کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

ضمیمہ ا

ضمیمہ

خطی الجبرا

کالج کی سطح پر پڑھائے جانے والے سادہ سمتیات کے حساب کو خطی الجبرا تصوراتی جامع پہناتا اور عمومیت دیتا ہے۔ عمومیت دو رخوں میں دی جاتی ہے: (1) ہم غیر سمتیات کو مخلوط اعداد ہونے کی اجازت دیتے ہیں، اور (2) ہم اپنے آپ کو تین ابعاد میں رہنے کا پابند نہیں رکھتے۔

ا.ا سمتیات

سمتیات $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، ... کے سلسلہ اور **غیر سمتیات** (a ، b ، c ، ...)[1] کے سلسلہ پر **سمتی فضا**[2] مشتمل ہو گا جو سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کے زیر عمل **بند**[3] ہو گا۔[4]

- **سمتی جمع**

کسی بھی دو سمتیات کا **مجموعہ** بھی سمتیہ ہو گا۔

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \tag{ا}$$

[1] ہمارے مقصد کے لئے غیر سمتیات سادہ مخلوط اعداد ہوں گے۔ ریاضی دان آپ کو زیادہ پر اسرار میدانوں پر سمتی فضاؤں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، تاہم ان کا کوانٹائی میکانیات میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ یاد رہے کہ α ، β ، γ ، ... (عموماً) اعداد نہیں ہوں گے؛ یہ نام ہوں گے، مثلاً "جمشید"، یا "F43A-9GL"، یا، زیر غور سمتیہ کو جو بھی آپ پکارنا چاہیں۔

[2] vector space

[3] closed

[4] یعنی یہ اعمال پوری طرح معین ہیں، اور کبھی بھی آپ کو سمتی فضا سے باہر منتقل نہیں کریں گے۔

سمتی مجموعہ **استبدالی**[5]:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle \qquad (۲)$$

اور **تلازمی**[6]:

$$|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle \qquad (۳)$$

ہے۔ ایک **معدوم**[7] (یا **صفر**[8]) سمتیہ $|0\rangle$ پایا جاتا ہے[9] جو ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لئے درج ذیل خاصیت رکھتا ہے

$$|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle \qquad (۴)$$

اور ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کا شریک **مخالف سمتیہ**[10] ($|-\alpha\rangle$)[11] پایا جاتا ہے جو درج ذیل دیتا ہے۔

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle \qquad (۵)$$

- **غیر سمتی ضرب**

کسی بھی غیر سمتیہ اور سمتیہ کا حاصل ضرب:

$$a|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \qquad (۶)$$

ایک سمتیہ ہو گا۔ غیر سمتی ضرب سمتی مجموعہ کے لحاظ سے **جزئیتی تقسیمی**[12]

$$a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle \qquad (۷)$$

اور غیر سمتی جمع کے لحاظ سے بھی جزئیتی تقسیمی ہے۔

$$(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle \qquad (۸)$$

یہ غیر سمتیات کے سادہ ضرب کے لحاظ سے **تلازمی** بھی ہے۔

$$a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle \qquad (۹)$$

---

[5] commutative
[6] associative
[7] null
[8] zero
[9] جہاں غلط فہمی کا امکان نہ ہو، وہاں روایتی طور پر معدوم سمتیہ کو سادہ صفر لکھا جاتا ہے: $|0\rangle \to 0$
[10] inverse vector
[11] یہ ایک انوکھی علامت ہے چونکہ α عدد نہیں۔ میں ایک سمتیہ جس کا نام "جمشید" ہے کے مخالف سمتیہ کو "-جمشید" کا نام دے رہا ہوں۔ کچھ ہی دیر میں ہم بہتر اصطلاح دیکھ پائیں گے۔
[12] distributive

غیر سمتیات 0 اور 1 کے ساتھ ضرب آپ کی توقع کے مطابق نتائج دیں گے۔

$$1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle; \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۱۰}$$

ظاہر ہے $|-\alpha\rangle = (-1)|\alpha\rangle$ ہو گا جس کو ہم $-|\alpha\rangle$ لکھتے ہیں۔

یہاں جتنا نظر آ رہا ہے، حقیقتاً اتنا ہے نہیں؛ پس میں نے سمتیات کی جوڑ توڑ کے عام فہم قواعد کو تصوراتی روپ میں پیش کیا ہے۔ نتیجتاً دیگر نظام جو یہی باضابطہ خواص رکھتے ہوں پر ہم سادہ سمتیات کے رویّہ کے بارے میں معلوم علم اور وجدان بروئے کار لا سکیں گے۔

سمتیات $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$، $|\gamma\rangle$، $\cdots$ کا **خطی مجموعہ**[13] درج ذیل روپ کا فقرہ ہو گا۔

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + \cdots \tag{۱۱}$$

ایک سمتیہ $|\lambda\rangle$ جس کو سلسلہ $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$، $|\gamma\rangle$، $\cdots$ کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن نہ ہو **خطی غیر تابع**[14] کہلاتا ہے۔ (مثلاً، تین ابعاد میں اکائی سمتیہ $\hat{k}$ سمتیات $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا خطی غیر تابع ہے، جبکہ xy مستوی میں ہر سمتیہ $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا خطی تابع ہو گا۔) اسی کی توسّط سے، سمتیات کا وہ ذخیرہ جس میں ہر ایک سمتیہ باقی تمام سمتیات کا خطی غیر تابع ہو "خطی غیر تابع" کہلاتا ہے۔ جب ہر سمتیہ کو سمتیات کے ایک ذخیرہ کے ارکان کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو، ہم کہتے ہیں کہ سمتیات کا یہ ذخیرہ فضا کا **احاطہ**[15] کرتے[16] ہیں۔ فضا کا احاطہ کرنے والے خطی غیر تابع سمتیات کا سلسلہ **اساس**[17] کہلاتا ہے۔ اساس میں سمتیات کی تعداد فضا کا **بُعد**[18] کہلاتا ہے۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ بُعد (n) متناہی ہے۔

دیے گئے اساس

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle \tag{۱۲}$$

کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle \tag{۱۳}$$

کو اس اساس کے **ارکان** کی (مرتب) n اجزائی سلسلہ

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{۱۴}$$

---

[13] linear combination

[14] linearly independent

[15] span

[16] فضا کا احاطہ کرنے والے سمتیات کا سلسلہ **مکمل** (complete) بھی کہلاتا ہے، اگرچہ میں اس اصطلاح کو لامتناہی بُعد کی صورت کے لئے رکھتا ہوں جہاں ارتکاز پر سوالات اٹھائے جا سکتے ہیں۔

[17] basis

[18] dimension

سے یکتا طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ عموماً سمتیات کی بجائے ان اجزاء کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سمتیات جمع کرنے کے لئے ان کے مطابقتی اجزاء آپس میں جمع کئے جاتے ہیں:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad (۱۵)$$

غیر سمتیہ سے ضرب کے لئے ہر جزو کو اس غیر سمتیہ سے ضرب کریں:

$$c|\alpha\rangle \leftrightarrow (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) \qquad (۱۶)$$

معدوم سمتیہ کو صفروں کی ایک کھڑی ظاہر کرتی ہے:

$$|0\rangle \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0) \qquad (۱۷)$$

اور مخالف سمتیہ کے ارکان کی علامتیں الٹ کی جاتی ہیں۔

$$|-\alpha\rangle \leftrightarrow (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \qquad (۱۸)$$

ارکان کے ساتھ کام کرنے کی واحد قباحت یہ ہے کہ آپ کو کسی ایک مخصوص اساس کے ساتھ کام کرنا ہوگا، اور یہی حسابی عمل کسی دوسری اساس میں بالکل مختلف نظر آئے گا۔

سوال ا.ا: مخلوط اجزاء والے تین ابعادی سادہ سمتیات $(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})$ پر غور کریں۔

ا کیا وہ ذیلی سلسلہ جس میں تمام سمتیات کے لئے $a_z = 0$ ہو سمتی فضا قائم کرتے ہیں؟ اگر کرتا ہو تب اس کا بُعد کیا ہوگا؛ اگر نہیں کرتا تو کیوں نہیں کرتا؟

ب اس ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے جن کا z جزو 1 کے برابر ہو؟ اشارہ: کیا ایسے دو سمتیات کا مجموعہ اسی ذیلی سلسلہ میں پایا جائے گا؟ معدوم سمتیہ کے بارے میں سوچیں؟

ج ان سمتیات کے ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جن کے تمام ارکان برابر ہوں؟

سوال ا.۲: ان تمام کثیر رکنیوں، (جن کے عددی سر مخلوط ہوں اور) جن کا x میں درجہ N سے کم ہو کے ذخیرہ پر غور کریں۔

ا کیا یہ سلسلہ سمتی فضا قائم کرتا ہے (جہاں کثیر رکنیاں بطور "سمتیات" ہوں)؟ اگر فضا قائم کرتا ہو تو مناسب اساس تجویز کریں اور اس فضا کا بُعد بتائیں۔ اگر فضا قائم نہ کرتا ہو تو تعریفی خصوصیات میں سے کونسی اس میں نہیں پائی جاتی (جاتیں)؟

ب اگر ہم چاہیں کہ تمام کثیر رکنیاں جفت تفاعلات ہوں تب کیا ہوگا؟

ج اگر ہم چاہیں کہ پہلا عددی سر (جو x^{N-1} کو ضرب کرتا ہے) 1 ہو تب کیا ہوگا؟

د اگر ہم چاہیں کہ $x = 1$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت 0 ہو تب کیا ہوگا؟

ہ اگر ہم چاہیں کہ $x = 0$ پر کثیر رکنیوں کی قیمت 1 ہو تب کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: ثابت کریں کہ کسی بھی ایک اساس کے لحاظ سے سمتیہ کے ارکان یکتا ہوں گے۔

۱.۲ اندرونی ضرب

تین ابعاد میں دو اقسام کے سمتی ضرب پائے جاتے ہیں: نقطی ضرب اور صلیبی ضرب۔ موخر الذکر کی قدرتی توسیع کسی طرح بھی n ابعاد سمتی فضاؤں میں نہیں کی جا سکتی، جبکہ اول الذکر کی کی جا سکتی ہے؛ اور اس سیاق و سباق میں اسے عموماً **اندرونی ضرب**[۱۹] پکارا جاتا ہے۔ دو سمتیات ($|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$) کا اندرونی ضرب ایک مخلوط عدد ہو گا جسے $\langle\alpha|\beta\rangle$ لکھا جاتا ہے اور جس کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \tag{۱۹}$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad \text{اور} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \leftrightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle \tag{۲۰}$$

$$\langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle \tag{۲۱}$$

مخلوط اعداد تک عمومیت کے علاوہ یہ مسلمات نقطی ضرب کے جانے پہچانے رویوں کو ریاضی کی زبان میں پیش کرتے ہیں۔ ایسی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب بھی شامل ہو **اندرونی ضرب فضا**[۲۰] کہلاتی ہے۔

چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ اندرونی ضرب غیر منفی عدد ہے (مساوات ۲۰) لہٰذا اس کا جذر حقیقی ہو گا؛ جو سمتیہ کا **معیار**[۲۱] کہلاتا ہے:

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} \qquad \text{معیار} \tag{۲۲}$$

اور جو "لمبائی" کے تصور کو وسعت دیتا ہے۔ **اکائی سمتیہ**[۲۲] (جس کا معیار 1 ہو گا) **معمول شدہ**[۲۳] کہلاتا ہے۔ دو سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر ہو **قائمہ**[۲۴] کہلاتے ہیں (جو "سیدھا کھڑا" ہونے کے تصور کو عمومیت دیتا ہے)۔ باہمی قائمہ معمول شدہ سمتیات:

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} \tag{۲۳}$$

کے ذخیرہ کو **معیاری عمودی سلسلہ**[۲۵] کہتے ہیں۔ معیاری عمودی اساس ہر صورت منتخب کیا جا سکتا ہے (سوال ۱.۴ دیکھیں) اور ایسا کرنا عموماً بہتر بھی ثابت ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو ان کے اجزاء کے روپ میں نہایت خوبصورتی سے لکھا جا سکتا ہے:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + \cdots + a_n^*b_n \tag{۲۴}$$

---

[۱۹] inner product
[۲۰] inner product space
[۲۱] norm
[۲۲] unit vector
[۲۳] normalized
[۲۴] orthogonal
[۲۵] orthonormal set

لہٰذا معیار کا مربع

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 \tag{۲۵}$$

ہو گا جبکہ اجزاء از خود درج ذیل ہونگے۔

$$a_i = \langle e_i|\alpha\rangle \tag{۲۶}$$

(یہ نتائج تین ابعادی معیاری عمودی اساس $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ کے مشہور کلیات $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، $|\boldsymbol{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ اور $a_x = \hat{i}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_y = \hat{j}\cdot\boldsymbol{a}$، $a_z = \hat{k}\cdot\boldsymbol{a}$ کو عمومیت دیتے ہیں۔) یہاں سے آگے ہم صرف معیاری عمودی اساس استعمال کریں گے، ماسوائے جب صریحاً ایسا نہ کرنے کا کہا گیا ہو۔

دو سمتیات کے بیچ زاویہ ایسی ہندسی مقدار ہے جس کو ہم عمومیت دینا چاہیں گے۔ سادہ سمتی تجزیہ میں $\cos\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ہے۔ تاہم اندرونی ضرب عموماً مخلوط عدد ہو گا، لہٰذا (اختیاری اندرونی ضرب فضا میں) مماثل کلیہ (حقیقی) زاویہ θ نہیں دیگا۔ بہر حال، اس مقدار کی مطلق قیمت ایسا عدد ہو گا جو 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔

$$\big|\langle\alpha|\beta\rangle\big|^2 \le \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \tag{۲۷}$$

(اس اہم نتیجہ کو **شوارز عدم مساوات**[۲۶] کہتے ہیں؛ جس کا ثبوت سوال ا.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں، آپ چاہیں تو، $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے بیچ زاویہ کی تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle}} \tag{۲۸}$$

سوال ا.۴: فرض کریں آپ اساس ($|e_1\rangle$، $|e_2\rangle$، $\cdots$، $|e_n\rangle$) سے آغاز کرتے ہیں جو معیاری عمودی نہیں ہے۔ اس اساس سے، **گرام و شمد حکمت عملی**[۲۷] کے ذریعہ (جو ایک منظم ترکیب ہے) معیاری عمودی اساس ($|e_1'\rangle$، $|e_2'\rangle$، $\cdots$، $|e_n'\rangle$) حاصل کی جا سکتی ہے۔ یہ ترکیب کچھ یوں ہے:

ا اساس کے پہلے سمتیہ $|e_1\rangle$ کو (اس کے معیار سے تقسیم کرکے) معمول شدہ بنائیں۔

$$|e_1'\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

ب پہلے سمتیہ پر دوسرے سمتیہ کا ظلیل دریافت کرکے اس ظلیل کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e_1'|e_2\rangle|e_1'\rangle$$

[۲۶] Schwarz inequality
[۲۷] Gram-Schmidt procedure

(سمتیہ $|e_2\rangle$ کا $|e'_1\rangle$ کے رخ غیر سمتیہ تطلیل $\langle e'_1|e_2\rangle$ ہے جس کے دائیں جانب اکائی سمتیہ $|e'_1\rangle$ چسپاں کرنے سے سمتیہ تطلیل حاصل کیا گیا۔) درج بالا سمتیہ $|e'_1\rangle$ کا قائمہ ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کرکے $|e'_2\rangle$ حاصل کریں۔

ج سمتیہ $|e_3\rangle$ کی $|e'_1\rangle$ پر تطلیل اور $|e'_2\rangle$ پر تطلیل کو $|e_3\rangle$ سے منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e'_1|e_3\rangle|e'_1\rangle - \langle e'_2|e_3\rangle|e'_2\rangle$$

یہ $|e'_1\rangle$ اور $|e'_2\rangle$ کو قائمہ ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کرکے $|e'_3\rangle$ حاصل کریں؛ وغیرہ، وغیرہ۔

گرام وشمد حکمت عملی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تین ابعادی فضائی اساس کو معیاری عمودی شدہ کریں۔

$$|e_1\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{(}j) + (i)\hat{k}, |e_2\rangle = (i)\hat{i} + (3)\hat{j} + (1)\hat{k}, |e_3\rangle = (0)\hat{i} + (28)\hat{j} + (0)\hat{k}$$

سوال ۱.۵: شوارز عدم مساوات (مساوات ۲۷) ثابت کریں۔ اشارہ: $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle / \langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$ لیں اور $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ استعمال کریں۔

سوال ۱.۶: سمتیات $|\alpha\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}$ اور $|\beta\rangle = (4-i)\hat{i} + (0)\hat{j} + (2-2i)\hat{k}$ کے بیچ (مساوات ۲۸ کی معنوں میں) زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۷: تکونی عدم مساوات $\|(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ ثابت کریں۔

۱.۳ قوالب

فرض کریں آپ (تین بُعدی فضا میں) ہر سمتیہ کو 17 سے ضرب دیں، یا ہر سمتیہ کو z محور کے گرد $39°$ گھمائیں، یا xy مستوی میں ہر سمتیہ کا عکس لیں؛ یہ تمام **خطی تبادلہ**[۲۸] کی مثالیں ہیں۔ خطی مبدل $\hat{T}$ [۲۹] سمتی فضا میں ہر ایک سمتیہ کا کسی دوسرے سمتیہ $(|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle)$ میں تبادلہ کرتا ہے جہاں کسی بھی سمتیات $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$ اور کسی بھی غیر سمتیات a، b کے لئے اس عمل کا خطی ہونا:

$$\hat{T}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a(\hat{T}|\alpha\rangle) + b(\hat{T}|\beta\rangle) \tag{۲۹}$$

لازمی شرط ہے۔

یہ جانتے ہوئے کہ اساسی سمتیات کے سلسلہ کے ساتھ خطی مبدل کیا کرتا ہے، آپ باآسانی جان سکتے ہیں کہ وہ کسی بھی سمتیہ کے ساتھ کیا کرے گا۔ مثلاً، اگر $|e_1\rangle$، $|e_2\rangle$، $\cdots$، $|e_n\rangle$ اساس قائم کرتے ہوں اور خطی مبدل $\hat{T}$ اساسی سمتیہ $|e_1\rangle$ پر عمل ($\hat{T}|e_1\rangle$) کرکے ایک نیا سمتیہ پیدا کرتا ہے؛ ظاہر ہے، کسی بھی سمتیہ کی طرح، اس نئے سمتیہ کو بھی اس اساس میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle$

[۲۸] linear transformation

[۲۹] اس باب میں خطی تبادلہ کو ٹوپی کی علامت (^) سے ظاہر کیا جائے گا؛ جیسا ہم دیکھیں گے، کوانٹائی عامل بھی خطی مبدل ہیں اور ان کو بھی ٹوپی کی نشان سے ظاہر کیا جائے گا۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں T_{11} ، T_{21} ، $\cdots$ ، T_{n1} عددی سر ہیں۔ اسی طرح باقی اساسی سمتیات کے لئے ایسا کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\hat{T}|e_1\rangle &= T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle \\
\hat{T}|e_2\rangle &= T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle \\
&\vdots \\
\hat{T}|e_n\rangle &= T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle
\end{aligned}$$

جس کو مختصراً درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\hat{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} T_{ij}|e_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{۳۰}$$

اگر $\langle\alpha|$ ایک اختیاری سمتیہ ہو (جس کو ہم ان اساسی سمتیات میں لکھتے ہیں):

$$|\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_3|e_3\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j|e_j\rangle \tag{۳۱}$$

تب

$$\hat{T}|\alpha\rangle = a_1\hat{T}|e_1\rangle + a_2\hat{T}|e_2\rangle + a_3\hat{T}|e_3\rangle + \cdots + a_n\hat{T}|e_n\rangle$$

ہوگا جس میں $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle$ وغیرہ پُر کرکے

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\alpha\rangle = \quad & a_1(T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + T_{31}|e_3\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle) \\
& + a_2(T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + T_{32}|e_3\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle) \\
& + a_3(T_{13}|e_1\rangle + T_{23}|e_2\rangle + T_{33}|e_3\rangle + \cdots + T_{n3}|e_n\rangle) \\
& \vdots \\
& + a_n(T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + T_{3n}|e_3\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle)
\end{aligned}$$

ترتیب نو کرتے ہوئے اکائی سمتیات کے عددی سر اکٹھے کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\alpha\rangle = \quad & (a_1T_{11} + a_2T_{12} + a_3T_{13} + \cdots + a_nT_{1n})|e_1\rangle \\
& + (a_1T_{21} + a_2T_{22} + a_3T_{23} + \cdots + a_nT_{2n})|e_2\rangle \\
& + (a_1T_{31} + a_2T_{32} + a_3T_{33} + \cdots + a_nT_{3n})|e_3\rangle \\
& \vdots \\
& + (a_1T_{n1} + a_2T_{n2} + a_3T_{n3} + \cdots + a_nT_{nn})|e_n\rangle
\end{aligned}$$

اس مساوات میں اساسی سمتیہ $|e_1\rangle$ کے عددی سر $(a_1T_{11} + a_2T_{12} + \cdots + a_nT_{1n})$ کو $\sum_{j=1}^{n} a_jT_{1j}$ لکھا جا سکتا ہے، اور اسی طرح باقی اساسی سمتیات کے عددی سروں کے لئے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\hat{T}|\alpha\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_jT_{1j}|e_1\rangle + \sum_{j=1}^{n} a_jT_{2j}|e_2\rangle + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_jT_{nj}|e_n\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_jT_{ij}|e_i\rangle
\end{aligned}
$$

ہم مساوات ۳۱ سے یہاں تک کے حساب کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
\hat{T}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\hat{T}|e_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_jT_{ij}|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j\right)|e_i\rangle \tag{۳۲}
$$

ظاہر ہے کہ $\hat{T}$ ایک سمتیہ کو جس کے ارکان a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، a_n ہوں کا تبادلہ ایک نئے سمتیہ میں کرتا ہے جس کے ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$
a'_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}a_j \tag{۳۳}
$$

(مساوات ۳۰ اور مساوات ۳۲ میں اشاریہ آگے پیچھے کئے گئے ہیں۔ یہ لکھتے ہوئے غلطی نہیں کی گئی۔ دوسرے لفظوں میں (i اور j آپس میں تبدیل کرنے $j \quad \leftrightarrow \quad i$ سے مراد یہ ہے کہ) اگر اجزاء کا تبادلہ T_{ij} سے ہو، تب اساسی سمتیات کا تبادلہ T_{ji} سے ہو گا۔)

یوں جس طرح کسی اساس کے لحاظ سے n ارکان a_i سمتیہ یا $|\alpha\rangle$ کو یکتا طور ظاہر کرتے ہیں اسی طرح T_{ij} کے n^2 **ارکان**[۳۰] خطی مبدل $\hat{T}$ کو اسی اساس کے لحاظ سے یکتا طور پر بیان کرتے ہیں۔

$$
\hat{T} \leftrightarrow (T_{11}, T_{12}, \cdots, T_{nn}) \tag{۳۴}
$$

اگر اساس معیاری عمودی ہو، مساوات ۳۰ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$
T_{ij} = \langle e_i|\hat{T}|e_j\rangle \tag{۳۵}
$$

---

[۳۰] elements

ان مخلوط اعداد کو **قالب**[۳۱] کے روپ[۳۲] میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

یوں خطی مبدل کا مطالعہ محض قوالب کے نظریہ کا مطالعہ ہوگا۔ دو خطی مبدل کے مجموعہ $(\hat{S} + \hat{T})$ کی تعریف:

$$(\hat{S} + \hat{T})|\alpha\rangle = \hat{S}|\alpha\rangle + \hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۷}$$

ہماری توقع کے عین مطابق قوالب جمع کرنے کے مترادف ہے (جہاں آپ انکے مطابقتی ارکان جمع کرتے ہیں)۔

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ij} = S_{ij} + T_{ij} \tag{۳۸}$$

دو خطی تبادلہ کا حاصل ضرب $(\hat{S}\hat{T})$، پہلے $\hat{T}$ اور اس کے بعد $\hat{S}$ تبادلہ کرنے کے مترادف ہے۔

$$|\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle; \quad |\alpha''\rangle = \hat{S}|\alpha'\rangle = \hat{S}(\hat{T}|\alpha\rangle) = \hat{S}\hat{T}|\alpha\rangle \tag{۳۹}$$

مجموعی مبدل $\hat{U} = \hat{S}\hat{T}$ کو کونسا قالب $\mathbf{U}$ ظاہر کرتا ہے؟ اسے حاصل کرنا مشکل نہیں۔

$$a_i'' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} T_{jk} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} T_{jk} \right) a_k = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} a_k$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}\,\mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ik} = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} T_{jk} \tag{۴۰}$$

قوالب ضرب کرنے کا یہ رائج طریقہ ہے؛ آپ $\mathbf{S}$ کے i ویں صف اور $\mathbf{T}$ کے k ویں قطار کے مطابقتی اندراج آپس میں ضرب کر کے تمام کا مجموعہ لے کر حاصل ضرب $\mathbf{ST}$ کا ik ویں رکن تلاش کرتے ہیں۔ یہی طریقہ کار بروئے کار لاتے ہوئے مستطیل قوالب ضرب کیے جاتے ہیں، بس اتنا ضروری ہے کہ پہلے قالب میں قطاروں کی تعداد دوسرے قالب میں صفوں کی تعداد کے برابر ہو۔ بالخصوص $|\alpha\rangle$ کے ارکان کے n اجزائی سلسلہ کو

---

[۳۱] matrix

[۳۲] میں چوکور قوالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی بڑے حروف، مثلاً $\mathbf{T}$، سے ظاہر کروں گا۔

$n \times 1$ **قطار قالب**[۳۳] (یا "قطار سمتیہ"):[۳۴]

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{۴۱}$$

لکھ کر قاعدہ تبادلہ (مساوات ۳۳) کو قالبی حاصل ضرب:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}\,\mathbf{a} \tag{۴۲}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں اب قالبی اصطلاحات سیکھیں:

- قالب کا **تبدیل محل**[۳۵] (جس کو ہم لاطینی حرف پر "مد" ڈال کر لکھتے ہیں: $\tilde{T}$) انہی ارکان پر مشتمل ہوگا، تاہم اس میں صف اور قطار آپس میں جگہیں تبدیل کرتی ہیں۔ بالخصوص قطار قالب کا تبدیل محل **صف قالب**[۳۶] ہوگا۔

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{۴۳}$$

چوکور قالب کے (بالائی بائیں سے زیریں دائیں) **مرکزی وتر**[۳۷] میں عکس اس کا تبدیل محل ہوگا۔

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \dots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \tag{۴۴}$$

ایسا (چوکور) قالب جو اپنے تبدیل محل کے برابر ہو **تشاکلی**[۳۸] کہلاتا ہے؛ اگر تبدیل محل کی علامت الٹ ہو تب یہ **خلاف تشاکلی**[۳۹] ہوگا۔

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \quad \text{تشاکلی} \qquad \qquad \tilde{\mathbf{T}} = -\mathbf{T} \quad \text{خلاف تشاکلی} \tag{۴۵}$$

---

[۳۳] column matrix
[۳۴] میں قطار قوالب اور صف قوالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی چھوٹے حروف، مثلاً $\mathbf{a}$، سے ظاہر کروں گا۔
[۳۵] transpose
[۳۶] row matrix
[۳۷] main diagonal
[۳۸] symmetric
[۳۹] antisymmetric

• ہر رکن کا مخلوط جوڑی دار لینے سے قالب کا (مخلوط) **جوڑی دار**[۴۰] (جس کو ہم ہمیشہ کی طرح ستارہ، $\mathbf{T}^*$ سے ظاہر کرتے ہیں) حاصل ہوگا۔

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & \dots & T_{1n}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \dots & T_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}^* & T_{n2}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۶}$$

تمام ارکان حقیقی ہونے کی صورت میں قالب **حقیقی**[۴۱] ہوگا، جبکہ تمام ارکان خیالی ہونے کی صورت میں قالب **خیالی**[۴۲] ہوگا۔

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} \quad \text{حقیقی} \qquad\qquad \mathbf{T}^* = -\mathbf{T} \quad \text{خیالی} \tag{۴۷}$$

• قالب کا تبدیل محل وجوڑی دار اس کا **ہرمشی جوڑی دار**[۴۳] (یا **شریک**[۴۴]) ہوگا (جسے خنجر کے نشان، $\mathbf{T}^\dagger$ سے ظاہر کیا جاتا ہے)۔

$$\mathbf{T}^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{T}}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & \dots & T_{n1}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* & \dots & T_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n}^* & T_{2n}^* & \dots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{a}}^* = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_n^* \end{pmatrix} \tag{۴۸}$$

ایسا چوکور قالب جو اپنے ہرمشی جوڑی دار کے برابر ہو **ہرمشی**[۴۵] (یا **خود شریک**[۴۶]) قالب کہلاتا ہے؛ اگر ہرمشی جوڑی دار منفی علامت متعارف کرتا ہو قالب **منحرف ہرمشی**[۴۷] (یا **خلاف ہرمشی**[۴۸]) ہوگا۔

$$\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T} \quad \text{ہرمشی} \qquad\qquad \mathbf{T}^\dagger = -\mathbf{T} \quad \text{منحرف ہرمشی} \tag{۴۹}$$

اس علامتیت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو (معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے) نہایت خوبصورتی کے ساتھ قالبی ضرب (مساوات ۲۴) لکھا جا سکتا ہے۔

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{b} \tag{۵۰}$$

---

[۴۰] conjugate
[۴۱] real
[۴۲] imaginary
[۴۳] hermitian conjugate
[۴۴] adjoint
[۴۵] hermitian
[۴۶] adjoint
[۴۷] skew hermitian
[۴۸] anti-hermitian

یاد رہے کہ درج بالا رکوع میں متعارف تینوں اعمال (تبدیلی محل، جوڑی دار، ہرمشی جوڑی دار) کا دو مرتبہ اطلاق سے واپس اصل قالب حاصل ہو گا۔

عام طور پر قالبی ضرب غیر مقلبی $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$ ہو گا؛ ضرب لکھنے کے دونوں طریقوں کے بیچ فرق کو **مقلب**[49] کہتے ہیں۔[50]

$$[\mathbf{S},\mathbf{T}] \equiv \mathbf{ST}-\mathbf{TS} \qquad \text{مقلب} \tag{۵۱}$$

حاصل ضرب کا تبدیل محل الٹ ترتیب میں تبدیل محلوں کا حاصل ضرب:

$$(\widetilde{\mathbf{ST}}) = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{S}} \tag{۵۲}$$

ہو گا (سوال ۱.۱۱ دیکھیں)، اور یہی کچھ ہرمشی جوڑی دار کے لئے بھی درست ہو گا۔

$$(\mathbf{ST})^{\dagger} = \mathbf{T}^{\dagger}\,\mathbf{S}^{\dagger} \tag{۵۳}$$

اکائی قالب[51] کے مرکزی وتر پر ارکان کی قیمت ایک اور باقیوں کی قیمت صفر ہو گی۔

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{۵۴}$$

(اکائی قالب خطی تبادلہ کو ظاہر کرتا ہے جو ہر سمتیہ کا تبادلہ اسی سمتی میں کرتا ہے۔) دوسرے لفظوں میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{I}_{ij} = \delta_{ij} \tag{۵۵}$$

چوکور قالب کے **معکوس**[52]، جسے $\mathbf{T}^{-1}$ لکھا جاتا ہے، کی تعریف بدیہی ہے۔[53]

$$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\,\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} \tag{۵۶}$$

قالب کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب اس کا **مقطع**[54] غیر صفر ہو؛ در حقیقت

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{T}\,\text{مقطع}}\tilde{\mathbf{C}} \tag{۵۷}$$

---

[49] commutator

[50] صرف چوکور قوالب کے لئے مقلب معنی خیز ہے۔ غیر چوکور قوالب میں دونوں ضرب کی جسامت بھی ایک جیسی نہیں ہو گی۔

[51] unit matrix

[52] inverse

[53] دھیان رہے کہ بایاں معکوس، دائیں معکوس کے برابر ہے، چونکہ اگر $\mathbf{AT} = \mathbf{I}$ اور $\mathbf{TB} = \mathbf{I}$ ہوں، تب (دوسرے کو بائیں سے $\mathbf{A}$ سے ضرب کرکے پہلا استعمال کرنے سے) ہمیں $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ حاصل ہو گا۔

[54] determinant

ہو گا، جہاں ہم ضربیوں[55] کا قالب $\mathbf{C}$ ہے (قالب $\mathbf{T}$ سے i ویں صف اور j ویں قطار خارج کر کے حاصل ذیلی قالب کے مقطع کو $(-1)^{i+j}$ سے ضرب دینے سے رکن T_{ij} کا ہم ضربی حاصل ہو گا)۔ ایسا قالب جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نادر[56] کہلاتا ہے۔ حاصل ضرب کا معکوس (اگر موجود ہو) الٹ ترتیب میں انفرادی معکوس کا حاصل ضرب ہو گا۔

$$(\mathbf{ST})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{S}^{-1} \tag{۵۸}$$

ایسا قالب جس کا معکوس اس کے ہرمشی جوڑی دار کے برابر ہو **اکہرا**[57] کہلاتا ہے۔[58]

$$\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1} \qquad \text{اکہرا} \tag{۵۹}$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اساس معیاری عمودی ہے، اکہرا قالب کے قطار معیاری عمودی سلسلہ قائم کرتے ہیں، اور اس کے صف بھی ایسا کرتے ہیں (سوال ا.۱۲ دیکھیں)۔ ایسے خطی تبادلہ جنہیں اکہرا قوالب ظاہر کرتے ہوں، مساوات ۵۰ کی بدولت، اندرونی ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \mathbf{a}'^{\dagger}\,\mathbf{b}' = (\mathbf{Ua})^{\dagger}(\mathbf{Ub}) = \mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{U}^{\dagger}\,\mathbf{Ub} = \mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{b} = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{۶۰}$$

سوال ا.۸: درج ذیل قوالب لیتے ہوئے

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

درج ذیل کا حساب لگائیں: (الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$، (ب) $\mathbf{AB}$، (ج) $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$، (د) $\tilde{\mathbf{A}}$، (ہ) $\mathbf{A}^*$، (و) $\mathbf{A}^{\dagger}$، (ز) آثار ($\mathbf{B}$)، (ح) مقطع ($\mathbf{B}$)، اور (ط) $\mathbf{B}^{-1}$۔ دکھائیں کہ $\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ ہے۔ کیا $\mathbf{A}$ کا معکوس پایا جاتا ہے؟

سوال ا.۹: قطار قوالب

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix}$$

اور سوال ا.۸ میں مستعمل چوکور قوالب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔ (الف) $\mathbf{Aa}$، (ب) $\mathbf{a}^{\dagger}\,\mathbf{b}$، (ج) $\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{Bb}$، (د) $\mathbf{ab}^{\dagger}$

سوال ا.۱۰: درج ذیل میں صریحاً قوالب تیار کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی قالب T کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

[55] cofactors
[56] singular
[57] unitary
[58] حقیقی سمتیہ فضا (یعنی جس میں غیر سمتیات حقیقی ہوں) میں ہرمشی جوڑی دار اور تبدیل محل ایک ہوں گے، اور اکہرا قالب قائمہ: $\tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{O}^{-1}$ ہو گا۔ مثلاً، سادہ تین بُعدی فضا میں گھومنے کو قائمہ قوالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

۱. تشاکلی قالب $\mathbf{S}$ اور خلاف تشاکلی قالب $\mathbf{A}$ کا مجموعہ۔
۲. حقیقی قالب $\mathbf{R}$ اور خیالی قالب $\mathbf{M}$ کا مجموعہ۔
۳. ہرمشی قالب $\mathbf{H}$ اور منحرف ہرمشی قالب $\mathbf{K}$ کا مجموعہ۔

سوال ۱.۱۱: مساوات ۵۲، مساوات ۵۳ اور مساوات ۵۸ ثابت کریں۔ دکھائیں کہ دو اکھرا قوالب کا حاصل ضرب اکھرا ہو گا۔ کن شرائط کہ تحت دو ہرمشی قوالب کا حاصل ضرب بھی ہرمشی ہو گا؟ کیا دو اکھرا قوالب کا مجموعہ اکھرا ہو گا؟ کیا دو ہرمشی قوالب کا مجموعہ ہرمشی ہو گا؟

سوال ۱.۱۲: دکھائیں کہ اکھرا قالب کے صف اور قطار عمودی معیاری سلسلہ قائم کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۳: یہ جانتے ہوئے کہ مقطع $\mathbf{T} =$ مقطع $\tilde{\mathbf{T}}$ ہے دکھائیں کہ ہرمشی قالب کا مقطع حقیقی ہو گا، اکھرا قالب کے مقطع کا معیار 1 ہو گا (جس کی بنا اس کا نام اکھرا قالب ہے) اور معیاری عمودی قالب کا مقطع $1+$ یا $1-$ ہو گا۔

۱.۴ تبدیلی اساس

کسی بھی سمتیہ یا خطی تبادلہ کو ظاہر کرنے والے قالب کے ارکان اساس کا انتخاب پر منحصر ہو گا۔ اساس تبدیل کرنے سے یہ عدد کس طرح تبدیل ہوتے ہیں اس پر غور کرتے ہیں۔ پرانے اساسی سمتیات $|e_i\rangle$ کسی بھی سمتیہ کی طرح ان نئی سمتیات $|f_i\rangle$ کا خطی مجموعہ ہونگے

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= S_{11}|f_1\rangle + S_{21}|f_2\rangle + \cdots + S_{n1}|f_n\rangle \\
|e_2\rangle &= S_{12}|f_1\rangle + S_{22}|f_2\rangle + \cdots + S_{n2}|f_n\rangle \\
&\cdots \\
|e_n\rangle &= S_{1n}|f_1\rangle + S_{2n}|f_2\rangle + \cdots + S_{nn}|f_n\rangle
\end{aligned}$$

جہاں S_{ij} مخلوط اعداد کا سلسلہ ہو گا یا مختصراً

$$|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}|f_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{۶۱}$$

یہ خود ایک خطی تبادلہ ہے مساوات $A.30$ سے موازنہ کریں اور ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا تبادلہ کس طرح ہو گا

$$a_i^f = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j^e \tag{۶۲}$$

جہاں زیر نوشت اساس کو ظاہر۔ قالبی روپ میں درج ذیل ہو گا

$$a^f = S a^e \tag{۶۳}$$

خطی تبادلہ $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب اساس کی تبدیلی سے کس طرح تبدیل ہو گا؟ پرانے اساس میں

$$a'^e = T^e a^e$$

اور مساوات $A.63$ تھے دونوں اطراف کو S^{-1} سے ضرب دیتے ہوئے جس میں $a^e = S^{-1}a^f$ کا منتقی نتیجہ شامل ہے لہٰذا

$$a'^f = Sa'^e = S(T^e a^e) = ST^e S^{-1} a^f$$

ظاہری طور پر

$$T^f = ST^e S^{-1} \tag{۶۴}$$

ہو گا۔ عمومی طور پر دو قوالب T_1 اور T_2 اس صورت مشابہ ہونگے جب کسی غیر نادر قالب S کی صورت میں $T_2 = ST_1S^{-1}$ ہو۔ یوں ہم دریافت کر چکے کہ مختلف اساس لے لحاظ سے ایک ہی خطی تبادلہ کو ظاہر کرنے والے قالب مشابہ ہونگے۔ اتفاقی طور پر اگر پہلی اساس معیاری عمودی ہو تب دوسری اساس صرف اس صورت میں معیاری عمودی ہو گا جب قالب S اکہرا ہو سوال $A.16$ دیکھیں۔ چونکہ ہم صرف معیاری عمودی اساس میں کام کرتے ہیں لہٰذا ہماری دلچسپی بنیادی طور پر اکہرا مشابہت تبادلہ میں ہے۔

اگرچہ نئی اساسوں میں کوئی بھی خطی تبادلہ کے ارکان بہت مختلف نظر آتے ہیں قالب سے وابستہ دو اعداد یعنی مقطع اور آثار قالب تبدیل نہیں ہوتے چونکہ حاصل ضرب کا مقطع مقطع کا حاصل ضرب ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\det(T^f) = \det(ST^eS^{-1}) = \det(S)\det(T^e)\det(S^{-1}) = \det T^e \tag{۶۵}$$

اور آثار قالب جو وتری ارکان کا مجموعہ ہے

$$Tr(T) \equiv \sum_{i=1}^{m} T_{ii} \tag{۶۶}$$

درج ذیل خاصیت سوال $A.17$ دیکھیں

$$Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1) \tag{۶۷}$$

جہاں T_1 اور T_2 کوئی بھی دو قوالب ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$Tr(T^f) = Tr(ST^eS^{-1}) = Tr(T_eS^{-1}S) = Tr(T^e) \tag{۶۸}$$

سوال ا.۱۴: تین ابعاد میں سمتیات کے لئے معیاری اساس $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے۔

(الف) مبدہ کی طرف دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی z محور کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(ب) نقطہ $(1,1,1)$ سے گزرتے ہوئے محور کے گرد محور سے مبدہ کی طرف دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی $120°$ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(ج) مستوی xy میں عکس کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔

(د) تصدیق کریں کہ یہ تمام قوالب معیاری عمودی ہیں اور ان کے مقطع کا حساب کریں۔

سوال ۱.۱۵: عمومی اساس $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے محور x کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب T_x اور محور y کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والے قالب T_y تیار کریں۔ فرض کریں اب ہم اساس تبدیل کرکے $\hat{\imath}' = \hat{\jmath}$ ، $\hat{\jmath}' = -\hat{\imath}$ ، $\hat{k}' = \hat{k}$ لیتے ہیں اساس کی اس تبدیلی کو پیدا کرنے والے قالب S تیار کریں اور تصدیق کریں کہ ST_xS^{-1} اور ST_yS^{-1} آپ کے توقعات کے عین مطابق ہے۔

سوال ۱.۱۶: دکھائیں کہ مماثلت قالبی ضرب برقرار رکھتا ہے یعنی اگر $A^eB^e = C^e$ ہو تب $A^fB^f = C^f$ ہوگا۔ عمومی طور پر مماثلت تشاکلی حقیقت یا ہرمشی پن برقرار نہیں رکھتا لیکن دکھائیں اگر S اکہرا ہو اور H^e ہرمشی ہو تب H^f ہرمشی ہوگا۔ دکھائیں کہ S صرف اس صورت معیاری عمودی اساس کو دوسری معیاری عمودی اساس میں منتقل کرے گا اگر یہ اکہرا ہو۔

سوال ۱.۱۷: دکھائیں کہ $Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1)$ یوں $Tr(T_1T_2T_3) = Tr(T_2T_3T_1)$ ہوگا کیا عام طور پر $Tr(T_1T_2T_3) = Tr(T_2T_1T_3)$ ہوگا؟ اسکو ٹھیک یا غلط ثابت کریں۔ اشارہ: بہترین غلط ثبوت اسکی اُلٹ مثال پیش کرنا ہے جتنا سادہ ہو اتنا ہی بہتر ہے۔

۱.۵ امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار

تین بعدی فضا میں کسی مخصوص محور کے گرد زاویہ θ گھمانے کو ظاہر کرنے والے خطی تبادلہ پر غور کریں۔ زیادہ تر سمتیات پیچیدہ انداز سے تبدیل ہوں گے یہ اس محور کے گرد مخروط پر حرکت کریں گے لیکن وہ سمتیات جو اسی محور پر پائے جاتے ہوں کا رویہ سادہ ہو گا وہ بلکل تبدیل نہیں ہوں گے ($\hat{T} \mid \alpha\rangle = \mid \alpha\rangle$)۔ اگر θ کی قیمت $180°$ ہو تب استوائی مستوی میں پائے جانے والے سمتیات کی علامت تبدیل ہو گی ($\hat{T} \mid \alpha\rangle = - \mid \alpha\rangle$)۔ مخلوط سمتی فضا میں ہر خطی تبادلہ کے اس طرح کے مخصوص سمتیات پائے جاتے ہیں جو اپنے آپ کے غیر سمتی مضرب میں تبدیل ہوتے۔

$$\hat{T} \mid \alpha\rangle = \lambda \mid \alpha\rangle \tag{۶۹}$$

انہیں اس تبادلہ کے امتیازی سمتیات کہتے ہیں اور مخلوط عدد λ کو انکا امتیازی قدر کہتے ہیں۔ معدوم سمتیہ مہمل معنوں میں مساوات $A.69$ کو کسی بھی $\hat{T}$ اور λ کے لئے مطمعن کرتا ہے اسے امتیازی سمتیات میں نہیں گنا جاتا تکنیکی طور پر ایک امتیازی سمتیہ سے مراد وہ غیر صفر سمتیہ ہے جو مساوات $A.69$ کو مطمعن کرتا ہو۔ دیہان رہے کہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی غیر صفر مضرب بھی امتیازی سمتیہ ہو گا جس کی امتیازی قدر وہی ہو گی۔

کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے امتیازی سمتیہ مساوات قالبی روپ

$$Ta = \lambda a \tag{۷۰}$$

جہاں a غیر صفر ہے یا

$$(T - \lambda I)a = 0 \tag{۷۱}$$

اختیار کرتا ہے۔ یہاں 0 ایسا صفر قالب ہے جس کے تمام ارکان صفر ہیں۔ اب اگر قالب $(T - \lambda I)$ کا معکوس ہوتا ہم مساوات $A.71$ کو دونوں اطراف کو $(T - \lambda I)^{-1}$ سے ضرب دے کر $a = 0$ اخذ کرتے۔ لیکن ہم a کو غیر صفر فرض کر چکے ہیں لہٰذا $(T - \lambda I)$ لازماً نادر ہو گا جس سے مراد یہ ہے کہ اس کا مقطع صفر ہو گا

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & (T_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{۷۲}$$

مقطع کھولنے سے λ کی الجبرائی مساوات

$$C_n \lambda^n + C_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0 \tag{۷۳}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں عددی سر C_i ارکان T کے تابع ہیں سوال $A.20$ دیکھیں۔ اس کو قالب کی امتیازی مساوات کہتے ہیں اور اس کے حل امتیازی اقدار کا تعین کرتے ہیں۔ دیہان رہے کہ یہ n رتبی مساوات ہے لہٰذا الجبرا کے بنیادی مسئلہ کے تحت اس کے n مخلوط جذر ہوں گے البتہ ان میں سے چند مرکب جذر ہو سکتے ہیں لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $n \times n$ قالب کا کم سے کم ایک اور زیادہ سے زیادہ n منفرد امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ قالب کے تمام امتیازی اقدار کے ذخیرہ کو اس کا طیف کہتے ہیں اگر دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کا ایک ہی امتیازی قدر ہو ہم کہتے ہیں کہ طیف انحطاطی ہے۔

امتیازی سمتیات تیار کرنے کا عام طور پر سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ مساوات $A.70$ میں ہر ایک λ ڈال کر a کے ارکان کے لئے ہاتھ سے حل کریں۔ میں اس عمل کو ایک مثال کی صورت میں سمجھاتا ہوں۔

مثال ا.ا: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۷۴}$$

حل: اس کی امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -2 \\ -2i & (i-\lambda) & 2i \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1+i)\lambda^2 - i\lambda = 0 \tag{۷۵}$$

ہے۔ جس کے جذر $1, 0$ اور i ہے۔ پہلی امتیازی سمتیہ کے اقدار (a_1, a_2, a_3) لیتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہو گا۔ جس سے درج ذیل تین مساوات ملتے ہیں

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= 0 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے پہلی مساوات a_1 کی صورت میں a_3 کا تعین کرتی ہے $a_3 = a_1$ دوسری a_2 کا تعین کرتی ہے $a_2 = 0$ اور تیسری فالتو مساوات ہے۔ ہم $a_1 = 1$ چن سکتے ہیں چونکہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی مضرب امتیازی سمتیہ ہی ہو گا

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0 \text{ کے لئے} \tag{۷۶}$$

دوسری امتیازی سمتیہ کے لئے ارکان کے لئے وہی علامتیں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل مساوات حاصل ہوں گے

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= a_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= a_2 \\ a_1 - a_3 &= a_3 \end{aligned}$$

جس کے حل $a_3 = (1/2)a_1, a_2 = [(1-i)/2]a_1$ ہیں اس مرتبہ میں $a_1 = 2$ منتخب کرتا ہوں لہٰذا

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 \text{ کے لئے} \tag{۷۷}$$

ہو گا۔ آخر میں تیسرا امتیازی سمتیہ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ia_2 \\ ia_3 \end{pmatrix}$$

درج ذیل مساوات دیگا

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= ia_1 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= ia_2 \\ a_1 - a_3 &= ia_3 \end{aligned}$$

جس کے حل $0 = a_1 = a_3$ ہیں جہاں a_2 غیر متعین ہیں۔ ہم $a_2 = 1$ منتخب کرتے ہیں یوں درج ذیل ہو گا

$$a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = i \text{ کے لئے} \tag{۷۸}$$

□

اگر امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں جیسا گزشتہ مثال میں کرتے تھے ہم انہیں اساس کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \hat{T} \mid f_1\rangle &= \lambda_1 \mid f_1\rangle, \\ \hat{T} \mid f_2\rangle &= \lambda_2 \mid f_2\rangle, \\ &\cdots \\ \hat{T} \mid f_n\rangle &= \lambda_n \mid f_n\rangle \end{aligned}$$

اس اساس میں $\hat{T}$ کو ظاہر کرنے والا قالب انتہائی سادہ روپ اختیار کرتا ہے جس میں امتیازی اقدار مرکزی وتر پر پائے جاتے ہیں جبکہ باقی تمام ارکان صفر ہوں گے

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{۷۹}$$

اور معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \tag{۸۰}$$

ایسا قالب جس کو اساس کی تبدیلی سے وتری روپ مساوات $A.79$ کی صورت میں لایا جا سکے وتری کہلاتا ہے ظاہر ہے کہ ایک قالب صرف اس صورت میں وتری ہو گا جب اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں۔ مشابہت قالب جو وتری بناتا ہے کو پرانی اساس میں معمول شدہ امتیازی سمتیات بطور S^{-1} کے قطار لیتے ہوئے تیار کیا جا سکتا ہے

$$(S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i \tag{۸۱}$$

مثال ۱.۲: مثال $A.1$ میں

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & (1-i) & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

لہٰذا مساوات $A.57$ استعمال کرتے ہوئے

$$S = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\1 & 0 & -1\\(i-1) & 1 & (1-i)\end{pmatrix}$$

اور آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$Sa^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, Sa^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, Sa^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

اور

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & i\end{pmatrix}$$

ہو گا۔ □

قالب کو وتری روپ میں لانے کا صاف نظر آنے والا فائدہ ہے اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے۔ بد قسمتی سے ہر قالب کو وتری نہیں بنایا جا سکتا امتیازی سمتیات کو فضا کا احاطہ کرنا ہو گا۔ اگر امتیازی مساوات کے n منفرد جذر ہوں تب قالب لازماً وتری بنایا جا سکتا ہے لیکن مرقب جذر کی صورت میں بھی ممکن ہے کہ یہ وتری بنانے کے قابل ہو۔ وتری بنانے کے غیر قابل قالب کے لئے سوال $A.19$ دیکھیں۔ کیا بہتر ہو تا اگر تمام امتیازی سمتیات معلوم کرنے سے قبل ہم جان سکتے کہ آیا ایک قالب وتری بنانے کے قابل ہے یا نہیں ایک کافی لیکن لازمی نہیں شرط درج ذیل ہے ایک قالب جو اپنے ہرمشی جوڑی دار کے ساتھ مقلوب ہو عمودی قالب کہلاتا ہے

$$[N^{\dagger}, N] = 0, \text{سادہ} \tag{۸۲}$$

ہر عمودی قالب وتری بنانے کے قابل ہے اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں۔ بالخصوص ہر ہرمشی قالب اور اکہرا قالب وتری بنانے کے قابل ہے۔

فرض کریں ہمارے پاس دو وتری بنانے کے قابل قالب ہیں قونٹائی معملات میں عموماً ایک سوال کھڑا ہوتا ہے کیا انہیں بیک وقت وتری بنایا جا سکتا ہے یعنی ایک ہی مشابہت قالب S کے ذریع؟ دوسرے لفظوں میں کیا ایسی اساس موجود ہے جس میں دونوں وتری بنائے جا سکتے ہیں؟ اس کا جواب ہے کہ صرف اور صرف اس صورت یہ ممکن ہو گا جب دونوں قالب مقلوبی ہوں سوال $A.22$ دیکھیں۔ سوال ا.۱۸: مستوی xy میں گھومنے کو ظاہر کرنے والا 2×2 قالب

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{۸۳}$$

دیکھائیں کہ ماسوائے مخصوص زاویوں کے بتائیں وہ کونسے زاویہ ہیں؟ اس قالب کا کوئی حقیقی امتیازی قدر نہیں پایا جاتا۔ یہ اس ہندسی حقیقت کا اخذ ہے کہ مستوی میں کوئی بھی سمتیہ گھمانے کے ذریع اپنے آپ میں نہیں پہنچایا جا سکتا اس کا موازنہ تین ابعاد میں گھمانے سے کریں۔ البتہ اس قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ہوں گے۔ انہیں تلاش کریں۔ قالب T کو وتری بنانے والا قالب S تیار کریں۔ میثابہت تبادلہ STS^{-1} صریحاً کریں اور دکھائیں کہ یہ T کو وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ا.۱۹: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کیا یہ قالب وتری بنانے کے قابل ہے؟

سوال ا.۲۰: دکھائیں کہ امتیازی مساوات مساوات $A.73$ کا پہلا، دوسرا اور آخری عددی سر درج ذیل ہیں

$$C_n = (-1)^n, C_{n-1} = (-1)^{n-1} Tr(T), \text{اور} C_0 = \det(T) \tag{۸۴}$$

ایک 3×3 قالب جس کے ارکان T_{ij} ہوں کا C_1 کیا ہو گا؟

سوال ا.۲۱: صاف ظاہر ہے کہ وتری قالب کا آثار قالب اس کے امتیازی اقدار کا مجموعہ اور اس کا مقطع ان کا حاصل ضرب ہو گا صرف مساوات $A.79$ کو دیکھنے کی دیر ہے یوں مساوات $A.65$ اور $A.68$ کے تحت کسی بھی وتری بنانے کے قابل قالب کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا۔ درج ذیل حقیقت کسی بھی قالب کے لئے ثابت کریں

$$\det(T) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n, \quad Tr(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{۸۵}$$

امتیازی مساوات کے n حل یہاں λ ہیں مرتب جذر کی صورت میں حلوں سے کم خطی غیر تابع امتیازی سمتیات ہو سکتے ہیں لیکن ہم λ کو اتنی مرتبہ ہی گنتے ہیں جتنی مرتبہ یہ پایا جاتا ہو۔ اشارہ: امتیازی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھیں

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda) = 0$$

اور سوال $A.20$ کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال ا.۲۲:

(الف) دکھائیں اگر دو قالب کسی ایک اساس میں مقلوبی ہوں تب وہ ہر اساس میں مقلوبی ہوں گے یعنی درج ذیل ہو گا

$$[T_1^e, T_2^e] = 0 \Rightarrow [T_1^f, T_2^f] = 0 \tag{۸۶}$$

اشارہ: مساوات $A.64$ استعمال کریں۔

(ب) دکھائیں کہ اگر دو قالب بیک وقت وتری بنانے کے قابل ہوں تو وہ مقلوبی ہوں گے۔

سوال ا.۲۳: درج ذیل قالب لیں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

(الف) کیا یہ عمودی قالب ہے؟

(ب) کیا یہ وتری بنانے کے قابل ہے؟

ا.٦ ہرمشی تبادلہ

میں نے مساوات $A.48$ میں قالب کے تبدیل محل وجوڑی دار $\tilde{T}^*$ $=$ $T^\dagger$ کو اس کی ہرمشی جوڑی دار یا شریک قالب کی تعریف قرار دیا۔ یہاں میں خطی تبادلہ کے ہرمشی جوڑی دار کا زیادہ بنیادی تعریف پیش

کرتا ہوں سے وہ تبادلہ $\hat{T}^\dagger$ ہے جس کا اطلاق اندرونی ضرب کے پہلے رکن پر وہی نتیجہ دیتا ہے جو دوسرے سمتیہ پر خود $\hat{T}$ کا اطلاق دیگا

$$\langle \hat{T}^\dagger \alpha \mid \beta \rangle = \langle \alpha \mid \hat{T}\beta \rangle \tag{۸۷}$$

جہاں $\langle \alpha|$ اور $\langle \beta|$ کوئی بھی سمتیات ہو سکتے ہیں۔ حاشیہ اس کا مقابل اگر دو وتری بنانے کے قالب مقلوبی ہوں تب وہ بیک وقت وتری بنانے کے قابل ہونگے ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ حاشیہ آپ پوچھ سکتے ہیں ایسا تبادلہ لازماً موجود ہوگا سے ایک اچھا سوال ہے اس کا جواب ہے جی ہاں۔ میں آپ کو خبردار کرتا چلوں کہ اگرچہ ہر کوئی اسے استعمال کرتا ہے سے فرضودہ علامتیت ہے سمتیات α اور β ہیں جبکہ $\langle \alpha|$ اور $\langle \beta|$ سمتیات نہیں بلکہ نام ہیں۔ بالخصوص ان کے کوئی ریاضیاتی خواص نہیں پائے جاتے اور $\hat{T}\beta$ کا فقرہ بے معانی ہے خطی تبادلہ کسی سمتیہ پر ناکہ نام پر عمل کرتے ہیں۔ لیکن اس علامت کا مطلب صاف ظاہر ہے سمتیہ $\hat{T}\beta$ کا نام $\hat{T}|\beta\rangle$ ہے اور سمتیہ $\hat{T}^\dagger|\alpha\rangle$ اور سمتیہ $|\beta\rangle$ کا اندرونی ضرب $\langle \hat{T}^\dagger\alpha|\beta\rangle$ ہے۔ بالخصوص

$$\langle \alpha \mid c\beta \rangle = c\langle \alpha \mid \beta \rangle \tag{۸۸}$$

جہاں کسی بھی غیر سمتی c کے لئے چہر حب ذیل ہوگا

$$\langle c\alpha \mid \beta \rangle = c^*\langle \alpha \mid \beta \rangle \tag{۸۹}$$

اگر آپ ہمیشہ کی طرح معیاری عمودی اساس میں کام کر رہے ہوں خطی تبادلہ کے ہر مشی جوڑی دار کو مطابقتی قالب کا ہر مشی جوڑی دار ضاہر کریگا چونکہ مساوات $A.50$ اور $A.53$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\beta \rangle = a^\dagger T b = (T^\dagger a)^\dagger b = \langle \hat{T}^\dagger \alpha \mid \beta \rangle \tag{۹۰}$$

یوں سے علامتیت صوات ہے اور ہم چاہیں تو تبادلہ کی زبان اور چاہیں تو قوالب کی زبان میں بات کر سکتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں ہر مشی تبادلہ $(\hat{T}^\dagger = \hat{T})$ بنیادی کردار ادا کرتے ہیں۔ ہر مشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تین نہایت اہم خواص رکھتے ہیں۔

(الف) ہر مشی تبادلہ کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں:

ثبوت: فرض کریں $\hat{T}$ کی ایک امتیازی قدر λ ہے $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ جہاں $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$ ہے۔ تب درج ذیل ہوگا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\alpha \rangle = \langle \alpha \mid \lambda\alpha \rangle = \lambda\langle \alpha \mid \alpha \rangle$$

ساتھ ہی $\hat{T}$ ہر مشی ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$\langle \alpha \mid \hat{T}\alpha \rangle = \langle \hat{T}\alpha \mid \alpha \rangle = \langle \lambda\alpha \mid \alpha \rangle = \lambda^*\langle \alpha \mid \alpha \rangle$$

لیکن $\langle \alpha|\alpha\rangle \neq 0$ ہے مساوات $A.20$ لہٰذا $\lambda = \lambda^*$ اور یوں λ حقیقی ہوگا۔

(ب) ہر مشی تبادلہ کے منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی سمتیات قائمہ ہونگے۔

ثبوت: فرض کریں $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ اور $\hat{T}|\beta\rangle = \mu|\beta\rangle$ ہے جہاں $\lambda \neq \mu$ ہے۔ تب

$$\langle\alpha \mid \hat{T}\beta\rangle = \langle\alpha \mid \mu\beta\rangle = \mu\langle\alpha \mid \beta\rangle$$

اور اگر $\hat{T}$ ہرمشی ہو درج ذیل ہو گا

$$\langle\alpha \mid \hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha \mid \beta\rangle = \langle\lambda\alpha \mid \beta\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\beta\rangle$$

لیکن $\lambda = \lambda^*$ ہے جزو (الف) سے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ $\mu \neq \lambda$ ہے لہٰذا $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ ہو گا۔

(ج) ہرمشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں جیسا ہم دیکھ چکے ہیں یہ اس فکرے کے مترادف ہے کہ کسی بھی ہرمشی قالب کو وتری بنایا جا سکتا ہے مساوات $A.82$ دیکھیں۔ یہ حقیقت جو خاصی تکنیکی ہے وہ ریاضیاتی سہارا ہے جس پر زیادہ تر کوانٹائی میکانیات کھڑی ہے۔ چونکہ اس ثبوت کو لامتناہی ابعادی سمتی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی لہٰذا یہ ایک باریک لڑی ہے جس پر کوانٹائی میکانیات منحصر ہے۔

سوال ۱.۲۴: ہرمشی خطی تبادلہ کو تمام سمتیات $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے لئے لازماً $\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle$ مطمئن کرنا ہو گا۔ دکھائیں کہ اتنی حیرانی کی بات ہے کہ کافی ہے کہ تمام سمتیات $|\gamma\rangle$ کے لئے $\langle\hat{T}\gamma|\gamma\rangle = \langle\gamma|\hat{T}\gamma\rangle$ ہو۔ اشارہ: پہلے $|\gamma\rangle = |\alpha + |\beta\rangle$ اور اس کے بعد $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + i|\beta\rangle$ لیں۔

سوال ۱.۲۵: درج ذیل لیں

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

(الف) تصدیق کریں کہ T ہرمشی ہے۔

(ب) اس کی امتیازی اقدار تلاش کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ حقیقی ہیں)۔

(ج) امتیازی سمتیات تلاش کر کے انکی معمولزنی کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ معیاری عمودی ہیں)۔

(د) اکہرا وتری بنانے والا قالب S تیار کریں اور صریحاً تصدیق کریں کہ یہ T کو وتری بناتا ہے۔

(ھ) تصدیق کریں کہ T اور اسکے وتری روپ کے لئے مقطع T اور آثار T ایک جیسے ہیں۔

سوال ۱.۲۶: درج ذیل ہرمشی قالب لیں

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

(الف) اس قالب کا مقطع $\det(T)$ اور آثار $Tr(T)$ تلاش کریں۔

(ب) قالب T کی امتیازی اقدار تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ انکا مجموعہ اور حاصل ضرب مساوات $A.85$ کے معنوں میں جزو (الف) کے عین مطابق ہے۔ قالب T کو وتری روپ میں لکھیں۔

(ج) قالب T کے امتیازی سمتیات تلاش کریں۔ انحطاطی حلقہ میں دو خطی غیر طابع امتیازی سمتیات تیار کریں ہر مشی قالب کے لئے یہ قدم ہر صورت ممکن ہو گا لیکن کسی بھی اختیاری قالب کے لئے لازمی نہیں کہ ایسا ممکن ہو سوال $A.19$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ انہیں قائمہ بنائیں اور تصدیق کریں کہ تیسرے کے لحاظ سے دونوں قائمہ ہیں۔ تینوں امتیازی سمتیات کی معمولزنی کریں۔

(د) قالب T کو وتری بنانے والا اکہرا قالب S تیار کریں اور صریحاً دکھائیں کہ مشابہت تبادلہ S کو استعمال کرتے ہوئے T کو موضوع وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ا.۲۷: اکہرا تبادلہ وہ ہے جس کے لئے $\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$ ہو۔

(الف) دکھائیں کہ کسی بھی سمتیات $\langle\alpha|$ ، $|\beta\rangle$ کے لئے $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\hat{U}\alpha|\hat{U}\beta\rangle$ کے معنوں میں اکہرا تبادلہ اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

(ب) دکھائیں کہ اکہرا تبادلہ کا امتیازی اقدار کا معیار 1 ہے۔

(ج) دکھائیں کہ منفرد امتیازی اقدار سے متعلق اکہرا قالب کی امتیازی سمتیات قائمہ ہوں گے۔

سوال ا.۲۸: قوالب کے تفاعلات ٹیلر تسلسل توسیعات دیتے ہیں مثلاً

$$e^M \equiv I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \tag{۹۱}$$

(الف) درج ذیل کے لئے $\exp(M)$ تلاش کریں

$$(i)M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (ii)M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) اگر M وتری بنانے کے قابل ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\det\left(e^M\right) = e^{Tr(M)} \tag{۹۲}$$

تبصرہ: اگر M وتری بنانے کے قابل نہ ہو تب بھی یہ درست ہو گا تاہم ایسی عمومی صورت کے لئے اسکو ثابت کرنا مشکل ہے۔

(ج) دکھائیں اگر قوالب M اور N مقلوبی ہوں تب درج ذیل ہو گا

$$e^{M+N} = e^M e^N \tag{۹۳}$$

ثابت کریں کہ غیر مقلوبی قالب کے لئے مساوات $A.93$ درست نہیں سادہ ترین متضاد مثال دیکر ایسا کریں۔

(د) اگر H ہر مشی ہوں تب دکھائیں کہ e^{iH} اکہرا ہو گا۔