

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا ہسین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن عددی سر A اور B	۹.۳.۱
۳۶۲	بجبان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۲
۳۸۳	بیت بیری	۱۰.۲
۳۸۳	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندسی بیت	۱۰.۲.۲
۳۹۱	اہارونو پوہم اثر	۱۰.۲.۳
۴۰۱	بکھراؤ	۱۱
۴۰۱	تعارف	۱۱.۱
۴۰۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۴۰۵	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۴۰۶	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۶	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۹	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۱۲	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۱۵	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۱۵	مساوات شروڈنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۹	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۲۳	تسلل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۷	پس نوشت	۱۲
۴۲۸	آمنشائن پوڈلکیوروزن تصاد	۱۲.۱
۴۲۹	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۳	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۳۵	شروڈنگر کی ملی	۱۲.۴
۴۳۶	کوانٹائی زینو تصاد	۱۲.۵
۴۳۹	جوابات	
۴۴۱	خطی الجبرا	۱
۴۴۱	سمتیات	۱.۱
۴۴۱	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۴۲	فتالب	۳.۱

۴۴۲	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۲	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۴۲	هر مشی تبادلے	۶.۱

۴۴۳ فهرنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۱

بکھراؤ

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

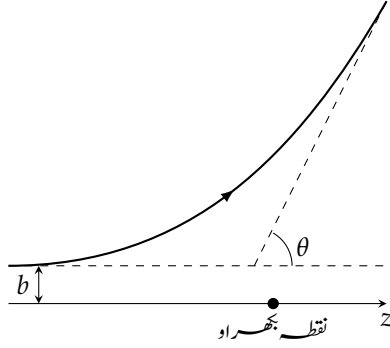
فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرے کی آمد ہوتی ہے (مثلاً، پروٹان ایک بھاری مرکزہ پر دافعہ جاتا ہے)۔ یہ توانائی E اور ٹکراؤ مقدار معلوم b کے ساتھ آکر، زاویہ بکھراؤ θ پر ابھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ (میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استستی شکل ہے، یوں خط حرکت^۳ مستوی میں پایا جائے گا، اور ساتھ ہی فرض کرتا ہوں کہ نشانہ بھاری ہے، لہذا تصادم کی ہینا پر اس کی اچھال نظر انداز کی جاسکتی ہے۔) کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم جانتے ہوئے، زاویہ بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً، عام طور پر، ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو، زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سختے کرہ بکھراؤ۔ فرض کریں ہدف رداس R کا ایک سخت بھاری گیند ہے، جبکہ آمدی ذرہ ہوائی صندوق کا چھرا ہے، جو ٹپا کھا کر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم $b = R \sin \alpha$ اور زاویہ بکھراؤ $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

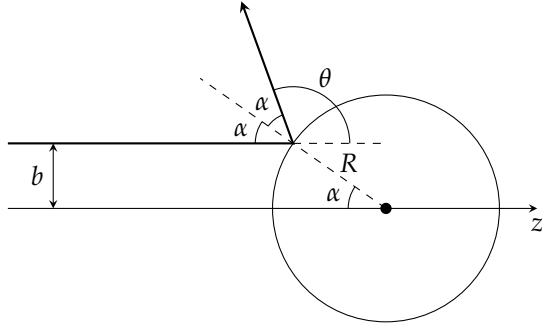
$$(11.1) \quad b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

ظاہر اور ج ذیل ہوگا۔

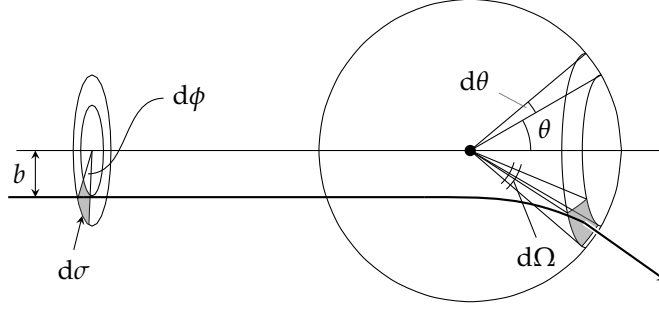
impact parameter^۱
scattering angle^۲
trajectory^۳



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراؤ، جس میں نکتہ اور مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراؤ θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے پسگردار بکھراؤ۔



شکل ۱۱.۳: $d\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$

□

عمومی طور پر، لامتناہی چھوٹے قطعہ، جس کا رقبہ عمودی تراش $d\sigma$ ہو، میں آمدی ذرات، مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ جتنا $d\sigma$ بڑا ہو، اتنا $d\Omega$ بڑا ہوگا؛ ان کے تناسبی جزو ضربی $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$ کو تفریقی (بکھراؤ) عمودی تراش^۴ کہتے ہیں۔ ^۵یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

عکراؤ متدار معلوم اور استی زاویہ ϕ کی صورت میں $d\sigma = b db d\phi$ اور $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ہیں، لہذا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

ہوگا۔ (عمومی طور پر θ متدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تعلق ہوگا، لہذا یہ تفریق حقیقتاً منفی ہوگا؛ اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔)

مثال ۱۱.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال بارے رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ (مثال ۱۱.۱) کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

^۴differential (scattering) cross-section

^۵یہ ناقص زبان ہے: D تفریقی نہیں ہے، اور نہ ہی یہ عمودی تراش ہے۔

لہذا

$$(11.۲) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left(\frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□ ہوگا۔ اس مثال میں تقریبی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے، جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا مکمل:

$$(11.۳) \quad \sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega$$

کل عمودی تراش^۱ ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، یہ آمدی شعاع کا ذریعہ ہے جس کو ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر، سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں

$$(11.۸) \quad \sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2$$

ہوگا، جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے: یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے؛ اس رقبہ کے اندر آمدی چھسے ہدف کو مار پائیں گے، جبکہ اس سے باہر چھسے ہدف کو خط کریں گے۔ یہی تصورات ”نرم“ اہداف (جیسا مرکزہ کا کولمب میدان) کے لئے بھی کارآمد ہے، جن میں صرف نشانے پر ”لگنا یا نہ لگنا“ نہیں بلکہ اس کے علاوہ بھی بات کی جائے گی۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت (یا تابندگی^۲) کی ایک شعاع ہو۔

$$(11.۹) \quad \mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد}$$

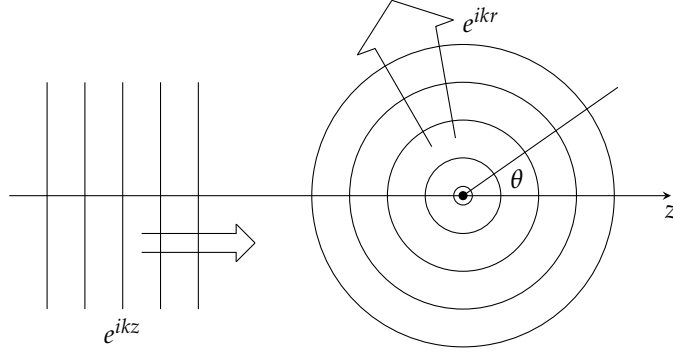
فی اکائی وقت، رقبہ $d\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات (اور یوں ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرنے والے ذرات) کی تعداد $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$ ہوگی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۱۰) \quad D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتی ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جاسکتا ہے، لہذا اس کو عموماً تقریبی عمودی تراش کی تعریف لی جاتی ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں بکھرے ذرات کا شغف تک پہنچتے ہوں، ہم اکائی وقت میں کشف کیے گئے ذرات کی گنتی کو $d\Omega$ سے تقسیم کر کے، آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول زنی کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: رد فورڈ بکھراؤ^۳ بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ بھاری ساکن ذرے سے، جس کا بار q_2 ہو، بکھرتا ہے۔

^۱ total cross-section
^۲ luminosity
^۳ Rutherford scattering



شکل ۱۱.۳: امواج کا بکھراؤ؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروئی موج پیدا کرتی ہے۔

۱. ٹکراؤ مقدار معلوم اور زاویہ بکھراؤ کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2) \quad \text{جواب:}$$

ب. تفسیر یہی بکھراؤ عمودی تراش تعین کریں۔ جواب:

$$(11.11) \quad D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

ج. دکھائیں کہ رد فورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $1/r$ مخفیہ کی ”لامتناہی سعت“ ہے؛ آپ کو لب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

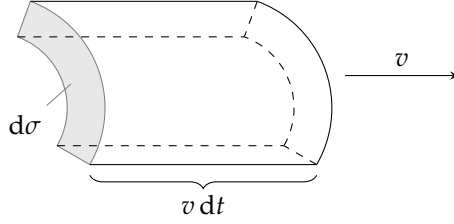
۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹائی نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور z رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراؤ مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروئی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۳)۔ یعنی ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$(11.12) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لئے}$$

کروئی موج میں جب زوضری $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے حناطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہوگا

$$(11.13) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



شکل ۱۱.۵: وقت dt کے دوران رقبہ $d\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم dV ہے۔

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف اُستِی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کردی موج کا جیٹ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہوگا۔

ہمیں جیٹ بکھراؤ $f(\theta)$ تعین کرنا ہوگا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ θ میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً سمتی رفتار v پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت dt میں لامتناہی چھوٹی رقبہ $d\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$dP = |\psi_i|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھراؤ کا احتمال

$$dP = |\psi_{\text{بکھرا}}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا لہذا $d\sigma = |f|^2 d\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$(11.14) \quad D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

ظاہر ہے کہ تفسیری عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے جیٹ بکھراؤ جو مساوات شرودنگر کے حل سے حاصل ہوگا کی مطابقت مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم جیٹ بکھراؤ کی حساب کے دو تراکیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تمسین پر غور کریں گے۔

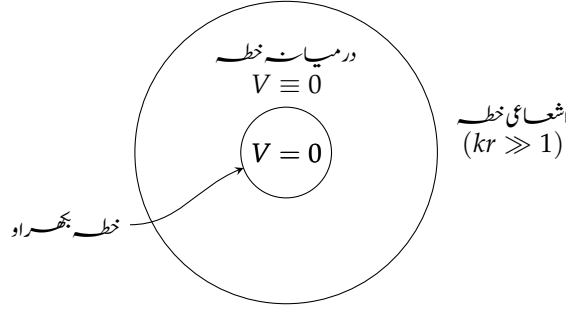
سوال ۱۱.۲: ایک بُدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لئے مساوات 11.12 کے مثال تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کردی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لئے مساوات شرودنگر و تابل علیحدگی حلوں

$$(11.15) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$



شکل ۱۱.۶: مقہای مخفیہ سے بکھراؤ؛ خط بکھراؤ، در میان خط، اور اشعاعی خط۔

کا حاصل ہوگا جہاں Y_ℓ^m کروئی ہارمونئی مساوات 4.32 ہے اور $rR(r) = u(r)$ مساوات مساوات 4.37

$$(11.12) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

کو مطمئن کرتا ہے بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابل نظر انداز ہوگا۔ لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا حبزور خصتی کروئی موج کو اور دوسرا حبزور آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراؤ کے لئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جہاں ہم گزشتہ حصہ میں طبعی وجوہات سے آغاز کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لئے ہتایا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $kr \gg 1$ کے لئے ہتایا جسے بصریات میں خط اشعاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ معتمی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی مستثنائی بکھراؤ خط کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانی خط میں جہاں V کو رد کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز حبزور کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا ردا سی مساوات درج ذیل روپ اختیار

کرتی ہے۔

$$(11.17) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروئی۔ بیل تفاعلات کا خطی جوڑ ہوگا

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_\ell(kr) + B r n_\ell(kr)$$

لیکن نہ ہی j_ℓ جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی n_ℓ جو متعین کو سائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} کی طرح کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروئی میں تفاعل تفسیر کرتے ہیں

$$(11.19) \quad h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + i n_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - i n_\ell(x)$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروئی میں تفاعل تفسیر کیے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_\ell^{(1)}(kr)$ جسے

جدول ۱۱.۱: کروئی میں تفاعل تفسیر

$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$ $h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$ $h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$	$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$ $h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$ $h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$
$\left. \begin{aligned} h_\ell^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{\ell+1} e^{ix} \\ h_\ell^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{\ell+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1$	

میں تفاعل عمل کا پہلا قسم کہتے ہیں r / e^{ikr} کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_\ell^{(2)}(kr)$ میں تفاعل عمل کی دوسری قسم کہتے ہیں r / e^{-ikr} کے لحاظ سے تبدیل ہوگا۔ یوں رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروئی میں تفاعل تفسیر کی پہلی قسم درکار ہوگی:

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہوگا بالکل ٹھیک تفاعل موج درجہ ذیل ہوگا

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_\ell^{(1)}(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جزو آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم مندرجہ کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشاکلی ہے لہذا تفاعل عمل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یا درجہ $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 کے درجہ ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta)$$

جہاں ℓ ویں لیٹائنڈ رکنشیررکٹی کو P_ℓ کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر a_ℓ $i^{\ell+1}k\sqrt{4\pi(2\ell+1)}$ $C_{\ell,0}$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$(11.22) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_\ell h_\ell^{(1)}(kr) P_\ell(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علاقیت کیوں بہتر ہے a_ℓ کو ℓ واں حیطہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں اینکل تف عمل e^{ikr}/kr $(-i)^{\ell+1}$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$(11.24) \quad f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

یہ مساوات 11.12 میں میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دکھاتا ہے کہ جزوی موج حیطوں a_ℓ کی صورت میں حیطہ بکھراؤ $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہوگا تقریبی عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.25) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) a_\ell^* a_{\ell'} P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.26) \quad \sigma = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |a_\ell|^2$$

زاویائی کھل کو حل کرنے کے لئے میں نے لیٹائنڈ رکنشیررکٹیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے جزوی موج حیطوں a_ℓ کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خط جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شعروڈنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراؤ موج کے لئے کروئی محدود جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدود استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تف عمل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً $V = 0$ کے لئے مساوات شرودنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{\ell, m} [A_{\ell, m} j_{\ell}(kr) + B_{\ell, m} n_{\ell}(kr)] Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

یوں بالخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبداء پر e^{ikz} متناہی ہے لہذا نیو من تفاعلات کی احبات نہیں ہوں گی $r = 0$ پر $n_{\ell}(kr)$ بے متابوڑ ہتے ہیں اور چونکہ $z = r \cos \theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لہذا صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں صریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) [j_{\ell}(kr) + ika_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr)] P_{\ell}(\cos \theta)$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹائی سخت کرہ بکھراؤ۔ درج ذیل فرض کریں

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

یوں تمام θ کے لئے

$$(11.32) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) [j_{\ell}(ka) + ika_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(ka)] P_{\ell}(\cos \theta) = 0$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$(11.33) \quad a_{\ell} = i \frac{j_{\ell}(ka)}{kh_{\ell}^{(1)}(ka)}$$

بالخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left| \frac{j_{\ell}(ka)}{h_{\ell}^{(1)}(ka)} \right|^2$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جاسکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراؤ $ka \ll 1$ کی تحدیدی صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لئے $n_\ell(z)$ کی مقدار $j_\ell(z)$ سے بہت زیادہ ہوگی لہذا

$$\frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} = \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z) + in_\ell(z)} \approx -i \frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)}$$

$$(11.35) \quad \approx -i \frac{2^\ell l! z^\ell / (2\ell + 1)!}{-(2\ell)! z^{-\ell-1} / 2^\ell \ell!} = \frac{i}{2\ell + 1} \left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^2 z^{2\ell+1}$$

اور درج ذیل ہوگا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1} \left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^4 (ka)^{4\ell+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لہذا بلند طاقتمیں متابل نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $\ell = 0$ حبزوی بکھراؤ میں غالب ہوگا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لئے تقریبی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہوگا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لئے درج ذیل ہوگا

$$(11.36) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت ہندی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہوگا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اوپر سے گزرتے ہیں نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

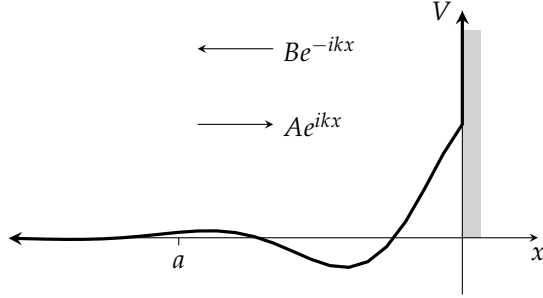
سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیٹنڈر کشیر رکتی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ ℓ کی مختلف قیمتوں والے عددی سرلازما صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ جیٹ بکھراؤ $f(\theta)$ تقریبی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لہذا صرف $\ell = 0$ حبزو حناطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی حناطر آغاز سے ہی $\ell \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2$$



شکل ۱۱.۷: معتمای مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامستثنائی دیوار پائی جاتی ہے، سے ایک بُجری بکھراؤ۔

۱۱.۳۳ متقلات حیط

پہلے نصف لکیر $x < 0$ پر معتمای مخفیہ $V(x)$ سے ایک بُجری بکھراؤ کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر ایسنٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$(11.37) \quad \psi_i(x) = Ae^{ikx} \quad (x < -a)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگا

$$(11.38) \quad \psi_r(x) = Be^{-ikx} \quad (x < -a)$$

باہم عمل خط $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہوا احتمال کی بقا کی بنا پر منعقد موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبداء پر آمدی جمع منعکس کل تف عمل موج صفر ہوگا

$$(11.39) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لہذا $B = -A$ ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لئے تف عمل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.40) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لئے k لہذا توانائی $\hbar^2 k^2 / 2m$ کی صورت میں مستقل حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خط بکھراؤ $(-a < x < 0)$ میں مبادات شرودنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط ملط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ B کی بجائے مستقل حیطہ

کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیث تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُجری صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جتنا تکلیف دہ ہے $m \neq 0$ والا کوئی جبرو نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت $(\ell = 0, 1, 2, \dots)$ کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ کروئی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لہذا ہر ایک جبروی موج جے کسی ایک خصوصی ℓ سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیث میں کوئی تبدیلی رونم نہیں ہوگی تاہم اس کا حیث تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بالکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہوگا لہذا ℓ ویں جبروی موج درج ذیل ہوگی مساوات 11.28

$$(11.۴۱) \quad \psi_0^{(\ell)} = Ai^{\ell}(2\ell+1)j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos\theta) \quad (V(r)=0)$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۲) \quad j_{\ell}(x) = \frac{1}{2} \left[h^{(1)}(x) + h_{\ell}^{(2)}(x) \right] \approx \frac{1}{2x} \left[(-i)^{\ell+1} e^{ix} + i^{\ell+1} e^{-ix} \right] \quad (x \gg 1)$$

لہذا بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$(11.۴۳) \quad \psi_0^{(\ell)} \approx A \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^{\ell} e^{-ikr} \right] P_{\ell}(\cos\theta) \quad (V(r)=0)$$

چونکہ قوسین میں دوسرا جبرو آمدی کروئی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراؤ متعارف کرے نے یہ تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جبرو نخصتی موج ہے جو بمقتل حیث δ_{ℓ} لیتا ہے

$$(11.۴۴) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^{\ell} e^{-ikr} \right] P_{\ell}(\cos\theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

آپ e^{ikz} میں $h_{\ell}^{(2)}$ جبرو کی بنا پر اس کو کروئی مسرتکڑ موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_{\ell}$ بمقتل حیث پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_{\ell}^{(1)}$ حصہ کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروئی موج کے طور پر ابھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جبروی تفاصل حیثوں a_{ℓ} کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو بمقتل حیث δ_{ℓ} کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہوگا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متعارفی روپ

$$(11.۴۵) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^{\ell} e^{-ikr} \right] + \frac{(2\ell+1)}{r} a_{\ell} e^{ikr} \right\} P_{\ell}(\cos\theta)$$

کا δ_{ℓ} کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.۴۶) \quad a_{\ell} = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_{\ell}} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_{\ell}} \sin(\delta_{\ell})$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$(11.۴۷) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_{\ell}} \sin(\delta_{\ell}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا مساوات 11.27

$$(11.۴۸) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_{\ell})$$

اب بھی جزوی موج حیٹوں کی بجائے منتقلات حیٹہ کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے۔ منتقلی حیٹہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط متدار a_{ℓ} جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_{ℓ} استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بانیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[\frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad \text{جہاں } k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیٹہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لئے منتقلات حیٹہ δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لئے جزوی موج حیٹہ انتتال δ_{ℓ} کی ہوں گے مشال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $\ell = 0$ جزوی موج انتتال حیٹہ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایک کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \rightarrow \infty$ پر ردای تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1} \left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \text{جہاں } \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکلی روپ

غیر تاج وقت مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$

اس کارو پ سرسری طور پر مساوات ہل ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جزو Q خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلتا تفاعل منع کے لئے مساوات ہل ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \quad (11.52)$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک مکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0 \quad (11.53)$$

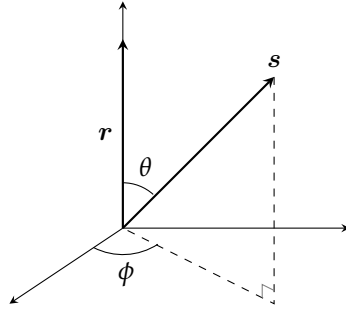
ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r-r_0)] Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r-r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہل ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلتا تفاعل منع کو رد عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لئے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریر تبدیل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s \quad (11.54)$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدود برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا مکمل۔

تب۔

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

ہوگا تاہم

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$(11.56) \quad \delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

لہذا مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{is \cdot r} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پڑ کے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.58) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is \cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب s مکمل کے نقطہ نظر سے r غیر متغیر ہے ہم r کو (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s \cdot r = sr \cos \theta$ ہوگا متغیر ϕ کا مکمل 2π ہوگا جبکہ θ مکمل درجہ ذیل ہوگا

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta \, d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.60) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} \, ds$$

باقی مکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیت استعمال کر کے نصب نام کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$(11.61) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} \, ds \right\}$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

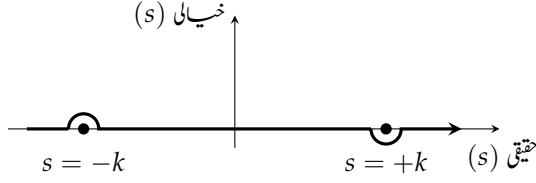
اگر z_0 خط ارتقاء کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ مکمل

$$(11.62) \quad \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)} \, dz = 2\pi i f(z_0)$$

استعمال کرتے ہوئے ان نکلات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے دیگر صورت مکمل صفر ہوگا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تقارن عمل گرین حاصل ہوگا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا کہ یہ تمام قابل قبول ہوں گے۔

مسوات 11.61 میں ہر ایک مکمل کے لئے ہمیں خط استواء کو اس طرح بند کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ مکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جزو ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس مکمل کے لئے ہم بالانصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰)۔ اب خط ارتقاء صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.63) \quad I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} \, ds = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$



شکل ۱۱.۹: ارتقاعی مکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔



شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جزو بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جزو ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لہذا ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقاع $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ کو گھیرتا ہے اور یہ گھسڑی وار ہے لہذا اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$(11.64) \quad I_2 = - \oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.65) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[\left(i\pi e^{ikr} \right) - \left(-i\pi e^{ikr} \right) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہولٹنز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلا واسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کریں سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہولٹنز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متبذل ہولٹنز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(11.66) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ایسا م کی وجہ قطبین کے متغیر سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

11.53 مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.۶۷) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(11.۶۸) \quad (\nabla^2 + k^2) \psi_0 = 0$$

11.67 مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمیل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جاننے بغیر آپ تکمیل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکمیلی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراؤ مسائل کے لئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $-\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لئے مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ E منفی ہے لہذا $k = ik$ ہوگا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE/\hbar}$ ہوگا۔

۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مقامی مخفیہ ہے یعنی کسی مستطی خط کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراؤ میں ہوگا اور ہم مرکز بکھراؤ سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی تکمیل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لئے $|r| \gg |r_0|$ ہوگا لہذا

$$(11.۶۹) \quad |r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r \cdot r_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{r \cdot r_0}{r^2}\right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.۷۰) \quad |r - r_0|^2 \cong r - \hat{r} \cdot r_0$$

ہم

$$(11.۷۱) \quad k \equiv k\hat{r}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$(11.42) \quad e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik \cdot r_0}$$

ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا

$$(11.43) \quad \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik \cdot r_0}$$

نصب نام میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r-r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نام میں ہمیں دوسرا جزو بھی رکھنا ہوگا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نام میں دوسرے جزو کو پہلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتی جزو کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔
بکھراؤ کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$(11.44) \quad \psi_0(r) = A e^{ikz}$$

یوں بڑی r کے لئے درج ذیل ہوگا

$$(11.45) \quad \psi(r) \cong A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراؤ پڑھ سکتے ہیں

$$(11.46) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-ik \cdot r_0} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروئے کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ متابل ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہوگا

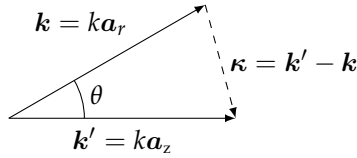
$$(11.47) \quad \psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = A e^{ikz_0} = A e^{ik' \cdot r_0}$$

جہاں عمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$(11.48) \quad k' \equiv k \hat{z}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفعل موج ہو تا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہوگا

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(k'-k) \cdot r_0} V(r_0) d^3 r_0$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراور رخ ہے۔

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ موخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خط بکھراور پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراور کے لئے قوت نمائی جسز و ضربی بنیادی طور پر متقل ہوگا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$(11.80) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا امید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہوگی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراور درج ذیل مخفیہ لیں

$$(11.81) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع جملہ بکھراور درج ذیل ہوگا۔

$$(11.82) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

تفریقی عمودی تراش

$$(11.83) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.83') \quad \sigma \cong 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

ایک کروئی تشکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تنہمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.85) \quad \kappa \equiv k' - k$$

r_0 نکل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(11.86) \quad (k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا

$$(11.87) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے نکل 2π دیگا اور θ_0 نکل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیر نوشتہ کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$(11.88) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{کروئی تشکل}$$

f کی زاویائی تابعیت κ میں سمونی گئی ہے شکل 11.11 کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.89) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال 11.5: یوکاوا بکھراؤ۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کارو پ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$(11.90) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تنہمین بارن درج ذیل دیگا

$$(11.91) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)}$$

□

آپ کو سوال 11.11 میں یہ نکل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 11.6: ردورڈ بکھراؤ۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پر کرنے سے مخفیہ کو لب حاصل ہوگا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ جیٹ بکھراؤ درج ذیل ہوگا

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa^2}$$

یساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \quad (11.93)$$

اس کا مربع ہمیں تفسیریاتی عمودی تراش دیگا

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.94)$$

جو ٹھیک کلیہ ردور فورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کالسی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹائی نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردور فورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے نرم کرہ بکھراؤ کا حیظہ بکھراؤ بارن تخمین سے حاصل کریں دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہوگا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں مکمل کی قیمت تلاش کر کے دائیں ہاتھ ریاضی فنترہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یو کاوا مخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تناسب لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل استفادہ سوال 11.4 کے مخفیہ کے لئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

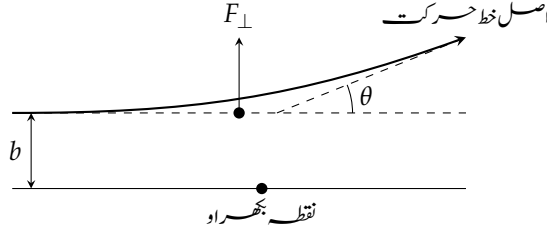
(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو متقتل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لسیکر پر ہی چلے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$I = \int F_{\perp} dt \quad (11.95)$$



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہوگی اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$(11.96) \quad \theta \cong \tan^{-1}(I/p)$$

اے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبہ اول کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبہ تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ درحقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مسرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شرودنگر کی عملی روپ درج ذیل ہے

$$(11.97) \quad \psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r-r_0)V(r_0)\psi(r_0) d^3r_0$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

$$(11.98) \quad g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے حبز ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراؤ ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جاسکتا ہے

$$(11.99) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے عمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$(11.100) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi$$

شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظیری مفہوم۔

اس عمل کہ بار بار دہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$(11.101) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots$$

ہر متکمل میں آمدی تفاع عمل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طقس پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تقسین اول اس تسلسل کو دوسرے جزو کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبہ تصحیح کس طرح پیدا کی جاتی ہیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبہ ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبہ اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبہ میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاع عمل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے سچ تسلسل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کو اضافی میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جزو ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۳: تقسین ضرب میں رد فورڈ بکھراؤ کے لئے θ کو ٹکراؤ متدار معلوم کا تفاع عمل تلاش کریں۔ دکھائیں کہ مناسب حدود کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی فترہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تقسین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لئے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

سوال ۱۱.۱۶: ایک بُعدی مساوات شرودنگر کے لئے تفاع عمل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مشغل مکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$(11.102) \quad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدا پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر ایک بُعدی بکھراؤ کے لئے

سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تقسین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x)$

Ae^{ikx} منتخب کر کے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی سرحدی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$(11.103) \quad R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا انتفاع مساوات 2.114 اور ایک مستثنائی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراؤ کے لئے تفصیلی سرحدی سر ($T = 1 - R$) کو یک بُعدی تخمینہ بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ جیٹ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے پچر رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$(11.104) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$(11.105) \quad V(r) = Ae^{-\mu r^2}$$

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
 حالات، 133
 احبابی
 قیمتیں، 33
 ارتعاش
 نیوٹرینو، 127
 استمراری، 105
 استمراری مساوات، 194
 استمراریہ، 138
 اصول
 عدم یقینیت، 19
 اصول تغیریت، 299
 اصول عدم یقینیت، 116
 اضافیتی تصحیح، 272
 اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
 الیکٹران
 کلاسیکی رداس، 175
 الیکٹران نیوٹرینو، 127
 امتیازی تقابلی عمل، 103
 امتیازی فتر، 103
 امتیازی فتر مساوات، 103
 انتشاری
 رشته، 67
 انحطاطی، 90، 104
 انحطاطی دباؤ، 228
 اندرونی ضرب، 98
 انعکاس
 شرح، 78
 اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
 برقی حرکیات
 کوانٹائی، 278
 بقا
 توانائی، 39
 بقا احتمال، 194
 بلاواسطہ مکمل، 313
 بسندشی توانائی، 156
 بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
 بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
 variables
 separation of, 25
 variance, 9
 variational principle, 299
 vectors, 97
 velocity
 group, 66
 phase, 66
 virial theorem, 132
 three-dimensional, 194
 wag the tail, 56
 wave
 incident, 77
 packet, 62
 reflected, 77
 transmitted, 77
 wave function, 2
 wave vector, 224
 wavelength, 18
 white dwarf, 252
 Wien displacement law, 250
 WKB, 321
 Yukawa potential, 316
 Zeeman effect, 283
 zero-crossing, 34

- بوسن، 208
 بوہر
 رداس، 156
 کلیہ، 155
 بوہر مقناطیس، 284
 بیریان، 191
 میل
 کروی تقا عمل، 148
 بے لچک پھسکی، 173
 پازیشٹرانیم، 207، 291
 پاشن ویک اثر، 285
 پالی اصول مناعت، 208
 پالی متالب چکر، 177
 پایان، 191
 پیال، 234
 پس پردہ، 219
 پلانک
 کلیہ، 162
 پسیداکار
 فضا میں انتقال کا، 136
 وقت میں انتقال، 136
 پسیداکار
 تقا عمل، 60
 گھومتا، 200
 تجدیدی عرصہ، 89
 تجربہ
 شرٹن و گرانج، 184
 ترتیبی پیمائشیں، 131
 ترسیل
 شرح، 78
 تسل
 بالمر، 162
 پاشن، 162
 ٹیلر، 42
 طاقتی، 43
 فوریئر، 35
 لیمان، 162
 تشاکلیت
 ضرورت، 209
 تشکیل، 237
 تعداد مکین، 237
 تعیین حال، 103
 تغیریت، 9
 تقا عمل
 ڈیٹا، 72
 تقا عمل موج، 2
 تقا علیہ، 128
 تکمل
 ڈھانچائی، 312
 توانی
 کلیہ، 55
 توانائی
 احبابتی، 29
 توقعاتی
 قیوت، 7
 شنائی عددی سر، 239
 حبرو ڈارون، 280
 جسم مقیاس، 229
 جفت، 34
 تقا عمل، 31
 جفت قطب معیار اثر
 مقناطیسی، 181
 جوہری مدار چوں
 خطی جوڑ ترکیب، 311
 جی حبرو ضربی، 278
 چکر، 173، 174
 مخالف میدان، 175
 ہم میدان، 175
 چکر چکر رابطہ، 290
 چکر کار، 175
 چکر و مدار باہم عمل، 279
 چکر و مدار رابطہ، 272
 چندر شیکھر حد، 253
 چوزاویہ تشکل، 298
 حال
 بچھراؤ، 70

- 66، سستی
 66، گروہی سستی
 86، رمز اور وٹاؤسڈ اثر،
 194، رواحتال،
 روڈریگیس
 142، کلیہ
 249، ریمان زیٹا تفسار عمل،
 زاویائی معیار حرکت
 170، بقب
 174، خنقی
 174، غیر خنقی
 283، زیسان اثر،
 ساکن
 27، حالیت،
 243، شملنگ
 251، شیفتن و بولسڈ من کلیہ،
 32، سرحدی شراٹھ،
 72، 79، سرنک زنی،
 252، سفید بونا،
 15، سگرا،
 220، سلور،
 128، سمتاویہ،
 97، سمتیاریت،
 224، سمتیہ موج،
 سوچ
 4، انکاری،
 3، تقلید پسند،
 3، حقیقت پسند،
 23، سوڈیم،
 188، سہ تا،
 250، سیاہ جسمی طیف،
 سیزھی
 46، عملین،
 80، سیزھی تفسار عمل،
 296، شمارک اثر،
 27، شروڈنگر
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،
 زمینی، 34، 156
 70، مقید،
 34، ہچکان،
 236، حراری توازن،
 حرکت
 202، سائیکلوٹران،
 خطی الجبر، 97
 خطی تبدلہ، 97
 خطی جوڑ، 28
 خفیہ متغیرات، 3
 خول، 219، 235
 درجہ حرارت آزاد، 254
 درجہ حرارت، 236
 234، درز،
 290، درز توانائی،
 61، دلیل،
 96، 56، دم ہلانا،
 219، دوری جدول،
 ڈیراک
 128، علامتیت،
 229، کنگھی،
 108، معیاری عمودیت،
 ڈیلٹا
 35، کرونیٹر،
 297، ڈیوٹریم،
 297، ڈیوٹیران،
 ذرہ
 21، غیر مستحکم،
 رو
 21، احتمال،
 146، ردای مساوات،
 162، رڈبرگ،
 162، کلیہ،
 رشتہ
 295، پترنک،
 295، کرامرس،
 رفتار

- فـنـر و نوس
ترکیب، 54
فـنـس
بیرونی، 23
دوہری، 128
فورینسر
الٹ بدل، 63
بدل، 63
- فـنـس
غیر ہم آہنگ، 116
فـنـس
بچھراؤ، 93، 94
ترسیل، 95
فـنـس اراکان، 125
فـنـس
کب، 42
فـنـس مین، 298
قواعد بن، 220
قوالب، 98
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245
کایان، 191
کشافت
آزاد الیکٹران، 227
احتمال، 10
کشیر رکشی
ہرمانڈ، 58
کرائنگ و پینی نمونہ، 232
کروی
ہارمونیات، 144
کبھی تشاکل، 298
کلیہ
ڈی پروگلی، 19
روڈریگیس، 60
پولر، 30
کلیش و گورڈن عددی سر، 190
کیٹ
تختیف شدہ، 206
کوارک، 191
- شریک عامل، 103
شریک گرفتگی بندہ، 214
شارپائی مفہوم، 2
شوارز
عدم مساوات، 437
شوارز عدم مساوات، 99
صفر ممتام انقطاع، 34
- طاق، 34
طامس استقبالی حرکت، 279
طول موج، 18، 162
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17
تخلیل، 129
تقلیل، 166، 46
رفع، 166، 46
مبادلہ، 209
عبور، 161
عدم تعین، 3
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عقدہ، 34
علائیت
تفعلیہ و ستمناویہ، 128
علیحدگی متغیرات، 25
علیحدگی مستقل، 26
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105
غیر موصل، 235
- فـنـری
توانائی، 227
درجہ حرارت، 228
سطح، 227
فـنـرمیان، 208
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اسمتی، 145
 مقناطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرفتگی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گروپویشن، 163
 گیما تفاعل، 249
- لاپلائی، 138
 لارمر تردد، 184
 لاگت
 شریک کشیر رکتی، 158
 کشیر رکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لیٹان، 175
 لتیم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسنڈو سطحیں، 202
 لسنڈو جی حبز و ضربی، 284
 لورینتز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیپ انتقال، 272
- ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم
 تفاعل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کر دی، 139
 مخالف بیٹا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تفاعلات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز حبز، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقناطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وٹنمن و بلن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناسٹائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فضا تفاعل موج، 113، 195
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100، 35
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپلافتا عدد، 221
کاتیرا فتا عدد، 221
کادوسرا فتا عدد، 221
ہارمونی
مر نقش، 32
ہارمونی مر نقش
تین البعادی، 193
ہائیڈروجن
میو، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فضا، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی تسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلبت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتطبی معیار اثر
باضابطہ، 278
مکمل، 35، 100
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزدہیلیم، 217
نظریہ اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیو من
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ ط، 70