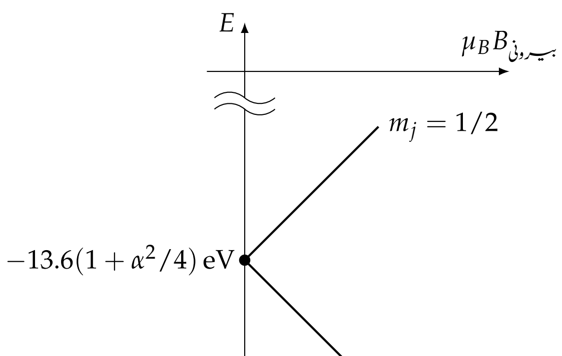
$$-13.6\,\mathrm{eV}(1+\alpha^2/4)\pm\mu_B B_{ext} \tag{۶.۷۸}$$

جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہو گی ان توانائیوں کو $B_{ext}$ کے تفاعل کے طور پر شکل 11.6 ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں کمزور میدان زیمان بٹنے کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں $B_{ext}$ بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔




شکل ۶.۹: چکر و مدار ارتباط کی عدم موجودگی میں $\mathbf{L}$ اور $\mathbf{S}$ علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J}$ کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔




شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی کمزور میدانی زیمان بٹوارا؛ بالائی لکیر $(m_j = 1/2)$ کی ڈھلوان $1$ ہے؛ نچلی لکیر $(m_j = -1/2)$ کی ڈھلوان $-1$ ہے۔

### ۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر

اگر $B_{ext} \gg B_{int}$ ہو تب زیمان اثر غالب ہو گا میدان $B_{ext}$ کو $z$ محور پر رکھ کر موزوں کوانٹم اعداد $n$ ، $l$ ، $m_l$ ، اور $m_s$ ہونگے جبکہ $j$ اور $m_j$ نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت مروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہو گا جبکہ $L_z$ اور $S_z$ ہونگے زیمان ہیملٹنی

$$H_Z' = \frac{e}{2m} B_{ext}(L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہو گی

$$E_{nmlms} = -\frac{13.6\,\text{electronvolt}}{n^2} + \mu_B B_{ext}(m_l + 2m_s) \tag{۶.۷۹}$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہو گا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہو گی

$$E_{fs}^1 = \langle nlm_l m_s|(H_r' + H_s'o)|\rangle nlm_l m_s\rangle \tag{۶.۸۰}$$

اضافیتی قصہ وہی ہو گا جو پہلے تھا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہو گا

$$\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\rangle = \langle S_x\rangle\langle L_x\rangle + \langle S_y\rangle\langle L_y\rangle + \langle S_z\rangle\langle L_y\rangle = \hbar^2 m_l m_s \tag{۶.۸۱}$$

دھیان رہے کہ $S_z$ اور $L_z$ کہ امتیازی تفاعلات کے لیے $\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = \langle L_x\rangle = \langle Ly\rangle = 0$ ہو گا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$E_{fs}^1 = \frac{13.6\,\text{eV}}{n^3}\alpha^2\Big\{\frac{3}{4n} - \Big[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)}\Big]\Big\} \tag{۶.۸۲}$$

چوکور قوسین کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہو گا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زیمان حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6، اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2lm_jm_s\rangle$ پر غور کریں طاقتور میدان زیمان بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو بوہر توانائی $l^2$ کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B_{ext}$ کے براہ راست متناسب زیمان حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہو گی اور ان کے انحطاط کیا ہونگے

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو تب $j = s$ ، $m_j = m_s$ ہو گا لہذا کمزور اور طاقتور میدانوں کے لیے موزوں حالات $(|nm_s\rangle)$ ایک جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے $E_Z^1$ اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر $l = 0$ کیلئے زیمان اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کے درمیانی چوکور قوسین رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طاقتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

### ۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدان زیمان اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نہ $H'_Z$ اور نہ ہی $H'_{fs}$ غالب ہو گا لہٰذا ہمیں دونوں کو ایک نظر سے دیکھ کر بوہر ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہو گا

$$H' = H'_Z + H'_{fs} \tag{۶.۸۳}$$

میں $n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف $l$ ، $j$ ، اور $m_j$ بیان کرتی ہے کو انحطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیبش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہو گا

$$l=0\begin{cases}\psi_1 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

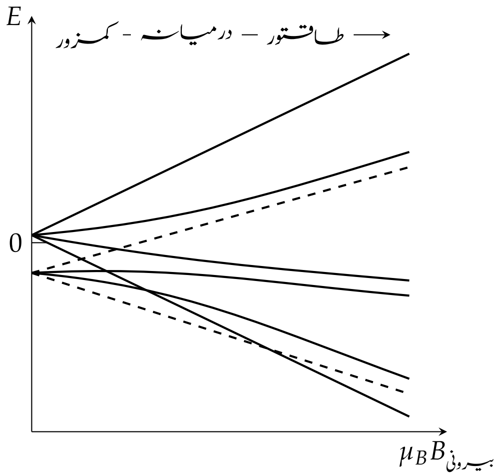
$$l=1\begin{cases}\psi_3 \equiv |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle\end{cases}$$

اس اساس میں $H'_{fs}$ کے تمام غیر صفر قالبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے وتر پر پائے جاتے ہیں $H'_Z$ کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں اور $-\mathbf{W}$ کا مکمل قالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہو گا

$$\begin{array}{llll}
5\gamma-\beta 0 & 00 & 00 & 00\\
05\gamma+\beta & 00 & 00 & 00\\
00 & \gamma-2\beta 0 & 00 & 00\\
00 & 0\gamma+2\beta & 00 & 00\\
00 & 00 & \gamma-\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 00\\
00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma-\frac{1}{3}\beta & 00\\
00 & 00 & 00 & \gamma+\frac{2}{3}\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\beta\\
00 & 00 & 00 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma+\frac{1}{3}\beta
\end{array}$$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6\,\text{eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B \boldsymbol{B}_{ext}$$




شکل ۶.۱۱: کمزور، درمیانہ اور طاقتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیمان بٹوارا۔

ابتدائی چار امتیازی اقدار پہلے سے وتر پر دکھائے گئے ہیں اب صرف دو $2 \times 2$ ڈبوں کی امتیازی اقدار تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی اقدار دے گا

$$\lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)} \tag{۶.۸۴}$$

دوسرے ڈبے کی امتیازی اقدار یہی مساوات دے گی لیکن اس میں $\beta$ کی علامت الٹ ہو گی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۶.۱۱ میں $B_{ext}$ کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد $\beta = 0$ میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طاقتور میدان $\gamma \ll \beta$ کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہوں گے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیشگوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طاقتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۶.۲۵: قابلی ارکان $H'_Z$ اور $H'_{fs}$ دریافت کر کے $n = 2$ کے لئے متن میں دیا گیا قالب $W$ مرتب کریں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طاقتور اور درمیانی میدان خطوں کے لیے زیمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تفاعل کے طور پر ترسیم

کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیانے میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتیں دیتی ہے

### ۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت کتب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا پر اس کا جفت کتب معیار اثر الیکٹران کے جفت کتب معیار اثر سے بہت کم ہو گا مساوات 60.6

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p}\,\mathbf{S}_p, \quad \boldsymbol{\mu}_e = -\frac{e}{m_e}\,\mathbf{S}_e \tag{۶.۸۵}$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہذا اس کا مسکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہو گا جس کی بنا پر صریحی $g$ جذب ضربی $g_p$ لکھا گیا ہے جس کی پیمائشی قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت کتب $\mu$ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})\boldsymbol{a}_{\text{r}} - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{۶.۸۶}$$

یوں پروٹان کے مقناطیسی جفت کتب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا مساوات 58.6

$$H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\frac{[3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}}) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\,\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\,\delta^3((\boldsymbol{r})) \tag{۶.۸۷}$$

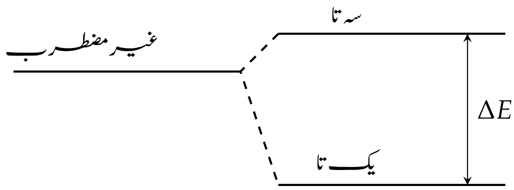
نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبی تخفیف مساوات 9.6 اس طرح بھی ہیملٹنی کی توقعاتی قیمت ہو گی

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\langle\frac{3(\mathbf{S}_p\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}})(\mathbf{S}_e\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}} - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e)}{r^3}\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\rangle|\psi(0)|^2 \tag{۶.۸۸}$$

زمینی حال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو تفاعل موج کروی تشاکلی ہو گا لہذا اول توقعاتی قیمت صفر ہو گی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہو گا لہذا زمینی حال میں درج ذیل ہو گا

$$E^1_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3}\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\rangle \tag{۶.۸۹}$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہذا اس کو چکر چکر ربط کہتے ہیں جیسا چکر مدار ربط میں $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$ پایا جاتا ہے چکر چکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چکر زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل




شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بٹوارا۔

چکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p \tag{۶.۹۰}$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2) \tag{۶.۹۱}$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چکر ایک بٹا دو ہے لہٰذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہو گا سہ تا حال تمام چکر متوازی میں کل چکر ایک ہو گا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہو گا یک تا حال میں کل چکر صفر لہٰذا $S^2 = 0$ ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$E_{hf}^1 = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases} \tag{۶.۹۲}$$

چکر چکر ربط زمینی نیچال کے چکر انحطاط کو توڑ کر سہ تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV} \tag{۶.۹۳}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج نوریہ کا تعدد درج ذیل ہو گا

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420\,\mathrm{MHz} \tag{۶.۹۴}$$

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21\,\mathrm{cm}$ ہو گی جو خورد موج خطے میں پایا جاتا ہے یہ کائنات میں اخراج کی صورت میں وہ مشہور 21 سینٹی میٹر تخفی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے

سوال ۶.۲۷: فرض کریں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{۶.۹۵}$$

تکمل ہمیشہ کی طرح $\pi > \theta > 0$، $0 < \phi < 2\phi$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \boldsymbol{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \boldsymbol{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ: $\boldsymbol{a}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلیہ میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں ایکٹران کی بجائے میون ہوگا جس کا بار اور $g$ جزو ضرب الیکٹرون کے بار اور $g$ جزو ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیٹران ہوگا جس کی کمیت اور $g$ جزو ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور $g$ جزو ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیئم جس میں پروٹان کی جگہ ضد میون ہوگا جس کی کمیت اور $g$ جزو ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیف شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا یہ گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب $4.85 \times 10^{-4}$ eV تجرباتی حاصل قیمت $8.41 \times 10^{-4}$ eV سے بہت مختلف ہے اس فرق کی وجہ نابودیِ جفت $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیئم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی متناہی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازا قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس $b$ کا یکساں بار دار کروی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہوگی یہ درحقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم $b/a$ کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں $a$ رداس بوہر ہے صرف ابتدائی جزو رکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

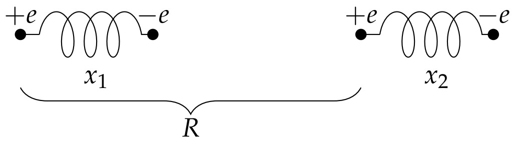
آپ نے مستقل $A$ اور طاقت $n$ کی قیمتیں تعین کرنی ہے آخر میں $b \approx 10e - 15\text{meter}$ جو تقریبا پروٹان کا عدد اس ہے پُر کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سمتی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مرتعش سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 yz$$

جہاں $\lambda$ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں

ا. زمینی حال




شکل ۶.۱۳: دو قابل تقطیب قریبی جوہر (سوال 31.6)۔

ب. سہتا انحطاطی پہلی حجان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندر والز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ $R$ ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ قابل تقطیب ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت $m$ اور بار $-e$ ہو ایک مرکزہ بار $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس لچک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{۶.۹۶}$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہو گا

$$H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2}\Big) \tag{۶.۹۷}$$

ا. مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ $R$ سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$H' \cong -\frac{e^2x_1x_2}{2\pi\epsilon_0R^3} \tag{۶.۹۸}$$

ب. دکھائیں کے کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دو ہار مونی مرتعش ہیملٹن یوں

$$H = \Big[\frac{1}{2m}p_+^2 + \frac{1}{2}\Big(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R^3}\Big)x_+^2 big\Big] + \Big[\frac{1}{2m}p_-^2 + \frac{1}{2}\Big(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R^3}\Big)x_-^2 big\Big] \tag{۶.۹۹}$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$X\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2), \quad \text{جس میں}\; p\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \tag{۶.۱۰۰}$$

علیحدہ ہو گا

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہو گی

$$E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں} \text{RL}\omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \tag{۶.۱۰۱}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہوتا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{R^6} \tag{۶.۱۰۲}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بیچ کشش مخفیہ پایا جاتا ہے جو ان کے بیچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بیچ وندر وال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دو رتبی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہو گی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا مرتعش تفاعل موج ہے جہاں $m$ کمیت اور مقیاس لچک $k$ ہو گا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دو رتبی تخفیف $\Delta V$ ہو گی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال32.6:
فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم $\lambda$ کا تفاعل ہو. $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور امتیازی تفعالات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \right| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \left| \psi_n \right\rangle$$

جہاں $E_n$ کو غیر انحطاطی تصور کریں اور اگر انحطاطی ہوں تب تمام $\psi_n$ کو انحطاطی امتیازی تفعالات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔
(جز والف): مسلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسلہ 19.6 استمال کریں۔)
(جز وب): درج ذیل یقبودی ہارمونی مدار اس کا اطلاق کریں۔
ایک)
$\lambda = \omega$
لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہو گا۔
دو)
$\lambda = \hbar$
لیں جو $\langle T \rangle$ دے گا اور
تین)
$\lambda = m$
جو $\langle T \rangle$ اور $\langle V \rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسلہ virial کی پیشگویوں کے ساتھ موعازنا کریں۔
سوال33.6:

مسلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ھائے ڈروجن کے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تین کی جا سکتی ہیں رادا سی تفعلات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r}$$

اور امتیازی اقدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max}+l+1)^2}$$

(جزو الف):
مسلہ Feynman-Hellmann میں $\lambda = e$ استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r\rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔
(جزو ب):
$\lambda = l$ کو استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r^2\rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔
سوال 34.6:
رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s\rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle n + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0$$

صابط کریں جو ھائے ڈروجن کے حال $\psi_{nlm}$ میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1,$ اور $s-2)$ کا۔ تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رادا سی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\right]u.$$

$\int(ur^su'')dr$ کو $\langle r^s\rangle$، $\langle r^{s-1}\rangle$، $\langle r^{s-2}\rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhisis کے ذریعے دوہرا تفرق کو بیٹھائیں۔ دیکھائیں کے

$$\int(ur^su') = -(s/2) < r^{s-1} >$$

اور

$$\int(u'r^su')dr = -[2/(s+1)]\int(u''r^{s+1}u')dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں)
سول 35.6
(جزو الف):
رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s = 0, s = 1, s = 2$ اور $s = 3$ ڈال کے $\langle r^2\rangle, \langle r\rangle, \langle r^{-1}\rangle$ اور $\langle r^3\rangle$ کے قلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے آپ اس طرح چلتے ہے کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قلیہ دریافت کر سکتے ہیں۔

(جزو ب):
دوسرے رخ آپکو مثلاً در پیش ہوگا آپ $s = -1$ پر کر کے دیکھیں کے آپکو صرف $\langle r^{-2} \rangle$ اور $\langle r^{-3} \rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔
جزو ج:
اگر آپ کسی طریقہ سے $\langle r^{-2} \rangle$ دریافت کر پایں تب آپ رشتہ 'Kramers' استعمال کر کے باکی تمام منفی قوعتوں کے لئے قلیات دریافت کر سکتے ہیں۔
مساوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوے $\langle r^{-3} \rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مساوات 64.6 کے ساتھ کریں۔
سوال 36.6:
ایک جوہر کو یقسا بیرونی برقی میدان $E_{ext}$ میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی مماسل ہے اس سوال میں ہم ھائے ڈروجن کے $n = 1$ اور $n = 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

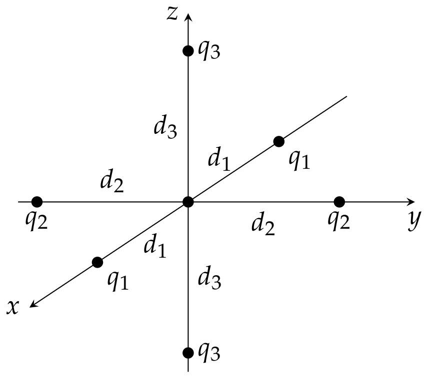
$$H'_S = eE_{ext}z = eE_{ext}r\cos\theta$$

اسکو bohr hamiltonian مساوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کرتے ہوے عمدہ ساخت کو رعد کریں۔
(جزو الف):
اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔
(جزو ب):
پہلا ھیجان حال 4 پرتہ $\psi_{200}$، $\psi_{211}$، $\psi_{210}$، $\psi_{21-1}$ انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوے، توانائی کی رتبہ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی $E_2$ کتنے سطحوں میں بٹے گا؟
(جزو ج):
درج بالہ جزو ب میں موضوع تفعالات موج کیا ہونگے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جوعفت قطب میعارِ اثر ($p_e = -er$) کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابع نہیں ہونگے اس طرح ظاہر ہے کے پہلی ھیجان حال میں ھائے ڈروجن برقی جوعفت قطب میعارِ اثر کا حامل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکملات پاے جاتے ہیں تاہم تقریبن تمام کی قیمت سِفر ہے لہذا حساب سے قبل غور کریں اگر $\phi$ تکمل سفر ہو تب $r$ اور $\theta$ تکملات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی جزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE_{ext};$$

باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)
سوال 37.6: ھائے ڈروجن کی $n = 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتدائی طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوے اب انحطاطی حالات $\psi_{3lm}$ ہونگے اور اب ہم z رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔
(جزو الف):
اضطرابی hamiltonian کو ظاہر کرنے والا $9 \times 9$ کا کالم تیار کریں
جزوی جواب

$$\langle 300|z|310\rangle = -3\sqrt{6}a,\ \langle 310|z|320\rangle = -3\sqrt{3}a,\ \langle 31\pm 1|z|32\pm 1\rangle = -(9/2)a.$$




شکل ۶.۱۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (قلمی حال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

(جزو ب):
امتیازی اقدار اور انکی انحطاط دریافت کریں.

سوال 38.6: ڈوٹریم کی زمینی حال میں نہایت موحین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طولِ موج میں تلاش کریں ۔ ڈوٹریم درحقیقت بھاری ہائیڈروجن ہے جسکے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ جڑ کر ڈوٹریم بناتے ہیں جسکا چکر ایک مقناطیسی دارِ اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d;$$

اور ڈوٹریم کا g-جزو 71.1 ہے۔

سوال 39.6:
ایک کالم میں قریبی باردار اکا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مضطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۴) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای جاتی ہیں۔(چونکے اس۔ سوال کے ساتھ چکر کا کوئی۔ واستہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)

(جزو الف):
درج ذیل

$$r << d_1, r << d_2, and r << d_3,$$

کی صورت میں دیکھائے

$$H' = V_o + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_o = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(جزو ب):
زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔
(جزو ج):
پہلی۔ہیجان حالات $(n = 2)$ کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔درج ذیل صورتوں میں سے چار پڑتہ انحطاطی نظام کتنی سطحوں میں بٹے گا۔
ایک)کابی تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی۔صورت میں۔
دو)چوں زاویہ تشاقلی

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔
تین) آرتھوھامبک تشاقل کی صورت میں تینوں مختلف ہونگیں۔
سوال40.6:
بازاوقات $\psi_n^1$ کو غیر مضطرب طفعالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلہ واستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالین درج ذیل ہیں۔
(الف)
ایک)ھائےڈروجن کی زمینی حال میں سٹارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان $E_{ext}$ کی۔موجودگی میں ھائےڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں(سوال36.6 stark اثر دیکھیں۔)۔اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n}cos\theta;$$

استعمال کرکے دیکھیں اپ نے مستقلات $A, B,$ اور $C$ کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔
دو)زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال36.6(الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔جواب:

$$-m(3a^2eE_{ext}/2\hbar)^2.$$

(جزو ب)
اگر پروٹان کا برقی جست قطب میعارِ اثر $p$ ہوتا تب ھائےڈروجن کے الیکٹرانکی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{epcos\theta}{4\pi\epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
دو) دیکھایں کہ رتبہ تک جوہر کا قبل برقی جوعفت قطب میعارِ اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہو گا۔
تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہو گا؟

# باب ۷

# تغیری اصول

## ۷.۱ نظریہ

فرض کریں آپ ایک نظام جس کو ہیملٹنی H بیان کرتا ہو، کی زمینی حال توانائی $E_{gs}$ کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات حاصل کرنے سے قاصر ہوتے ہیں۔ اصول تغیوریت آپ کو $E_{gs}$ کی بالائی حد دیتا ہے۔ بعض اوقعات آپ کو صرف اسی سے غرض ہوتا ہے اور عموماً ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے قریب قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ آئیں اس کا استعمال دیکھیے۔ کوئی بھی معمول شدہ تفاعل $\psi$ لیں۔ میں درج ذیل دعوہ کرتا ہوں:

$$E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle$$

یعنی کسی بھی شائد غیر درست حال $\psi$ میں H کی توقعاتی قیمت زمینی حال توانائی سے زیادہ ہو گی۔ یقیناً اگر $\psi$ اتفاقاً ایک ہیجان حال ہو تب H کی قیمت $E_{gs}$ سے تجاوز کرے گی۔ اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل $\psi$ کے لیے بھی ایسا ہو گا۔

ثبوت:

چونکہ H کے نامعلوم امتیازی تفاعلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں۔ لحاظہ ہم $\psi$ کو ان کا خطی جوڑ لکھ سکتے ہیں۔ جہاں

$$\psi = \sum c_n \psi_n, \quad H\psi_n = E_n \psi_n$$

ہے۔ چونکہ $\psi$ معمول شدہ ہے

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \Big\langle \sum_m c_m \psi_m \Big| \sum_n c_n \psi_n \Big\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کے امتیازی تفاعلات از خد معیاری معمول شدہ ہے۔

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

ساتھ ہی درج ذیل ہوگا

$$\langle H\rangle = \Big\langle \sum_m c_m\psi_m | H \sum_n c_n\psi_n \Big\rangle = \sum_m\sum_n c_m^* E_n c_n \langle\psi_m|\psi_n\rangle = \sum_n E_n |c_n|^2$$

لیکن تعریف کی رو سے زمینی حال توانائی کم سے کم امتیازی قیمت ہوگی۔لحاظہ $E_{gs} \leq E_n$ ہوگا۔جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\langle H\rangle \geq E_{gs}\sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

جس کو ہم ثابت کرنا چاہتے تھے۔

مثال

1.7فرض کرے ہم یک بودی ہارمونی مور تیش

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً ہم اس کا ٹھیک ٹھیک جواب جانتے ہیں۔ جو مساوات 61.2 $E_{gs} = (1/2)\hbar\omega$ جسے استعمال کرکے اس ترقیب کو پرکا جا سکتا ہے۔ہم گاوسی تفاعل

$$\psi(x) = Ae^{-bx^2}$$

کو اپنا پرکیا تفاعل موج منتخب کرتے ہے جہاں b ایک مستقل ہے اور A کو معمول زنی سے تعائن کیا جا سکتا ہے۔

$$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}\,dx = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow \Big(\frac{2b}{pi}\Big)^{1/4}$$

اب درج ذیل ہے

$$\langle H\rangle = \langle T\rangle + \langle V\rangle$$

جبکہ یہاں

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2}\frac{d^2}{dx^2}(e^{-bx^2}\,dx = \frac{\hbar^2 b}{2m}$$

اور

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2x^2|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}x^2\,dx = \frac{m\omega^2}{8b}$$

ہونے کی بنا پر درج ذیل ہوگا

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m\omega^2}{8b}$$

/مساوات 1.7 کے تحت b کی تمام قیمتوں کے لیے $E_{gs}$ سے تجاوز کرے گا۔ سخت سے سخت حد بندی کی خاطر ہم $\langle H\rangle$ کی کم سے کم قیمت حاصل کرتے ہے۔

$$\frac{d}{db}\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس $\langle H \rangle$ میں پُر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H \rangle_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہے۔ جو حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ میں نے اتفاقی طور پر ایسا پر کیا تفاعل منتخب کیا جس کا روپ ٹھیک حقیقی زمینی حال مشاوات 59.2 کی طرح ہے۔ تاہم گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے لحاظہ یہ ایک مقبول پر کیا تفاعل ہے۔ جسے وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جب حقیقی زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔
مثال
2.7 فرض کرے ہم Delta تفاعل مخفیا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہے۔ یہاں بھی ہمیں ٹھیک جواب $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$ معلوم ہے۔ یہاں بھی ہم گاوسی پر کیا تفاعل مساوات 2.7 کا انتخاب کرتے ہیں۔ چونکہ ہم معمول زنی کر چکے ہے اور $\langle T \rangle$ کا حساب کر چکے ہے لحاظہ ہمیں صرف درجہ ذیل کرنا ہو گا

$$\langle V \rangle = -\alpha|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2}\delta(x)\,dx = -\alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے کے درج ذیل ہو گا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha\sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

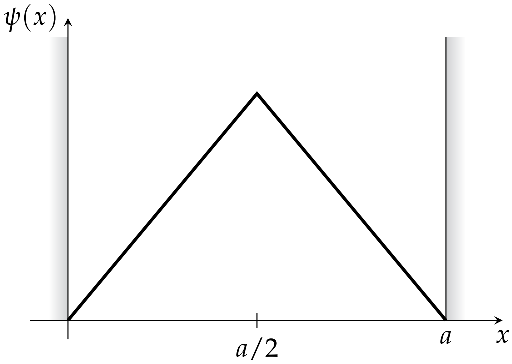
اور ہم جانتے ہے کے یہ تمام B کے لیے یہ $E_{gs}$ سے تجاوز کرے گا۔ اس کی کم سے کم قیمت تلاش کرتے ہے

$$\frac{d}{db}\langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4}$$

لحاظہ درجہ ذیل ہو گا

$$\langle H \rangle_{min} = -\frac{-m\alpha^2}{\pi\hbar^2}$$

جو کہ یقیناً $E_{gs}$ سے یہ قدرے بلند ہو گا، چونکہ $2 < \pi$
میں نے کہا آپ کسی بھی معمول شدہ پر کیا تفاعل $\psi$ کا انتخاب کر سکتے ہے جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ غیر استمراری تفاعلات کے دوہرہ تفرق جو $\langle T \rangle$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہو گا، کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے انو کے چال چلنا ہو گا۔ ہاں، اگر آپ محتاط ہو تو استمراری تفاعلات جن میں بل پائے جاتے ہو، کو استعمال کرنا نسبتاً آسان ہو گا۔ اگلی مثال میں انہیں استعمال کرنا دکھایا گیا ہے۔




شکل ۷.۱: لامتناہی چوکور کنواں کے لئے آزمائشی تکونی تفاعل موج (مساوات 10.7)۔

مثال
3.7 تکونی آزمائشی تفاعل موج (شکل ۷.۱)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بعدی لامتناہی چوکور کنواں کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ A کو معمول زنی سے تعین کیا جائے گا:

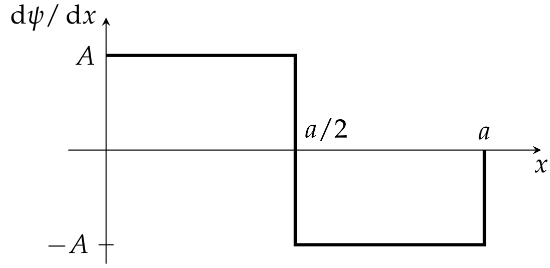
$$1 = |A|^2 \left[ \int_0^{a/2} x^2 \, dx + \int_{a/2}^{a} (a-x)^2 \, dx \right] = |A|^3 \frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{3}{a}}$$

جیسا شکل ۷.۲ میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہو گا

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اب سیڑھی تفاعل کا تفرق ایک Delta تفاعل ہے. سوال 24.2 ب دیکھیے.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x-a/2) + A\delta(x-a)$$




شکل ۲.۷: لامتناہی چوکور کنویں میں تکونی تفاعل موج (شکل ۱.۷) کا تفرق۔

لحاظ درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned}\langle H\rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m}\int[\delta(x)-2A\delta(x-a/2)+\delta(x-a)]\psi(x)\,dx\\ &= -\frac{\hbar^2 A}{2m}[\psi(0)-2\psi(a/2)+\psi(a)] = \frac{\hbar^2 A^2 a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2}\end{aligned}$$

ٹھیک زمینی حال توانائی $E_{gs}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ مساوات 27.2 ہے۔ لحاظ یہ مسئلہ کار آمد ہے۔ $12>\pi^2$

اصول تغیوریت انتہائی طاقتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سالمہ کی زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر ماہر کیمیا ایک ایسا پرکھی تفاعل موج منتخب کرکے، جس میں متعدد مقدار معلوم پائے جاتے ہو اور ان کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\langle H\rangle$ کی کم سے کم ممکنہ قیمت تلاش کرے گا۔ اصل تفاعل موج کے ساتھ $\psi$ کی کوئی مشابہت نہ پائے جانے کی صورت میں بھی آپ کو $E_{gs}$ کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہوگی۔ ظاہر ہے اگر آپ $\psi$ کو حقیقی تفاعل کے زیادہ قریب منتخب کر پائے تو اتنا بہتر ہوگا۔ اس ترقیب کے ساتھ مسلہ یہ ہے کہ آپ کبھی بھی جان نہیں سکتے کہ آپ درست جواب کے کتنے قریب ہو۔ آپ صرف اتنا جانتے ہو کہ اصل جواب آپ کے نتیجہ سے کم ہوگا۔ مزید اس روپ میں یہ ترقیب صرف زمینی حال کے لیے کارآمد ہے۔ البتہ سوال 4.7 دیکھیے۔

سوال

1.7 درج ذیل مخفیہ کے لئے زمینی حال توانائی جاننے کی خاطر گاوسی پرکھی تفاعل :مساوات 2.7 کی کم سے کم بالائی حد بندی تلاش کرے۔

ا) خطی مخفیہ

$$V(x)=\alpha|x|$$

ب) طاقت چار مخفیہ

$$V(x)=\alpha x^4$$

سوال
2.7 یک بودی ہارمونی مور تیش $E_{gs}$ کی بہترین حد بندی کو درج ذیل روپ کی پر کیا تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کر کے تلاش کریں. جہاں معمول زنی سے تعائن ہو گا. جبکہ بھی قابل تبدیل مقدار معلوم ہے. سوال 3.7:
ڈلتا تفاعل مخفیہ

$$-\alpha\delta(x)$$

کی $E_{gs}$ کی بہترین بالائی حد بندی کو دکونی پر کیا تفاعل مساوات 10.7. لیکن جس کا وسط مبدہ پر ہو استعمال کر کے تلاش کریں. یہاں a ایک قابل تبدیل مقدار معلوم ہے.
سوال
4.7ا) اصول تغیوریت کے درج ذیل زمنی نتیجہ کو ثابت کریں. اگر $\langle\psi|\psi_{gs}\rangle = 0$ تب $\langle H\rangle \geq E_{fc}$ ہو گا. جہاں پہلی ہیجان حال کی توانائی $E_{fc}$ ہے. یوں اگر ہم کسی طرح ٹھیک زمینی حال کو امودی ایک پر کیا تفاعل تلاش کر سکے تب ہم پہلی ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکتے ہیں. عموماً چونکہ ہم زمینی حال تفاعل $\psi_{gs}$ کو نہیں جانتے ہے لحاظہ یہ کہنا مشکل ہو گا کہ ہمارا پر کی تفاعل $\psi$ اس کو امودی ہو گا. ہاں، اگر x کے لحاظ سے مخفی $V(x)$ ایک جفت تفاعل ہو تب زمینی حال بھی جفت ہو گا. لحاظہ کوئی بھی طاق پر کیا تفاعل خود بخود اس زمنی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا.
ب) درج ذیل پر کیا تفاعل

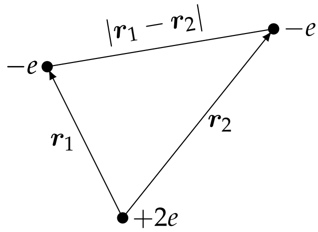
$$\psi(x) = Axe^{-bx^2}$$

استعمال کرتے ہوئے یک بودی ہارمونی مور تیش کی پہلی ہیجان حال کا بہترین بالائی حد بندی تلاش کرے.
سوال 5.7
ا) اصول تغیوریت استعمال کر کے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تجاوز کرے گا یا کم سے کم کبھی بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا.
ب) آپ جز آ جانتے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دور تبی تصحیح لاظمن منفی ہو گی. مساوات 15.6 کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہو گا.

## ۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر (شکل ۷.۳) کے مرکزہ میں دو پروٹون اور دو نیوٹران جن کا یہاں کوئی کردار نہیں ہو گا پائے جاتے ہیں اور مرکزا کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔ مہین ساخت اور باریک طزہی کو نظر انداز کرتے ہوئے اس نظام کا ہملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\Big)$$




شکل ۷.۳: ہیلیم جوہر۔

ہم نے زمینی حال توانائی $E_{gs}$ کا حساب کرنا ہو گا۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتا ہے۔ $E_{gs}$ جانتے ہوئے ہم ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی برداری عمل معلوم کر سکتے ہیں۔
سوال 6.7 دیکھیں
تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حل توانائی کی قیمت کو انتہائی زیادہ درستگی تک پیمائش کیا گیا ہے۔

$$E_{gs} = -78.975\text{eV}$$

ہم نظریا سے اسی عدد کو حاصل کرنا چاہینگے۔ یہ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنی سادہ اور اہم مسلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔ مسلہ الیکٹران الیکٹران دفع

$$V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

پیدا کرتا ہے۔ اس جز کو نظر انداز کرنے سے $H$ ہائیڈروجن ہملٹنیو میں الہدہ گا ہو جاتا ہے جہاں مرکزوی بار e کی بجائے $2e$ ہو گا۔ اس کا ٹھیک حل ہائیڈروجن دفالاج ماج کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2) = \frac{8}{\pi a^3 e^{-2(r_1+r_2)/a}}$$

اور توانائی $8E_1 = -109\text{eV}$ الیکٹران وولٹ مساوات 31.5 ہو گی۔ یہ قیمت $-79\text{eV}$ الیکٹران وولٹ سے بہت دور ہے۔ تاہم یہ صرف آغاز ہے۔ ہم فایے ناٹ کو بھر کیا افعال معاج لیتے ہوئے $E_{gs}$ کی بہتر تخمین کو اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں چونکہ یہ زیادہ تر ہملٹنی کا امتیازی دفعال ہے لہذا یہ خصوصی طور پر بہتر انتخاب ہے۔

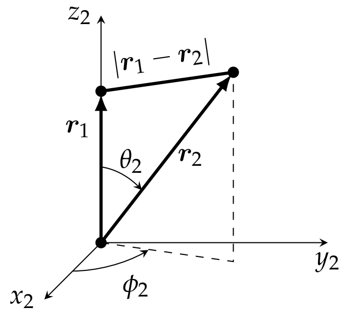
$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\langle V_{ee} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$




شکل ۷.۴: محدد کا انتخاب برائے $\boldsymbol{r}_2$ تکمل (مساوات 20.7)۔

میں $r_2$ تکمل کو پہلے حل کرتا ہوں۔ یوں $r_1$ کو مستقل تصور کیا جائے گا۔
ہم $r_2$ کے محددی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ اس کا قطبی محور $r_1$ پر پایا جاتا ہو (شکل ۷.۴)۔ قانون کوسائن کے تحت

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3 r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}} r_2^2 \sin\theta_2 dr_2 d\theta_2 d\phi_2$$

متغیر $\phi_2$ کا (نہایت آسان) تکمل $2\pi$ دے گا۔
متغیر $\theta_2$ کا تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}} \,\mathrm{d}\theta_2 = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}{r_1 r_2}\Big|_0^{\pi}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r_1 r_2}\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2}\right) \\ &= \frac{1}{r_1 r_2}\left[(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|\right] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$I_2 = 4\pi(\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^{\infty} e^{-4r_2/a} r_2 dr_2)$$
$$= \frac{\pi a^3}{8r_1}[1-(1+\frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}]$$

اسی طرح $\langle V_{ee}\rangle$ درج ذیل ہو گا۔

$$(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})(\frac{8}{\pi a^3})\int[1-(1+\frac{2r_1}{a})e^{-4r_1/a}]e^{-4r_1/a} r_1 \sin\theta_1 dr_1 d\theta_1 d\phi_1$$

ظوایائی تکملات $4\pi$ دیں گے جبکہ $r_1$ کا تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\infty}[re^{-4r/a}-(r+\frac{2r^2}{a})e^{-8r/a}]dr = \frac{5a^2}{128}$$

آخر میں اس طرح درج ذیل ہو گا

$$\langle V_{ee}\rangle \frac{5}{4a}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{5}{2}E_1 = 34\text{eV}$$

جس کی بنا پر درج ذیل ہو گا

$$\langle H\rangle = -109\text{eV} + 34\text{eV} = -75\text{eV}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے۔ یاد رہے کہ تجرباتی قیمت 79- الیکٹران وولٹ ہے۔
تاہم ہم اس سے بھی بہتر کر سکتے ہیں۔ ہم $\psi_0$ جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسا ایک دوسرے پر اصر انداز نہیں ہوتے ہیں۔ سے بہتر زیادہ حقیقت پسندانہ پھر کیا دفعال کا سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کا دوسرے الیکٹران پر اصر کو مکمل طور پر نظر انداز کرنے کی بجائے ہم کہتے ہیں کہ ایک الیکٹران قواسطن منفی بار کی بطل کی طرح ہو گا جو مرکزا کو جزوی طور پر سپر کرتا ہے جس کی بنا پر دوسرے الیکٹران کو موثر مرکزوی بار z کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آئے گی۔
اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا برقی دفعال استعمال کریں۔

$$\psi_1(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi a^3 e^{-Z(r_1+r_2)/a}}$$

ہم z کو تخریت کا مقدار معلوم تصور کر کہ اس کی وہ تمام قیمت منتخب کرکے جس سے H کی کم سے کم قیمت حاصل ہو ۔ دیہان رہے کہ فضول تغیریت کی ترقیب کبھی بھی ہیملٹنی کو تبدیل نہیں کرتا ہے۔ ہیلیم کا ہیملٹنی اب بھی مساوات مساوات 14.7 دیگی البتہ تصور میں ہیملٹنی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کے بہتر بلکیا دفعال معاج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ دفعال معاج اس غیر مضطرب ہیملٹنی جو الیکٹران کی دفعہ کو نظر انداز کرتا ہو جس

میں جز coulumb میں دو کی جگہ z پایا جاتا ہو کا امتیازی حال ہو گا۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے ہم H 14.7 کو روپ میں لکھتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2+\nabla_2^2)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Z}{r_1}+\frac{Z}{r_2})+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{(Z-2)}{r_1}+\frac{(Z-2)}{r_2}+\frac{1}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|})$$

ظاہر ہے کہ H کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہو گی

$$\langle H\rangle = 2Z^2E_1+2(Z-2)(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})\langle\frac{1}{r}\rangle+\langle V_{ee}\rangle$$

یہاں $\langle 1/r\rangle$ سی مراد ایک ظرہ ہائڈروجن زمینی حال سائے 100 جس میں مرکزوی بار Z ہو میں $1/r$ کی تحقیقاتی قیمت ہے۔
یوں مساوات 55.6 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{Z}{a}$$

یہاں بھی vee کی توقیاتی قیمت وہی ہو گی جو پہلے تھی۔ مساوات 65.7 لیکن اب ہم z=2 کی بجائے اختیار z استعمال کریں گے لہذا ہم a کو $Z/2$ سے ظرب کرتے ہیں

$$\langle V_{ee}\rangle = \frac{5Z}{8a}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}) = \frac{5Z}{4}E_1$$

۔ان تمام کو اکٹھے کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا

$$\langle H\langle = [2Z^2-4Z(Z-2)-(5/4)Z]E_1 = [-2Z^2+(27/4)Z]E_1$$

اصول تغیریت کے تحت z کی کسی قیمت کے لیے بھی یہ مقدار $E_{gs}$ سے تجاوظ کرے گی۔
بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت وہاں پائی جانے گی جب $\langle H\rangle$ کی قیمت کن سے کم ہو۔

$$\frac{d}{dZ}\langle H\rangle = [-4Z+(27/4)]E_1 = 0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$Z = \frac{27}{16} = 1.69$$

یہ ایک معقول نتیجہ نظر آتا ہے جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکزا کو سپر کرتا ہے جس کی بنا پر اس کی موثر بار 2 کی بجائے 69.1 نظر آتی ہے۔ اس قیمت کو z میں پر کر کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^6E_1 = -77.5\text{eV}$$

قبلے تقدیر معا معلوم کی تعداد بڑھا کر زیادہ پیچیدہ پر کیا دفعالات معاج لے کر ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اسی ترقیب سے انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے ہم ٹھیک جواب کے دو فیسٹ قریب ہیں لحاظ

اسس کو یہیں پر چھوڑتے ہیں۔

سوال 6.7

ہیلیم کی زمینی حال توانائی $E_{gs} = -79\text{eV}$ لیتے ہوئے توانائی بارداری عمل صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کا حساب کریں۔

اشارہ پہلے ہیلیم باردار یا $He^{+}$ جس کے مرکزا کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے کی زمینی حال توانائی تلاش کریں۔

اس کے بعد دونوں توانائیوں کا فرق لیں سوال 7-7

اس حصہ میں ملتمل ترقیبات کا اطلاق $H^{-}$ اور $Li^{+}$ باردار یا جن میں ہلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں اور جن کی مرکزوی بار بالترتیب z=3,z=1 ہیں کریں۔

باری باری ایک ایک باردار یا کے لیے کا موثر جزوی سپر شدا مرکزوی بار تلاش کر کہ $E_{gs}$ کی بہترین بالائی حقبندی متعین کریں۔

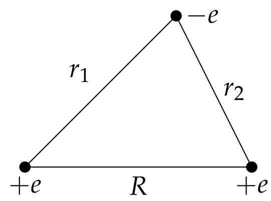
باردار یا $\text{H}^{-}$ کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ $\langle H\rangle > -13.6\text{eV}$ ہوگا جس کے تحت کوئی مقید حال نہیں ہوگا۔ توانائی کی نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورتحال سیہ ہوگی کہ الیکٹران درست ہو کر پیچھے مدرل حاڈروجن جوہر چھوڑے۔ سیہ زیادہ حیرانگی کی بات نہیں ہے چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے یہاں الیکٹران اور مرکزا کے بیچ قوت کشش کم ہے۔ جبکہ الیکٹرانوں کے بیچ قوت دفعہ زیادہ ہے۔ جو اسس جوہر کے توڑے گا حقیقت میں سیہ نتیجہ درست نہیں ہے۔ زیادہ نفیس بر کیا دفعال معاج ساتھ 18.7 دیکھیں منتخب کر کے دکھایا جا سکتا ہے کہ $E_{gs} < -13.6\text{eV}$ ہوگا لحاظہ مقید حال موجود ہوگا۔ البتہ سیہ بمشکل مقید ہوگا اور کوئی ہجانی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں یوں $\text{H}^{-}$ کا غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا ہے۔ تمام عبور از تمرار یا کو اور از تمرار یا سے ہوں گے اسی لیے ان کا مطالیا تجربہ گاہ میں کرنا دشوار ثابت ہوتا ہے اگرچہ سورج کی سطح پر ان کی کثیر تعداد پائی جاتی ہے۔

## ۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردار سیہ

اصول تغیریت کی ایک اور پلاسی کی استعمال۔ ہائیڈروجن سالمہ باردار سیہ $\text{H}_2^{+}$ کا معائنہ ہے۔ ہائیڈروجن سالمہ باردار سیہ دو پروٹان کی کولمب میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے (شکل ۷.۵)۔ میں فی الوقت فرض کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان ساکن ہیں اور ان کے بیچ فاصلہ R ہے۔ اگرچہ اسس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ R کی اصل قیمت ہوگی۔ ہیمٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

جہاں $r_1$ اور $r_2$ الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلہ ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک ایسا پھر کی طفال موج کا انتخاب کریں جس کو استعمال کرتے ہوئے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے حاصل ہو۔ درحقیقت ہم صرف اتنا جاننا چاہتے ہیں کہ آیا اسس نظام میں بند پیدا ہوگا یعنی آیا ایک مادل ہائیڈروجن جوہر اور ایک آزاد پروٹان سے کیا اسس نظام کی توانائی کم ہوگی۔ اگر ہماری پھر کی طفال موج دکھائے کہ ایک مکید حال پایا جاتا ہے۔ اسس سے زیادہ بہتر پھر کی طفال اسس بند کو مزید طاقتور بنائے گا۔




شکل ۷.۵: ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ، $H_2^+$

پھر کی طفال موج تیار کرنے کی خاطر فرض کریں زمینی حال مہوار 80.4

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

میں ایک ہائیڈروجن جوہر کے قریب لامتناہی دوسرا پروٹان قریب لا کر فاصلہ R پر رکھ کر باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس بوہر سے r کافی بڑا ہو تب الیکٹران کی طفال موج غالباً زیادہ تبدیل نہیں ہو گا۔ تاہم ہمیں دونوں پروٹانوں کو ایک نظر سے دیکھنا ہو گا۔ لہذا کسی ایک کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک جیسا ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل روپ کے پھر کی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)]$$

پر غور کریں
۔ماہر کوانٹم کیمیا اس ترکیب کو جوہری مدارچوں کا خطی جوڑ کہتے ہیں۔
سب سے پہلا کام پھر کی طفال کی معمول زنی ہے۔

$$1 = \int |\psi|^2 \, d^3r = |A|^2 \left[ \int |\psi_0(r_1)|^2 \, d^3r + \int |\psi_0(r_2)|^2 \, d^3r + 2 \int \psi_0(r_1)\psi_0(r_2) d^3r \right]$$

پہلے دو تکملات کا نتیجہ ایک ہے۔ چونکہ $\psi_0$ خود معمول شدہ ہے۔ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درج ذیل فرض کریں۔

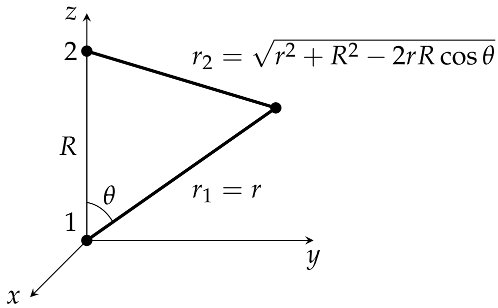
$$I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} d^3r$$

ایسا معتدی نظام کھڑا کریں جس کہ نقطہ پر پروٹان 1 پایا جاتا ہو جبکہ Z محور پر فاصلہ R پر پروٹان 2 پایا جاتا ہو (شکل ۷.۶)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$r_1 = r \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

لہذا درج ہو گا

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}/a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$




شکل ۷.۶: مقدار $I$ کے حساب کی خاطر محدد (مساوات 39.7)۔

متغیر $\phi$ کا (نہایت آسان) تکمل $2\pi$ دے گا۔ متغیر $\theta$ کا تکمل حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$

لہٰذا

$$d(y^2) = 2y dy = 2rR\sin\theta d\theta$$

ہو گا۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{\pi} e^{-\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta/a}}\sin\theta d\theta = \frac{1}{rR}\int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a} y dy = -\frac{-a}{rR}[e^{-(r+R)/a}(r+R+a) - e^{-|r-R|/a}(|$$

اب تکمل $r$ با آسانی حل ہو گا۔

$$I = \frac{2}{a^2R}[-e^{-R/a}\int_0^{\infty}(r+R+a)e^{-2r/a} r dr + e^{-R/a}\int_0^R (R-r+a) r dr + e^{R/a}\int_R^{\infty}(r-R+a)e^{-2r/a}$$

ان تکملات کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد کچھ الجبرائی تصحیح کے بعد درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$I = e^{-R/a}\left[1 + (\frac{R}{a} + \frac{1}{3}(\frac{R}{a})^2\right]$$

یہاں I کو مکمل ڈھب کہتے ہیں جو $\psi_0(r_1)$ کا $\psi_0(r_2)$ پر چڑھنے کی مقدار کی پیمائش ہے۔ دھیان رہے کہ $R \to 0$ کی صورت میں یہ ایک پہنچتا ہے۔ جبکہ $R \to \infty$ کی صورت میں یہ صفر کو پہنچتا ہے۔ تکمل ڈھب i میں جز ربی معمول زنی مساوات 38.7 درج ذیل ہو گا۔

$$|A|^2 = \frac{1}{2(l+1)}$$

اس کے بعد ہمیں پھر کی حال $\psi$ میں H کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہوگا۔ درج ذیل۔

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{e_1}\Big)\psi_0(r_1)=E_1\psi_0(r_1)$$

جہاں $E_1 = -13.6\text{eV}$ جو ہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے اور r1 کی جگہ r2 کے لئے بھی یہی کچھ کے بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}H\psi&=A\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big)\Big][\psi_0(r_1)+\psi_0(r_2)]\\&=E_1\psi-A(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{r^2}\psi_0(r_1)+\frac{1}{r_1}\psi_0(r_2)\Big]\end{aligned}$$

یوں H کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle H\rangle=E_1-2|A|^2\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\Big[\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_2}\Big|\psi_0(r_1)\Big\rangle+\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_1}\Big|\psi_0(r_2)\Big\rangle\Big]$$

میں آپ کے لئے باقی دو مقدار جو بلاواسطہ تکمل

$$D\equiv a\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_2}\Big|\psi_0(r_1)\Big\rangle$$

اور مبادلہ تکمل

$$X\equiv a\Big\langle\psi_0(r_1)\Big|\frac{1}{r_1}\Big|\psi_0(r_2)\Big\rangle$$

کہلاتا ہے۔ حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلاواسطہ تکمل کا نتیجہ درج ذیل

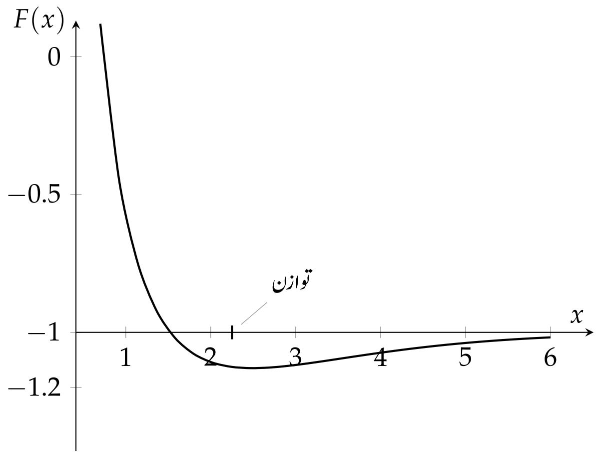
$$D=\frac{a}{R}-\Big(1+\frac{a}{R}\Big)e^{-2R/a}$$

اور مبادلہ تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$X=\Big(1+\frac{R}{a}\Big)e^{-R/a}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور یاد رکھتے ہوئے مساوات 70.4 اور 72.4 کہ $E_1 = -(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/2a)$ ہے۔ ہم درج ذیل آخذ کرتے ہیں۔

$$\langle H\rangle=\Big[a+2\frac{(D+X)}{(1+L)}\Big]E_1$$




شکل ۷.۷: تفاعل $F(x)$ (مساوات 51.7) کی ترسیم مقید حال کی موجودگی دکھاتی ہے (بوہر رداس کی اکائیوں میں $x$ دو پروٹانوں کے بیچ فاصلہ ہے)۔

اصول تغیریت کے تحت زمینی حال توانائی $\langle H\rangle$ سے کم گی۔ یقیناً یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے۔ اس کے ساتھ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی بھی پائی جائے گی۔

$$V_{pp} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{2a}{R}E_1$$

یوں نظام کی کل توانائی مائنس $E_1$ کی اکائیوں میں $x \equiv R/a$ کا طفال لکھتے ہوئے درج ذیل سے کم ہو گا۔

$$F(x) = -1 + \frac{2}{X}\left\{\frac{(1-(2/3)x^2)e^{-x} + (1+x)e^{-2x}}{1+(1+x+(1/3)x^2)e^{-x}}\right\}$$

اس طفال کو شکل ۷.۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ منفی ایک سے نیچے ہے۔ جہاں معدل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی مائنس 6.13 الیکٹران وولٹ سے توانائی کم ہے۔ لہٰذا اس نظام میں بند پیدا ہو گا۔ یہ ایک شریک گرفتی بند ہو گا، جہاں دونوں پروٹانوں کا الیکٹران میں ایک دوسرے کے برابر حصہ ہو گا۔ پروٹانوں کے بیچ توازنی فاصلہ تقریباً 4.2 رداس بوہر یعنی 3.1 انگسٹروم ہے۔ جس کی تجرباتی قیمت 06.1 انگسٹروم ہے۔ توانائی بندش کی حساب سے حاصل قیمت 8.1 الیکٹران وولٹ جبکہ پیمائشی قیمت 8.2 الیکٹران وولٹ ہے۔ چونکہ اصول تغیریت ہر صورت زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے لہٰذا یہ بندش کی طاقت کی قیمت کم دے گا۔ بہر حال اس کی فکر نہ کریں۔ یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندش پایا جاتا ہے۔ ایک بہتر تغیراتی طفال اس مخفیہ کو مزید گہرا کرے گا۔

سوال 8.7
بلاواسطہ تکمل D اور مبادلہ تکمل X مساوات 45.7 اور 46.7 کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوات

47.7 اور 48.7 کے ساتھ کریں۔
سوال 9.7
فرض کریں ہم نے پھر کی طفال موج مساوات 37.7 میں منفی علامت استعمال کی ہوتی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)]$$

کوئی نیا تکمل حل کیے بغیر مساوات 51.7 کا ماحصل $F(x)$ معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بند پیدا نہیں ہو گا۔ چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے لہٰذا اس سے یہ ثابت نہیں ہو گا کہ ایسے حال میں بند نہیں پایا جائے گا۔ تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی چاہیے۔ تبصرہ در حقیقت درج ذیل روپ کا کوئی طفال

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)]$$

کی ایک خاصیت یہ ہے کہ الیکٹران دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم چونکہ باہمی ادل بدل $P \quad : \quad r_1 \quad \leftrightarrow \quad r_2$ کی صورت میں ہملٹنی مساوات 35.7 غیر متغیر رہے۔ لہٰذا اس کے امتیازی طفالات کو بیک وقت P کے امتیازی طفالات چنا جا سکتا ہے۔ امتیازی قدر $+1$ کے ساتھ مثبت علامت۔ مساوات 37.7 اور امتیازی قدر منفی 1 کے ساتھ منفی علامت مساوات 52.7 ہو گا۔ زیادہ عمومی صورت مساوات 53.7 کا استعمال مزید فائدہ نہیں دے گا۔ اگرچہ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔
سوال 10.7
نقطہ توازن پر $F(x)$ کی دوہرا تفرق سے ہائیڈروجن سالمہ بار دار یہ حصہ 3.2 میں دونوں پروٹانوں کی ارتعاش کی قدرتی تعدد اومیگہ کی اندازاً قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔ اگر اس موردیش کی زمینی حال توانائی $\hbar\omega/2$ نظام کی بندشی توانائی سے زیادہ ہو تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں موردیش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہو گا۔ ساتھ ہی مکید لرزشی سطحوں کی اندازاً تعداد دریافت کریں۔ تبصرہ آپ دلیلی طور پر کم سے کم نقطہ یا اس نقطہ پر دوہرا تفرق حاصل نہیں کر پائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کیجیے گا۔
سوال 11.7
الف) درج ذیل روپ کا بر کی تفاعل موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a) & (-a/2 < x < a/2) \\ 0 & \end{cases}$$

دیگر صورت اس کا استعمال کرتے ہوئے یک بُعدی ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں. a کی بہترین قیمت کیا ہو گی. H کمتر کا معازنہ ٹھیک توانائی سے کریں. تبصرہ: بر کی تفاعل میں $\pm a/2$ پر ایک بل پایا جاتا ہے ایک غیر استمراری تفرق کیا آپ تو اس سے نمٹنا ہو گا جیسے مجھے مثال 3.7 میں نمٹنا پڑا. ب) وقفہ $(-a, a)$ پر $\psi(x) \quad = \quad B\sin(\pi x/a)$ استعمال آتے ہوئے پہلے حال کی حد بندی تلاش کریں. اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں.
سوال 12.7
الف) درج ذیل بر کی تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2 + b^2)^n}$$

جہاں n اختیاری مستقل ہے استعمال کرتے ہوئے سوال 2.7 کو ہومیت دیں مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\Big[\frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)}\Big]^{1/2}$$

ب) ہارمونی مسر تعش کی پہلی ہیجان حال تو بالائی حد بندی کی کم سے کم قیمت درج ذیل بر کی تفاعل استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں.

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2+b^2)^n}$$

جزوی جواب مقدار معلوم b کی بہترین قیمت درج ذیل دے گا.

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\Big[\frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)}\Big]^{1/2}$$

ج) آپ دیکھیں گے کہ $\infty \to n$ حد بندی بالکل ٹھیک توانایوں تک پہنچتی ہے. ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: بر کی تفاعلات امواج کو $n = 2, n = 3$ اور $n = 4$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا معازنہ اصل تفاعلات موج مساوات 59.2 اور 62.2 کے ساتھ کریں. تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل مماسل سے آغاز کریں.

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$$

سوال 13.1
ہائیڈروجن کی زمینی حال کی کم سے کم حد بندی گوسی بر کی موج تفاعل

$$\psi(r) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں. جہاں معمول زنی سے تعین A ہوگا جبکہ b قابل تبدیل مقدار معلوم ہے. جواب $-11.5\text{eV}$
سوال 14.7
اگر نوریہ کی کمیت غیر صفر $(m_\gamma \neq 0)$ ہوتی تب مخفیا کی جگہ یوکاوا مخفیا

$$V(r) = \frac{-e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

استعمال ہوتا جہاں $(\mu = m_\gamma c/\hbar)$ ہے. اپنی مرضی کا بر کی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیا کے ہائیڈروجن جوہر کی بندشی توانائی کی قیمت معلوم کریں. آپ $\mu a << 1$ لیں اور اپنے جواب کو $(\mu a)^2$ رتبی درستگی تک لکھیں
سوال 15.7 فرض کریں آپکو ایک ایسا کوانٹم نظام دیا جاتا ہے جسکا ہیملٹنی $H_0$ صرف دو امتیازی حالات کا حامل ہو $\psi_a$ جسکی توانائی $E_a$ اور $\psi_b$ جسکی توانائی $E_b$ ہو. یہ عموری معمول شدہ اور غیر انحطاتی ہے. مزید فرض کریں کہ $E_a < E_b$ ہے. اب ہم اضطراب $H'$ چالو کرتے ہیں. جسکے کالبی ارکان درج ذیل ہیں.

$$\langle\psi_a|H'|\psi a\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi b\rangle = 0 \quad \langle\psi_a|H'|\psi b\rangle = \langle\psi_b|H'|\psi a\rangle = h$$

جہاں h کوئی مخصوص مستقل ہے
الف) مترب ہیملٹونی کی امتیازی اقدار کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں تلاش کریں.
ب) رتبہ دوم نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے مترب نظام کی توانائیوں کی اندازی قیمت معلوم کریں.
ج) مترب نظام کی زمینی حال کی توانائی کی اندازی قیمت درج ذیل روپ کا بر کی تفاعل

$$\psi = (\cos\phi)\psi_a + (\sin\phi)\psi_b$$

استعمال کر کہ اصول تغیریت سے حاصل کریں. جہاں $\phi$ قابل تبدیل مقدار معلوم ہے.
تبصرہ: اضطراب کا خطی جوڑ لازماً معمول شدہ دے گا۔
د) اپنے جوابات کا جز الف، ب، اور ج کے ساتھ معازنہ کریں. یہاں اصول تغیریت اتنا زیادہ درست کیوں ہے ؟

سوال 16.7 ہم سوال 15.7 میں تیار کی گئی ترکیب مثال کے طور پر یکساں مقناطیسی میدان $\vec{B} = B_z\hat{k}$ میں ایک ساکن الیکٹرون پر غور کرتے ہیں. جسکا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہو گا

$$H_0 = \frac{eB_z}{m}S_z$$

امتیازی چکر کار $x_a$ اور $x_b$ ان کی مطابقتی توانائیاں $E_a$ اور $E_b$ مساوات 161.7 میں دی گئی ہیں. اب ہم x رخ درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$H' = \frac{eB_x}{m}S_x$$

کے اضطراب کو چالو کرتے ہیں.
الف) اضطراب $H'$ کے کالبی ارکان تلاش کر کہ تصدیق کریں کہ ان کا ساخت مساوات 55.7 تو طرح ہے یہاں H کیا ہو گا؟
ب) دوم رتبی نظریہ اضطراب میں نئی زمینی حال تونائی کو سوال 15.7 (ب) استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں.
ج) زمینی حال توانائی کی حد بندی سوال 15.7 (ج) کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اصول تغیریت سے حاصل کریں

سوال 17.7
اگرچہ ہیلیم کے لیے مساوات شروڈنگر کو ٹھیک ٹھیک حل نہیں کیا جا سکتا ہے مگر بیلیم کے ایسے نظام پائے جاتے ہیں جنکے ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیے جا سکتے ہیں. اس کی ایک سادہ مثال ربڑی پٹی بیلیم ہے جس میں کولنوں کی بجائے قانون ہک کی درج ذیل قوتیں استعمال ہو نگی

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4}m\omega^2|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^2$$

الف) دکھائیں کہ متغیرات $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ کی بجائے متغیرات

$$\vec{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r_1} + \vec{r_2}) \quad \vec{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

استعمال کرنے سے ہیملٹنی دو علیحدہ علیحدہ تین آبادی ہارمونی مرتعشات میں تقسیم ہو گا۔

$$H = [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\mu^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mu^2] + [\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\nu^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)m\omega^2\nu^2]$$

ب) اس نظام کی ٹھیک ٹھیک زمینی حال توانائی کیا ہو گی؟
ج) ٹھیک ٹھیک حل نہ جاننے تو صورت میں ہم ہیملٹنی کی اصل صورت مساوات 59.7 پر حصہ 2.7 کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔
سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے حساب کیجیے گا۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ معازنہ کریں۔
جواب: $\langle H\rangle = 3\hbar\omega(1-\lambda/4)$.

سوال 18.7

ہم نے سوال 7.7 میں دیکھا کہ سپر کیا گیا بر کی تفال موج، مساوات 27.7 جو ہیلیم کے لیے مفید ثابت ہوا منفی ہائیڈروجن باردار یا میں مقید حال میں موجودگی کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چندراشکر نے درج ذیل کا بر کی تفال موج استعمال کیا

$$\psi(\vec{r_1},\vec{r_2}) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2)+\psi_2(r_1)\psi_1(r_2)]$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{z_1^3}{\pi a^3}}e^{-z_1 r/a} \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{z_2^3}{\pi a^3}}e^{-z_2 r/a}$$

یعنی انھوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی اجازت دی ایک الیکٹران کو مرکزا کے قریب اور دوسرے کو مرکزا سے دور تصور کیا گیا۔ چونکہ الیکٹران متماسل زرہ ہے لہذا فضائی تفال موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشاکلی بنانا ہو گا چپکر حال جس کا موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا خلاف تشاکلی ہے۔ دکھائیں کہ قابل تبدیل مقدار معلوم $Z_1$ اور $Z_2$ کی قیمتوں کو سوچ کہ منتخب کرنے سے $\langle H\rangle$ کی قیمت $-13.6\text{eV}$ سے کم حاصل کی جا سکتی ہے
.
جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{E_1}{x^6+y^6}\left(-x^8+2x^7+\frac{1}{2}x^6y^2-\frac{1}{2}x^5y^2-\frac{1}{8}x^3y^4+\frac{11}{8}xy^6-\frac{1}{2}y^8\right)$$

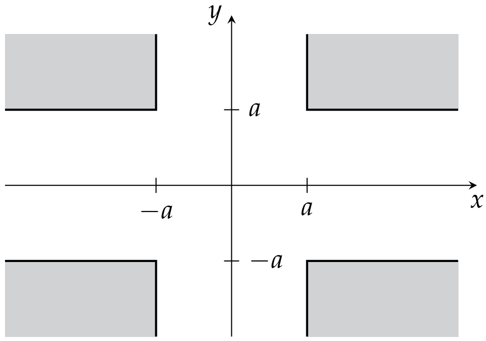
جہاں $z$ $x \equiv Z_1+Z_2$ اور $y \equiv 2\sqrt{Z_1Z_2}$ ہیں۔ چندرشیکر نے $Z_1 = 1.039$ چونکہ یہ ایک سے بڑا ہے لہذا اس کو موثر مرکزی بار تصور نہیں کیا جا سکتا ہے۔ تاہم اس کے باوجود اس کو بر کی تفال موج قبول کیا جا سکتا ہے۔ اور $Z_2 = 0.283$ استعمال کیا

سوال 19.7

جو بری برکن کو برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ دو ذرات مثلاً دو ڈیوٹران کو ایک دوسرے کے اتنا قریب لانا ہے کہ کولمب قوت دفع پر ان کے بیچ کششی تاہم اثر قریب مرکزی قوتیں سبقت لے جائیں ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کہ ان کو بلا منصوبہ تصادم کے ذریعے انھیں ایک دوسرے کے قریب زبردستی لا سکتے ہیں۔
دوسری تجویز میون عمل انگیز کا استعمال ہے جس میں ہم ہائیڈروجن سالمہ باردا پر اٹان کی جگہ ڈیوٹران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹران کے بیچ توازنی فاصلہ کی پیش گوئی کریں۔ اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی خاطر کیوں الیکٹران سے میون بہتر صابت ہو گا۔

سوال 20.7

کوانٹم نقطے فرض کریں ایک ذرہ تو شکل ۸.۷ میں دکھائے گئے سلیبی خطہ پر دوا باد میں حرکت کرنے کا پابند بنایا جائے سلیبی ہاتھ لامتناہی تک پہنچتے ہیں۔ سلیب کے اندر مخفیا صفر ہے جو کہ اس کے بایر لامتناہی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تشکیل مثبت توانائی مقید حال کا حامی ہے۔




شکل ۸.۷: صلیبی خطہ برائے سوال 20.7

الف) دکھائیں کہ کم سے کم توانائی جو لامتناہی تک پہنچتی ہے درج ذیل ہے

$$E_{\text{threshold}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2};$$

اس سے کم توانائی کا ہر حل لامتناہی کا مقید ہوگا۔
اشارہ: ایک بازو پر $(x >> a)$ مساوات شروڈنگر کو علیحدگی متغیرات کی مدد سے حل کریں۔ اگر تفاعل موج لامتناہی تک پہنچتی ہے تب اس کا $x$ پر انحصار $e^{ik_x x}$ جہاں $k_x > 0$ ہے کی روپ میں ہوگا۔
ب) اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $E$ سے کم توانائی زمینی حال کا ہوگا۔ درج ذیل پر کی تفاعل موج استعمال کریں۔

$$\psi(x.y) = A\begin{cases}(1-|xy|/a^2)e^{-\alpha} & |x|\leq a, |y|\leq a\\ (1-|x|/a)e^{-\alpha|y|/a} & |x|\leq a, |y|>a\\ (1-|y|/a)e^{-\alpha|x|/a} & |x|>a, |y|\leq a\\ 0 & \end{cases}$$

اس کو معمول پر لا کر $A$ تعین کریں۔ اور $H$ کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں
جواب:

$$\langle H\rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2}\left(\frac{\alpha^2+2\alpha+3}{6+11\alpha}\right)$$

اب $\alpha$ کے لحاظ سے کم سے کم قیمت تلاش کر کے دکھائیں کہ نتیجہ $E$ سے کم ہوگا۔ سلیب کی تشاکل سے پورا فائدہ اٹھائیں آپ کو صرف خطہ $1/8$ پر تکمل لینا ہوگا۔ باقی سات تکمل بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دھیان رہے کہ اگرچہ پر کی تفاعل موج استمراری ہے اس کے تفرقات غیر استمراری ہیں۔ رکاوٹی لکیریں $x = \pm a$، $y = 0$، $x = 0$ اور $y = \pm a$ پر پائی جاتی ہیں۔ جہاں آپ کو مثال 3.7 کی تکنیک بروکار لانی ہوگی۔

# باب ۸

# ونزل و کرامرز و برلوان تخمین

ونزل، کرامرز، برلوان ترکیب سے غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات کی یک بُعدی تخمینی حل حاصل کیئے جا سکتے ہیں اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفرقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شروڈنگر کی رداسی حصے پر کیا جا سکتا ہے۔ یہ بالخصوص مکید حال توانائیوں اور محف رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں مفید ثابت ہوتا ہے۔ اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ای کذرہ جس کی توانائی $E$ ہو ایک ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ $V(x)$ ایک مستقل ہو۔ تفاعل موج $E > V$ کی صورت میں درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \qquad k \equiv \sqrt{2m(E-V)}/\hbar \text{ جہاں}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لیئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لیئے منفی علامت استعمال ہو گا یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے جس کا طولِ موج $\lambda = 2\pi/k$ اٹل ہے اور اس کا حیطہ $A$ غیر تغیر ہے۔ اب فرض کریں کہ $V(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ $\lambda$ کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہے تا کہ کئی مکمل طول امواج پر مخفیہ کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\psi$ عملاً سائن نما ہو گا تاہم اس کا طولِ موج اور حیطہ $x$ کے ساتھ ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی بنیاد ہے۔ درحقیقت یہ $x$ پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے تیز ارتعاشات جنہیں طولِ موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی ترمیم کرتا ہو۔

اسی طرح $E < V$ جہاں $V$ ایک مستقل ہے کی صورت میں $\psi$ قوت نمائی ہو گا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \qquad \kappa \equiv \sqrt{2m(V-E)}/\hbar \text{ جہاں}$$

اور اگر $V(x)$ ایک مستقل نہ ہو بلکہ $1/\kappa$ کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو تب حل عملاً قوت نمائی ہوں گے البتہ $A$ اور $\kappa$ اب $x$ کے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتے تفاعلات ہوں گے۔ یہ نظریہ کلاسیکی نقطہ واپسی جہاں

$V \approx E$ ہو کی قریبی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہو گا چونکہ یہاں $\lambda$ یا $1/\kappa$ لامتناہی تک بڑھتا ہے اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ $V(x)$ آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا آپ دیکھیں گے اس تخمین میں نقاط واپسی سے نمٹنا دشوار ترین ہو گا اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

## ۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \tag{۸.۱}$$

جہاں

$$p(x)\equiv\sqrt{2m[E-V(x)]} \tag{۸.۲}$$

اس ذرے کے معیارِ حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے جس کی کل توانائی $E$ اور مخفی توانائی $V(x)$ ہو۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ $E > V(x)$ ہے لحاظہ $V(x)$ حقیقی ہو گا اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں کلاسیکی طور پر ذرہ $x$ کے ساتھ پر رہنے کا پابند ہو گا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر $\psi$ ایک مخلوط تفاعل ہو گا جس کو حیطہ $A(x)$ اور حیطہ $\phi(x)$ جہاں دونوں حقیقی ہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x)=A(x)e^{i\phi(x)} \tag{۸.۳}$$

ہم $x$ کے لحاظ سے تفرق کو قوت نمائی میں چھوٹی لکیر سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں

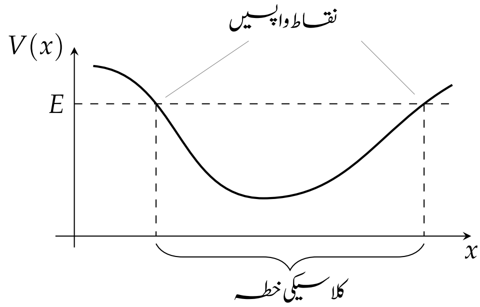
$$\frac{d\psi}{dx}=(A'+iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=[A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2]e^{i\phi} \tag{۸.۴}$$

اس کو مساوات 8.1 میں پُر کرتے ہیں

$$A''+2iA'\phi'+iA\phi''-A(\phi')^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A \tag{۸.۵}$$




شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خطہ میں مقید ہو گا جہاں $E \geq V(x)$ ہو۔

دونوں ہاتھ کی حقیقی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات حاصل ہو گی جبکہ دونوں ہاتھ کے خیالی اجزا کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسرا حقیقی مساوات حاصل ہو گا

$$A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A, \qquad \text{یا} \qquad A'' = A\left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}\right] \tag{۸.۶}$$

اور

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0, \qquad \text{یا} \qquad \left(A^2\phi'\right)' = 0 \tag{۸.۷}$$

مساوات 8.6 اور 8.7 ہر لحاظ سے اصل شروڈنگر مساوات کے معادل ہیں ان میں سے دوسرے کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے

$$A^2\phi' = C^2, \qquad \text{یا} \qquad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}} \tag{۸.۸}$$

جہاں $C$ ایک حقیقی مستقل ہو گا۔ ان میں سے پہلی مساوات 8.6 کو عموماً حل کرنا ممکن نہیں ہو گا یہی ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ حیطہ $A$ بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے لحاظہ جزو $A''$ قابلِ نظر انداز ہو گا۔ بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(\phi')^2$ اور $p^2/\hbar^2$ دونوں سے $A''/A$ بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم مساوات 8.6 کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}, \qquad \text{یا} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{p}{\hbar}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\phi(x) = \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{۸.۹}$$

میں فل حال اسکو ایک غیر قطعی تکمل لکھتا ہوں کسی بھی مستقل کو $C$ میں زن کیا جا سکتا ہے جس کے تحت یہ مخلوط ہو سکتا ہے اس طرح درج ذیل ہو گا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۰}$$

اور تخمینی عمومی حل انکا خطی جوڑ ہو گا جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہو گا

$$\left|\psi(x)\right|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)} \tag{۸.۱۱}$$

جس کے تحت نقطہ $x$ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال اس نقطہ پر ذرے کے کلاسیکی معیارِ حرکت لحاظہ سمتی رفتار کا بلعکس متناسب ہو گا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں چونکہ جس مکام پر ذرہ کی رفتار تیز ہو وہاں اسے پانے کا احتمال کم سے کم ہو گا۔ درحقیقت بعض اوقات تفرقی مساوات میں جزو $A''$ کو نظر انداز کرنے کی بجائے اس نیم کلاسیکی مشاہدہ سے آغاز کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ مواخر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے لیکن اوّل الذکر بہتر عقلی وجہ پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: **دو انتصابی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔** فرض کرَیں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ غیر ہموار ہو (شکل ۸.۲)۔

$$V(x) = \begin{cases} \text{کچھ مخصوص تفاعل}, & 0 < x < a \text{ اگر}, \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۱۲}$$

کنویں کے اندر ہر جگہ $E > V(x)$ فرض کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}\right]$$

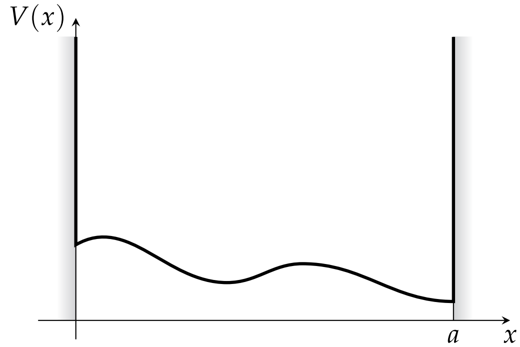
جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin\phi(x) + C_2 \cos\phi(x)] \tag{۸.۱۳}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x')\,\mathrm{d}x' \tag{۸.۱۴}$$




شکل ۸.۲: ایسا لامتناہی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں ہم تکمل کی زیریں حد اپنی مرضی کا منتخب کر سکتے ہیں یہاں یہی کیا گیا۔ اب $x = 0$ پر $\psi(x)$ لازماً صفر ہو گا لحاظہ چونکہ $\psi(0) = 0$ ہے $C_2 = 0$ ہو گا۔ ساتھ ہی $x = a$ پر بھی $\psi(x)$ صفر ہو گا لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\phi(a) = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{۸.۱۵}$$

ماخوذ

$$\boxed{\int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar} \tag{۸.۱۶}$$

کوانٹازنی کی درج بالا شرط تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے۔

مثلاً اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو $V(x) = 0$ تب $p(x) = \sqrt{2mE}$ ایک مستقل ہو گا اور مساوات 8.16 کے تحت $pa = n\pi\hbar$ یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

جو لامتناہی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرانا کلیہ ہے مساوات 2.27۔ یہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ہمیں بالکل ٹھیک ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے چونکہ اصل تفاعل موج کا حیطہ مستقل ہے لحاظہ $A''$ کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا۔ □

سوال ۸.۱: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی اجزاتی توانائیاں $E_n$ تلاش

کریں جس کی آدھی تہہ میں $V_0$ بلندی کی سیڑھی پائی جاتی ہو شکل 6.3

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \text{ اگر} \\ 0, & a/2 < x < a \text{ اگر} \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو $V_0$ اور $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$ کی صورت میں لکھیں جہاں بغیر سیڑھی لامتناہی چوکور کنویں کے $n$ ویں اجازتی توانائی $E_n^0$ ہے۔ فرض کریں $E_1^0 > V_0$ تاہم یہ فرض نہ کریں کہ $E_n \gg V_0$ ہو گا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال 6.1 میں رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹی $V_0$ جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہو گا یا بہت بڑی $n$ جہاں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کارآمد ہو گی کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل، کرامرز، برلوان کلیہ مساوات 8.10 کو $\hbar$ کی طاقتی پھیلاو سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ آزاد ذرہ کی تفاعل موج $\psi = A\exp(\pm ipx/\hbar)$ سے حوصلہ افزائی حاصل کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں $f(x)$ کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ دیہان رہے کہ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے لحاظہ ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے۔

(الف) اس کو مساوات 8.1 روپ کی مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $\hbar$ کی طاقتی تسلسل کی صورت

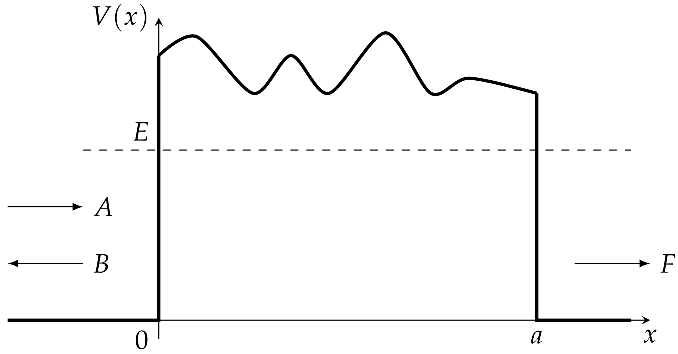
$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر $\hbar$ کی ایک جیسی طاقتوں کو اکھٹا کر کے درج ذیل دیکھائیں

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

(ج) انہیں $f_0(x)$ اور $f_1(x)$ کے لیے حل کر کے دیکھائیں کہ $\hbar$ کی اوّل رتبہ تک آپ مساوات 8.10 دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عددی کی لوگر دم کی تعریف $\ln(-z) = \ln(z) + in\pi$ ہے جہاں $n$ ایک طاق عدد صحیح ہو گا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں تب دونوں اطراف کو قوت نما میں منتقل کر کے دیکھیں۔




شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کے مستطیلی رکاوٹ سے بکھراو۔

## ۸.۲ سرنگزنی

اب تک میں $E > V$ فرض کرتا رہا ہوں لحاظہ $V(x)$ حقیقی تھا۔ میں غیر کلاسیکی خطہ $E < V$ کے لیئے بھی بلکل اسی طرح مطابقتی نتیجہ لکھ سکتا ہوں جو عین مساوات 8.10 ہو گا تاہم اب $p(x)$ تخیلی ہو گا

$$\boxed{\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| \, \mathrm{d}x}} \tag{۸.۱۷}$$

ایک مثال کے طور پر ایک مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہ (شکل ۸.۳) سے بکھراو کا مسئلہ پر غور کریں۔ درکاوٹ کے بائیں جانب $x < 0$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \tag{۸.۱۸}$$

جہاں $A$ آمدی حیطہ اور $B$ منعکس حیطہ ہے جبکہ $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہے حصہ 2.5 دیکھیں۔ دکاوٹ کے دائیں جانب $x > a$

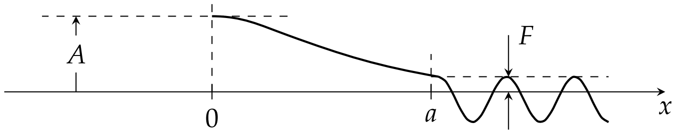
$$\psi(x) = Fe^{ikx}; \tag{۸.۱۹}$$

$F$ ترسیلی حیطہ جبکہ ترسیلی احتمال درج ذیل ہو گا

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \tag{۸.۲۰}$$

سرنگزنی خطہ $0 \leq x \leq a$ میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین درج ذیل دیگی

$$\psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| \, \mathrm{d}x'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| \, \mathrm{d}x'}. \tag{۸.۲۱}$$




شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بکھراو کے تفاعل موج کی کیفی ساخت۔

اگر رکاوٹ بہت بلند یا اور بہت چوڑا ہو یعنی جب سرنگزنی کا احتمال بہت کم ہو قوت نمائی بڑھتے جزو کا عددی سر $C$ لازماً چھوٹا ہو گا در حقیقت لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہو گا اور تفاعل موج کچھ شکل ۸.۴ کے نقش پر ہو گی۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوتِ نمائی میں کل کمی

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'}.$$

آمدی اور ترسیلی امواج کے اطافی حیطے تعین کرتا ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\boxed{T \cong e^{-2\gamma}, \text{جہاں}\ \gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^a \left|p(x)\right| \mathrm{d}x}. \tag{۸.۲۲}$$

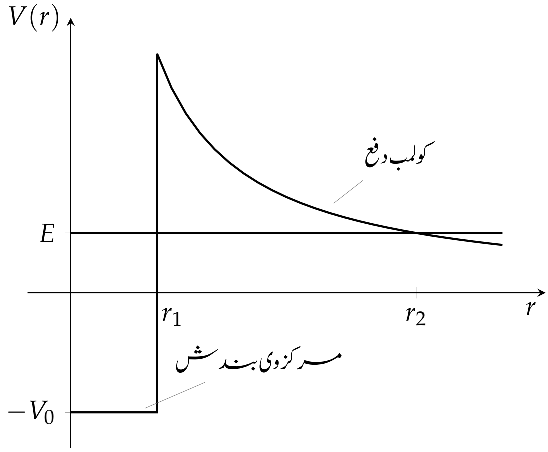
مثال ۸.۲: **ایلفا تحلیل کا نظریہ گامو۔** سن 1928 میں جارج گامو نے مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے ایلفا تحلیل کی پہلی کامیاب وجہ پیش کی ایلفا تحلیل سے مراد چند مخصوص تابکار مرکزہ سے ایلفا ذرہ جو دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے کا اخراج ہے۔ چونکہ ایلفا ذرہ مثبت بار $2e$ کا حامل ہے لحاظہ جیسے ہی یہ مرکزہ سے اتنا دور ہو جاتا ہے کہ یہ مرکزی بندشی قوت سے فرار کر سکے مرکزہ کے باقی حصہ کا بار $Ze$ اس کو برقی قوتِ دفع سے دور جانے پر مجبور کرے گا۔ تاہم اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہو گا جو یورینیم کی صورت میں خارجی ایلفا ذرہ کی توانائی سے دوگنے سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر شکل ۸.۵ کے مخفیہ سے ظاہر کیا جس نے مرکزہ کے رداس $r_1$ وسعت تک مرکزی قوتِ کشش کو متناہی چوکور کنواں سے ظاہر کیا گیا جس کو کولومب قوتِ دفع کی دم کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ گامو نے کوانٹم سرنگزنی کو ایلفا ذرہ کی فرار کی وجہ کرار دیا یوں پہلی بار کوانٹم میکانیات کا اطلاق مرکزوی طبعیات پر کیا گیا۔

اگر خارجی ایلفا ذرے کی توانائی $E$ ہو تب بیرونی واپسی نقطہ $r_2$ درج ذیل تعین کرے گا

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r_2} = E. \tag{۸.۲۳}$$

ظاہر ہے مساوات 8.22 میں قوت نما $\gamma$ درج ذیل ہو گا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} - E\right)}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\frac{r_2}{r} - 1}\,\mathrm{d}r.$$




شکل ۸.۵: تابکار مرکزی میں الفاذرہ کی مخفی توانائی کا گاموں نمونہ۔

اس تکمل میں $r \equiv r_2 \sin^2 u$ پُر کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[r_2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)}\right]. \tag{۸.۲۴}$$

عام طور پر $r_2 \gg r_1$ ہو گا لحاظہ ہم چھوٹے زاویوں کے تخمین $\epsilon \cong \sin\epsilon$ استعمال کرکے نتیجہ کی سادہ روپ حاصل کرتے ہیں

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left[\frac{\pi}{2}r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\right] = K_1\frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Z r_1}. \tag{۸.۲۵}$$

جہاں

$$K_1 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980\,\mathrm{MeV}^{1/2}, \tag{۸.۲۶}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$K_2 \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/2}\frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485\,\mathrm{fm}^{-1/2}. \tag{۸.۲۷}$$

ایک عمومی مرکزہ کی جسامت تقریباً ایک $\mathrm{fm}$ $10^{-15}\,\mathrm{m}$ ہوتی ہے۔

اگر ہم مرکزہ کے اندر ایلفا ذرہ کو محسور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار $v$ ہے تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً $2r_1/v$ ہو گا لحاظہ تصادم کا تعدد $v/2r_1$ ہو گا۔ ہر تصادم پر فرار ہونے کا احتمال $e^{-2\gamma}$ ہے لحاظہ اکائی وقت میں اخراج کا احتمال $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$ ہو گا اور یوں ولدہ مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہو گا

$$\tau = \frac{2r_1}{v}e^{2\gamma}. \tag{۸.۲۸}$$

بد قسمتی سے ہم $v$ نہیں جانتے ہیں لیکن اس سے زیادہ فرق نہیں پڑتا ہے چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوتِ نمائی جزِ ضربی پچیس رتبی مقدار تک تبدیل ہوتا ہے جس کے سامنے $v$ کی تبدیلی قابلِ نظر انداز ہے۔ بالخصوص عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو $1/\sqrt{E}$ کے ساتھ ترسیم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط شکل 8.6 حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 8.25 اور 8.28 کے تحت ہو گا۔ □

سوال ۸.۳: ایک متناہی چوکور رکاوٹ جس کی انچائی $V_0 > E$ اور چوڑائی $2a$ ہو سے ایک ایسا ذرہ جس کی توانائی $E$ ہو کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات 8.22 استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ بلکل ٹھیک نتیجہ سوال 2.33 کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۴: مساوات 8.25 اور 8.28 استعمال کرتے ہوئے $U^{238}$ اور $Po^{212}$ کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً مستقل ہوتی ہے لحاظہ $(r_1)^3$ اور $A$ پروٹان اور نیوٹرانوں کی تعدادوں کا مجموعہ تقریباً برابر ہوں گے۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے

$$r_1 \cong (1.07\,\text{fm})A^{1/3}. \tag{۸.۲۹}$$

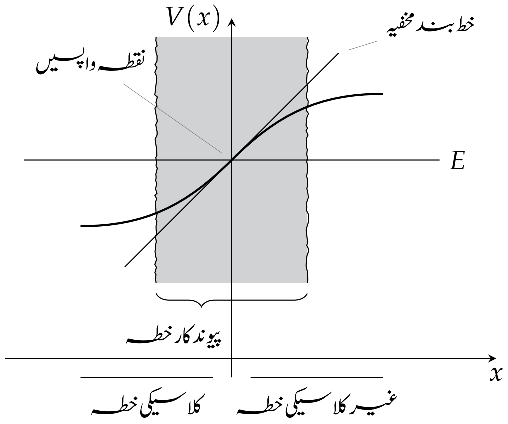
خارج شدہ ایلفا ذرہ کی توانائی کلیہ آئنسٹائن $E = mc^2$ سے اخذ کیا جا سکتا ہے

$$E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2. \tag{۸.۳۰}$$

جہاں $m_p$ ولدہ مرکزہ کی کمیت $m_d$ بیٹی مرکزہ کی کمیت اور $m_\alpha$ ایلفا ذرہ یعنی $He^4$ مرکزہ کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مرکزہ کیا ہو گا یاد رکھیں کہ ایلفا ذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لیکر فرار ہوتا ہے لحاظہ $Z$ سے دو منفی کریں اور $A$ سے چار منفی کریں گے۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی انصر تعین کریں۔ سمتی رفتار $v$ کی اندازاً قیمت $E = (1/2)m_\alpha v^2$ سے حاصل کریں یہ مرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتا ہے لحاظہ $v$ کی قیمت اصل سے زیادہ دیگا تاہم اس مرحلہ پر ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی اناصر کی تجربے سے حاصل عرصہ حیات بالترتیب $6 \times 10^9$ سال اور 0.5 µs ہے۔

## ۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و فکر میں میں فرض کرتا رہا کہ مخفی کنواں یا رکاوٹ کی دیواریں انتصابی تھیں جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ در حقیقت ہمارے بنیادی نتائج مساوات 8.16 اور 8.22




شکل ۸.۶: دائیں ہاتھ نقطہ واپسی کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

اس صورت بھی کافی حد تک دوست ہوں گے جب کناروں کی ڈھلان اتنی زیادہ نہ ہو یقیناً نظریہ گامو میں ایسی ہی صورت پر انکا اطلاق کیا گیا۔ بہر حال ہم نقطہ واپسی $E = V$ جہاں کلاسیکی اور غیر کلاسیکی خطے ایک دوسرے کے ساتھ جڑتے ہیں اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین ناقابلِ استعمال ہوتی ہے پر تفاعل موج کا قریبی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مکید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) کو دیکھتا ہوں، آپ مسئلہ بکھراو (سوال 8.10) حل کر سکتے ہیں۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم محور کو یوں رکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپسی $x = 0$ پر واقعہ ہو (شکل ۸.۶)۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا

$$
\psi(x) \cong \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Be^{\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & \text{اگر}\ x < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|p(x)|}}De^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,\mathrm{d}x'}, & \text{اگر}\ x > 0. \end{cases} \tag{۸.۳۱}
$$

یہ فرض کرتے ہوئے تمام $x > 0$ $E$ سے $V(x)$ بڑا ہوگا ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمائی کو خارج کر سکتے ہیں چونکہ $x \to \infty$ کرنے سے یہ بے قابو بڑھتا ہے۔ ہمارا کام ان دو حالوں کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے تاہم یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا پیش آتا ہے۔ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نے نقطہ واپسی جہاں $p(x) \to 0$ ہوگا $\psi$ کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تفاعل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا ہے اور جیسا کہ ہمارا گمان تھا ونزل، کرامرز، برلوان تخمین نقطہ واپسی کی پڑوس میں ناقابلِ استعمال ہوتا ہے لیکن اجازتی توانائیوں کو نکات واپسی پر سرحدی شرائط تعین کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا پیوند کار تفاعل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپسی کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تفاعل موج $\psi_p$ صرف ممدہ کی پڑوس میں چاہیئے لحاظہ ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر

$$V(x) \cong E + V'(0)x, \tag{۸.۳۲}$$

سے تخمین کر کے اس خطی $V$ کے لیئے شروڈنگر مساوات حل کرتے ہیں

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x]\psi_p = E\psi_p,$$

یا

$$\frac{d^2\psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x\psi_p, \tag{۸.۳۳}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2}V'(0)\right]^{1/3}. \tag{۸.۳۴}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان $\alpha$ کو غیر تابع متغیر میں زن کر سکتے ہیں

$$z \equiv \alpha x, \tag{۸.۳۵}$$

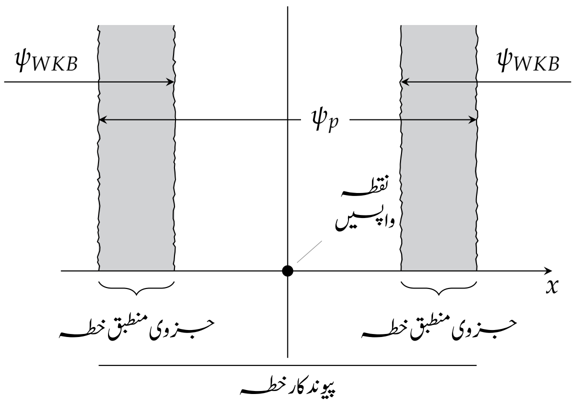
لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\frac{d^2\psi_p}{dz^2} = z\psi_p. \tag{۸.۳۶}$$

یہ مساوات ایری ہے جس کے حل تفاعلات ایر کہلاتے ہیں چونکہ مساوات ایری دو رتبی تفرقی مساوات ہیں لحاظہ دو خطی غیر تابع ایری تفاعالات $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ پائے جاتے ہیں۔ ان کا تعلق

جدول ۸.۱: ایری تفاعلات کے چند خواص

| | |
|---|---|
| تفریقی مساوات: | $\frac{d^2y}{dz^2} = zy$ |
| حل: | ایری تفاعالات کے خطی مجموعہ $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ |
| تکملی روپ: | $Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$<br>$Bi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{s^3}{3}+s} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right)\right] ds$ |




شکل ۸.۷: پیوند کار خطہ اور دو منطبق خطے۔

رتبہ $1/3$ کے بیسل تفاعلات کے ساتھ ہے ان کے چند خواص جدول 8.1 میں دیئے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج $Ai(z)$ اور $Bi(z)$ کا خطی جوڑ

$$\psi_p(x) = aAi(\alpha x) + bBi(\alpha x). \tag{۸.۳۷}$$

ہوگا۔ جہاں $a$ اور $b$ مناسب مستقلات ہیں۔

اب $\psi_p$ مبدہ کی پڑوس میں تخمینی تفاعل موج ہے ہم نے مبدہ کے دونوں اطراف قریبی مشترکہ خطہ میں $\psi_p$ کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کے ساتھ ہم پلو بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ دونوں اطراف کے مشترک خطے نقطہ واپسی کے اتنی قریب ہیں کہ خطی مخفیہ $\psi_p$ کافی حد تک درست ہوگا لحاظہ $\psi_p$ اصل تفاعل موج کا بہترین تخمین ہوگا لیکن ساتھ ہی یہ مشترکہ خطے نقطہ واپسی سے اتنی فاصلہ پر ہیں کہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جا سکتا ہے۔ مشترکہ خطوں میں مساوات 8.32 کارآمد ہوگا لحاظہ مساوات 8.34 کی لاتبیت میں درج ذیل ہوگا

$$p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}. \tag{۸.۳۸}$$

بالخصوص مشترکہ خطہ دو میں درج ذیل ہوگا

$$\int_0^x \left|p(x')\right| \mathrm{d}x' \cong \hbar\alpha^{3/2}\int_0^x \sqrt{x'}\,\mathrm{d}x' = \frac{2}{3}\hbar(\alpha x)^{3/2},$$

لحاظہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۳۹}$$

بڑی $z$ کی صورت میں ایری تفاعلات کی متقاربی روپ جدول 8.3 لیتے ہوئے مشترکہ خطہ دو میں پیوند کار تفعال موج مساوات 8.37 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}. \tag{۸.۴۰}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D, \qquad \text{اور} \qquad b = 0. \tag{۸.۴۱}$$

ہم یہی کچھ مشترکہ خطہ ایک کے لیئے بھی کرتے ہیں اب بھی مساوات 8.38 ہمیں $p(x)$ دیگا تاہم اس بار $x$ منفی ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x' \cong \frac{2}{3}\hbar(-\alpha x)^{3/2} \tag{۸.۴۲}$$

اور ونزل، کرامرز، برلوان تخمین تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل ہو گا

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}} \left[ B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \tag{۸.۴۳}$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی $z$ کے لیئے ایری تفاعل کی متقارب روپ جدول 8.1 استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل مساوات 8.37 جس میں $b = 0$ لیا گیا ہو درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \tag{۸.۴۴}$$

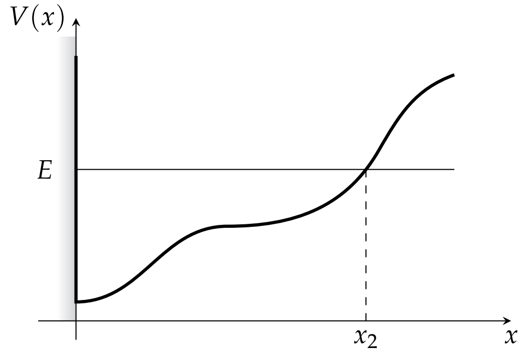
مشترکہ خطہ ایک میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین اور پیوندی تفاعلات موج کے موازنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \qquad \text{اور} \qquad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

جس میں $a$ کی قیمت مساوات 8.41 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$B = -ie^{i\pi/4} D, \qquad \text{اور} \qquad C = ie^{-i\pi/4} D. \tag{۸.۴۵}$$

انہیں کلیات جوڑ کہتے ہیں جو نقطہ واپسی کے دونوں اطراف ونزل، کرامرز، برلوان تخمین حلوں کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام نقطہ واپسی پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا۔ اس کے آگے ضرورت پیش




شکل ۸.۸: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

نہیں آئے گی سب چیزوں کو واحد ایک معمولزنی مستقل $D$ کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسی کو واپس مبدہ سے اختیاری نقطہ $x_2$ منتقل کرتے ہوئے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج مساوات 8.31 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & x < x_2 \text{ اگر;} \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} \left|p(x')\right|\,\mathrm{d}x'\right], & x > x_2 \text{ اگر.} \end{cases} \tag{۸.۴۶}$$

مثال ۸.۳: **ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔** فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی $x = 0$ پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہو (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں $\psi(0) = 0$ ہو گا لحاظہ مساوات 8.46 کے تحت

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} = n\pi, \qquad n = (1, 2, 3, \dots).$$

یا درج ذیل ہو گا۔

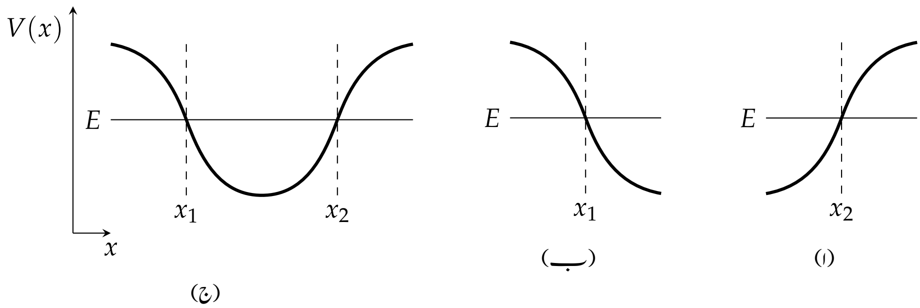
$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar \tag{۸.۴۷}$$

مثلاً نصف ہارمونی مرتعش

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \text{ اگر,} \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases} \tag{۸.۴۸}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega\sqrt{x_2^2 - x^2}.$$




شکل ۸.۹: بالائی جانب ڈھلوان اور نیچے جانب ڈھلون نقطہ واپسیں۔

ہو گا۔ جہاں درج ذیل نوطہ واپسی ہے

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

لحاظہ

$$\int_0^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}.$$

اور کوانٹازنی شرط مساوات 8.47 درج ذیل دیگا

$$E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right)\hbar\omega. \tag{۸.۴۹}$$

اس مخصوص صورت میں ونزل، کرامرز، برلوان تخمین در حقیقت ٹھیک ٹھیک اجازتی توانائیاں دیتا ہے جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں سوال 2.42 دیکھیں۔ □

مثال ۸.۴: **بغیر انتصابی دیواروں کا مخفیہ کنواں۔** اس نقطہ واپسی پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-ا) ہوتی ہے مساوات 8.46 ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج کو پیوند کرتی ہے نیچے رخ ڈھلوانی نقطہ واپسی (شکل ۸.۹-ب) پر انہی وجوہات کو بروۓ کار لاتے ہوئے درج ذیل ہو گا سوال 8.9

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1} \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'\right], & \text{اگر } x < x_1; \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & \text{اگر } x > x_1. \end{cases} \tag{۸.۵۰}$$

بالخصوص مخفیہ کنویں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے اندرونی خطہ $(x_1 < x < x_2)$ میں تفاعل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\theta_2(x), \qquad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4},$$ جہاں

لکھا جا سکتا ہے مساوات 8.46 یا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin\theta_1(x), \qquad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x' - \frac{\pi}{4}.$$

مساوات 8.50۔ ظاہر ہے کہ $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ جہاں}} \tag{۸.۵۱}$$

یہ کوانٹازنی شرط عمومی صورت کے دو ڈھلوان اطراف کے مخفیہ کنویں کی اجازتی توانائیاں تعین کرتا ہے دیہان رہے دو انتصابی دیواروں کے لیئے کلیہ مساوات 8.16 ایک انتصابی دیوار کے لیئے کلیہ مساوات 8.47 اور موجودہ کلیہ مساوات 8.51 میں صرف اُس عدد ( $0, 1/4$ یا $1/2$ ) کا فرق ہے جو $n$ سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونزل، کرامرز، برلوان تخمین بڑی $n$ کی نیم کلاسیکی صورت میں بہترین کام کرتا ہے لحاظہ یہ فرق صرف دیکھاوے کی حد تک ہے بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے شروڈنگر مساوات کیئے بغیر ایک سادہ تکمل کی قیمت حاصل کر کے ہم تخمینی اجازتی توانائیاں معلوم کر سکتے ہیں۔ تفاعل موج خود کہیں نہیں نظر آتا ہے۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر مکمل لچک کے ساتھ اُچھلتا ہوا کمیت $m$ کی گیند کے کلاسیکی مسئلے کا مماثل کوانٹم میکانی مسئلے پر غور کریں۔

(الف) مخفی توانائی کیا ہو گی اس کو زمین سے بلندی $x$ تفاعل لکھیں؟ منفی $x$ کی صورت میں مخفیہ لامتناہی ہو گا چونکہ گیند وہاں کبھی کبھی نہیں جا سکتا۔

(ب) اس مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر حل کر کے اپنے جواب کو مناسب ایری تفاعل کی روپ میں لکھیں چونکہ بڑی $z$ کے لیئے $Bi(z)$ بے قابو بڑھتا ہے لحاظہ اس کو رد کرنا ہو گا۔ تفاعل $\psi(x)$ کو معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

(ج) پہلی چار اجازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ اور $m = 0.100\,\mathrm{kg}$ لیکر حاصل کریں۔

(د) اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی $\mathrm{eV}$ میں کتنی ہو گی؟ اوسطاً یہ الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اشارہ: مسئلہ ویریل سے $\langle x \rangle$ تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے سوال 8.5 کی تھپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

(الف) اجازتی توانائیاں $E_n$ کو $m, g$ اور $\hbar$ کی صورت میں لکھیں۔

(ب) اب سوال 8.5(ج) میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا بلکل ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ج) کوانٹم عدد $n$ کتنا بڑا ہونا ہو گا کہ گیند اوسطاً زمین سے ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش جس کی زاویائی تعدد $\omega$ ہو کی $n$ ویں ساکن حال میں کمیت $m$ کے ایک ذرہ پر غور کریں۔

(الف) نقطہ واپسی $x_2$ تلاش کریں۔

(ب) نقطہ واپسی سے آپ کو کتنی بلندی $(d)$ تک پہنچنا ہو گا کہ خطی مخفیہ مساوات 8.32 میں لیکن جس میں نقطہ واپسی $x_2$ ہو خلل $1\%$ تک پہنچے گا یعنی اگر درج ذیل ہو

$$\frac{V(x_2+d)-V_{lin}(x_2+d)}{V(x_2)} = 0.01,$$

تب $d$ کیا ہو گا؟

(ج) جب تک $5 \geq z$ ہو $Ai(z)$ کا متقارب روپ $1\%$ تک درست ہو گا۔ جزو (ب) میں حاصل کردہ $d$ کے لیئے $n$ کی ایسی کم سے کم قیمت تلاش کریں تاکہ $5 \geq \alpha d$ ہو۔ اس قیمت سے بڑی قیمت کے کسی بھی $n$ کے لیئے ایسا مستر کہ خطہ موجود ہو گا جس میں خطی مخفیہ $1\%$ تک کارآمد ہو گا اور بڑی $z$ روپ کا ایری تفاعل بھی $1\%$ تک درست ہو گا۔

سوال ۸.۹: نیچے رخ ڈھلوان کے نقطہ واپسی کے لیئے پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات 8.50 صفر کی تصدیق کریں۔

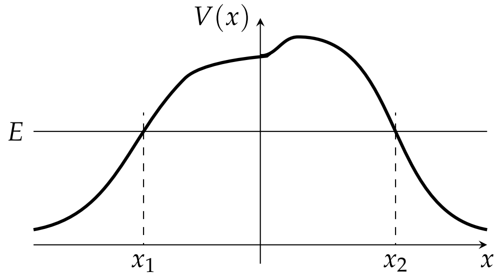
سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۰) سے بکھراو کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کی ونزل، کرامرز، برلوان تفاعل موج لکھ کر آغاز کریں۔

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Ae^{\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1} p(x')\,\mathrm{d}x'} + Be^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1} p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x<x_1);\\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}\left[Ce^{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'} + De^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}\right], & (x_1<x<x_2);\\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[Fe^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_2}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x'}\right], & (x>x_2).\end{cases} \tag{۸.۵۲}$$

مستقل $C$ کو صفر تصور نہ کریں۔ سرنگزنی احتمال $T = |F|^2/|A|^2$ کا حساب کر کے دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں اس سے مساوات 8.22 حاصل ہو گا۔

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ

$$V(x) = \alpha|x|^{\nu},$$




شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

جہاں $v$ ایک مثبت عدد ہے کی اجازتی توانائیوں کو ونزل، کرامرز، برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو $v = 2$ جانچیں۔ جواب:

$$E_n = \alpha \left[ (n - 1/2)\hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)} \tag{۸.۵۳}$$

سوال ۸.۱۲: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین استعمال کر کے سوال 2.51 کی مخفیہ کے لیئے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجے کا ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب: $-[(9/8) - (1/\sqrt{2})]\hbar^2 a^2/m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشاکلی مخفیہ کے لیئے ہم رداسی حصہ مساوات 4.37 پر ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات 8.47 کی درج ذیل روپ کو $l = 0$ کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہو گا

$$\int_0^{r_0} p(r)\,\mathrm{d}r = (n - 1/4)\pi\hbar, \tag{۸.۵۴}$$

جہاں $r_0$ نقطہ واپسی ہے یعنی ہم $r = 0$ کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگر دمی مخفیہ

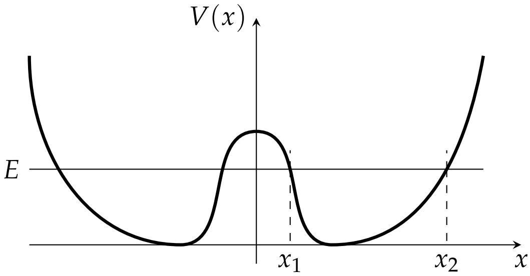
$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

کی اجازتی توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں جہاں $V_0$ اور $a$ مستقلات ہیں۔ صرف $l = 0$ کی صورت پر غور کریں دیکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کمیت پر نہیں ہو گا۔ جزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln\left(\frac{n + 3/4}{n - 1/4}\right).$$

سوال ۸.۱۴: ونزل، کرامرز، برلوان تخمین کی درج ذیل روپ

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r)\,\mathrm{d}r = (n - 1/2)\pi\hbar \tag{۸.۵۵}$$




شکل ۸.۱۱: تشاکلی دوہرا کنواں؛ سوال 15.8۔

استعمال کر کے ہائڈروجن کی مکید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ معصر مخفیہ مساوات 4.38 میں مرکز گریز جزو شامل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل تکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے

$$\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2. \tag{۸.۵۶}$$

آپ دیکھیں گے کہ $n \gg 1/2$ اور $n \gg l$ کی صورت میں آپ کو بوہر سطحیں ملیں گی۔ جواب:

$$E_{nl} \cong \frac{-13.6\,\mathrm{eV}}{[n-(1/2)+\sqrt{l(l+1)}]^2}. \tag{۸.۵۷}$$

سوال ۸.۱۵: تشاکلی دوہرا کنویں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم $E < V(0)$ والی مکید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خطہ (i) $x > x_2$، (ii) $x_1 < x < x_2$ اور (iii) $0 < x < x_1$ کے لیے ونزل، کرامرز، برلوان تفاعلات موج لکھیں۔ نقطہ $x_1$ اور $x_2$ پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں $x_2$ کے لیے ایسا کیا گیا ہے آپ کو $x_1$ کے لیے کرنا ہو گا درج ذیل دیکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} \left|p(x')\right| \mathrm{d}x'\right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[2\cos\theta e^{\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}|p(x')|\,\mathrm{d}x'} + \sin\theta e^{-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}|p(x')|\,\mathrm{d}x'}\right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\theta \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{۸.۵۸}$$

(ب) چونکہ $V(x)$ تشاکلی ہے لحاظہ ہمیں صرف جفت $(+)$ اور طاق $(-)$ تفاعلات موج پر غور کرنا ہو گا۔ اوّل الذکر صورت میں $0 = \psi'(0)$ ہو گا جبکہ مؤخر الذکر صورت میں $\psi(0) = 0$ ہو گا۔ دیکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹازنی شرط حاصل ہوتی ہے

$$\tan\theta = \pm 2e^{\phi}. \tag{۸.۵۹}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\phi \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{-x_1}^{x_1}\left|p(x')\right|\mathrm{d}x'. \tag{۸.۶۰}$$

مساوات 8.59 تخمینی اجازتی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ $x_1$ اور $x_2$ میں $E$ کی قیمت داخل ہوتی ہے لحاظہ $\theta$ اور $\phi$ دونوں $E$ کے تفاعلات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلند یا/اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں $\phi$ بڑا ہو گا لحاظہ $e^{\phi}$ انتہائی بڑا ہو گا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.59 کے تحت $\theta$ کی قیمتیں $\pi$ کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے $\theta = (n+1/2)\pi + \epsilon$ جہاں $|\epsilon| \ll 1$ ہے لکھ کر دیکھائیں کہ کوانٹازنی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\theta \cong \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \mp \frac{1}{2}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۱}$$

(د) فرض کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکافی ہے

$$V(x) = \begin{cases}\frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2, & x<0, \text{اگر} \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2, & x>0, \text{اگر}\end{cases} \tag{۸.۶۲}$$

اس مخفیہ کو ترسیم کر کے $\theta$ مساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دیکھائیں

$$E_n^{\pm} \cong \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi}e^{-\phi}. \tag{۸.۶۳}$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ ناقابلِ گزر ہو $\phi \to \infty$ تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ دوہری انحطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنویں میں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ متناہی رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنوں کے بیچ رابطہ ممکن ہو گا لحاظہ انحطاط ختم ہو گا۔ جفت حالات $(\psi_n^+)$ کی توانائی معمولی کم اور طاق تفاعلات $(\psi_n^-)$ کی توانائی معمولی زیادہ ہو گی۔

(و) فرض کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^+ + \psi_n^-).$$

جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیاں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دیکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنویں سے دوسرہ اور دوسرے سے واپس پہلا کنویں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$\tau = \frac{2\pi^2}{\omega}e^{\phi}. \tag{۸.۶۴}$$

(ھ) متغیر $\phi$ کی قیمت جز و (د) میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لیئے تلاش کریں اور دیکھائیں جب $V(0) \gg E$ ہو تب $\phi \sim m\omega a^2/\hbar$ ہو گا۔

سوال ۸.۱۶: **سٹارک اثر میں سرنگزنی۔** بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جوہر سے سرنگزنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربہ میں ایسا ہو گا؟ ہم ایک سادہ ترین یک بُعدی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری متناہی چوکور کنواں حصہ 2.6 میں پایا جاتا ہے۔

(الف) کنویں کی تہہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہو گی یہاں فرض کریں $V_0 \gg \hbar^2/ma^2$ ہے۔ اشارہ: یہ $2a$ چوڑائی کی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب $H' = -\alpha x$ متعارف کریں بیرونی برقی میدان $E = -E_{ext}\boldsymbol{i}$ میں $\alpha = eE_{ext}$ ہو گا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے $(\alpha a \ll \hbar^2/ma^2)$۔ کل مخفیہ کا خاکہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت $x$ رخ سرنگزنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگزنی جز ضرب $\gamma$ مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو فرار ہونے کے لیئے درکار وقت کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب: $\gamma = \sqrt{8mV_0^3}/3\alpha\hbar, \tau = (8ma^2/\pi\hbar)e^{2\gamma}$۔

(د) معقول اعداد $V_0 = 20\,\mathrm{eV}$ بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت $a = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ عمومی جوہر کا رداس $E_{\text{بیرونی}} = 7\times10^6\,\mathrm{V/m}$ تجربہ گاہ میں مضبوط میدان $e$ اور $m$ الیکٹران کا بار اور کمیت لیں۔ عرصہ $\tau$ کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کوانٹم سرنگزنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود با خود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت $m$ رداس $R$ اور قد $h$ کا نلکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی مکام $(h/2)$ سے بلندی کو $x$ سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی $mgx$ ہو گی اور بوتل اُس صورت گرے گی جب $x$ کی قیمت فاصل قیمت $x_0 = \sqrt{R^2+(h/2)^2}-h/2$ تک پہنچے۔ سرنگزنی احتمال مساوات 8.22 کو $E = 0$ کے لیئے حاصل کریں۔ حراری توانائی $((1/2)mv^2 = (1/2)k_BT)$ لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

# باب ۹

# تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹم سکونیات کہا جا سکتا ہے جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت ہے $V(r,t) = V(r)$۔ایسی صورت میں تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات سے حل کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

جہاں $\psi(r)$ غیر تابع شروڈنگر مساوات

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نمائی جز ضربی $e^{iEt/\hbar}$ ظاہر کرتا ہے جو کسی بھی طبعی مقدار کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے $|\psi|^2$ لحاظہ تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑ تیار کر کے ہم ایسے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں جن کی تابعیت وقت زیادہ دلچسپ ہو تاہم اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کے انتقال جنہیں بعض اوقات کوانٹم چھلانگ کہتے ہیں کی خاطر ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ متعارف کریں کوانٹم حرکیات۔ کوانٹم حرکیات میں ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا حل بلکل ٹھیک ٹھیک معلوم کیا جا سکتا ہے ہاں اگر ہیملٹنی میں غیر تابع وقت حصہ لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو تب ہم اسے اضطراب تصور کر سکتے ہیں۔ اس باب میں میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں اور اس کا اطلاق جوہر سے اشعاعی اخراج اور انجذاب پر کرتا ہوں جو اس کی اہم ترین استعمال ہے۔

## ۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں غیر مضطرب نظام کے صرف دو حالات $\psi_a$ اور $\psi_b$ پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی $H^0$ کے امتیازی حالات ہوں گے

$$H^0\psi_a = E_a\psi_a, \qquad \text{اور} \qquad H^0\psi_b = E_b\psi_b \tag{۹.۱}$$

اور معیاری عمودی ہوں گے

$$\langle \psi_a \mid \psi_b \rangle = \delta_{ab} \tag{۹.۲}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے بالخصوص درج ذیل

$$\psi(0) = c_a\psi_a + c_b\psi_b \tag{۹.۳}$$

اس سے فرق نہیں پڑتا کہ تفاعلات $\psi_a$ اور $\psi_b$ موزا وہ فضائی تفاعلات یا چکر کار یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے لحاظ میں $\psi(t)$ لکھتا ہوں جس سے میرا مراد وقت $t$ پر نظام کا حال ہے۔ عدم اجطراب کی صورت میں ہر جز اپنی خصوصی قوت نمائی جز ضرن کے ساتھ ارتقا پائے گا

$$\psi(t) = c_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \tag{۹.۴}$$

ہم کہتے ہیں کہ حال $\psi_a$ میں ذرہ پائے جانے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے جس سے ہمارا اصل مطلب یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت $E_a$ حال حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہو گا۔ تفاعل $\psi$ کی معمولزنی کے تحت درج ذیل ہو گا

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1 \tag{۹.۵}$$

### ۹.۱.۱ مضطرب نظام

اب فرض کریں ہم تابع وقت اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ چونکہ $\psi_a$ اور $\psi_b$ ایک مکمل سلسلہ مرتب کرتے ہیں لحاظہ تفاعل موج $\psi(t)$ کو بھی انکا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہو گا کہ اب $c_a$ اور $c_b$ وقت $t$ کے تفاعلات ہوں گے

$$\psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + c_b(t)\psi_b e^{-E_bt/\hbar} \tag{۹.۶}$$

میں وقت نمائی جز ضربیوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں جیسا کے بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں لیکن میں چاہتا ہوں کے تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کے صورت میں بھی پایا جاتا ہو ہمیں نظر آتا رہے ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات $c_a$ اور $c_b$ تعین کریں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ذرہ آغاز میں حال $\psi_a(c_a(0) = 1, c_b(0) = 0)$ میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت $t_1$ پر $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$ میں پایا جاتا ہو تب ہم کہیں گے کہ نظام $\psi_a$ سے $\psi_b$ میں منتقل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالبہ کرتے ہیں کہ $\psi(t)$ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرے

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad \text{جہاں } H = H^0 + H'(t) \tag{۹.۷}$$

مساوات 9.6 اور 9.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{gathered}c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar}\\ = i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} + c_a\psi_a\left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right)e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b\left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right)e^{-iE_bt/\hbar}\right]\end{gathered}$$

مساوات 9.1 کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہتھ کے آکری دو اجزاء کے ساتھ کٹ جاتے ہیں لحاظہ درج ذیل رہ جائے گا

$$c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar}\right] \tag{۹.۸}$$

تفاعل $\psi_a$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیکر $\psi_a$ اور $\psi_b$ کی عمودیت مساوات 9.2 بروۓ کار لاتے ہوئے $\dot{c}_a$ کو الگ کرتے ہیں

$$c_a\langle\psi_a \mid H' \mid \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a \mid H' \mid \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کی غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں

$$H'_{ij} \equiv \langle\psi_i \mid H' \mid \psi_j\rangle \tag{۹.۹}$$

دیہان رہے کے $H'$ ہرمیشی ہے لحاظہ $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہو گا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دیکر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}\left[c_aH'_{aa} + c_bH'_{ab}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۰}$$

اسی طرح $\psi_b$ کے ساتھ اندرونی ضرب سے $\dot{c}_b$ الگ کیا جا سکتا ہے

$$c_a\langle\psi_b \mid H' \mid \psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_b \mid H' \mid \psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_b e^{-iE_bt/\hbar}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar}\left[c_bH'_{bb} + c_aH'_{ba}e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\right] \tag{۹.۱۱}$$

مساوات 9.10 اور 9.11 مل کر $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ تعین کرتے ہیں یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی تابع وقت شروڈنگر مساوات کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر $H'$ کے وتری ارکان قالب صفر ہوں گے عمومی صورت کے لیئے سوال 9.4 دیکھیں

$$H'_{aa} = H'_{bb} = 0 \tag{۹.۱۲}$$

اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ روپ اختیار کرتی ہے

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \qquad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a \tag{۹.۱۳}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} \tag{۹.۱۴}$$

میں $E_b \geq E_a$ لوں گا لحاظہ $\omega_0 \geq 0$ ہو گا۔

سوال ۹.۱: ایک ہائڈروجن جوہر کو تابع وقت برقی میدان $E = E(t)\boldsymbol{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال $n = 1$ اور چار گنا انحطاطی پہلا ہیجان حالات $n = 2$ کے بیچ اضطراب $H' = eEz$ کے چاروں قالبی ارکان $H'_{ij}$ کا حساب لگائیں۔ یہ بھی دیکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیئے $H'_{ii} = 0$ ہو گا۔ تبصرہ محور $z$ کے لحاظ سے طاق ہونے کو بروۓ کار لاتے ہوئے آپ کو صرف ایک تکمل حل کرنا ہو گا۔ اس روپ کے اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے لحاظہ زیادہ بلند ہیجان حالات میں منتقلی کو نظر انداز کرتے ہوئے یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ تصدیق کیجیئے گا کہ $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: ظاہری طور پر یہ نظام خالص $\psi_a$ اور کسی $\psi_b$ کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کے غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں انتقال نہیں ہو گا؟ جی نہیں لیکن اس کی وجہ ذرا نازک ہے یہاں $\psi_a$ اور $\psi_b$ نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہیں۔ توانائی کی پیمائش کبھی بھی $E_a$ یا $E_b$ نہیں دیگی۔ تابع وقت نظریہ اضطراب میں عمومی طور پر ہم کسی دورانیہ کے لیئے اضطراب چالو کر کے نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر اضطراب ختم کرتے ہیں۔ صرف آغاز اور اختتام میں $\psi_a$ اور $\psi_b$ بلکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے اور صرف انہی صورتوں میں ہم نظام میں انتقال کی بات کر سکتے ہیں۔ یوں موجودہ مسئلہ میں فرض کیجیئے گا کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت $t$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ اس سے آپ کے حساب پر کوئی فرق نہیں پڑے گا تاہم نتائج کی معقول تشریح ممکن ہو گی۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کی شکل وصورت وقت کے لحاظ سے $\delta$ تفاعل ہے

$$H' = U\delta(t)$$

جہاں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ ہے اور $U_{ab} = U_{ba}^{*} \equiv \alpha$ لیں۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں تب $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کیا ہوں گے اور کیا $\left|c_a(t)\right|^2 + \left|c_b(t)\right|^2 = 1$ ہو گا۔ انتقال ہونے کا احتمال $t \to \infty$ کے لیئے $P_{a\to b}$ کیا ہو گا۔ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کی تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

جواب: $P_{a\to b} = \sin^2(|\alpha| / \hbar)$

### ۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بلکل درست رہا ہے ہم نے اضطراب کی جسامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا تاہم کم $H'$ کی صورت میں ہم مساوات 9.13 کو یکے بعد دیگر تخمین سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال

$$c_a(0) = 1, \qquad c_b(0) = 0 \tag{۹.۱۵}$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیئے یہیں رہے گا۔

رتبہ صفر:

$$c_a^{(0)}(t) = 1, \qquad c_b^{(0)}(t) = 0 \tag{۹.۱۶}$$

میں تخمین کے رتبہ کو زیر، بالا میں کوسین میں لکھتا ہوں۔

ہم مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ رتبہ صفر کی قیمتیں پر کر کے رتبہ اوّل تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ اوّل:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1;\\ \frac{\mathrm{d}c_b^{(1)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ba}e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۷}$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ پُر کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

رتبہ دوم:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}c_a^{(2)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t H'ba(t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' \Rightarrow\\ c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t H'_{ab}(t')e^{-i\omega_0 t'}\left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'')e^{i\omega_0 t''}\,\mathrm{d}t''\right]\mathrm{d}t'\end{gathered} \tag{۹.۱۸}$$

جہاں $c_b$ تبدیل نہیں ہوا $(c_b^{(2)}(t) = c_b^{(1)}(t))$۔ دیہان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبی جز بھی پایا جاتا ہے دور تبی تصیح صرف تکملی حصہ ہو گا۔

اصولاً ہم اسی طرح چلتے ہوئے $n$ ویں رتبی تخمین کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ میں پُر کر کے $n+1$ ویں رتبہ کے لیئے حل کر سکتے ہیں۔ رتبہ صفر میں $H'$ کا کوئی جز ضربی نہیں پایا جاتا ہے۔ رتبہ اوّل تصحیح میں $H'$ کا ایک جز ضربی پایا جاتا ہے دور تبی تصحیح میں $H'$ کے دو جز ضربی پائے جاتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ رتبہ تخمین میں خلل $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے بلکل درست عددی سروں کو یقیناً مساوات 9.5 پر پورا اترنا ہوگا۔ ہاں $H'$ کی طاقت 1 تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2$ ایک کے برابر ہے اور رتبہ اوّل تخمین سے صرف اتنی ہی توقع کی جا سکتی ہے زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیئے بھی ایسا ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa}=H'_{bb}=0$ نہیں لیتے ہیں۔

(الف) اس صورت میں جب $c_a(0)=1, c_b(0)=0$ ہو رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دیکھائیں کہ $H'$ کی طاقت ایک تک $\left|c_a^{(1)}(t)\right|^2+\left|c_b^{(1)}(t)\right|^2=1$ ۔

(ب) اس مسئلہ کو بہتر انداز سے نمٹا جا سکتا ہے درج ذیل لیکر

$$\mathrm{d}_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{aa}(t')\,\mathrm{d}t'} c_a, \qquad \mathrm{d}_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{bb}(t')\,\mathrm{d}t'} c_b \tag{۹.۱۹}$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$\dot{\mathrm{d}}_a=-\frac{i}{\hbar}e^{i\phi}H'_{ab}e^{-i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_b; \qquad \dot{\mathrm{d}}_b=-\frac{i}{\hbar}e^{-i\phi}H'_{ba}e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{d}_a \tag{۹.۲۰}$$

جہاں درج ذیل ہے

$$\phi(t)\equiv\frac{1}{\hbar}\int_0^t[H'_{aa}(t')-H'_{bb}(t')]\,\mathrm{d}t' \tag{۹.۲۱}$$

یوں $H'$ کے ساتھ اضافی جز ضرب $e^{i\phi}$ منسلک ہونے کے علاوہ $\mathrm{d}_a$ اور $\mathrm{d}_b$ کی مساواتیں ساخت کے لحاظ سے مساوات 9.13 کے متماثل ہیں۔

(ج) رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے جز (ب) کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ اپنے جواب کا جز (الف) کے ساتھ موازنہ کریں دونوں میں فرق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_a(0)=a, c_b(0)=b$ کے لیئے نظریہ اضطراب سے مساوات 9.13 کو رتبہ دوم تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب سوال 9.2 کے لیئے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رتبہ دوم تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا بلکل ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

### ۹.۱.۳ سائن نما اضطراب

فرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائن نما ہو

$$H'(r,t) = V(r)\cos(\omega t) \tag{۹.۲۲}$$

تب درج ذیل ہو گا

$$H'_{ab} = V_{ab}\cos(\omega t) \tag{۹.۲۳}$$

جہاں $V_{ab}$ درج ذیل ہے

$$V_{ab} \equiv \langle \psi_a \mid V \mid \psi_b \rangle \tag{۹.۲۴}$$

عملاً تقریباً ہر صورت میں وتری قالبی ارکان صفر ہوتے ہیں لحاظہ پہلے کی طرح یہاں بھی میں یہی فرض کروں گا۔ یہاں سے آگے چلتے ہوئے ہم صرف رتبہ اوّل تک متغیرات تلاش کریں گے لحاظہ زیرِ بالا میں ترب کی نشاندہی نہیں کی جائے گی۔ رتبہ اوّل تک درج ذیل ہو گا مساوات 9.17

$$\begin{aligned}
c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar}V_{ba}\int_0^t \cos(\omega t')e^{i\omega_0 t'}\,\mathrm{d}t' = -\frac{iV_{ba}}{2\hbar}\int_0^t \left[e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'}\right]\mathrm{d}t' \\
&= -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right]
\end{aligned} \tag{۹.۲۵}$$

یہی جواب ہے لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہو گا۔ انتقالی تعدد $\omega_0$ کے بہت قریب جبری تعدد $\omega$ پر توجہ رکھنے سے چوکور قوسین میں دوسرا جزو غالب ہو گا جس سے چیزیں بہت آسان ہو جاتی ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

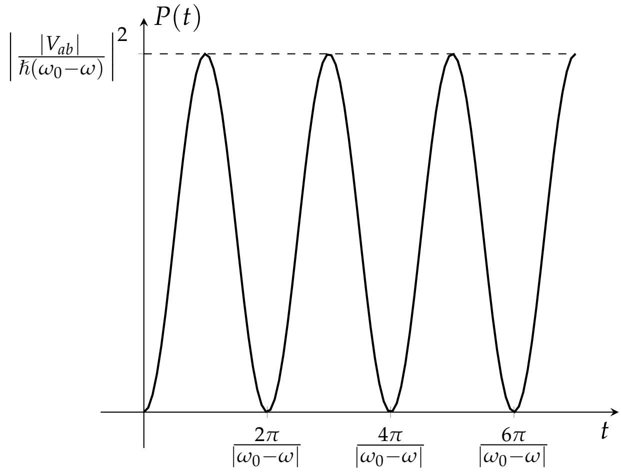
$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega| \tag{۹.۲۶}$$

یہ کوئی بہت بڑی پابندی نہیں ہے چونکہ کسی دوسری تعدد پر انتقال کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0-\omega}\left[e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2}\right] \\
&= -i\frac{V_{ba}}{\hbar}\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{\omega_0-\omega}e^{i(\omega_0-\omega)t/2}
\end{aligned} \tag{۹.۲۷}$$

ایک ذرہ جو حال $\psi_a$ سے آغاز کرے کا لمحہ $t$ پر حال $\psi_b$ میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا جس کو انتقالی احتمال کہتے ہیں

$$P_{a\to b}(t) = \left|c_b(t)\right|^2 \cong \frac{\left|V_{ab}^2\right|}{\hbar^2}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۲۸}$$



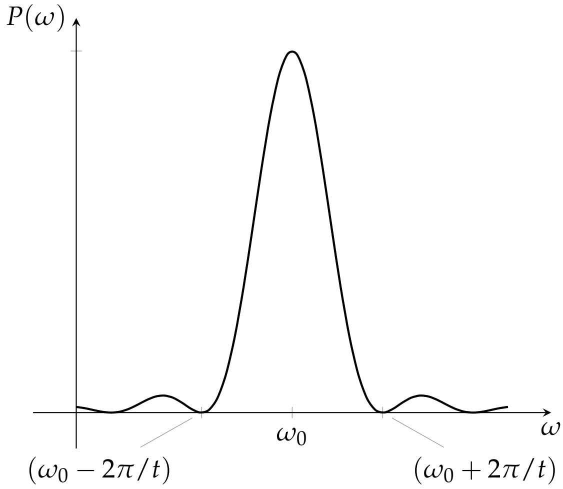

شکل ۹.۱: سائن نما اضطراب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات 9.28)۔

وقت کے لحاظ سے انتقالی احتمال سائن نما ارتعاش کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2/\hbar^2(\omega_0-\omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر جو لازمی طور پر ایک (1) سے بہت کم ہے ورنہ کم اضطراب کا مفروضہ درست نہیں ہو گا یہ واپس صفر کو گرتا ہے۔ لمحات $|\omega_0-\omega|/t_n = 2n\pi$ جہاں $n = 1, 2, 3, \ldots$ ہیں پر ذرہ لازماً نچلی حال میں ہو گا اگر آپ منتقلی کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے چالو نہ کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ وقت $\pi/|\omega_0-\omega|$ پر اضطراب کو روک کر نظام کو بالائی حال میں پانے کی اُمید کریں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ انتقال نظریہ اضطراب کی پیدا کرادہ مصنوئی خاصیت نہیں ہے بلکہ بلکل ٹھیک حال میں بھی ایسا ہو گا تاہم منتقلی کا تعدد کچھ مختلف ہو گا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں انتقال کی احتمال اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب جبری تعدد قدرتی تعدد $\omega_0$ کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں $\omega$ کے لحاظ سے $P_{a\to b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی اونچائی $(|V_{ab}t/2\hbar|)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi/t$ ہے یوں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اسکی بلندی بڑھتی ہے اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ بظاہر زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کے بتدریج بڑھتی ہے تاہم ایک پر پہنچنے سے بہت پہلے اضطراب کا مفروضہ ناکارا ہو جاتا ہے۔ لحاظہ ہم بہت کم $t$ کے لیئے اس نتیجہ پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال 9.7 میں آپ دیکھیں گے کہ بلکل ٹھیک نتیجہ کبھی بھی ایک سے ایک تجاوز نہیں کرتا ہے۔

سوال ۹.۷: پہلا جزو مساوات 9.25 میں $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t}/2$ سے جبکہ دوسرا $e^{-i\omega t}/2$ سے آتا ہے یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں

$$H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2}e^{-i\omega t}, \qquad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2}e^{i\omega t} \tag{۹.۲۹}$$




شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالمقابل متحرک تعدد (مساوات 9.28)۔

ہیملٹنی قالب کو ہرمیشی بنانے کی خاطر متاخر الذکر کی ضرورت پیش آتی ہے۔ آپ کہہ سکتے ہیں ہم $c_a(t)$ کے لیئے مساوات 9.25 کی طرح کلیہ میں غالب جزو کو چنتے ہیں۔ اسکو گھومتی موج تخمین کہتے ہیں جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کی آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات 9.13 کو بغیر نظریہ اضطراب اور میدان کی زور کے بارے میں کچھ بھی فرض کیئے بغیر بلکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے۔

(الف) عمومی ابتدائی معلومات $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ کے لیئے گھومتی موج تخمین مساوات 9.29 لیتے ہوئے مساوات 9.13 حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رابی تعدد

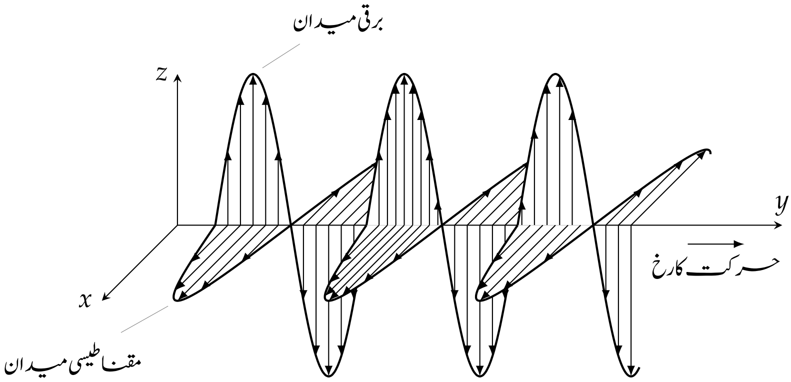
$$\omega_r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + (|V_{ab}|/\hbar)^2} \tag{۹.۳۰}$$

کی صورت میں لکھیں۔

(ب) انتقالی احتمال $P_{a\to b}(t)$ تعین کر کے دیکھائیں کہ یہ کبھی بھی ایک سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہوگا۔

(ج) دیکھیں کہ کم اضطراب کی صورت میں $P_{a\to b}(t)$ عین نظریہ اضطراب کے نتیجہ مساوات 9.28 کے تحت ہوگا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں کم سے کیا مراد ہے اور $V$ پر یہ کیا پابندی عاید کرتی ہے۔

(د) نظام پہلی بار اپنی ابتدائی حال میں کتنی دیر میں واپس آئے گا؟




شکل ۹.۳: برقناطیسی موج۔

## ۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

### ۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

ایک برقناطیسی موج جس کو میں روشنی کہوں گا اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خرد امواج، ایکس رے وغیرہ ہو سکتی ہے۔ جن میں صرف تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ عرضی اور باہم قائمہ ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہو گا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر گزرتی ہوئی بصری موج کی موجودگی میں بنیادی طور پر صرف برقی جز کو رد عمل دیتا ہے۔ اگر طولِ موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے لمبی ہو تب ہم میدان کی فضائی تغیر کو نظرانداز کر سکتے ہیں۔ تب جوہر سائن نما ارتعاشی برقی میدان

$$E = E_0 \cos(\omega t)\,\boldsymbol{k} \tag{۹.۳۱}$$

کے زیر اثر ہو گا۔ فل حال میں فرض کرتا ہوں کہ روشنی یک رنگی اور $z$ رخ ترتیب شدہ ہے۔ اضطرابی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا جہاں $q$ الیکٹران کا بار ہے۔

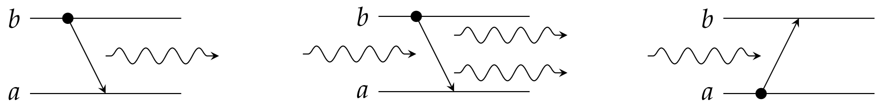
$$H' = -qE_0 z \cos(\omega t) \tag{۹.۳۲}$$

ظاہر ہے درج ذیل ہو گا

$$H'_{ba} = -pE_0 \cos(\omega t).\text{where} p \equiv q\langle \phi_b|z|\phi_a\rangle \tag{۹.۳۳}$$

عمومی طور پر $\psi$ متغیر $z$ کا جفت یا طاق تفاعل ہو گا یہ ہماری اُس مفروضہ کا سبب ہے جس کے تحت ہم کہتے ہیں کہ $H'$ کے وتری قالبی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں روشنی اور مادہ کا باہم عمل ٹھیک اُسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہو گا جن پر ہم نے حصہ 1.3.9 میں غور کیا۔ یہاں درج ذیل ہو گا۔

$$V_{ba} = -pE_0 \tag{۹.۳۴}$$




(ا) جذب　　(ب) تحرک زدہ اخراج　　(ج) خود بخود اخراج

شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

### ۹.۲.۲ انجذاب، تحرق شدہ اخراج اور خود با خود اخراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیری حال $\psi_a$ میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالائی حال $\psi_b$ میں انتقال کا احتمال مساوات 9.28 دیتی ہے جو مساوات 9.34 کی روشنی میں درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a\to b}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۵}$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس میں ایک نوریہ جذب کیا (شکل ۹.۴-ا)۔ جیسا میں ذکر کر چکا ہوں لفظ نوریہ در حقیقت کوانٹم برقی حرقیات برقناطیسی میدان کی کوانٹم نظریہ سے تعلق رکھتا ہے جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اُس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرا مطلب نہ لیں۔

یقیناً میں بالائی حال $(c_a(0) = 0, c_b(0) = 1)$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ایسا کریں نتائج بلکل وہی ہوں گے البتہ اس بار $P_{b\to a} = |C_a(t)|^2$ حاصل ہو گا جو نیچے رخ زیریں لیول میں منتقل کا احتمال ہو گا۔

$$P_{b\to a}(t) = (\frac{|p|\,E_0}{\hbar})^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \tag{۹.۳۶}$$

چونکہ ہم $b \leftrightarrow a$ کو آپس میں بدل رہے ہیں جو $\omega_0$ کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے لحاظہ لاظماً یہی نتیجہ حاصل ہوتا مساوات 9.25 پر اب پہنچ کر ہم پہلا جز چنتے ہیں جس کے نصب نما میں $\omega + -\omega_0$ پایا جاتا ہے باقی حصاب پہلے کی طرح ہے لیکن اگر آپ ایک بار رک کر سوچیں تو یہ نتیجہ حیرت انگیز ہے۔ بالائی حال میں پائے جانے والے ذرہ پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں منتقل ہوتا ہے اور اس کے احتمال بلکل ٹھیک وہی ہو گا جو زیریں حال سے بالائی حال منتقلی کا ہے اس عمل کو تحرق زدہ اخراج کہتے ہیں۔ جس کی پیش گوئی آئینسٹائین نے کی تھی۔

تحرق زدہ اخراج کی صورت میں براقناطیسی میدان توانائی $\hbar\omega_0$ جوہر سے حاصل کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریہ ایک اصل جس نے تحرق پیدا کیا اور ایک تحرق کی بنا پر پیدا باہر نکلے (شکل

۹.۴-ب)۔ اگر ایک بوتل میں بہت سارے جوہر بالائی حال میں ہوں تب واحد ایک آمدی نور سے دو نور سے پیدا کرے گا اور سے دو فوتان خود چار پیدا کریں گے وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایمپلیفیکیشن ممکن ہو گا تقریباً ایک ہی وقت پر ایک ہی تعداد کی بہت بڑی تعداد کے نور سے خارج ہوں گے لیزر اسی اصول کے تحت پیدا کی جاتی ہے۔ دیہان رہے کہ لیزر عمل کے لیئے ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت کو بالائی حال میں جائے جس کو پاپولیشن انورزن کہتے ہیں چونکہ انجذاب جس کی بنا پر ایک نور سے کم ہوتا ہے تحرقی اخراج جو ایک پیدا کرتا ہے بل مقابل ہوں گے لحاظ دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کرتے ہوئے ایمپلیفیکیشن پیدا نہیں ہو گا۔

انجذاب اور تحرقی اخراج کے ساتھ ساتھ روشنی اور مادہ کی باہم عمل کا ایک تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے جس کو خود باخود اخراج کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان کی عدم موجودگی میں جو اخراج پیدا کر سکتا ہے ہیجان جوہر زیریں حال میں منتقل ہو کر ایک نور سے خارج کرتا ہے (شکل ۹.۴-ج)۔ ہیجان حال سے ایک جوہر عموماً اسی زریعہ زمینی حال میں پہنچتا ہے پہلی نظر میں سے سمجھ نہیں آتی کہ خود باخود اخراج کیوں کر ہو گا۔ ایک ساکن حال اگرچہ ہیجان جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال کو منتقل ہو۔ درحقیقت ایسا ہی ہوتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ درحقیقت کوانٹم برقی حرقیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر ہوتے ہیں۔ مثلاً ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی $\hbar\omega/2$ کا حامل ہو گا۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں جوہر کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں تب بھی برقناطیسی شعاع پائی جائے گی اور یہی صفر نقطی اخراج خود باخود اخراج کا سبب بنتی ہے۔ اگر جڑ سے دیکھا جائے تو درحقیقت تمام اخراج تحرقی اخراج ہو گی۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہو گا کہ آیا آپ نے میدان پیدا کیا یا قدرت نے اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی اخراجی عمل کے بلکل اُلٹ ہے جہاں تمام اخراج خود باخود ہوتا ہے اور تحرقی اخراج کا تصور نہیں پایا جاتا ہے۔

کوانٹم برقی حرقیات اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں انجذاب تحرقی اخراج اور خود باخود اخراج کا تعلق پیش کرتا ہے۔ آئنسٹائن نے خود باخود اخراج کی وجہ زمینی حال برقناطیسی میدان کا اضطراب پیش نہیں کی تاہم انکے نتائج ہمیں خود باخود اخراج کا حساب کرنے کا مجاز بناتی ہے جس سے ہیجان جوہری حال کی قدرتی عرصہ حیات تلاش کی جا سکتے ہے۔ ایسا کرنے سے پہلے ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتفاقی برقناطیسی امواج کی آمد سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں۔ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورتحال پیدا ہو گی۔

### ۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے۔ جہاں $E_0$ ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا حیطہ ہو گا۔

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{۹.۳۷}$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال مساوات 9.36 میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$P_{b \to a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \tag{۹.۳۸}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد $\omega$ پر یک رنگی موج کے لیے درست ہو گا۔ کئی عملی استعمال میں نظام پر ایک بڑی تعددی پٹی کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جائے گی ایسی صورت میں $u \to \rho(\omega)d\omega$ ہو گا جہاں $\rho(\omega)d\omega$ تعددی ساتھ $d\omega$ میں کثافت توانائی ہے اور تحویلی احتمال درج ذیل تکمل کا روپ اختیار کرے گا

$$P_{b\to a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2\int_0^{\infty}\rho(\omega)\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}d\omega \tag{۹.۳۹}$$

کسنگی کو سین میں جزو کی چوٹی $\omega_0$ پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲) جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہو گا لحاظہ ہم $\rho\omega$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اسے تکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{2\left|p\right|^2}{\epsilon_0\hbar^2}\rho(\omega_0)\int_0^{\infty}\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}d\omega \tag{۹.۴۰}$$

متغیرات تبدیل کر کے $x \equiv (\omega_0-\omega)t/2$ لکھ کر تکمل کے حدوں کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر چونکہ باہر تکمل صفر ہی ہے اور قطعی تکمل کو جدول سے دیکھ کر

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi \tag{۹.۴۱}$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$P_{b\to a}(t) \cong \frac{\pi\left|p\right|^2}{\epsilon_0\hbar^2}\rho(\omega_0)t \tag{۹.۴۲}$$

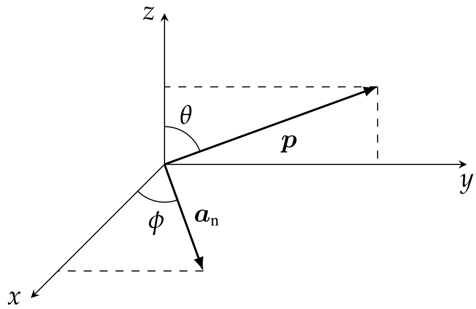
اس بار تحویلی احتمال وقت $t$ کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس غیر اتا کی تعدد کی وسعت پلٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتا ہے۔ بلخصوص تحویلی شرح $(R \equiv dP/dt)$ ایک مستقل ہو گا:

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۳}$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج $y$ رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور $z$ رخ تقطیب شدہ ہے۔ لیکن ہم اُس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو اور اس میں ہر ممکنہ تکتیب پائی جاتی ہو۔ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہو گی۔ ہمیں $\left|p\right|^2$ کی جگہ $\left|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{n}}\right|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہو گی جہاں مساوات 9.33 کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{p} \equiv q\langle\psi_b|\boldsymbol{r}|\psi_a\rangle \tag{۹.۴۴}$$

اور اوسط تمام تکتیب اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔




شکل ۹.۵: محدد برائے $|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2$ کی اوسط زنی۔

اوسط درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ کروی محدد منتخب کر کے حرکت کے رخ کو $z$ محور پر رکھیں (تاکہ تکتیب $xy$ سطح میں ہو) اور مستقل $\boldsymbol{p}$ سطح $yz$ میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔

$$\boldsymbol{a}_\text{n} = \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \tag{۹.۴۵}$$

تب

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2_{ave} = \frac{1}{4\pi}\int|\boldsymbol{p}|^2\sin^2\theta\sin^2\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_\text{n}|^2_{ave} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{4\pi}\int_0^\pi\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}|\boldsymbol{p}|^2 \tag{۹.۴۶}$$

**ماخوذ:** ہر جانب سے آمدی، غیر تکتیبی، غیر اتفاقی شعاع کے زیر اثر حال $b$ سے حال $a$ میں تحرقی اخراج کا تحویلی شرح درج ذیل ہو گا۔

$$R_{b\to a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|p|^2\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۷}$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت کتب معیار اثر کا فتالبی رکن $p$ ہو گا مساوات 9.44 اور $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$ پر فی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہو گی۔

## ۹.۳ خود باخود اخراج

### ۹.۳.۱ آئنسٹائن $A$ اور $B$ عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال $\psi_a$ میں $N_a$ اور بالائی حال $\psi_b$ میں $N_b$ جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود اخراجی شرح $A$ لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو $N_bA$ ذرات خود باخود اخراج کے عمل سے چوڑیں گے۔

جیسا ہم مساوات 9.47 میں دیکھ چکے ہیں تحرق اخراج کی تحویلی شرح برقناطیسی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہو گا $(B_{ab}\rho(\omega_0)$۔ یوں بالائی حال کو تحرق اخراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$ ذرات چھوڑیں گے۔ اسی طرح انجزابی ریٹ $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab}\rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0) \tag{۹.۴۸}$$

فرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہو گی اور $dN_b/dt = 0$ ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۴۹}$$

ہم بنیادی شماریاتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درجہ حرارت $T$ پر حراری توازن میں توانائی $E$ ذرات کی تعداد بولٹزمان جزو ضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راست متناسب ہو گا لحاظہ

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T} \tag{۹.۵۰}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T}B_{ab} - B_{ba}} \tag{۹.۵۱}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسمی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{۹.۵۲}$$

ان دونوں ریاضی جملوں کو موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$B_{ab} = B_{ba} \tag{۹.۵۳}$$

اور درج ذیل حاصل ہو گا

$$A = \frac{\omega_0^3\hbar}{\pi^2 c^3}B_{ba} \tag{۹.۵۴}$$

مساوات 9.53 اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحرق اخراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجزاب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرق اخراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر

مساوات 9.54 ہے جو ہمیں تحریقی اخراجی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود باخود اخراجی شرح $A$ دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}\left|p\right|^2 \tag{۹.۵۵}$$

لحاظہ خود باخود اخراجی شرح درج ذیل ہو گا

$$A = \frac{\omega_0^3\left|p\right|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{۹.۵۶}$$

سوال ۹.۸: نیچے رخ تحویل میں خود باخود اخراج اور حراری تحریقی اخراج وہ تحریقی اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں مقابلہ ہو گا۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $T = 300\,\mathrm{K}$ پر $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت کم تعدد وں پر حراری تحریقی اخراج غالب ہو گا جبکہ $5 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود باخود اخراج غالب ہو گا۔ دکھائی دینے والی روشنی کے لیئے کونسا غالب ہو گا؟

سوال ۹.۹: برقناطیسی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود اخراجی اشارہ در حقیقت تحریقی اخراج مساوات 9.47 ہو گا۔ لحاظہ آئنسٹائن عددی سر $A$ اور $B$ جانے بغیر آپ خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیئے کوانٹم برقی حرکیات بروئے کار لانی ہو گی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک نوریہ پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہو گا۔

(الف) مساوات 5.111 کی جگہ $N_\omega = d_k$ پُر کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارا ہونا ہو گا ورنہ کل خلائی توانائی لامتناہی ہو گی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیئے چھوڑتے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات 9.47 استعمال کر کے خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

### ۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحریقی اخراج کی تحویلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحریقی اخراج کہ نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بالخصوص وقتی دورانیہ $dt$ میں جوہروں میں تعداد کی کمی $A\,dt$ ہو گی۔

$$dN_b = -AN_b dt \tag{۹.۵۷}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیئے جا رہے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \tag{۹.۵۸}$$

ظاہر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد قوت نمائی طور پر کم ہو گی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{1}{A} \tag{۹.۵۹}$$

جسی اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ ہو گی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علامتیت کے بنا پر ایسا کیا گیا تحرقی اخراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر قابلِ رصوص سطح سے قطع نظر حال $\psi_b \rightarrow \psi_a$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی $\psi_b$ کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات $(\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \ldots)$ میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots} \tag{۹.۶۰}$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک سپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار $q$ محور $x$ پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرج کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود باخود اخراج تنزل کی بنا پر حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\langle n|x|n'\rangle \hat{i}$$

آپ نے سوال 3.33 میں $x$ کے قالبی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n.n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n'.n-1})$$

جہاں مرتعش کی قدرتی تعدد $\omega$ ہے۔ مجھے تحرقی اخراج کے تعدد کے لیئے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم اخراج کی بات کر رہے ہیں لحاظہ $n'$ لازمی طور پر $n$ سے نیچے ہو گا۔ ہماری اس مقصد کی غرض سے تب درج ذیل ہو گا۔

$$p = q\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}\delta_{n'.n-1}\hat{i} \tag{۹.۶۱}$$

بظاہر تحویل سیڑھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور اخراجی نور سے کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega \tag{۹.۶۲}$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر اخراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہو گا۔

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \tag{۹.۶۳}$$

اور $n$ ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہو گا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \tag{۹.۶۴}$$

چونکہ ہر ایک اخراجی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لحاظہ اخراجی طاقت $A\hbar\omega$ ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(n\hbar\omega)$$

یا $n$ ویں حال میں مرتعش کی توانائی $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}(E - \frac{1}{2}\hbar\omega) \tag{۹.۶۵}$$

ابتدائی توانائی $E$ کا کوانٹم مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اخراجی طقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار $q$ کا اخراجی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{۹.۶۶}$$

ہارمونی مرتعش $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ جس کا حیطہ $x_0$ ہو گا میں مسرع $a = -x_0\omega^2\cos(\omega t)$ ہو گا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{q^2x_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2x_0^2$ ہے لحاظہ $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہو گا۔ جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}E \tag{۹.۶۷}$$

توانائی $E$ کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی اخراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد $(\hbar \rightarrow 0)$ میں کلاسیکی اور کوانٹم کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹم کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش طاقتی اخراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحویل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائڈروجن کے چاروں $n = 2$ حالات کے لیے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔
اشارہ: آپ کو $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$، $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$ وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے قابلی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر تکملات صفر کے برابر ہوں گے لحاظہ حساب شروع کرنے سے پہلے ین پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔
جواب: سوائے $\psi_{200}$ جو لامتناہی ہے باقی تمام کے لیے $1.60 \times 10^{-9}$ سیکنڈز ہو گا۔

### ۹.۳.۳ قواعد انتخاب

شرح خود باخود اخراج درج ذیل روپ کے قابلی ارکان معلوم کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle \psi_b | r | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال 9.11 حل کیا ہو اگر نہیں کیا اسی وقت پہلے اس کو حل کریں تو آپ نے دیکھا ہو گا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں۔ کیا بہتر ہوتا اگر ہم پہلے سے جان سکتے کہ کون سے تکملات صفر دیں گے تاکہ ہم اپنا قیمتی وقت غیر ضروری تکملات حل کرنے میں صرف نہ کرتے۔ فرض کریں ہم ہائڈروجن کی طرح کے نظام میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کا ہیملٹنی کروی تشاکلی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹم اعداد $n, l$ اور $m$ سے ظاہر کر سکتے ہیں اور قابلی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n'l'm' | r | nlm \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت تبادلی رشتوں اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہرمیشیپن مل کر اس مقدار پر طاقتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

**انتخابی قواعد برائے $m$ اور $m'$:**
ہم پہلے $x, y$ اور $z$ کے ساتھ $L_z$ کے مقلب پر غور کرتے ہیں جنہیں باب 4 میں حاصل کیا گیا مساوات 4.122 دیکھیں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, [L_z, y] = -i\hbar x, [L_z, z] = 0 \tag{۹.۶۸}$$

ان میں سے تیسرے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}0 &= \langle n'l'm' \big| [L_z, z] \big| nlm \rangle = \langle n'l'm' | L_z z - z L_z | nlm \rangle \\ &= \langle n'l'm' \Big| [(m'\hbar)z - z(m\hbar)] \Big| nlm \rangle = (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | z | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$m' = m \text{ یا پھر } \langle n'l'm' | z | nlm \rangle = 0 \text{ یا} \tag{۹.۶۹}$$

لحاظہ ماسوائے $m = m'$ کی صورت میں $z$ کے قالبی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔
ساتھ ہی $x$ کے ساتھ $L_z$ کا مقلب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'|[L_z, x]|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'|(L_z x - xL_z)|\,nlm\rangle \\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle \tag{۹.۷۰}$$

یوں آپ $y$ کے قالبی ارکان کو مطابقتی $x$ کے قالبی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی $y$ کے قالبی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں $y$ کے ساتھ $L_z$ کا مقلب درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'|[L_z, y]|\,nlm\rangle &= \langle n'l'm'|(L_z y - yL_z)|\,nlm\rangle \\ &= (m'-m)\hbar\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\hbar\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = -i\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle \tag{۹.۷۱}$$

بلخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m'-m)^2\langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = i(m'-m)\langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا۔

$$(m'-m)^2 = 1, \text{یا پھر} \quad \text{یا} \quad \langle n'l'm'|x|\,nlm\rangle = \langle n'l'm'|y|\,nlm\rangle = 0 \tag{۹.۷۲}$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں $m$ کے لیئے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$\Delta m = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad \text{کوئی عبور واقع نہیں ہو گا جب تک} \tag{۹.۷۳}$$

اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہو گا نوریہ چکر ایک کا حامل ہے لحاظہ اس کے $m$ کی قیمت 0, 1 یا $-1$ ہو سکتی ہے زاویائی معیارِ حرکت کے $z$ جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے جاتا ہے جوہر اتنا کھوئے گا۔

### انتخابی قواعد برائے $l$ اور $l'$:

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبیت رشتہ اخذ کرنے کو کہا گیا۔

$$[L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2(rL^2 + L^2 r) \tag{۹.۷۴}$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقلب کو $\langle n'l'm'|$ اور $|nlm\rangle$ کے بیچ لپیٹ کر انتخابی قاعدہ اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\langle n'l'm'\Big|[L^2,[l^2,r]]\Big|nlm\rangle &= 2\hbar^2\langle n'l'm'\Big|(rL^2+L^2)\Big|nlm\rangle\\ &= 2\hbar^4[l(l+1)+l'(l'+1)]\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = \langle n'l'm'\Big|(L^2[L^2,r]-[L^2,r]\\ &= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|[L^2,r]\Big|nlm\rangle\\ &= \hbar^2[l'(l'+1)-l(l+1)]\langle n'l'm'\Big|(L^2r-rL^2)\Big|nlm\rangle\end{aligned}$$

$$= \hbar^4[l'(l'+1)-l(l+1)]^2\langle n'l'm'|r|nlm\rangle \tag{۹.۷۵}$$

ماخوذ

$$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = [l'(l'+1)-l(l+1)]^2 \text{یا}$$

$$\text{یا پھر}\ \langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0 \tag{۹.۷۶}$$

لیکن

$$[l'(l'+1)-l(l+1)] = (l'+l+1)(l'-l)$$

اور

$$2[l(l+1)+l'(l'+1)] = (l'+l+1)^2+(l'-l)^2-1$$

کی بنا پر مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

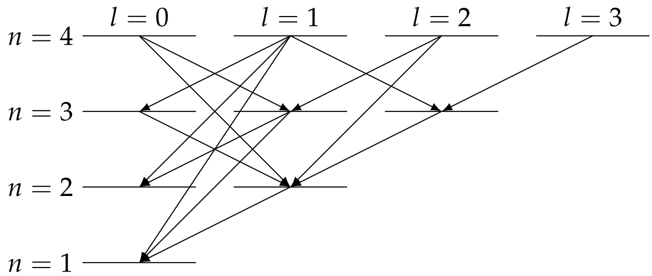
$$[(l'+l+1)^2-1][(l'-l)^2-1] = 0 \tag{۹.۷۷}$$

ان میں پہلا جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اُس صورت جب $l = l' = 0$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھٹکارہ حاصل کیا گیا ہے لحاظ سے شرط $l' = l \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں $l$ کے لیئے انتخابی قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{کوئی عبور واقع نہیں ہو گا جب تک}\ \Delta l = \pm 1 \tag{۹.۷۸}$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نور یہ چکر ایک کا حامل ہے لحاظہ زاویائی معیارِ حرکت جمع کرنے کے قواعد $l' = l+1, l' = l$ یا $l' = l-1$ کی اجازت دیں گے۔ برقی جفت کتنی اخراج کے لیئے زاویائی معیارِ حرکت کی بقا در میانی صورت کی اجازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود اخراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہو گی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد نہ ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائڈروجن کے لیئے ابتدائی چار بوہر




شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجازتی تنزل۔

سطحوں کے لیے اجازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دیہان رہے کہ $2S$ حال $\psi_{200}$ اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لحاظہ سے تنزل پذیر نہیں ہو گا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عرصہ حیات مثلاً $2P$ حالات $\psi_{210}$، $\psi_{211}$ اور $\psi_{21-1}$ سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصادماً کی بنا پر یا ممنوعہ تحویل کی بنا پر سوال 9.21 یا متعدد نوریہ کے اخراج کے بنا پر تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال ۹.۱۲: مساوات 9.74 میں دیگئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کو اور $r.L = r.(r \times p) = 0$ کو استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2 z)$$

$z$ سے $r$ تک عمومیت دینا حقیر سا کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm'|r|\, nlm\rangle = 0$ ہو گا۔ اس سے مساوات 9.78 میں در پیش کمی ختم ہو گی۔

سوال ۹.۱۴: ہائڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جفت کتب تحویل کے زریع پہنچتا ہے۔

(الف) اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|\,300\rangle \to |\,nlm\rangle \to |\,n'l'm'\rangle \to \cdots \to |\,100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عرصہ حیات کیا ہو گا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $\langle 300 \,|$ میں نہیں ہو گا لحاظہ اس ترتیب میں ہر مرتبہ صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عرصہ حیات حاصل ہو گا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویلی شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

## مــزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعــدد سطحی نظـام کے لیـئے مـساوات 9.1 اور مـساوات 9.2

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \langle\psi_n \mid \psi_m\rangle = \delta_{nm} \tag{۹.۷۹}$$

کو عـمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظـریـہ اضطـراب مـرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطـراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہو گا۔

$$H = H_0 + H'(t) \tag{۹.۸۰}$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیمی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\psi(t) = \sum c_n(t)\psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۹.۸۱}$$

دیکھائیں کہ درج ذیل ہو گا

$$c_m = -\frac{i}{\hbar}\sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} \tag{۹.۸۲}$$

جہاں $H'_{mn}$ درج ذیل ہے

$$H'_{mn} \equiv \langle\psi_m\middle|H'\middle|\psi_n\rangle \tag{۹.۸۳}$$

(ب) اگر نظام حال $\psi_N$ میں آغاز کریں تب دیکھائیں کہ رتبہ اوّل نظـریـہ اضطـراب میں درج ذیل

$$c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{NN}(t')dt' \tag{۹.۸۴}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mN}(t')e^{i(E_m-E_N)t'/\hbar}dt' \quad (m \neq N) \tag{۹.۸۵}$$

(ج) فـرض کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ $t$ پر منقطع کرنے کے عـلاوہ $H'$ مستقل ہے۔ حال $N$ سے حال $M(M \neq N)$ میں تحویل کے احتمال کو $t$ کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$4\left|H'_{MN}\right|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t/2\hbar]}{(E_N - E_M)^2} \tag{۹.۸۶}$$

(د) فرض کریں $H'$ وقت کا سائن نما تفاعل $H' = V\cos(\omega t)$ ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دیکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور انکا احتمال درج ذیل ہے۔

$$P_{N\to M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2} \tag{۹.۸۷}$$

(و) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتفاقی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دیکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیئے تحرقی اخراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اوّل تک سوال 9.15(ج) اور (د) کے لیئے تلاش کریں۔ معمولزنی شرط

$$\sum_m |c_m(t)|^2 = 1 \tag{۹.۸۸}$$

کی تصدیق کر کے تزاد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال $\psi_N$ میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $|c_N(t)|^2$ یا $1 - \sum_{m\neq N}|c_m(t)|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہو گا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ $N$ ویں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے بیٹھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہو گی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہو گا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دیکھائیں کہ تفاعل موج کی حیط زاویائی دور تبدیل ہو گا لیکن تحویل نہیں ہو گی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیط، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اوّل نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اُس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب $x$ میں مستقل نہ کے $t$ میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کمیت $m$ کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 << E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \text{ جب} \\ 0 & a/2 < x \leq a \text{ جب} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت $T$ کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اوّل نظریہ اضطراب میں نتیجہ $E_2$ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرق اخراج، تحرقی انجزاب اور خود باخود اخراج دیکھ چکے ہیں۔ خود باخود انجزاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی گمک ساکن مقناطیسی میدان $B_0\boldsymbol{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت $\gamma$ ہو لارمر تعدد $\omega_0 = \gamma B_0$ مثال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf}[\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - \sin(\omega t)\boldsymbol{j}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B = B_{rf}\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - B_{rf}\sin(\omega t)\boldsymbol{j} + B_0\boldsymbol{k} \tag{۹.۸۹}$$

(الف) اس نظام کے لیے $2\times 2$ ہیملٹنی قالب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت $t$ پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$\dot{a} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t}b + \omega_0 a\right) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2}\left(\Omega e^{i\omega t}a - \omega_0 b\right) \tag{۹.۹۰}$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں $a_0$ اور $b_0$ کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{a_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[a_0(\omega_0-\omega) + b_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{i\omega t/2}$$
$$b(t) = \left\{b_0\cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'}[b_0(\omega-\omega_0) + a_0\Omega]\sin(\omega' t/2)\right\}e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۱}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تفاعل تلاش کریں۔

جواب: $P(t) = \{\Omega^2/[(\omega-\omega_0)^2 + \Omega^2]\}\sin^2(\omega' t/2)$

(و) منحنی گمک

$$P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega-\omega_0)^2 + \Omega^2} \tag{۹.۹۲}$$

کو غیر متغیر $\omega_0$ اور $\Omega$ کی صورت میں متحرق تعدد $\omega$ کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ھ) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لحاظہ ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقناطیسی جفت کتب معیارِ اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقناطیسی گمک تجربہ میں نوریہ کا $g$ جزو ضربی ایک ٹیسلا کے ساکن میدان اور ایک مائکرو ٹیسلا حیطہ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہو گا؟ پروٹان کی مقناطیسی معیارِ اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں فرض کیا تھا کہ جوہر روشنی کی طولِ موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہو گا

$$E(r,t) = E_0 \cos(k.r - \omega t) \tag{۹.۹۳}$$

اگر جوہر کا مرکز مبدا پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r << 1$ ($|k| = 2\pi/\lambda$, لحاظہ $k.r \sim r/\lambda << 1$) ہو گا جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ فرض کریں ہم رتبہ اوّل درستگی۔

$$E(r,t) = E_0[\cos(\omega t) + (k.r)\sin(\omega t)] \tag{۹.۹۴}$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جزو وہ اجازتی برقی جفت کتب تحویلات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی جا چکی ہے۔ دوسرا جزو وہ تحویلات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتب اور برقی چو کتب تحویل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ تحویلات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد کتبی معیارِ اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ تحویلات کی خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں اس کی تکتیب اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگرچہ مکمل جواب کے لیئے ایسا کرنا ضروری ہو گا۔ جواب:

$$R_{b\to a} = \frac{q^2\omega^5}{\pi\epsilon_0\hbar c^5}|\langle a|(\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}.r)(\boldsymbol{k}.r)|b\rangle|^2 \tag{۹.۹۵}$$

(ب) دیکھائیں کہ ایک بُعدی مرتعش کے لیئے ممنوعہ تحویلات سطح $n$ سے سطح $n-2$ میں ہو گی اور تحویلی شرح جس کی اوسط قیمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ اور $\boldsymbol{k}$ پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہو گا۔

$$R = \frac{\hbar q^2\omega^3 n(n-1)}{15\pi\epsilon_0 m^2 c^5} \tag{۹.۹۶}$$

تبصرہ: یہاں $\omega$ سے مراد نوریہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ اجازتی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کا تناسب تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دیکھائیں کہ ہائڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی $2S \to 1S$ کی اجازت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتب کے لیئے بھی درست ہو گا غالب تنزل دو نوریہ اخراج کی بنا پر ہو گا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دسواں حصہ ہو گا۔

سوال ۹.۲۲: دیکھائیں کہ $n, l$ سے $n', l'$ میں تحویل کے لیئے ہائڈروجن کا خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 درج

ذیل ہو گا۔

$$\frac{e^2\omega^3 I^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l+1 \text{ جب} \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l-1 \text{ جب} \end{cases} \tag{۹.۹۷}$$

جہاں $I$ درج ذیل ہے۔

$$I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr \tag{۹.۹۸}$$

جوہر $m$ کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد کے تحت $m' = m+1, m,$ یا $m-1$ حالات $m'$ میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب $m$ پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l+1$ صورت کے لیے $\langle nlm|$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ $x, y$ اور $z$ کے تمام غیر صفر قالبی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1|r|nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m|r|nlm\rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1|r|nlm\rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l-1$ کے لیے بھی کریں۔

# باب ۱۰

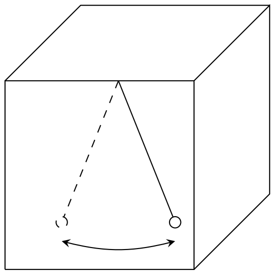
# حرارت ناگزر تخمین

## ۱۰.۱ مسئلہ حرارت ناگزر

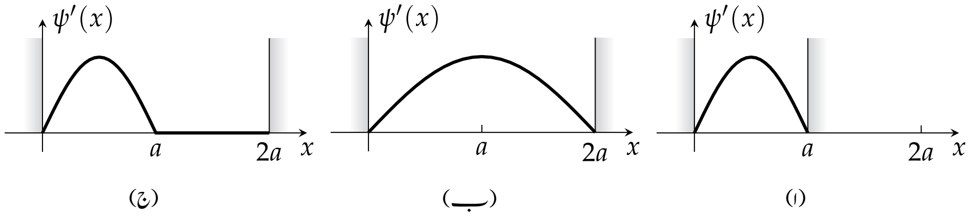
### ۱۰.۱.۱ حرارت ناگزر عمل

فرض کریں ایک کامل رقاص انتصابی ستہ میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے اگر آپ اس رقاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ افراتفری کے ساتھ دائروی صورت میں حرکت کرنے لگے گا لیکن اگر آپ بغیر جھٹکے کے رقاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تب رقاص اسی سطح یا اس کے متوازی سطح میں شائستگی اور روانی سے اسی حیطہ کے ساتھ جھولتا رہے گا بیرونی حالات کی بہت آہستہ آہستہ تبدیلی ہی حرارت نہ گزر عمل کی پہچان ہے دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف امتیازی وقتوں کی بات کی جا رہی ہے نظام کی حرکت جو یہاں رقاص کی ارتعاش کا دوری عرصہ ہو گا کو ظاہر کرنے والا اندرونی وقت $T_i$ اور نظام میں نمایاں تبدیلی مثلاً لرزتے ہوئے چبوترا پر نصب رقاص کی صورت میں چبوترے کی لرزش کا دوری عرصہ کو ظاہر کرنے والا بیرونی وقت $T_e$ حرارت ناگزر عمل میں $T_e \gg T_i$ ہو گا۔

حرارت نہ گزر عمل کے تجزیہ کا بنیادی حکمت عملی یہ ہو گا کہ پہلے بیرونی عوامل مقدار معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں بہت آہستہ آہستہ وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے مثال کے طور پر مقررہ لمبائی $L$ کی رقاص کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہو گا اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو تب دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہو گا حصہ 3.7 میں ہائیڈروجن سالمہ پر تبصرہ کے دوران ایک زیادہ باریک بیں مثال پیش کی گئی ہم نے آغاز میں مرکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے ان کے بیچ فاصلہ $R$ کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا نظام کی زمینی حال توانائی کو $R$ کے تفاعل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کی ان حنا سے مرکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا سوال 10.7 طبیعت سالمہ میں اس ترکیب کو جس میں ساکن مرکزہ سے آغاز کرتے ہوئے الیکٹرانی تفاعلات موج کا حساب کر کے ان سے نسبتاً سست



شکل ۱۰.۱: حرارت ناگزر حرکت: اگر ڈبے کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تب رقاص اسی حیطہ کے ساتھ ابتدائی سطح کے متوازی سطح میں جھولتا ہے۔




شکل ۱۰.۲: (ا) لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تب ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تب ذرہ لمحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

رفتار مرکزہ کی مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارن و اوپن ہائیمر تخمین کہتے ہیں حرارت نہ گزر تخمین کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جا سکتا ہے فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ $H^i$ سے بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ $H^f$ تک پہنچتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ اگر ذرا ابتدائی طور پر $H^i$ کے $n$ وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہو تب یہ زیر مساوات شروڈنگر $H^f$ کی $n$ وی امتیازی حال میں منتقل ہو گا میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ $H^i$ سے $H^f$ تک تحویل کے دوران طیف غیر مسلسل اور غیر انحطاطی ہے یوں حالات کی ترتیب کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جا سکتا ہے لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔

مثال کے طور پر ہم لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرا کو زمینی حال میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-ا)۔

$$\psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \tag{۱۰.۱}$$

اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ آہستہ مقام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت ماسوائے

جزوضربی ہیّت کے سے ذرہ توسیع شدہ کنویں کے زمینی حال میں منتقل ہو گا (شکل ۲.۱۰-ب)۔

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \tag{۱۰.۲}$$

دھیان رہے کے نظر سے اضطراب کی طرح ہم ہیملٹنی میں ایک چھوٹی تبدیلی کی بات نہیں کر رہے ہیں یہاں تبدیلی بہت بڑی ہے فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی بہت آہستہ آہستہ رونما ہو یہاں توانائی کی بقا نہیں ہو گی جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے نظام سے توانائی حاصل کرے گا جیسا کہ گاڑی کی انجن کے شلنڈر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بو کا کو توانائی فراہم کرتا ہے اس کے برعکس کنویں کی اچانک وسط کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے (شکل ۲.۱۰-ج) جو نئے ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا ایک پیچیدہ خطی جوڑ ہو گا سوال 38.2 یہاں توانائی کی بقا ہو گی کم از کم اس کی توقعاتی قیمت کی ضرور ہو گی جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے خلا میں گیس کی آزادانہ پھیلاو سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱.۱۰: ایک لامتناہی چوکور کنواں جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار $v$ سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتا ہے کو بالکل ٹھیک حل کرنا ممکن ہے اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہو گا

$$\Phi n(x,t) \cong \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/\hbar\omega} \tag{۱۰.۳}$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنویں کی لحاتی چوڑائی اور چوڑائی $a$ کے اصل کنواں کی $n$ ویں احباز تی توانائی $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ ہے عمومی حل ان $\Phi$ کا ایک خطی جوڑ:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x,t) \tag{۱۰.۴}$$

ہو گا جہاں عددی سر $c_n$ وقت $t$ کے تابع نہیں ہوں گے

ا. دیکھیں آیا تابع وقت شروڈنگر مساوات بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات 3.10 مطمئن کرتی ہے

ب. فرض کریں اصل کنویں کی زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز $(t = 0)$ کرتا ہے

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کے پھیلاؤ کے عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{0}^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z)\, \mathrm{d}z \tag{۱۰.۵}$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنویں کی پھیلنے کی رفتار کی ایک بے بودی پیمائش ہے بدقسمتی سے اس تکمل کی قیمت کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنا چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں یوں بیرونی وقت $2a = w(T_e)$ ہوگا ابتدائی زمینی حال کے تابع وقت قوت نمائی جزو ضربی کا دورانیہ اندرونی وقت ہوگا وقت $T_e$ اور $T_i$ تعین کر کے دیکھائے کے حرکت نہ گزر صور تحال سے مراد $1 \gg \alpha$ ہوگا جس کے تحت تکمل کے دائرہ کار پر $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$ ہوگا اس کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کے عددی سر $c_n$ تعین کریں حال $\Psi(x,t)$ تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرارت نہ گزر کے مطابق ہے

د. دکھائیں گے $\Psi(x,t)$ میں جزو ہیّت کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\theta(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_1(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۶}$$

جہاں لمحہ $t$ پر لمحاتی امتیازی قدر $E_n(t) \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2m\omega^2$ ہوگا اس نتیجہ پر تبصرہ کریں

### ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت

مسئلہ حرارت نہ گزر بظاہر معقول نظر آتا ہے اور اسے با آسانی بیان کیا جا سکتا ہے تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں ایک ذرہ جو $n$ وی امتیازی حال $\psi_n$ میں آغاز کریں

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۷}$$

وہ ڈوری جزو ضربی اپنانے کے علاوہ اسی $n$ وی امتیازی حال میں رہتا ہے

$$\Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۱۰.۸}$$

اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہوں تب امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \tag{۱۰.۹}$$

لیکن اب بھی کسی ایک مخصوص لمحہ پر یہ معیار عمودی سلسلہ

$$\langle\psi_n(t)|\psi_m(t)\rangle\delta_{nm} \tag{۱۰.۱۰}$$

تین گے جو مکمل ہے لہٰذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) \tag{۱۰.۱۱}$$

کے عمومی حل کو ان کا خطی مجموعہ

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)} \tag{۱۰.۱۲}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\theta_n(t) \approx -\frac{1}{\hbar}\int_0^1 E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۱۳}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے $E_n$ کی صورت میں معیاری دوری جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے میں اس کو ہمیشہ کی طرح عددی سر $c_n(t)$ میں ضم کر سکتا تھا لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا لہذا طبیعت وقت کے اس حصہ کو سریہن لکھنا موزوں ہو گا مساوات 12.10 کو مساوات 11.10 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$i\hbar\sum_n[\dot{c}_n\psi_n + c_n\dot{\psi}_n + ic_n\psi_n\theta_n]e^{i\dot{\theta}_n} = \sum_n c_n(H\psi_n)e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۴}$$

جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نکتہ سے ظاہر کیا گیا ہے مساوات 9.10 اور 13.10 کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹ جاتے ہیں لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے

$$\sum_n \dot{c}_n\psi_n e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \tag{۱۰.۱۵}$$

اس کا $\psi_m$ کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر لمحاتی امتیازی تفاعلات کی معیار عمودیت مساوات 10.10 بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n\delta mn e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\langle\psi_m|\psi_m\rangle e^{i\theta_n}$$

یا درج ذیل ہو گا

$$\dot{c}_m(t) = -\sum_n c_n\langle\dot{\psi}_m|\psi_n\rangle e^{\theta_n-\theta_m} \tag{۱۰.۱۶}$$

اب مساوات 9.10 کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H}\psi_n + H\dot{\psi}_n = \dot{E}_n\psi_n + E_n\dot{\psi}_n$$

اور یہاں بھی $\psi_m$ کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر درج ذیل ہو گا

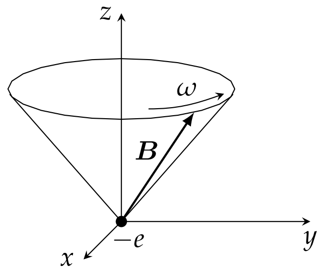
$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle + \langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = \dot{E}_n\delta_{mn} + E_n\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۷}$$

ہم $H$ کے ہرمشی ہونے سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle\psi_m|H|\dot{\psi}_n\rangle = E_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle$ لکھتے ہیں یوں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle = (E_n - E_m)\langle\psi_m|\dot{\psi}_n\rangle \tag{۱۰.۱۸}$$

یہ جانتے ہوئے کے توانائیاں غیر انحطاطی ہے مساوات 18.10 کو مساوات 16.10 میں پر کر کے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\dot{c}_m(t) = -c_m\langle\psi_m|\dot{\psi}_m\rangle - \sum_{n\neq m} c_n\frac{\langle\psi_m|\dot{H}|\psi_n\rangle}{E_n - E_m}e^{(-i/\hbar)\int_0^1[E_n(t')-E_m(t')]\,\mathrm{d}t'} \tag{۱۰.۱۹}$$




شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار $\omega$ سے مخروطی راہ جھاڑتا ہے (مساوات 24.10)۔

یہ بالکل ٹھیک نتیجہ ہے اب حرارت ناگزر تخمین کی باری آتی ہے فرض کریں $\dot{H}$ نہایت چھوٹا ہے تب دوسرا جزو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle \tag{۱۰.۲۰}$$

ہو گا جس کا حل

$$c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)} \tag{۱۰.۲۱}$$

ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$\gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \rangle \, \mathrm{d}t' \tag{۱۰.۲۲}$$

بالخصوص اگر ذرا $n$ وی امتیازی حال یعنی $m \neq n$ کیلئے $c_n(0) = 1$ اور $c_m(0) = 0$ ہو سے آغاز کرے تب مساوات 12.10

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t) \tag{۱۰.۲۳}$$

ہو گا لہٰذا کئی ہیئتی جزو ضربیاں حاصل کرنے کے علاوہ یہ ذرا اعتکائی ہیملٹنی کی $n$ وی امتیازی حال میں ہی رہے گا

مثال ۱۰.۱: فرض کریں ایک مقناطیسی میدان میں نکتہ پر کمیت $m$ اور بار $-e$ کا ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے اس مقناطیسی میدان کی مقدار $B_0$ ایک مستقل ہے جبکہ اس کا رخ $z$ محور کے گرد ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار $\omega$ سے ایک مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے محور $z$ کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ $\alpha$ ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0[\sin(\alpha)\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\alpha)\sin(\omega t)\hat{j} + \cos\alpha\hat{k}] \tag{۱۰.۲۴}$$

اس کا ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہو گا

$$H(t) = \frac{e}{m}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{e\hbar\beta_0}{2m}[\sin\alpha\cos(\omega t)\sigma_x + \sin\alpha\sin(\omega t)\sigma_y + \cos\alpha\sigma_z]$$
$$= \frac{\hbar\omega_1}{2}\begin{pmatrix}\cos\alpha & e^{-i\omega t}\sin\alpha \\ e^{i\omega t}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۵}$$

جہاں $\omega_0$ درج ذیل ہیں

$$\omega_1 \equiv \frac{e\beta_0}{m} \tag{۱۰.۲۶}$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکر کار $\chi_+$ اور $\chi_-$ درج ذیل ہیں۔

$$\chi_+(t) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t}\sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۷}$$

$$\chi_-(t) = \begin{pmatrix}e^{-i\omega t}\sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۲۸}$$

جو $\boldsymbol{B}(t)$ کے لحاتی رخ کے ساتھ ہمچکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں سوال 30.4 دیکھیں ان کے مطابقتی امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$E\pm = \pm\frac{\hbar\omega_1}{2} \tag{۱۰.۲۹}$$

فرض کریں $\boldsymbol{B}(0)$ کے ہمراہ الیکٹران حمہ میدان صورت سے آغاز کرتا ہے

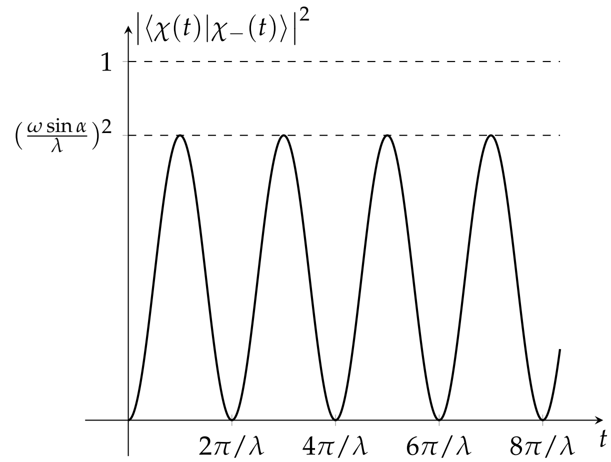
$$\chi(0) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2)\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۰}$$

تابع وقت شروڈنگر مساوات کا بلکل ٹھیک حل درج ذیل ہو گا سوال 2.10

$$\chi(t) = \begin{pmatrix}[\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1-\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i\frac{(\omega_1+\omega)}{\lambda}\sin(\lambda t/2)]\cos(alpha/2)e^{+i\omega t/2}\end{pmatrix} \tag{۱۰.۳۱}$$

جہاں $\lambda$ درج ذیل

$$\lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1\cos\alpha} \tag{۱۰.۳۲}$$




شکل ۱۰.۴: غیر حرارت ناگزر صورت $(\omega \gg \omega_1)$ میں تحویلی احتمال (مساوات 34.10)۔

جسے $\chi_+$ اور $\chi_-$ کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\chi(t) = \left[\cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i\frac{(\omega_1 - \omega\cos\alpha)}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) + i\left[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۳۳}$$

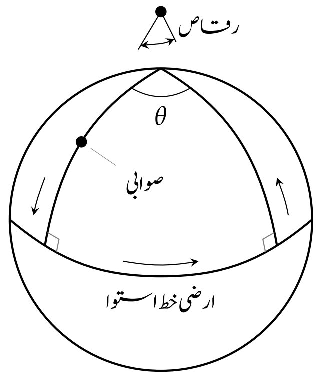
ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کے موجودہ رخ کے لحاظ سے خلاف میدان کو تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\right|^2 = \left[\frac{\omega}{\lambda}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]^2 \tag{۱۰.۳۴}$$

مسئلہ حرارت نہ گزر کہتا ہے کہ $T_e \gg T_i$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت $T_e$ ہے جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہو گا اور تفاعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت $T_i$ ہو گا جو موجودہ صورت میں $\hbar/(E_+ - E_- = 1/\omega_1)$ ہو گا یوں حرارت نہ گزر تخمین سے مراد $\omega \ll \omega_1$ ہو گا غیر مضطرب تفاعلات موج کے دور کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے حرارت نہ گزر صورت $\lambda \cong \omega_1$ میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\langle\chi(t)|\chi_-(t)\rangle\right|^2 \cong \left[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]^2 \to 0 \tag{۱۰.۳۵}$$

جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ پر $\boldsymbol{B}$ کہ رخ ہو اس کے برعکس $\omega_1 \gg \omega$ کی صورت میں $\omega \cong \lambda$ ہو گا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ ٹپکیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ □




شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر رقاص کی حرارت ناگزر منتقلی۔

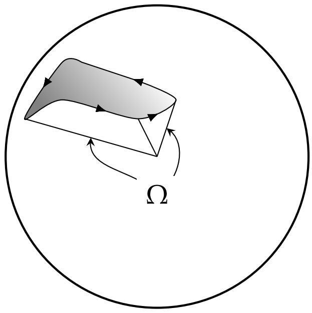
سوال ۱۰.۲: تصدیق کیجئے گا کہ مساوات 25.10 کی ہیملٹنی کیلئے مساوات 31.10 تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتی ہے ساتھ ہی مساوات 33.10 کی تصدیق کریں اور دکھائیں کے عددی سروں کے مربّعوں کا مجموعہ ایک ہوگا جو معمول زنی کی شرط ہے

## ۱۰.۲ ہیئت بیری

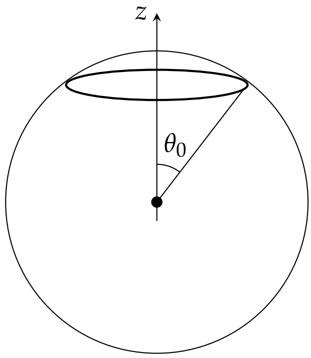
### ۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل

آئے حصہ 1.1.10 میں مستعمل کامل بے رگڑھ لٹکن جس کے چبوترا کو ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاتا ہوں پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے حرارت نہ گزر عمل کا تصور اخذ کیا گیا میں نے دکھاوا کیا تھا کہ جب تک چبوترا کی حرکت اتنی رقاص کے دوری عرصہ کے لحاظ سے اتنی آہستہ ہو کے رقاص کی نمایاں حرکت کے دوران رقاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہوں یہ اسی مستوئی میں یا اس کے متوازی مستوئی میں اسی حیطہ اور اسی تعدد کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

لیکن اگر میں اس کامل رقاص کو شمالی قطب پر لے جا کر مثلاً صوابی شہر کے رخ جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) فی الحال تصور کریں کے دنیا گھوم نہیں رہی ہے میں اس کو بہت آہستہ آہستہ یعنی حرارت نہ گزر طریقہ سے صوابی سے گزرتے خط طول بلند پر چلتے ہوئے عرضی خط استوا تک پہنچتا ہوں یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے گا میں اس کو عرضی خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں رقاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے آخر میں میں اس نئی خط طول بلند پر چلتے ہوئے چبوترا کو شمالی قطب منتقل کرتا ہوں آپ دیکھ سکتے ہیں کے رقاص اسی مستوی میں اب نہیں جھولے گا جہاں سے اس نے آغاز کیا یقیناً نئی مستوی اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ $\Theta$ پایا جاتا ہے جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے دو خط طول بلند کے بیچ زاویہ $\Theta$ ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جس راہ پر میں چبوترا اٹھا کر چلتا رہا وہ راہ زمین کے مرکز پر ٹھوس زاویہ $\Omega$ بناتی ہے یہ راہ شمالی نصف کرہ کا $\Theta/2\pi$ حصہ گھیرتی ہے لہٰذا اس کا رقبہ $A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$ ہوگا




شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ $\Omega$ بناتا ہے۔




شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقو رقاص کی راہ۔

جہاں $R$ زمین کا رداس ہے یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Theta = A/R^2 \equiv \Omega \tag{۱۰.۳۶}$$

جو اس نتیجہ کو نہایت عمدگی کے ساتھ پیش کرتا ہے اور جو راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں ہے (شکل ۱۰.۶)۔

کرہ کی سطح پر ایک بند راہ پر چلتے ہوئے حرارت نہ گزر منتقلی کی ایک مثال فوکالٹ رقاص ہے جہاں چبوترا کو اٹھا کر چلنے کی بجائے زمین کے گھومنے کو یہ کام سونپا جاتا ہے خط عرض بلد $\theta_0$ درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$\Omega = \int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta_0} = 2\pi(1-\cos\theta_0) \tag{۱۰.۳۷}$$

زمین کے لحاظ سے جو اس دوران $2\pi$ زاویہ گھوم چکا ہو گا فوکالٹ رقاص کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi\cos\theta_0$ ہو گی اس نتیجہ کو عموماً گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس کوتوکی اثر سے حاصل کیا جاتا ہے لیکن یہاں یہ

حنالصتاً جومیٹرئے مفہوم پیش کرتا ہے ایسا نظام جو بند راہ پر چل کے واپس ابتدائی نکتہ پہنچ کر اپنی ابتدائی حال میں نہیں لوٹتا غیر ہماقوائد نظام کہلاتا ہے یہاں ضروری نہیں کے راہ پر چلنے سے مراد حرکت دینا ہو اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھی غیر ہماقوائد نظام ہر جگہ پائے جاتے ہیں ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن غیر ہماقوائد اعلی ہے ہر ایک پیرا کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہو گی یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہو گا وغیرہ وغیرہ اگلے حصہ میں میں غیر ہماقواعد اعمالوں کی کوانٹم میکانیات پر غور کروں گا ہم نے دیکھنا ہو گا کے ہیملٹنی کے مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرارت نہ گزر پیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہو گا

### ۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ 2.1.10 میں دکھایا کے ایک ذرا جو $H(0)$ کے $n$ ویں امتیازی حال سے آغاز کرتا ہو حرارت نہ گزر حالات میں تابع وقت ہیئتی جزو ضربی کے علاوہ $H(t)$ کی $n$ ویں امتیازی حال میں ہو گا بالخصوص اس کا تفاعل موج مساوات 23.10 درج ذیل ہو گا

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t)+\gamma_n(t)]}\psi_n(t) \tag{۱۰.۳۸}$$

جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۳۹}$$

حرکی ہیئت ہے جو تابع وقت تفاعل $E_n$ کی صورت کے لیے جزو ضربی $e^{(-iE_nt/\hbar)}$ کو عمومیت دیتا ہے اور درج ذیل ہندسی ہیئت کہلاتا ہے

$$\gamma_n(t) \equiv \int_0^t \langle\psi_n(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t')\rangle\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۴۰}$$

چونکہ اب ہیملٹنی میں کوئی ایسا مقدار معلوم $R(t)$ پایا جاتا ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا $\psi_n(t)$ وقت $t$ کا تابع ہو گا سوال 1.10 میں پھیلتے ہوئے چوکور کنویں کی چوڑائی $R(t)$ ہو گی یوں درج ذیل ہو گا

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = \frac{\partial\psi_n}{\partial \boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۱}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle\psi_n|\frac{\partial\psi_n}{\partial R}\rangle\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = i\int_{R_i}^{R_f}\langle\psi_n|\frac{\partial\psi_n}{\partial R}\,\mathrm{d}R \tag{۱۰.۴۲}$$

جہاں $R_i$ اور $R_f$ مقدار معلوم $R_t$ کے بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی بالخصوص اگر کچھ دیر $T$ بعد ہیملٹنی واپس اپنی ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہٰذا $\gamma_n(T) = 0$ ہو گا جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں ہے

میں نے مساوات 41.10 میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو فرض کریں $N$ عدد مقدار معلوم $R_1(t)$ ، $R_2(t)$ ، . . . ، $R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں تب درج ذیل ہوگا

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = \frac{\partial\psi_n}{\partial R_1}\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi_n}{\partial R_2}\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial\psi_n}{\partial R_N}\frac{\mathrm{d}R_N}{\mathrm{d}t} = (\nabla_R\psi_n)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{۱۰.۴۳}$$

جہاں $\boldsymbol{R} \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ ہے اور $\nabla_R$ ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$\gamma_n(t) = i\int_{\boldsymbol{R}_i}^{\boldsymbol{R}_f} \langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۴}$$

اور اگر وقت $T$ کے بعد ہیملٹنی واپس اپنی اصل روپ اختیار کرتا ہوں تب کل ہندسی ہیّتی تبدیلی درج ذیل ہوگی

$$\gamma_n(T) = i\oint\langle\psi_n|\nabla_R\psi_n\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{۱۰.۴۵}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں ایک بند راہ پر لکیری تکمل ہے جو عموماً غیر صفر ہوگا مساوات 45.10 کو پہلی مرتبہ 1984 میں میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ ہیّت بیری کہلاتا ہے دھیان رہے ہیں کہ جب تک تبدیلی اتنی آہستہ ہو کہ قیاس حرارت ناگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نا کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر اس کے برعکس مجموعی حرکتی ہیّت

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(t')\,\mathrm{d}t'$$

گزرے ہوئے وقت کا تابع ہوگا

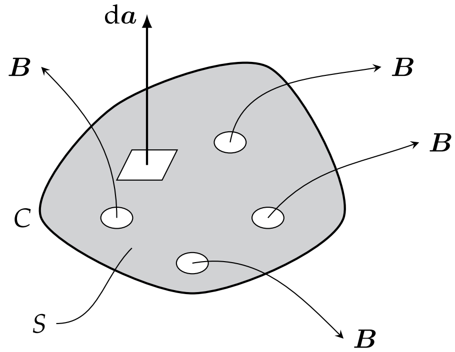
ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کا ہیّت کچھ بھی ہو سکتا ہے اور طبعی مقداروں میں جہاں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے ہیّتی جزو ضرب کٹ جاتا ہے اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندسی ہیّت کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی ہے آخر $\psi_n(t)$ کا ہیّت بھی اختیاری ہے یہ جناب بیری کی دور اندیشی ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو کسی بند دائرے پر لے جاتے ہوئے واپس اپنی اصل روپ میں لانے سے ابتدائی اور اختتامی ہیّت کے بیچ فاصلہ غیر اختیاری ہوگا جسے حقیقتاً ناپا جا سکتا ہے مثال کے طور پر زراعت جو تمام حال $\Psi$ میں ہوں کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے صرف ایک حصے کو حرارت نہ گزر تبدیل ہوتے مخفیہ سے گزارا جاتا ہے دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے مجموعی تفاعل موج درج ذیل روپ کا حاصل ہوگا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \tag{۱۰.۴۶}$$

جہاں سیدھی پہنچتی شعاع کا تفاعل موج $\Psi_0$ ہے اور متغیر $H$ کی بنا پر شعاع کا اضافی ہیّت $\Gamma$ ہے جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ حصہ ہندسی ہوگا اس صورت میں درج ذیل ہوگا

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4}|\Psi_0|^2\left(1+e^{i\Gamma}\right)\left(1+e^{-i\Gamma}\right) \tag{۱۰.۴۷}$$

$$= \frac{1}{2}|\Psi_0|^2(1+\cos\Gamma) = |\Psi_0|^2\cos^2(\Gamma/2) \tag{۱۰.۴۸}$$




شکل ۱۰.۸: بند منحنی $C$ کے بیچ سطح $S$ سے گزرتا مقناطیسی بہاو۔

یوں تعمیلی مداخلت اور تباہ کن مداخلت نکات جہاں $\Gamma$ کی قیمت $\pi$ کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی کو دیکھ کر ہم $\Gamma$ کی پیمائش کر سکتے ہیں بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی ہر کی ہیئت کی موجودگی میں ہندسی ہیئت نظر نہیں آئے گی لیکن انہیں علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے تین آبادی مقدار معلوم فضا $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)$ کی صورت میں کلیاں بیری مساوات 45.10 سمتی مخفیہ $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں مقناطیسی بہاؤ کہ کلیہ کا یاد دلاتی ہے سطح $S$ جس کی سرحد منحنی $C$ ہو سے درج ذیل بہاؤ گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۴۹}$$

مقناطیسی میدان کو سمتی مخفیہ کی روپ میں $(\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A})$ لکھ کر مسئلہ سٹوکس کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۱۰.۵۰}$$

یوں مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے مقناطیسی میدان کے بہاؤ

$$\text{“}\boldsymbol{B}\text{”} = i\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \tag{۱۰.۵۱}$$

کو ہیئت بیری تصور کیا جا سکتا ہے دوسرے لفظوں میں تین آبادی صورت میں ہیئت بیری کو ایک سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۵۲}$$

مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جا سکتا ہے تاہم ہماری استعمال کے نقطہ نظر سے مساوات 51.10 محض $\gamma_n(T)$ کو لکھنے کا دوسرا انداز ہے

سوال ۱۰.۳:

ا. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی $w_1$ سے بھڑ کر $w_2$ ہونے کی صورت میں مساوات 42.10 استعمال کرتے ہوئے ہندسی تبدیلی ہیئت تلاش کریں

ب. اگر وسعت مستقل شرح $(\mathrm{d}w/\,\mathrm{d}t = v)$ سے بڑھے تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہو گی

ج. اب اگر چوڑائی کم ہو واپس $w_1$ ہو جاتی ہے تب اس ایک تیرے کا ہیّت بیری کیا ہو گا

سوال ۱۰.۴: ڈیلٹا تفاعل کنواں مساوات 114.2 واحد ایک مقید حال مساوات 129.2 کا حامل ہے $\alpha$ آہستہ آہستہ $\alpha_1$ سے بڑھ کر $\alpha_2$ ہوتا ہے ہندسی تبدیلی ہیئت کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح $\mathrm{d}\alpha/\,\mathrm{d}t = c$ سے رونما ہو تب ہر کی تبدیلی ہیئت کیا ہو گا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہنسی ہیّت صفر ہو گا سوال 3.10 اور 4.10 اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن قانونی طور پر بالکل جائز جزو ضربی ہیّت منسلک کریں $\psi'_n(t) \quad \equiv \quad e^{i\Phi_n}\psi_n(t)$ جہاں $\Phi_n(\boldsymbol{R})$ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقیناً آپ غیر صفر ہندسی ہیت حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات 23.10 میں پر کرنے سے کیا ہو گا اور بند راہ پر صفر حاصل ہو گا سبق غیر صفر ہیّت بیری کی خاطر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہو گی اور دو ایسا ہیملٹنی درکار ہو گا جو غیر حقیر مخلوط امتیازی تفاعلات دیتا ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیّت بیری کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مبدا پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال 1.10 میں کیا گیا اور جس میں محور $z$ کے ساتھ ایک اٹل زاویا $\alpha$ بناتے ہوئے $\boldsymbol{B}(t)$ ایک مستقل زاویائی سمتی رفتار $\omega$ سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے حرارت نہ گزر صورت $\omega \ll \omega_1$ میں

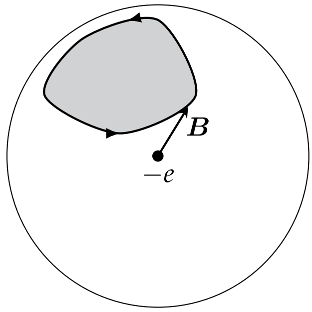
$$\lambda = \omega_1\sqrt{1 - 2\frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha + \left(\frac{w}{w_1}\right)^2} \cong \omega_1\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\cos\alpha\right) = \omega_1 - \omega\cos\alpha \tag{۱۰.۵۳}$$

ہو گا لہذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2}e^{i(\omega\cos\alpha)t/2}e^{-i\omega t/2}\chi_+(t) \\ i\left[\frac{\omega}{\omega_1}\sin\alpha\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\right]e^{+i\omega t/2}\chi_-(t) \tag{۱۰.۵۴}$$

دوسرے جزو کو $\omega/\omega_1 \quad \rightarrow \quad 0$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل ہو گا ہر کی ہیّت درج ذیل ہے

$$\theta+(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E+(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{\omega_1 t}{2} \tag{۱۰.۵۵}$$




شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ پر چلتا ہے۔

جہاں مساوات 29.10 سے $E_{+} = \hbar\omega_1/2$ ہو گا لہٰذا ہندسی ہیئت درج ذیل ہو گی

$$\gamma + (t) = (\cos\alpha - 1)\frac{\omega t}{2} \tag{۱۰.۵۶}$$

ایک مکمل پھیرا کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہو گا لہٰذا ہیئت بیری درج ذیل ہو گی

$$\gamma + (T) = \pi(\cos\alpha - 1) \tag{۱۰.۵۷}$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس $B_0 = r$ کی کرہ کی سطح پر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان $\boldsymbol{B}(t)$ کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہو گا سوال 30.4 دیکھیں

$$\chi_{+} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۵۸}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ کے دونوں کروی محدد $\theta$ اور $\pi$ وقت کے تفاعلات ہیں کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہو گا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$\nabla\chi_{+} = \frac{\partial\chi_{+}}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_{+}}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi_{+}}{\partial\phi}\hat{\phi} \tag{۱۰.۵۹}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -(1/2)\sin(\theta/2) \\ (1/2)e^{i\phi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}\hat{\phi} \tag{۱۰.۶۰}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{2r}\Big[-\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta}+\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\hat{\theta}+2i\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta}\hat{\phi}\Big] \tag{۱۰.۶۱}$$

$$= i\frac{\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}p\hat{h}i \tag{۱۰.۶۲}$$

مساوات 51.10 کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہو گی

$$\nabla\times\langle\chi_+|\nabla\chi_+\rangle = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\sin\theta\Big(\frac{i\sin^2(\theta/2)}{r\sin\theta}\Big)\Big]\hat{r} = \frac{i}{2r^2}\hat{r} \tag{۱۰.۶۳}$$

یوں مساوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{۱۰.۶۴}$$

تکمل فترہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو $\boldsymbol{B}$ کی چھوٹی ایک پیرا میں گرتا ہو لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = r^2\,\mathrm{d}\Omega\hat{r}$ ہو گا جس کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{2}\Omega \tag{۱۰.۶۵}$$

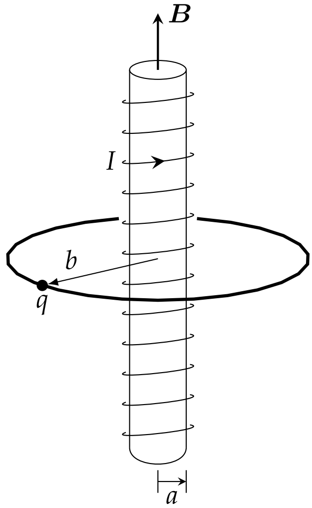
جہاں مبدہ پر ٹھوس زاویا $\Omega$ ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلا رگڑ رقاص کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حرارت نہ گزر طریقے سے لے جانے سے کل ہندسی تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویا کی منفی منفی بادا ہو گا مساوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مساوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے $\square$

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مساوات 62.10 کا مماثل حاصل کریں جواب $-\Omega$ ایک ذرہ جس کا چکر $s$ ہو کے لیے نتیجہ $-s\Omega$

### ۱۰.۲.۳ اہارونووبوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبعی مقداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ $\varphi$ اور $\boldsymbol{A}$ بلاواسطہ ناقابل پیمائش ہیں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{۱۰.۶۶}$$




شکل ۱۰.۱۰: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمبا پیچواں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

میکسول مساوات اور قاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیا کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ مرتب کرنے کے لیے کار آمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیات کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda \tag{۱۰.۶۷}$$

جہاں $\Lambda$ مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبادلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں ہو گا کوانٹم میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو $\varphi$ اور $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں ناکہ $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\varphi \tag{۱۰.۶۸}$$

بہر حال زیر ماپ تبادلہ یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبہ عرصہ کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سمتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرا کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہو گا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد اہارونو و بوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق ہیئت بیری کے ساتھ پیش کروں گا۔

فرض کریں ایک ذرا کو رداس $b$ کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $a < b$ کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو $I$ ہے (شکل ۱۰.۱۰) بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے

اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا یقیناً موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi}, \quad (r > a) \tag{۱۰.۶۹}$$

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہاؤ ہوگا ساتھ ہی لچھا خود غیر باردار ہے لہٰذا غیر سمتی مخفیہ $\varphi$ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$H = \frac{1}{2m}[-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2i\hbar q\boldsymbol{A}\cdot\nabla] \tag{۱۰.۷۰}$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ اسمت $\phi(\theta = \pi/2, r = b)$ پر منحصر ہے لہٰذا $\nabla \to (p\hat{h}i/b)(\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\phi)$ ہوگا اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$\frac{1}{2m}\Big[-\frac{\hbar^2}{b^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} + \Big(\frac{q\Phi}{2\pi b}\Big)^2 + i\frac{hq\Phi}{\pi b^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\Big]\psi(\phi) = E\psi(\phi) \tag{۱۰.۷۱}$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\phi^2} - 2i\beta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi} + \epsilon\psi = 0 \tag{۱۰.۷۲}$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \qquad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2 \tag{۱۰.۷۳}$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi} \tag{۱۰.۷۴}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} \tag{۱۰.۷۵}$$

نقطہ $\phi = 2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا پر $\lambda$ عدد صحیح

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} = n \tag{۱۰.۷۶}$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\Big(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\Big)^2, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots) \tag{۱۰.۷۷}$$

لچھا دائرے پر ذرا کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت $n$ جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرا کو ظاہر کرتا ہے $q$ مثبت لیتے ہوئے منفی $n$ کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرا کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ اجازتی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرا پایا جاتا ہے میدان صفر ہے زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر فرض کریں ایک زرا ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ ہے لہٰذا $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہوگا تاہم $\boldsymbol{A}$ خود غیر صفر ہے اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ $\boldsymbol{A}$ ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیا کے لئے عمومیت دی جا سکتی ہے مخفی توانائی $V$ جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی شروڈنگر مساوات

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 + V\right]\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{۱۰.۷۸}$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جا سکتی ہے

$$\Psi = e^{ig}\Psi' \tag{۱۰.۷۹}$$

جہاں $g(\boldsymbol{r})$ درج ذیل ہے

$$g(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\mathcal{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{۱۰.۸۰}$$

اور $\mathcal{O}$ کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت بامعنی ہو گی جب پورا خطہ میں $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل $\mathcal{O}$ سے $\boldsymbol{r}$ تک راہ پر منحصر ہوگا اور یوں $\boldsymbol{r}$ کا تفاعل نہیں ہوگا $\Psi'$ کی صورت میں $\Psi$ کا ڈھلوان درج ذیل ہو گا

$$\nabla\Psi = e^{ig}(i\nabla g)\Psi' + e^{\nabla\Psi'}$$

لیکن $\nabla g = (q/\hbar)\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے لہٰذا

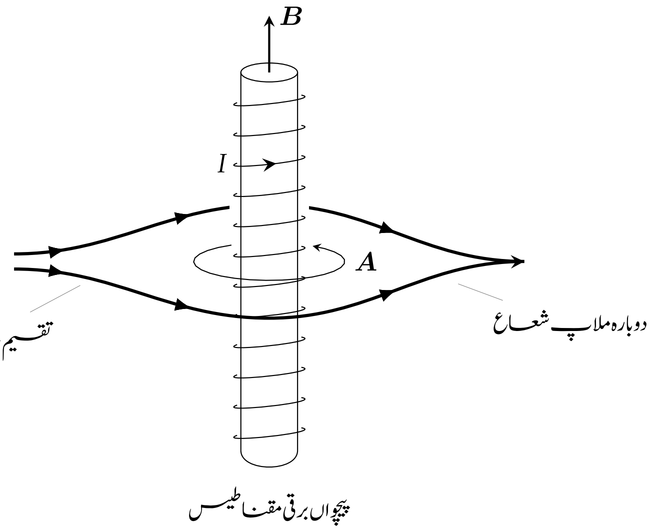
$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)\Psi = \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' \tag{۱۰.۸۱}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2\Psi = -\hbar^2 e^{ig}\nabla^2\Psi' \tag{۱۰.۸۲}$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی $e^{ig}$ کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial \Psi'}{\partial t} \tag{۱۰.۸۳}$$




شکل ۱۰.۱۱: اہارانو و بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پیچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

بظاہر $\Psi'$ بغیر $\boldsymbol{A}$ شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سمتی مخفیہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا حقیر سا کام ہو گا: ہمیں صرف ہیئتی جزو ضربی $e^{ig}$ ساتھ منسلک کرنا ہو گا۔

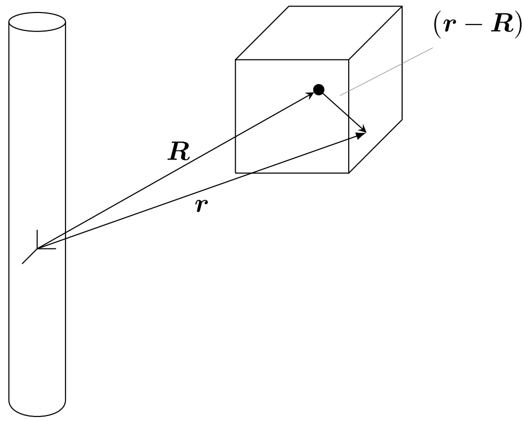
عہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱) ان شعاعوں کو لمبے لچھا سے اتنا دور رکھا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = 0$ ہو تاہم $\boldsymbol{A}$ جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہو گا اور دونوں اطراف $V$ کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں ہیئتی فرق پایا جائے گا

$$g = \frac{q}{\hbar}\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}\int \left(\frac{1}{r}\hat{\phi}\right)\cdot(r\hat{\phi}\,\mathrm{d}\phi) = \pm\frac{q\Phi}{2\hbar} \tag{۱۰.۸۴}$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہو گی جو لمبے لچھے میں $\boldsymbol{A}$ کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ ہیئتی فرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہو گا جس سے ان کی راہ گھیرتے ہیں

$$\text{ہیئتی فرق} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۸۵}$$

اس ہیئتی یتقل سے قابل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کر چکے ہیں اہارنو و بوہم اثر کو ہندسی ہیئت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے فرض کریں مخفیہ $V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$




شکل ۱۲.۱۰: مخفیہ $V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$ ایک ذرہ کو ڈبہ میں مقید کیے ہوئے ہے۔

ایک بار دار ذرا کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبے کا مرکز لمبے لچھے سے باہر نقطہ $\boldsymbol{R}$ پر ہے؛ شکل ۱۲.۱۰ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پیرا دینگے لہذا $\boldsymbol{R}$ وقت کا تفاعل ہو گا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]^2 + V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right\}\psi_n = E_n\psi_n \tag{۱۰.۸۶}$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا جانتے ہیں ہم

$$\psi_n = e^{ig}\psi_n' \tag{۱۰.۸۷}$$

لیتے ہے جہاں درج ذیل ہو گا

$$g \equiv \frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{r}') \tag{۱۰.۸۸}$$

اور $\psi'$ اسی امتیازی قدر مساوات کو صرف اس صورت مطمئن کرے گا جب $\boldsymbol{A}\to 0$ ہو

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right]\psi' = E_n\psi_n' \tag{۱۰.۸۹}$$

آپ نے دیکھا کہ $\psi_n'$ ہٹاؤ $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}$ کا تفاعل ہے نہ کہ $\psi_n$ کی طرح علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{R}$ کا تفاعل آیئے اب اس ڈبہ کو لمبے لچھے کے گرد ایک پیرا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حرارت نہ گزر ہونے کے بھی

ضرورت نہیں ہے ہیت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$ کی قیمت درکار ہو گی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})] = -\frac{q}{\hbar} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) e^{ig} \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle \\ &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})]^* e^{ig} \Big[ -i\frac{q}{\hbar} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) + \nabla_R \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) \Big] \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \\ &= -i\frac{q}{\hbar} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) - \int [\psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})]^* \nabla \psi'_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{۱۰.۹۰}$$

بغیر زیر نوشت $\nabla$ $\boldsymbol{r}$ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$ کے تفاعل پر عمل کے دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری تکمل ہیملٹنی $-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V$ کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب $i/\hbar$ ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہو گا یوں درج ذیل ہو گا

$$\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i\frac{q}{\hbar} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \tag{۱۰.۹۱}$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہو گا

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{q\Phi}{\hbar} \tag{۱۰.۹۲}$$

جو اہارونووبوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونووبوہم اثر ہندسی ہیت کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونووبوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جا سکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے $\boldsymbol{A}$ خود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا بہاؤ پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گیج غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

ا. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامتناہی چوکور کنویں وقفہ $0 \le x \le a$ کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے قریب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t)\delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں $f(t)$ آہستہ آہستہ صفر سے $\infty$ تک بڑھتا ہے مسئلہ حرارت نہ گزر کے تحت یہ ذرا ارتقائی ہیملٹن کے زمینی حال میں ہی رہے گا

ا. وقت $t \to \infty$ پر زمینی حال کا خاکہ بنائیں اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہو گا جس میں $a/2 + \epsilon$ پر ناقابل گزر رکاوٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرا بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصے میں رہنے کا پابند ہو گا

ب. وقت $t$ پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

جہاں $z \equiv ka$ $T \equiv maf(t)/\hbar^2$ $\delta \equiv 2\epsilon/a$ اور $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہیں

ج. اب $\delta = 0$ لیتے ہوئے $z$ کے لیے ترسیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ $T$ کی قیمت $0$ تا $\infty$ ہونے سے $z$ کی قیمت $\pi$ تا $2\pi$ ہو گی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب $\delta = 0.01$ لیتے ہوئے $T = 0, 1, 5, 20, 100$ اور $1000$ کے لیے $z$ اعدادی طریقہ سے حاصل کریں

ھ. کنویں کے دائیں نصف حصے میں ذرہ پائے جانے کا احتمال بطور $z$ اور $\delta$ کا تفاعل تلاش کریں جواب $P_r = 1/[1 + (I_+/I_-)]$ جہاں $I_\pm \equiv [1 \pm \delta - (1/z)\sin(z(1 \pm \delta))]\sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$ ہو گا جز و(د) میں دیے گئے $T$ کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و. $T$ اور $\delta$ کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تفاعل موج ترسیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصے میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بودی ہارمونی مرتعش کمیت $m$ تعدد $\omega$ پر $F(t) = m\omega^2 f(t)$ جہاں $f(t)$ کوئی مخصوص الفاعل ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے $m\omega^2$ کو صریحاً لکھا ہے یوں $f(t)$ کا بعد فاصلہ ہو گا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t) \tag{۱۰.۹۳}$$

فرض کریں وقت $t = 0$ پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہٰذا $t \leq 0$ پر $f(t) = 0$ ہو گا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹم میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جا سکتا ہے

ا. اگر مرتعش مبدا پر ساکن حال $x_c(0) = \dot{x}_c(0) = 0$ سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہو گا جواب

$$x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')]\, \mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۴}$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش $n$ وی حال $\psi_n(x)$ جہاں $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$ مساوات 61.2 دیتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کے حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c)e^{\frac{i}{\hbar}\left[-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega t + m\dot{x}_c(x - \frac{x_c}{2}) + \frac{m\omega^2}{2}\int_0^t f(t')x_c(t')x_c(t')\,\mathrm{d}t'\right]} \tag{۱۰.۹۵}$$

ج. دکھائے کہ $H(t)$ کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار درج ذیل ہونگے

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x-f); \quad E_n(t) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2 f^2 \tag{۱۰.۹۶}$$

د. دکھائیں کہ حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے $x_c(t) \cong f(t)$ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرارت نہ گزر تفاعل $f$ کہ وقتی تفرق پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ $\sin[\omega(t-t')]$ کو $(1/\omega)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t')\cos[\omega(t-t')]$ لکھ کر تکمل بل حصص استعمال کریں

ھ. اس مثال کے لیے مسئلہ حرارت نہ گزر کی تصدیق جزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$\Psi(x,t) \cong \psi_n(x,t)e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)} \tag{۱۰.۹۷}$$

تصدیق کیجئے گا کہ ہر کی ہیت کا روپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندسی ہیت آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرارت نہ گزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر $c_m(t)$ کے حرارت نہ گزر تسلسل کا پہلا جزو تصور کیا جا سکتا ہے فرض کریں نظام $n$ وی حال سے آغاز کرتا ہے حرارت نہ گزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندسی ہیتی جزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ $n$ وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn}e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرارت نہ گزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle\psi_m(t')|\frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t')\rangle e^{i\gamma_n(t')}e^{i(\theta_n(t')-\theta_m(t'))}\,\mathrm{d}t' \tag{۱۰.۹۸}$$

اس سے ہم قریب حرارت نہ گزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب. ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری مرتعش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کے قریب حرارت نہ گزر تخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہو گا میں تحویل ممکن ہو گی

$$c_{n+1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t \dot{f}(t')e^{i\omega t'}\,\mathrm{d}t'$$
$$c_{n-1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t \dot{f}(t')e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}t'$$

یقیناً تحویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

# باب ۱۱

# بکھراو

## ۱۱.۱ تعارف

### ۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو

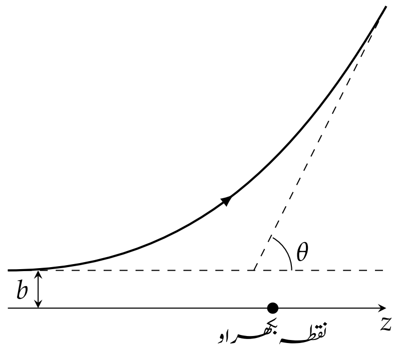
فرض کریں کسی مرکز بکھراو پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر داغا جاتا ہے جس کی توانائی $E$ اور ٹکراو مقدار معلوم $b$ کے ساتھ آکر کسی زاویائی بکھراو $\theta$ پر اُبھرتا ہے؛ شکل ۱.۱۱ دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لیئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے یوں خطِ حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لحاظہ تصادم کی بنا پر اس کی حرکت اُچھلنے کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراو کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراو مقدار معلوم کو جانتے ہوئے زاویائی بکھراو کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراو مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراو اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱.۱۱: **سخت کرہ کا بکھراو۔** فرض کریں ہدف رداس $R$ کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی بندوق کا ایک چھرہ ہے جو لچکیلی ٹپکی کھا کر مڑتا ہے (شکل ۲.۱۱)۔ زاویہ $\alpha$ کی صورت میں ٹکراو مقدار معلوم $b = R\sin\alpha$ اور زاویہ بکھراو $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

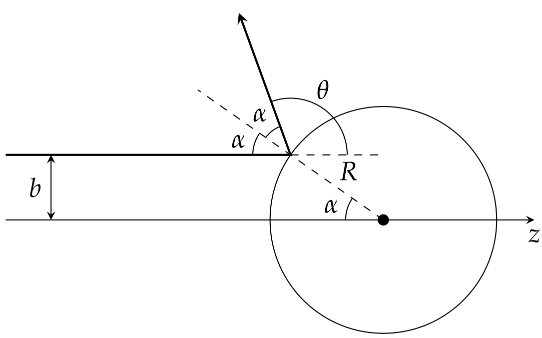
$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۱}$$

ظاہری طور پر درج ذیل ہوگا

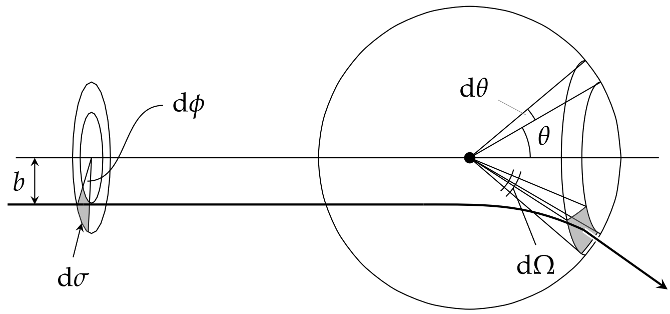
$$\theta = \begin{cases} 2\cos^{-1}(b/R), & b \leq R \text{ اگر} \\ 0, & b \geq R \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$




شکل ۱.۱۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراو، جس میں ٹکراو مقدار معلوم $b$ اور زاویہ بکھراو $\theta$ کی وضاحت کی گئی ہے۔




شکل ۲.۱۱: سخت کرہ سے لچکدار بکھراو۔




شکل ۱۱.۳: رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ بڑی $\mathrm{d}\sigma$ کی صورت میں $\mathrm{d}\Omega$ بھی بڑا ہو گا تناسبی جز ضربی $D(\theta) \equiv \mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}\Omega$ کو تفرقی بکھراو عمودی تراش کہتے ہیں

$$\mathrm{d}\sigma = D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۳}$$

ٹکراو مقدار معلوم اور اسمتی زاویہ $\phi$ کی صورت میں $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہوں گے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{۱۱.۴}$$

چونکہ عمومی طور پر $\theta$ مقدار معلوم $b$ کا گھٹتا ہوا تفاعل ہو گا لحاظہ یہ تفرق در حقیقت منفی ہو گا اسی لیئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال ۱۱.۲: **سخت کرہ کے بکھراو کی مثال جاری رکھتے ہیں۔** سخت کرہ بکھراو مثال 11.1 کی صورت میں

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۵}$$

لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{۱۱.۶}$$

اس مثال میں تفرقی عمودی تراش $\theta$ کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔ □

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا تکمل ہو گا

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۷}$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہو گا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراو کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\sigma = (R^2/4)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2 \tag{۱۱.۸}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً مرکزہ کا کولمب میدان کے لیے بھی کار آمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہو گا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد} \tag{۱۱.۹}$$

فی اکائی وقت رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھراو والے ذرات کی تعداد $\mathrm{d}N = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$ ہو گی لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{۱۱.۱۰}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں با آسانی ناپا جا سکتا ہو لحاظہ اس کو عموماً تفریقی عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو $\mathrm{d}\Omega$ سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۱: **ردرفورڈ بکھراو۔** بار $q_1$ اور حرکی توانائی $E$ کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار $q_2$ ہو سے بکھرتا ہے۔

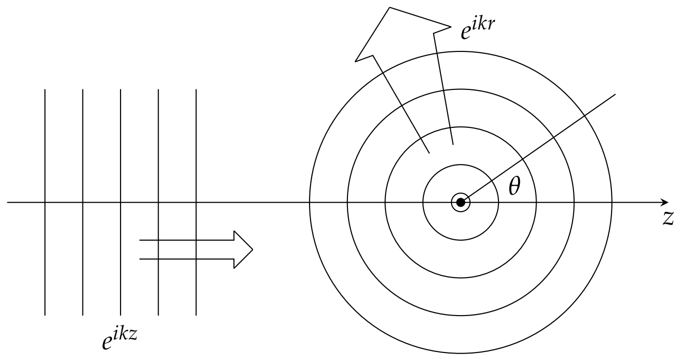
(الف) ٹکراو مقدار معلوم اور زاویہ بکھراو کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

جواب: $b = (q_1 q_2/8\pi\epsilon_0 E)\cot(\theta/2)$

(ب) تفریقی بکھراو عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۱۱}$$




شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراو؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروی موج پیدا کرتی ہے۔

(ج) دیکھائیں کہ ردر فورڈ بکھراو کا کل عمودی تراش لامتناہی ہوگا۔ ہم کہتے ہیں $1/r$ مخفیہ لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

### ۱۱.۱.۲ کوانٹم نظریہ بکھراو

بکھراو کے کوانٹم نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور $z$ رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراو مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۴)۔ یعنی ہم مساوات شروڈنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

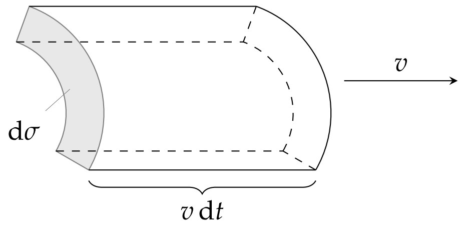
$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \qquad \text{بڑے } r \text{ کے لیے} \tag{۱۱.۱۲}$$

کروی موج میں جز ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے خاطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ عدد موج $k$ کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہوگا

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۱۱.۱۳}$$

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروی موج کا حیطہ $f$ متغیرات $\phi$ اور $\theta$ کا تابع ہوگا۔

ہمیں حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تعین کران ہوگا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ $\theta$ میں بکھراو کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفرقی عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً سمتی رفتار $v$ پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت $\mathrm{d}t$ میں لامتناہی چھوٹی




شکل ۱۱.۵: وقت $\mathrm{d}t$ کے دوران رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم $\mathrm{d}V$ ہے۔

رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{آمدی}}\right|^2 \mathrm{d}V = |A|^2\,(v\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھاو کا احتمال

$$\mathrm{d}P = \left|\psi_{\text{بکھراو}}\right|^2 \mathrm{d}V = \frac{|A|^2|f|^2}{r^2}(v\,\mathrm{d}t)r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

بھی یہی ہوگا لحاظہ $\mathrm{d}\sigma = \left|f\right|^2 \mathrm{d}\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$D(\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{۱۱.۱۴}$$

ظاہر ہے کہ تفرقی عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے حیطہ بکھراو جو مساوات شروڈنگر کے حل سے حاصل ہوگا کی مطلق مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم حیطہ بکھراو کی حساب کے دو ترکیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تخمین پر غور کریں گے۔

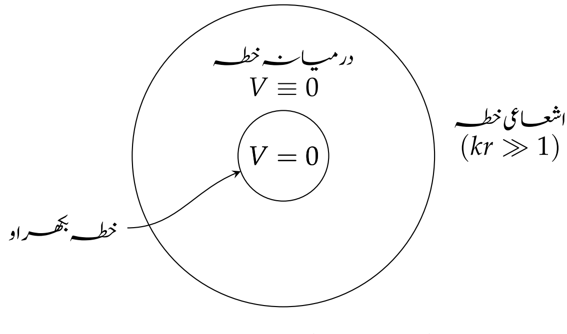
سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراو کے لیئے مساوات 11.12 کے مماثل تیار کریں۔

## ۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

### ۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لیئے مساوات شروڈنگر قابلِ علیحدگی حلوں

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{۱۱.۱۵}$$




شکل ۱۱.۶: مقامی مخفیہ سے بکھراو؛ خطہ بکھراو، درمیانہ خطہ، اور اشعاعی خطہ۔

کا حاصل ہوگا جہاں $Y_l^m$ کروی ہارمونی مساوات 4.32 ہے اور $u(r) = rR(r)$ ردای مساوات مساوات 4.37

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+\left[V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=Eu \tag{۱۱.۱۶}$$

کو متعین کرتا ہے۔ بہت بڑی $r$ کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابلِ نظرانداز ہوگا۔ لحاظہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} \approx -k^2u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جز رخصتی کروی موج کو اور دوسرا جز آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لیئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی $r$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جب ہم گزشتہ حصہ میں طبیعی وجوہات سے اخذ کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی $r$ کے لیئے تھا یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $kr >> 1$ کے لیئے تھا جسی بصریات میں خطہ اشاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مکامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی متناہی بکھراؤ خطہ کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانی خطہ میں جہاں $V$ کو رد کیا جا سکتا ہے لیکن مرکز گریز جز کو نظرانداز نہیں کیا جا سکتا ردای مساوات درج ذیل روپ اختیار

کرتی ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = -k^2u \tag{۱۱.۱۷}$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروی بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ ہو گا

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr) \tag{۱۱.۱۸}$$

لیکن نہ ہی $j_l$ جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی $n_l$ جو متعمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں $e^{ikr}$ اور $e^{-ikr}$ طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروی ہینکل تفاعلات کہتے ہیں

$$h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + in_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - in_l(x) \tag{۱۱.۱۹}$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروی ہینکل تفاعلات پیش کیئے گئے ہیں۔ بڑی $r$ کی صورت میں $h_l^{(1)}(kr)$ جسے

جدول ۱۱.۱: کروی ہینکل تفاعلات $h_l^{(1)}(x)$ اور $h_l^{(2)}(x)$

| | |
|---|---|
| $h_0^{(1)} = -i\frac{e^{ix}}{x}$ | $h_0^{(2)} = i\frac{e^{-ix}}{x}$ |
| $h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{ix}$ | $h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-ix}$ |
| $h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{ix}$ | $h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{-ix}$ |
| $\left.\begin{matrix} h_l^{(1)} \to \frac{1}{x}(-i)^{l+1}e^{ix} \\ h_2^{(2)} \to \frac{1}{x}(i)^{l+1}e^{-ix} \end{matrix}\right\} x >> 1$ کے لیئے | |

ہینکل تفاعک کا پہلا قسم کہتے ہیں $e^{ikr}/r$ کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_l^{(2)}(kr)$ ہینکل تفاعل کی دوسری قسم $e^{-ikr}/r$ کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ یوں رخصتی امواج کے لیئے ہمیں کروی ہینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہو گی:

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr) \tag{۱۱.۲۰}$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہو گا بلکل ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left\{e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m}h_l^{(1)}(kr)Y_l^m(\theta,\phi)\right\} \tag{۱۱.۲۱}$$

اس کا پہلا جز آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروی تشاکلی ہے لحاظہ تفاعل موج $\phi$ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یاد رہے $Y_l^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درج ذیل ہو گا

$$Y_l^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۲}$$

جہاں $l$ ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_l$ کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر $C_{l,0} \equiv i^{l+1}k\sqrt{4\pi(2l+1)}a_l$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$\psi(r,\theta) = A\left\{e^{ikz} + k\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)a_l h_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\theta)\right\} \tag{۱۱.۲۳}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامتیت کیوں بہتر ہے $a_l$ کو $l$ واں حیطہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی $r$ کی صورت میں ہینکل تفاعل $(-i)^{l+1}e^{ikr}/kr$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{(ikr)}}{r}\right\} \tag{۱۱.۲۴}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۵}$$

یہ مساوات 11.12 میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دیکھاتا ہے کہ جزوی موج حیطوں $a_l$ کی صورت میں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہوگا تفریقی عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$D(\theta) = \left|f(\theta)\right|^2 = \sum_{l}\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)a_l^* a_{l'} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۶}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$\sigma = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|a_l|^2 \tag{۱۱.۲۷}$$

زاویائی تکمل کو حل کرنے کے لیئے میں نے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

### ۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لیئے جزوی موج حیطوں $a_l$ کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ مشلا صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لیئے کروی محدد جبکہ آمدی موج کے لیئے کارتیسی محدد استعمال کیئے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کو $e^{ikz}$ مطمعن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیشکر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\sum_{l,m}\left[A_{l,m}j_l(kr)+B_{l,m}n_l(kr)\right]Y_l^m(\theta,\phi)$$

یوں بلخصوص $e^{ikz}$ کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیئے اب مبدہ پر $e^{ikz}$ متناہی ہے لحاظہ نیومن تفاعلات کی اجازت نہیں ہو گی $r = 0$ پر $n_l(kr)$ بے قابو بڑھتے ہیں اور چونکہ $z = r\cos\theta$ میں کوئی $\phi$ نہیں پایا جاتا ہے لحاظہ صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں سریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف $r$ اور $\theta$ کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,\theta)=A\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)\left[j_l(kr)+ika_lh_l^{(1)}(kr)\right]P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۹}$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹم سخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل فرض کریں

$$V(r)=\begin{cases}\infty, & r\le a \text{ کے لیئے}\\ 0, & r>a \text{ کے لیئے}\end{cases} \tag{۱۱.۳۰}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہو گا

$$\psi(a,\theta)=0 \tag{۱۱.۳۱}$$

یوں تمام $\theta$ کے لیئے

$$\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)\left[j_l(ka)+ika_lh_l^{(1)(ka)}\right]P_l(\cos\theta)=0 \tag{۱۱.۳۲}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$a_l=i\frac{j_l(ka)}{kh_l^(1)(ka)} \tag{۱۱.۳۳}$$

بلخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}\right|^2 \tag{۱۱.۳۴}$$

یہ بلکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جا سکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدید صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی $z$ کے لیے $n_l(z)$ کی مقدار $j_l(z)$ سے بہت زیادہ ہو گی لحاظہ

$$\frac{j_l(z)}{h_l^{(1)}(z)} = \frac{j_l(z)}{j_l(z)+in_l(z)} \approx -i\frac{j_l(z)}{n_l(z)}$$

$$\approx -i\frac{2^l l! z^l/(2l+1)!}{-(2l)!z^{-l-1}/2^l l!} = \frac{i}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^2 z^{2l+1} \tag{۱۱.۳۵}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{2^l l!}{(2l)!}\right]^4 (ka)^{4l+2}$$

چونکہ ہم $1 \gg ka$ فرض کر رہے ہیں لحاظہ بلند طاقتیں قابلِ نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $l = 0$ جز بکھراؤ میں غالب ہو گا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لیے تفرقی عمودی تراش $\theta$ کا تابع نہیں ہو گا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \tag{۱۱.۳۶}$$

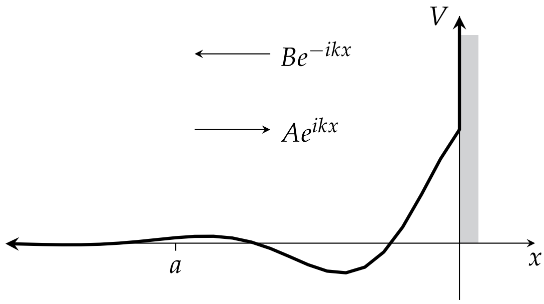
حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت جومیٹرائی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ در حقیقت $\sigma$ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طولِ موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہو گا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُپر سے گزرتے ہیں نا کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیژانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دیکھائیں کہ $l$ کی مختلف قیمتوں والے عددی سر لاظماً صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha\delta(r-a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کیصور پر غور کریں جہاں $\alpha$ اور $a$ مستقلات ہیں۔ حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ تفرقی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش $\sigma$ کا حساب کریں۔ ان میں $1 \gg ka$ فرض کریں لحاظہ صرف $l = 0$ جز




شکل ۱۱.۷: مقامی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامتناہی دیوار پائی جاتی ہے، سے یک بعدی بکھراو۔

خاطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $0 \neq l$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں $a_0$ تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

جواب: $\sigma = 4\pi a^2\beta^2/(1+\beta)^2$

## ۱۱.۳ پیتقلات حیط

پہلے نصف لکیر $x < 0$ پر مکامی مخفیہ $V(x)$ سے یک بُعدی بکھراو کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر اینٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۷}$$

مکمل طور پر منعکس ہوگا

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۸}$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا پر منعکد موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدہ پر آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہوگا

$$\psi_0(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad (V(x) = 0) \tag{۱۱.۳۹}$$

لحاظ $B = -A$ ہو گا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لیئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}\right) \qquad (V(x) \neq 0) \tag{۱۱.۴۰}$$

نظریہ بکھراو کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لیئے $k$ لحاظ توانائی $E = \hbar^2 k^2/2m$ کی صورت میں یتنقل حیط کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراو $(-a < x < 0)$ میں مساوات زروڈنگر کو حل کرکے مناسب سرحدی شرائط مسلط کرکے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیط $B$ کی بجائے یتنقل حیط کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیط تبدیل کرسکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج $(Ae^{ikz})$ کا $z$ رخ میں کوئی زاویائی معیارِ حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں $0 \neq m$ والا کوئی جز نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زیاویائی معیارِ حرکت $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کرتا ہے لحاظ ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی $l$ سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بلکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہو گا لحاظ $l$ ویں جزوی موج درج ذیل ہو گی مساوات 11.28

$$\psi_0^{(l)} = Ai^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۱.۴۱}$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$j_l(x) = \frac{1}{2}\left[h^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)\right] \approx \frac{1}{2x}\left[(-i)^{l+1}e^{ix} + i^{l+1}e^{-ix}\right] \quad (x \gg 1) \tag{۱۱.۴۲}$$

لحاظ بڑی $r$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\psi_0^{(l)} \approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) = 0) \tag{۱۱.۴۳}$$

چوکور کوسین میں دوسرا جز آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراو متعارف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہو گا۔ پہلا جز رخصتی موج ہے جو یتنقل حیط $\delta_l$ لیتا ہے

$$\psi^{(1)} \approx A\frac{(2l+1)}{2ikr}\left[e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^l e^{-ikr}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (V(r) \neq 0) \tag{۱۱.۴۴}$$

آپ $e^{ikz}$ میں $h_l^{(2)}$ جز کی بنا پر اس کو کروی مرتکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_l$ یتنقل حیط پایا جاتا ہے اور جو $e^{ikz}$ میں $h_l^{(1)}$ حصہ کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر اُبھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں $a_l$ کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو ینتقل حیط $\delta_l$ کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہو گا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی $r$ کی صورت میں متقاربی روپ

$$\psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[ e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right] + \frac{(2l+1)}{r} a_l e^{ikr} \right\} P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۵}$$

کا $\delta_l$ کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$a_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \tag{۱۱.۴۶}$$

اس طرح بلخصوص مساوات 11.25

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۷}$$

اور درج ذیل ہو گا مساوات 11.27

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \tag{۱۱.۴۸}$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے ینتقلات حیط کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے ینتقلی حیط زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار $a_l$ جو دو حقیقی اعدادت پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد $\delta_l$ استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت $m$ اور توانائی $E$ ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq z \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج $Ae^{ikx}$ جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika}\left[\frac{k - ik'\cot(k'a)}{k + ik'\cot(k'a)}\right] e^{-ikx}, \qquad \text{جہاں}\, k' = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیطہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لیے یتنقلات حیط $\delta$ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لیے جزوی موج حیطی انتقال $\delta_l$ کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے $S$ موج $l = 0$ جزوی موج انتقال حیط $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \to \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1}\left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)}\right], \qquad \text{جہاں}\ \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

## ۱۱.۴ بارن تخمین

### ۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ

غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi + V\psi = E\psi \tag{۱۱.۴۹}$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{۱۱.۵۰}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ \text{اور}\ Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi \tag{۱۱.۵۱}$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلم ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جز $Q$ خود $\psi$ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لیے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \tag{۱۱.۵۲}$$

ایسی صورت میں ہم $\psi$ کو بطور ایک تکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۵۳}$$

ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی شروڈنگر مساوات کو متمعن کرتا ہے

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int \Big[(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)\Big]\, Q(r_0)\, d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0) Q(r_0)\, d^3 r_0 = Q(r)\end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لیے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s \tag{۱۱.۵۴}$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Big[(\nabla^2 + k^2)e^{is\cdot r}\Big]\, g(s)\, d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$\nabla^2 e^{is\cdot r} = -s^2 e^{is\cdot r} \tag{۱۱.۵۵}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$\delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۶}$$

لحاظہ مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

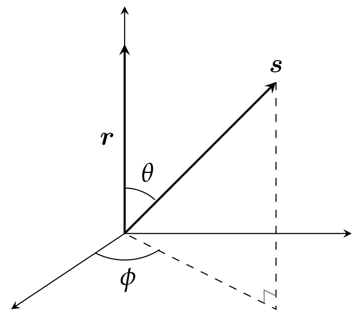
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2)e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \tag{۱۱.۵۷}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کر کے درج ذیل ملتا ہے

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۸}$$




شکل ۱۱.۸: موزوں محدد برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا تکمل۔

اب $s$ تکمل کے نقطہ نظر سے $r$ غیر متغیر ہے ہم کروی محدد $(s,\theta,\phi)$ کو یوں چنتے ہیں کہ $r$ کتبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s\cdot r = sr\cos\theta$ ہو گا متغیر $\phi$ کا تکمل $2\pi$ ہو گا جبکہ $\theta$ تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} e^{isr\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{e^{isr\cos\theta}}{isr}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\sin(sr)}{sr} \tag{۱۱.۵۹}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)}\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2-s^2}\,\mathrm{d}s \tag{۱۱.۶۰}$$

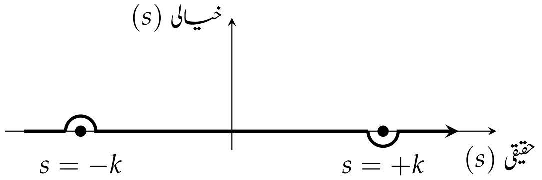
باقی تکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r}(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{۱۱.۶۱}$$

اگر $z_0$ خطِ ارتفاع کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ تکمل

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{۱۱.۶۲}$$

استعمال کرتے ہوئے ان تکملات کی قیمت تلاش کی جا سکتی ہے دیگر صورت تکمل صفر ہو گا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بلکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ تکمل لیا جا رہا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا




شکل ۱۱.۹: ارتقاعی تکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔


شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

ہوگا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دیکھاؤں گا کہ یہ تمام قابلِ قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک تکمل کے لیئے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ تکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ تکمل $I_1$ کی صورت میں اگر $s$ کا خیالی جز بہت بڑا اور مثبت ہو تب جز ضربی $e^{isr}$ صفر کو پہنچے گا اس تکمل کے لیئے ہم بالا نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ا)۔ اب خط ارتقا صرف $s=+k$ پر پائے جانے والا نادر نقطع کو گھیرتا ہے لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$I_1=\oint\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\frac{1}{s-k}\,\mathrm{d}s=2\pi i\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\Bigg|_{s=k}=i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۳}$$

تکمل $I_2$ کی صورت میں جب $s$ کا خیالی جز بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جز ضربی $e^{-isr}$ صفر کو پہنچتا ہے لحاظہ ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خطِ ارتقا $s=-k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لحاظہ اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$I_2=-\oint\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\frac{1}{s+k}\,\mathrm{d}s=-2\pi i\left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\Bigg|_{s=-k}=-i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۴}$$

ماخوذ:

$$G(r)=\frac{i}{8\pi^2 r}\left[\left(i\pi e^{ikr}\right)-\left(-i\pi e^{ikr}\right)\right]=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{۱۱.۶۵}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کی جیئے گا سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس ہلم ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0 \tag{۱۱.۶۶}$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے قریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۶۷}$$

جہاں $\psi_0$ آزاد ذرہ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0 \tag{۱۱.۶۸}$$

مساوات 11.67 شروڈنگر مساوات کی تکملی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لیئے مساوات شروڈنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر $\psi$ پایا جاتا ہے جسے جانے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراؤ مسائل کے لیئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$۔

سوال ۱۱.۹: دیکھائیں کہ $V$ اور $E$ کی مناسب قیمتوں کے لیئے مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ کو ہائڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دیہان رہے کہ $E$ منفی ہے لحاظہ $k = i\kappa$ ہو گا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہو گا۔

### ۱۱.۴.۲ بارن تخمین اوّل

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مکامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطہ کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہو گا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات

11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لیے $|r| \gg |r_0|$ ہو گا لحاظہ

$$|r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right) \tag{۱۱.۶۹}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$|r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0 \tag{۱۱.۷۰}$$

ہم

$$k \equiv k\hat{r} \tag{۱۱.۷۱}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۱.۷۲}$$

ہو گا۔ لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r - r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0} \tag{۱۱.۷۳}$$

نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \quad \cong \quad |r - r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نما میں ہمیں دوسرا جز بھی رکھنا ہو گا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نما میں دوسرے جز کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار $(r_0/r)$ کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جز کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$\psi_0(r) = Ae^{ikz} \tag{۱۱.۷۴}$$

یوں بڑی $r$ کے لیے درج ذیل ہو گا

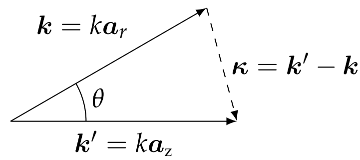
$$\psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0)\, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۵}$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراو پڑھ سکتے ہیں

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0)\, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۶}$$

یہاں تک یہ بلکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بار وہ کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمد یہ مستوی موج کو مخفیہ قابلِ ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہو گا

$$\psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik' \cdot r_0} \tag{۱۱.۷۷}$$




شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: $k'$ آمدی رخ جبکہ $k$ بکھراو رخ ہے۔

جہاں تکمل کے اندر $k'$ درج ذیل ہے

$$k' \equiv k\hat{z} \tag{۱۱.۷۸}$$

مخفیہ $V$ صفر ہونے کی صورت میں یہ بلکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہو گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k'-k)\cdot r_0} V(r_0)\, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۷۹}$$

ہو سکتا ہے کہ آپ $k'$ اور $k$ کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار $k$ ہے تاہم اوّل الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ معاخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k-k')$ منتقلی معیارِ حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خطہ بکھراو پر کم توانائی لمبی طولِ موج بکھراو کے لیے قوتِ نمائی جزِ ضربی بنیادی طور پر مستقل ہو گا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\int V(r)\, \mathrm{d}^3 r, \qquad \text{کم توانائی} \tag{۱۱.۸۰}$$

میں نے یہاں $r$ کے زیرِ نوشت میں کچھ نہیں لکھا اُمید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہو گی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراو درج ذیل مخفیہ لیں

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \le a \; \text{اگر} \\ 0, & r > a \; \text{اگر} \end{cases} \tag{۱۱.۸۱}$$

کم توانائی کی صورت میں $\theta$ اور $\phi$ کا غیر تابع حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا۔

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{۱۱.۸۲}$$

تفریقی عمودی تراش

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f\right|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۳}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۴}$$

□

ایک کروی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لیئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \tag{۱۱.۸۵}$$

$r_0$ تکمل کے قطبی محور کو $\kappa$ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos\theta_0 \tag{۱۱.۸۶}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos\theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin\theta_0 \, \mathrm{d}r_0 \, \mathrm{d}\theta_0 \, \mathrm{d}\phi_0 \tag{۱۱.۸۷}$$

متغیر $\phi_0$ کے لحاظ سے تکمل $2\pi$ دیگا اور $\theta_0$ تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں $r$ کے زیرِ نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty rV(r) \sin(\kappa r) \, \mathrm{d}r \qquad \text{کروی تشاکل} \tag{۱۱.۸۸}$$

$f$ کی زاویائی تابعیت $\kappa$ میں سموئی گئی ہے شکل ۱۱.۱۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\kappa = 2k \sin(\theta/2) \tag{۱۱.۸۹}$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراو۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بند شی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کا روپ درج ذیل ہے جہاں $\beta$ اور $\mu$ مستقلات ہیں

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۱۱.۹۰}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) \, \mathrm{d}r = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)} \tag{۱۱.۹۱}$$

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔ □

مثال ۱۱.۶: ردرفورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہو گا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراؤ درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2} \tag{۱۱.۹۲}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{۱۱.۹۳}$$

اس کا مربع ہمیں تفریقی عمودی تراش دیگا

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۹۴}$$

جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لیئے کالسیکی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹم نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لیئے نرم کرہ بکھراؤ کا حیطہ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دیکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہو گا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں تکمل کی قیمت تلاکر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

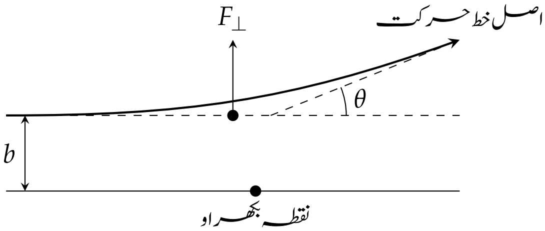
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو $E$ کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لیئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور $\sigma$ کا حساب لگائیں۔

(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لیئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دیکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔




شکل ۱۲.۱۱: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

### ۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لیئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لکیر پر ہی چلتے جاتا ہے (شکل ۱۲.۱۱)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_\perp \, \mathrm{d}t \tag{۱۱.۹۵}$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیارِ حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں $p$ آمدی معیارِ حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \tag{۱۱.۹۶}$$

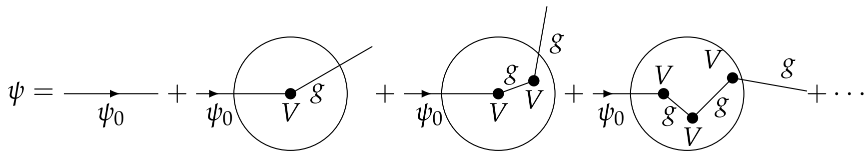
اسے ہم رتبہ اوّل تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبی کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبی تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ در حقیقت اس کی رتبہ اوّل تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبی تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) \, \mathrm{d}^3 r_0 \tag{۱۱.۹۷}$$

جہاں $\psi_0$ آمدی موج ہے

$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{۱۱.۹۸}$$




شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظریری مفہوم۔

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لیئے جز ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور $V$ مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جا سکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \tag{۱۱.۹۹}$$

فرض کریں ہم $\psi$ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے تکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \tag{۱۱.۱۰۰}$$

اس عمل کو بار بار دوہرانے سے ہمیں $\psi$ کا ایک تسلسل حاصل ہو گا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \tag{۱۱.۱۰۱}$$

ہر تکمل میں آمدی تفاعل موج $\psi_0$ کے علاوہ $gV$ کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اوّل اس تسلسل کو دوسرے جز کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبی تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبی $\psi$ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہو گا رتبی اوّل میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹم میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جز ضربی راس $V$ اور اشاعت کار $g$ کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردرفورڈ بکھراؤ کے لیئے $\theta$ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دکھائیں کہ مناسب حدوں کے اندر آپ کا نتیجہ بلکل ٹھیک ریاضی فقرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراو کے لیئے حیطہ بکھراو تلاش کریں۔

جواب: $-(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1-(4mV_0a^2/5\hbar^2)]$

سوال ۱۱.۱۶: یک بُعدی مساوات شروڈنگر کے لیے تفاعل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مماثل تکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|}V(x_0)\psi(x_0)\,\mathrm{d}x_0 \tag{۱۱.۱۰۲}$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدہ پر بغیر اینٹون کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر یک بُعدی بکھراو کے لیے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$ منتخب کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دیکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx}V(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \tag{۱۱.۱۰۳}$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل مساوات 2.114 اور ایک متناہی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراو کے لیے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو یک بُعدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بلکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ ھیطہ بکھراو کے خیالی جز اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} Im(f(0)) \tag{۱۱.۱۰۴}$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \tag{۱۱.۱۰۵}$$

# باب ۱۲

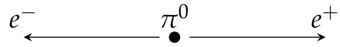
# پس نوشت

اب چونکہ مسیں توقع کرتا ہوں آپ کوانٹم میکانیات کو سمجھتے ہیں ہم حصہ 1.2 مسیں کیا گیا سوال دوبارہ اٹھاتے ہیں کوانٹم میکانیات کے نتائج سے کیا مطلب اخذ کرنا چاہیے مسئلہ کا جڑ تفاعل موج کے ساتھ وابستہ شماریاتی مفہوم کی عدم تعینیت ہے۔ تفاعل $\psi$ یا کوانٹم حال کہنا بہتر ہوگا جو مثال کے طور پر چکر کار ہو سکتا ہے صرف ممکنہ نتائج کی شماریاتی تقسیم مہیا کرتا ہے اور کسی بھی پیمائش کا نتیجہ یکتا طور پر تعین نہیں کرتا اس سے ایک اہم سوال کھڑا ہوتا ہے کیا پیمائش سے قبل نظام یہ مخصوص خاصیت حقیقتاً رکھتا تھا جسے حقیقت پسند نقطہ نظر کہتے ہیں یا پیمائش کے عامل نے اس خاصیت کو جنم دیا جو تفاعل موج کی شماریاتی پابندی کو مطمعن کرتا ہے۔ تقلید پسند نقطہ نظر یا ہم اس سوال کو ان بنیادوں پر رد کرتے ہیں کہ یہ سوال ایک فرضی سوال ہے انکاری نقطہ نظر۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے کوانٹم میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہے چونکہ کوانٹم میکانیات کی تمام فراہم کردہ معلومات یعنی اس کا تفاعل موج جانتے ہوئے آپ خواص تعین نہیں کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے ایسی صورت مسیں کوانٹم میکانیات سے باہر کوئی اور معلومات ہوگی جس کو $\psi$ کے ساتھ ملا کر طبعی حقائق کو مکمل طور پر بیان کرنا ممکن ہوگا۔

تقلید پسند نقطہ نظر اس سے بھی زیادہ سنگین سوالات کھڑے کرتا ہے چونکہ اگر پیمائشی عمل نظام کو ایک خاصیت اختیار کرنے پر مجبور کرتا ہو تب پیمائش ایک عجیب عمل ہوگا ساتھ ہی یہ جانتے ہوئے کہ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی نتیجہ دیتی ہے ہمیں ماننا ہوگا کہ پیمائشی عمل تفاعل موج کو یوں منہدم کرتا ہے جو مساوات شروڈنگر کی تجویز کردہ ارتقا کے برعکس ہے۔

ان سب کی روشنی مسیں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نسل در نسل ماہر طبعیات انکاری سوچ کے پیچھے پناہ لینے پر مجبور کیوں ہوئے اور اپنے شاگردوں کو نصیحت کرتے رہے کہ نظریہ کے تصوراتی بنیادوں پر غور و فکر کر کے اپنا وقت ضائع نہ کریں۔



شکل ۱.۱۲: آئنشٹائن، پوڈلسکی وروزن تضاد کا بوہم انداز۔ ساکن $\pi^0$ کا تنزل الیکٹران وضد الیکٹران جوڑی میں ہوتا ہے۔

## ۱.۱۲ آئنسٹائن پوڈلسکیو روزن تضاد

1935 میں آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن نے مل کر آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن تضاد پیش کیا جسکا مقصد خالصتاً نظریاتی بنیادوں پر یہ ثابت کرنا تھا کہ صرف حقیقت پسندانا نقطہ نظر درست ہو سکتا ہے۔ میں اس تضاد کی ایک سادہ روپ جو داؤد بام نے پیش کی پر تبصرہ کرتا ہوں۔ تادیلی پائے میزان کی ایک الیکٹران اور ایک پرٹون میں تحلیل پر غور کریں

$$\pi^0 \to e^- + e^+$$

ساکن پائون کی صورت میں الیکٹران اور پروٹان ایک دوسرے کے مخالف رخ جائیں گے (شکل ۱.۱۲)۔ اب چونکہ پائون کا چکر صفر ہے لحاظہ زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کے تحت یہ الیکٹران اور پوزیٹران یک تا تشکیل میں ہوں گے

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_-\downarrow_+ - \downarrow_-\uparrow_+) \qquad (۱.۱۲)$$

اگر دیکھا جائے کہ الیکٹران ہم میدان ہے تب پوزیٹران لاظماً خلافِ میدان ہوگا اور اسی طرح اگر الیکٹران خلاف میدان پایا جائے تب پوزیٹران ہم میدان ہوگا۔ کوانٹم میکانیات آپ کو یہ بتانے سے قاصر ہے کہ کس پایون تحویل میں آپ کو کونسی صورت حال ملے گی تاہم کوانٹم میکانیات یہ ضرور بتا سکتی ہے کہ ان پیمائش کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق ہوگا اور اوسطاً نصف وقت ایک قسم اور نصف وقت دوسری قسم کی جوڑیاں پیدا ہوں گے۔ اب فرض کریں ہم ان الیکٹران اور پوزیٹران کو ایک عملی تجربے کے لیئے دس میٹر تک جانے دیں یا اصولاً دس نوری سال تک جانے دیں اور اس کے بعد الیکٹران کے چکر کی پیمائش کریں۔ فرض کریں آپ کو ہم میدان ملتا ہے۔ آپ فوراً جان پائیں گے کہ بیس میٹر یا بیس نوری سال دور کوئی دوسرا شخص پوزیٹران کو خلاف میدان پائے گا۔

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے اس میں کوئی حیرانی کی بات نہیں ہے چونکہ انکی پیدائش کے وقت سے ہی الیکٹران حقیقتاً ہم میدان اور پوزیٹران خلاف میدان تھے ہاں کوانٹم میکانیات ان کے بارے میں جاننے سے قاصر تھا۔ تاہم تقلید پسند نقطہ نظر کے تحت پیمائش سے قبل دونوں ذرات نہ ہم میدان اور نہ ہی خلاف میدان تھے الیکٹران پر پیمائش تفاعل موج کو منہدم کرتی ہے جو فوراً بیس میٹر یا بیس نوری سال دور پوزیٹران کو خلاف میدان بناتا ہے۔ آئنسٹائن پوڈلسکی اور روزن اس قسم کے دور عمل کرنے والے عوامل میں یقین نہیں رکھتے تھے۔ یوں انہوں نے تقلید پسند نقطہ نظر کو ناقابلِ قبول قرار دیا چاہے کوانٹم میکانیات جانتا ہو یا نہ جانتا ہو الیکٹران اور ہوزیٹران لاظماً کسی مخصوص چکر کے حامل تھے۔

ان کی دلیل اس بنیادی مفروضہ پر کھڑی ہے کہ کوئی بھی اثر روشنی کی رفتار سے تیز سفر نہیں کر سکتا ہے۔ ہم اسے اصول مقامیت کہتے ہیں۔ آپ کو شبہ ہو سکتا ہے کہ تفاعل موج کی انہدام کی خبر کسی متناہی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہے۔ تاہم ایسی صورت میں زاویائی معیارِ حرکت کی بقا متعمن نہیں ہو گی چونکہ پوزیٹران تک انہدام کی خبر پہنچنے سے پہلے اگر ہم اس کے چکر کی پیمائش تو ہمیں دونوں اقسام کے چکر پچاس پچاس فیصد احتمال سے حاصل ہوں گے۔ آپ کا نظریہ جو بھی کہے تجربات کے تحت دونوں کے چکر ہر صورت ایک دوسرے کے مخلاف ہوتے ہیں۔ ظاہر ہے تفاعل موج کا انہدام یک دم ہوتا ہے۔

سوال ۱۲.۱: **یولیدہ حالات**۔ یولیدہ حالات کی ایک کلاسیکی مثال یکتا چکر تشکیل مساوات 12.1 ہے۔ اس دو ذرہ حال کو دو یک ذری حالات کا مجموعہ نہیں لکھا جا سکتا ہے لحاظہ جس کے بارے میں بات کرتے ہوئے کسی ایک ذرے کے علیحدہ حال کی بات نہیں کی جا سکتی ہے۔ آپ گمان کر سکتے ہیں کہ شائد ہماری علامتیت کی بنا پر ہے اور عین ممکن ہے کہ یک ذرہ حلات کا کوئی خطی جوڑ اس نظام کو کھول سکے درج ذیل مسئلے کا ثبوت پیش کریں۔

دو سطحی ایک نظام $\mid \psi_a\rangle$ اور $\mid \psi_b\rangle$ پر غور کریں جہاں $\langle\psi_i \mid \psi_j\rangle = \delta_{ij}$ ہو۔ مثلاً $\mid \psi_a\rangle$ ہم میدان اور $\mid \psi_b\rangle$ خلاف میدان کو ظاہر کر سکتا ہے۔ دو ذری حال

$$\alpha \mid \phi_a(1)\rangle \mid \phi_b(2)\rangle + \beta \mid \phi_b(1)\rangle \mid \phi_a(2)\rangle$$

جہاں $\alpha \neq 0$ اور $\beta \neq 0$ ہیں کو کسی بھی یک ذری حالات $\mid \psi_r\rangle$ اور $\mid \psi_s\rangle$ کا حاصل ضرب

$$\left|\psi_r(1)\right\rangle \left|\psi_s(2)\right\rangle$$

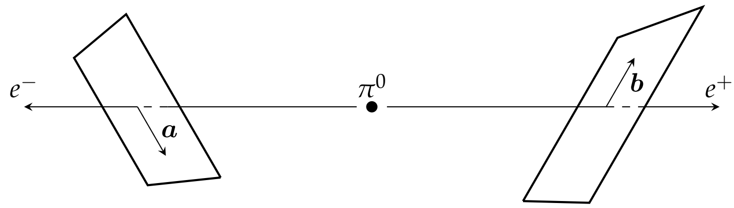
نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

اشارہ: $\mid \psi_r\rangle$ اور $\mid \psi_s\rangle$ کو $\mid \psi_a\rangle$ اور $\mid \psi_b\rangle$ کے خطی جوڑ لکھیں۔

## ۱۲.۲ مسئلہ بل

آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن کا کوانٹم میکنیات کی درستگی پر کوئی شق نہیں تھا البتہ انکا دعوہ کے طبیعی حقیقت کو بیان کرنے کے لیئے یہ ایک نہ مکمل نظریہ ہے کسی بھی نظام کا حال پوری طرح جاننے کی خاطر $\psi$ کے ساتھ ساتھ ایک اور مقدار $\lambda$ درکار ہو گی۔ چونکہ فی الحال ہم نہیں جانتے کہ $\lambda$ کو کس طرح ناپا یا حساب کے ذریعہ معلوم کیا جائے۔ لحاظہ ہم اسے درپردہ متغیر کہتے ہیں۔ تاریخی طور پر کئی درپردہ متغیر نظریات پیش کئے گئے جو پیچیدہ ہونے کے ساتھ ساتھ نامعقول ثابت ہوئے بہر حال سن 1964 تک اس پر کام کرنے کی وجہ نظر آتی تھی تاہم اس سال جناب بل نے ثابت کیا کہ درپردہ متغیر نظریہ اور کوانٹم میکانیات ساتھ ساتھ نہیں چل سکتے ہیں۔

بل نے آئنسٹائن، پڈولسکی اور روزن بوہم تجربہ کو عمومی بنانے کی بات کی الیکٹران اور پوزیٹران کا شف کو ایک ہی رخ رکھنے کی بجائے بل نے انہیں علیحدہ علیحدہ زاویوں پر رکھنے کی اجازت دی۔ پہلا کاشف اکائی سمتیہ $a$ کے رخ الیکٹران




شکل ۱۲.۲: آئنسٹائن، پوڈلسکی وروزن تضاد کا بل انداز۔ کاشف آزادانہ طور پر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ رخ سمت بند ہیں۔

چکر کا جز ناپتا ہے جبکہ دوسرا $b$ کے رخ پوزیٹران کے چکر کا حصہ ناپتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ ہم اپنی آسانی کے لیئے چکر کو $\hbar/2$ کی اکائیوں میں ناپتے ہیں یوں کاشف کے رخ ہم میدان کی قیمت $+1$ اور خلاف میدان کی قیمت $-1$ ناپی جائے گی۔ کئی $\pi^0$ تنزل کے نتائج درج ذیل جدول میں پیش کئے گئے نتائج کی طرح ہو سکتے ہیں۔ کاشف

| الیکٹران | پوزیٹران | حاصل ضرب |
|---|---|---|
| $+1$ | $-1$ | $-1$ |
| $+1$ | $+1$ | $+1$ |
| $-1$ | $+1$ | $-1$ |
| $+1$ | $-1$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $+1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

کے رخوں کی کسی ایک جوڑی کے لیئے بل نے چکر کے حاصل ضرب کی اوسط قیمت تلاش کی جسے ہم $P(a,b)$ لکھتے ہیں۔ متوازی کاشفوں کی صورت میں $b=a$ ہوگا جو ہمیں اصل آئنسٹائن وپوڈلسکی وروزن وبوہم تشکیل دیگا ایسی صورت میں ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان ہوگا لحاظہ ان کا حاصل ضرب ہر صورت $-1$ ہوگا اور یوں اوسط کی قیمت بھی یہی ہو گی

$$P(a,a)=-1 \tag{۱۲.۲}$$

اسی طرح اگر کاشف زد متوازی ہوں تب $b=-a$ اور ہر حاصل ضرب $+1$ لحاظہ درج ذیل ہوگا

$$P(a,-a)=+1 \tag{۱۲.۳}$$

اختیاری سمت بندی کے لیئے کوانٹم میکانیات درج ذیل پیش گوئی کرتی ہے

$$P(a,b)=-a\cdot b \tag{۱۲.۴}$$

سوال 4.50 دیکھیں۔ بل نے دریافت کیا کہ یہ نتیجہ کسی بھی درپردہ متغیر نظریہ کا ہم اہنگ نہیں ہو سکتا ہے۔

اس کا دلیل حیرت کن حد تک سادہ ہے فرض کریں الیکٹران پوزیٹران نظام کے مکمل حال کو کوئی درپردہ متغیر یا متغیرات $\lambda$ ظاہر کرتا ہے۔ ایک پائیون تنزل سے دوسرے پائیون تنزل تک $\lambda$ کی تبدیلی کو نہ ہم

سمجھتے اور نہ ہی قابو کرتے ہیں۔ ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ الیکٹران کی پیمائش پر پوزیٹران کاشف کی سمت بندی $b$ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے یاد رہے کہ تجربہ کرنے والا الیکٹران کی پیمائش کے بعد پوزیٹران کاشف کا رخ منتخب کر سکتا ہے۔ ایسی صورت میں چونکہ پوزیٹران کاشف کا رخ منتخب کرنے سے پہلے ہی الیکٹران کی پیمائش کی جا چکی ہو گی لحاظہ اس پر بھی کی سمت کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا ہے۔ یہ اصول مقامیت کا مفروضہ ہے یوں الیکٹران کی پیمائش کوئی تفاعل $A(a,\lambda)$ اور پوزیٹران کی پیمائش کوئی دوسرا تفاعل $B(b,\lambda)$ دیگا۔ ان تفاعلات کی قیمتیں صرف $\pm 1$ ہو سکتی ہیں

$$A(a,\lambda)=\pm 1; \qquad B(b,\lambda)=\pm 1 \tag{۱۲.۵}$$

جب کاشف متوازی ہوں تب تمام $\lambda$ کے لیئے درج ذیل ہو گا

$$A(a,\lambda)=-B(a,\lambda) \tag{۱۲.۶}$$

اب پیمائشوں کی حاصل ضرب کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی جہاں $\rho(\lambda)$ درپردہ متغیر کی کثافت احتمال ہے

$$P(a,b)=\int \rho(\lambda)A(a,\lambda)B(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۷}$$

کسی بھی کثافت کا احتمال کے لیئے یہ غیر منفی ہو گا اور معمولزنی شرط $\int \rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1$ کو متعمن کرے گا تاہم اس کے علاوہ ہم $\rho(\lambda)$ کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کرتے ہیں درپردہ متغیر کے مختلف نظریات $\rho$ کے لیئے کافی مختلف تفاعلات پیش کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.6 کو استعمال کرتے ہوئے ہم $B$ کو خارج کر سکتے ہیں۔

$$P(a,b)=-\int \rho(\lambda)A(a,\lambda)A(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۸}$$

اگر $c$ کوئی تیسرا اکائی سمتیہ ہوتب درج ذیل ہو گا

$$P(a,b)-P(a,c)=-\int \rho(\lambda)\left[A(a,\lambda)A(b,\lambda)-A(a,\lambda)A(c,\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۹}$$

اور چونکہ $[A(b,\lambda)]^2=1$ ہے لحاظہپ درج ذیل ہو گا

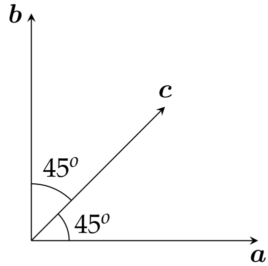
$$P(a,b)-P(a,c)=-\int \rho(\lambda)\left[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)\right]A(a,\lambda)A(b,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۱۰}$$

تاہم مساوات 12.5 کے تحت $-1 \leq [A(a,\lambda)A(b,\lambda)] \leq +1$ مزید $\rho(\lambda)[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)]\geq 0$ لحاظہ

$$\left|P(a,b)-P(a,c)\right|\leq \int \rho(\lambda)\left[1-A(b,\lambda)A(c,\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda \tag{۱۲.۱۱}$$

یا مختصراً درج ذیل ہو گا

$$\left|P(a,b)-P(a,c)\right|\leq 1+P(b,c) \tag{۱۲.۱۲}$$




شکل ۱۲.۳: کاشف کو یوں سمت بند کیا گیا ہے کہ بل عدم مساوات کی کوانٹائی خلاف ورزی ظاہر ہو۔

یہ مشہور بل عدم مساوات ہے۔ مساوات 12.5 اور 12.6 کے علاوہ کوئی شرط عائد نہیں کی گئی ہے ہم نے درپردہ متغیرات کی تعداد یا خاصیت یا تقسیم $\rho$ کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کیا لحاظہ یہ عدم مساوات ہر مکامی درپردہ متغیر نظریہ کے لیئے کارامد ہو گا۔

لیکن ہم بہت آسانی سے دیکھا سکتے ہیں کہ کوانٹم میکانیات کی پیشاً گوئی مساوات 12.4 اور بل عدم مساوات ہم اہن نہیں ہیں۔ فرض کریں تینوں اکائی سمتیات ایک مستوی میں پائے جاتے ہوں اور $a$ اور $b$ کے ساتھ $c$ کا زاویہ $45°$ ہو (شکل ۱۲.۳)۔ ایسی صورت میں کوانٹم میکانیات کہتی ہے کہ

$$P(a,b)=0, \qquad P(a,c)=P(b,c)=-0.707$$

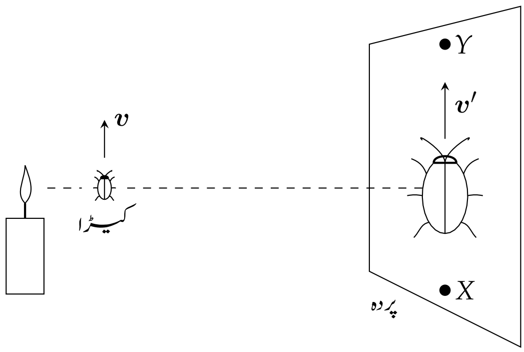
جبکہ بل عدم مساوات کہتی ہے کہ

$$0.707 \nleq 1-0.707=0.293$$

جب ایک دوسرے کے غیر ہم اہنگ نتائج ہیں یوں بل کی ترمیم سے آئنسٹائن، پڈولسکی اور روزن تضاد ایک ایسی بات ثابت کرتا ہے جو اس کے مصنفین تصور بھی نہیں کر سکتے تھے۔ اگر وہ درست ہوں تب نہ صرف کوانٹم میکانیات نامکمل ہے بلکہ یہ مکمل طور پر غلط ہے اس کے برعکس اگر کوانٹم میکانیات درست ہے تب کوئی درپردہ متغیر نظریہ ہمیں اس غیر مکامیت سے نجات نہیں دو سکتی جسے آئنسٹائن مضائقہ خیز سمجھتا تھا۔ مزید اب ہم بہت سادی تجربہ سے اس مسئلے کو دفنا سکتے ہیں۔

بل عدم مساوات کو پرکھنے کے لیئے ساٹھ اور ستر کی دیہائیوں میں کئی تجربات سرانجام دئے گئے جن میں ایسپیکٹ، گرینگیئر اور روجر کا کام قابلِ فخر ہے ہمیں یہاں انکے تجربہ کی تفصیل سے دلچسپی نہیں ہے۔ انہوں نے پائیون تمزل کی بجائے دو نوریہ جوہری انتقال استعمال کیا یہ خدشہ دور کرنے کے لیئے کہ الیکٹران کاشف کی سمت بندی کو کسی طرح پوزیٹران کاشف جان پائے گا نوریہ کی راوانگی کے بعد دونوں کی سمت بندی کی گئی۔ نتائج کوانٹم میکانیات کی پیشاً گوئی کی عین مطابق تھے اور بل عدم مساوات کے غیر ہم اہنگ تھے۔

ستم ظریفی کی بات ہے کہ کوانٹم میکانیات کی تجرباتی تصدیق نے سائنسی برادری کو ہلا کر رکھ دیا۔ لیکن اس کی وجہ حقیقت پسند سوچ کا غلط ثابت ہونا نہیں تھا عموماً سائنسدان کب کے اس حقیقت کو مان چکے تھے اور جو ابھی بھی




شکل ۱۲.۴: پردہ پر کیڑے کا سایہ، روشنی کی رفتار $c$ سے زیادہ رفتار $v'$ سے حرکت کرتا ہے بشرطیکہ پردا کافی دور ہو۔

مانتے تھے انکے لیئے غیر مکامی در پردہ متغیر نظریات کا راستہ ابھی کھلا ہے چونکہ مثلا بل اطلاق ان پر نہیں ہوتا ہے۔ اصل سدمہ اس بات کا تھا کہ قدرت خود بنیادی طور پر غیر مکامی ہے۔ تفاعل موج کی فوراً انہدام کی صورت میں غیر مکامیت یا متماثل ذرات کے لیئے ضرورت تشاکلیت ہمیشہ تقلید پسند نظریہ کی خاصیت رہی ہے۔ تاہم ایسپیکٹ کے تجربہ سے قبل اُمید کی جا سکتی تھی کہ کوانٹم غیر مکامیت کسی طرح قائد وضوابط کی غیر طبعی پیداوار تھی جس کے قابلِ کشف اثرات نہیں ہو سکتے ہیں اس اُمید کو بھول جائیں ہمیں فاصلہ پر یکدم عمل کے تصور کو دوبارہ دیکھنا ہو گا۔

ماہر طبیعیات روشنی سے زیادہ تیز رفتار اثر و سوخ کو کیوں برداشت نہیں کر سکتے ہیں؟ آخر کئی چیزیں روشنی سے زیادہ تیز رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ ایک موم بتی کے سامنے چلتے ہوئے کیڑے کا سامنے دیوار پر سایے کی رفتار دیوار تک فاصلے کے راست متناسب ہو گی اصولاً آپ اس فاصلہ کو اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ سایہ کی رفتار روشنی سے زیادہ ہو (شکل ۱۲.۴)۔ تاہم دیوار پر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک سایہ نہ کوئی توانائی منتقل کر سکتا ہے اور نہ ہی کوئی خبر پہنچا سکتا ہے۔ نقطہ $X$ پر ایک شخص ایسا کوئی عمل نہیں کر سکتا جو یہاں سے گزرتے ہوئے سایے کے ذریعہ نقطہ $Y$ پر اثر انداز ہو۔

اس کے برعکس روشنی سے زیادہ تیز حرکت کرنے والے سبھی اثر و سوخ کے ناقبل قبول مضمرات ہو سکتے ہیں۔ خصوصی نظریہ اضافت میں ایسے جمودی چوکھٹ پائے جاتے ہیں جن میں اس طرح کا اشارہ وقت میں پیچھے جا سکے گا یعنی سبب سے پہلے اثر رونما ہو گا جس سے ناقابلِ قبول منطقی مسائل کھڑے ہوتے ہیں۔ مثلاً آپ اپنے نوزادہ دادا کو قتل کر سکتے ہیں۔ جو ظاہر ہے ایک بری بات ہے۔ اب سوال یہ کھڑا ہوتا ہے کہ آیا روشنی سے تیز اثرات جن کی پیشا گوئی کوانٹم میکانیات کرتی ہے اور جو ایسپیکٹ کے تجربہ میں کسف ہتے ہیں ان معانوں میں سبھی ہے یا یہ سایے کی حرکت کی طرح غیر حقیقی ہے جن پر فلسفیانہ اعتراضات نہیں لگائے جا سکتے ہیں۔

آئیں تجربہ بل پر غور کریں کریں۔ کیا الیکٹران کی پیمائش کا پوزیٹران کی پیمائش پر اثر ہو گا یقیناً ایسا ہوتا ہے ورنہ ہم مواد کے بیچ باہم رشتہ کی وضاحت پیش کرنے سے قاصر ہوں گے۔ لیکن کیا الیکٹران کی پیمائش پوزیٹران

کی کسی مضصوص نتیجہ کا سبب ہے؟ الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائش کے ذریعہ پوزیٹران کاشف پر بیٹھے شخص کو اشارہ نہیں بھیج سکتا ہے چونکہ یہ اپنی پیمائش کے نتیجہ کو قابو نہیں کرتا یہ الیکٹران کو ہم میدان ہونے پر مجبور نہیں کر سکتا ہے جیسا نقطہ X پر کیڑا کے سائے پر وہ شخص اثرانداز نہیں ہو سکتا، ہاں الیکٹران کاشف پر بیٹھا شخص فیصلہ کر سکتا ہے کہ وہ پیمائش کرے یا نہ کرے تاہم پوزیٹران کاشف پر بیٹھا شخص اپنی پیمائشی نتائج کو دیکھ کر یہ نہیں بتا سکتا کہ الیکٹران پر پیمائش کی گئی یا نہیں دونوں کاشف کے نتائج پر علیحدہ علیحدہ غور کرنے سے مکمل بلاواسطہ مواد دیکھنے کو ملتا ہے۔ صرف دونوں مواد کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں ان کے بیچ باہم رشتہ نظر آتا ہے کسی دوسرے جمودی چوکھٹ میں الیکٹران کی پیمائش سے قبل پوزیٹران کی پیمائش کی جائے گی لیکن اس کے باوجود اس سے کوئی منتقی تضاد پیدا نہیں ہوتا۔ دیکھا گیا باہم رشتہ اس پر منحصر نہیں کہ ہم کہیں الیکٹران کی پیمائش پوزیٹران کی پیمائش پر اثرانداز ہوتی ہے یا پوزیٹران کی پیمائش الیکٹران کی پیمائش پر اثرانداز ہوتی ہے۔ یہ ایک نہایت نازک اور خوبصورت اثر ہے جو بلاواسطہ مواد کے بیچ باہم رشتہ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

یوں ہمیں مختلف قسم کے اثرات کی بات کرنی ہو گی سببی قسم جو وصول کنندہ کی کسی طبیعی خاصیت میں حقیقی تبدیلیاں پیدا کرتا ہو جنہیں صرف زیلی نظام پر تجرباتی پیمائش سے کشف کیا جا سکتا ہو اور آسمانی قسم جو توانائی یا معلومات کی ترسیل نہیں کرتا اور جس کے لیئے واحد ثبوت دو علیحدہ زیلی نظاموں کے مواد کے بیچ باہم رشتہ ہے۔ اس باہم رشتہ کو کسی بھی طرح کسی ایک زیلی نظام میں تجربات کے نتائج کو دیکھ کر کشف نہیں کیا جا سکتا ہے۔ سببی اثرات رشنی کی رفتار سے تیز حرکت نہیں کر سکتے ہیں جبکہ آسمانی اثرات پر ایسی کوئی پابندی عائد نہیں۔ تفاعل نوج کی انہدام سے وابستہ اثرات مئخرالذکر قسم کی ہے جس کا روشنی سے تیز سفر کرنا حیران کن ضرور ہو سکتا ہے لیکن تباہ کن نہیں ہے۔

## ۱۲.۳ مسئلہ کلمیہ

کوانٹم پیمائش عموماً تباہ کن ہوتے ہیں یعنی یہ پیمائش کردہ نظام کے حال کو تبدیل کرتا ہے۔ یہی تجربہ گاہ میں اصول عدم یقینیت کو یقینی بناتا ہے ہم کیوں اصل حال کی کئی متماثل نقل کلمیہ بنا کر اصل نظام کو چھوئے بغیر ان کی پیمائش نہیں کرتے ایسا کرنا ممکن نہیں ہے۔ اگر آپ کلمیہ بنانے والا ایسا آلا بنا پائیں تو کوانٹم میکانیات کو خدا حافظ کہنا ہو گا۔

مثال کے طور پر آئنسٹائن، پوڈلسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے ذریعہ روشنی سے تیز رفتار پر خبر بھیجنا ممکن ہو گا فرض کریں پوزیٹران کاشف چلانے والا شخص ہاں یا نہیں کی خبر ترسیل کرتا ہے۔ خبر ہاں ہونے کی صورت میں بھیجنے والا پوزیٹران کا $S_z$ ناپتا ہے یہ جاننے کی ضرورت نہیں کہ پیمائشی نتیجہ کیا ہے صرف اتنا جاننا ضروری ہے کہ پیمائش کی گئی ہے یوں الیکٹران کسی غیر مبہم حال $\uparrow$ یا $\downarrow$ میں ہو گا جسکا جاننا غیر اہم ہے۔ خبر وصول کرنے والا جلدی سے الیکٹران کی دس لاکھ کلمیہ تیار کر کے ہر ایک کی $S_z$ ناپتا ہے اگر تمام کا ایک ہی جواب ہو کونا جواب یہ جاننا ضروری نہیں ہم یقین سے کہہ سکیں گے کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی لحاظہ خبر ہاں ہو گی۔ اس کے برعکس اگر نصف الیکٹران ہم میدان اور نصف خلاف میدان ہوں تب یقیناً الیکٹران کی پیمائش نہیں کی گئی اور خبر نہیں ہو گا۔

لیکن سن 1982 ووٹرز، زورک اور ڈائکس نے ثابت کیا کہ ایسا مشین تیار نہیں کیا جا سکتا ہے جو کوانٹم متماثل ذرات پیدا کرتا ہو ہم چاہیں گے کہ یہ مشین حال $|\psi\rangle$ میں ایک ذرہ جس کا نقل بنانا مقصود ہو اور حال $|X\rangle$ میں ایک اضافی ذرہ لی کر حال $|\psi\rangle$ میں دو ذرات اصل اور نقل دیتا ہو

$$|\psi\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle \tag{۱۲.۱۳}$$

فرض کریں ہم ایسا مشین بنانے میں کامیاب ہوتے ہیں جو حال $|\psi_1\rangle$ کا کلمہ تیار کرتا ہو

$$|\psi_1\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle \tag{۱۲.۱۴}$$

اور $|\psi_2\rangle$ پر بھی کام کرنے کے قابل ہو

$$|\psi_2\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \tag{۱۲.۱۵}$$

مثال کے طور پر اگر ذرہ ایک الیکٹران ہو تب $|\psi_1\rangle$ اور $|\psi_2\rangle$ ہم میدان اور خلاف میدان ہو سکتے ہیں۔ یہاں تک کوئی مسئلہ پیدا نہیں ہوتا یہ دیکھنا ہو گا کہ ان کا خطی جوڑ $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$ کی صورت میں کیا ہو گا؟ ظاہر ہے ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$|\psi\rangle|X\rangle \rightarrow \alpha|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \tag{۱۲.۱۶}$$

جو ہم نہیں چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل چاہتے ہیں

$$\begin{aligned}|\psi\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle &= [\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle][\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle]\\ &= \alpha^2|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta^2|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle + \alpha\beta[|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle]\end{aligned} \tag{۱۲.۱۷}$$

آپ ہم میدان الیکٹران اور خلاف میدان الیکٹران کے کلمہ بنانے کی مشین بنا سکتے ہیں لیکن وہ کسی بھی با وقعت (غیر صفر) خطی جوڑ کی صورت میں ناکامی کا شکار ہو گا یہ بلکل ایسا ہو گا جیسا نقل بنانے کی مشین افقی لکیروں اور انتصابی لکیروں کی نقل خوش اصلوبی سے کرتا ہو لیکن وتری لکیروں کو مکمل طور پر بگاڑتا ہو۔

## ۱۲.۴ شروڈنگر کی بلی

کوانٹم میکانیات میں پیمائش کا عمل ایک شرارتی کردار ادا کرتا ہے جس میں عدم تعینیت غیر مکامیت تفاعل موج کا انہدام اور باقی تمام تصوراتی مشکلات رونما ہتی ہیں۔ پیمائش کی غیر موجودگی میں مساوات شروڈنگر کے تحت تفاعل موج قابلِ تعین طریقہ سے ارتقا کرتا ہے اور کوانٹم میکانیات کسی بھی سادہ نظریہ میدان کی طرح نظر آتا ہے جو کلاسیکی برقی حرکیات سے بہت سادہ ہو گا چونکہ دو میدان $E$ اور $B$ کی بجائے اس میں واحد ایک غیر سمتی $\psi$ پایا جاتا ہے۔ یہ پیمائش کا عمل ہی ہے جو کوانٹم میکانیات میں عجیب و غریب کردار ادا کرتے ہوئے اس کو سمجھ سے باہر خواص سے نوازتا ہے۔ یہ پیمائش حقیقت میں ہے کیا؟ اسے گیگر طبعی عوامل سے کیا منفرد بناتا ہے اور ہم کس طرح جان سکتے ہیں کہ پیمائش کی گئی ہے؟

شعوڈنگر نے اپنے مشہور تضاد بلّی کے مفروضہ نے اس بنیادی سوال کو پیش کیا۔

ایک بلّی کو فولاد کے ایک بند ڈبے میں بند کیا جاتا ہے اس ڈبے میں ایک گائگر گنت کار اور کسی تاب کار مادہ کی اتنی چھوٹی مقدار رکھی جاتی ہے جس کا ایک گھنٹا میں صرف ایک جوہر کے تحلیل ہونے کا امکان ہو تاہم یہ بھی ممکن ہے کہ کوئی جوہر تحلیل نہ ہو تحلیل کی صورت میں گنت کار اس ڈبے میں ایک زہریلی گیس چھوڑتا ہے۔ ایک گھنٹا گزرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ تحلیل نہ ہونے کی صورت میں یہ بلّی زندہ ہو گی۔ پہلی تحلیل اس کو زہر سے مار دیتی۔ اس مکمل نظام کا تفاعل موج اس حقیقت کو ظاہر کرنے کے لیئے زندہ اور مردہ بلّی کے برابر حصوں پر مشتمل ہو گا۔

ایک گھنٹا کے بعد بلّی کا تفاعل موج درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{\text{زندہ}}+\psi_{\text{مردہ}}\right) \tag{۱۲.۱۸}$$

یہ بلّی نہ تو زندہ اور نہ ہی مردہ ہے بلکہ پیمائش سے پہلے یہ ان دونوں کا ایک خطی جوڑ ہو گا یہاں کھڑکی سے اندر دیکھ کر بلّی کا حال جاننے کو پیمائش تصور کیا جائے گا۔ آپ کا دیکھنے کا عمل بلّی کو زندہ یا مردہ ہونے پر مجبور کرتا ہے ایسی صورت میں اگر بلّی مردہ پائی جائے تو یقیناً اس کے زمہدار آپ ہی ہیں چونکہ آپ نے کھڑکی سے دیکھ کر اسے قتل کیا۔

شروڈنگر اس تمام کو ایک بکواس سے زیادہ نہیں سمجھتا تھا اور میرے خیال سے زیادہ تر ماہرِ طبیعیات ان کے ساتھ متفق ہیں۔ کلاں بین اجسام کا دو مختلف حالات کی ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہونے کا تصور بے معنی ہے۔ ایک الیکٹران تو ہم میدان اور خلاف میدان کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہو سکتا ہے لیکن ایک بلّی زندہ اور مردہ حالات کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں نہیں ہو سکتی ہے۔ اس کو کوانٹم میکانیات کی تقلید پسند تشریح کے ساتھ کس طرح ہم اہنگ بنایا جا سکتا ہے۔

شماریاتی مفہوم کے لحاظ سے مقبول ترین جواب یہ ہے کہ گنت کار کی گنتی پیمائش ہو گی نا کہ کھڑکی میں سے انسانی مشاہدہ پیمائش سے مراد وہ عمل ہے جو کلاں بین نظام پر اثر انداز ہو جو یہاں گنت کار ہے۔ پیمائش کا عمل اس لمحہ پر رونما ہو گا جب خردبین نظام جسے کوانٹم میکانیات کے قوانین بیان کرتا ہے کلاں بین نظام جسے کلاسیکی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں کے ساتھ اس طرح باہم عمل کرے جس سے دائمی تبدیلی رونما ہو۔ کلاں بین نظام خود منفرد حالات کی ایک خطی جوڑ کا مکین نہیں ہو سکتا ہے۔

## ۱۲.۵ کوانٹم زینو تضاد

اس عجیب قصہ کی اہم ترین خاصیت تفاعل موج کا انہدام ہے۔ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش سے اسی نتیجہ کے حصول کی خاطر خالصتاً نظریاتی بنیادوں پر اسے متعارف کیا گیا تھا یقیناً اس دورس اصول موضوعہ کے قابلِ مشاہدہ اثرات بھی ہوں گے۔ مسرا اور سدرشان نے سن 1977 میں تفاعلی

موج کی انہدام کا ایک ڈرامائی تجرباتی مظاہرہ تجویز کیا جسے انہوں نے کوانٹم زینو اثر کا نام دیا۔ ان کا تصور یہ تھا کہ ایک غیر مستحکم نظام مثلاً ہیجان حال میں ایک جوہر کو بار بار پیمائشی عمل سے گزارا جائے۔ ہر ایک مشاہدہ تفاعل موج کو منہدم کر کے گھڑی کو دوبارہ صفر وسے چالو کرے گا اور یوں زیریں حال میں متوقع انتقال کو غیر معائنہ مدد تک روکا جا سکتا ہے۔

فرض کریں ایک نظام ہیجان حال $\psi_2$ سے آغاز کرتا ہے اور زمینی حال $\psi_1$ میں منتقلی کے لیئے اس کا قدرتی عرصہ حیات $\tau$ ہے۔ عام طور پر $\tau$ سے کافی کم وقتوں کے لیئے انتقالی احتمال وقت $t$ کا راست متناسب ہو گا مساوات 9.42 دیکھیں چونکہ انتقالی شرح $1/\tau$ ہے لحاظہ درج ذیل ہو گا

$$P_{2\to 1} = \frac{t}{\tau} \tag{۱۲.۱۹}$$

وقت $t$ پر پیمائش کرنے کی صورت میں بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau} \tag{۱۲.۲۰}$$

درض کریں ہم دیکھتے ہیں کے نظام بالائی حال میں ہی ہے ایسی صورت میں تفاعل موج واپس $\psi_2$ پر منحدن ہو گا اور پورا عمل ایک بار نئے سرے سے دوبارہ شروع ہو گا۔ اگر ہم وقت $2t$ پر دوسری پیمائش کریں تب بالائی حال میں نظام ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \approx 1 - \frac{2t}{\tau} \tag{۱۲.۲۱}$$

جو وہی ہے جو اس صورت ہوتا اگر ہم پہلی پیمائش کرتے ہی نہیں سادہ سوچ کے تحت ایسا ہی ہونا چاہیئے تھا۔ اگر ایسا ہی ہوتا تب نظام کا بار بار مشاہدہ کرنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا اور نہ ہی کوانٹم زینو اثر پیدا ہوتا تاہم بہت قلیل وقت کی صورت میں انتقالی احتمال وقت $t$ کے بجائے $t^2$ کا راست متناسب ہو گا 9.39 دیکھیں

$$P_{2\to 1} = \alpha t^2 \tag{۱۲.۲۲}$$

ایسی صورت میں دو پیمائشوں کے بعد بھی نظام کا بالائی حال میں ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1 - \alpha t^2\right)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2 \tag{۱۲.۲۳}$$

جبکہ پہلی پیمائش نہ کرنے کی صورت میں اب احتمال درج ذیل ہوتا

$$1 - \alpha(2t)^2 \approx 1 - 4\alpha t^2 \tag{۱۲.۲۴}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقت $t$ گزرنے کے بعد نظام کے مشاہدہ کی بنا پر زیریں حال میں منتقلی کا احتمال کم ہوا ہے۔

یقیناً $t=0$ سے لیکر $t=T$ تک $n$ برابر وقفہ $T/n, 2T/n, 3T/n, \ldots, T$ پر نظام کا مشاہدہ کرنے کی وجہ سے اس دورانیہ کے آخر میں بھی نظام بالائی حال میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہو گا

$$\left(1-\alpha(T/n)^2\right)^n \approx 1-\frac{\alpha}{n}T^2 \tag{۱۲.۲۵}$$

جو $n \to \infty$ کی حد میں 1 تک پہنچتا ہے ایک غیر مستحکم نظام جس کا مسلسل مشاہدہ کیا جائے کبھی بھی تحویل نہیں ہو گا بعض مصنفین اس ماخوز سے اتفاق نہیں کرتے اور ان کے نزدیک یہ تفاعل موج کے انہدام غیر درست ہونے کا ثبوت ہے۔ تاہم ان کے دلائل مشاہدہ کے مفہوم کی غلط تشریح پر مبنی ہے اگر بلبلا خانہ میں ایک ذرہ کی راہ کو مسلسل مشاہدہ کرار دے دیا جائے تب یہ بلکل درست ہوں گے چونکہ ایسی ذرات یقیناً تحویل ہوتے ہیں اور ان کا عرصہ حیات پر کاشف کا قابلِ پیمائش اثر نہیں پایا جاتا ہے تاہم ایسا ذرہ خانہ کے اندر جوہروں کے ساتھ خاد و خال باہم عمل کرتا ہے جبکہ کوانٹم زینو اثر کے لیئے ضروری ہے کہ یکے بعد دیگر پیمائشوں کے بیچ وقفہ اتنا کم ہو کہ نظام کو $t^2$ خطہ میں پکڑا جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ خود با خود انتقل کی صورت میں یہ تجربہ عملاً ممکن نہیں ہے۔ تاہم پیدا کردہ انتقال کی صورت میں نتائج کا نظریاتی پیشگوئی کے ساتھ مکمل اتفاق پایا جاتا ہے۔ بدقسمتی سے یہ تجربہ تفاعل موج کی انہدام کا حتمی ثبوت پیش نہیں کر سکتا ہے اس مشاہدہ کے دیگر وجوہات بھی دئے جا سکتے ہیں۔

میں نے اس کتاب میں ایک ہم اہنگ اور بلا تضاد کہانی پیش کرنے کی کوشش کی ہے تفاعل موج $\psi$ کسی ذرہ یا نظام کے حال کو ظاہر کرتا ہے۔ عمومی طور پر ای کذرہ کسی مخصوص حرکی خاصیت مثلاً مکام معیارِ حرکت توانائی زاویائی معیارِ حرکت وغیرہ کا حامل نہیں ہوتا اس وقت تک جب پیمائشی عمل مداخلت نہ کرے کسی ایک تجربہ میں حاصل ایک مخصوص قیمت کا احتمال $\psi$ کی شماریاتی مفہوم تعین کرتا ہے۔ پیمائشی عمل سے تفاعل موج منہدم ہوتا ہے جس کی بنا پر فوراً دوسری پیمائش لازماً وہی نتیجہ دیگی۔ اگرچہ دیگر تشریحات مثلاً غیر مکامی درپردہ متغیر نظریات متعدد کائنات کا تصور بلاتضاد تاریخیں سگرہ نمونے وغیرہ بھی پائے جاتے ہیں لیکن میں یقین کرتا ہوں کہ یہ سب سے سادہ ہے جس سے عموماً ماہر طبیعیات اتفاق کرتے ہیں۔ یہ ہر تجربہ سے کامیابی سے ابھرا ہے تاہم یہ کہانی کا اختتام نہیں ہے ہمیں پیمائشی عمل کے بارے میں اور انہدام کے طریقے کار کے بارے میں بہت کچھ جاننا ہے عین ممکن ہے کہ آنے والے نسلیں زیادہ پیچیدہ نظریہ جانتے ہوئے سوچتے ہوں کہ ہم اتنا سادہ کیسے ہو سکتے تھے۔

# جوابات

# ضمیمہ ا

# خطی الجبرا

## ا.ا سمتیات

## ا.۲ اندرونی ضرب

$$\left|\langle\alpha|\beta|\rangle\right|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \tag{۱}$$

(اس اہم نتیجہ کو **شوارز عدم مساوات**[۱] کہتے ہیں؛ اس کا ثبوت سوال ا.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں اگر آپ چاہیں تو $\alpha$ اور $\beta$ کے بیچ زاویے کی تعریف درج ذیل کلیے کے تحت کر سکتے ہیں۔

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle}} \tag{۲}$$

سوال ا.ا: فرض کریں آپ غیر معیاری عمودی اساس $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_n\rangle)$ سے آغاز کرتے ہیں۔ اس اساس سے معیاری عمودی اساس $(|e_1'\rangle, |e_2'\rangle, \cdots, |e_n'\rangle)$ کو **گرام و شمد حکمت عملی**[۲] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ طریقہ کار کچھ یوں ہے:

ا. اساس کے پہلے سمتیہ کو معمول پر لائیں (اس کو اپنے معیار سے تقسیم کریں)۔

$$|e_1'\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

[۱] Schwarz inequality
[۲] Gram-Schmidt procedure

ب. دوسرے سمتیہ کا پہلے معمول شدہ سمتیہ پر تظلیل لے کر اس کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e_1'|e_2\rangle|e_1'\rangle$$

یہ سمتیہ $|e_1'\rangle$ کو قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول پر لا کر $|e_2'\rangle$ حاصل کریں۔

ج. سمتیہ $|e_3\rangle$ سے اس کا $|e_1'\rangle$ اور $|e_2'\rangle$ پر تظلیل منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e_1'|e_3\rangle|e_1'\rangle - \langle e_2'|e_3\rangle|e_2'\rangle$$

یہ $|e_1'\rangle$ اور $|e_2'\rangle$ کو قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول پر لا کر $|e_3'\rangle$ حاصل کریں۔ اسی طرح باقی بھی حاصل کریں۔

گرام وشمد حکمت عملی استعمال کر کے 3 فضا اساس:

$$|e_1\rangle = (1+i)\boldsymbol{i} + (1)\boldsymbol{j} + (i)\boldsymbol{k},\ |e_2\rangle = (i)\boldsymbol{i} + (3)\boldsymbol{j} + (1)\boldsymbol{k},\ |e_3\rangle = (0)\boldsymbol{i} + (28)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k}$$

کو معیاری عمودی بنائیں۔

سوال ا.۲: شوارز عدم مساوات (مساوات ا) ثابت کریں۔ اشارہ: آپ $0 \geq \langle\gamma|\gamma\rangle$ استعمال کرتے ہوئے $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle/\langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$ سے شروع کریں۔

## ا.۳ قالب

## ا.۴ تبدیلی اساس

## ا.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار

## ا.۶ ہرمشی تبادلے

# فرهنگ