کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

۱ تفاعل موج ۱
۱.۱ مساوات شروڈنگر ۱
۱.۲ شماریاتی مفہوم ۲
۱.۳ احتمال ۵
۱.۳.۱ غیر مسلسل متغیرات ۵
۱.۳.۲ استمراری متغیرات ۹
۱.۴ معمول زنی ۱۲
۱.۵ معیار حرکت ۱۵
۱.۶ اصول عدم یقینیت ۱۸

۲ غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر ۲۵
۲.۱ ساکن حالات ۲۵
۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں ۳۱
۲.۳ ہارمونی مرتعش ۴۲
۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب ۴۴
۲.۳.۲ تحلیلی ترکیب ۵۳
۲.۴ آزاد ذرہ ۶۰
۲.۵ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ ۷۰
۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراو حالات ۷۰
۲.۵.۲ ڈیلٹا تفاعل کنواں ۷۲
۲.۶ متناہی چوکور کنواں ۸۱

۳ قواعد و ضوابط ۹۷
۳.۱ ہلبرٹ فضا ۹۷
۳.۲ قابل مشاہدہ ۱۰۱
۳.۲.۱ ہرمشی عاملین ۱۰۱

۳.۲.۲ تعین حال ۱۰۳
۳.۳ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل ۱۰۵
۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف ۱۰۶
۳.۳.۲ استمراری طیف ۱۰۸
۳.۴ متعمم شماریاتی مفہوم ۱۱۱
۳.۵ اصول عدم یقینیت ۱۱۵
۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت ۱۱۵
۳.۵.۲ کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ ۱۱۸
۳.۵.۳ توانائی ووقت اصول عدم یقینیت ۱۱۹
۳.۶ ڈیراک علامتیت ۱۲۳

۴ تین ابعادی کوانٹائی میکانیات ۱۳۷
۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر ۱۳۷
۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات ۱۳۹
۴.۱.۲ زاویائی مساوات ۱۴۱
۴.۱.۳ رداسی مساوات ۱۴۶
۴.۲ ہائیڈروجن جوہر ۱۵۰
۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج ۱۵۱
۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف ۱۶۱
۴.۳ زاویائی معیار حرکت ۱۶۴
۴.۳.۱ امتیازی اقدار ۱۶۴
۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات ۱۷۰
۴.۴ چکر ۱۷۳
۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران ۱۸۱
۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ ۱۸۷

۵ متماثل ذرات ۲۰۵
۵.۱ دوذروی نظام ۲۰۵
۵.۱.۱ بوسن اور فرمیان ۲۰۷
۵.۱.۲ قوت مبادلہ ۲۱۱
۵.۲ جوہر ۲۱۵
۵.۲.۱ ہیلیم ۲۱۶
۵.۲.۲ دوری جدول ۲۱۹
۵.۳ ٹھوس اجسام ۲۲۳
۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس ۲۲۳
۵.۳.۲ پٹی دار ساخت ۲۲۹
۵.۴ کوانٹائی شماریاتی میکانیات ۲۳۶
۵.۴.۱ ایک مثال ۲۳۶
۵.۴.۲ عمومی صورت ۲۳۹

۵.۴.۳ سب سے زیادہ محتمل تشکیل ۲۴۲
۵.۴.۴ α اور β کی طبعی اہمیت ۲۴۵
۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف ۲۴۹

۶ غیر تابع وقت نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۵۵
۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی ۲۵۵
۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ ۲۵۷
۶.۱.۳ دوم رتبی توانائیاں ۲۶۱
۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب ۲۶۲
۶.۲.۱ دوپڑتا انحطاط ۲۶۲
۶.۲.۲ بلند رتبی انحطاط ۲۶۷
۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت ۲۷۲
۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح ۲۷۳
۶.۳.۲ چکر و مدار ربط ۲۷۶
۶.۴ زیمان اثر ۲۸۳
۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر ۲۸۳
۶.۴.۲ طاقتور میدان زیمان اثر ۲۸۵
۶.۴.۳ درمیانہ میدان زیمان اثر ۲۸۷
۶.۵ نہایت مہین بٹوارا ۲۸۹

۷ تغیری اصول ۲۹۹
۷.۱ نظریہ ۲۹۹
۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال ۳۰۵
۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردار یہ ۳۱۰

۸ ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین ۳۲۱
۸.۱ کلاسیکی خطہ ۳۲۲
۸.۲ سرنگ زنی ۳۲۷
۸.۳ کلیات پیوند ۳۳۱

۹ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۴۵
۹.۱ دو سطحی نظام ۳۴۶
۹.۱.۱ مضطرب نظام ۳۴۶
۹.۱.۲ تابع وقت نظریہ اضطراب ۳۴۹
۹.۱.۳ سائن نما اضطراب ۳۵۱
۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب ۳۵۴
۹.۲.۱ برقناطیسی امواج ۳۵۴
۹.۲.۲ انجذاب، تحریک شدہ اخراج اور خود باخود اخراج ۳۵۶
۹.۲.۳ غیر اتفاقی اضطراب ۳۵۸

۹.۳ خود باخود اخراج ۳۶۰
۹.۳.۱ آئنسٹائن عددی سر A اور B ۳۶۰
۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات ۳۶۲
۹.۳.۳ قواعد انتخاب ۳۶۵

۱۰ حرناگزر تخمین ۳۷۵
۱۰.۱ مسئلہ حرناگزر ۳۷۵
۱۰.۱.۱ حرناگزر عمل ۳۷۵
۱۰.۱.۲ مسئلہ حرناگزر کا ثبوت ۳۷۸
۱۰.۲ ہیّت بیری ۳۸۳
۱۰.۲.۱ گرگٹی عمل ۳۸۳
۱۰.۲.۲ ہندسی ہیّت ۳۸۵
۱۰.۲.۳ اہارونووبوہم اثر ۳۹۱

۱۱ بکھراو ۴۰۱
۱۱.۱ تعارف ۴۰۱
۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو ۴۰۱
۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراو ۴۰۵
۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ ۴۰۶
۱۱.۲.۱ اصول وضوابط ۴۰۶
۱۱.۲.۲ لایا عمل ۴۰۹
۱۱.۳ ینتقلات حیط ۴۱۲
۱۱.۴ بارن تخمین ۴۱۵
۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ ۴۱۵
۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول ۴۱۹
۱۱.۴.۳ تسلسل بارن ۴۲۳

۱۲ پس نوشت ۴۲۷
۱۲.۱ آئنسٹائن پوڈلسکیوروزن تضاد ۴۲۸
۱۲.۲ مسئلہ بل ۴۲۹
۱۲.۳ مسئلہ کلمیہ ۴۳۴
۱۲.۴ شروڈنگر کی بلی ۴۳۵
۱۲.۵ کوانٹائی زینو تضاد ۴۳۶

جوابات ۴۳۹

ا خطی الجبرا ۴۴۱
ا.۱ سمتیات ۴۴۱
ا.۲ اندرونی ضرب ۴۴۱
ا.۳ قالب ۴۴۲

۱.۴ تبدیلی اساس ۴۴۲
۱.۵ امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار ۴۴۲
۱.۶ ہرمشی تبادلے ۴۴۲

فرہنگ ۴۴۳

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۱۱

بکھراو

۱۱.۱ تعارف

۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراو

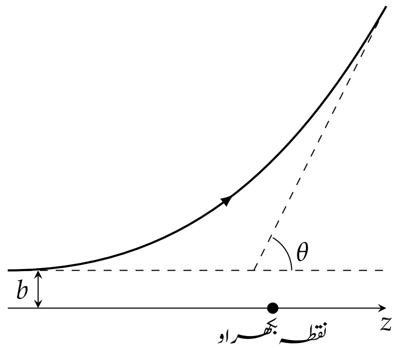
فرض کریں کسی مرکز بکھراو پر ایک ذرہ کا آمد ہوتا ہے مثلاً ایک پروٹان کو ایک بھاری مرکزہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ توانائی E اور ٹکراو مقدار معلوم b کے ساتھ آکر کسی زاویہ بکھراو θ پر اُبھرتا ہے؛ شکل ۱.۱۱ دیکھیں۔ میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف اسمتی تشاکلی ہے یوں خط حرکت ایک مستوی میں پایا جائے گا اور کہ نشانہ بھاری ہے لہٰذا تصادم کی بنا پر اس کی اچھال کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ کلاسیکی نظریہ بکھراو کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراو مقدار معلوم کو جانتے ہوئے زاویہ بکھراو کا حساب کریں۔ یقیناً عام طور پر ٹکراو مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو زاویہ بکھراو اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱.۱۱: **سخت کرہ کا بکھراو۔** فرض کریں ہدف رداس R کا ایک ٹھوس بھاری گیند ہے جبکہ آمدی ذرہ ہوائی بندوق کا ایک چھرا ہے جو لچکیلی ٹپکی کھا کر مڑتا ہے (شکل ۲.۱۱)۔ زاویہ α کی صورت میں ٹکراو مقدار معلوم $b = R\sin\alpha$ اور زاویہ بکھراو $\theta = \pi - 2\alpha$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

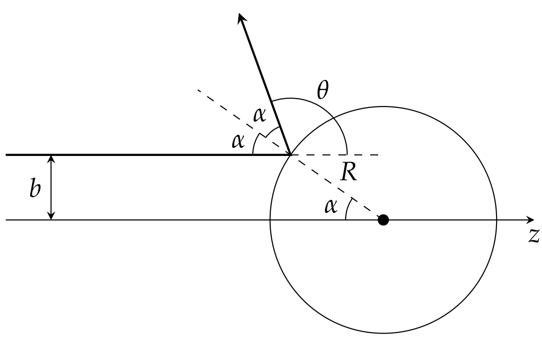
$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۱}$$

ظاہری طور پر درج ذیل ہوگا

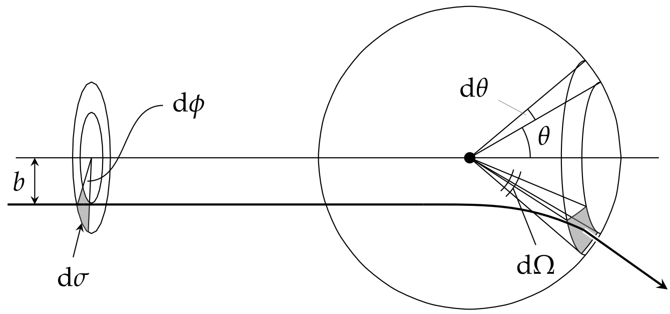
$$\theta = \begin{cases} 2\cos^{-1}(b/R), & b \le R \text{ اگر} \\ 0, & b \ge R \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$



شکل ۱.۱۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراو، جس میں ٹکراو مقدار معلوم b اور زاویہ بکھراو θ کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۲.۱۱: سخت کرہ سے لچکدار بکھراو۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرتے ہیں۔

□

عمومی طور پر لامتناہی چھوٹے رقبہ عمودی تراش $\mathrm{d}\sigma$ میں آمدی ذرات مطابقتی لامتناہی چھوٹے ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ بڑی $\mathrm{d}\sigma$ کی صورت میں $\mathrm{d}\Omega$ بھی بڑا ہو گا تناسبی جزو ضربی $D(\theta) \equiv \mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}\Omega$ کو تفرقی بکھراو عمودی تراش کہتے ہیں

$$\mathrm{d}\sigma = D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۳}$$

ٹکراو مقدار معلوم اور اسمتی زاویہ ϕ کی صورت میں $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{۱۱.۴}$$

چونکہ عمومی طور پر θ مقدار معلوم b کا گھٹتا ہوا تفاعل ہو گا لہٰذا یہ تفرق در حقیقت منفی ہو گا اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔

مثال ۱۱.۲: **سخت کرہ کے بکھراو کی مثال جاری رکھتے ہیں۔** سخت کرہ بکھراو مثال 11.1 کی صورت میں

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{۱۱.۵}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{۱۱.۶}$$

اس مثال میں تفرقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہے جو ایک غیر معمولی بات ہے۔ □

کل عمودی تراش تمام ٹھوس زاویوں پر $D(\theta)$ کا تکمل ہو گا

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۱.۷}$$

اندازاً بات کرتے ہوئے یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہو گا جسے ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر سخت کرہ بکھراو کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\sigma = (R^2/4)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2 \tag{۱۱.۸}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ اس رقبہ میں آمدی چھرے ہدف کو نشانہ بنائیں گے جبکہ اس سے باہر چھرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات نرم اہداف مثلاً مرکزہ کا کولمب میدان کے لئے بھی کار آمد ہے جن میں صرف نشانے پر لگنا یا نہ لگنا نہیں ہو گا۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت تابندگی کی ایک شعاع ہو

$$\mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد} \tag{۱۱.۹}$$

فی اکائی وقت رقبہ $\mathrm{d}\sigma$ میں داخل ہونے والے ذرات اور یوں ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھراو والے ذرات کی تعداد $\mathrm{d}N = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$ ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{۱۱.۱۰}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتا ہے جنہیں تجربہ گاہ میں با آسانی ناپا جا سکتا ہو لہٰذا اس کو عموماً تفریقی عمودی تراش کی تعریف لیا جاتا ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ $\mathrm{d}\Omega$ میں بکھرے ذرات کو محسوس کار دیکھتا ہو تب ہم اکائی وقت میں معلوم شدہ ذرات کی تعداد کو $\mathrm{d}\Omega$ سے تقسیم کر کے آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول شدہ کرتے ہیں۔

سوال ۱.۱۱: **ردرفورڈ بکھراو۔** بار q_1 اور حرکی توانائی E کا ایک آمدی ذرہ ایک بھاری ساکن ذرہ جس کا بار q_2 ہو سے بکھرتا ہے۔

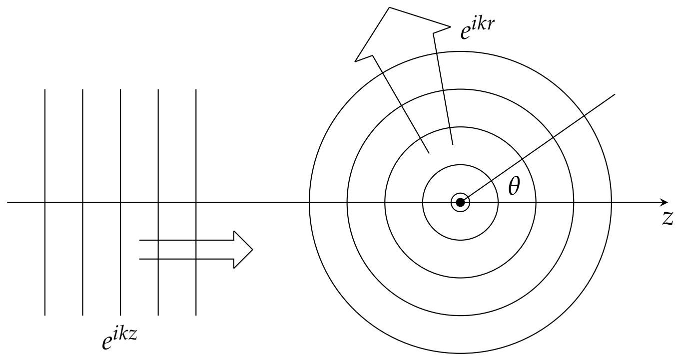
(الف) ٹکراو مقدار معلوم اور زاویہ بکھراو کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

جواب: $b = (q_1q_2/8\pi\epsilon_0 E)\cot(\theta/2)$

(ب) تفریقی بکھراو عمودی تراش تعین کریں۔

جواب:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۱۱}$$



شکل ۴.۱۱: امواج کا بکھراو؛ آمدی مستوی موج رخصتی کروی موج پیدا کرتی ہے۔

(ج) دکھائیں کہ ردر فورڈ بکھراو کا کل عمودی تراش لامتناہی ہو گا۔ ہم کہتے ہیں $1/r$ مخفیہ لامتناہی ساتھ رکھتا ہے آپ کولمب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

۱۱.۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراو

بکھراو کے کوانٹائی نظریہ میں فرض کرتے ہیں کہ ایک آمدی مستوی موج $\psi(z) = Ae^{ikz}$ جو محور z رخ حرکت کرتی ہو کا سامنا ایک بکھراو مخفیہ سے ہوتا ہے جس کے نتیجہ میں ایک کروی رخصتی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۴.۱۱)۔ یعنی ہم مساوات شروڈنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

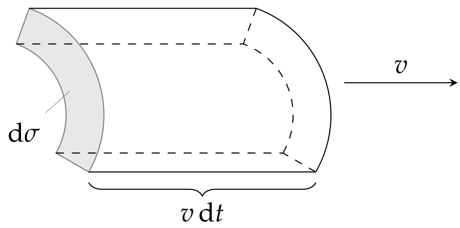
$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \qquad \text{بڑے } r \text{ کے لئے} \tag{۱۱.۱۲}$$

کروی موج میں جزو ضربی $1/r$ پایا جاتا ہے چونکہ احتمال کی بقا کے خاطر $|\psi|^2$ کا یہ حصہ $1/r^2$ کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ عدد موج k کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح درج ذیل رشتہ ہو گا

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۱۱.۱۳}$$

یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف استی تشاکلی ہے زیادہ عمومی صورت میں رخصتی کروی موج کا حیطہ f متغیرات ϕ اور θ کا تابع ہو گا۔

ہمیں حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تعین کرنا ہو گا۔ یہ ہمیں کسی مخصوص رخ θ میں بکھراو کا احتمال دیتا ہے اور یوں اس کا تعلق تفریقی عمودی تراش سے ہو گا۔ یقیناً سمتی رفتار v پر چلتے ہوئے ایک آمدی ذرہ کا وقت dt میں لامتناہی چھوٹی



شکل ۱۱.۵: وقت dt کے دوران رقبہ $d\sigma$ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم dV ہے۔

رقبہ $d\sigma$ میں سے گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$dP = \left|\psi_{\text{آمدی}}\right|^2 dV = |A|^2 \,(v\,dt)\, d\sigma$$

لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ $d\Omega$ میں اس ذرہ کے بکھراو کا احتمال

$$dP = \left|\psi_{\text{بکھراو}}\right|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2}(v\,dt) r^2\, d\Omega$$

بھی یہی ہوگا لہٰذا $d\sigma = \left|f\right|^2 d\Omega$ اور درج ذیل ہوں گے

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{۱۱.۱۴}$$

ظاہر ہے کہ تفرقی عمودی تراش جس میں تجربہ کرنے والا دلچسپی رکھتا ہے حیطہ بکھراو جو مساوات شروڈنگر کے حل سے حاصل ہوگا کی مطلق مربع کے برابر ہوگا آنے والے حصوں میں ہم حیطہ بکھراو کی حساب کے دو تراکیب جزوی موج تجزیہ اور بارن تخمین پر غور کریں گے۔

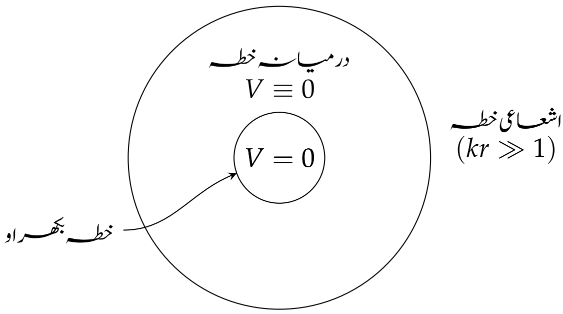
سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراو کے لئے مساوات 11.12 کے مماثل تیار کریں۔

۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب 4 میں دیکھا کہ کروی تشاکلی مخفیہ $V(r)$ کے لئے مساوات شروڈنگر قابلِ علیحدگی حلوں

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{۱۱.۱۵}$$



شکل ۱۱.۶: مقامی مخفیہ سے بکھراو؛ خطہ بکھراو، درمیانہ خطہ، اور اشعاعی خطہ۔

کا حامل ہوگا جہاں Y_ℓ^m کروی ہارمونی مساوات 4.32 ہے اور $u(r) = rR(r)$ رداسی مساوات مساوات 4.37

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u = Eu \tag{۱۱.۱۶}$$

کو مطمئن کرتا ہے بہت بڑی r کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے اور مرکز گریز حصہ قابل نظر انداز ہوگا۔ لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} \approx -k^2u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

پہلا جزو رخصتی کروی موج کو اور دوسرا جزو آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے پھر ہے کہ موج بکھراو کے لئے ہم $D = 0$ چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہوگا

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

جہاں ہم گزشتہ حصہ میں طبیعی وجوہات سے آغاز کر چکے ہیں مساوات 11.12۔

یہ بہت بڑی r کے لئے تھا یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ $kr >> 1$ کے لئے تھا جسے بصریات میں خطہ اشعاعی کہیں گے۔ یک بُعدی نظریہ بکھراو کی طرح ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ مقامی ہے جس سے ہمارا مراد یہ ہوگا کہ کسی متناہی بکھراو خطہ کے باہر یہ تقریباً صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانی خطہ میں جہاں V کو رد کیا جا سکتا ہے لیکن مرکز گریز جزو کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا رداسی مساوات درج ذیل روپ اختیار

کرتی ہے۔

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u = -k^2u \tag{۱۱.۱۷}$$

جس کا عمومی حل مساوات 4.45 کروی بیسل تفاعلات کا خطی جوڑ ہو گا

$$u(r) = Arj_\ell(kr) + Brn_\ell(kr) \tag{۱۱.۱۸}$$

لیکن نہ ہی j_ℓ جو سائن تفاعل کی طرح ہے اور نہ ہی n_ℓ جو متمم کوسائن کی طرح ہے کسی رخصتی یا آمدی موج کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں e^{ikr} اور e^{-ikr} طرز کے خطی جوڑ درکار ہوں گے جنہیں کروی ہینکل تفاعلات کہتے ہیں

$$h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x) \tag{۱۱.۱۹}$$

جدول 11.1 میں چند ابتدائی کروی ہینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑی r کی صورت میں $h_\ell^{(1)}(kr)$ جسے

جدول ۱.۱۱: کروی ہینکل تفاعلات $h_\ell^{(1)}(x)$ اور $h_\ell^{(2)}(x)$

$h_0^{(1)} = -i\frac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i\frac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left(-\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left(\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{-ix}$

$$\left.\begin{array}{l} h_\ell^{(1)} \to \frac{1}{x}(-i)^{\ell+1}e^{ix} \\ h_2^{(2)} \to \frac{1}{x}(i)^{\ell+1}e^{-ix} \end{array}\right\} x >> 1 \text{ کے لئے}$$

ہینکل تفاعل کا پہلا قسم کہتے ہیں e^{ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے جبکہ $h_\ell^{(2)}(kr)$ ہینکل تفاعل کی دوسری قسم e^{-ikr}/r کے لحاظ سے تبدیل ہو گا۔ یوں رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروی ہینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہو گی:

$$R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr) \tag{۱۱.۲۰}$$

اس طرح خطہ بکھراو کے باہر جہاں $V(r) = 0$ ہو گا بالکل ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left\{e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m}h_\ell^{(1)}(kr)Y_\ell^m(\theta,\phi)\right\} \tag{۱۱.۲۱}$$

اس کا پہلا جزو آمدی مستوی موج ہے جبکہ مجموعہ جس کے عددی سر $C_{l,m}$ ہے موج بکھراو کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروی تشاکلی ہے لہٰذا تفاعل موج ϕ کا تابع نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں صرف وہ اجزاء باقی رہیں گے جن میں $m = 0$ ہو یاد رہے $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$ اب مساوات 4.27 اور 4.32 سے درج ذیل ہو گا

$$Y_\ell^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۲}$$

جہاں ℓ ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو P_ℓ کو ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر a_ℓ $i^{\ell+1}k\sqrt{4\pi(2\ell+1)}a_\ell \equiv C_{\ell,0}$ لکھ کر عددی سروں کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$\psi(r,\theta) = A\left\{e^{ikz} + k\sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1}(2\ell+1)a_\ell h_\ell^{(1)}(kr)P_\ell(\cos\theta)\right\} \tag{۱۱.۲۳}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص علامتیت کیوں بہتر ہے a_ℓ کو ℓ واں حیطہ جزوی موج کہتے ہیں۔

اب بہت بڑی r کی صورت میں ہینکل تفاعل $(-i)^{\ell+1}e^{ikr}/kr$ جدول 11.1 کے لحاظ سے تبدیل ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\psi(r,\theta) \approx A\left\{e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{(ikr)}}{r}\right\} \tag{۱۱.۲۴}$$

جہاں $f(\theta)$ درج ذیل ہے

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2l+1)a_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۵}$$

یہ مساوات 11.12 میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی تصدیق کرتا ہے اور ہمیں دکھاتا ہے کہ جزوی موج حیطوں a_ℓ کی صورت میں حیطہ بکھراو $f(\theta)$ کس طرح حاصل ہو گا تفرقی عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_\ell\sum_{\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)a_\ell^* a_{l'}P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۶}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا

$$\sigma = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)|a_\ell|^2 \tag{۱۱.۲۷}$$

زاویائی تکمل کو حل کرنے کے لئے میں نے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی عمودیت مساوات 4.34 استعمال کی۔

۱۱.۲.۲ لایا عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے جزوی موج حیطوں a_ℓ کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ جہاں $V(r)$ غیر صفر ہے میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل مساوات 11.23 کے ساتھ مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ملانے سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً صرف اتنا ہے کہ میں نے بکھراو موج کے لئے کروی محدد جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدد استعمال کیے ہیں۔ ہمیں تفاعل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہو گا۔

یقیناً $V = 0$ کے لئے مساوات شروڈنگر کو e^{ikz} مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ $V = 0$ کے لئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\sum_{\ell,m} \left[A_{\ell,m} j_\ell(kr) + B_{\ell,m} n_\ell(kr)\right] Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

یوں بالخصوص e^{ikz} کو اس طرح بیان کرنا ممکن ہونا چاہیے اب مبدا پر e^{ikz} متناہی ہے لہٰذا نیومن تفاعلات کی اجازت نہیں ہوگی $r = 0$ پر $n_\ell(kr)$ بے قابو بڑھتے ہیں اور چونکہ $z = r\cos\theta$ میں کوئی ϕ نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا صرف $m = 0$ اجزاء ہوں گے۔ مستوی موج کی کروی امواج کی صورت میں صریحاً پھیلاو کلیہ ریلے دیتی ہے۔

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2l+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۸}$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تفاعل موج کو صرف r اور θ کی صورت میں پیش کیا جا سکتا ہے

$$\psi(r,\theta) = A\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\left[j_\ell(kr) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(kr)\right] P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۲۹}$$

مثال ۱۱.۳: کوانٹائی سخت کرہ بکھراو۔ درج ذیل فرض کریں

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \le a \text{ کے لئے} \\ 0, & r > a \text{ کے لئے} \end{cases} \tag{۱۱.۳۰}$$

سرحدی شرط تب درج ذیل ہوگا

$$\psi(a,\theta) = 0 \tag{۱۱.۳۱}$$

یوں تمام θ کے لئے

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\left[j_\ell(ka) + ika_\ell h_\ell^{(1)(ka)}\right] P_\ell(\cos\theta) = 0 \tag{۱۱.۳۲}$$

ہوگا۔ جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے سوال 11.3

$$a_\ell = i\frac{j_\ell(ka)}{kh_\ell^(1)(ka)} \tag{۱۱.۳۳}$$

بالخصوص کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left|\frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)}\right|^2 \tag{۱۱.۳۴}$$

یہ بالکل درست جواب ہے۔ لیکن اس کو دیکھ کر کچھ زیادہ نہیں کہا جا سکتا ہے آئیں کم توانائی بکھراو $ka \ll 1$ کی تحدیدی صورت پر غور کریں $k = 2\pi/\lambda$ کی بنا پر یہ کہتا ہے کہ دوری عرصہ کرہ کے رداس سے بہت بڑا ہے۔ جدول 4.4 سے مدد لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹی z کے لئے $n_\ell(z)$ کی مقدار $j_\ell(z)$ سے بہت زیادہ ہو گی لہٰذا

$$\frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} = \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z)+in_\ell(z)} \approx -i\frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)}$$

$$\approx -i\frac{2^\ell l! z^\ell/(2\ell+1)!}{-(2\ell)! z^{-\ell-1}/2^\ell \ell!} = \frac{i}{2\ell+1}\left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!}\right]^2 z^{2\ell+1} \tag{۱۱.۳۵}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}\left[\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!}\right]^4 (ka)^{4\ell+2}$$

چونکہ ہم $ka \ll 1$ فرض کر رہے ہیں لہٰذا بلند طاقتیں قابلِ نظر انداز ہوں گی۔ کم توانائی تخمین میں $\ell = 0$ جزو بکھراو میں غالب ہو گا۔ یوں کلاسیکی صورت کے لئے تفریقی عمودی تراش θ کا تابع نہیں ہو گا۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراو کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \tag{۱۱.۳۶}$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراو عمودی تراش کی قیمت ہندسی عمودی تراش کے چار گنا ہے۔ درحقیقت σ کی قیمت کرہ کی کل سطحی رقبہ کے برابر ہے۔ لمبی طول موج بکھراو کی ایک خاصیت بڑی معاصر جامت ہے جو بصریات میں بھی ہو گا۔ ایک لحاظ سے یہ امواج کرہ کو چھوتے ہوئے اس کے اُوپر سے گزرتے ہیں نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف سیدھا دیکھتے ہوئے عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

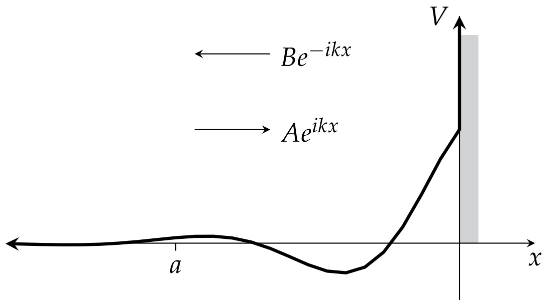
سوال ۱۱.۳: مساوات 11.32 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 11.33 ثابت کریں۔ اشارہ: لیژانڈر کثیر رکنی کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ ℓ کی مختلف قیمتوں والے عددی سر لازماً صفر ہوں گے۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا تفاعل خول:

$$V(r) = \alpha\delta(r-a)$$

سے کم توانائی بکھراو کی صورت پر غور کریں جہاں α اور a مستقلات ہیں۔ حیطہ بکھراو $f(\theta)$ تفریقی عمودی تراش $D(\theta)$ اور کل عمودی تراش σ کا حساب کریں۔ ان میں $ka \ll 1$ فرض کریں لہٰذا صرف $\ell = 0$ جزو خاطر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ چیزوں کو آسان بنانے کی خاطر آغاز سے ہی $\ell \neq 0$ والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔ یہاں a_0 تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُعدی مقدار $\beta \equiv 2ma\alpha/\hbar^2$ کی صورت میں پیش کریں۔

جواب: $\sigma = 4\pi a^2\beta^2/(1+\beta)^2$



شکل ۱۱.۷: مقامی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامتناہی دیوار پائی جاتی ہے، سے یک بُعدی بکھراو۔

۱۱.۳ یتنقلات حیط

پہلے نصف لکیر $x < 0$ پر مقامی مخفیہ $V(x)$ سے یک بُعدی بکھراو کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔ شکل ۱۱.۷ میں $x = 0$ پر اینٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = Ae^{ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۷}$$

مکمل طور پر منعکس ہو گا

$$\psi_r(x) = Be^{-ikx} \qquad (x < -a) \tag{۱۱.۳۸}$$

باہم عمل خطہ $(-a < x < 0)$ میں جو کچھ بھی ہو احتمال کی بقا کی بنا پر منعقد موج کا حیطہ لازماً آمدی موج کے حیطہ کے برابر ہو گا۔ تاہم ضروری نہیں کہ اس کا حیطہ وہی ہو اگر ماسوائے $x = 0$ پر دیوار کے کوئی مخفیہ نہیں پایا جاتا ہو تب چونکہ مبدا پر آمدی جمع منعکس کل تفاعل موج صفر ہو گا

$$\psi_0(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \qquad (V(x) = 0) \tag{۱۱.۳۹}$$

لہٰذا $B = -A$ ہو گا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں $x < -a$ کے لئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}\right) \qquad (V(x) \neq 0) \tag{۱۱.۴۰}$$

نظریہ بکھراو کی پوری کہانی کسی مخصوص مخفیہ کے لئے k لہٰذا توانائی $E = \hbar^2k^2/2m$ کی صورت میں یتنقل حیطہ کے حساب کا دوسرا نام ہے۔ ہم خطہ بکھراو $(-a < x < 0)$ میں مساوات شروڈنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط مسلط کر کے ایسا کرتے ہیں سوال 11.5 دیکھیں۔ مخلوط حیطہ B کی بجائے یتنقل حیطہ

کے ساتھ کرنے کا فائدہ یہ ہے کہ یہ طبیعیات پر روشنی ڈالتا ہے۔ احتمال کی بقا کی بدولت مخفیہ منعکس موج کی صرف حیط تبدیل کر سکتا ہے اور ایک مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے ریاضی آسان ہوتی ہے۔

آئیں اب تین بُعدی صورت پر دوبارہ ڈالیں۔ آمدی مستوی موج (Ae^{ikz}) کا z رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا کلیہ ریلے میں $m \neq 0$ والا کوئی جزو نہیں پایا جاتا۔ تاہم اس میں کل زاویائی معیار حرکت کی تمام قیمتیں شامل ہیں $(\ell = 0, 1, 2, \dots)$۔ چونکہ کروی تشاکلی مخفیہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کرتا ہے لہٰذا ہر ایک جزوی موج جسے کسی ایک خصوصی ℓ سے نام دیا جاتا ہے انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیط میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی تاہم اس کا حیطہ تبدیل ہو سکتا ہے۔ مخفیہ بالکل نہ ہونے کی صورت میں $\psi_0 = Ae^{ikz}$ ہو گا لہٰذا ℓ ویں جزوی موج درج ذیل ہو گی مساوات 11.28

$$\psi_0^{(\ell)} = Ai^\ell(2\ell+1)j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r)=0) \tag{۱۱.۴۱}$$

لیکن مساوات 11.19 اور جدول 11.1 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$j_\ell(x) = \frac{1}{2}\left[h^{(1)}(x) + h_\ell^{(2)}(x)\right] \approx \frac{1}{2x}\left[(-i)^{\ell+1}e^{ix} + i^{\ell+1}e^{-ix}\right] \quad (x \gg 1) \tag{۱۱.۴۲}$$

لہٰذا بڑی r کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\psi_0^{(\ell)} \approx A\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right]P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r)=0) \tag{۱۱.۴۳}$$

چکور قوسین میں دوسرا جزو آمدی کروی موج کو ظاہر کرتا ہے مخفیہ بکھراو متعارف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہو گا۔ پہلا جزو رخصتی موج ہے جو ینتقل حیطہ δ_ℓ لیتا ہے

$$\psi^{(1)} \approx A\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right]P_\ell(\cos\theta) \qquad (V(r)\neq 0) \tag{۱۱.۴۴}$$

آپ e^{ikz} میں $h_\ell^{(2)}$ جزو کی بنا پر اس کو کروی مرتکز موج تصور کر سکتے ہیں جس میں $2\delta_\ell$ ینتقل حیطہ پایا جاتا ہے اور جو e^{ikz} میں $h_\ell^{(1)}$ حصہ کے ساتھ بکھرے موج کی بدولت رخصتی کروی موج کے طور پر اُبھرتا ہے۔

حصہ 1.2.11 میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں a_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا یہاں اس کو ینتقل حیطہ δ_ℓ کی صورت میں پیش کیا گیا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق پایا جاتا ہو گا۔ یقیناً مساوات 11.23 کی بڑی r کی صورت میں متقاربی روپ

$$\psi^{(1)} \approx A\left\{\frac{(2\ell+1)}{2ikr}\left[e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right] + \frac{(2\ell+1)}{r}a_\ell e^{ikr}\right\}P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۵}$$

کا δ_ℓ کی صورت میں عمومی کی صورت مساوات 1.44 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$a_\ell = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_\ell} - 1\right) = \frac{1}{k}e^{i\delta_\ell}\sin(\delta_\ell) \tag{۱۱.۴۶}$$

اس طرح بالخصوص مساوات 11.25

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin(\delta_\ell)P_\ell(\cos\theta) \tag{۱۱.۴۷}$$

اور درج ذیل ہو گا مساوات 11.27

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2(\delta_\ell) \tag{۱۱.۴۸}$$

اب بھی جزوی موج حیطوں کی بجائے منتقلات حیطہ کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ ان سے طبعی معلومات باآسانی حاصل ہوتی ہے اور ریاضی کی نقطہ نظر سے ان کے ساتھ کام کرنا آسان ہوتا ہے منتقلی حیطہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کو استعمال کرتے ہوئے مخلوط مقدار a_ℓ جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی عدد δ_ℓ استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت m اور توانائی E ہو درج ذیل مخفیہ پر بائیں سے آمدی ہے

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a). \\ -V_0, & (-a \leq z \leq 0). \\ \infty, & (x > 0). \end{cases}$$

(الف) آمدی موج Ae^{ikx} جہاں $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ کی صورت میں منعکس موج تلاش کریں۔

جواب:

$$Ae^{-2ika}\left[\frac{k - ik'\cot(k'a)}{k + ik'\cot(k'a)}\right]e^{-ikx}, \qquad \text{جہاں} k' = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$$

(ب) تصدیق کریں کہ منعکس موج کا حیطہ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

(ج) بہت گہرا کنواں $E \ll V_0$ کے لئے منتقلات حیطہ δ مساوات 11.40 تلاش کریں۔

جواب: $\delta = -ka$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراو کے لئے جزوی موج حیطہ انتقال δ_ℓ کیا ہوں گے مثال 11.3؟

سوال ۱۱.۷: ایک ڈیلٹا تفاعل خول سوال 11.4 سے S موج $\ell = 0$ جزوی موج انتقال حیطہ $\delta_0(k)$ تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے فرض کریں کہ $r \to \infty$ پر رداسی تفاعل موج $u(r)$ صفر کو پہنچے گا۔

جواب:

$$-\cot^{-1}\left[\cot(ka) + \frac{ka}{\beta\sin^2(ka)}\right], \qquad \text{جہاں} \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

۱۱.۴ بارن تخمین

۱۱.۴.۱ مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ

غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi + V\psi = E\psi \tag{۱۱.۴۹}$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{۱۱.۵۰}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ اور } Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi \tag{۱۱.۵۱}$$

اس کا روپ سرسری طور پر مساوات ہلم ہولٹز کی طرح ہے۔ البتہ غیر متجانس جزو Q خود ψ کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل $G(r)$ دریافت کر پائیں جو ڈیلٹا تفاعلی منبع کے لئے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r) \tag{۱۱.۵۲}$$

ایسی صورت میں ہم ψ کو بطور ایک تکمل لکھ سکتے ہیں

$$\psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0)\,\mathrm{d}^3\,r_0 \tag{۱۱.۵۳}$$

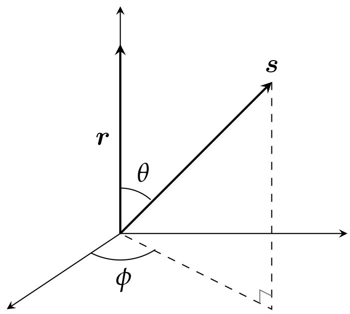
ہم با آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 11.50 روپ کی مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int \Big[(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)\Big]\,Q(r_0)\,\mathrm{d}^3\,r_0\\ &= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0)\,\mathrm{d}^3\,r_0 = Q(r)\end{aligned}$$

تفاعل $G(r)$ کو مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین کہتے ہیں۔ عمومی طور پر ایک خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلٹا تفاعلی منبع کو ردِ عمل ظاہر کرتا ہے۔

ہمارا پہلا کام $G(r)$ کے لئے مساوات 11.52 کا حل تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فوریئر بدل لیں جو تفرقی مساوات کو ایک الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{is\cdot r}g(s)\,\mathrm{d}^3\,s \tag{۱۱.۵۴}$$



شکل ۱۱.۸: موزوں محدد برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا تکمل۔

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left[(\nabla^2 + k^2)e^{is\cdot r}\right] g(s)\, d^3 s$$

ہو گا تاہم

$$\nabla^2 e^{is\cdot r} = -s^2 e^{is\cdot r} \tag{۱۱.۵۵}$$

اور مساوات 2.144 دیکھیں

$$\delta^3(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۶}$$

لہٰذا مساوات 11.52 درج ذیل کہے گی

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2)e^{is\cdot r} g(s)\, d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r}\, d^3 s$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \tag{۱۱.۵۷}$$

اس کو واپس مساوات 11.54 میں پُر کر کے درج ذیل ملتا ہے

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{is\cdot r} \frac{1}{(k^2 - s^2)}\, d^3 s \tag{۱۱.۵۸}$$

اب s تکمل کے نقطہ نظر سے r غیر متغیر ہے ہم کروی محدد (s, θ, ϕ) کو یوں چنتے ہیں کہ r قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں $s \cdot r = sr\cos\theta$ ہو گا متغیر ϕ کا تکمل 2π ہو گا جبکہ θ تکمل درج ذیل ہو گا

$$\int_0^{\pi} e^{isr\cos\theta} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\frac{e^{isr\cos\theta}}{isr}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\sin(sr)}{sr} \tag{۱۱.۵۹}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)}\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2 - s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\sin(sr)}{k^2 - s^2}\,\mathrm{d}s \tag{۱۱.۶۰}$$

باقی تکمل اتنا آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی علامتیت استعمال کر کے نصب نما کو اجزائے ضربی کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)}\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r}(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{۱۱.۶۱}$$

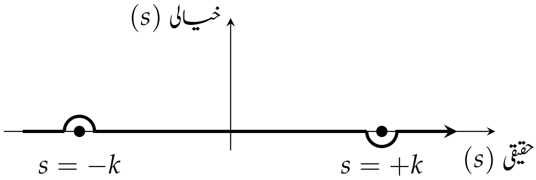
اگر z_0 خط ارتفاع کے اندر پایا جاتا ہو تب کوشی کلیہ تکمل

$$\oint \frac{f(z)}{(z - z_0)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{۱۱.۶۲}$$

استعمال کرتے ہوئے ان تکملات کی قیمت تلاش کی جا سکتی ہے دیگر صورت تکمل صفر ہو گا۔ یہاں حقیقی محور جو $\pm k$ پر قطبی نادر نکات کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے کے ساتھ ساتھ تکمل لیا جا رہا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہو گا میں $-k$ پر بالائی جانب سے $+k$ پر زیریں جانب سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں مثلاً آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں جس سے آپ کو ایک مختلف تفاعل گرین حاصل ہو گا لیکن میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا کہ یہ تمام قابلِ قبول ہوں گے۔

مساوات 11.61 میں ہر ایک تکمل کے لئے ہمیں خط استوا کو اس طرح بند کرنا ہو گا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ تکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالے۔ تکمل I_1 کی صورت میں اگر s کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جزو ضربی e^{isr} صفر کو پہنچے گا اس تکمل کے لئے ہم بالا نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ا)۔ اب خط ارتفاع صرف $s = +k$ پر پائے جانے والا نادر نقطہ کو گھیرتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$I_1 = \oint\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\frac{1}{s-k}\,\mathrm{d}s = 2\pi i\left[\frac{se^{isr}}{s+k}\right]\bigg|_{s=k} = i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۳}$$



شکل ۱۱.۹: ارتفاعی تکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔

(ب) (ا)

شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتفاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

تکمل I_2 کی صورت میں جب s کا خیالی جزو بہت بڑی منفی مقدار ہو تب جزو ضربی e^{-isr} صفر کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم زیریں نصف دائرہ لیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقا $s = -k$ پر پائے جانے والے نادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے اور یہ گھڑی وار ہے لہٰذا اس کے ساتھ اضافی منفی علامت ہوگا

$$I_2 = -\oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right] \frac{1}{s+k}\,\mathrm{d}s = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k}\right]\Bigg|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr} \tag{۱۱.۶۴}$$

ماخوذ:

$$G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r}\left[\left(i\pi e^{ikr}\right) - \left(-i\pi e^{ikr}\right)\right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \tag{۱۱.۶۵}$$

یہ مساوات 11.52 کا حل اور مساوات ہلم ہولٹز کا تفاعل گرین ہے اگر آپ کہیں ریاضیاتی تجزیہ میں گم ہو گئے ہوں تب بلاواسطہ تفرق کی مدد سے نتیجہ کی تصدیق کریں سوال 11.8 دیکھیں۔ بلکہ یہ مساوات ہلم ہولٹز کا ایک تفاعل گرین ہے چونکہ ہم $G(r)$ کے ساتھ ایسا کوئی بھی تفاعل $G_0(r)$ جمع کر سکتے ہیں جو متجانس ہلم ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0 \tag{۱۱.۶۶}$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات 11.52 کو $(G + G_0)$ بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ابہام کی وجہ قطبین کے قریب سے گزرتے ہوئے راہ کی بنا پر ہے راہ کی ایک مختلف انتخاب ایک مختلف تفاعل $G_0(r)$ کے مترادف ہے۔

مساوات 11.53 کو دوبارہ دیکھتے ہوئے مساوات شروڈنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہو گا

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}V(r_0)\psi(r_0)\,d^3r_0 \tag{۱۱.۶۷}$$

جہاں ψ_0 آزاد ذرہ مساوات شروڈنگر کو مطمئن کرتا ہے

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0 \tag{۱۱.۶۸}$$

مساوات 11.67 مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ ہے جو زیادہ معروف تفرقی روپ کی مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ کسی بھی مخفیہ کے لئے مساوات شروڈنگر کا سری حل ہے جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکہ مت کھائیں۔ دائیں ہاتھ تکمل کی علامت کے اندر ψ پایا جاتا ہے جسے جانے بغیر آپ تکمل حاصل کر کے حل نہیں جان سکتے ہیں تاہم تکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اور جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے یہ بالخصوص بکھراو مسائل کے لئے نہایت موضوع ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات 11.65 کو مساوات 11.52 میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ: $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$ ۔

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ V اور E کی مناسب قیمتوں کے لئے مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال مساوات 4.80 مطمئن کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ E منفی ہے لہٰذا $k = i\kappa$ ہو گا جہاں $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ ہو گا۔

۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں $r_0 = 0$ پر $V(r_0)$ مقامی مخفیہ ہے یعنی کسی متناہی خطے کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہے جو عموماً مسئلہ بکھراو میں ہو گا اور ہم مرکز بکھراو سے دور نکات پر $\psi(r)$ جاننا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 11.67 کی تکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نکات کے لئے $|r| \gg |r_0|$ ہو گا لہٰذا

$$|r - r_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2r\cdot r_0 \cong r^2\left(1 - 2\frac{r\cdot r_0}{r^2}\right) \tag{۱۱.۶۹}$$

اور یوں درج ذیل ہو گا

$$|r - r_0|^2 \cong r - \hat{r}\cdot r_0 \tag{۱۱.۷۰}$$

ہم

$$k \equiv k\hat{r} \tag{۱۱.۷۱}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$e^{ik|r-r_0|} \cong e^{ikr} e^{-ik\cdot r_0} \tag{11.72}$$

ہو گا۔ لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\cdot r_0} \tag{11.73}$$

نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین $r \cong |r-r_0|$ دے سکتے ہیں قوت نما میں ہمیں دوسرا جزو بھی رکھنا ہو گا۔ اگر آپ یقین نہیں کر سکتے ہیں تو نصب نما میں دوسرے جزو کو پھیلا کر دیکھیں ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار (r_0/r) کی قوتوں میں پھیلا کر کم سے کم رتبی جزو کے علاوہ باقی تمام کو رد کرتے ہیں۔

بکھراو کی صورت میں ہم درج ذیل چاہتے ہیں۔ جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے

$$\psi_0(r) = Ae^{ikz} \tag{11.74}$$

یوں بڑی r کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\psi(r) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{ik\cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{11.75}$$

یہ معیاری روپ مساوات 11.12 ہے جس سے ہم حیطہ بکھراو پڑھ سکتے ہیں

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A}\int e^{-ik\cdot r_0} V(r_0)\psi(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{11.76}$$

یہاں تک یہ بالکل ایک درست جواب ہے ہم اب بارن تخمین بروئے کار لاتے ہیں۔ فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ قابلِ ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو ایسی صورت میں درج ذیل استعمال کرنا معقول ہو گا

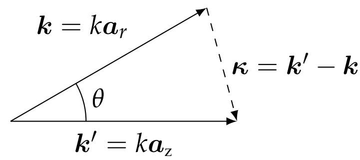
$$\psi(r_0) \approx \psi_0(r_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{ik'\cdot r_0} \tag{11.77}$$

جہاں تکمل کے اندر k' درج ذیل ہے

$$k' \equiv k\hat{z} \tag{11.78}$$

مخفیہ V صفر ہونے کی صورت میں یہ بالکل ٹھیک تفاعل موج ہوتا یہ بنیادی طور پر کمزور مخفیہ تخمین ہے۔ بارن تخمین میں یوں درج ذیل ہو گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k'-k)\cdot r_0} V(r_0)\,\mathrm{d}^3 r_0 \tag{11.79}$$



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تفاعل موج: k' آمدی رخ جبکہ k بکھراو رخ ہے۔

ہو سکتا ہے کہ آپ k' اور k کی تعریفات بھول چکے ہوں دونوں کی مقدار k ہے تاہم اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ ہے جبکہ موخر الذکر کا رخ کاشف کے رخ ہے (شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں)۔ اس عمل میں $\hbar(k - k')$ منتقلی معیار حرکت کو ظاہر کرے گا بالخصوص خطہ بکھراو پر کم توانائی لمبی طول موج بکھراو کے لئے قوت نمائی جز و ضربی بنیادی طور پر مستقل ہو گا اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرے گا

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar}\int V(r)\,\mathrm{d}^3 r, \qquad \text{کم توانائی} \tag{۱۱.۸۰}$$

میں نے یہاں r کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا امید کی جاتی اس سے کوئی پریشانی پیدا نہیں ہو گی۔

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراو درج ذیل مخفیہ لیں

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \le a \text{ اگر} \\ 0, & r > a \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۱.۸۱}$$

کم توانائی کی صورت میں θ اور ϕ کا غیر تابع حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا۔

$$f(\theta,\phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2}V_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \tag{۱۱.۸۲}$$

تفرقی عمودی تراش

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f|^2 \cong \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۳}$$

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma \cong 4\pi\left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{۱۱.۸۴}$$

□

ایک کروی تشاکلی مخفیہ $V(r) = V(r)$ کے لئے جو ضروری نہیں کہ کم توانائی پر ہو تخمین بارن دوبارہ سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$\kappa \equiv k' - k \tag{۱۱.۸۵}$$

r_0 تکمل کے قطبی محور کو κ پر رکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$(k' - k) \cdot r_0 = \kappa r_0 \cos\theta_0 \tag{۱۱.۸۶}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos\theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin\theta_0 \, \mathrm{d}r_0 \, \mathrm{d}\theta_0 \, \mathrm{d}\phi_0 \tag{۱۱.۸۷}$$

متغیر ϕ_0 کے لحاظ سے تکمل 2π دیگا اور θ_0 تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں مساوات 11.59 دیکھیں۔ یوں r کے زیر نوشت کو نہ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جائے گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty rV(r) \sin(\kappa r) \, \mathrm{d}r \qquad \text{کروی تشاکل} \tag{۱۱.۸۸}$$

f کی زاویائی تابعیت κ میں سموئی گئی ہے شکل ۱۱.۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\kappa = 2k \sin(\theta/2) \tag{۱۱.۸۹}$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراو۔ یوکاوا مخفیہ جو جوہری مرکزہ کے بیچ بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے کا روپ درج ذیل ہے جہاں β اور μ مستقلات ہیں

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{۱۱.۹۰}$$

تخمین بارن درج ذیل دیگا

$$f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) \, \mathrm{d}r = -\frac{2m\beta}{\hbar(\mu^2 + \kappa^2)} \tag{۱۱.۹۱}$$

آپ کو سوال 11.11 میں یہ تکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔ □

مثال ۱۱.۶: ردرفورڈ بکھراو۔ مخفیہ یوکاوا میں $\beta = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$ اور $\mu = 0$ پُر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہو گا جو دو نقطی باروں کے بیچ برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراو درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2} \tag{۱۱.۹۲}$$

یا مساوات 11.89 اور 11.51 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{۱۱.۹۳}$$

اس کا مربع ہمیں تفرقی عمودی تراش دیگا

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{۱۱.۹۴}$$

جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ مساوات 11.11 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کلاسیکی میکانیات تخمین بارن اور کوانٹائی نظریہ میدان تمام ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ ایک مضبوط کلیہ ہے۔
□

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے نرم کرہ بکھراو کا حیطہ بکھراو بارن تخمین سے حاصل کریں دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس سے مساوات 11.82 حاصل ہو گا۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات 11.91 میں تکمل کی قیمت تلاش کر کے دائیں ہاتھ ریاضی فقرہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں یوکاوا مخفیہ سے بکھراو کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو E کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال 11.4 کے مخفیہ کے لئے کریں۔

(الف) کم توانائی تخمین بارن میں $f(\theta, D(\theta))$ اور σ کا حساب لگائیں۔

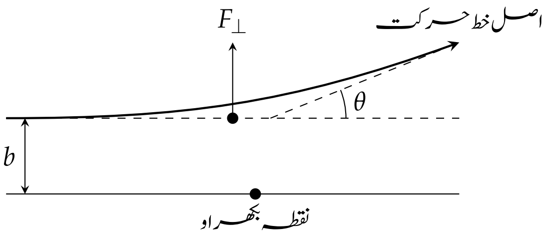
(ب) تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے $f(\theta)$ کا حساب لگائیں۔

(ج) دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب خطوں میں سوال 4.11 کے جواب کے مطابق ہیں۔

۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراو میں تخمین ضرب کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عرضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں فرض کرتے ہیں کہ ذرہ ایک سیدھی لکیر پر ہی چلتے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$I = \int F_{\perp}\,\mathrm{d}t \tag{۱۱.۹۵}$$



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کو منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں فرض کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے تب یہ ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی ایک اچھی تخمین ہو گی اور یوں زاویہ بکھراو درج ذیل ہو گا جہاں p آمدی معیار حرکت ہے

$$\theta \cong \tan^{-1}(I/p) \tag{۱۱.۹۶}$$

اسے ہم رتبہ اول تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں نہ مڑنے کی صورت کو صفر رتبی کہا جائے گا اسی طرح صفر رتبی تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر کسی تبدیلی کے گزرے گی اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا وہ درحقیقت اس کی رتبہ اول تصحیح ہے۔ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ اسی تصور کو بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم زیادہ بلند رتبی تصحیح کا ایک تسلسل پیدا کر کے بالکل ٹھیک جواب پر مرکوز ہو سکتے ہیں۔

مساوات شروڈنگر کی تکملی روپ درج ذیل ہے

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0)V(r_0)\psi(r_0)\, d^3 r_0 \tag{۱۱.۹۷}$$

جہاں ψ_0 آمدی موج ہے

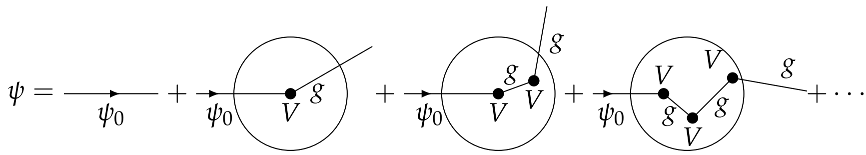
$$g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{۱۱.۹۸}$$

تفاعل گرین ہے۔ جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے جزو ضربی $2m/\hbar^2$ شامل کیا ہے اور V مخفیہ بکھراو ہے۔ اس کو درج ذیل دیکھا جا سکتا ہے

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi \tag{۱۱.۹۹}$$

فرض کریں ہم ψ کی اس ریاضی جملہ کو لیکر اسے تکمل کی علامت کے اندر لکھیں

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi \tag{۱۱.۱۰۰}$$



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کا نظریری مفہوم۔

اس عمل کہ بار بار دوہرانے سے ہمیں ψ کا ایک تسلسل حاصل ہوگا

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots \tag{۱۱.۱۰۱}$$

ہر متکمل میں آمدی تفاعل موج ψ_0 کے علاوہ gV کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے جزو کے بعد ختم کرتا ہے تاہم آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبی تصحیح کس طرح پیدا کی جائیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبی ψ پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا رتبی اول میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلے جائے گا۔ دوم رتبی میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام پر پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے راہ پر چل نکلتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ اسی کے بنا پر بعض اوقات تفاعل گرین کو اشاعت کار کہا جاتا ہے جو ایک باہم عمل اور سورے کے بیچ خلل کی اشاعت کس طرح ہوتی ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹائی میکانیات کی فینمن تشریح کا سبب بنا جس میں اشکال فینمن میں جزو ضربی راس V اور اشاعت کار g کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردر فورڈ بکھراو کے لئے θ کو ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل تلاش کریں۔ دکھائیں کہ مناسب حدوں کے اندر آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی فقرہ سوال 11.1 (الف) کے مطابق ہے۔

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراو کے لئے حیطہ بکھراو تلاش کریں۔

جواب: $-(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1-(4mV_0a^2/5\hbar^2)]$

سوال ۱۱.۱۶: یک بُعدی مساوات شروڈنگر کے لئے تفاعل گرین تلاش کر کے مساوات 11.67 کا مماثل تکملی روپ تیار کریں۔

جواب:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|}V(x_0)\psi(x_0)\,\mathrm{d}x_0 \tag{۱۱.۱۰۲}$$

سوال ۱۱.۱۷: مبدا پر بغیر اینٹوں کی دیوار کی صورت میں وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر یک بُعدی بکھراو کے لئے سوال 11.16 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$ تصور کرتے ہوئے $\psi_0(x) =$

Ae^{ikx} منتخب کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$R \cong \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) \, \mathrm{d}x \right|^2 \tag{۱۱.۱۰۳}$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل مساوات 2.114 اور ایک متناہی چوکور کنواں مساوات 2.145 سے بکھراو کے لئے تفصیلی عددی سر $(T = 1 - R)$ کو یک بُعدی تخمین بارن سوال 11.17 کی مدد سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا بالکل ٹھیک جوابات مساوات 2.141 اور 2.169 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ حیطہ بکھراو کے خیالی جز و اور کل عمودی تراش کے بیچ رشتہ دینے والا مسئلہ بصریات ثابت کریں

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} Im(f(0)) \tag{۱۱.۱۰۴}$$

اشارہ: مساوات 11.47 اور 11.48 استعمال کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: QuestionMissing

$$V(r) = Ae^{-\mu r^2} \tag{۱۱.۱۰۵}$$

جوابات

فرہنگ

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35

fermions, 208
Feynmann–Hellmann theorem, 294
fine structure, 272
fine structure constant, 272
formula
    De Broglie, 19
    Euler, 30
Fourier
    inverse transform, 63
    transform, 63
Frobenius
    method, 54
function
    Dirac delta, 72
    even, 31

g–factor, 278
gamma function, 249
gaps, 234
gauge
    invariant, 202
    transformation, 202
generalized
    distribution, 72
    function, 72
generalized statistical interpretation, 111
generating
    function, 60
generator
    translation in space, 136
    translation in time, 136
geometric series, 253
good
    linear combinations, 263
good quantum numbers, 275
Gram–Schmidt
    orthogonalization process, 107
Gram–Schmidt procedure, 437
graviton, 163
group theory, 191
gyromagnetic ratio, 182

density
    free electron, 227
determinant
    Slater, 214
determinate state, 103
deuterium, 297
deuteron, 297
dipole moment
    magnetic, 181
Dirac
    comb, 229
    notation, 128
    orthonormality, 108
direct integral, 313
discrete, 105
dispersion
    relation, 67
dope, 235

eigenfunction, 103
eigenvalue, 103
eigenvalue equation, 103
electrodynamics
    quantum, 278
electron
    classic radius, 175
energy
    allowed, 29
    conservation, 39
energy gap, 290
ensemble, 15
entangled states, 207
exchange force, 213
exchange integral, 313
expectation
    value, 7

Fermi
    energy, 227
    temperature, 228
Fermi surface, 227
Fermi–Dirac distribution, 247

polynomial, 158
Lamb shift, 272
Landau Levels, 202
Lande g-factor, 284
Laplacian, 138
Larmor frequency, 184
law
Hooke, 42
LCAO, 311
Legendre
associated, 142
leptons, 175
Levi-Civita symbol, 180
linear
combination, 28
linear algebra, 97
Lithium, 162
Lorentz force
law, 201

magnetic moment
anomalous, 278
mass
reduced, 206
matrices, 98
matrix
S, 94
transfer, 95
matrix elements, 125
Maxwell-Boltzmann distribution, 247
mean, 7
median, 7
meson, 191
momentum, 17
momentum space
wave function, 195
momentum space wave function, 113
motion
cyclotron, 202
muon catalysis, 319
muonic hydrogen, 291

Hamiltonian, 28
harmonic
oscillator, 32
harmonic oscillator
three-dimensional, 193
Helium, 162
Hermitian
conjugate, 49
hermitian, 101
anti, 130
conjugate, 103
skew, 130
hidden variables, 3
Hilbert space, 99
hole, 235
Hund's
first rule, 221
second rule, 221
third rule, 221
Hund's Rules, 220
hydrogen
muonic, 207
hydrogenic atom, 162
hyperfine structure, 272

ideal gas, 245
idempotent, 129
indeterminacy, 3
infinite spherical well, 146
inner product, 98
insulator, 235
inverse beta decay, 253

ket, 128
kion, 191
Kronig-Penny model, 232

ladder
operators, 46
Lagrange multiplier, 242
Laguerre
associated polynomial, 158

degenerate, 260
pion, 191
Planck's
formula, 162
polynomial
Hermite, 58
position
agnostic, 4
orthodox, 3
realist, 3
positronium, 207, 291
potential, 15
effective, 146
reflectionless, 93
probability
conservation, 194
density, 10
probability current, 21, 194
probable
most, 7

quantum
principle number, 155
quantum dots, 319
quantum number
azimuthal, 145
magnetic, 145
quantum numbers, 147
quark, 191

radial equation, 146
recursion
formula, 55
reflection
coefficient, 78
relation
Kramers, 295
Pasternack, 295
relativistic correction, 272
revival time, 89
Riemann zeta function, 249
rigid rotor, 173

muonium, 291

Neumann
spherical function, 148
neutrino
electron, 127
muon, 127
neutron star, 253
node, 34
non-normalizable, 13
normalizable, 14
normalization, 13
normalization constant, 22
normalized, 100

observables
incompatible, 116
occupation number, 237
operator, 17
exchange, 209
lowering, 46, 166
projection, 129
raising, 46, 166
orbital, 173
orbitals, 219
orthogonal, 34, 100
orthohelium, 217
orthonormal, 35, 100
orthorhombic symmetry, 298
oscillation
neutrino, 127
overlap integral, 312

pair annihilation, 292
parahelium, 217
particle
unstable, 21
Paschen-Back effect, 285
Pauli exclusion principle, 208
Pauli spin matrices, 177
periodic table, 219
perturbation theory

spinor, 175
square-integrable, 13
square-integrable functions, 98
standard deviation, 9
Stark effect, 296
state
 bound, 70
 excited, 34
 ground, 34, 156
 scattering, 70
stationary states, 27
statistical
 interpretation, 2
Stefan-Boltzmann formula, 251
step function, 80
Stern-Gerlach experiment, 184
Stirling's approximation, 243
symmetrization
 requirement, 209

temperature, 236
tetragonal symmetry, 298
theorem
 Dirichlet's, 35
 Ehrenfest, 18
 equipartition, 254
 Plancherel, 63
thermal equilibrium, 236
Thomas precession, 279
transformations
 linear, 97
transition, 161
transmission
 coefficient, 78
triplet, 188
tunneling, 72, 79
turning points, 70

uncertainty principle, 19, 116
 energy-time, 119

valence, 223

Rodrigues
 formula, 60
Rodrigues formula, 142
rotation
 generator, 200
Rydberg
 constant, 162
 formula, 162

scattering
 matrix, 93, 94
Schrodinger
 time-independent, 27
Schrodinger align, 2
Schwarz inequality, 99, 437
screened, 219
semiconductors, 235
separation constant, 26
sequential measurements, 131
series
 Balmer, 162
 Fourier, 35
 Lyman, 162
 Paschen, 162
 power, 43
 Taylor, 42
shell, 219
sodium, 23
space
 dual, 128
 outer, 23
spectrum, 104
spherical
 harmonics, 144
spin, 173, 174
spin down, 175
spin up, 175
spin-orbit
 interaction, 279
spin-orbit coupling, 272
spin-spin coupling, 290

Van der Waals interaction, 294
variables
    separation of, 25
variance, 9
variational principle, 299
vectors, 97
velocity
    group, 66
    phase, 66
virial theorem, 132
    three-dimensional, 194

wag the tail, 56
wave
    incident, 77
    packet, 62
    reflected, 77
    transmitted, 77
wave function, 2
wave vector, 224
wavelength, 18
white dwarf, 252
Wien displacement law, 250
WKB, 321

Yukawa potential, 316

Zeeman effect, 283
zero-crossing, 34

اتفاقی
    حالات، 133
اجازتی
    قیمتیں، 33
ارتعاش
    نیوٹرینو، 127
استمراری، 105
استمراری مساوات، 194
استمراریہ، 138
اصول
    عدم یقینیت، 19
اصول تغیریت، 299
اصول عدم یقینیت، 116
اضافیتی تصحیح، 272
ایکس سنٹی میٹر لکیر، 291
الیکٹران
    کلاسیکی رداس، 175
الیکٹران نیوٹرینو، 127
امتیازی تفاعل، 103
امتیازی قدر، 103
امتیازی قدر مساوات، 103
انتشاری
    رشتہ، 67
انحطاطی، 90، 104
انحطاطی دباو، 228
اندرونی ضرب، 98
انعکاس
    شرح، 78
اوسط، 7

باضابطہ معیار حرکت، 203
برقی حرکیات
    کوانٹائی، 278
بقا
    توانائی، 39
بقا احتمال، 194
بلاواسطہ تکمل، 313
بندشی توانائی، 156
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
بوس انجماد، 249

بوسن، 208
بوہر
رداس، 156
کلیہ، 155
بوہر مقناطیسیہ، 284
بیریان، 191
بیسل
کروی تفاعل، 148
بے لچک پھرکی، 173

پازیٹرانیم، 207، 291
پاشن و بیک اثر، 285
پالی اصول مناعت، 208
پالی قالب چکر، 177
پایان، 191
پٹیاں، 234
پس پردہ، 219
پلانک
کلیہ، 162
پیداکار
فضا میں انتقال کا، 136
وقت میں انتقال، 136
پیداکار
تفاعل، 60
گھومنا، 200

تجدیدی عرصہ، 89
تجربہ
شٹرن و گرلاخ، 184
ترتیبی پیمائشیں، 131
ترسیل
شرح، 78
تسلسل
بالمر، 162
پاشن، 162
ٹیلر، 42
طاقتی، 43
فوریئر، 35
لیمان، 162
تشاکلیت
ضرورت، 209

تشکیل، 237
تعداد مکین، 237
تعین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 72
تفاعل موج، 2
تفاعلیہ، 128
تکمل
ڈھانپائی، 312
توالی
کلیہ، 55
توانائی
اجازتی، 29
توقعاتی
قیمت، 7

ثنائی عددی سر، 239

جزو ڈارون، 280
جسیم مقیاس، 229
جفت، 34
تفاعل، 31
جفت قطب معیار اثر
مقناطیسی، 181
جوہری مدارچوں
خطی جوڑ ترکیب، 311
جی جزو ضربی، 278

چکر، 173، 174
مخالف میدان، 175
ہم میدان، 175
چکر چکر ربط، 290
چکر کار، 175
چکر و مدار باہم عمل، 279
چکر و مدار ربط، 272
چندر شیکھر حد، 253
چوزاویہ تشاکل، 298

حال
بکھراو، 70

زمینی،34،156
مقید،70
ہیجان،34
حراری توازن،236
حرکت
سائیکلوٹران،202

خطی الجبرا،97
خطی تبادلہ،97
خطی جوڑ،28
خفیہ متغیرات،3
خول،219،235

درجات آزادی،254
درجہ حرارت،236
درز،234
درز توانائی،290
دلیل،61
دم ہلانا،56،96
دوری جدول،219

ڈیراک
علامتیت،128
کنگھی،229
معیاری عمودیت،108
ڈیلٹا
کرونیکر،35
ڈیوٹریم،297
ڈیوٹیران،297

ذرہ
غیر مستحکم،21

رو
احتمال،21
رداسی مساوات،146
رڈبرگ،162
کلیہ،162
رشتہ
پسترنک،295
کرامرس،295
رفتار
دوری سمتی،66
گروہی سمتی،66
رمزاور وٹاونسڈ اثر،86
رواحتمال،194
روڈریگیس
کلیہ،142
ریمان زیٹا تفاعل،249

زاویائی معیار حرکت
بقا،170
خلقی،174
غیر خلقی،174
زیمان اثر،283

ساکن
حالات،27
سٹرلنگ تخمین،243
سٹیفن وبولٹزمن کلیہ،251
سرحدی شرائط،32
سرنگ زنی،72،79
سفید بونا،252
سگرا،15
سلور،220
سمتاویہ،128
سمتیات،97
سمتیہ موج،224
سوچ
انکاری،4
تقلید پسند،3
حقیقت پسند،3
سوڈیم،23
سہ تا،188
سیاہ جسمی طیف،250
سیڑھی
عاملین،46
سیڑھی تفاعل،80

شٹارک اثر،296
شروڈنگر
غیر تابع وقت،27
شروڈنگر نقطہ نظر،136

شریک عامل،103
شریک گرفتی بندھ،214
شماریاتی مفہوم،2
شوارز
عدم مساوات،437
شوارز عدم مساوات،99

صفر مقام انقطاع،34

طاق،34
طامس استقبالی حرکت،279
طول موج،18،162
طیف،104
طیفی تحلیل،130

عامل،17
تظلیل،129
تقلیل،46،166
رفعت،46،166
مبادلہ،209
عبور،161
عدم تعین،3
عدم یقینیت
توانائی و وقت،119
عدم یقینیت اصول،19
عقدہ،34
علامتیت
تفاعلیہ وسمتاویہ،128
علیحدگی متغیرات،25
علیحدگی مستقل،26
عمودی،34،100

غیر مسلسل،105
غیر موصل،235

فرمی
توانائی،227
درجہ حرارت،228
سطح،227
فرمیان،208
فرمی وڈیراک تقسیم،247

فروبنیوس
ترکیب،54
فضا
بیرونی،23
دوہری،128
فوریئر
الٹ بدل،63
بدل،63

قابل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ،116
قالب
بکھراو،93،94
ترسیل،95
قالبی ارکان،125
قانون
بک،42
قائمی معیّن،298
قواعد ہن،220
قوالب،98
قوت مبادلہ،213

کامل گیس،245
کایان،191
کثافت
آزاد الیکٹران،227
احتمال،10
کثیر رکنی
ہرمائٹ،58
کرانگ وپینی نمونہ،232
کروی
ہارمونیات،144
کعبی تشاکل،298
کلیہ
ڈی بروگلی،19
روڈریگیس،60
یولر،30
کلیبش و گورڈن عددی سر،190
کمیت
تخفیف شدہ،206
کوارک،191

کوانٹائی
صدر عدد، 155
کوانٹائی اعداد، 147
کوانٹائی عدد
اسمتی، 145
مقناطیسی، 145
کوانٹائی نقطے، 319
کوپن ہیگن مفہوم، 4
کیمیاوی مخفیہ، 247

گرام شمد
ترکیب عمودیت، 107
گرام وشمد حکمت عملی، 437
گرفتی، 223
گروہی نظریہ، 191
گریویٹان، 163
گیما تفاعل، 249

لاپلاسی، 138
لارمر تعدد، 184
لاگیغ
شریک کثیر رکنی، 158
کثیر رکنی، 158
لامتناہی کروی کنواں، 146
لیپٹان، 175
لتھیم، 162
لگرانج مضروب، 242
لنڈو سطحیں، 202
لنڈے جی جزو ضربی، 284
لورینز قوت
قانون، 201
لوی وچویتا، 180
لیژانڈر
شریک، 142
لیمب انتقال، 272

ماپ
تبادلہ، 202
غیر متغیر، 202
مبادلہ تکمل، 313

متعمم
تفاعل، 72
تقسیم، 72
متعمم شماریاتی مفہوم، 111
محتمل
سب سے زیادہ، 7
محدد
کروی، 139
مخالف بیٹا تحلیل، 253
مخفیہ، 15
بلاانعکاس، 93
موثر، 146
مدارچے، 219
مداری، 173
مربع متکامل، 13
مربع متکامل تفاعلات، 98
مرتعش
ہارمونی، 32
مرکز گریز جزو، 146
مساوات شروڈنگر، 2
مسکن مقناطیسی نسبت، 182
مسئلہ
اہرنفسٹ، 18
پلانشرال، 63
ڈرشلے، 35
مساوی خانہ بندی، 254
مسئلہ بلوخ، 229
مسئلہ فائنمن وہلمن، 294
مسئلہ وریل، 132
تین ابعادی، 194
معمول زنی، 13
قابل، 14
مستقل، 22
ناقابل، 13
معمول شدہ، 100
معیار حرکت، 17
معیار حرکی فضا تفاعل موج، 113، 195
معیاری انحراف، 9
معیاری عمودی، 35، 100
مقطع

سلیٹر،214
مقلب،44
مقلبیت
  باضابطہ رشتہ،45
  باضابطہ رشتے،138
  بنیادی رشتے،165
مقلوب،44
مقناطیسی معیار اثر
  بے ضابطہ،278
مکمل،35،100
ملاوٹ،235
منہدم،4،111
موج
  آمدی،77
  ترسیلی،77
  منعکس،77
موجی اکٹھ،62
موزوں
  خطی جوڑ،263
موزوں کوانٹائی اعداد،275
موصل،235
مہین ساخت،272
مہین ساخت مستقل،272
میزان،191
میکسویل وبولٹزمن تقسیم،247
میون عمل انگیزی،319
میون نیوٹرینو،127
میونی ہائیڈروجن،291
میونیئم،291

نابودگی جوڑا،292
نزد ہیلیم،217
نظریہ اضطراب
  انحطاطی،260
نہایت مہین ساخت،272
نیم موصل،235
نیوٹران ستارہ،253
نیومن
  کروی تفاعل،148

واپسی نقاط،70
وائن قانون ہٹاو،250
وسطانیہ،7
ونٹزل وکرامرس وبرلوان،321
ون در والس باہم عمل،292

ہن
  کا پہلا قاعدہ،221
  کا تیسرا قاعدہ،221
  کا دوسرا قاعدہ،221
ہارمونی
  مسر تعش،32
ہارمونی مسر تعش
  تین البعادی،193
ہائیڈروجن
  میونی،207
ہائیڈروجنی جوہر،162
ہرمشی،101
  جوڑی دار،49،103
  خلاف،130
  منحرف،130
ہلبرٹ فضا،99
ہمبستہ حال،207
ہندسی تسلسل،253
ہیزنبرگ نقطہ نظر،136
ہیلیم،162
ہیلیم پرست،217
ہیملٹنی،28

یک طاقتی،129
یوکاوا مخفیہ،316