

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۲۱	وٹزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۳۶۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۵	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۷۵	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۸۳	ہیت بیری	۱۰.۲
۳۸۳	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندی ہیت	۱۰.۲.۲
۳۹۰	اہارو نوو یو ہم اثر	۱۰.۲.۳
۳۹۹	بکھراؤ	۱۱
۳۹۹	تعارف	۱۱.۱
۳۹۹	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۴۰۳	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۴۰۴	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۴	اصول و ضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۷	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۱۰	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۱۳	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۱۳	مساوات شرودنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۷	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۲۱	تسل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۵	پس نوشت	۱۲
۴۲۶	آمنشائن پوڈ لکیو روزن تضاد	۱۲.۱
۴۲۷	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۲	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۳۳	شرودنگر کی ہلی	۱۲.۴
۴۳۴	کوانٹائی زینو تضاد	۱۲.۵
۴۳۷	جوابات	
۴۳۹	خطی الجبرا	۱
۴۳۹	سمتیات	۱.۱
۴۳۹	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۴۰	قتالب	۳.۱

- ۴.۱ تبدیلی اساس ۴۴۰
- ۵.۱ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار ۴۴۰
- ۶.۱ ہر مشی تباولے ۴۴۰

۴۴۱

فئرہنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۹

تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹائی سکونیات^۱ کہا جاسکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاعل غیر تابع وقت: $V(r, t) = V(r)$ ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شرودنگر:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جاسکتا ہے، جہاں $\psi(r)$ غیر تابع مساوات شرودنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نسائی حبز و ضربی $(e^{iEt/\hbar})$ ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبیعی مقدار $|\Psi|^2$ کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی پھلانگ**^۲ کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (کوانٹائی حرکت)^۳ متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

quantum statics^۱
quantum jumps^۲
quantum dynamics^۳

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی احراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات ψ_a اور ψ_b پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی، H^0 ، کے امتیازی حالات:

$$(9.1) \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.3) \quad \Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات ψ_a اور ψ_b مقام و فضا کی تفاعلات، یا چپکار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے، لہذا جب میں $\Psi(t)$ لکھتا ہوں، میرا مراد وقت t پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر حبز واپنی خصوصی قوت نمائی حبز و ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$(9.4) \quad \Psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ ”حال ψ_a میں ذرہ پائے جانے کا احتمال“ $|c_a|^2$ ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت E_a حاصل ہونے کا احتمال $|c_a|^2$ ہے۔ یقیناً، تفاعل Ψ کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب، $H'(t)$ ، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ ψ_a اور ψ_b ایک مکمل سلسلہ نام کرتے ہیں، لہذا تفاعل موج $\Psi(t)$ کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب c_a اور c_b وقت t کے تفاعلات ہوں گے۔

$$(9.6) \quad \Psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

(میں قوت نسائی حبز و ضربوں کو $c_a(t)$ یا $c_b(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔) ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات c_a اور c_b کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال ψ_a ($c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت t_1 پر $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$ ہو، تب ہم کہیں گے کہ نظام ψ_a سے ψ_b میں تحویل ہوا ہے۔

ہم $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ معلوم کرنے کی غرض سے مطالب کرتے ہیں کہ $\Psi(t)$ تابع وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرے۔

$$(9.7) \quad H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad H = H^0 + H'(t)$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} \\ = i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right. \\ \left. + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_at/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_bt/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(9.8) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_at/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar \left[\dot{c}_a\psi_a e^{-iE_at/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_bt/\hbar} \right]$$

تفعل ψ_a کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر ψ_a اور ψ_b کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم \dot{c}_a کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_at/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_bt/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_at/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$(9.9) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle$$

دھیان رہے کہ H' ہر مثنیٰ ہے، لہذا $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$ ہوگا۔ دونوں اطراف کو $-(i/\hbar)e^{iE_at/\hbar}$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(9.10) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b - E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح ψ_b کے ساتھ اندرونی ضرب سے \dot{c}_b الگ کیا جاسکتا ہے:

$$c_a \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle e^{-iE_a t / \hbar} + c_b \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle e^{-iE_b t / \hbar} = i \hbar \dot{c}_b e^{-iE_b t / \hbar}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.11) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{i(E_b - E_a)t / \hbar} \right]$$

مساوات ۹.۱۰ اور مساوات ۹.۱۱ سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کا تعین کرتے ہیں: یہ دونوں مساواتیں نظام کی (تابع وقت) مساوات شرودنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر H' کے وتری متعلقہ ارکان صفر ہوں گے:

$$(9.12) \quad H'_{aa} = H'_{bb} = 0$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ رہے:

$$(9.13) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(9.14) \quad \omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

(میں $E_b \geq E_a$ فرض کرتا ہوں، لہذا $\omega_0 \geq 0$ ہوگا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو (تابع وقت) برقی میدان $\mathbf{E} = E(t)\mathbf{k}$ میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال ($n = 1$) اور (چارگٹ انحطاطی) پہلے ہیجان حالات ($n = 2$) کے بیچ اضطراب $H' = eEz$ کے چاروں متعلقہ ارکان H'_{ij} تلاش کریں۔ دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے $H'_{ii} = 0$ ہوگا۔ تبصرہ: محور z کے لحاظ سے طاق پڑھو اور دے کار لاتے ہوئے، صرف ایک مکمل حل کرنے کی ضرورت ہوگی؛ اس روپ کا اضطراب زمینی حال سے $n = 2$ حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے، لہذا یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا؛ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ بلند ہیجان حالات تک تحویل نظر انداز کی جاسکتی ہے۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔ تبصرہ: بظاہر یہ نظام ”خالص ψ_a “ اور ”کسی ψ_b “ کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں تحویل نہیں ہوگی؟ جی نہیں، لیکن اس کی وجہ کچھ لطیف ہے: یہاں ψ_a اور ψ_b نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہی توانائی کی پیمائش کبھی بھی E_a یا E_b نہیں دیگی۔ نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر، تابع وقت نظریہ اضطراب میں ہم عموماً اضطراب چالو کر کے کچھ دورانیہ کے بعد بند

کرتے ہیں۔ آغاز اور اختتام میں ψ_a اور ψ_b بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے، اور صرف اس سیاق و سباق میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نظام ایک سے دوسرے میں تحویل ہوا۔ یوں، موجودہ مسئلے میں، فرض کریں کہ وقت $t = 0$ پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت t پر بند کیا جاتا ہے؛ اس سے حساب پر کوئی مشرق نہیں پڑے گا، تاہم یہ نتائج کی معقول تشریح ممکن بناتی ہے۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کاروپ (وقت کا δ تفاعل ہے۔

$$H' = U\delta(t)$$

فرض کریں $U_{aa} = U_{bb} = 0$ اور $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$ ہے۔ اگر $c_a(-\infty) = 1$ اور $c_b(-\infty) = 0$ ہوں، $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ تلاش کریں، اور تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔ تحویل ہونے کا حتمی احتمال $t \rightarrow \infty$ کے لیے $P_{a \rightarrow b}$ کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کے تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha|/\hbar)$$

۹.۱.۲ تاجع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل ٹھیک رہا ہے: ہم نے اضطراب کی جامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا۔ لیکن، ”چھوٹے“ H' کی صورت میں ہم مساوات ۹.۱۳ کو (درج ذیل) یک بعد دیگر تخمینے سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال:

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں (صفر رتبہ میں) رہے گا۔ صفر رتبہ:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

(میں تخمینے کے رتبہ کو زیر بالا میں قوسین میں لکھتا ہوں۔ یوں $c_a^{(0)}(t)$ میں ”0“ رتبہ صفر کو ظاہر کرتا ہے۔)

ہم مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں رتبہ صفر قیمتیں پڑ کر کے اول رتبہ تخمینے حاصل کرتے ہیں۔

اول رتبہ:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1$$

$$\frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

دوم رتبہ:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \rightarrow$$

$$c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[\int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں c_b تبدیل نہیں ہوا $c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t)$ ۔ (دھیان رہے کہ $c_a^{(2)}(t)$ میں صفر رتبہ جزو بھی شامل ہے؛ دوم رتبہ تصحیح صرف عملی حصہ ہوگا۔)

اصولاً، ہم اسی طرح چلتے ہوئے n رتبہ تخمین کو مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے $(n + 1)$ رتبہ تخمین کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ صفر رتبہ میں H' کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا، اول رتبہ تصحیح میں H' کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے، دوم رتبہ تصحیح میں H' کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں، وغیرہ۔^۵ اول رتبہ تخمین میں سہو ہوگا۔ ہاں H' میں اول رتبہ تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$ سے صاف ظاہر ہے (ٹھیک عددی سروں کو یقیناً مساوات ۹.۵ پر پورا اترنا چاہیے)۔ یہی کچھ زیادہ بلند رتبہ تخمین کے لیے بھی ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ نہیں لیتے۔

۱. صورت $c_a(0) = 1$ اور $c_b(0) = 0$ کے لئے اول رتبہ نظریہ اضطراب سے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ H' میں اول رتبہ تک $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$ ہوگا۔

ب. اس مسئلے کو بہتر انداز میں نمٹا جاسکتا ہے۔ درج ذیل لیکر

$$(9.19) \quad d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دکھائیں کہ

$$(9.20) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

ہوگا، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(9.21) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

^۵ دھیان رہے کہ ہر جگہ رتبہ میں c_a ، اور ہر طبقہ رتبہ میں c_b تبدیل ہوتا ہے؛ اگر نظام ان دو حالات کے خطی جوڑے آفسز کرے، یا اضطراب میں وتری ارکان پائے جاتے ہیں، تب ایسا نہیں ہوگا۔

یوں (H' کے ساتھ چسپاں اضافی جزو ضرب $e^{i\phi}$ کے علاوہ) d_a اور d_b کی مساواتیں، ساخت کے لحاظ سے مساوات ۹.۱۳ کی متماثل ہیں۔

ج. اول رتبی نظریہ اضطراب سے، جزو-ب کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ حاصل کریں، اور اپنے جواب کا جزو-الف کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں مندرجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت $c_b(0) = b$ ، $c_a(0) = a$ کے لیے نظریہ اضطراب میں مساوات ۹.۱۳ کو دوم رتبہ تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر متابع وقت اضطراب (سوال ۹.۲) کے لیے $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو دوم رتبہ تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۱.۳ سائنس اضطراب

معرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائنس:

$$(9.22) \quad H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t)$$

تب

$$(9.23) \quad H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t)$$

ہوگا، جہاں V_{ab} درج ذیل ہے۔

$$(9.24) \quad V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

(عملاً، تقریباً ہر صورت میں وتری متالابی ارکان صفر ہوتے ہیں، لہذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں معرض کرتا ہوں کہ وتری متالابی ارکان صفر ہیں۔) اول رتبہ تک (یہاں سے آگے، ہم صرف اول رتبہ تک کام کریں گے، لہذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی) درج ذیل ہوگا (مساوات ۹.۱۷)۔

$$(9.25) \quad c_b(t) \cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{i V_{ba}}{2\hbar} \int_0^t \left[e^{i(\omega_0 + \omega)t'} + e^{i(\omega_0 - \omega)t'} \right] dt'$$

$$= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right]$$

یہی جواب ہے، لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ جبری تعدد (ω) کو تحلیلی تعدد (ω_0) کے بہت قریب رہنے کا پابند بنانے سے، چونکہ قوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا، جس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں؛ بالخصوص ہم درج ذیل معرض کرتے ہیں۔

$$(9.26) \quad \omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

یہ بہت بڑی پابندی نہیں ہے، چونکہ کسی دوسرے تعدد پر تحویل کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہے۔^۶ پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$c_b(t) \cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}}{\omega_0 - \omega} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t/2} \right]$$

$$(9.24) \quad = -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i(\omega_0 - \omega)t/2}$$

ایک ذرہ جو حال ψ_a سے آغاز کر کے لمحہ t پر حال ψ_b میں پایا جاتا ہو، کے تحویل کا احتمال، جس کو **تحویل احتمال**^۷ کہتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

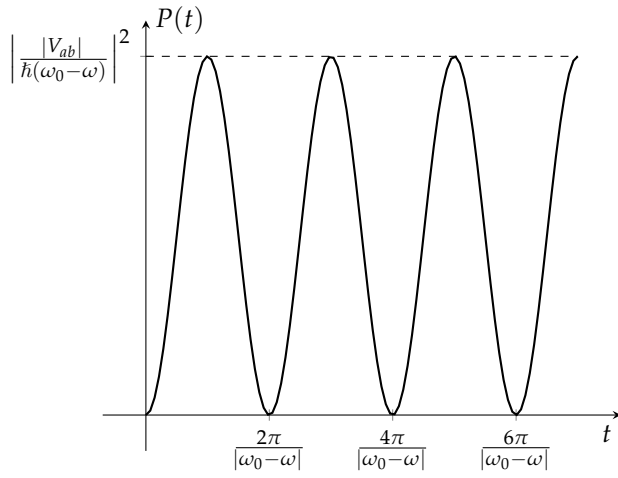
اس نتیجے کا دلچسپ پہلو یہ ہے کہ، وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال سائن نار تعاضل کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ $|V_{ab}|^2 / \hbar^2 (\omega_0 - \omega)^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تک پہنچ کر، جو لازماً 1 سے بہت کم ہے (درج ذیل ہم اضطراب کو چھوٹا فرض نہیں کر پائیں گے) یہ واپس گر کر صفر ہوتا ہے! لمحات $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$ پر، جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہے، ذرہ لازماً پچھلے حال میں ہوگا۔ اگر آپ تحویل کا احتمال بڑھا نا چاہتے ہیں، اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے چالو نہ رکھیں؛ بہتر ہوگا کہ آپ وقت $\pi / |\omega_0 - \omega|$ پر اضطراب کو بند کر کے نظام کو بالائی حال میں ”پانے“ کی امید کریں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ تحویل، نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں، بلکہ ٹھیک حال میں بھی ایسا ہی ہوگا، اگرچہ تحویل تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، تحویل کا احتمال اس صورت سب سے زیادہ ہوگا جب جب جبری تعدد قدرتی تعدد ω_0 کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں ω کے لحاظ سے $P_{a \rightarrow b}$ ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی بلندی $(|V_{ab}| t / 2\hbar)^2$ جبکہ چوڑائی $4\pi / t$ ہے؛ ظاہر ہے کہ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اس کی بلندی بڑھتی اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ (ظاہر، زیادہ سے زیادہ قیمت بغیر کسی حد کی بتدریج بڑھتی ہے۔ تاہم 1 تک پہنچنے سے بہت پہلے چھوٹے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے، لہذا ہم نسبتاً کم t کے لیے اس نتیجے پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ ٹھیک نتیجہ 1 سے تجاویز نہیں کرتا۔)

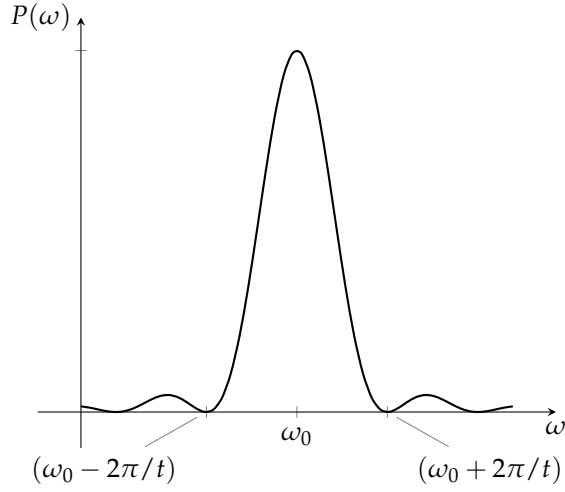
سوال ۹.۷: مساوات ۹.۲۵ میں پہلا جزو $\cos(\omega t)$ کے $e^{i\omega t} / 2$ حصے، اور دوسرا $e^{-i\omega t} / 2$ سے آتا ہے۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا باضابطہ طور پر $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$ لکھنے کا معادل ہے، یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں۔

$$(9.29) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$

^۶ آنے والے حصوں میں ہم اس نظریے کا اطلاق روشنی پر کریں گے، جس کا $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ہے، لہذا دونوں اجزاء میں نسب نما انتہائی بڑا ہوگا، ماسوائے ω_0 کے قریب (دوسرے جزو میں)۔
^۷ transition probability



شکل ۹.۱: سائنس مضطرب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات ۹.۲۸)۔



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالقابل متحرک تعدد (مساوات ۹.۲۸)۔

(ہیملٹنی متالاب کو ہر مشی بنانے کی خاطر مومنہ ذکر کی ضرورت پیش آتی ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں کہ ہم $c_a(t)$ کے لیے مساوات ۹.۲۵ کی طرح کلیہ میں غلاب جزو منتخب کرتے ہیں۔) اس کو گھومتی موج تجلیز^۸ کہتے ہیں۔ جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کے آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ کو، نظریہ اضطراب استعمال کیے بغیر اور میدان کے زور کے بارے میں کچھ فرض کیے بغیر، بالکل ٹھیک ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

۱. عمومی ابتدائی معلومات $c_b(0) = 0$ ، $c_a(0) = 1$ کے لیے گھومتی موج تخمین (مساوات ۹.۲۹) لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ اپنے جوابات $c_a(t)$ اور $c_b(t)$ کو رابی پلٹاتا تعدد^۹

$$\omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}| / \hbar)^2} \quad (9.30)$$

کی صورت میں لکھیں۔

ب. تحویلی احتمال $P_{a \rightarrow b}(t)$ کا تعین کریں، اور دکھائیں کہ یہ کبھی بھی 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$ ہے۔

ج. تصدیق کریں کہ ”کم“ اضطراب کی صورت میں $P_{a \rightarrow b}(t)$ نظریہ اضطراب کا نتیجہ (مساوات ۹.۲۸) دے گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں ”کم“ سے مراد V پر عائد کیا پابندی ہے۔

د. نظام پہلی مرتبہ اپنے ابتدائی حال میں کس وقت واپس آئے گا؟

۹.۲ اشعاعی احسراج اور انجذاب

۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

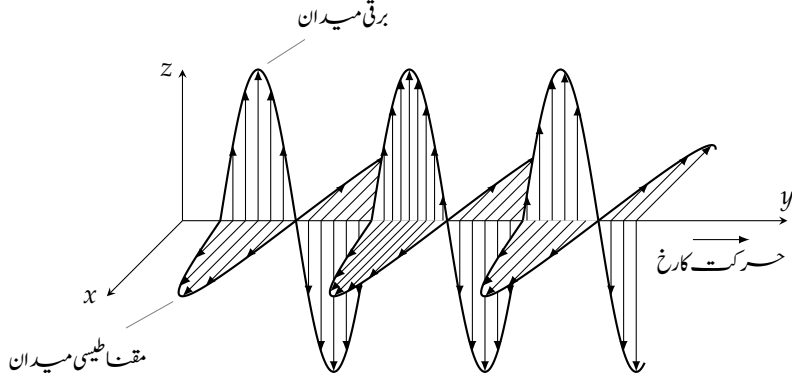
ایک برقناطیسی موج (جس کو میں روشنی کہوں گا، اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، حشر و امواج، ایکس رے، وغیرہ ہو سکتی ہے؛ جن میں صرف تعدد کا فرق ہے) عرضی (اور باہم متاثر) ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر، گزرتی ہوئی بصری موج کی برقی جزو کو، بنیادی طور پر رد عمل کرتا ہے۔ اگر طول موج جوہر کی جسامت کے لحاظ سے (لمبا ہو، ہم میدان کے فاصلاتی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔^{۱۰} اتب جوہر سائن نما ارتعاشی برقی میدان:

$$E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{k} \quad (9.31)$$

^۸ rotating wave approximation

^۹ Rabi flopping frequency

^{۱۰} بصری روشنی کے لئے $500 \text{ nm} \sim \lambda$ جبکہ جوہر کا قطر 0.1 nm کے لگ بھگ ہے، لہذا یہ تخمین معقول ہے؛ تاہم ایکس رے کے لئے ایسا نہیں ہوگا۔ سوال ۹.۲۱ میدان کے فاصلاتی تغیر پر غور کرتا ہے۔



شکل ۹.۳: برقی و مغناطیسی موج۔

کے زیر اثر ہوگا (فی الحال میں روشنی کو ایک رنگی اور z رخ تقطیب شدہ فرض کرتا ہوں)۔ اضطرابی ہیملٹنی "درج ذیل ہوگی، جہاں q الیکٹران کا بار ہے۔"^۳

(۹.۳۲)

$$H' = -qE_0 z \cos(\omega t)$$

بظاہر درج ذیل ہوگا۔^۳

(۹.۳۳)

$$H'_{ba} = -\wp E_0 \cos(\omega t),$$

$$\wp \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle$$

عمومی طور پر، ψ متغیر z کا جفت یا طاق تفاعل ہوگا؛ دونوں صورتوں میں $z|\psi|^2$ طاق ہوگا، جس کا نکل صفر ہوگا (چند مثالوں کے لئے سوال ۹.۱ دیکھیں)۔ اسی کی بنا پر ہم فرض کرتے ہیں کہ H' کے وتری متالابی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں

(۹.۳۴)

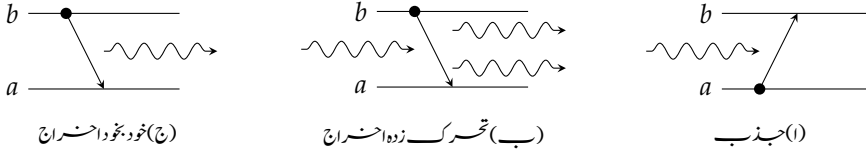
$$V_{ba} = -\wp E_0$$

لیتے ہوئے، روشنی اور مادے کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہوگا جس پر ہم نے حصہ ۹.۱ میں غور کیا۔

"اکن میدان E میں بار q کی توانی $-q \int E \cdot dr$ ہوگی۔ آپ تابع وقت (یعنی غیر ساکن) میدان کے لئے برقی سکونیات کے کلب کے استعمال پر ناراض ہو سکتے ہیں۔ میں بغیر کہے، فرض کرتا ہوں کہ (جوہر کے اندر) الیکٹران کو حرکت کرنے کے لئے درکار وقت سے ارتعاش کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

^۲ ہمیشہ کی طرح ہم فرض کرتے ہیں کہ مرکزہ بھاری اور ساکن ہے؛ ہمیں یہاں الیکٹران کے تفاعل موج سے عرض ہے۔

^۳ حرف \wp کے استعمال سے آپ کو برقی جفت قطب کا معیار اثر یاد دلایا جاتا ہے (جس کے لئے برقی حرکیات میں حرف p مستعمل ہے؛ یہاں اسے میٹر \wp کہا گیا ہے تاکہ معیار حرکت کے ساتھ عطا نہی پیدا نہ ہو)۔ درحقیقت، جفت قطب معیار حرکت عاقل، qr ، کے z جزو کا، \wp غیر وتری متالابی رکن ہے۔ برقی جفت قطب معیار حرکات کے ساتھ وابستگی کی بنا پر، ایسا اخراج جو مواد ۹.۳۳ کے تحت ہو برقی جفت قطب اخراج کہلاتا ہے۔ یہ کم از کم بصیری خطہ میں غالب قسم ہے۔ عمومی اور اصطلاحات کے لئے سوال ۹.۲۱ دیکھیں۔



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

۹.۲.۲ انجذاب، تحرک شدہ احسراج اور خود بخود احسراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیریں حال ϕ_a میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالاحال ψ_b میں تحویل کا احتمال مساوات ۹.۲۸ دیتی ہے جو (مساوات ۹.۳۴ کو مد نظر رکھتے ہوئے) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left(\frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر $E_b - E_a = \hbar\omega_0$ توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس نے ”ایک نوری جذب کیا“ (شکل ۹.۴-۱)۔ (جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، لفظ ”نوری“ درحقیقت کوائنائی برقی حرکیات^{۱۴} [برقناطیسی میدان کی کوائنائی نظریہ] سے تعلق رکھتا ہے، جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرے مطلب نہ لیں۔) یقیناً، میں بالاحال $(c_a(0) = 0)$ اور $(c_b(0) = 1)$ سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ چاہیں تو ایسا کر سکتے ہیں؛ نتیجہ بالکل وہی ہوگا؛ البتہ اس مرتبہ $P_{b \rightarrow a} = |c_a(t)|^2$ حاصل ہوگا، جو نیچے زیریں سطح میں تحویل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.36)$$

(چونکہ ہم a اور b کو آپس میں بدل $(a \leftrightarrow b)$ رہے ہیں جو ω_0 کی جگہ $-\omega_0$ ڈالتا ہے، لہذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ مساوات ۹.۲۵ پر پہنچ کر اب ہم پہلا جزو چنتے ہیں جس کے نسب نامہ $-\omega_0 + \omega$ ہوگا، باقی باب پہلے کی طرح ہے۔) لیکن اگر آپ رک کر سوچیں تو یہ ایک حیرت انگیز نتیجہ ہے: بالاحال میں پائے جانے والے ذرے پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں تحویل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالاحال تحویل کا ہے۔ اس عمل کو تحرک زدہ اخراج^{۱۵} کہتے ہیں، جس کی پیشگوئی آئنسٹائن نے کی تھی۔

تحرک زدہ انحرانج کی صورت میں برقنطیسی میدان جوہر سے $\hbar\omega_0$ توانائی کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں ایک نور یہ داخل ہوا اور دو نور یہ (ایک اصل جس نے تحویل پیدا کی اور دوسرا جو تحویل کی بدولت پیدا ہوا) باہر نکلے (شکل ۹.۲-ب)۔ اس طرح افزائش^{۱۶} کا امکان پیدا ہوتا ہے، چونکہ ایک بوتل میں بہت سارے جوہر، جو بالا حال میں ہوں، کو ایک آمدی نور یہ متحرک^{۱۷} کے مسلسل تعامل^{۱۸} پیدا کریگا؛ یوں پہلا نور یہ 2 نور یہ پیدا کرے گا، یہ نور یہ 4 پیدا کریں گے، وغیرہ۔ لیور^{۱۹} کا اصول یہی ہے۔ دھیان رہے کہ (لسیزر عمل کے لیے) ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت بالا حال میں پہنچائی جائے (جسے آبادی^{۲۰} الثنا کہتے ہیں)؛ چونکہ انخذاب (جو ایک نور یہ کم کرتا ہے) اور تحرک زدہ انحرانج (جو ایک پیدا کرتا ہے) بالمقابل ہوں گے، لہذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کر کے افزائش پیدا نہیں کی جاسکتی۔

(انخذاب اور تحرک شدہ انحرانج کے علاوہ) روشنی اور مادے کے باہم عمل کا تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے؛ اس کو خود با خود اخراج^{۲۱} کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقنطیسی میدان، جو انحرانج پیدا کر سکتا ہے، کی عدم موجودگی میں ہیجان جوہر زیریں حال میں تحویل ہو کر ایک نور یہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۲-ج)۔ ہیجان حال سے جوہر کا زمینی حال میں تنزل عموماً آبی ذریعے سے ہوتا ہے۔ پہلی نظر میں واضح نہیں کہ خود با خود انحرانج کیوں کر ہو گا۔ ساکن حال (اگرچہ ہیجان) جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال میں تحویل ہو، اسے وہیں عسر بھسر رہنا چاہیے۔ درحقیقت، جوہر وہیں رہتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ البتہ، کوانٹائی برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر نہیں ہوتے؛ جیسا (مثال کے طور پر) ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی ($\hbar\omega/2$) کا حاصل ہے۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں، کمرے کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں، تب بھی کچھ برقنطیسی شعاع پائی جائے گی، اور یہی ”صفر نقطی“ انحرانج خود با خود انحرانج کا سبب بنتا ہے۔ اگر حبڑے دیکھا جائے تو تمام انحرانج تحرک شدہ انحرانج ہو گا۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہو گا کہ آیا آپ میدان مراہم کر رہے ہیں یا قدرتی میدان پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی انحرانجی عمل کے بالکل الٹ ہے، جہاں تمام انحرانج خود با خود ہوتا ہے اور تحرک شدہ انحرانج کا تصور نہیں پایا جاتا۔

کوانٹائی برقی حرکیات اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے، تاہم آئنشٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں (انخذاب، تحرک شدہ انحرانج اور خود با خود انحرانج) کا تعلق پیش کرتی ہے۔ آئنشٹائن نے خود با خود انحرانج کی وجہ (زمینی حال برقنطیسی میدان کا اضطراب) پیش نہیں کی، تاہم انکے نتائج ہمیں خود با خود انحرانج کا حساب کرنے کا محاذ بتاتی ہے، جس سے ہیجان جوہری حال کا قدرتی عرصہ حیات تلاش کیا جاسکتا ہے۔^{۲۲} البتہ ایسا کرنے سے پہلے، ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتاتی برقنطیسی امواج کی آمد (جیسا حقیقت میں ہو گا) سے جوہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں؛ حراری شعاع میں جوہر رکھنے سے ایسی صورت حال پیدا ہوگی۔

amplification^{۱۶}trigger^{۱۷}chain reaction^{۱۸}laser^{۱۹}population inversion^{۲۰}spontaneous emission^{۲۱}

۲۲ متبادل اشتقاق کے لئے سوال ۸، ۹ دیکھیں۔

۹.۲.۳ غیر اتالی اضطراب

برقناطیسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے، جہاں E_0 ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا محیط ہے۔^{۲۳}

$$(۹.۳۷) \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال (مساوات ۹.۳۶) میدان کی کثافت توانائی کا راست متناسب ہے۔

$$(۹.۳۸) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |\phi|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد ω پر یکے رنگ^{۲۴} موج کے لیے درست ہوگا۔ عملی استعمال کے کئی نظاموں پر وسیع تعددی سرعت کی برقناطیسی امواج کی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں $\rho(\omega) d\omega \rightarrow u$ ہوگا، جہاں $\rho(\omega) d\omega$ تعددی سرعت $d\omega$ میں کثافت توانائی ہے، اور حناص تحویلی احتمال درج ذیل مکمل کا روپ اختیار کرے گا۔^{۲۵}

$$(۹.۳۹) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |\phi|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

لہذا تو سین میں حبز کی ω_0 پر نوکدار چوٹی پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲)، جبکہ عام طور پر $\rho(\omega)$ کافی چوڑا ہوگا، لہذا ہم $\rho(\omega)$ کی جگہ $\rho(\omega_0)$ لکھ کر اے عمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(۹.۴۰) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|\phi|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

متغیرات کو تبدیل کر کے $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$ لکھ کر (اور چونکہ بنیادی طور پر مکمل باہر صفر ہی ہے) مکمل کی حدود کو $x = \pm\infty$ تک وسعت دے کر، اور قطعی مکمل کو جدول سے دیکھ کر:

$$(۹.۴۱) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

^{۲۳} برقناطیسی میدان میں فی اکائی حجم توانائی درج ذیل ہے۔

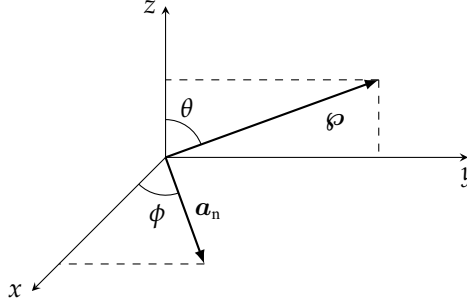
$$u = (\epsilon_2/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2$$

برقناطیسی موج کے لئے برقی اور مقناطیسی حصے برابر ہوں گے، لہذا

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

ہوگا، اور چونکہ \cos^2 (یا \sin^2) کا اوسط $1/2$ ہے لہذا ایک مکمل پھیروے پر اوسط $(\epsilon_0/2)E_0^2$ ہوگا۔
monochromatic^{۲۴}

^{۲۵} مساوات ۹.۳۹ مندرج کرتی ہے کہ مختلف تعدد پر تحویل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں، لہذا مکمل تحویلی احتمال ان انفرادی احتمالات کا مجموعہ ہوگا۔ اگر مختلف حصے الٹاتے ہوں، تب ہمیں حیطوں $(c_b(t))$ سنہ کہ احتمالات $(|c_b(t)|^2)$ کا مجموعہ لینا ہوگا، اور اس میں حیطوں کے صفر ہوں گے علاوہ حاصل ضرب بھی پائے جائیں گے۔ ہم عملی استعمال میں ہر مرتبہ مندرج کرتے ہیں کہ اضطراب غیر اتالی ہے۔



شکل ۹.۵: محدد برائے $|\phi \cdot a_n|^2$ کی اوسط زنی۔

درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.42) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |\phi|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

اس مرتبہ تحویلی احتمال t کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس، غیر اتانی وسیع تعدد کی شعاع پٹنیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتی۔ بالخصوص، **تحویلی شرح** $R \equiv dP/dt$ اب ایک مستقل ہوگا۔

$$(9.43) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |\phi|^2 \rho(\omega_0) \quad (\text{مستقل تحویلی شرح})$$

اب تک ہم فرض کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج y رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور z رخ تنظیم شدہ ہے۔ لیکن ہم اُس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جوہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو، اور اس میں ہر ممکن تنظیم پائی جاتی ہو؛ میدان کی توانائی $(\rho(\omega))$ ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں $|\phi|^2$ کے بجائے $|\phi \cdot a_n|^2$ کی اوسط قیمت درکار ہوگی، جہاں (مادات ۹.۳۳ کو عمومیّت دیتے ہوئے) درج ذیل ہوگا،

$$(9.44) \quad \phi \equiv q \langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle$$

اور اوسط تمام تنظیم اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔

اوسط درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے: کردی محدودیوں منتخب کریں کہ شعاع کی حرکت کارخ z محور پر ہو (تا کہ تنظیم xy سطح میں ہو) اور (اٹل) سمتیہ p سطح yz میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔^{۲۷}

$$(9.45) \quad \mathbf{a}_n = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \phi = \phi \sin \theta \mathbf{j} + \phi \cos \theta \mathbf{k}$$

^{۲۷} میں ϕ کو حقیقی کی طرح تصور کرتا ہوں، اگرچہ یہ عموماً مخلوط ہوگا۔ درج ذیل کی بسا پر transition rate^{۲۸}

$$|\phi \cdot \mathbf{a}_n|^2 = |(\phi_{\text{حقیقی}}) \cdot \mathbf{a}_n + i(\phi_{\text{خیلی}}) \cdot \mathbf{a}_n|^2 = |(\phi_{\text{حقیقی}}) \cdot \mathbf{a}_n|^2 + |(\phi_{\text{خیلی}}) \cdot \mathbf{a}_n|^2$$

تب

$$\wp \cdot \mathbf{a}_n = \wp \sin \theta \sin \phi$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\wp \cdot \mathbf{a}_n|_{\text{وسط}}^2 &= \frac{1}{4\pi} \int |\wp|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi \\ (9.34) \quad &= \frac{|\wp|^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{3} |\wp|^2 \end{aligned}$$

ماخوذ: ہر جانب سے آمدی، غیر قطبی، غیر اتافی شعاع کے زیر اثر حال b سے حال a میں تحرک شدہ احراج کی تحویلی شرح درج ذیل ہوگی،

$$(9.35) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \rho(\omega_0)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت قطب معیار اثر کا تالی رکن \wp ہوگا (مساوات ۹.۴۴) اور $(E_b - E_a) / \hbar$ پرانی اکائی تعدد میدان میں کثافت توانائی $\rho(\omega_0)$ ہوگی۔^{۲۸}

۹.۳ خود باخود احراج

۹.۳.۱ آئنشٹائن A اور B عددی سر

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال ψ_a میں N_a اور بالائی حال ψ_b میں N_b جوہر پائے جاتے ہوں۔ خود باخود احراجی شرح A لیتے ہوئے اکائی وقت میں بالائی حال کو $N_b A$ ذرات خود باخود احراج کے عمل سے چوڑیں گے۔ جیسا ہم مساوات ۹.۴۷ میں دیکھ چکے ہیں تحرک شدہ احراج کی تحویلی شرح برقی طیفی میدان کی کثافت توانائی کے راست متناسب ہوگا $B_{ab} \rho(\omega_0)$ ۔ یوں بالائی حال کو تحرک شدہ احراج کی بنا پر اکائی وقت میں $N_b B_{ba} \rho(\omega_0)$ ذرات چوڑیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح $\rho(\omega_0)$ کا راست متناسب ہے جسے ہم $B_{ab} \rho(\omega_0)$ کہتے ہیں۔ اس طرح اکائی وقت میں $N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$ ذرات بالائی حال میں شامل ہوں گے تمام کو ملا کر درج ذیل ہوگا۔

$$(9.38) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

ہم حقیقی اور خیالی حصوں کا حساب علیحدہ علیحدہ کر کے نتائج جمع کر سکتے ہیں۔ مساوات ۹.۴۷ میں مطلق قیمت علامت دو کام کر رہی ہے، یہ سمتیہ کی مقدار اور مخلوط حیث:

$$|\wp|^2 = |\wp_x|^2 + |\wp_y|^2 + |\wp_z|^2$$

تساہر کرتی ہے۔

^{۲۸} یہ تابع وقت نظریہ اضطراب کے فرم کے سہرا قانون کی ایک مخصوص صورت ہے، جو کہتا ہے کہ تحویلی شرح، اضطرابی تحفیہ کے متوالی ارکان کے مربع اور تحویلی تعدد پر اضطراب کے زور کا راست متناسب ہوگا۔

معرض کریں پائے جانے والے میدان کے ساتھ یہ جوہر حراری توازن میں ہوں یوں ہر ایک سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی اور $dN_b/dt = 0$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۹.۴۹) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماراتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ درج حرارت T پر حراری توازن میں توانائی E ذرات کی تعداد بولٹزمان حیزو ضربی $\exp(-E/k_B T)$ کے راستہ متناسب ہوگا لہذا

$$(۹.۵۰) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

اور درج ذیل ہوں گے

$$(۹.۵۱) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسی کلیہ مساوات 5.113 ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(۹.۵۲) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ان دونوں ریاضی فستروں کا موازنہ کرنے سے درج ذیل

$$(۹.۵۳) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا

$$(۹.۵۴) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

مساوات 9.53 اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے ہیں تحرک شدہ اخراج کی تجویلی شرح وہی ہے جو انجذاب کی ہے۔ لیکن سن 1917 میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنسٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرک شدہ اخراج ایجاد کرے تاہم ہماری دلچسپی یہاں پر مساوات 9.54 ہے جو ہمیں تحرک شدہ اخراجی شرح $(B_{ba}\rho(\omega_0))$ جب ہم پہلے سے جانتے ہیں کی صورت میں خود باخود اخراجی شرح A دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مساوات 9.47 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۹.۵۵) \quad B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |p|^2$$

لہذا خود باخود اخراجی شرح درج ذیل ہوگا

$$(۹.۵۶) \quad A = \frac{\omega_0^3 |\wp|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

سوال ۹.۸: نیچے رخ تحویل میں خود باخود اخراج اور حراری تحرک شدہ اخراج وہ تحرک شدہ اخراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا ہو میں معتدل ہوگا۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت $T = 300 \text{ K}$ پر $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت کم تعددوں پر حراری تحرک شدہ اخراج غالب ہوگا جبکہ $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ سے بہت زیادہ تعدد پر خود باخود اخراج غالب ہوگا۔ دکھائی دینے والی روشنی کے لیے کونسا غالب ہوگا؟

سوال ۹.۹: برقی طبعی میدان کا زمینی حال کثافت توانائی $\rho_0(\omega)$ جانتے ہوئے خود باخود اخراجی اشارہ درحقیقت تحرک شدہ اخراج مساوات 9.47 ہوگا۔ لہذا آئنسٹائن عددی سر A اور B جانے بغیر آپ خود باخود اخراجی شرح مساوات 9.56 اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر چہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہوگی تاہم اگر آپ یہ ماننے پر آمادہ ہو جائیں کہ زمینی حال کی ہر ایک انداز میں صرف ایک نوریہ پایا جاتا ہے تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہوگا۔

(الف) مساوات 5.111 کی جگہ $N\omega = d_k$ پر کر کے $\rho_0(\omega)$ حاصل کریں۔ بہت زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا ورنہ کل حسائی توانائی لامتناہی ہوگی۔ تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑ تے ہیں۔

(ب) اپنے نتیجہ کے ساتھ مساوات 9.47 استعمال کر کے خود باخود اخراجی شرح حاصل کریں۔ مساوات 9.56 کے ساتھ موازنہ کریں۔

۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات 9.56 ہمارا بنیادی نتیجہ ہے جو تحرک شدہ اخراج کی تحلیلی شرح دیتی ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ تحرک شدہ اخراج کے نتیجہ میں وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹے گی۔ بالخصوص وقتی دورانیہ dt میں جوہروں میں تعداد کی کمی $A dt$ ہوگی۔

$$(9.57) \quad dN_b = -AN_b dt$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید نئے جوہر ہیجان انگیز نہیں کیے جاسکتے ہیں۔ اس کو $N_b(t)$ کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(9.58) \quad N_b(t) = N_b(0)e^{-At}$$

ظاہر ہے کہ ہیجان حال میں تعداد وقت نمائی طور پر کم ہوگی جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہوگا۔

$$(9.59) \quad \tau = \frac{1}{A}$$

جسے اس حال کا عرصہ حیات کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں $N_b(t)$ کی قیمت آغازی قیمت کی $1/e \approx 0.368$ ہوگی۔

میں اب تک فرض کرتا رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں۔ تاہم سادہ علاقیت کے بنا پر ایسا کیا تحرک شدہ اخراج کا کلیہ مساوات 9.56 دیگر متبل روض سطح سے قطع نظر حال

$\psi_a \rightarrow \psi_b$ تحویلی شرح دیتی ہے سوال 9.15 دیکھیں۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تنزل ہوں گے۔ یعنی ψ_b کا تنزل بہت ساری زیریں توانائی حالات ($\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}, \dots$) میں ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرح جمع ہو کر درج ذیل عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} \quad (9.۶۰)$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار q محور x پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال $|n\rangle$ مساوات 2.61 سے آغاز کر کے خود باخود احسراج تنزل کی بنا پر حال $|n'\rangle$ پہنچتا ہے۔ مساوات 9.44 کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\omega = q \langle n|x|n'\rangle i$$

آپ نے سوال 3.33 میں x کے متالہی ارکان تلاش کئے۔

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

جہاں مرتعش کی قدرتی تعدد ω ہے۔ مجھے تحریک شدہ احسراج کے تعدد کے لیے اس حرفت کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔ چونکہ ہم احسراج کی بات کر رہے ہیں لہذا n' لازمی طور پر n سے نیچے ہوگا۔ ہماری اس مقصد کی عرض سے تب درج ذیل ہوگا۔

$$\omega = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} i \quad (9.۶۱)$$

بظاہر تحویل سیڑھی پر صرف ایک قدم نیچے ممکن ہے اور احسراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n+1/2)\hbar\omega - (n'+1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n-n')\omega = \omega \quad (9.۶۲)$$

حیرت کی بات نہیں کہ نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر احسراج کرتا ہے۔ تحویلی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (9.۶۳)$$

اور n ویں ساکن حال کا عرصہ حیات درج ذیل ہوگا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \quad (9.۶۴)$$

چونکہ ہر ایک احسراجی نوریہ $\hbar\omega$ توانائی ساتھ لے جاتا ہے لہذا احسراجی طاقت $A\hbar\omega$ ہوگا۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا n ویں حال میں مرتعش کی توانائی $(n + 1/2)\hbar\omega$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$(9.65) \quad P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (E - \frac{1}{2}\hbar\omega)$$

ابتدائی توانائی E کا کوانٹائی مرتعش اوسطاً اتنی طاقت خارج کرے گا۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط احسراجی طاقت تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت سرعت بار q کا احسراجی طاقت کلیہ لارمر دیتا ہے۔

$$(9.66) \quad P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

ہارمونی مرتعش $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ جس کا محیط x_0 ہوگا میں سرعت $a = -x_0\omega^2 \cos(\omega t)$ ہوگا۔ پورے ایک چکر پر تب اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی $E = (1/2)m\omega^2 x_0^2$ ہے لہذا $x_0^2 = 2E/m\omega^2$ ہوگا۔ جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.67) \quad P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E$$

توانائی E کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی طاقتی احسراج کرتا ہے۔ کلاسیکی حد ($\hbar \rightarrow 0$) میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں۔ البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ مساوات 9.65 تحفظ دیتا ہے۔ اگر $E = (1/2)\hbar\omega$ ہو تب مرتعش طاقتی احسراج نہیں کرے گا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بہت زیادہ تعداد کے جوہروں میں سے نصف تحلیل کرتے ہوں۔ نصف حیات اور حال کے عرصہ حیات کے پچر شتیر تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں $n = 2$ حالات کے لیے عرصہ حیات کو سیکنڈوں میں تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$, $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$ وغیرہ وغیرہ۔ طرز کے متالبی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ اور $z = r \cos \theta$ ہوں گے۔ ان میں سے زیادہ تر نکلات صفر کے برابر ہوں گے لہذا احساب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔

جواب: سوائے ψ_{200} جولا مستثنیٰ ہے باقی تمام کے لیے 1.60×10^{-9} سیکنڈ ہوگا۔

$$(9.40) \quad (m' - m) \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i \langle n'l'm' | y | nlm \rangle$$

یوں آپ y کے متالبی ارکان کو مطابقتی x کے متالبی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں اور آپ کو کبھی بھی y کے متالبی ارکان کا حساب کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
آخر میں y کے ساتھ L_z کا مقابلہ درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L_z, y] | nlm \rangle &= \langle n'l'm' | (L_z y - y L_z) | nlm \rangle \\ &= (m' - m)\hbar \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i\hbar \langle n'l'm' | x | nlm \rangle\end{aligned}$$

ماخوذ

$$(9.71) \quad (m' - m) \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = -i \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

بالخصوص مساوات 9.70 اور مساوات 9.71 کو ملا کر

$$(m' - m)^2 \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = i(m' - m) \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = \langle n'l'm' | x | nlm \rangle$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.72) \quad \langle n'l'm' | x | nlm \rangle = \langle n'l'm' | y | nlm \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad (m' - m)^2 = 1$$

مساوات 9.69 اور مساوات 9.72 سے ہمیں m کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$(9.73) \quad \Delta m = \pm 1 \quad \text{یا} \quad 0$$

اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں تھا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے آپ کو یاد ہوگا نوریہ چکر ایک کا حاصل ہے لہذا اس کے m کی قیمت 0، 1 یا -1 ہو سکتی ہے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے جاتا ہے جو ہر اتنا کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے l اور l' :

آپ سے سوال 9.12 میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کے کہا گیا۔

$$(9.74) \quad [L^2, [L^2, r]] = 2\hbar^2 (rL^2 + L^2 r)$$

ہمیشہ کی طرح ہم اس مقابلہ کو $|nlm\rangle$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ پلٹ کر انتخابی قواعد اخذ کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\langle n'l'm' | [L^2, [L^2, r]] | nlm \rangle &= 2\hbar^2 \langle n'l'm' | (rL^2 + L^2 r) | nlm \rangle \\ &= 2\hbar^4 [l(l+1) + l'(l'+1)] \langle n'l'm' | r | nlm \rangle = \langle n'l'm' | (L^2 [L^2, r] - [L^2, r] L^2) | nlm \rangle \\ &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | [L^2, r] | nlm \rangle \\ &= \hbar^2 [l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | (L^2 r - r L^2) | nlm \rangle\end{aligned}$$

$$(۹.۷۵) \quad = \hbar^4 [l'(l' + 1) - l(l + 1)]^2 \langle n'l'm' | r | nlm \rangle$$

ماخوذ

$$2[l(l + 1) + l'(l' + 1)] = [l'(l' + 1) - l(l + 1)]^2$$

$$(۹.۷۶) \quad \langle n'l'm' | r | nlm \rangle = 0 \text{ یا پھر}$$

لیکن

$$[l'(l' + 1) - l(l + 1)] = (l' + l + 1)(l' - l)$$

اور

$$2[l(l + 1) + l'(l' + 1)] = (l' + l + 1)^2 + (l' - l)^2 - 1$$

کی بنا پر مساوات 9.76 میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۹.۷۷) \quad [(l' + l + 1)^2 - 1][(l' - l)^2 - 1] = 0$$

ان میں پہلا جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے ماسوائے اس صورت جب $l' = l = 0$ ہو۔ اس پیچیدگی سے سوال 9.13 میں چھٹکارا حاصل کیا گیا ہے لہذا یہ شرط $l' = l \pm 1$ کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں l کے لیے انتخابی قواعد حاصل ہوتا ہے۔

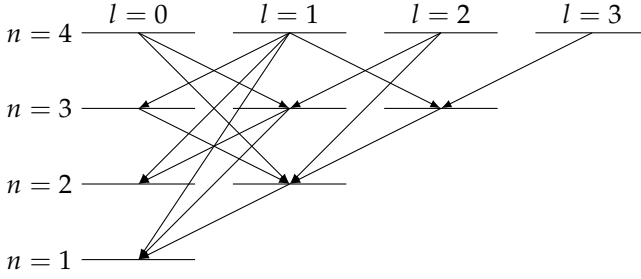
$$(۹.۷۸) \quad \Delta l = \pm 1$$

اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر ایک حاصل ہے لہذا زاویائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد $l' = l + 1$ یا $l' = l - 1$ کی احبازت دیں گے۔ برقی جھٹکتی احسراج کے لیے زاویائی معیار حرکت کی بقا درمیانی صورت کی احبازت دیتا ہے۔

لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ یوں خود باخود احسراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی ان میں سے کئی کو انتخابی قواعد ممکن بناتے ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے لیے ابتدائی چار بوہر سطحوں کے لیے احبازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ $2S$ حال ψ_{200} اسی جگہ پھنسا رہے گا۔ چونکہ $l = 1$ کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا لہذا یہ تنزل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازک مستحکم حال کہتے ہیں اور یقیناً اس کا عرصہ حیات مثلاً $2P$ حالات $\psi_{210}, \psi_{211}, \psi_{21-1}$ سے کافی لمبا ہے۔ نازک مستحکم حالات بھی آخر کار تصاداً کی بنا پر یا ممنوعہ تحویل کی بنا پر سوال 9.21 یا متعدد دنیویہ کے احسراج کے بنا پر تنزل پذیر ہوں گے۔

سوال 9.۱۲: مساوات 9.74 میں دی گئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$



شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کی اجزائی تسنزل۔

اس کو اور $0 = r.L = r.(r \times p)$ کو استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$

z سے r تک عمومیت دینا حقیر سا کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ $l' = l = 0$ کی صورت میں $\langle n'l'm'|r|nlm\rangle = 0$ ہوگا۔ اس سے مساوات 9.78 میں درپیش کی ختم ہوگی۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے $n = 3, l = 0, m = 0$ حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک کئی برقی جفت کتب تحویل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

(الف) اس تسنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |nlm\rangle \rightarrow |n'l'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

(ب) اگر آپ کے پاس ایک بوتل اس حال میں جو ہروں سے بھرا ہوا ہے تب ہر راستے سے کتنا حصہ گزرے گا؟

(ج) اس حال کا عرصہ حیات کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال $|300\rangle$ میں نہیں ہوگا لہذا اس ترتیب میں ہر مرتبہ صرف پہلا قدم حل کر کے متعلقہ عرصہ حیات حاصل ہوگا۔ متعدد آزاد راستوں کی صورت میں تحویلی شرح ایک دوسرے کے ساتھ جمع ہوں گی۔

مزید سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات 9.1 اور مساوات 9.2

(۹.۷۹)

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تاجز وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر ہم اس اضطراب $H'(t)$ چالو کرتے ہیں۔ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۸۰) \quad H = H_0 + H'(t)$$

(الف) مساوات 9.6 کی تعمیری صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(۹.۸۱) \quad \psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۹.۸۲) \quad c_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar}$$

جہاں H'_{mn} درج ذیل ہے

$$(۹.۸۳) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

(ب) اگر نظام حال ψ_N میں آغاز کریں تب دکھائیں کہ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں درج ذیل

$$(۹.۸۴) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا

$$(۹.۸۵) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t'/\hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

(ج) فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر چالو اور بعد میں لمحہ t پر منقطع کرنے کے علاوہ H' مستقل ہے۔ حال N سے حال M ($M \neq N$) میں تحویل کے احتمال کو t کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$(۹.۸۶) \quad 4 |H'_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t/2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

(د) فرض کریں $H' = V \cos(\omega t)$ عامی مفروضے فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی $E_M = E_N \pm \hbar\omega$ کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۷) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

(و) فرض کریں ایک متعدد سطحی نظام پر غیر اتعاع کی برقناطیسی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ 3.2.9 کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ دو سطحی نظام کے لیے تحرک شدہ اخراج کی تحویلی شرح وہی کلیہ مساوات 9.47 دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر $c_m(t)$ کو رتبہ اول تک سوال 9.15 (ج) اور (د) کے لیے تلاش کریں۔ معمولی شرط

$$\sum_m |c_m(t)|^2 = 1 \quad (9.88)$$

کی تصدیق کر کے تضاد اگر موجود ہو پر تبصرہ کریں۔ مندرجہ کریں آپ ابتدائی حال ψ_N میں رہنے کا احتمال جاننا چاہتے ہیں۔ کیا $|c_N(t)|^2$ یا $1 - \sum_{m \neq N} |c_m(t)|^2$ کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: ایک لامتناہی چوکور کنویں کہ N ویں حال میں وقت $t = 0$ پر ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ پہنچے سیکھتی ہے جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لیکن تابع وقت ہوگی $V_0(t)$ جہاں $V_0(0) = V_0(T) = 0$ ہوگا۔

(الف) مساوات 9.82 استعمال کرتے ہوئے $c_m(t)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں اور دکھائیں کہ تفاعل موج کی حیطہ زاویائی دور تبدیل ہوگا لیکن تحویل نہیں ہوگی۔ تفاعل $V_0(t)$ کی صورت میں تبدیلی حیطہ، تبدیلی زاویائی دور $\psi(T)$ تلاش کریں۔

(ب) اسی مسئلہ کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج موازنہ کریں۔

تبصرہ: ہر اس صورت میں جب مخفیہ کے ساتھ اضطراب x میں مستقل t میں جمع کرتا ہو یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ یہ صرف لامتناہی چوکور کنویں کی خاصیت نہیں ہے۔ سوال 1.8 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ایک بُدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال میں کیت m کا ایک ذرہ ابتدائی طور پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک اینٹ اس کنویں میں گرانی جاتی ہے جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے جہاں $V_0 < E_1$ ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کچھ وقت T کے بعد اینٹ ہٹائی جاتی ہے اور ذرہ کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ رتبہ اول نظریہ اضطراب میں نتیجہ E_2 ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرک شدہ احسراج، تحرک کی انجذاب اور خود باخود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ خود باخود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیسی ممک ساکن مقناطیسی میدان $B_0 \mathbf{k}$ میں $1/2$ چکر کا ایک ذرہ جس کی مسکن مقناطیسی نسبت γ ہولار مرتعد $\gamma B_0 = \omega_0$ مشال 4.3 سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عارضی ریڈیائی تعدد میدان $B_{rf} [\cos(\omega t) \mathbf{i} - \sin(\omega t) \mathbf{j}]$ چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B = B_{rf} \cos(\omega t) \mathbf{i} - B_{rf} \sin(\omega t) \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k} \quad (9.89)$$

(الف) اس نظام کے لیے 2×2 ہیملٹنی متالاب مساوات 4.158 تیار کریں۔

(ب) وقت t پر $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ چکر حال ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$(9.90) \quad \dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a) : \quad \dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} a - \omega_0 b)$$

جہاں $\Omega \equiv \gamma B_{rf}$ کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کی زور کے ساتھ پایا جاتا ہے۔

(ج) ابتدائی قیمتیں a_0 اور b_0 کی صورت میں $a(t)$ اور $b(t)$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(9.91) \quad \omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

(د) ہواں میدان چکر حال یعنی $a_0 = 1, b_0 = 0$ سے ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تحویل کی احتمال کو بطور وقت کا تعلق تلاش کریں۔

$$P(t) = \{ \Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2] \} \sin^2(\omega' t/2) \quad \text{جواب:}$$

(د) منحنی گمک

$$(9.92) \quad P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو غیر متغیر ω_0 اور Ω کی صورت میں متحرک تعدد ω کی تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $\omega = \omega_0$ پر اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ زیادہ سے زیادہ قیمت کی نصف پوری چوڑائی $\Delta\omega$ تلاش کریں۔

(ه) چونکہ $\omega_0 = \gamma B_0$ ہے لہذا ہم تجرباتی طور گمک کا مشاہدہ کر کے ذرہ کی مقنطیسی جفت کتب معیار اثر تعین کر سکتے ہیں۔ ایک مرکزی مقنطیسی گمک تجربہ میں نوریہ کا g جزو ضربی ایک ٹلا کے ساکن میدان اور ایک مائیکروٹلا جٹ کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ پروٹان کی مقنطیسی معیار اثر کے لیے حصہ 6.5 دیکھیں۔ منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ اپنا جواب Hz میں دیں۔

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات 9.31 میں مندرجہ ذیل کی وجہ سے روشنی کی طول موج کے لحاظ سے اتنا چھوٹا ہے کہ میدان کی فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا

$$(9.93) \quad E(r, t) = E_0 \cos(k.r - \omega t)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء پر ہو تب متعلقہ حجم پر $k.r < 1$ اور $k.r \sim r/\lambda < 1$ لہذا $|k| = 2\pi/\lambda$ ہوگا جس کی بنا پر ہم اس جہز کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ مندرجہ کریں ہم رتبہ اول درستگی۔

$$(9.94) \quad E(r, t) = E_0 [\cos(\omega t) + (k.r) \sin(\omega t)]$$

استعمال کریں۔ اس کا پہلا جہز وہ احباب برقی جفت کتبہ توہیات پیدا کرتا ہے جن پر متن میں بات کی چسکی ہے۔ دوسرا جہز وہ توہیات پیدا کرتا ہے جنہیں ممنوعہ مقناطیسی جفت کتبہ اور برقی چو کتبہ توہیل کہتے ہیں $k.r$ کی اس سے زیادہ بڑی طاقتیں مزید زیادہ ممنوعہ توہیات پیدا کرتی ہے جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر کے ساتھ وابستہ ہوں گے۔

(الف) ممنوعہ توہیات کی خود بخود احراجی شرح حاصل کریں اس کی تنظیم اور حرکت کے رخ پر اوسط قیمت تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر چہ مکمل جواب کے لیے ایسا نا ضروری ہوگا۔ جواب:

$$(9.95) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (a_n.r) (k.r) | b \rangle|^2$$

(ب) دکھائیں کہ ایک بعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ توہیات سطح n سے سطح $n-2$ میں ہوگی اور توہیلی شرح جس کی اوسط قیمت a_n اور k پر حاصل کی گئی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$(9.96) \quad R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5}$$

تبصرہ: یہاں ω سے مراد نوریہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد۔ احباب برقی شرح کے لحاظ سے ممنوعہ شرح کی نسبت تلاش کریں۔ ان اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

(ج) دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ توہیل بھی $1S \rightarrow 2S$ کی احبابزت نہیں دیتا۔ درحقیقت یہ تمام بلند متعدد کتبہ کے لیے بھی درست ہوگا غالب تنزل دو نوریہ احراج کی بنا پر ہوگا جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا سوال حصہ ہوگا۔

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ n, l سے n', l' میں توہیل کے لیے ہائیڈروجن کا خود بخود احراجی شرح مساوات 9.56 درج ذیل ہوگا۔

$$(9.97) \quad \frac{e^2 \omega^3 I^2}{3 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1}, & l' = l+1 \\ \frac{l}{2l-1}, & l' = l-1 \end{cases}$$

جہاں I درج ذیل ہے۔

$$(9.98) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{nl}(r) R_{n'l'}(r) dr$$

جوہر m کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے انتخابی قواعد $m-1, m, m+1$ یا m' کے تحت m' حالات میں سے کسی ایک میں پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب m پر منحصر نہیں ہے۔ اشارہ: پہلے $l' = l + 1$ صورت کے لیے $|nlm\rangle$ اور $|n'l'm'\rangle$ کے بیچ x, y اور z کے تمام غیر صفر تالیبی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل متدار تعین کریں

$$|\langle n', l+1, m+1 | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m | r | nlm \rangle|^2 + |\langle n', l+1, m-1 | r | nlm \rangle|^2$$

یہی کچھ $l' = l - 1$ کے لیے بھی کریں۔

جوابات

فهرست

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
 حالات، 133
 احبابی
 قیمتیں، 33
 ارتعاش
 نیوٹرینو، 127
 استمراری، 105
 استمراری مساوات، 194
 استمراری، 138
 اصول
 عدم یقینیت، 19
 اصول تغیریت، 299
 اصول عدم یقینیت، 116
 اضافیتی تصحیح، 272
 اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
 الیکٹران
 کلاسیکی رداس، 175
 الیکٹران نیوٹرینو، 127
 امتیازی تقابلی عمل، 103
 امتیازی فتر، 103
 امتیازی فتر مساوات، 103
 انتشاری
 رشته، 67
 انحطاطی، 90، 104
 انحطاطی دباؤ، 228
 اندرونی ضرب، 98
 انعکاس
 شرح، 78
 اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
 برقی حرکیات
 کوانٹائی، 278
 بقا
 توانائی، 39
 بقا احتمال، 194
 بلاواسطہ مکمل، 313
 بسندشی توانائی، 156
 بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
 بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
 variables
 separation of, 25
 variance, 9
 variational principle, 299
 vectors, 97
 velocity
 group, 66
 phase, 66
 virial theorem, 132
 three-dimensional, 194
 wag the tail, 56
 wave
 incident, 77
 packet, 62
 reflected, 77
 transmitted, 77
 wave function, 2
 wave vector, 224
 wavelength, 18
 white dwarf, 252
 Wien displacement law, 250
 WKB, 321
 Yukawa potential, 316
 Zeeman effect, 283
 zero-crossing, 34

- بوسن، 208
بوہر
رداس، 156
کلیہ، 155
بوہر مقناطیس، 284
بیریان، 191
میل
کروی تقا عمل، 148
بے لچک پھسکی، 173
پازیشٹرانیم، 207، 291
پاشن ویک اثر، 285
پالی اصول مناعت، 208
پالی متالب چکر، 177
پایان، 191
پنیاں، 234
پس پردہ، 219
پلانک
کلیہ، 162
پیدا کار
فت میں انتقال کا، 136
وقت میں انتقال، 136
پیدا کار
تقا عمل، 60
گھومت، 200
تجدیدی عرصہ، 89
تجربہ
شرن و گرلاخ، 184
ترتیبی پیمائشیں، 131
ترسیل
شرح، 78
تسل
بالمر، 162
پاشن، 162
ٹیلر، 42
طافتی، 43
فوریئر، 35
لیمان، 162
تشاکلیت
ضرورت، 209
تفکیک، 237
تعداد مکین، 237
تغیین حال، 103
تغیریت، 9
تقا عمل
ڈیٹا، 72
تقا عمل موج، 2
تقا علیہ، 128
تکمل
ڈھنپائی، 312
توالی
کلیہ، 55
توانائی
اجبازتی، 29
توقعاتی
قیمت، 7
شنائی عددی سر، 239
حبرو ڈارون، 280
جسم مقیاس، 229
جفت، 34
تقا عمل، 31
جفت قطب معیار اثر
مقناطیسی، 181
جوہری مدار چوں
خطی جوڑ ترکیب، 311
جی حبرو ضربی، 278
چکر، 173، 174
مخالف میدان، 175
ہم میدان، 175
چکر چکر رابطہ، 290
چکر کار، 175
چکر و مدار باہم عمل، 279
چکر و مدار رابطہ، 272
چندر شیکھر حد، 253
چوزاویہ تشکل، 298
حال
بچھراو، 70

- دوری سستی، 66
 گروہی سستی، 66
 رمسز اور وٹاؤسڈ اثر، 86
 رواحتال، 194
 روڈریگیس
 کلیہ، 142
 ریمان زیٹا تفسا عمل، 249
 زاویائی معیار حرکت
 بقا، 170
 خنقی، 174
 غیر خنقی، 174
 زیسان اثر، 283
 ساکن
 حالیت، 27
 سٹرلنگ تخمین، 243
 شیفتن و بولسٹمن کلیہ، 251
 سرحدی شراط، 32
 سرنک زنی، 72، 79
 سفید بونا، 252
 سگرا، 15
 سلور، 220
 سمتاویہ، 128
 سمتیات، 97
 سمتیہ موج، 224
 سوچ
 انکاری، 4
 تقلید پسند، 3
 حقیقت پسند، 3
 سوڈیم، 23
 سہ تا، 188
 سیاہ جسی طیف، 250
 سیزھی
 عاملین، 46
 سیزھی تفسا عمل، 80
 شمارک اثر، 296
 شرودنگر
 غیر تابع وقت، 27
 شرودنگر نقطہ نظر، 136
 زمینی، 34، 156
 مقید، 70
 ہچان، 34
 حراری توازن، 236
 حرکت
 سائیکلوثران، 202
 خطی الجبرا، 97
 خطی تبدلہ، 97
 خطی جوڑ، 28
 خفیہ متغیرات، 3
 خول، 219، 235
 درجہات آزادی، 254
 درجہ حرارت، 236
 درز، 234
 درز توانائی، 290
 دلیل، 61
 دہلا نا، 56، 96
 دوری جدول، 219
 ڈیراک
 علاقیت، 128
 کنگھی، 229
 معیاری عمودیت، 108
 ڈیلٹا
 کرونیٹر، 35
 ڈیوٹریم، 297
 ڈیوٹیران، 297
 ذرہ
 غیر مستحکم، 21
 رو
 احتال، 21
 ردای مساوات، 146
 رڈبرگ، 162
 کلیہ، 162
 رشتہ
 پترنک، 295
 کرامرس، 295
 رفتار

- فـنـر و نـو س
ترکیب، 54
فـنـن
بیرونی، 23
دوبری، 128
فورینسر
الٹ بدل، 63
بدل، 63
- فـنـن
غیر ہم آہنگ، 116
فـنـن
بچھراؤ، 93، 94
ترسیل، 95
فـنـن اراکان، 125
فـنـن
کب، 42
فـنـن مین، 298
قواعد بن، 220
قوالب، 98
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245
کایان، 191
کشافت
آزاد الیکٹران، 227
احتمال، 10
کشیر رکشی
ہرمانڈ، 58
کرائنگ و پینی نمونہ، 232
کروی
ہارمونیات، 144
کبھی تشاکل، 298
کلیہ
ڈی بروگلی، 19
روڈریگیس، 60
پولر، 30
کلیش و گورڈن عددی سر، 190
کیٹ
تختیف شدہ، 206
کوارک، 191
- شریک عامل، 103
شریک گرفتگی بندہ، 214
شارپائی مفہوم، 2
شوارز
عدم مساوات، 437
شوارز عدم مساوات، 99
فـنـر مـتـم انقطاع، 34
طاق، 34
طامس استقبالی حرکت، 279
طول موج، 18، 162
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17
تخلیل، 129
تقلیل، 166، 46
رفع، 166، 46
مبادلہ، 209
عبور، 161
عدم تعین، 3
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عقدہ، 34
علائیت
تفعلی و سمتاویہ، 128
علیحدگی متغیرات، 25
علیحدگی مستقل، 26
عمودی، 100، 34
غیر مسل، 105
غیر موصل، 235
- فـنـری
توانائی، 227
درجہ حرارت، 228
سطح، 227
فـنـر مـیان، 208
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اسمتی، 145
 مقنطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرفتتی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گروپویشن، 163
 گیما تفاعل، 249
- لاپلائی، 138
 لارمر تردد، 184
 لاگت
 شریک کشیررکتی، 158
 کشیررکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لیٹان، 175
 لتصیم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسٹو سطحیں، 202
 لسٹو جی جزو ضربی، 284
 لورینتز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیب انتقال، 272
- ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم
 تفاعل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کردی، 139
 مخالف بیٹا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تفاعلات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز جزو، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وننمن و بلن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناسٹائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فضا تفاعل موج، 113، 195
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 35، 100
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈیل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپیلا فٹا عدد، 221
کاشیہ فٹا عدد، 221
کادوسرا فٹا عدد، 221
ہارمونی
مسر نقش، 32
ہارمونی مسر نقش
تین البعدی، 193
ہائیڈروجن
میو، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فن، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی قسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلدیت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتطبی معیار اثر
بے ضابطہ، 278
مکمل، 35، 100
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزدہیلیم، 217
نظریہ اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیومن
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ، 70