کوانٹم میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۳

قواعد وضوابط

۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کے "ناگہاں" خدوخال تھے (مثلاً ہارمونی مرتعش میں توانائی کی سطح میں جفت فاصلے) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دارومدار تفاعل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تفاعل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ قابل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ تفاعل موج، ریاضیاتی طور پر، تصوراتی **سمتیات**[۱] کی تعریفی شرائط پر پورے اترتے ہیں؛ جبکہ عاملین ان پر **خطی تبادلہ**[۲] کا عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات کی قدرتی زبان **خطی الجبرا**[۳،۴] ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ $\langle\alpha|$ کو N بُعدی فضا میں کسی مخصوص

[۱] vectors
[۲] linear transformations
[۳] linear algebra
[۴] آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے N عدد اجزاء $\{a_n\}$ سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔

$$|\alpha\rangle \to \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۱}$$

دو سمتیات کا **اندرونی ضرب**[5] $\langle\alpha|\beta\rangle$ (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسعت دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہو گا۔

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_N^* b_N \tag{۳.۲}$$

خطی تبادلہ، T، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) **قالب**[6] سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو قالبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$|\beta\rangle = T|\alpha\rangle \to \mathbf{b} = \mathbf{T}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{۳.۳}$$

کوانٹم میکانیات میں پائے جانے والے "سمتیات" در حقیقت (زیادہ تر) تفاعلات ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں N اجزائی قالبی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہو گا اور متناہی ابعاد میں سمجھ آنے والی ٹھیک وضاحتیں، لامتناہی ابعاد میں پریشان کن ثابت ہو سکتی ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ مساوات ۳.۲ کا متناہی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، البتہ، لامتناہی مجموعہ یا تکمل، عدم مرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو گی لہٰذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہو گی۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علامتیت سے آپ واقف ہوں گے، بہر حال ہوشیار رہنا بہتر ہو گا۔

متغیر x کے تمام تفاعلات مل کر سمتی فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکنہ طبیعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل موج Ψ معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

کسی مخصوص وقفہ[7] پر تمام **مربع متکامل تفاعلات**[8]

$$f(x) \quad \text{جہاں} \quad \int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \quad \text{ہو} \tag{۳.۴}$$

[5] inner product
[6] matrices
[7] ہمارے لئے حدود (a اور b) تقریباً ہر مرتبہ $\pm\infty$ ہوں گی، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہو گا۔
[8] square-integrable functions

مل کر (اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۱.۳-ا دیکھیں)۔ ریاضی دان اسے $L_2(a,b)$ جبکہ ماہر طبیعیات اسے **ہلبرٹ فضا**[9] کہتے[10] ہیں۔ یوں کوانٹم میکانیات میں

$$\textbf{تفاعلات موج ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں۔} \tag{۳.۵}$$

دو تفاعلات کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ تفاعلات ہیں۔

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۶}$$

اگر f اور g دونوں مربع متکامل ہوں (یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کی اندرونی ضرب موجود ہو گی (مساوات ۳.۶ کا تکمل ایک متناہی عدد[11] پر مرکوز ہو گا)۔ ایسا **شوارز عدم مساوات**[12] کے درج ذیل تکملی روپ[13] کے پیش نظر ہو گا۔

$$\left|\int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x} \tag{۳.۷}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پوری اترتی ہے (سوال ۱.۳-ب)۔ بالخصوص درج ذیل مساوات میں ہم دیکھ سکتے ہیں۔

$$\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^* \tag{۳.۸}$$

مزید $f(x)$ کی اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{۳.۹}$$

---

[9] Hilbert space

[10] تکنیکی طور پر، ہلبرٹ فضا سے مراد **مکمل اندرونی ضرب فضا** ہے، اور مربع متکامل تفاعلات کا ذخیرہ ہلبرٹ فضا کی فقط ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر متناہی ابعادی سمتی فضا ایک بے وقعت ہلبرٹ فضا ہو گی۔ چونکہ L_2 کوانٹم میکانیات کا اکھاڑا ہے لہٰذا ماہر طبیعیات اسی کو "ہلبرٹ فضا" کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ **مکمل** سے مراد یہ ہے کہ ہلبرٹ فضا کے کسی بھی تفاعل کی کوشی ترتیب جس تفاعل پر مرکوز ہو، وہ اسی فضا میں پایا جائے۔ اس میں کوئی "سوراخ" نہیں پایا جاتا، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پایا جاتا (اس کے برعکس، مثلاً، تمام کثیر رکنیوں کی فضا میں اور تمام ناطق اعداد کے سلسلہ میں یقیناً سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا تفاعلات کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ (ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعلات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

[11] باب ۲ میں بعض اوقات ہمیں مجبوراً معمول پر نہ لانے کے قابل تفاعلات کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبرٹ فضا سے باہر بستے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنی ہو گی۔ ابھی کے لئے میں فرض کرتا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں بستے ہیں۔

[12] Schwarz inequality

[13] متناہی ابعادی سمتی فضا میں شوارز عدم مساوات $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$ کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۴۳۰ پر سوال ۱.۲ دیکھیں)۔ تاہم یہ ثبوت فرض کرتا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہو گی؛ یہ صرف اس صورت[۱۴] میں صفر ہو گی جب $f(x)=0$ ہو۔

ایک تفاعل اس صورت میں **معمول شدہ**[۱۵] کہلاتا ہے جب اس کی اپنی ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک (1) کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت میں **عمودی**[۱۶] ہوں گے جب ان کی اندرونی ضرب صفر (0) ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ $\{f_n\}$ اس صورت میں **معیاری عمودی**[۱۷] ہو گا جب تمام تفاعلات (درج ذیل دیکھیں) معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں۔

$$\langle f_m|f_n\rangle=\delta_{mn} \tag{۳.۱۰}$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت میں **مکمل**[۱۸] ہو گا جب (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت (درج ذیل دیکھیں) میں لکھا جا سکے۔

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nf_n(x) \tag{۳.۱۱}$$

معیاری عمودی تفاعلات $\{f_n(x)\}$ کے عددی سر، فوریئر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$c_n=\langle f_n|f\rangle \tag{۳.۱۲}$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات (مساوات ۲.۲۸) وقفہ $(0,a)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ یا مساوات ۲.۸۵) وقفہ $(-\infty,\infty)$ پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳.۱:

ا. ظاہر کریں کہ تمام مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ سمتی فضا دے گا (صفحہ ۴۲۹ پر ضمیمہ ا.۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہو گا کے دو مربع متکامل تفاعلات کا مجموعہ خود مربع متکامل تفاعل ہو گا۔ مساوات ۳.۷ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ سمتی فضا ہو گا؟

ب. ظاہر کریں کہ مساوات ۳.۶ کا تکمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ ا.۲) کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے۔

---

[۱۴] ایسے تفاعل کے لئے کیا کہا جا سکتا ہے جو چند مخصوص تنہا نقاط کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوں؟ اگرچہ تفاعل معدوم نہیں ہے لیکن تکمل (مساوات ۳.۹) اب بھی معدوم ہو گا۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تو آپ کو ریاضی پڑھنی چاہیے۔ طبیعیات میں ایسے گھمبیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم ہلبرٹ فضا میں ایسے دو تفاعلات، جن کے مربع تکمل برابر ہوں، کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر ہلبرٹ فضا میں ترسیمات در حقیقت تفاعلات کی **تعادل جماعتوں** کو ظاہر کرتی ہیں۔)

[۱۵] normalized

[۱۶] orthogonal

[۱۷] orthonormal

[۱۸] complete

سوال ۲.۳:

ا. وقفہ $(0,1)$ کے بیچ، متغیر v کے کس خطہ پر، تفاعل $f(x) = x^v$ ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟ فرض کرلیں کہ v حقیقی تاہم ضروری نہیں کہ مثبت ہو۔

ب. کیا $v = \frac{1}{2}$ کی مخصوص صورت میں $f(x)$ ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تفاعل $xf(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تفاعل $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f(x)$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

۲.۳ قابل مشاہدہ

۲.۳.۱ ہرمشی عاملین

قابل مشاہدہ $Q(x,p)$ کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب علامتیت[۱۹]:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, \mathrm{d}x = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle \tag{۳.۱۳}$$

کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے۔ اب پیمائش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہو گا، لہٰذا بہت ساری پیمائشوں کی اوسط بھی حقیقی (درج ذیل دیکھیں) ہو گی۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \tag{۳.۱۴}$$

لیکن اندرونی ضرب کا **مخلوط جوڑی** دار ترتیب کو الٹ دیتا ہے (مساوات ۳.۸) لہٰذا ہماری مساوات درج ذیل ہو جائے گی

$$\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle^* \tag{۳.۱۵}$$

جو لازماً کسی بھی تفاعل موج Ψ کے لئے درست ہو گی۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین میں درج ذیل اہم خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ کے لئے} \tag{۳.۱۶}$$

ایسے عاملین کو ہم **ہرمشی**[۲۰] کہتے ہیں۔

---

[۱۹] یاد رہے کہ $p \rightarrow \hat{p} = (\hbar/i)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ پر کر کے Q سے عامل $\hat{Q}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے **خطی** ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد a اور b اور تفاعل f اور g کے لئے $\hat{Q}[af(x) + bg(x)] = a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x)$ ہو گا۔ یہ تمام تفاعلات کی فضا پر خطی تبادلہ (ضمیمہ ۱.۳) قائم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر کے تفاعل کو باہر کے تفاعل میں لے جاتے ہیں (سوال ۲.۳-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آ سکتی ہے۔

[۲۰] hermitian

در حقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط عائد کی جاتی ہے۔

$$\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے} \tag{۳.۱۷}$$

تاہم مختلف نظر آنے کے باوجود، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کی عین معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نکتہ یہ ہے کہ ہرمشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کوانٹم میکانیات میں ہرمشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

$$\textbf{قابل مشاہدہ کو ہرمشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔} \tag{۳.۱۸}$$

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیار حرکت کا عامل ہرمشی ہے؟

$$\langle f \mid \hat{p}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\hbar}{i}f^*g\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big)^* g\,\mathrm{d}x = \langle \hat{p}f \mid g\rangle \tag{۳.۱۹}$$

میں نے تکمل بالحصص استعمال کیا ہے اور چونکہ $f(x)$ اور $g(x)$ مربع متکامل ہیں لہٰذا $\pm\infty$ پر ان دونوں کو صفر تک جا پہنچنا چاہیے[۲۱] جس کی بنا پر تکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ تکمل بالحصص سے پیدا منفی کی علامت کو i کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (جس میں i نہیں پایا جاتا) غیر ہرمشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: ظاہر کریں کہ اگر (ہلبرٹ فضا میں) تمام تفاعل h کے لیے $\langle h \mid \hat{Q}h\rangle = \langle \hat{Q}h \mid h\rangle$ ہو تب تمام f اور g کے لیے $\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$ ہو گا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہرمشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے $h = f + g$ اور بعد میں $h = f + ig$ لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہرمشی عاملین کا مجموعہ خود بھی ہرمشی ہو گا۔

ب. فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے اور α ایک مخلوط عدد ہے۔ α پر کیا شرائط عائد کرنے سے $\alpha\hat{Q}$ بھی ہرمشی ہو گا؟

ج. دو ہرمشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہرمشی ہو گا؟

د. دکھائیں کہ عامل مقام $(\hat{x} = x)$ اور ہیملٹنی عامل $(\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + V(x))$ ہرمشی ہیں۔

---

[۲۱] حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے گھمبیر تفاعلات پائے جاتے ہیں جو مربع متکامل ہونے کے باوجود لامتناہی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تفاعلات طبیعیات میں نہیں پائے جاتے، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے تو ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کر دیتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ متناہی وقفے پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان دینا ہو گا کیونکہ $(-\infty, \infty)$ پر ہرمشی عامل، $(0, \infty)$ یا $(-\pi, \pi)$ پر غیر ہرمشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامتناہی چوکور کنویں کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تفاعلات موج لامتناہی لکیر پر پائے جاتے ہیں؛ جو کسی وجہ سے $(0, a)$ کے باہر صفر ہیں۔

سوال ۳.۵: عامل $\hat{Q}$ کا **ہرمشی جوڑی دار**[22] یا **شریک عامل**[23] $\hat{Q}^\dagger$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f \mid g\rangle \quad (\text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے}) \tag{۳.۲۰}$$

یوں ہرمشی عامل اپنے ہرمشی جوڑی دار کے برابر $(\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger)$ گا۔

ا. x, i اور $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ کے ہرمشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی مرتعش کے عامل رفت a_+ (مساوات ۲.۴۷) کا ہرمشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$ ہو گا۔

۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کے فرقے، جس میں تمام Ψ ایک حال میں ہوں، پر قابل مشاہدہ Q کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کوانٹم میکانیات کی عدم تعیینیت[24]۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہو گا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں Q کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم q کہہ لیں) دے؟ اس کو آپ قابل مشاہدہ Q کا **تعیین حال**[25] کہہ سکتے ہیں۔ (درحقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات، ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال Ψ_n میں ایک ذرے کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی "اجازتی" توانائی E_n دیگی۔)

تعیین حال میں Q کا معیاری انحراف صفر ہو گا جسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2 = \langle(\hat{Q} - \langle Q\rangle)^2\rangle = \langle\Psi \mid (\hat{Q} - q)^2\Psi\rangle = \langle(\hat{Q} - q)\Psi \mid (\hat{Q} - q)\Psi\rangle = 0 \tag{۳.۲۱}$$

(اب اگر ہر پیمائش q دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی q ہو گی: $\langle Q\rangle = q$۔ چونکہ $\hat{Q}$ ہرمشی ہے لہٰذا $\hat{Q} - q$ بھی ہرمشی عامل ہو گا؛ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے میں نے اندرونی ضرب کے ایک جزو ضربی $(\hat{Q} - q)$ کو بائیں منتقل کیا ہے۔) تاہم ایسا واحد تفاعل جس کی خود اپنے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو جاتی ہو، 0 ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi \tag{۳.۲۲}$$

یہ عامل $\hat{Q}$ کی **امتیازی قدر مساوات**[26] ہے؛ $\hat{Q}$ کا **امتیازی تفاعل**[27] Ψ اور مطابقتی **امتیازی قدر**[28] q ہے۔ یوں درج ذیل

---

[22] hermitian conjugate

[23] adjoint

[24] ظاہر ہے، میں درست پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی غلطی کی بنا پر غلط پیمائش کی بات نہیں کی جا رہی ہے، جس کو کوانٹم میکانیات سے نہیں جوڑا جا سکتا

[25] determinate state

[26] eigenvalue equation

[27] eigenfunction

[28] eigenvalue

ہو گا۔

$$\text{تعیین حالات } \hat{Q} \text{ کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔} \tag{۳.۲۳}$$

ایسے حال پر Q کی پیمائش لازماً امتیازی قدر q دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی قدر ایک عدد ہے (نہ کہ عامل یا تفاعل)۔ امتیازی تفاعل کو کسی مستقل سے ضرب دینے سے امتیازی تفاعل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کی امتیازی قدر وہی ہو گی۔ صفر کو امتیازی تفاعل نہیں لیا جا سکتا؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تفاعلات میں شامل نہیں کرتے؛ ورنہ کسی بھی عامل $\hat{Q}$ اور تمام q کے لیے $\hat{Q}0 = q0 = 0$ ہو گا جس کی بنا پر ہر عدد ایک امتیازی قدر ہو گا)۔ ہاں امتیازی قدر کے صفر ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کی تمام امتیازی اقدار کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا **طیف**[۲۹] حاصل ہو گا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تابع امتیازی تفاعلات کی امتیازی قدر ایک جتنی ہو گی؛ ایسے طیف کو **انحطاطی**[۳۰] طیف کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، کل توانائی کے تعیین حالات، ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے:

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{۳.۲۴}$$

جو بالکل غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات ہے۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی قدر کے لیے حرف E اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف) ψ استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ $e^{-iEt/\hbar}$ چسپاں کر کے Ψ حاصل کیا جا سکتا ہے؛ جو اب بھی H کا امتیازی تفاعل ہو گا)۔

مثال ۳.۱: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں ϕ، ہمیشہ کی طرح، دو ابعادی قطبی محدد کا متغیر ہے۔

$$\hat{Q} \equiv i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} \tag{۳.۲۵}$$

(یہ عامل سوال ۲.۴۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا۔) کیا $\hat{Q}$ ہرمشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: یہاں ہم متناہی وقفہ $0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر تفاعلات $f(\phi)$ کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں ϕ اور $\phi + 2\pi$ ایک ہی طبعی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \tag{۳.۲۶}$$

تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے یہ نتیجہ ملے گا

$$\langle f \mid \hat{Q}g\rangle = \int_0^{2\pi} f^*\Big(i\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\Big)\,\mathrm{d}\phi = if^*g\big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i\Big(\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}\phi}\Big)g\,\mathrm{d}\phi = \langle \hat{Q}f \mid g\rangle$$

---

[۲۹] spectrum

[۳۰] degenerate

لہٰذا $\hat{Q}$ ہر مشی ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا پر سرحدی جزو خارج ہو جائے گا)۔
امتیازی قدر مساوات:

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}f(\phi) = qf(\phi) \tag{۳.۲۷}$$

کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f(\phi) = Ae^{-iq\phi} \tag{۳.۲۸}$$

q کی ممکنہ قیمتیں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{۳.۲۹}$$

اس عامل کا طیف تمام صحیح اعداد پر مشتمل ہو گا اور یہ غیر انحطاطی ہے۔ □

سوال ۳.۶: عامل $\hat{Q} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\phi^2$ پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور ϕ قطبی محدد میں السمتی زاویہ ہے۔ کیا $\hat{Q}$ ہر مشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔ عامل $\hat{Q}$ کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انحطاطی ہے؟

۳.۳ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل (جو طبیعی طور پر قابل مشاہدہ کے تعیین حالات ہیں) کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف **غیر مسلسل**[۳۱] ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبیعی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف **استمراری**[۳۲] ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہو گی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہو گا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہو گا (مثلاً آزاد ذرے کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہو گا (مثلاً متناہی چوکور کنویں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کی متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گی؛ در حقیقت یہ متناہی ابعادی نظریے (ہر مشی قالب کے امتیازی سمتیات) سے بہت مشابہت رکھتا ہے۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

---

[۳۱] discrete
[۳۲] continuous

۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہرمشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل میں دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کی امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی قدر q ہو) اور [۳۳]

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$$

ہو ($\hat{Q}$ ہرمشی ہے)۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$q\langle f\,|f\,\rangle = q^*\langle f\,|f\,\rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہٰذا اس کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات ۳.۶) لہٰذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہو گا)۔ تاہم $\langle f|f\rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قانون کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا) لہٰذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہو گا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعیین حال میں ایک ذرے کے قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: منفرد امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں:

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

اور $\hat{Q}$ ہرمشی ہو، تب $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle$ ہو گا، لہٰذا

$$q'\langle f|g\rangle = q^*\langle f|g\rangle$$

ہو گا۔ (یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کی اندرونی ضربیں موجود ہوں گی۔) اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہٰذا $q' \neq q$ کی صورت میں $\langle f|g\rangle = 0$ ہو گا۔

□

[۳۳] یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دوسری صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتی ہے۔

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چوکور کنویں یا مثال کے طور پر ہارمونی مرتعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعیین حالات کی بھی ہو گی۔

بدقسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انحطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک جیسی امتیازی قدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قدر والا امتیازی حال ہو گا (سوال ۳.۷-ا) اور ہم **گرام شمد ترکیب عمودیت**[۳۴] (صفحہ ۴۲۹ پر سوال ۱.۱) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات مرتب کر سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہو گا، تاہم (اللہ کا شکر ہے) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹم میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اساسی تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

متناہی بعدی سمتی فضا میں ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیے تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے)۔ بدقسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاوں تک وسعت نہیں دی جا سکتی۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹم میکانیات کی اندرونی ثبات کیلئے لازمی ہے لہٰذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہرمشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔[۳۵]

سوال ۳.۷:

ا. فرض کریں کہ عامل $\hat{Q}$ کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ خود $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل ہو گا اور اس کا امتیازی قدر q ہو گا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^{x}$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک جیسا ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ مرتب کریں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہرمشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

[۳۴] Gram-Schmidt orthogonalization process

[۳۵] چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جا سکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں قابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

۳.۳.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہٰذا مسئلہ ۱.۳ اور مسئلہ ۲.۳ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہو گا۔

مثال ۲.۳: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی قدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x) = pf_p(x) \tag{۳.۳۰}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f_p(x) = Ae^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع متکامل نہیں ہے؛ عامل معیار حرکت کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی اقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل "معیاری عمودیت" حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲۴.۲-الف اور ۲۶.۲ کو دیکھ کر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x)f_p(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\,\mathrm{d}x = |A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p') \tag{۳.۳۱}$$

اگر ہم $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar} \tag{۳.۳۲}$$

لہٰذا

$$\langle f_{p'}|f_p\rangle = \delta(p-p') \tag{۳.۳۳}$$

ہو گا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک جیسا نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳۳.۳ کو **ڈیراک معیاری عمودیت**[۳۶] کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب تکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (مربع متکامل) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا

[۳۶] Dirac orthonormality

ہے۔

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \tag{۳.۳۴}$$

پھیلاو عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہوگا) کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle\,\mathrm{d}p = \int_{\infty}^{\infty} c(p)\delta(p-p')\,\mathrm{d}p = c(p') \tag{۳.۳۵}$$

چونکہ یہ پھیلاو (مساوات ۳.۳۴) درحقیقت ایک فوریئر تبادل ہے لہٰذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن نما ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{۳.۳۶}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پراسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعیین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ مرتب کر سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ $\hat{p}$ کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) قریبی "مضافات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا ایک بعدی بکھراو پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔[۳۷]

مثال ۳.۳: عامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ y امتیازی قدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$x g_y(x) = y g_y(x) \tag{۳.۳۷}$$

[۳۷] غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ یہ نا صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے قابو بڑھتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں "مضافات" کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (متناہی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا $\hat{p}$ کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہرمشی ہوگا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک f ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل $\hat{p}$ کا امتیازی قدر ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہرمشی عامل $\hat{p}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں $\hat{p}$ ہرمشی ہو۔

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے) y ایک مقررہ عدد، جبکہ x استمراری متغیر ہے۔ متغیر x کا ایسا کون سا تفاعل ہو گا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے x سے ضرب دینا، اس کو y سے ضرب دینے کے مترادف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ $y = x$ کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہو گا؛ در حقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہو گا۔

$$g_y(x) = A\delta(x-y)$$

اس مرتبہ امتیازی قدر کو لازماً حقیقی ہونا ہو گا؛ امتیازی تفاعلات مربع متکامل نہیں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y')\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = |A|^2\delta(y-y') \tag{۳.۳۸}$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$g_y(x) = \delta(x-y) \tag{۳.۳۹}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y-y') \tag{۳.۴۰}$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{۳.۴۱}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$c(y) = f(y) \tag{۳.۴۲}$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو ترکیب فوریئر سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر ایک ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہو (لہٰذا اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر p یا یہاں پیش مثالوں میں y، اور بعد ازاں عموماً z سے نام دیا جائے)، امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جاتے اور یہ کسی بھی ممکنہ طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں؛ ہاں حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے اور مکمل ہوں گے (جہاں مجموعہ کی جگہ اب تکمل ہو گا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔ سوال ۳.۹:

ا. باب ۲ سے (ہارمونی مرتعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔

ج. باب ۲ سے (متناہی چوکور کنویں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۳.۱۰: کیا لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہو گا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی قابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب **متعمم شماریاتی مفہوم**[۳۸] پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے قابل بناتی ہے۔ متعمم شماریاتی مفہوم اور شروڈنگر مساوات (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقا کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کوانٹم میکانیات کی بنیاد ہے۔

متعمم شماریاتی مفہوم: حال $\Psi(x,t)$ میں ایک ذرے کی ایک قابل مشاہدہ $Q(x,P)$ کی پیمائش ہر صورت ہرمشی عامل $\hat{Q}(x,-i\hbar\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}x)$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی۔ اگر $\hat{Q}$ کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل $f_n(x)$ سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \quad \text{ہو گا جہاں} \quad c_n = \langle f_n|\Psi\rangle \quad \text{ہے۔} \tag{۳.۴۳}$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی اقدار $q(z)$ حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات $f_z(x)$ ہوں، سعت $\mathrm{d}z$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$\left|c(z)\right|^2 \mathrm{d}z \quad \text{ہو گا جہاں} \quad c(z) = \langle f_z|\Psi\rangle \quad \text{ہو گا۔} \tag{۳.۴۴}$$

پیمائشی عمل کے بنا پر تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر **منہدم**[۳۹] ہوتا ہے۔[۴۰]

شماریاتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہو گا: چونکہ ایک قابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہٰذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n f_n(x) \tag{۳.۴۵}$$

[۳۸] generalized statistical interpretation

[۳۹] collapse

[۴۰] استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد و نواح میں، پیمائشی آلہ کی حتمیت پر منحصر محدود سعت پر، تفاعل موج منہدم ہو گا۔

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو با آسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جا سکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعلات معیاری عمودی ہیں لہٰذا ان کے عددی سر کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔[41]

$$c_n = \langle f_n|\Psi\rangle = \int f_n(x)^*\Psi(x,t)\,dx \tag{۳.۴۶}$$

کیفی طور پر "Ψ میں f_n کی مقدار" کو c_n ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش $\hat{Q}$ کی کوئی ایک امتیازی قدر دے گی لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قدر q_n کے حصول کا احتمال Ψ میں "f_n کی مقدار" پر منحصر ہو گا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہٰذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت $|c_n|^2$ ہو گی۔ متعمم شماریاتی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔[42]

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہو گا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \tag{۳.۴۷}$$

جو یقیناً تفاعل موج کو معمول پر لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle\Psi|\Psi\rangle &= \left\langle \Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big) \Big| \Big(\sum_n c_n f_n\Big) \right\rangle = \sum_{n'}\sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'}|f_n\rangle \\ &= \sum_{n'}\sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \tag{۳.۴۸}$$

اسی طرح تمام ممکنہ امتیازی اقدار کو انفرادی طور ہر اس قدر کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے Q کی توقعاتی قیمت حاصل ہو گی۔

$$\langle Q\rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \tag{۳.۴۹}$$

یقیناً درج ذیل ہو گا

$$\langle Q\rangle = \langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \left\langle \Big(\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}\Big) \Big| \Big(\hat{Q}\sum_n c_n f_n\Big) \right\rangle \tag{۳.۵۰}$$

---

[41] دھیان رہے کہ تابعیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں $c_n(t)$ لکھنا چاہیے۔

[42] یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ "اس ذرے کا حال f_n میں پائے جانے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے۔" ایسا کہنا بالکل غلط ہو گا۔ صرف یہ کہنا درست ہو گا کہ ذرہ حال Ψ میں ہے۔ ہاں Q کی پیمائش سے قیمت q_n کے حصول کا احتمال $|c_n|^2$ ہو گا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفاعل موج f_n پر منہدم کرتی ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال Ψ میں ہے، اس کا Q کی پیمائش کے بعد حال f_n میں ہونے کا احتمال $|c_n|^2$ ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جسے $\hat{Q}f_n = q_n f_n$ کی بدولت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\langle Q\rangle = \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^{*} c_n q_n \langle f_{n'}|f_n\rangle = \sum_{n'}\sum_{n} c_{n'}^{*} c_n q_n \delta_{n'n} \sum_{n} q_n |c_n|^2. \tag{۳.۵۱}$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آ رہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں؛ اگرچہ یہ توپ سے چوہا مارنے والی بات ہو گی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال Ψ میں ایک ذرے کے لیے x کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی قدر دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد y متغیر x کا امتیازی قدر ہو گا، اور اس کا مطابقتی (ڈیراک معیاری عمودی) امتیازی تفاعل $g_y(x) = \delta(x-y)$ ہو گا۔ ظاہراً درج ذیل ہو گا

$$c(y) = \langle g_y|\Psi\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x = \Psi(y,t) \tag{۳.۵۲}$$

لہٰذا وسعت $\mathrm{d}y$ میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|\Psi(y,t)|^2$ ہو گا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہو گا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{(ipx/\hbar)}$ ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$c(p) = \langle f_p|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{۳.۵۳}$$

یہ اتنی اہم مقدار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو **معیار حرکی فضا تفاعل موج**[۴۳] پکارا اور $\Phi(p,t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج $\Psi(x,t)$ کا فوریئر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فوریئر بدل ہے ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\,\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{۳.۵۴}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar}\,\Phi(p,t)\,\mathrm{d}p, \tag{۳.۵۵}$$

متعمم شماریاتی مفہوم کے تحت سعت $\mathrm{d}p$ میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\Phi(p,t)\right|^2\,\mathrm{d}p \tag{۳.۵۶}$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے ڈیلٹا تفاعل کنواں $V(x) = -\alpha\delta(x)$ میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا $p_0 = m\alpha/\hbar$ سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

[۴۳] momentum space wave function

حل: اس کا (مقامی فضا) تفاعل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جہاں $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ ہے)۔

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکی فضا تفاعل موج درج ذیل ہو گا۔

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2+p_0^2)^2} \,\mathrm{d}p &= \frac{1}{\pi} \Big[\frac{p p_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1}\Big(\frac{p}{p_0}\Big) \Big] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908\end{aligned}$$

(اور یہاں بھی میں نے تکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ □

سوال ۳.۱۱: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فضا تفاعل موج $\Phi(p,t)$ تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے p کی پیمائش کا کلاسیکی سعت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو بامعنی ہندسوں تک) کیا ہو گا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصہ کے لئے "عمومی تقسیم" یا "تفاعل خلل" کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle x \rangle = \int \Phi^* \Big(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \Big) \Phi \,\mathrm{d}p. \tag{۳.۵۷}$$

اشارہ: دھیان رہے کہ $x e^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}) e^{(ipx/\hbar)}$ ہے۔

یوں معیار حرکی فضا میں عامل مقام $i\hbar\partial/\partial p$ ہو گا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\langle Q(x,p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi \,\mathrm{d}x, & \text{مقامی فضا میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}, p\right) \Phi \,\mathrm{d}p, & \text{معیار حرکی فضا میں} \end{cases} \tag{۳.۵۸}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب وکتاب مقامی فضا کی بجائے معیار حرکی فضا میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہو گا)۔

۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$ کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہٰذا توجہ رکھیں۔

۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی قابل مشاہدہ A کے لیے درج ذیل ہوگا (مساوات 21.3):

$$\sigma_A^2 = \langle(\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi|(\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi\rangle = \langle f|f\rangle$$

جہاں $f \equiv (\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi$ ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے قابل مشاہدہ B کے لیے

$\sigma_B^2 = \langle g|g\rangle$ ہوگا جہاں $g \equiv (\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi$ ہے۔

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات 7.3 کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2 \tag{۳.۵۹}$$

اب کسی بھی مخلوط عدد z کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$|z|^2 = [(z)_{\text{حقیقی}}]^2 + [(z)_{\text{خیالی}}]^2 \geq [(z)_{\text{خیالی}}]^2 = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2 \tag{۳.۶۰}$$

یوں $z = \langle f|g\rangle$ لیتے ہوئے

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}[\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle]\right)^2 \tag{۳.۶۱}$$

ہوگا لیکن $\langle f|g\rangle$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \langle(\hat{A} - \langle A\rangle)\Psi|(\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi\rangle = \langle\Psi|(\hat{A} - \langle A\rangle)(\hat{B} - \langle B\rangle)\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B\rangle - \hat{B}\langle A\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle)\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle - \langle B\rangle\langle\Psi|\hat{A}\Psi\rangle - \langle A\rangle\langle\Psi|\hat{B}\Psi\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle \\
&= \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle \\
&= \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\langle g|f\rangle = \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

لہٰذا

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle \hat{A}\hat{B}\rangle - \langle \hat{B}\hat{A}\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقلب ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2 \tag{۳.۶۲}$$

یہ **اصول عدم یقینیت**[۴۴] کی **عمومی** صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دو ہرمشی عاملین کے مقلب میں بھی i کا جذر پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود i کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔[۴۵]

مثال کے طور پر، فرض کریں مقام $(\hat{A} = x)$ پہلا اور معیار حرکت $(\hat{B} = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ دوسرا قابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقلب

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہٰذا

$$\sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i}i\hbar\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{h}{2} \tag{۳.۶۳}$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو قابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر مقلوب ہوں کے لیے ایک عدد "اصول عدم یقینیت" پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں **غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ**[۴۶] کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعل نہیں پائے

---

[۴۴] uncertainty principle

[۴۵] یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ دو ہرمشی عاملین کا مقلب خود خلاف ہرمشی $(\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q})$ ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۶)۔

[۴۶] incompatible observables

جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے بر عکس ہم آہنگ (مقلوب) قابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔[47]

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا z جزو باہمی ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی اقدار کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے بر عکس، چونکہ مقام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہٰذا مقام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کوانٹم نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماریاتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا مقام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا مقام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریئر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہٰذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہوگی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائن نما موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن مقام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔[48] مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجہ کو غیر مستمل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں قابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً تب ممکن ہوگا جب دونوں قابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۳:

ا. درج ذیل مماثل مقلب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \qquad (۳.۶۴)$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل $f(x)$ کے لئے پر درج ذیل ہوگا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad (۳.۶۵)$$

[47] یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر مقلب قالبوں کو بیکوقت وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے (یعنی، انہیں ایک جیسی مماثلہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جا سکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہرمشی قالبوں کو بیکوقت وتری بنایا جا سکتا ہے۔ حصہ ۱.۵ دیکھیں۔

[48] جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً) x کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود p کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریدا جائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے نور یہ اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے قابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا مقام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

سوال ۳.۱۴: مقام $(A = x)$ میں عدم یقینیت اور توانائی $(B = p^2/2m + V)$ میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر $\hat{P}$ اور $\hat{Q}$ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے $[\hat{P}, \hat{Q}]f = 0$ ہوگا۔

۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی مرتعش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو مقام و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد $(\sigma_x \sigma_p = \hbar/2)$ کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: کم سے کم عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۹ اور مساوات ۳.۶۰۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ Ψ کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو: $g(x) = cf(x)$، جہاں c کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (سوال A5 دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۰ میں z کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب $0 = \text{حقیقی}(z)$ ہو، یعنی جب

$$\text{حقیقی}\langle f|g\rangle = \text{حقیقی}(c\langle f|f\rangle) = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب $\langle f|f\rangle$ یقیناً حقیقی ہے، لہٰذا مستقل c لازماً خالص خیالی ہوگا؛ جسے ہم ia لکھتے ہیں۔ یوں کم سے کم عدم عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$g(x) = iaf(x), \quad a \text{ حقیقی} \tag{۳.۶۶}$$

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \langle p \rangle\right)\Psi = ia(x - \langle x \rangle)\Psi \tag{۳.۶۷}$$

جو متغیر x کے تفاعل Ψ کا تفرقی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = Ae^{-a(x-\langle x \rangle)^2/2\hbar}e^{i\langle p \rangle x/\hbar} \tag{۳.۶۸}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ در حقیقت گاوسی ہو گا اور جو دو مثالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھے۔[۴۹]

سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۷ کو $\Psi(x)$ کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ مستقلات ہیں۔

۳.۵.۳ توانائی و وقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۶۹}$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے Δx (متغیر x کی "عدم یقینیت") لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۹ کی طرح کا **توانائی و وقت اصول عدم یقینیت**[۵۰] درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۰}$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں x اور t (بلکہ ct) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں p اور E (بلکہ E/c) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہٰذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۰ اور مساوات ۳.۶۹ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹم میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ شروڈنگر مساوات صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ t اور x کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تفرقی مساوات t میں یک رتبی جبکہ x میں دو رتبی ہے)، اور مساوات ۳.۶۹ سے قطعاً مساوات ۳.۷۰ مراد نہیں لی جا سکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر متغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے قابل پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر متغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاعلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو Δt ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام "کافی زیادہ" تبدیل ہوتا ہے۔

---

[۴۹] دھیان رہے کہ صرف Ψ کو x کا تابع ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ "مستقلات" A، a، $\langle x\rangle$ اور $\langle p\rangle$ تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ Ψ کم سے کم صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اتنا دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحہ پر تفاعل موج x کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحہ پر) عدم یقینیت حاصل ضرب کم سے کم ہو گا۔

[۵۰] energy-time uncertainty principle

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی قابل مشاہدہ $Q(x, p, t)$ کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \Big\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}|\hat{Q}\Psi\Big\rangle + \Big\langle\Psi|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\Big\rangle + \Big\langle\Psi|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big\rangle$$

اب مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں $H = p^2/2m + V$ ہیملٹنی ہے)۔

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|\hat{Q}\hat{H}\Psi\rangle + \Big\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Big\rangle$$

اب $\hat{H}$ ہرمشی ہے لہٰذا $\langle\hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{H}\hat{Q}\Psi\rangle$ اور یوں ادرج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle + \Big\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Big\rangle \tag{۳.۷۱}$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کار آمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۷ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہو گا،[۱۵] یہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیملٹنی کا مقلب تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر $\hat{H}$ اور $\hat{Q}$ آپس میں قابل تبادل ہوں، تب $\langle Q\rangle$ مستقل ہو گا، اور اس نقطہ نظر سے Q بقائی مقدار ہو گا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) میں ہم $A = H$ اور $B = Q$ لے کر فرض کریں کہ Q صریحاً t کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2\sigma_Q^2 \geq \Big(\frac{1}{2i}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

ہو گا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma_H\sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\Big| \tag{۳.۷۲}$$

ہم $\Delta E \equiv \sigma_H$ اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$\Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|\,\mathrm{d}\langle Q\rangle/\,\mathrm{d}t|} \tag{۳.۷۳}$$

[۱۵] وقت کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا عموماً $\partial\hat{Q}/\partial t = 0$ ہو گا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال لینے کی خاطر ایک ایسے ہارمونی مرتعش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقیاس لچک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجہ حرارت تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لچکدار ہو جاتا ہو): $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2x^2$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۳.۷۴}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں Δt کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} \right| \Delta t,$$

ہے لہٰذا Δt اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں Q کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص Δt اس قابل مشاہدہ Q پر منحصر ہو گی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی ΔE کی صورت میں تمام قابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہو گی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہو گی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکتا طور پر معین ہو گی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ($\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$)؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مساوات ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x,t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2 t/\hbar}$$

اگر a، b، ψ_1 اور ψ_2 حقیقی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|\Psi(x,t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

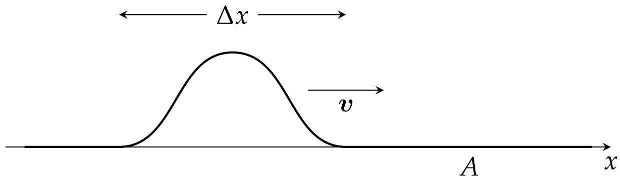
ایک ارتعاش کا دوری عرصہ $\tau = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$ ہو گا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے $\Delta E = E_2 - E_1$ اور $\Delta t = \tau$ لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

جو یقیناً $\geq \hbar/2$ ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔ □

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کیفی طور پر $\Delta t = \Delta x/v = m\Delta x/p$ ہو گا لیکن $E = p^2/2m$ ہے، لہٰذا $\Delta E = p\Delta p/m$ ہو گا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m}\frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$



شکل ۱.۳: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۶.۳)۔

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت $\hbar/2 \geq$ ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۱۹.۳ دیکھیں)۔

□

مثال ۷.۳: ذرہ Δ تقریباً 10^{-23} سیکنڈ حیات رہنے کے بعد خود بخود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کمیت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جرس کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط $1232\,\text{MeV}/c^2$ پر اور چوڑائی تقریباً $120\,\text{MeV}/c^2$ ہو گی (شکل ۲.۳)۔ ساکن صورت توانائی (mc^2) کیوں بعض اوقات 1232 سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی خلل کے بنا پر ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

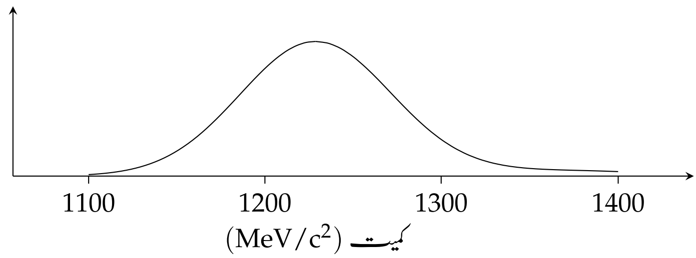
$$\Delta E \Delta t = \left(\frac{120}{2}\text{MeV}\right)(10^{-23}\,\text{s}) = 6 \times 10^{-22}\,\text{MeV s}$$

ہے جبکہ $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22}\,\text{MeV s}$ ہے۔ یوں کمیت میں پھیلاؤ اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت اجازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کمیت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔[۵۲] □

ان مثالوں میں ہم نے جزو Δt کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۵.۳ میں اس سے مراد طول موج تھا؛ مثال ۶.۳ میں اس سے مراد وہ دورانیہ تھا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۷.۳ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں Δt اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں "کافی زیادہ" تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا پر کوانٹم میکانیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی ΔE "ادھار" لے کر وقت $\Delta t \approx \hbar/(2\Delta E)$ کے اندر "واپس" کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہو گا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما ہو۔ اب

[۵۲] حقیقت میں مثال ۷.۳ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ 10^{-23} سیکنڈ کو گھڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کمیتی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق الٹ رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ فرض کریں کہ Δ تقریباً ایک پروٹان ($\sim 10^{-15}\,\text{m}$) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً 10^{-23} سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ فرض کرنا مشکل ہو گا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔



شکل ۳.۲: کمیت Δ کی پیمائشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی جائز مطلب لیے جا سکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹم میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی غلط استعمال کے باوجود نتائج زیادہ غلط نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۷: درج ذیل ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷۱ کی اطلاق کریں۔

ا. $Q = 1$ ب. $Q = H$ ج. $Q = x$ د. $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲۷، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

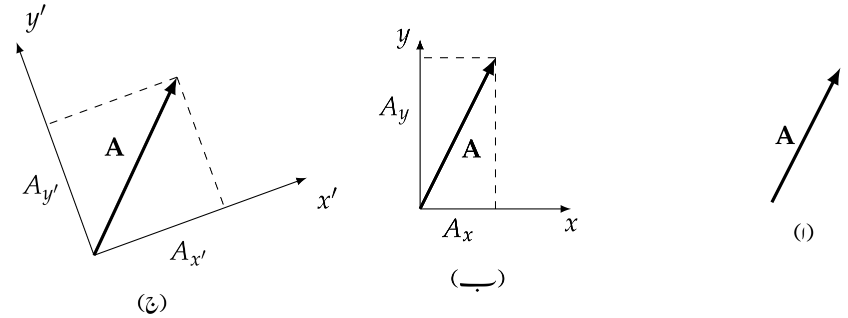
سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف σ_H، σ_x اور $\mathrm{d}\langle x\rangle/\mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تفاعل موج اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پرکھیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف σ_H، σ_x اور $\mathrm{d}\langle x\rangle/\mathrm{d}t$ کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پرکھیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ قابل مشاہدہ x کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۴ کے اصول عدم یقینیت کا روپ اختیار کرتی ہے۔

۳.۶ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ $\mathbf{A}$ پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہو گا کہ آپ x اور y محدد کا ایک کارتیسی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ $\mathbf{A}$ کے



شکل ۳.۳: (ا) سمتیہ $\mathbf{A}$، (ب) xy محدد سے لحاظ سے $\mathbf{A}$ کے اجزاء، (ج) $x'y'$ محدد کے لحاظ سے $\mathbf{A}$ کے اجزاء

اجزاء: $A_x = \hat{i}\cdot\mathbf{A}$ اور $A_y = \hat{j}\cdot\mathbf{A}$ وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارتیسی نظام قائم کرے جس کے محدد x' اور y' ہوں؛ وہ سمتیہ $\mathbf{A}$ کے اجزاء $A'_x = \hat{i}'\cdot\mathbf{A}$ اور $A'_y = \hat{j}'\cdot\mathbf{A}$ پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس ($\{\hat{i},\hat{j}\}$ اور $\{\hat{i}',\hat{j}'\}$) کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ خود "باہر فضا" میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

یہی کچھ کوانٹم میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو "باہر ہلبرٹ فضا" میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ در حقیقت امتیازی تفاعل مقام کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو کا عددی سر موجی تفاعل $\Psi(x,t)$ ہوگا:

$$\Psi(x,t) = \langle x|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۵}$$

(جہاں $\hat{x}$ کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت x ہے کو سمتیہ $|x\rangle$ ظاہر کرتا ہے)[53]، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں $|\mathcal{S}\rangle$ کی پھیلاو، مقام و معیار حرکت موجی تفاعل $\Phi(p,t)$ ہے:

$$\Phi(p,t) = \langle p|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۶}$$

(جہاں $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت p ہے کو سمتیہ $|p\rangle$ ظاہر کرتا ہے)۔[54] ہم $|\mathcal{S}\rangle$ کے پھیلاو کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غیر مسلسل طیف فرض کر

[53] میں اس کو g_x (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہنا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس مقام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھٹکارا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ ہلبرٹ فضا کو، x پر، بطور مربع متکامل تفاعلات کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس مقام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

[54] مقامی فضا میں یہ $f_p(x)$ ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

رہے ہیں):

$$c_n(t) = \langle n|\mathcal{S}(t)\rangle \tag{۳.۷۷}$$

(جہاں $\hat{H}$ کے n ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ $\langle n|$ ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات ۳.۴۶۔ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات Ψ اور Φ، اور عددی سروں کا سلسلہ $\{c_n\}$ ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \int \Psi(y,t)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = \int \Phi(p,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p\\ &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar}\psi_n(x)\end{aligned} \tag{۳.۷۸}$$

(قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا "تبادلہ" دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle \tag{۳.۷۹}$$

بالکل سمتیات کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس $\{|e_n\rangle\}$، [۵۵] کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle = \sum_n a_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n|\alpha\rangle \quad \text{ہے، اور}\\ |\beta\rangle = \sum_n b_n|e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n\langle e_n\beta\rangle \quad \text{ہے}\end{aligned} \tag{۳.۸۰}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبی ارکان**[۵۶،۵۷]

$$\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \equiv Q_{mn} \tag{۳.۸۱}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\sum_n b_n|e_n\rangle = \sum_n a_n\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۲}$$

یا، سمتیہ $\langle e_m|$ کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$\sum_n b_n\langle e_m|e_n\rangle = \sum_n a_n\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle \tag{۳.۸۳}$$

---

[۵۵] میں فرض کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں n استمراری ہو گا اور مجموعات کی جگہ تکملات ہوں گے۔

[۵۶] matrix elements

[۵۷] یہ اصطلاح متناہی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس "قالب" کے ارکین کی تعداد اب لامتناہی ہو گی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn} a_n \tag{۳.۸۴}$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں قالبی ارکان معلومات فراہم کرتے ہے۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہو گا جن کے خطی غیر تابع حالات کی تعداد متناہی عدد (N) ہو گا۔ سمتیہ $|\mathcal{S}(t)\rangle$ ایسی صورت میں N ابعادی سمتی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)، (N) اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ عاملین $(N \times N)$ سادہ قالب کا روپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامتناہی آبادی سمتی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تابع حالات ممکن ہیں۔[۵۸]

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathcal{S}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ہو گا جہاں} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہے۔}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہرمشی) قالب کے روپ میں لکھا جا سکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں g اور h حقیقی مستقل ہیں۔ اگر ($t = 0$ پر) یہ نظام حال $|1\rangle$ سے ابتدا کرے تب وقت t پر اس کا حال کیا ہو گا؟

حل: (تابع وقت) شروڈنگر مساوات درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathcal{S}\rangle = H|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۵}$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تابع تابع شروڈنگر

$$H|\mathcal{S}\rangle = E|\mathcal{S}\rangle \tag{۳.۸۶}$$

[۵۸] یہاں "مساوات" کی نشان سے مراد "ظاہر کرتا ہے" لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علامتیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔

کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم H کی امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی قیمت امتیازی مساوات تعین کرتی ہے۔

$$\text{مقطع}\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اجازتی توانائیاں $(h+g)$ اور $(h-g)$ ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm\alpha$$

لہٰذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{S}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{S}_{+}\rangle + |\mathcal{S}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو $e^{-iE_nt/\hbar}$ منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i(h+g)t/\hbar}|\mathcal{S}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar}|\mathcal{S}_{-}\rangle] \\
&= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar}\left[e^{-igt/\hbar}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{-iht/\hbar}\begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar}\begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i\sin(gt/\hbar) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت شروڈنگر مساوات کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ $t=0$ پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) **ارتعاش نیوٹرینو**[۵۹] کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں $|1\rangle$ **الیکٹران نیوٹرینو**[۶۰]، اور $|2\rangle$ **میوان نیوٹرینو**[۶۱] کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں خلاف وتر جزو (g) غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میوان نیوٹرینو میں اور میوان نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

[۵۹] neutrino oscillations
[۶۰] electron neutrino
[۶۱] muon neutrino

کوانٹم میکانیات میں اندرونی ضرب کو **ڈیراک علامتیت**[۶۲] سے ظاہر کیا جاتا ہے جو تکونی قوسین، $\rangle$ اور $\langle$، اور افقی لکیر $|$، پر مشتمل ہے۔ یوں کوانٹم میکانیات میں تکونی قوسین کو قوسین نہیں بلکہ عاملین تصور کریں۔ اندرونی ضرب $\langle\alpha|\beta\rangle$ کو دو حصوں $|\alpha\rangle$ اور $\langle\beta|$ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں بالترتیب **تفاعلیہ**[۶۳] اور **سمتاویہ**[۶۴] کہتے ہیں۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہو گا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک تفاعلیہ کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) جیسا آپ دیکھیں گے کوانٹم میکانیات میں تفاعلیہ کو ایک قالب اور سمتاویہ کو سمتیہ کی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ڈیراک علامتیت کو **تفاعلیہ و سمتاویہ علامتیت**[۶۵] بھی کہتے ہیں۔ ایک تفاعلی فضا میں تفاعلیہ کو تکمل لینے کی ہدایت تصور کیا جا سکتا ہے:

$$\langle f| = \int f^*[\cdots]\,\mathrm{d}x$$

جہاں چوکور قوسین $[\cdots]$ میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو تفاعلیہ کے دائیں ہاتھ سمتاویہ میں موجود ہو گا۔ ایک متناہی ابعادی سمتی فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{۳.۸۷}$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی تفاعلیہ ایک سمتیہ صف

$$\langle\alpha| = (a_1^* a_2^* \ldots a_n^*) \tag{۳.۸۸}$$

ہو گا۔ تمام تفاعلیہ کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتی فضا حاصل ہو گا جس کو **دوہری فضا**[۶۶] کہتے ہیں۔

تفاعلیہ کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر $|\alpha\rangle$ ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{۳.۸۹}$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا وہ حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو $|\alpha\rangle$ کے "ساتھ ساتھ" پایا جاتا ہو:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle;$$

---

[۶۲] Dirac notation
[۶۳] bra
[۶۴] ket
[۶۵] bra-ket notation
[۶۶] dual space

ہم اس کو $\langle\alpha|$ کے احاطہ کیے گئے یک بعدی ذیلی فضا پر **عامل تظلیل**[۶۷] کہتے ہیں۔ اگر $\{|e_n\rangle\}$ غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn} \tag{۳.۹۰}$$

ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \tag{۳.۹۱}$$

(جو عامل مماثل ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ $|\alpha\rangle$ پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس $\{|e_n\rangle\}$ میں سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے پھیلاو کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \tag{۳.۹۲}$$

اسی طرح اگر $\{|e_z\rangle\}$ ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z|e_{z'}\rangle = \delta(z-z') \tag{۳.۹۳}$$

ہو، تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int |e_z\rangle\langle e_z|\,\mathrm{d}z = 1 \tag{۳.۹۴}$$

مساوات ۳.۹۱ اور مساوات ۳.۹۴ تکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تظلیل **یک طاقتی**[۶۸] ہیں، یعنی ان کے لئے $\hat{P}^2 = \hat{P}$ ہو گا۔ $\hat{P}$ کے امتیازی اقدار تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ ، $|3\rangle$ کا احاطہ کیے گئے تین بعدی فضا پر غور کریں۔ سمتاویہ $|\alpha\rangle$ اور سمتاویہ $|\beta\rangle$ درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

ا. $\langle\alpha|$ اور $\langle\beta|$ کو (دوہری اساس $\langle 1|$ ، $\langle 2|$ ، $\langle 3|$ کی صورت میں) تیار کریں۔

ب. $\langle\alpha|\beta\rangle$ اور $\langle\beta|\alpha\rangle$ تلاش کریں اور $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل $\hat{A} \equiv |\alpha\rangle\langle\beta|$ کے نو ارکان تلاش کرکے قالب $\mathbf{A}$ تیار کریں۔ کیا یہ ہرمشی ہے؟

---

[۶۷] projection operator
[۶۸] idempotent

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

جہاں $\langle 2|$, $\langle 1|$ معیاری عمودی اساس اور E ایسا عدد ہے جس کا بعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی اقدار اور ($\langle 1|$ اور $\langle 2|$ کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ) امتیازی تفاعل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے $\hat{H}$ کا قالب $\mathbf{H}$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل $\hat{Q}$ کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ $\hat{Q}$ کو اس کے **طیفی تحلیل**[69]

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکنہ سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچا جاتا ہے لہٰذا کسی بھی سمتیہ $\langle\alpha|$ کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہو گا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{\sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|\right\}|\alpha\rangle$$

مزید سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: **لیژانڈر کثیر رکنیاں**۔ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر تفاعلات 1 ، x ، x^2 اور x^3 کو گرام و شمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (سوال .4A دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پہچان پائیں؛ (معیاری عمود زنی کے علاوہ)[70] یہ لیژانڈر کثیر رکنیاں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک **خلاف ہرمشی**[71] (یا **منحرف ہرمشی**[72]) عامل اپنے ہرمشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q} \tag{۳.۹۵}$$

---

[69] spectral decomposition

[70] لیژانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کونسی روایت بہتر ثابت ہو گی۔ انہوں نے مجموعی جزو ضربی یوں منتخب کیا کہ $x = 1$ پر تمام تفاعلات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بد قسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

[71] anti-hermitian

[72] skew-hermitian

ا. دکھائیں کہ خلاف ہرمشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہو گی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہرمشی عاملین کا مقلب خلاف ہرمشی ہو گا۔ دو عدد خلاف ہرمشی عاملین کے مقلب کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ۳.۲۷: **ترتیبی پیمائشیں**[۴۳]: قابل مشاہدہ A کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{A}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ψ_1 اور ψ_2، جن کے امتیازی اقدار بالترتیب a_1 اور a_2 ہیں، پائے جاتے ہیں۔ قابل مشاہدہ B کو ظاہر کرنے والے عامل $\hat{B}$ کے دو معمول شدہ امتیازی حالات ϕ_1 اور ϕ_2 اور بالترتیب امتیازی اقدار b_1 اور b_2 ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. قابل مشاہدہ A کی پیمائش a_1 قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فوراً) بعد یہ نظام کس حال میں ہو گا؟

ب. اب اگر B کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. قابل مشاہدہ B کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ A کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ a_1 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو B کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳.۲۸: لامتناہی چوکور کنویں کے n ویں ساکن حال کی معیار حرکت و فضا تفاعل موج $\Phi_n(p,t)$ تلاش کریں۔ $|\Phi_1(p,t)|^2$ اور $|\Phi_2(p,t)|^2$ کو p کے تفاعل کے طور پر ترسیم کریں (نقاط $p = \pm n\pi\hbar/a$ پر خصوصی توجہ دیں)۔ $\Phi_n(p,t)$ کو استعمال کرتے ہوئے p^2 کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۲.۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۲۹: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جہاں n کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ $-n\lambda < x < n\lambda$ پر یہ تفاعل خالص سائن نما ہے (جس کا طول موج λ ہے) تاہم چونکہ یہ تفاعل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہٰذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سعت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فضا تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں۔ $|\Psi(x,0)|^2$ اور $|\Phi(p,0)|^2$ ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفروں کے بیچ) چوڑائیاں ω_x اور ω_p تعین کریں۔ دیکھیں کہ $n \to \infty$ کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہو گا؟ ω_x اور ω_p کو Δx اور Δp کی اندازاً قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ σ_p کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنا ہو گا۔ کیا آپ اس مسئلے کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

[۴۳] sequential measurements

سوال ۳.۳۰: درج ذیل فرض کریں

$$\Psi(x,0)=\frac{A}{x^2+a^2}$$

جہاں A اور a مستقلات ہیں۔

ا. $\Psi(x,0)$ کو معمول پر لاتے ہوئے A تعین کریں۔

ب. (لمحہ $t=0$ پر) $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ اور σ_x تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت وفضا تفاعل موج $\Phi(p,0)$ تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ ہے۔

د. $\Phi(p,0)$ استعمال کرتے ہوئے (لمحہ $t=0$ پر) $\langle p\rangle$ $\langle p^2\rangle$ اور σ_p کا حساب کریں۔

ھ. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: **مسئلہ وریل**۔ درج ذیل مساوات ۳.۷۱ کی مدد سے دکھائیں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle xp\rangle-2\langle T\rangle-\left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle \tag{۳.۹۶}$$

جہاں T حرکی توانائی $(H=T+V)$ ہے۔ ساکن حال میں بایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایسا کیوں ہے؟) لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$2\langle T\rangle=\left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle \tag{۳.۹۷}$$

اس کو **مسئلہ وریل**[۴۷] کہتے ہیں۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\langle T\rangle=\langle V\rangle$ ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی ووقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ $\Delta t=\tau/\pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x,0)$ کے عمودی حال تک $\Psi(x,t)$ کی ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کا تفاعل موج $\Psi(x,0)=1/\sqrt{2}[\psi_1(x)+\psi_2(x)]$ استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں قالبی ارکان $\langle n|x|n'\rangle$ اور $\langle n|p|n'\rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں قالبی وتری رکن $n=n'$ دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامتناہی) قالب $\mathbf{X}$ اور $\mathbf{P}$ مرتب کریں۔ دکھائیں کہ اس اساس میں $\mathbf{H}=\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2+\frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$ وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جزوی جواب:

$$\langle n|x|n'\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}+\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right) \tag{۳.۹۸}$$

---

[۴۷] virial theorem

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک جتنے احتمال کے ساتھ، $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ دے گی۔ اس حال میں $\langle p\rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی؟ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی قیمت (یہی زیادہ سے زیادہ قیمت) ہو تب $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3
ہارمونی مرتعش کے اتساقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات ($|n\rangle = \psi_n(x)$، مساوات ۲.۶۷) میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد ($\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$) پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x\sigma_p = (2n+1)\hbar/2$ ہو گا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں **اتساقی حالات**[45] کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل[46] کے امتیازی تفاعل ہوں گے

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی قدر α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال $|\alpha\rangle$ میں $\langle x\rangle$، $\langle x^2\rangle$، $\langle p\rangle$، $\langle p^2\rangle$ دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ a_- کا ہرمشی جوڑی دار a_+ ہے۔ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہو گا۔

ب. σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$ ہو گا۔

ج. کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح، اتساقی حال کو توانائی امتیازی حالات کا پھیلاو

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ پھیلاو کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

د. $|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب: $e^{-|\alpha|^2/2}$

ھ. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \to e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

[45] coherent states

[46] عامل رفعت کے ایسے امتیازی حالات جنہیں معمول پر لانا ممکن ہو نہیں پائے جاتے ہیں۔

شامل کر کے دکھائیں کہ $|\alpha(t)\rangle$ اب بھی a_- کا امتیازی حال ہو گا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی قدر ارتقا پذیر ہو گا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha$$

یوں اتفاقی حال ہمیشہ اتفاقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتا رہے گا۔

و. کیا زمینی حال $|n = 0\rangle$ خود اتفاقی حال ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہو گا۔

سوال ۳.۳۶: **مبسوط اصول عدم یقینیت۔** متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}\langle C^2\rangle$$

جہاں $\hat{C} \equiv -i[\hat{A},\hat{B}]$ ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}(\langle C\rangle^2 + \langle D\rangle^2) \tag{۳.۹۹}$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{AB} + \hat{BA} - 2\langle A\rangle\langle B\rangle$ ہو گا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۰ میں z کا حقیقی جزو $\operatorname{Re}(z)$ جزو لیں۔

ب. مساوات ۳.۹۹ کو $A = B$ صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں $C = 0$ ہے لہٰذا معیاری عدم یقینیت اصول یہاں بے وقعت ہے؛ بدقسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کا ہیملٹنی درج ذیل قالب دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ب. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک تین سطحی نظام کا ہیملٹنی درج ذیل قالب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو قابل مشاہدہ A اور B کو درج ذیل قالب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں ω ، λ اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

ا. $\mathbf{H}$ ، $\mathbf{A}$ اور $\mathbf{B}$ کے امتیازی اقدار اور (معمول پر لائے گئے) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب. یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔ لمحہ t=0 پر H ، A اور B کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج. لمحہ t پر $|\mathcal{S}(t)\rangle$ کیا ہو گا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟ انہیں سوالات کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

ا. ا) ایک تفاعل $f(x)$ جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں x_0 کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا پر $\hat{p}/\hbar$ کو **فضا میں انتقال کا پیدا کار**[77] کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نما کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسل پھیلاؤ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) شروڈنگر مساوات کو $\Psi(x,t)$ مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x,t)$$

(جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا پر $-\hat{H}/\hbar$ کو **وقت میں انتقال کا پیدا کار**[78] کہتے ہیں۔

ج. دکھائیں لمحہ $t + t_0$ پر حرکی متغیر $Q(x,p,t)$ کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔[79]

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x,t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar}\hat{Q}(x,p,t+t_0)e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x,t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۱ حاصل کریں۔ اشارہ: $dt = t_0$ لے کر dt میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

ا. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت شروڈنگر مساوات کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب: ($e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p,0)$)

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے $\Phi(p,0)$ تلاش کر کے اس صورت کے لئے $\Phi(p,t)$ مرتب کریں۔ ساتھ ہی $\left|\Phi(p,t)\right|^2$ مرتب کریں جو تابع وقت نہیں ہو گا۔

ج. Φ پر مبنی موزوں تکملات حل کرتے ہوئے $\langle p \rangle$ اور $\langle p^2 \rangle$ کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2/2m + \langle H \rangle_0$ ہو گا (جہاں زیر نوشت میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

---

[77] generator of translation in space

[78] generator of translation in time

[79] بالخصوص $t = 0$ لے کر، t_0 کی زیر نوشت میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x,t) | \hat{Q} | \Psi(x,t) \rangle = \langle \Psi(x,0) | \hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U} | \Psi(x,0) \rangle$$

ہو گا جہاں $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ہے۔ یوں Q کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ $\hat{Q}$ کو $\Psi(x,t)^*$ اور $\Psi(x,t)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو تفاعل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا $\hat{U}^{-1}\hat{Q}\hat{U}$ کو $\Psi(x,0)^*$ اور $\Psi(x,0)$ میں لپیٹ کر (تابعیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو **شروڈنگر نقطہ نظر** جبکہ موخر الذکر کو **ہیزنبرگ نقطہ نظر** کہتے ہیں۔

جوابات

ضمیمہ ا

خطی الجبرا

ا.ا سمتیات

ا.۲ اندرونی ضرب

$$\left|\langle\alpha|\beta|\rangle\right|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \tag{۱}$$

(اس اہم نتیجہ کو **شوارز عدم مساوات**[۱] کہتے ہیں؛ اس کا ثبوت سوال ا.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں اگر آپ چاہیں تو α اور β کے بیچ زاویے کی تعریف درج ذیل کلیے کے تحت کر سکتے ہیں۔

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle}} \tag{۲}$$

سوال ا.ا: فرض کریں آپ غیر معیاری عمودی اساس $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_n\rangle)$ سے آغاز کرتے ہیں۔ اس اساس سے معیاری عمودی اساس $(|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, \cdots, |e'_n\rangle)$ کو **گرام و شمد حکمت عملی**[۲] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ طریقہ کار کچھ یوں ہے:

ا. اساس کے پہلے سمتیہ کو معمول پر لائیں (اس کو اپنے معیار سے تقسیم کریں)۔

$$|e'_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

---

[۱] Schwarz inequality

[۲] Gram-Schmidt procedure

ب. دوسرے سمتیہ کا پہلے معمول شدہ سمتیہ پر تظلیل لے کر اس کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e_1'|e_2\rangle|e_1'\rangle$$

یہ سمتیہ $|e_1'\rangle$ کو قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول پر لا کر $|e_2'\rangle$ حاصل کریں۔

ج. سمتیہ $|e_3\rangle$ سے اس کا $|e_1'\rangle$ اور $|e_2'\rangle$ پر تظلیل منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e_1'|e_3\rangle|e_1'\rangle - \langle e_2'|e_3\rangle|e_2'\rangle$$

یہ $|e_1'\rangle$ اور $|e_2'\rangle$ کو قائمہ ہو گا؛ اس کو معمول پر لا کر $|e_3'\rangle$ حاصل کریں۔ اسی طرح باقی بھی حاصل کریں۔

گرام و شمد حکمت عملی استعمال کر کے 3 فضا اساس:

$$|e_1\rangle = (1+i)\boldsymbol{i} + (1)\boldsymbol{j} + (i)\boldsymbol{k}, \; |e_2\rangle = (i)\boldsymbol{i} + (3)\boldsymbol{j} + (1)\boldsymbol{k}, \; |e_3\rangle = (0)\boldsymbol{i} + (28)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k}$$

کو معیاری عمودی بنائیں۔

سوال ا.۲: شوارز عدم مساوات (مساوات ا) ثابت کریں۔ اشارہ: آپ $0 \geq \langle\gamma|\gamma\rangle$ استعمال کرتے ہوئے $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle/\langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$ سے شروع کریں۔

ا.۳ قالب

ا.۴ تبدیلی اساس

ا.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار

ا.۶ ہرمشی تبادلے

فرهنگ