

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@hotmail.com



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۱	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۳	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه
۶۹	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۱	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۲
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	افضل عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علالتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انشائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۴	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۷	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۷	امتیازی قیمتیں	۴.۳.۱
۱۷۳	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۶	چکر	۴.۴
۱۸۴	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۹۰	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۷	متنائل ذرات	۵
۲۰۷	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۹	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۳	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۷	جوہر	۵.۲
۲۱۸	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۲۱	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۵	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۵	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۳۱	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۸	کو انشائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۸	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۴۱	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۴	سب سے زیادہ مختل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۷	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۵۲	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۷	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۷	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۷	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۹	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۳	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۴	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۴	دوپڑتا انحطاط	۶.۲.۱
۲۶۹	بلند رتی انحطاط	۶.۲.۲
۲۷۴	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۵	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۸	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۵	زبان اثر	۶.۴
۲۸۵	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۷	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۹	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۹۱	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۳۰۳	تغیری اصول	۷
۳۰۳	نظریہ	۷.۱
۳۰۹	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۴	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۵	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۶	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۳۱	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۵	کلیات پیوند	۸.۳
۳۵۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۵۲	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۵۲	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۵۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۷	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۶۰	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۶۰	برقن طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۶۲	انجذاب، تحرک شدہ احسراج اور از خود احسراج	۹.۲.۲
۳۶۴	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۷	۹.۳	از خود احسراج
۳۶۷	۹.۳.۱	آمنشائن عددی سر A اور B
۳۶۹	۹.۳.۲	یجبان حال کا عمر و حیات
۳۷۱	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۸۱	۱۰	سرناگزرتخمین
۳۸۱	۱۰.۱	مسئلہ سرناگزرت
۳۸۱	۱۰.۱.۱	سرناگزرت عمل
۳۸۳	۱۰.۱.۲	مسئلہ سرناگزرت کا ثبوت
۳۸۹	۱۰.۲	بیئت بیری
۳۸۹	۱۰.۲.۱	گرگئی عمل
۳۹۱	۱۰.۲.۲	ہندی بیئت
۳۹۷	۱۰.۲.۳	اہار و نوو یو، ہم اثر
۴۰۷	۱۱	بکھراو
۴۰۷	۱۱.۱	تعارف
۴۰۷	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بکھراو
۴۱۱	۱۱.۱.۲	کوانٹائی نظریہ بکھراو
۴۱۳	۱۱.۲	حبزوی موج تجزیہ
۴۱۳	۱۱.۲.۱	اصول و ضوابط
۴۱۷	۱۱.۲.۲	لائحہ عمل
۴۱۹	۱۱.۳	پتی انتقال
۴۲۲	۱۱.۴	بارن تخمین
۴۲۲	۱۱.۴.۱	مساوات شروڈنگر کی عملی روپ
۴۲۷	۱۱.۴.۲	بارن تخمین اول
۴۳۲	۱۱.۴.۳	تسل بارن
۴۳۵	۱۲	پس نوشت
۴۳۶	۱۲.۱	آمنشائن، پوڈلکی و روزن تضاد
۴۳۸	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۴۳	۱۲.۳	مسئلہ قلیہ
۴۴۴	۱۲.۴	شروڈنگر کی ہلی
۴۴۶	۱۲.۵	کوانٹائی زینو تضاد
۴۴۹		ضمیمہ
۴۴۹	۱	خطی الجبرا
۴۴۹	A-۱	سمتیات
۴۵۳	A-۲	اندرونی ضرب
۴۵۵	A-۳	قوالب

۴۶۳	..... تبدیلی اساس	A-۴
۴۶۶	..... امتیازی سمتیات اور امتیازی اقتدار	A-۵
۴۷۲	..... ہر مشی تبادلہ	A-۶





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

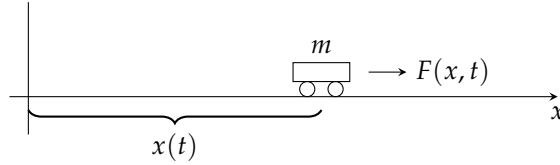
28 اکتوبر 2011ء

# باب ۱

## تفہم عمل موج

### ۱.۱ مساوات شروڈنگر

فرض کریں محور  $x$  پر رہنے کا پابند ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہو پر قوت  $F(x, t)$  عمل کرتی ہے (شکل ۱.۱)۔ کلاسیکی میکانیات میں اس ذرے کا مقام  $x(t)$  کسی بھی وقت  $t$  پر متعین کرنا درکار ہوتا ہے۔ ذرے کا مقام جاننے کے بعد ہم اس کا اسراع، سمتی رفتار  $v = \frac{dx}{dt}$ ، معیار حرکت  $p = mv$  یا حرکی توانائی  $T = \frac{1}{2}mv^2$  یا کوئی اور حرکی متغیر جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہوں، متعین کر سکتے ہیں۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم  $x(t)$  کیسے متعین کریں گے۔ ہم نیوٹن کا دوسرا قانون  $F = ma$  بروئے کار لاتے ہیں۔ (بقائی نظام جو خوش قسمتی سے خوردبینی سطح پر واحد نظام ہے، میں قوت کو مخفی توانائی پر تفرق لکھا جاسکتا ہے  $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ، لہذا نیوٹن کا قانون  $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$  لکھا جائے گا)۔ ابتدائی معلومات، جو عموماً  $t = 0$  پر سمتی رفتار یا مقام ہوں گے، استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے ذریعہ ہم  $x(t)$  دریافت کر سکتے ہیں۔



شکل ۱.۱: ایک مخصوص قوت کے پیش نظر ایک ”ذرہ“ ایک بُعد پر رہتے ہوئے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔

مقتضی قوتوں کے لئے ایسا نہیں ہوگا لیکن یہاں ہم ان کا تذکرہ نہیں کر رہے ہیں۔ نیز، اس کتاب میں ہم رفتار کو غیر اضافی ( $v \ll c$ ) تصور کریں گے۔

کوانٹائی میکانیات اس مسئلے کو بالکل مختلف انداز سے دیکھتی ہے۔ اب ہم ذرے کے تفاعل موج<sup>۲</sup>، جس کی علامت  $\Psi(x, t)$  ہے، کو مساوات شرودنگر<sup>۳</sup>:

$$(1.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کر کے حاصل کرتے ہیں جہاں  $i$  منفی ایک  $(-1)$  کا جذر اور  $\hbar$  پلانک مستقل، بلکہ اصل پلانک مستقل تقسیم  $2\pi$  ہوگا۔

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

شرودنگر مساوات نیوٹن کے دوسرے قانون کا مثال کردار ادا کرتی ہے۔ دی گئی ابتدائی معلومات (عموماً  $\Psi(x, 0)$ ) استعمال کرتے ہوئے مساوات شرودنگر، مستقبل کے تمام اوقات کے لئے،  $\Psi(x, t)$  کا تعین کرتی ہے، جیسے کلاسیکی میکانیات میں تمام مستقبل اوقات کے لئے وقت عدہ نیوٹن  $x(t)$  متعین کرتا ہے۔

## ۱.۲ شماریاتی مفہوم

تفاعل موج حقیقت میں کیا ہوتا ہے اور یہ جاننے ہوئے آپ حقیقت میں کیا کر سکتے ہیں؟ ایک ذرے کی خاصیت ہے کہ وہ ایک نقطے پر پایا جاتا ہو لیکن ایک تفاعل موج (جیسا کہ اس کے نام سے ظاہر ہے) فضا میں پھیلا ہوا پایا جاتا ہے۔ کسی بھی لمحے  $t$  پر یہ  $x$  کا تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل ایک ذرے کی حالت کو کس طرح بیان کر پائے گا، اس کا جواب تفاعل موج کا شماریاتی مفہوم<sup>۴</sup> پیش کر کے جناب بارن نے دیا جس کے تحت لمحے  $t$  پر نقطہ  $x$  پر ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  ہوگا، بلکہ اس کا زیادہ درست روپ<sup>۵</sup> درج ذیل ہے۔

$$(1.3) \quad \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \begin{cases} \text{ایک ذرہ کے پائے جانے کا احتمال} \\ \text{محے } t \text{ پر } a \text{ اور } b \text{ کے بیچ} \end{cases}$$

احتمال  $|\Psi|^2$  کی ترسیم کے نیچے رقبے کے برابر ہوگا۔ شکل ۱.۲ کی تفاعل موج کے لئے ذرہ غالباً نقطہ  $A$  پر پایا جائے گا جہاں  $|\Psi|^2$  کی قیمت اعظم ہے جبکہ نقطہ  $B$  پر ذرہ غالباً نہیں پایا جائے گا۔

شماریاتی مفہوم کی بنا پر اس نظریے سے ذرے کے بارے میں تمام متبادل حصول معلومات، یعنی اس کا تفاعل موج، جاننے کے باوجود ہم کوئی سادہ تجربہ کر کے ذرے کا مقام یا کوئی دیگر متغیر ٹھیک ٹھیک معلوم کرنے سے متاصر رہتے ہیں۔ کوانٹائی میکانیات ہمیں تمام ممکن نتائج کی صرف شماریاتی معلومات فراہم کر سکتی ہے۔

wave function<sup>۶</sup>

Schrodinger align<sup>۷</sup>

statistical interpretation<sup>۸</sup>

<sup>۹</sup>تفاعل موج خود مخلوط ہے لیکن  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$  (جہاں  $\Psi^*$  تفاعل موج  $\Psi$  کا مخلوط جوڑی دار ہے) حقیقی اور غیر منفی ہے، جیسا کہ ہونا بھی چاہیے۔



شکل ۱.۲: ایک عمومی تعامل موج۔ نقطہ  $a$  اور  $b$  کے بیچ ذرہ پایا جانے کا احتمال سایہ دار رقبہ دے گا۔ نقطہ  $A$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نسبتاً زیادہ ہو گا جبکہ  $B$  کے قریب ذرہ پایا جانے کا احتمال نہایت کم ہو گا۔

یوں کوانٹائی میکانیات میں عدم تعین کا عنصر پایا جائے گا۔ کوانٹائی میکانیات میں عدم تعین کا عنصر، طبیعیات اور فلسفہ کے ماہرین کے لیے مشکلات کا سبب بنتا رہا ہے جو انہیں اس سوچ میں مبتلا کرتا ہے کہ آیا یہ کائنات کی ایک حقیقت ہے یا کوانٹائی میکانیکی نظریے میں کمی کا نتیجہ۔

فرض کریں کہ ہم ایک تجربہ کر کے معلوم کرتے ہیں کہ ایک ذرہ مقام  $C$  پر پایا جاتا ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ پیمائش سے فوراً قبل یہ ذرہ کہاں ہوتا ہو گا؟ اس کے تین ممکنہ جوابات ہیں جن سے آپ کو کوانٹائی عدم تعین کے بارے میں مختلف طبقات فکر کے بارے میں علم حاصل ہو گا۔

(1) حقیقتی پسند<sup>۱</sup> سوچ: ذرہ مقام  $C$  پر ہوتا ہے۔ ایک معقول جواب ہے جس کی آئن سٹائن بھی وکالت کرتے تھے۔ اگر یہ درست ہو تب کوانٹائی میکانیات ایک نامکمل نظریہ ہو گی کیونکہ ذرہ دراصل نقطہ  $C$  پر ہی ہوتا اور کوانٹائی میکانیات ہمیں یہ معلومات فراہم کرنے سے متاثر رہی۔ حقیقت پسند سوچ رکھنے والوں کے مطابق عدم تعینیت فطرتاً نہیں پائی جاتی بلکہ یہ ہماری لاعلمی کا نتیجہ ہے۔ ان کے مطابق کسی لمحے پر ذرے کا مقام غیر معین نہیں ہوتا بلکہ یہ صرف تجربہ کرنے والے کو معلوم نہیں ہوتا۔ یوں  $\Psi$  مکمل کہانی بیان نہیں کرتا اور ذرے کو مکمل طور پر بیان کرنے کے لئے (خفیہ متغیرات<sup>۲</sup> کی صورت میں) مزید معلومات درکار ہوں گی۔

(2) تقلید پسند<sup>۳</sup> سوچ: ذرہ حقیقت میں کہیں پر بھی نہیں ہوتا۔ پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ ایک مقام پر ”ظاہر ہو جائے“ (ہمیں اس بارے میں سوال کرنے کی اجازت نہیں کہ ذرہ مقام  $C$  کو کیوں منتخب کرتا ہے)۔ ”مشاہدہ وہ عمل ہے جو نہ صرف پیمائش میں خلل ڈالتا ہے بلکہ یہ پیمائشی نتیجہ بھی پیدا کرتا ہے۔

<sup>۱</sup> indeterminacy

<sup>۲</sup> ظاہر ہے کوئی بھی پیمائشی آلہ کامل نہیں ہو سکتا ہے؛ میں صرف اتنا کہنا چاہتا ہوں کہ پیمائشی حائل کے اندر رہتے ہوئے یہ ذرہ نقطہ  $C$  کے قریب پایا گیا۔

<sup>۳</sup> realist

<sup>۴</sup> hidden variables

<sup>۵</sup> orthodox

پیمائشی عمل ذرے کو مجبور کرتا ہے کہ وہ کسی مخصوص مقام کو اختیار کرے۔ ہم ذرے کو کسی ایک مقام کو منتخب کرنے پر مجبور کرتے ہیں۔ یہ تصور جو کوہن ہیکل مفہوم کہلاتا ہے جناب بوہر اور ان کے ساتھیوں سے منسوب ہے۔ ماہرین طبیعیات میں یہ تصور سب سے زیادہ مقبول ہے۔ اگر یہ تصور درست ہو تب پیمائشی عمل ایک انوکھا عمل ہے جو نصف صدی سے زائد عرصے کے بحث مباحثوں کے بعد بھی واضح نہیں۔

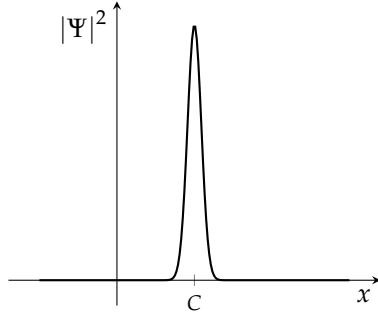
(3) انکاری سوچ: جواب دینے سے گریز کریں۔ یہ سوچ اتنی بوقلمانی نہیں جتنی نظر آتی ہے۔ چونکہ کسی ذرے کا مقام جاننے کے لیے آپ کو ایک تجربہ کرنا ہو گا اور تجربے کے نتائج آنے تک وہ لمحہ ماضی بن چکا ہو گا۔ چونکہ کوئی بھی تجربہ ماضی کا حاصل نہیں بتا پاتا لہذا اس کے بارے میں بات کرنا بے معنی ہے۔

1964 تک تینوں طبعیات فکر کے حسی پائے جاتے تھے البتہ اس سال جان بل نے ثابت کیا کہ تجربے سے قبل ذرے کا مقام ٹھیک ہونے یا نہ ہونے کا تجربے پر متبادل مشاہدہ اثر پایا جاتا ہے (ظاہر ہے کہ ہمیں یہ مقام معلوم نہیں ہو گا)۔ اس ثبوت نے انکاری سوچ کو غلط ثابت کیا۔ اب حقیقت پسند اور تقلید پسند سوچ کے سچے فیصلہ کرنا باقی ہے جو تجربے کر کے کیا جاسکتا ہے۔ اس پر کتاب کے آخر میں بات کی جائے گی جب آپ کی علمی فکر اتنی بڑھ چکی ہو گی کہ آپ کو جان بل کی دلیل سمجھ میں آ سکے گی۔ یہاں اتنا بتانا کافی ہو گا کہ تجربے بات جان بل کی تقلید پسند سوچ کی درستگی کی تصدیق کرتے ہیں<sup>۱۲</sup>۔ جیسا جھیل میں موج ایک نقطہ پر نہیں پائی جاتی، یوں قبل از تجربہ ایک ذرہ ٹھیک کسی ایک مقام پر نہیں پایا جاتا ہے۔ پیمائشی عمل ذرے کو ایک مخصوص عدد اختیار کرنے پر مجبور کرتے ہوئے ایک مخصوص نتیجہ پیدا کرتا ہے۔ یہ نتیجہ تفاعل موج کے عائد کردہ شرابیاتی وزن کی پابندی کرتا ہے۔

کیا ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی مقام C دے گی یا نیا مقام حاصل ہو گا؟ اس کے جواب پر سب متفق ہیں۔ ایک تجربے کے فوراً بعد (اسی ذرے پر) دوسرا تجربہ لازماً وہی مقام دوبارہ دے گا۔ حقیقت میں اگر دوسرا تجربہ مقام C کی تصدیق نہ کرے تب یہ ثابت کرنا نہایت مشکل ہو گا کہ پہلے تجربے میں مقام C ہی حاصل ہوا تھا۔ تقلید پسند اس کو کس طرح دیکھتا ہے کہ دوسری پیمائش ہر صورت C قیمت دے گی؟ ظاہری طور پر پہلی پیمائش تفاعل موج میں ایسی بنیادی تبدیلی پیدا کرتی ہے کہ تفاعل موج C پر نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے جیسا کہ شکل ۱.۳ میں دکھایا گیا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ پیمائش کا عمل تفاعل موج کو نقطہ C پر منہدم<sup>۱۳</sup> کر کے اس کو سوزن بننے پر مجبور کرتا ہے (جس کے بعد تفاعل موج مساوات شرودنگر کے تحت ارتقا پائے گا لہذا دوسری پیمائش جلد کرنا ضروری ہے)۔ اس طرح دوبہرت مختلف طبعی اعمال پائے جاتے ہیں: پہلے میں تفاعل موج وقت کے ساتھ مساوات شرودنگر کے تحت

Copenhagen interpretation<sup>11</sup>  
agnostic<sup>12</sup>

<sup>۱۲</sup> یہ فہم بردہ کچھ زیادہ مشالی ہے۔ چند نظریاتی اور تجرباتی مسائل باقی ہیں جن میں سے چند پر میں باب ۱۲ میں تبصرہ کروں گا۔ ایسے غیر معامی خفیہ متغیر نظریات اور دیگر بناؤں میں مثلاً متعدد دنیاؤں<sup>۱۳</sup> تشریح موجود ہیں جن کی تینوں سوچوں کے ساتھ مطابقت نہیں ہے۔ بہر حال، بنی الحال بہتر ہے کہ ہم کوانٹائی نظریے کی بنیاد سکیمیں اور بعد میں اس طرح کے مسائل پر فکر کریں۔  
collapses<sup>14</sup>



شکل ۱.۳: تنفس عمل موج کا انہدام: اس لمحے کے فوراً بعد  $|\Psi|^2$  کی ترسیم جب پیمائش سے ذرہ C پر پایا گیا ہو۔

ارتقاء پاتا ہے، اور دوسرا جس میں پیمائش  $\Psi$  کو فوراً ایک جگہ غیر استمراری طور پر منہدم کرتی ہے<sup>۱۵</sup>۔

### ۱.۳.۱ احتمال

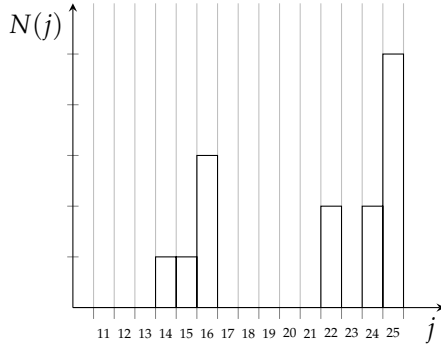
#### ۱.۳.۱ غیر مسلسل تغیرات

چونکہ کوانٹائی میکانیٹ کی شماراتی تشریح کی حباتی ہے لہذا اس میں احتمال کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اسی لیے میں اصل موضوع سے ہٹ کر نظریہ احتمال پر تبصرہ کرتا ہوں۔ ہمیں چند نئی علامات اور اصطلاحات سیکھنی ہوں گی جنہیں میں ایک سادہ مثال کی مدد سے واضح کرتا ہوں۔

فرض کریں ایک کمرہ میں 14 افراد موجود ہیں جن کی عمریں درج ذیل ہیں۔

- 14 سال عمر کا ایک فرد،
- 15 سال عمر کا ایک فرد،
- 16 سال عمر کے تین افراد،
- 22 سال عمر کے دو افراد،
- 24 سال عمر کے دو افراد،
- 25 سال عمر کے پانچ افراد۔

<sup>۱۵</sup> کوانٹائی میکانیٹ میں پیمائش کا کردار اتنا کلیدی اور حیران کن ہے کہ انسان سوچ میں پڑ جاتا ہے کہ پیمائش درحقیقت ہے کیا۔ کیا یہ خوردبینی (کوانٹائی) نظام اور کلاں بینی (کلاسیکی) پیمائشی آلات کے بیچ باہم عمل ہے (جیسے بوہر کہتے تھے)، یا اس کا تعلق مستقل نشانی چھوڑنے سے ہے (جیسے ہیزنبرگ مانتے تھے)، اور یا اس کا مدہوش ”مشاہدہ کار“ کی مداخلت سے تعلق ہے (جیسے وگنر نے تجویز کیا)؟ میں اس کٹھن مسئلہ پر دوبارہ باب ۱۲ میں بات کروں گا: ابھی کے لئے ہم سادہ سوچ لے کر چلتے ہیں: پیمائش سے مراد ایک ایسا عمل ہے جو سائنسدان تجربہ گاہ میں فیٹ، گھڑی، وغیرہ استعمال کرتے ہوئے سرانجام دیتے ہیں۔



شکل ۱.۴: مستطیل ترسیم جس میں عمر j کے لحاظ سے تعداد N(j) دکھائی گئی ہے۔

اگر j عمر کے لوگوں کی تعداد کو N(j) لکھ جائے تو یوں لکھ جائے گا۔

$$N(14) = 1$$

$$N(15) = 1$$

$$N(16) = 3$$

$$N(22) = 2$$

$$N(24) = 2$$

$$N(25) = 5$$

جبکہ، مثال کے طور پر، N(17) کی قیمت صفر ہوگی۔ کمرے میں افراد کی کل تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(۱.۴) \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$$

(۱) اس مثال میں، ظاہر ہے کہ،  $N = 14$  ہوگا۔ شکل ۱.۴ میں اس مواد کی مستطیلی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ اس تقسیم کے بارے میں درج ذیل چند ممکنہ سوالات ابھرتے ہیں۔

سوال ۱: اگر ہم اس گروہ سے بلا منصوبہ ایک فرد منتخب کریں تو اس بات کا کیا احتمال ہوگا کہ اس فرد کی عمر 15 سال ہو؟ جواب: چودہ میں ایک امکان ہوگا کیونکہ کل 14 افراد ہیں اور ہر ایک فرد کے انتخاب کا امکان ایک جیسا ہے لہذا ایسا ہونے کا احتمال چودہ میں سے ایک ہوگا۔ اگر j عمر کے فرد کے انتخاب کا احتمال  $P(j)$  ہو تو  $P(14) = 1/14$ ،  $P(15) = 1/14$ ،  $P(16) = 3/14$ ، وغیرہ ہوگا۔ اس کا عمومی کلیہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۱.۵) \quad P(j) = \frac{N(j)}{N}$$



دھیان رہے کہ چودہ یا پندرہ سال عمر کے مفرد کے انتخاب کا احتمال ان دونوں کے انفرادی احتمال کا مجموعہ یعنی  $\frac{1}{7}$  ہوگا۔ واضح رہے کہ تمام احتمالات کا مجموعہ اکائی (1) کے برابر ہوگا چونکہ آپ کسی نہ کسی عمر کے شخص کو ضرور منتخب کر پائیں گے۔

$$(1.۶) \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$$

سوال 2: کوئی عمر سب سے زیادہ متعلقہ<sup>۱۶</sup> ہے؟ جواب: 25، چونکہ پانچ اشخاص اتنی عمر رکھتے ہیں جبکہ اس کے بعد ایک جیسی عمر کے لوگوں کی اگلی زیادہ تعداد تین ہے۔ عمومی طور پر سب سے زیادہ احتمال کا  $j$  وہی  $j$  ہوگا جس کے لئے  $P(j)$  کی قیمت اعظم ہو۔

سوال 3: وسطانیہ<sup>۱۷</sup> عمر کیا ہے؟ جواب: چونکہ 7 لوگوں کی عمر 23 سے کم اور 7 لوگوں کی عمر 23 سے زیادہ ہے۔ لہذا جواب 23 ہوگا۔ (عمومی طور پر وسطانیہ  $j$  کی وہ قیمت ہوگی جس سے زیادہ اور جس سے کم قیمت کے نتائج کا احتمال ایک جیسا ہو۔)

سوال 4: ان کی اوسط<sup>۱۸</sup> عمر کتنی ہے؟ جواب:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21$$

عمومی طور پر  $j$  کی اوسط قیمت جس کو ہم  $\langle j \rangle$  لکھتے ہیں، درج ذیل ہوگی۔

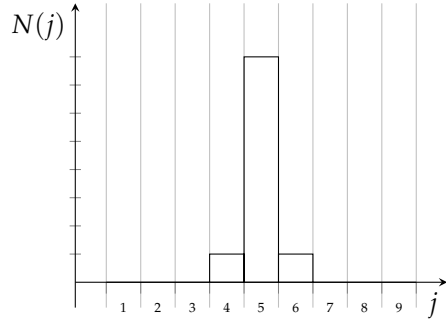
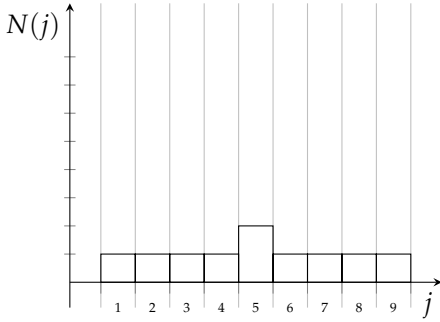
$$(1.۷) \quad \langle j \rangle = \frac{\sum jN(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$

دھیان رہے کہ عین ممکن ہے کہ گروہ میں کسی کی بھی عمر گروہ کی اوسط یا وسطانیہ کے برابر نہ ہو۔ مثال کے طور پر، اس مثال میں کسی کی عمر بھی 21 یا 23 سال نہیں ہے۔ کوانٹائی میکانیات میں ہم عموماً اوسط قیمت میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کو توقعاتی قیمت<sup>۱۹</sup> کا نام دیا گیا ہے۔

سوال 5: عمروں کے مربعوں کی اوسط کیا ہوگی؟ جواب: آپ  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $14^2 = 196$  حاصل کر سکتے ہیں، یا  $\frac{1}{14}$  احتمال سے  $225 = 15^2$ ، یا  $\frac{3}{14}$  احتمال سے  $256 = 16^2$ ، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ان کے مربعوں کی اوسط درج ذیل ہوگی۔

$$(1.۸) \quad \langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$

most probable<sup>۱۶</sup>  
median<sup>۱۷</sup>  
mean<sup>۱۸</sup>  
expectation value<sup>۱۹</sup>



شکل ۱.۵: دونوں مستطیل ترسیلات میں وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے اور سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے، تاہم ان ترسیلات میں معیاری انحراف مختلف ہیں۔

عمومی طور پر  $j$  کے کسی بھی تفاعل قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.9) \quad \langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$

(مساوات ۱.۶، ۱.۷ اور ۱.۸ اس کی خصوصی صورتیں ہیں۔) یاد رہے کہ مربع کی اوسط  $\langle j^2 \rangle$  عموماً اوسط کے مربع  $\langle j \rangle^2$  کے برابر نہیں ہوگی۔ مثال کے طور پر اگر ایک کمرے میں صرف دو بچے ہوں جن کی عمریں 1 اور 3 ہوں تب  $\langle x^2 \rangle = 5$  جبکہ  $\langle x \rangle^2 = 4$  ہوگا۔

شکل ۱.۵ کی شکل و صورت میں واضح مندرجہ پایا جاتا ہے اگرچہ ان کی اوسط کی قیمت ایک جیسی ہے، وسطانیہ کی قیمت ایک جیسی ہے، سب سے زیادہ احتمال کی قیمت ایک جیسی ہے اور اجزاء کی تعداد ایک جیسی ہے۔ ان میں پہلی شکل اوسط کے قریب نوکیلے انحصار جیسی ہے جبکہ دوسری شکل افقی چوڑی صورت رکھتی ہے۔ (مثال کے طور پر کسی بڑے شہر میں ایک جماعت میں طلبہ کی تعداد پہلی شکل کی مانند ہوگی جبکہ دیہاتی علاقے میں ایک ہی کمرے پر مبنی مکتب میں بچوں کی تعداد دوسری شکل سے ظاہر ہوگی۔) ہمیں اوسط قیمت کے لحاظ سے کسی بھی مقدار کی تقسیم کی ”وسعت“، عہد دی صورت میں درکار ہوگی۔ اس کا ایک سیدھا طریقہ یہ ہو سکتا ہے کہ ہم ہر انفرادی جزو کی قیمت اور اوسط قیمت کا منفرق

$$(1.10) \quad \Delta j = j - \langle j \rangle$$

لے کر تمام  $\Delta j$  کی اوسط تلاش کریں۔ ایسا کرنے سے یہ مسئلہ پیش آتا ہے کہ ان کا جواب صفر ہو گا چونکہ اوسط کی تعریف کے تحت اوسط سے زیادہ اور اوسط سے کم قیمتیں ایک برابر ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \langle \Delta j \rangle &= \sum (j - \langle j \rangle) P(j) = \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j) \\ &= \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0 \end{aligned}$$

(چونکہ  $\langle j \rangle$  مستقل ہے لہذا اس کو مجموعے کی علامت سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔) اس مسئلے سے چھٹکارا حاصل کرنے کے لئے آپ  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کی اوسط لے سکتے ہیں لیکن  $\Delta j$  کی مطلق قیمتوں کے ساتھ کام کرنا مشکلات پیدا کرتا ہے۔ اس کی بجائے، منفی علامت سے نجات حاصل کرنے کی خاطر، ہم مربع لینے کے بعد اوسط حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \quad (1.11)$$

اس قیمت کو تقسیم کی تعبیر<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں جبکہ تغیریت کے جذر  $\sigma$  کو معیار انحراف<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں۔ روایتی طور پر  $\sigma$  کو اوسط  $\langle j \rangle$  کے گرد وسعت کی پیمائش مانا جاتا ہے۔ ہم تغیریت کا ایک چھوٹا مسئلہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 P(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j) \\ &= \sum j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum P(j) \\ &= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \end{aligned}$$

اس کا جذر لے کر ہم معیاری انحراف کو یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \quad (1.12)$$

عملی استعمال میں  $\sigma$  اس یکے سے بہت آسانی سے حاصل ہوگا۔ آپ  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  معلوم کر کے ان کے فرق کا جذر لیں۔ جیسا کہ میں ذکر کر چکا ہوں  $\langle j^2 \rangle$  اور  $\langle j \rangle^2$  عموماً ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ جیسا کہ آپ مساوات ۱.۱۱ سے دیکھ سکتے ہیں  $\sigma^2$  غیر منفی ہوگا، لہذا مساوات ۱.۱۲ سے سرآوردہ ذیل ہوگا

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \quad (1.13)$$

اور یہ دونوں صرف اس صورت میں برابر ہو سکتے ہیں جب  $\sigma = 0$  ہو، جو تب ممکن ہوگا جب تقسیم میں کوئی وسعت نہ پائی جاتی ہو یعنی ہر جزو ایک ہی قیمت کا ہو۔

## ۱.۳.۲ استمراری متغیرات

اب تک ہم غیر مسلسل متغیرات کی بات کرتے آئے ہیں جن کی قیمتیں جداگانہ ہوتی ہیں (گزشتہ مثال میں ہم نے امیراد کی عمروں کی بات کی جن کو سالوں میں ناپا جاتا ہے، لہذا از عدد صحیح بنتا)۔ تاہم اس کو آسانی سے استمراری تقسیم تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر میں گلی میں بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کر کے

<sup>۲۰</sup> variance  
<sup>۲۱</sup> standard deviation

اس کی عمر پوچھوں تو اس کا احتمال صفر ہو گا کہ اس کی عمر ٹھیک 16 سال 4 گھنٹے، 27 منٹ اور 3.37524 سیکنڈ ہو۔ یہاں اس کی عمر کے 16 اور 17 سال کے بیچ ہونے کے احتمال کی بات کرنا معقول ہو گا۔ بہت کم وقفے کی صورت میں احتمال وقفے کی لمبائی کے راست متناسب ہو گا۔ مثال کے طور پر 16 سال اور 16 سال دو دن کے بیچ عمر کا احتمال، 16 سال اور 16 سال ایک دن کے بیچ عمر کے احتمال کا دو گنا ہو گا۔ (سوائے ایسی صورت کے جب 16 سال قبل عین اسی دن کسی وجہ سے بہت زیادہ بچے پیدا ہوئے ہوں۔ ایسی صورت میں اس متاعدے کے اطلاق کے نقطہ نظر سے ایک یا دو دن کا وقفہ بہت لمبا وقفہ ہے۔ اگر زیادہ بچوں کی پیدائش کا دورانیہ چھ گھنٹے پر مشتمل ہو تب ہم ایک سیکنڈ یا زیادہ محفوظ رہنے کی خاطر، اس سے بھی کم دورانیے کا وقفہ لیں گے۔ تکنیکی طور پر ہم لامتناہی کم وقفے کی بات کر رہے ہیں۔) لہذا ایوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\rho(x) dx = \begin{cases} \text{بلا منصوب منتخب کئے گئے رکن کا } x \\ \text{اور } (x + dx) \text{ کے بیچ پائے جانے} \\ \text{کا احتمال} \end{cases} \quad (1.13)$$

اس مساوات میں تناسبی مستقل  $\rho(x)$  کا کثافت احتمال<sup>۲۲</sup> کہلاتا ہے۔ متناہی وقفہ  $a$  تا  $b$  کے بیچ  $x$  پائے جانے کا احتمال  $\rho(x)$  کا تکمیل دے گا:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx \quad (1.15)$$

اور غیر مسلسل تقسیم کے لئے اخذ کردہ قواعد درج ذیل روپ اختیار کریں گے:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \quad (1.17)$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) dx, \quad (1.18)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (1.19)$$

مثال ۱.۱: ایک چٹان جس کی اونچائی  $h$  ہو سے ایک پتھر کو نیچے گرنے دیا جاتا ہے۔ گرتے ہوئے پتھر کی بلا واسطہ وقتی فاصلوں پر دس لاکھ تصاویر کھینچی جاتی ہیں۔ ہر تصویر پر طے شدہ فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ ان تمام فاصلوں کی اوسط قیمت کیا ہوگی؟ یعنی طے شدہ فاصلوں کی وقتی اوسط کیا ہوگی؟<sup>۲۳</sup>

حل: پتھر ساکن حال سے بتدریج بڑھتی ہوئی رفتار سے نیچے گرتا ہے۔ یہ چٹان کے بالائی سر کے قریب زیادہ وقت گزارتا ہے لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ فاصلہ  $\frac{h}{2}$  سے کم ہو گا۔ ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے، لمحہ  $t$  پر فاصلہ  $x$

<sup>۲۲</sup>probability density

<sup>۲۳</sup>ایک ماہر شماریات کو شکوہ ہو گا کہ میں متناہی نمونے (جو یہاں دس لاکھ ہے) کی اوسط اور (پوری استمراریہ) پر "اصلی" اوسط میں منفرق نہیں کر پارہا۔ یہ تجربہ کرنے والے کے لئے معصیت پیدا کر سکتا ہے، خصوصاً جب نمونی جسامت چھوٹی ہو، تاہم یہاں مجھے صرف اصل اوسط سے عنبرض ہے، اور نمونی اوسط اس کی اچھی تجسین ہے۔

درج ذیل ہوگا۔

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

اس کی سستی رفتار  $\frac{dx}{dt} = gt$  ہوگی اور پرواز کا دورانیہ  $T = \sqrt{2h/g}$  ہوگا۔ وقفہ  $dt$  میں تصویر کھینچنے کا احتمال  $\frac{dt}{T}$  ہوگا۔ یوں اس کا احتمال کہ ایک تصویر مطابقتی سرعت  $dx$  میں فاصلہ دے درج ذیل ہوگا:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt} \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx$$

ظاہر ہے کہ کثافت احتمال (مساوات ۱.۱۴) درج ذیل ہوگی۔

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

(اس وقفہ کے باہر کثافت احتمال صفر ہوگی۔)

ہم مساوات ۱.۱۶ استعمال کر کے اس نتیجے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} (2x^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^h = 1$$

مساوات ۱.۱۷ سے ہم اوسط فاصلہ تلاش کرتے ہیں

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{1}{2\sqrt{hx}} dx = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

جو  $\frac{h}{2}$  سے کچھ کم ہے، جیسے کہ ہمیں متوقع تھتا۔

شکل ۱.۶ میں  $\rho(x)$  کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کثافت احتمال خود لامتناہی ہو سکتی ہے جبکہ احتمال (یعنی  $\rho$  کا مکمل) لازماً متناہی (بلکہ 1 یا 1 سے کم) ہوگا۔ □

سوال ۱.۱: حصہ ۱.۳.۱ میں اشخاص کی عمروں کی تقسیم کے لیے درج ذیل کریں۔

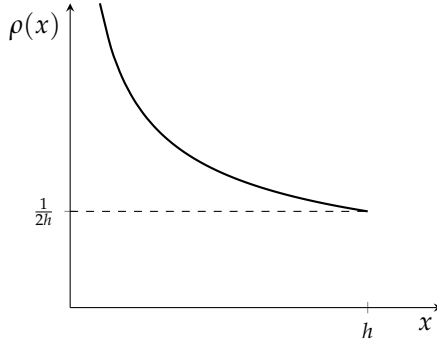
۱. اوسط کامریع  $\langle z \rangle$  اور مربوں کا اوسط  $\langle z^2 \rangle$  تلاش کریں۔

ب. ہر  $z$  کے لیے  $\Delta z$  دریافت کریں، اور مساوات ۱.۱۱ کو استعمال کر کے معیاری انحراف دریافت کریں۔

ج. حبزو-الف اور حبزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱.۱۲ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۲:

۱. مثال ۱.۱ کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف تلاش کریں۔



شکل ۱.۶: کشاف احتمال برائے مثال ۱.۱:  $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$

ب. بلاواسطہ منتخب کردہ تصویر میں، اوسط سے ایک معیاری انحراف (کے برابر فاصلہ) سے زیادہ دور،  $x$  پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: درج ذیل گاوسی تقسیم پر غور کریں، جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $\lambda$  حقیقی مثبت مستقلات ہیں۔

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

(ضرورت کے پیش آپ مکمل کسی جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔)

۱. مساوات ۱.۱۶ استعمال کرتے ہوئے  $A$  کی قیمت کا تعین کریں۔

ب. اوسط  $\langle x \rangle$ ، مربعی اوسط  $\langle x^2 \rangle$  اور معیاری انحراف  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج.  $\rho(x)$  کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

## ۱.۴ معمول زنی

ہم تنفس عمل موج کے شماراتی مفہوم (مساوات ۱.۳) پر دوبارہ غور کرتے ہیں، جس کے تحت لمحہ  $t$  پر ایک ذرے کا نقطہ  $x$  پائے جانے کی کشاف احتمال  $|\Psi(x, t)|^2$  ہوگی۔ یوں (مساوات ۱.۱۶) کے تحت  $|\Psi|^2$  کا مکمل 1 کے برابر ہوگا (چونکہ ذرہ کہیں نہ کہیں تو ضرور پایا جائے گا)۔

$$(1.20) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

اس حقیقت کے بغیر شماراتی مفہوم بے معنی ہوگا۔

البتہ، یہ شرط آپ کے لیے پریشانی کا سبب ہونی چاہیے۔ تفاعل موج کا تعین مساوات شرودنگر کرتی ہے اور  $\Psi$  پر بیرونی شرائط مسلط کرنا صرف اس صورت میں جائز ہوگا جب ان دونوں میں اختلاف نہ پایا جاتا ہو۔ مساوات ۱.۱ پر نظر ڈالنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر  $\Psi(x, t)$  حل ہو تب  $A\Psi(x, t)$  بھی حل ہوگا، جہاں  $A$  کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم نامعلوم ضربی مستقل کو یوں منتخب کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱.۲۰ مطمئن ہو۔ اس عمل کو تفاعل موج کی معمول زنی<sup>۲۳</sup> کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ تفاعل موج کی معمول زنی کریں۔ مساوات شرودنگر کے بعض حلوں کا مکمل لامتناہی ہوگا؛ ایسی صورت میں کوئی بھی ضربی مستقل اس کو 1 کے برابر نہیں کر سکتا۔ یہی کچھ مہمل حل  $\Psi = 0$  کے لیے بھی درست ہوگا۔ ایسا تفاعل موج جو ناقابل معمول زنی<sup>۲۵</sup> ہو کسی صورت ایک ذرے کو ظاہر نہیں کر سکتا، لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ طبعی طور پر پائے جانے والے حالات، مساوات شرودنگر کے مرصع مکالمہ<sup>۲۶</sup> حل ہونگے۔<sup>۲۷</sup>

یہاں رک کر غور کریں! فرض کریں لمحہ  $t = 0$  پر ایک تفاعل موج کی معمول زنی کی جاتی ہے۔ کیا وقت گزرنے کے ساتھ  $\Psi$  ارتقا پانے کے بعد بھی یہ معمول شدہ رہے گا؟ (آپ ایسا نہیں کر سکتے کہ لمحہ در لمحہ تفاعل موج کی معمول زنی کریں چونکہ ایسی صورت میں  $A$  وقت  $t$  کا تابع تفاعل عمل ہوگا تاکہ ایک مستقل، اور  $A\Psi$  مساوات شرودنگر کا حل نہیں رہے گا) خوش قسمتی سے مساوات شرودنگر کی یہ خاصیت ہے کہ یہ تفاعل موج کی معمول شدہ صورت برقرار رکھتی ہے۔ اس خاصیت کے بغیر مساوات شرودنگر اور شماریاتی مفہوم غنیر ہم آہنگ ہونگے اور کوانٹائی نظریہ بے معنی ہوگا۔

یہ ایک اہم نقطہ ہے، لہذا ہم اس کے ثبوت کو غور سے دیکھتے ہیں۔ ہم درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہیں۔

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

(دھیان رہے کہ، مساوات کے بائیں ہاتھ، مکمل صرف  $t$  کا تفاعل ہے، لہذا اس میں نے پہلے فترہ میں کل تفرق  $\frac{d}{dt}$  استعمال کیا ہے، جبکہ دائیں ہاتھ مکمل  $t$  اور  $x$  دونوں کا تفاعل ہے لہذا اس میں نے یہاں جزوی تفرق  $\partial/\partial t$  استعمال کیا ہے۔ اصول ضرب کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

اب مساوات شرودنگر کہتی ہے کہ

$$(1.23) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi$$

normalization<sup>۲۴</sup>

non-normalizable<sup>۲۵</sup>

square-integrable<sup>۲۶</sup>

<sup>۲۷</sup> ظاہر ہے کہ  $|x| \rightarrow \infty$  کی صورت میں  $\Psi(x, t)$  کو  $1/\sqrt{|x|}$  سے زیادہ تیز صفر تک پہنچنا ہوگا۔ معمول زنی صرف مخلوط عدد کے معیار کو درست کرتی ہے جبکہ اس کی ہیئت غنیر معین رہتی ہے۔ تاہم جیسے ہم جلد دیکھیں گے، موخر الذکر کی کوئی طبعی اہمیت نہیں پائی جاتی۔

ہوگا اور ساتھ ہی (مساوات ۱.۲۳ کا مخلوط جوڑی دار لیتے ہوئے)

$$(1.22) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^*$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.25) \quad \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

مساوات ۱.۲۱ میں عمل کی قیمت اب صریح معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

یاد رہے کہ قابل معمول زنی<sup>۲۸</sup> ہونے کے لئے ضروری ہے کہ  $x \rightarrow \pm \infty$  کرتے ہوئے  $\Psi(x, t)$  صفر<sup>۲۹</sup> کو پہنچتا ہو۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

لہذا مکمل (وقت کا غیر تابع) مستقل ہوگا؛ بلکہ  $t = 0$  پر معمول شدہ تفاعل موج ہمیشہ کے لئے معمول شدہ رہے گا۔

سوال ۱.۴: لمحہ  $t = 0$  پر ایک ذرہ کو درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے جہاں  $A$ ،  $a$  اور  $b$  مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

۱. تفاعل موج  $\Psi$  کی معمول زنی کریں (یعنی  $a$  اور  $b$  کی صورت میں  $A$  تلاش کریں)۔

ب. متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $\Psi(x, 0)$  ترسیم کریں۔

ج. لمحہ  $t = 0$  پر کس نقطے پر ذرہ پائے جانے کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟

د. نقطہ  $a$  کے بائیں جانب ذرہ پائے جانے کا احتمال کتنا ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق  $b = a$  اور  $b = 2a$  کی تحدیدی صورتوں میں کریں۔

ه. متغیر  $x$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

<sup>۲۸</sup>normalizable

<sup>۲۹</sup>ایک اچھا ریاضی دان آپ کو بہت سی گھمبیر مثالیں پیش کر سکتا ہے، تاہم طبیعیات کی میدان میں ایسے تفاعلات نہیں پائے جاتے؛ اور لامتناہی تفاعل موج ہر صورت صفر کو پہنچتے ہیں۔



سوال ۱.۵: درج ذیل تفاعل موج پر غور کریں جہاں  $A$ ،  $\lambda$  اور  $\omega$  مثبت حقیقی مستقلات ہیں۔

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

(ہم باب ۲ میں دیکھیں گے کہ کس طرح کا مخفی  $V^{۳۰}$  ایسا تفاعل موج پیدا کرتا ہے۔)

۱. تفاعل موج  $\Psi$  کی معمول زنی کریں۔

ب. متغیرات  $x$  اور  $x^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. متغیر  $x$  کا معیاری انحراف تلاش کریں۔ متغیر  $x$  کے لحاظ سے  $|\Psi|^2$  ترسیم کر کے اس پر نقاط  $(\langle x \rangle + \sigma)$  اور  $(\langle x \rangle - \sigma)$  کی نشاندہی کریں جس سے  $x$  کی ”پھیل“ کو  $\sigma$  سے ظاہر کرنے کی وضاحت ہو۔ ذرہ اس سمت سے باہر پائے جانے کا احتمال کتنا ہوگا؟

## ۱.۵ معیار حرکت

حال  $\Psi$  میں پائے جانے والے ذرے کے معتام  $x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (1.۲۸)$$

اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ اگر آپ ایک ہی ذرے کا معتام جاننے کے لیے بار بار پیمائش کریں تو آپ کو نتائج کی اوسط قیمت  $\int x |\Psi|^2 dx$  حاصل ہوگی۔ اس کے برعکس: پہلی پیمائش (جس کا نتیجہ بلا تعین ہے) اس قیمت پر تفاعل موج کو سوزن پر منہدم کرے گی جو پیمائش سے حاصل ہوئی ہو، اس کے بعد (اگر جلد) دوسری پیمائش کی جائے تو دوبارہ وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ حقیقت میں  $\langle x \rangle$  ان ذرات کی پیمائشوں کا اوسط ہوگا جو یکساں حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہوں۔ یوں یا تو آپ ہر پیمائش کے بعد کسی طرح اس ذرے کو دوبارہ ابتدائی حال  $\Psi$  میں لائیں گے یا آپ متعدد ذرات کے فرقہ کو ایک ہی حال  $\Psi$  میں لا کر تمام کے معتام کی پیمائش کریں گے۔ ان نتائج کا اوسط  $\langle x \rangle$  ہوگا۔ (میں اس کی تصوراتی شکل یوں پیش کرتا ہوں کہ ایک الماری میں قطار میں شیشہ کی بوتلیں کھڑی ہیں، اور ہر بوتل میں ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ تمام ذرات ایک جیسے (بوتل کے وسط کے لحاظ سے) حال  $\Psi$  میں پائے جاتے ہیں۔ ہر بوتل کے متعین ایک طالب علم کھڑا ہے جس کے ہاتھ میں ایک فیتا ہے۔ جب اشارہ دیا جائے تو تمام طلبہ اپنے اپنے ذرے کا معتام ناپتے ہیں۔ ان نتائج کا مستطیلی ترسیم  $|\Psi|^2$  کے لگ بھگ ہوگا، جبکہ ان کی اوسط قیمت تقریباً  $\langle x \rangle$  ہوگی۔ (چونکہ ہم متناہی تعداد کے ذرات پر تجربہ کر رہے ہیں لہذا یہ توقع نہیں کی جاسکتی کہ جوابات عین درست حاصل ہوں گے، لیکن

بوتلوں کی تعداد بڑھانے سے نتائج نظریاتی جوابات کے زیادہ متعریب حاصل ہوں گے۔)) مختصر، توقعاتی قیمت ذرات کے ضرورت پر کیے جانے والے تجربات کی اوسط قیمت ہوگی نہ کہ کسی ایک ذرے پر بار بار تجربات کی نتائج کی اوسط قیمت۔

چونکہ  $\Psi$  وقت اور مقام کا تابع ہے لہذا وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $\langle x \rangle$  تبدیل ہوگا۔ ہمیں اس کی سمتی رفتار جاننے میں دلچسپی ہو سکتی ہے۔ مساوات ۱.۲۵ اور ۱.۲۸ سے درج ذیل <sup>۳۲</sup> لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱.۲۹) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

مکمل بالخص <sup>۳۳</sup> کی مدد سے اس فقرے کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۰) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m} \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx$$

(میں نے یہاں  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$  استعمال کیا اور سرحدی جزو کو اس بنا پر رد کیا کہ  $(\pm)$  لامتناہی پر  $\Psi$  کی قیمت 0 ہوگی۔ دوسرے جزو پر دوبارہ مکمل بالخص لاگو کرتے ہیں۔

$$(۱.۳۱) \quad \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

اس نتیجے سے ہم کیا مطلب حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ  $x$  کی توقعاتی قیمت کی سمتی رفتار ہے نہ کہ ذرے کی سمتی رفتار۔ ابھی تک ہم جو کچھ دیکھ چکے ہیں اس سے ذرے کی سمتی رفتار دریافت نہیں کی جاسکتی۔ کوانٹائی میکانیات میں ذرے کی سمتی رفتار کا مفہوم واضح نہیں ہے۔ اگر پیمائش سے قبل ایک ذرے کا مقام بلا تعین ہو تب اس کی سمتی رفتار بھی بلا تعین ہوگی۔ ہم ایک مخصوص قیمت کا نتیجہ حاصل کرنے کے احتمال کی صرف بات کر سکتے ہیں۔ ہم  $\Psi$  جاننے ہوئے کثافت احتمال کی بناوٹ باب ۳ میں دیکھیں گے۔ اب کے لیے صرف اتنا جاننا کافی ہے کہ سمتی رفتار کی توقعاتی قیمت ذرے کے مقام کی توقعاتی قیمت کا تفرق ہوگی۔

$$(۱.۳۲) \quad \langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

<sup>۳۲</sup> چیزوں کو صاف صاف رکھنے کی خاطر میں مکمل کی حدود نہیں لکھ رہا ہوں۔  
<sup>۳۳</sup> فٹنڈہ ضرب کے تحت

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$

یوں مکمل کی علامت کے اندر، آپ حاصل ضرب میں کسی ایک جزوے تفریق اتار کر دوسرے کے ساتھ چسپاں کر سکتے ہیں؛ اس کی قیمت آپ کو منفی علامت اور اضافی سرحدی جزو کی صورت میں ادا کرنی ہوگی۔

معادلات ۱.۳۱ ہمیں  $\Psi$  سے بلاواسطہ  $\langle v \rangle$  دیتی ہے۔

روایتی طور پر ہم سمتی رفتار کی بجائے معیار حرکت  $p = mv$  کے ساتھ کام کرتے ہیں۔

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx \quad (1.33)$$

میں  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  کو زیادہ معنی خیز انداز میں پیش کرتا ہوں۔

$$\langle x \rangle = \int \Psi^*(x) \Psi dx \quad (1.34)$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx \quad (1.35)$$

کوانٹائی میکینکس میں معیار حرکت کو عامل  $x^{35}$  ”بیان“ کرتا ہے اور معیار حرکت کو عامل  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  ”بیان“ کرتا  $^{36}$  ہے۔ کسی بھی توقعاتی قیمت کے حصول کی خاطر ہم موزوں عامل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے بیچ لکھ کر عمل لیتے ہیں۔

یہ سب بہت اچھا ہے لیکن دیگر متعارفوں کا کیا ہوگا؟ حقیقت یہ ہے کہ تمام کلاسیکی متغیرات کو مقام اور معیار حرکت کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کو

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

اور زاویائی معیار حرکت کو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

لکھا جاسکتا ہے (جہاں ایک بُندی حرکت کے لئے زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا)۔ کسی بھی مقدار، مثلاً  $Q(x, p)$ ، کی توقعاتی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ہر  $p$  کی جگہ  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  پُر کر کے حاصل عامل کو  $\Psi^*$  اور  $\Psi$  کے بیچ لکھ کر درج ذیل عمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx \quad (1.36)$$

مثال کے طور پر حرکت کی توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx \quad (1.37)$$

momentum<sup>3۴</sup>  
operator<sup>3۵</sup>

<sup>3۶</sup> ایک ”عامل“ آپ کو ہدایت دیتی ہے کہ عامل کے بعد آنے والے تعادل کے ساتھ آپ کو کیا کرنا ہوگا۔ عامل مقام آپ سے کہتا ہے کہ آپ  $x$  سے ضرب دیں۔ عامل معیار حرکت کہتا ہے کہ  $x$  کے لحاظ سے تفرق لیں (اور نتیجہ کو  $-i\hbar$  سے ضرب دیں)۔ اس کتاب میں تمام عاملین تفرقات  $(\partial^2 / \partial x \partial y, d^2 / dt^2, d / dt, x^2, i, 2, \dots)$  وغیرہ (یا ضرب کا  $(2, i, x^2, \dots)$  وغیرہ) اور یا ان دونوں کے ملاپ ہوں گے۔

حال  $\Psi$  میں ایک ذرے کی کسی بھی حرکی متدار کی توقعاتی قیمت مساوات ۱.۳۶ سے حاصل ہوگی۔ مساوات ۱.۳۳ اور ۱.۳۵ اس کی دو مخصوص صورتیں ہیں۔ میں نے کوشش کی ہے کہ بوہر کی شارپاتی تشریح کو مد نظر رکھتے ہوئے، مساوات ۱.۳۶ قابل قبول نظر آئے، اگرچہ حقیقتاً یہ (کلاسیکی میکانیات کے لحاظ سے) کام کرنے کا اتنا نیا انداز ہے کہ بہتر ہوگا آپ اس کے استعمال کی مشق کریں؛ ہم (باب ۳ میں) اس کو زیادہ مضبوط نظریاتی بنیادوں پر قائم کریں گے۔ فی الحال آپ اس کو ایک مسئلہ تصور کر سکتے ہیں۔

سوال ۱.۶: آپ کیوں مساوات ۱.۲۹ کے وسطی فقرے پر مکمل بالخصوص کرتے ہوئے، وقتی تفرق کو  $x$  کے اوپر سے گزار کر، یہ جاننے ہوئے کہ  $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$  ہے، فیصلہ نہیں کر سکتے کہ  $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$  ہوگا؟

سوال ۱.۷:  $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$  حل کریں۔ جواب:

$$(۱.۳۸) \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

مساوات ۱.۳۲ (مساوات ۱.۳۳ کا پہلا حصہ) اور ۱.۳۸ مسئلہ ابھر نفلے کی مخصوص صورتیں ہیں، جو کہتا ہے کہ توقعاتی قیمتیں کلاسیکی قواعد کو مطمئن کرتی ہیں۔

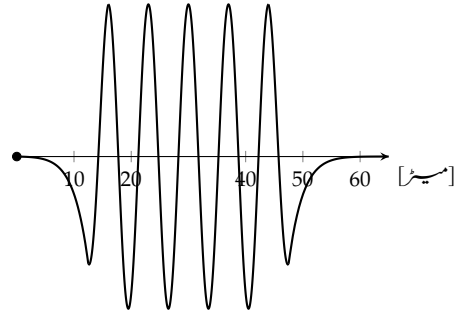
سوال ۱.۸: فرض کریں آپ مخفی توانائی کے ساتھ ایک مستقل جمع کرتے ہیں (مستقل سے میری مراد ایسا مستقل ہے جو  $x$  اور  $t$  کا تابع نہ ہو)۔ کلاسیکی میکانیات میں مخفی توانائی کے ساتھ مستقل جمع کرنا کسی بھی چیز پر اثر انداز نہیں ہوگا، تاہم کوانٹائی میکانیات میں اس کے اثر پر غور کرنا باقی ہے۔ یہ دکھائیں کہ تفاعل موج کو اب  $e^{-iV_t/\hbar}$  ضرب کرتا ہے، جو وقت کا تابع جزو ہے۔ اس کا کسی حرکی متغیر کی توقعاتی قیمت پر کیا اثر ہوگا؟

## ۱.۶ اصول عدم یقینیت

فرض کریں آپ ایک لمبی رسی کا پایاں سر اوپر نیچے ہلا کر موج پیدا کرتے ہیں (شکل ۱.۷)۔ اب اگر پوچھا جائے کہ یہ موج عین کہاں پائی جاتی ہے، تو آپ غالباً اس کا جواب دینے سے قاصر ہوں گے۔ موج کسی ایک جگہ نہیں بلکہ 60 میٹر لمبائی پر پائی جاتی ہے۔ اس کی بجائے اگر طول موج <sup>۳۸</sup> پوچھا جائے تو آپ اس کا معقول جواب دے سکتے ہیں: اس کا طول موج تقریباً 7 میٹر ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ رسی کو ایک جھنکا دیں تو ایک نوکیلی موج پیدا ہوگی (شکل ۱.۸)۔ یہ موج دوری نہیں ہے لہذا اس کے طول موج کی بات کرنا بے معنی ہوگا۔ اب آپ طول موج بتانے سے قاصر ہوں گے جبکہ موج کا مقام بتانا ممکن ہوگا۔ اول الذکر میں موج کا مقام پوچھنا بے معنی سوال ہوگا جبکہ موخر الذکر میں طول موج جاننا بے معنی ہوگا۔ ہم ان دو صورتوں کے بیچ کے حالات بھی پیدا کر سکتے ہیں جن میں مقام موج اور طول موج خاصی حد تک قابل تعین ہوں۔ تاہم ان صورتوں میں طول موج بہتر سے بہتر جانتے ہوئے مقام موج افضل بتانا ممکن ہوگا یا پھر مقام بہتر سے بہتر جانتے ہوئے طول موج قلیل قابل تعین ہوگا۔ فوراً یہ تجزیہ کا ایک مسئلہ ان حقائق کو مضبوط بنیادوں پر کھٹا کرتا ہے۔ فی الحال میں صرف کئی دلائل پیش کرنا چاہتا ہوں۔



شکل ۱.۸: اس موج کا مقام اچھی طرح معین جبکہ طول موج بد معین ہے۔



شکل ۱.۹: اس موج کا طول موج اچھی طرح معین جبکہ مقام بد معین ہے۔

یہ حقائق ہر موجی مظہر، بشمول کوانٹائی میکانی موج تفاعل، کے لیے درست ہیں۔ اب ایک ذرے کے  $\Psi$  کے طول موج اور معیار حرکت کا تعلق کلیہ ڈی بروگلی<sup>۳۹</sup>:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.39)$$

پیش<sup>۴۰</sup> کرتا ہے۔ یوں طول موج میں وسعت معیار حرکت میں وسعت کے مترادف ہے اور اب ہمارا عمومی مشاہدہ یہ ہو گا کہ کسی ذرے کا مقام ٹھیک ٹھیک جانتے ہوئے ہم اس کا معیار حرکت درست نہیں جان سکتے۔ اس کو ریاضیاتی روپ میں لکھتے ہیں:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.40)$$

جہاں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  بالترتیب  $x$  اور  $p$  کے معیاری انحراف ہیں۔ یہ ہیزنبرگ کا مشہور اصول عدم یقینیت<sup>۴۱</sup> ہے۔ (اس کا ثبوت باب ۳ میں پیش کیا جائے گا۔ میں نے اس کا ذکر یہاں اس لئے کیا کہ آپ باب ۲ کی مثالوں میں اس کا استعمال سیکھ سکیں۔)

اس بات کی تسلی کر لیں کہ آپ اصول عدم یقینیت کا مطلب سمجھ گئے ہیں۔ مقام کی پیمائش کے ٹھیک ٹھیک نتائج کی طرح معیار حرکت کی پیمائش بھی ٹھیک ٹھیک نتائج دے گی۔ یہاں ”وسعت“ سے مراد یہ ہے کہ یکساں تیار کردہ نظاموں پر پیمائشیں بالکل ایک جیسے نتائج نہیں دیں گی۔ آپ چاہیں تو ( $\Psi$  کو سوزنی بنا کر)

<sup>۳۹</sup> De Broglie formula

<sup>۴۰</sup> میں اس کا ثبوت جلد پیش کروں گا۔ بعض مصنفین کلیہ ڈی بروگلی کو ایک مسئلہ لے کر عامل  $\frac{\hbar}{i} \partial / \partial x$  سے معیار حرکت کی شراکت اخذ کرتے ہیں۔ اگرچہ یہ تصور زیادہ خوش اسلوب ہے، تاہم میں اس راستے پر نہیں چلوں گا چونکہ اس میں پیچیدہ ریاضی درکار ہے جو اصل گفتگو سے توجہ ہٹاتی ہے۔

<sup>۴۱</sup> uncertainty principle

ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر مقام کی پیمائشیں ایک دوسرے سے متضاد نتائج دیں لیکن ایسی صورت میں معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ اس طرح آپ چاہیں تو ( $\Psi$ ) کو ایک لمبی سائن نموج بنا کر ایسا حال تیار کر سکتے ہیں جس پر معیار حرکت کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے کے متضاد ہوں گے لیکن ایسی صورت میں ذرے کے مقام کی پیمائشوں کے نتائج ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوں گے۔ آپ ایسا حال بھی تیار کر سکتے ہیں جس میں نہ مقام نہ معیار حرکت ٹھیک سے معلوم ہو۔ مساوات ۱۴۰ اور حقیقت ایک عدم مساوات ہے جس میں  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی جسامت کی کوئی حد مقرر نہیں۔ آپ  $\Psi$  کو لمبی ٹیڑھی میڑھی لکیر بنا کر، جس میں بہت سارے پیچ و خم ہوں اور جس میں کوئی توازن پایا جاتا ہو،  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں جتنی چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

سوال ۱.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے درج ذیل حال میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar) + it]}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

۱. مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب. کس مخفی توانائی تفاعل  $V(x)$  کے لیے  $\Psi$  مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے؟

ج.  $x$ ،  $x^2$ ،  $p$  اور  $p^2$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

د.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  کی قیمتیں تلاش کریں۔ کیا ان کا حاصل ضرب اصول عدم یقینیت پر پورا اترتا ہے؟

### اضافی سوالات برائے باب ۱

سوال ۱.۱۰: مستقل  $\pi$  کے ہندسی توسیع کے اولین ۲۵ ہندسوں (3, 1, 4, 1, 5, 9, ۰۰۰) پر غور کریں۔

۱. اس گروہ سے بلا منصوب ایک ہندسہ منتخب کیا جاتا ہے۔ صفر تا نو ہندسے کے انتخاب کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کس ہندسے کے انتخاب کا احتمال سب سے زیادہ ہوگا؟ وسطانیہ ہندسہ کونسا ہوگا؟ اوسط قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس تقسیم کا معیاری انحراف کیا ہوگا؟

سوال ۱.۱۱: گاڑی کے رفتار پیمائی حسراب سوئی آزادانہ طور پر حرکت کرتی ہے۔ ہر جھٹکے کے بعد یہ اطراف سے ٹکرا کر 0 اور  $\pi$  زاویوں کے بیچ آکر رک جاتی ہے۔

۱. کثافت احتمال  $\rho(\theta)$  کیا ہوگی؟ اشارہ: زاویہ  $\theta$  اور  $(\theta + d\theta)$  کے بیچ سوئی کے رکنے کا احتمال  $\rho(\theta) d\theta$  ہوگا۔ متغیر  $\theta$  کے لحاظ سے  $\rho(\theta)$  کو وقفہ  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  ترسیم کریں (ظاہر ہے اس وقفے کا کچھ حصہ درکار نہیں ہے، لہذا  $\rho$  یہاں صفر ہوگا)۔ تصدیق کریں کہ کل احتمال 1 ہے۔

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle \theta \rangle$ ،  $\langle \theta^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔

ج. اسی طرح  $\langle \sin \theta \rangle$ ،  $\langle \cos \theta \rangle$  اور  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  تلاش کریں۔

سوال ۱.۱۲: ہم گزشتہ سوال کے رفتار پیماس کی سوئی پر دوبارہ بات کرتے ہیں تاہم اس مرتبہ ہم سوئی کے سر کے  $x$  محدود (یعنی افقی) لکیر پر سوئی کے سائے میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱.  $\rho(x)$  کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟  $x$  کے لحاظ سے  $\rho(x)$  کو  $-2r$  تا  $+2r$  ترسیم کریں، جہاں  $r$  سوئی کی لمبائی ہے۔ ثابت کریں کہ کل احتمال 1 ہے۔ اشارہ:  $x$  اور  $(x + dx)$  کے بیچ  $\psi$  کی موجودگی کا احتمال  $\rho(x) dx$  ہے۔ آپ (سوال ۱.۱۱ سے) کو معلوم ہے کہ کسی مخصوص سمت میں  $\theta$  کا احتمال کیا ہے؛ سوال یہ ہے کہ  $d\theta$  کا مطابقتی  $dx$  کیا ہوگا؟

ب. اس تقسیم کے لیے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma$  تلاش کریں۔ آپ ان قیمتوں کو سوال ۱.۱۱ کے جزو-ج سے کس طرح حاصل کر سکتے ہیں؟

سوال ۱.۱۳: ایک کاغذ پر کچھ افقی لکیریں کھینچی جاتی ہیں جن کے درمیان فاصلہ  $L$  رکھا جاتا ہے۔ کچھ بلندی سے اس کاغذ پر  $L$  لمبائی کی ایک سوئی گرائی جاتی ہے۔ کیا احتمال ہوگا کہ یہ سوئی کسی لکیر کو کاٹ کر صفحے پر آن ٹھہرے۔ اشارہ: سوال ۱.۱۲ سے رجوع کریں۔

سوال ۱.۱۴: لمحہ  $t$  پر ( $a < x < b$ ) کے بیچ ایک ذرہ پائے جانے کا احتمال  $P_{ab}(t)$  ہے۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

جہاں

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ہے۔  $J(x, t)$  کی اکائی کیا ہوگی؟ تبصرہ: چونکہ  $J$  آپ کو بتاتا ہے کہ نقطہ  $x$  پر احتمال کس رفتار سے ”گزرتا“ ہے، لہذا  $J$  کو **روا احتمال**<sup>۲۲</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $P_{ab}(t)$  بڑھ رہا ہو تب خطے کے ایک سر میں احتمال کی آمد خطے کے دوسرے سرے احتمال کے نکاس سے زیادہ ہوگی۔

ب. سوال ۱.۹ میں تعامل موج کا احتمال  $\rho$  کیا ہوگا؟ (یہ بہت عمدہ مثال نہیں ہے؛ بہتر مثال جلد پیش کی جائے گی۔)

سوال ۱.۱۵: ایک غیر مستحکم ذرہ<sup>۲۳</sup> فرض کریں، جس کا از خود ٹکڑے ٹکڑے ہونے کا ”عرصہ حیات“  $\tau$  ہے۔ ایسی صورت میں ذرے کے کہیں پائے جانے کا کل احتمال مستقل نہیں ہوگا، بلکہ وقت کے ساتھ (مکث طور پر) قوت نہائی گھٹے گی۔

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = e^{-t/\tau}$$

<sup>۲۲</sup> probability current  
<sup>۲۳</sup> unstable particle

اس نتیجے کو (خام طریقے) سے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۱.۲۳ میں ہم نے کہے بغیر فرض کیا کہ (مخفی توانائی)  $V$  ایک حقیقی مقدار ہے۔ یہ ایک معقول بات ہے، تاہم اس سے مساوات ۱.۲۷ میں دی گئی ”احتمال کی بقا“ پیدا ہوتی ہے۔ آئیں  $V$  کو مخلوط تصور کر کے دیکھیں:

$$V = V_0 - i\Gamma$$

جہاں  $V_0$  حقیقی مخفی توانائی اور  $\Gamma$  مثبت حقیقی مستقل ہے۔

۱. یہ دکھائیں کہ اب (مساوات ۱.۲۷ کی جگہ) ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar} P$$

ب. اس مساوات میں  $P(t)$  تلاش کریں، اور ذرے کا عرصہ حیات  $\Gamma$  کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۱.۱۶: مساوات شرودنگر کے کسی بھی دو عدد (متبادل معمول زنی) حل  $\Psi_1$ ،  $\Psi_2$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = 0$$

سوال ۱.۱۷: ایک ذرے کو (لحظہ  $t = 0$  پر) درج ذیل تفاعل موج ظاہر کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

۱. معمول زنی مستقل  $A$  تلاش کریں۔

ب.  $x$  کی توقعاتی قیمت (لحظہ  $t = 0$  پر) تلاش کریں۔

ج. لحظہ  $t = 0$  پر  $p$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ یاد رہے، آپ اے  $P = m d\langle x \rangle / dt$  سے حاصل نہیں کر سکتے۔ ایسا کیوں ہے؟

د.  $x^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

ه.  $p^2$  کی توقعاتی قیمت دریافت کریں۔

و.  $x(\sigma_x)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ز.  $p(\sigma_p)$  میں عدم یقینیت دریافت کریں۔

ح. تصدیق کریں کہ آپ کے نتائج اصول عدم یقینیت کے عین مطابق ہیں۔



سوال ۱.۱۸: عمومی طور پر کوانٹائی میکانیات اس وقت لاگو ہوگی جب ذرے کا ذی بروگلی طول موج ( $\hbar/p$ ) نظام کی جسامت ( $d$ ) سے زیادہ ہو۔ درجہ  $T$  (کیلون) پر حرارتی توازن میں ایک ذرے کی اوسط حرکتی توانائی درج ذیل ہوگی

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل ہے، لہذا ذی بروگلی طول موج درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_B T}}$$

ہمیں معلوم کرنا ہے کہ کونسا نظام کوانٹائی میکانیات اور کونسا کلاسیکی میکانیات سے حل ہوگا۔

ا. ٹھوس اجسام: فاصلہ حبال ٹھوس اجسام میں تقریباً  $d = 0.3 \text{ nm}$  ہوتا ہے۔ وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس پر ٹھوس جسم میں آزاد الیکٹران<sup>۳۵</sup> کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ نیز وہ درجہ حرارت تلاش کریں جس سے کم درجہ حرارت پر جوہری سرائیڈ کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ (سوڈیم<sup>۳۶</sup> کی مثال لیں)۔ سبق: ٹھوس اجسام میں آزاد الیکٹران ہر صورت کوانٹائی میکانی ہوں گے، جبکہ جوہری سرائیڈ (تقریباً) کبھی بھی کوانٹائی میکانی نہیں ہوں گے۔ یہی کچھ مائع کے لیے بھی درست ہے (جہاں جوہروں کے بیچ فاصلہ اتنا ہی ہوگا) ماسوائے ہیلیم<sup>۳۷</sup> کے جو 4 K سے کم درجہ حرارت پر ہو۔

ب. گیس: میکانی دباؤ  $P$  پر کن درجہ حرارت پر کامل گیس کے جوہر کوانٹائی میکانی ہوں گے۔ اشارہ: مثالی گیس قانون ( $PV = Nk_B T$ ) استعمال کر کے جوہروں کے درمیان فاصلہ دریافت کریں۔ جواب:  $T < (1/k_B)(\hbar^2/3m)^{3/5} P^{2/5}$ ؛ ظاہر ہے ہم  $m$  کو چھوٹے سے چھوٹا اور  $P$  کو اتنا زیادہ چاہیں گے (کہ گیس کارویہ کوانٹائی ہو)۔ زمینی ہوائی دباؤ پر، ہیلیم کے اعداد استعمال کر کے نتیجہ حاصل کریں۔ کیا ہیرونی<sup>۳۸</sup> میں (جہاں درجہ حرارت 3 K اور جوہروں کے بیچ فاصلہ تقریباً 1 cm ہے) ہائیڈروجن کوانٹائی میکانی ہوگا؟

<sup>۳۵</sup> ٹھوس اجسام میں اندرونی الیکٹران کسی مخصوص مرکزے سے جڑے ہوتے ہیں، اور ان کے لئے موزوں فاصلہ، جوہر کا رداس ہوگا۔ اس کے برعکس، سب سے باہر کے الیکٹران کہیں نہیں جڑے ہوتے، اور ان کے لئے فاصلہ حبال کو موزوں فاصلہ لیا جاسکتا ہے۔ یہ معاملہ سب سے باہر الیکٹران کے لئے ہے۔

<sup>۳۶</sup> sodium  
<sup>۳۷</sup> helium  
<sup>۳۸</sup> outer space



## باب ۲

# غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر

## ۲.۱ ساکن حالات

باب اول میں ہم نے تفاعل موج پر بات کی جہاں اس کا استعمال کرتے ہوئے دلچسپی کے مختلف متعادروں کا حساب کیا گیا۔ اب وقت آن پہنچا ہے کہ ہم کسی مخصوص مخفیہ  $V(x, t)$  کی لئے مساوات شروڈنگر:

$$(۲.۱) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

حل کرتے ہوئے  $\Psi(x, t)$  حاصل کرنا سیکھیں۔ اس باب میں (بلکہ کتاب کے بیشتر حصے میں) ہم فرض کرتے ہیں کہ  $V$  وقت  $t$  کا تابع نہیں ہے۔ ایسی صورت میں مساوات شروڈنگر کو علیحدگی متغیرات<sup>۲</sup> کے طریقے سے حل کیا جاسکتا ہے، جو ماہرین طبیعیات کا پسندیدہ طریقہ ہے۔ ہم ایسے حل تلاش کرتے ہیں جنہیں حاصل ضرب:

$$(۲.۲) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں  $\psi$  صرف  $x$  اور  $\varphi$  صرف  $t$  کا تفاعل ہے۔ بظاہر، مساوات شروڈنگر کے کسی حل پر ایسی شرط مسلط کرنا درست نظر نہیں آتا ہے، تاہم حقیقت میں یوں حاصل کردہ حل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مزید (جیسا کہ علیحدگی متغیرات کیلئے عموماً کیا جاتا ہے) ہم علیحدگی متغیرات سے

۱ بار بار ”مخفی تو اتائی تفاعل“ کہنا انسان کو تھکا دیتا ہے، لہذا لوگ  $V$  کو صرف ”مخفیہ“ پکارتے ہیں، اگرچہ ایسا کرنے سے برقی مخفیہ کے ساتھ عملی پیدا ہو سکتی ہے جو دراصل فی اکائی بار مخفی تو اتائی ہوتی ہے۔  
separation of variables<sup>۲</sup>

باب ۲. غیر تابیع وقت مساوات شرودنگر

حاصل شدہ حلوں کو یوں آپس میں جوڑ سکتے ہیں کہ ان سے عمومی حل حاصل کرنا ممکن ہو۔ متابل علیحدگی حلوں کیلئے

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \varphi$$

ہوگا جو سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ ان کی مدد سے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$i\hbar \psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi + V \psi \varphi$$

دونوں اطراف کو  $\varphi \psi$  سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(۲.۳) \quad i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V$$

اب بایاں تفاعل صرف  $t$  کا تابع ہے جبکہ دایاں تفاعل صرف  $x$  کا تابع<sup>۳</sup> ہے۔ یاد رہے اگر  $V$  خود  $x$  اور  $t$  دونوں پر منحصر ہو تب ایسا نہیں ہوگا۔ صرف  $t$  تبدیل ہونے سے دایاں تفاعل کسی صورت تبدیل نہیں ہو سکتا ہے جبکہ بایاں اور دایاں تفاعل لازمی طور پر ایک دوسرے کے برابر ہیں، لہذا  $t$  تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ اسی طرح صرف  $x$  تبدیل کرنے سے بایاں تفاعل تبدیل نہیں ہو سکتا ہے اور چونکہ دونوں اطراف لازماً ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا  $x$  تبدیل کرنے سے دایاں تفاعل بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں اطراف ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ (یہاں تسلی کر لیں کہ آپ کو یہ دلائل سمجھ آ گئے ہیں۔) اس مستقل کو ہم علیحدگی مستقل<sup>۴</sup> کہتے ہیں جس کو ہم  $E$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۳ کو

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E$$

$$(۲.۴) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad \text{یا}$$

اور

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V = E$$

$$(۲.۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi \quad \text{یا}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ علیحدگی متغیرات نے ایک جزوی تفرقی مساوات کو دوسادہ تفرقی مساوات (مساوات ۲.۴ اور ۲.۵) میں علیحدہ کر دیا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۲.۴) کو حل کرنا بہت آسان ہے:

<sup>۳</sup> دھیان رہے کہ اگر  $V$  خود  $x$  کے ساتھ ساتھ  $t$  کا بھی تفاعل ہو تا تب ایسا ممکن نہ ہوتا۔  
separation constant

دونوں اطراف کو  $dt$  سے ضرب دیتے ہوئے اس کا مکمل لیں۔ یوں عمومی حل  $Ce^{-iEt/\hbar}$  حاصل ہوگا۔ چونکہ ہم حاصل ضرب  $\psi\phi$  میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا ہم مستقل  $C$  کو  $\psi$  میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات ۲.۴ کا حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶) \quad \phi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

دوسری (مساوات ۲.۵) کو غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر<sup>۵</sup> کہتے ہیں۔ مخفی توانائی  $V$  کو پوری طرح جانے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

اس باب کے باقی حصے میں ہم مختلف سادہ مخفی توانائیوں کیلئے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر حل کریں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے آپ پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدگی متغیرات میں ایسی کیا خاص بات ہے؟ مگر حال تابع وقت مساوات شروڈنگر کے زیادہ تر حل  $\psi(x)\phi(t)$  کی صورت میں نہیں لکھے جاسکتے۔ میں اس کے تین جوابات دیتا ہوں۔ ان میں سے دو طبعی اور ایک ریاضیاتی ہوگا۔

(1) یہ ساکن حالات<sup>۶</sup> ہیں۔ اگرچہ تعامل موج خود:

$$(۲.۷) \quad \Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

وقت  $t$  کا تابع ہے لیکن کشاف احتمال:

$$(۲.۸) \quad |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^*e^{+iEt/\hbar}\psi e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x)|^2$$

وقت کا تابع نہیں ہے؛ تابعیت وقت مساوات میں سے ختم ہو جاتی ہے۔ یہی کچھ کسی بھی حرکت متغیر کی توقعاتی قیمت کے حساب کرنے میں ہوگا۔ مساوات ۱.۳۶ تخفیف کے بعد درج ذیل صورت اختیار کر لے گی۔

$$(۲.۹) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^* Q \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

ہر توقعاتی قیمت وقت میں مستقل ہوگی؛ ہم  $\phi(t)$  کو نکال کر  $\Psi$  کی جگہ  $\psi$  استعمال کر کے وہی نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات  $\psi$  کو ہی تعامل موج پکارا جاتا ہے، لیکن ایسا کرنا حقیقتاً غلط ہے جس سے مسائل پیدا ہو سکتے ہیں۔ ضروری ہے کہ آپ یاد رکھیں کہ اصل تعامل موج ہر صورت میں تابع وقت ہوگا۔ بالخصوص  $\langle x \rangle$  مستقل ہوگا، لہذا (مساوات ۱.۳۳ کے تحت)  $\langle p \rangle = 0$  ہوگا۔ ساکن حال میں کبھی بھی کچھ نہیں ہوتا۔

(2) یہ غیر مبہم کل توانائی سے متعلق حالات ہوں گے۔ کلاسیکی میکانیات میں کل توانائی (حرکتی جمع مخفی) کو ہمیلٹن<sup>۸</sup> کہتے ہیں جس کو  $H$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(۲.۱۰) \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

time-independent Schrodinger align<sup>۵</sup>  
stationary states<sup>۶</sup>

عوامل معمولی حل کے لئے لازم ہے کہ  $E$  حقیقی ہو (موال ۲.۱-۱۰ دیکھیں)۔  
Hamiltonian<sup>۸</sup>

باب ۲. غیر تابع وقت مساوات شرودنگر

اس کا مطابقتی ہیملٹنی عامل، ضابطے کے تحت  $p$  کو  $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$  سے تبدیل کر کے  $(p \rightarrow (\hbar/i)(\partial/\partial x))$ ، درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۱) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

یوں غیر تابع وقت مساوات شرودنگر ۲.۵ درج ذیل روپ اختیار کر لے گی

$$(۲.۱۲) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جس کے کل توانائی کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۳) \quad \langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H} \psi dx = E \int |\psi|^2 dx = E \int |\Psi|^2 dx = E$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\Psi$  کی معمول زنی،  $\psi$  کی معمول زنی کے مترادف ہے۔ مزید

$$\hat{H}^2 \psi = \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E(\hat{H}\psi) = E^2 \psi$$

کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi dx = E^2 \int |\psi|^2 dx = E^2$$

یوں  $H$  کی تغیریت درج ذیل ہوگی۔

$$(۲.۱۴) \quad \sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0$$

یاد رہے کہ  $\sigma = 0$  کی صورت میں نمونے کے تمام ارکان کی قیمت ایک جیسی ہوگی (تقسیم کی توسیع صفر ہو گئی)۔ نتیجتاً بل علیحدگی حل کی ایک خاصیت یہ ہے کہ کل توانائی کی ہر پیمائش یقیناً قیمت  $E$  دے گی۔ (اسی بنا پر ہم نے علیحدگی مستقل کو  $E$  سے ظاہر کیا تھا۔)

(3) عمومی حل قابل علیحدگی حلوں کا غلط جوڑا ہوگا۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، غیر تابع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۵) لامتناہی تعداد کے حل  $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$  دے گی جہاں ہر ایک حل کے ساتھ ایک علیحدگی مستقل  $(E_1, E_2, E_3, \dots)$  منسلک ہوگا لہذا ہر اجازتی توانائی کا ایک منفرد تعامل موج پایا جائے گا۔

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}, \quad \Psi_2(x, t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \dots$$

<sup>۹</sup> جہاں غلط فہمی پیدا ہونے کی گنجائش ہو وہاں میں عامل پر ٹوپی (۰) کا نشان ڈال کر اس کو اس تغیر پذیر تغیر سے علیحدہ رکھوں گا جس کو یہ ظاہر کرتا ہو۔

linear combination\*  
allowed energy"

اب (جیسا کہ آپ خود تصدیق کر سکتے ہیں) تابع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۱) کی ایک خاصیت یہ ہے کہ اس کے حلوں کا ہر خطی جوڑ<sup>۱۲</sup> خود ایک حل ہوتا ہے۔ ایک مرتبہ قابل علیحدگی حل تلاش کرنے کے بعد ہم زیادہ عمومی حل درج ذیل روپ میں تیار کر سکتے ہیں۔

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (2.15)$$

حقیقتاً تابع وقت مساوات شرودنگر کا ہر حل درج بالا روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں وہ مخصوص مستقل  $(c_1, c_2, \dots)$  تلاش کرنے ہوں گے جن کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا حل (مساوات ۲.۱۵) ابتدائی شرائط پوری کرتا ہو۔ آپ آنے والے حصوں میں دیکھیں گے کہ ہم کس طرح یہ سب کچھ کرتے ہیں۔ باب ۳ میں ہم اس کو زیادہ مضبوط بنیادوں پر کھڑا کر پائیں گے۔ بنیادی نقطہ یہ ہے کہ ایک مرتبہ غیر تابع وقت مساوات شرودنگر حل کرنے کے بعد آپ کے مسائل ختم ہو جاتے ہیں۔ یہاں سے تابع وقت مساوات شرودنگر کا عمومی حل حاصل کرنا آسان کام ہے۔

گزشتہ چار صفحات میں بہت کچھ کہا جا چکا ہے۔ میں ان کو مختصراً اور مختلف نقطہ نظر سے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔ میں آپ کے سامنے ایک عمومی مسئلہ رکھتا ہوں: آپ کو (غیر تابع وقت) مخفیہ  $V(x)$  اور ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  دیے گئے ہوں گے۔ آپ کو مستقبل کے تمام  $t$  کیلئے  $\Psi(x, t)$  تلاش کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ تابع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۱) حل کریں گے۔ پہلا قدم<sup>۱۳</sup> یہ ہوگا کہ آپ غیر تابع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۵) حل کر کے لامتناہی تعداد کے حلوں کا سلسلہ  $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots)$  حاصل کریں گے جہاں ہر ایک کی منفرد توانائی  $(E_1, E_2, E_3, \dots)$  ہو گی۔ تفاعل  $\Psi(x, 0)$  تیار کرنے کی خاطر آپ ان حلوں کا خطی جوڑ لیں گے۔

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad (2.16)$$

کمال کی بات یہ ہے کہ کسی بھی ابتدائی حال کے لئے آپ ہر صورت میں مستقل  $c_1, c_2, c_3, \dots$  دریافت کر پائیں گے۔ تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  تیار کرنے کی خاطر آپ ہر جزو کے ساتھ مختص تابعیت وقت  $e^{-iE_n t / \hbar}$  چسپاں کریں گے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t) \quad (2.17)$$

<sup>۱۲</sup>تفاعلات  $f_1(z), f_2(z)$ ، وغیرہ کے خطی جوڑے مساوی درج ذیل روپ کا فترہ ہے جہاں  $c_1, c_2$ ، وغیرہ کوئی بھی (مخلوط) مستقل ہو سکتے ہیں۔

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \dots$$

<sup>۱۳</sup>بعض اوقات آپ تابع وقت مساوات شرودنگر کو بغیر علیحدگی متغیرات حل کر لیتے ہیں (سوال ۲.۴۹ اور سوال ۲.۵۰ دیکھیں)۔ تاہم ایسی صورتیں بہت کم پائی جاتی ہیں۔

چونکہ متابل علیحدگی حل

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۲.۱۸)$$

کے تمام احتمال اور توقعاتی قیمتیں غیر تابع وقت ہوں گی لہذا یہ خود ساکن حالات ہوں گے، تاہم عمومی حل (مساوات ۲.۱۷) یہ خاصیت نہیں رکھتا؛ انفرادی ساکن حالات کی توانائیوں کے ایک دوسرے سے مختلف ہونے کی بنا پر  $|\Psi|^2$  کا حساب کرتے ہوئے قوت نہائی ایک دوسرے کو حذف نہیں کرتے۔

مثال ۲.۱: فرض کریں ایک ذرہ کے ابتدائی حال کو دو ساکن حالات کے خطی جوڑ سے ظاہر کیا گیا ہے:

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

(چیزوں کو سادہ رکھنے کی خاطر میں فرض کرتا ہوں کہ مستقل  $c_n$  اور حالات  $\psi_n(x)$  حقیقی ہیں۔) مستقبل وقت  $t$  کیلئے تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  کیا ہوگا؟ کثافت احتمال تلاش کریں اور ذرے کی حرکت بیان کریں۔

حل: اس کا پہلا حصہ آسان ہے

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t / \hbar}$$

جہاں  $E_1$  اور  $E_2$  بالترتیب تفاعل  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کی مطابقتی توانائیاں ہیں۔ یوں  $|\Psi|^2$  درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \left( c_1 \psi_1 e^{iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2 e^{iE_2 t / \hbar} \right) \left( c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t / \hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t / \hbar} \right) \\ &= c_1^2 \psi_1^2 + c_2^2 \psi_2^2 + 2c_1 c_2 \psi_1 \psi_2 \cos[(E_2 - E_1)t / \hbar] \end{aligned}$$

(میں نے نتیجہ کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر کلیہ یولر  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  استعمال کیا<sup>۱۴</sup>)۔ ظاہر ہے کہ کثافت احتمال زاویائی تعدد  $(\frac{E_2 - E_1}{\hbar})$  کے ساتھ سائن نار تفاعل پذیر ہے لہذا یہ ہرگز ساکن حال نہیں ہوگا۔ لیکن دھیان رہے کہ (ایک دوسرے سے مختلف) توانائیوں کے تفاعل کے خطی جوڑنے سے حرکت پیدا کی ہے۔ □

سوال ۲.۱: درج ذیل تین مسائل کا ثبوت پیش کریں۔

۱. متابل علیحدگی حلوں کے لئے علیحدگی مستقل  $E$  لازماً حقیقی ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۲.۷ میں  $E$  کو  $E_0 + i\Gamma$  لکھ کر (جہاں  $E$  اور  $\Gamma$  حقیقی ہیں)، دکھائیں کہ تمام  $t$  کے لئے مساوات ۲.۱۰ اس صورت کارآمد ہوگا جب  $\Gamma$  صفر ہو۔

ب. غیر تابع وقت تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  (جبکہ تفاعل موج  $\psi(x)$  ہر موقع پر حقیقی لیا جاسکتا ہے) لازماً مخلوط ہوتا ہے۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ غیر تابع مساوات شرودنگر کا ہر حل حقیقی ہوگا؛ بلکہ غیر حقیقی حل پائے جانے کی صورت میں اس حل کو ہمیشہ، ساکن حالات کا (تتی ہی توانائی کا) خطی جوڑ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں بہتر ہوگا کہ آپ صرف حقیقی  $\psi$  ہی استعمال کریں۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص  $E$  کے لئے  $\psi(x)$  مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب اس کا مخلوط خطی جوڑ بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے خطی جوڑ  $(\psi + \psi^*)$  اور  $i(\psi - \psi^*)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

<sup>۱۴</sup>Euler's formula



ج. اگر  $V(x)$  جفتے تفاعل<sup>۱۵</sup> ہو یعنی  $V(x) = V(-x)$  تب  $\psi(x)$  کو ہمیشہ جفت یا طاق ایسا جاسکتا ہے۔ اشارہ: اگر کسی مخصوص  $E$  کے لئے  $\psi(x)$  مساوات ۲.۵ کو مطمئن کرتا ہو تب  $\psi(-x)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کرے گا اور یوں ان کے جفت اور طاق خطی جوڑ  $\psi(x) \pm \psi(-x)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے۔

سوال ۲.۲: دکھائیں کہ غنیر تابع وقت مساوات شرودنگر کے ہر اس حل کے لئے، جس کی معمول زنی کی جاسکتی ہو،  $E$  کی قیمت لازماً  $V(x)$  کی اقل قیمت سے زیادہ ہوگی۔ اس کا کلاسیکی مشل کیا ہوگا؟ اشارہ: مساوات ۲.۵ کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi$$

دکھائیں کہ  $E < V$  کی صورت میں  $\psi$  اور اس کے دو گنا تفرق کی علامتیں لازماً ایک جیسی ہوں گی؛ اب دلیل پیش کریں کہ ایسا تفعل ناممکن بل معمول زنی ہوگا۔

## ۲.۲ لامتناہی چوکور کنواں

فرض کریں

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{بصورت دیگر} \end{cases} \quad (۲.۱۹)$$

(شکل ۲.۱)۔ اس مخفیہ میں ایک ذرہ مکمل آزاد ہوگا، ماسوائے دونوں سروں یعنی  $x = 0$  اور  $x = a$  پر، جہاں ایک لامتناہی قوت اس کو مقرر ہونے سے روکتی ہے۔ اس کا کلاسیکی نمونہ کنویں میں بے رگڑ راستے پر چلتا ہوا جسم ہو سکتا ہے جو ہمیشہ کے لئے دیواروں سے ٹکرا دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتا ہے؛ دیوار کے ساتھ ٹکراؤ مکمل لٹیکدار ہے۔ (اگرچہ یہ ایک فرضی مخفیہ ہے لیکن آپ اس کو اہمیت دیں۔ باوجود اس کے کہ یہ انتہائی سادہ نظر آتا ہے، یہ بہت ساری معلومات فراہم کرتا ہے۔ ہم اس سے بار بار رجوع کریں گے۔)

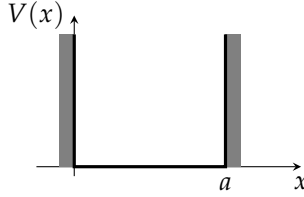
کنویں سے باہر  $\psi(x) = 0$  ہوگا (لہذا ایسا ذرے کے پائے جانے کا احتمال صفر ہوگا)۔ کنویں کے اندر، جہاں  $V = 0$  ہے، غنیر تابع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۵) درج ذیل روپ اختیار کر لے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi \quad (۲.۲۰)$$

یعنی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (۲.۲۱)$$

باب ۲. غیر تاج وقت مساوات شرودنگر



شکل ۲.۱: لامتناہی چوکور کنواں مخفیہ (مساوات ۲.۱۹)

(اس کو یوں لکھتے ہوئے میں حنا موٹی سے  $E \geq 0$  مندرج کرتا ہوں۔ ہم سوال ۲.۲ سے جان چکے ہیں کہ  $E < 0$  سے بات نہیں بنے گی۔) مساوات ۲.۲ کا سبکی سادہ پارامونی مرتفع<sup>۱۶</sup> کی مساوات ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (۲.۲۲)$$

جہاں  $A$  اور  $B$  اختیاری مستقل ہیں۔ ان مستقلات کو مسئلہ کے سرحدی شرائط<sup>۱۷</sup> متعین کرتے ہیں۔  $\psi(x)$  کے لئے موزوں سرحدی شرائط کیا ہونگے؟ عموماً  $\psi$  اور  $\frac{d\psi}{dx}$  دونوں استمراری ہونگے، لیکن جہاں مخفیہ لامتناہی کو پہنچتا ہو وہاں صرف اول الذکر کا اطلاق ہوگا۔ (میں حصہ ۲.۵ میں ان سرحدی شرائط کو ثابت کروں گا اور  $V = \infty$  کی صورت حال کو بھی دیکھوں گا۔ فی الحال مجھ پر یقین کرتے ہوئے میری کہی ہوئی بات مان لیں۔)

تفاعل  $\psi(x)$  کے استمراری شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (۲.۲۳)$$

تاکہ کنویں کے باہر اور کنویں کے اندر حل ایک ساتھ جڑ سکیں۔ یہ ہمیں  $A$  اور  $B$  کے بارے میں کیا معلومات فراہم کرتی ہے؟ چونکہ

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = B$$

ہے لہذا  $B = 0$  پس

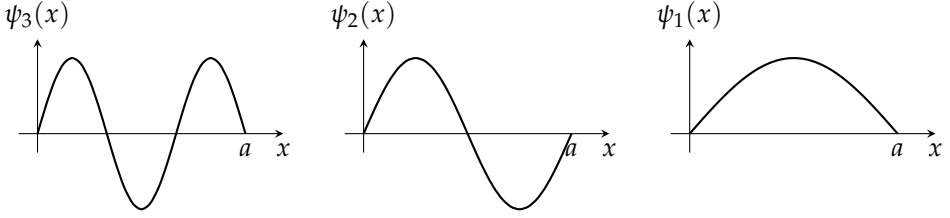
$$\psi(x) = A \sin kx \quad (۲.۲۴)$$

ہوگا۔ یوں  $\psi(a) = A \sin ka$  کے تحت  $A = 0$  (ایسی صورت میں ہمیں غیر اہم حل  $\psi(x) = 0$  ملتا ہے جو ناقابل معمول زنی ہے) یا  $\sin ka = 0$  ہوگا، جس کا نتیجہ درج ذیل ہوگا۔

$$ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (۲.۲۵)$$

اب  $k = 0$  بھی  $\psi(x) = 0$  دیتا ہے جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے اور  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  کی بنا پر  $k$  کی منفی قیمتیں کوئی نیا حل نہیں دیتی ہیں لہذا اہم منفی کی علامت کو  $A$  میں ضم کر سکتے ہیں۔ یوں منفرد حل درج

<sup>۱۶</sup> simple harmonic oscillator  
<sup>۱۷</sup> boundary conditions



شکل ۲.۲: لامتناہی چوکور کنویں کے ابتدائی تین ساکن حالات (مادہ ۲.۲۸)۔

ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۲۶) \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

دلچسپ بات یہ ہے کہ  $x = a$  پر سرحدی شرط عائد کرنے سے متقل  $A$  کے بجائے متقل  $k$  متعین ہوتا ہے جس کے نتیجے میں  $E$  کی اجازتی قیمتیں:

$$(۲.۲۷) \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

حاصل ہو جائیں گی۔ کلاسیکی صورت کے برعکس لامتناہی چوکور کنویں میں کوانٹائی ذرہ ہر ایک توانائی کا حامل نہیں ہو سکتا ہے بلکہ اس کی توانائی کی قیمت کو درج بالا مخصوص اجازتی<sup>۱۸</sup> قیمتوں<sup>۱۹</sup> میں سے ہونا ہو گا۔ متقل  $A$  کی قیمت حاصل کرنے کے لئے  $\psi$  کی معمول زنی کرنی ہوگی:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{2}{a}$$

یہ صرف  $A$  کی مقدار دیتی ہے، تاہم مثبت حقیقی جذر  $A = \sqrt{2/a}$  منتخب کرنا بہتر ہو گا (کیونکہ  $A$  کا زاویہ کوئی طبعی معنی نہیں رکھتا ہے)۔ اس طرح کنویں کے اندر مساوات شرودنگر کے حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۲۸) \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

جیسا کہ وعدہ تھا (ہر مثبت عدد صحیح  $n$  کے عوض ایک حل دے کر) غیر تابع وقت مساوات شرودنگر نے حلوں کا ایک لامتناہی سلسلہ دیا ہے۔ ان میں سے اولین چند کو شکل ۲.۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ یہ ایک دھماگے، جس کی لمبائی  $a$  ہو، پر بننے والی ساکن امواج کی طرح نظر آتے ہیں۔ تفاعل  $\psi_1$  جو زمینی<sup>۲۰</sup> حالت کہلاتا ہے کی توانائی قلیل ہے۔ باقی حالات جن کی توانائیاں  $n^2$  کے براہ راست بڑھتی ہیں پہچان حالات<sup>۲۱</sup> کہلاتے ہیں۔

allowed<sup>۱۸</sup>

<sup>۱۹</sup>ادھیان رہے کہ غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کو حل کرتے ہوئے سرحدی شرائط عائد کرنے سے اجازتی توانائیوں کی کوانٹائی

شرط محض تنہیک کی وجوہات کی بنا پر ابھرتا ہے۔

ground state<sup>۲۰</sup>

excited states<sup>۲۱</sup>

تفاعلات  $\psi_n(x)$  چند اہم اور دلچسپ خواص رکھتے ہیں:

۱. کنواں کے وسط کے لحاظ سے یہ تفاعلات باری باری جفتے اور طاق ہیں۔  $\psi_1$  جفت ہے،  $\psi_2$  طاق ہے،  $\psi_3$  جفت ہے، وغیرہ وغیرہ۔<sup>۲۲</sup>

ب. توانائی بڑھاتے ہوئے ہر اگلے حال کے عقدوں<sup>۲۳</sup> (صفر مقام انقطاع)<sup>۲۴</sup> کی تعداد میں ایک (1) کا اضافہ ہوگا۔ (چونکہ سروں پر پائے جانے والے صفر کو نہیں گنا جاتا ہے لہذا)  $\psi_1$  میں کوئی عقدہ نہیں ہے،  $\psi_2$  میں ایک ہے،  $\psi_3$  میں دو پائے جاتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

ج. یہ تمام تفاعل درج ذیل معنوں میں باہم عمود<sup>۲۵</sup> ہیں جہاں  $m \neq n$  ہے۔

$$(۲.۲۹) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[ \cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right] dx \\ &= \left\{ \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right) \right\} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ  $m = n$  کی صورت میں درج بالا دلیل درست نہیں ہوگی؛ (کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دلیل کیوں نامقابل قبول ہوگی؟) ایسی صورت میں معمولی زنی اس عمل کی قیمت 1 کر دے گا۔ درحقیقت، عمودیت اور معمولی زنی کو ایک فقرے میں سمجھایا جاسکتا ہے:<sup>۲۶</sup>

$$(۲.۳۰) \quad \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

جہاں  $\delta_{mn}$  کرونیگر ڈیلٹا<sup>۲۷</sup> کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(۲.۳۱) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

<sup>۲۲</sup> اس تشاکلی کو زیادہ وضاحت سے پیش کرنے کی خاطر بعض مصنفین کنویں کے مرکز کو مبدا پر رکھتے ہیں (یوں کنواں  $-a$  تا  $+a$  رکھا جاتا ہے)۔ تب جفت تفاعلات کو سائن جبکہ طاق تفاعلات کو کوسائن ہوں گے۔ سوال ۲.۳۶ دیکھیں۔

<sup>۲۳</sup> nodes

<sup>۲۴</sup> zero-crossing

<sup>۲۵</sup> orthogonal

<sup>۲۶</sup> یہیں تمام  $\psi$  حقیقی ہیں لہذا  $\psi_m^*$  پر \* ڈالنے کی ضرورت نہیں ہے، لیکن مستقبل کی ضرورتوں کا لحاظ کرتے ہوئے ایسا کرنا ایک اچھی عادت ہے۔

<sup>۲۷</sup> Kronecker delta

ہم کہتے ہیں کہ مذکورہ بالا (تمام)  $\psi$  معیار عمودی<sup>۲۸</sup> ہیں۔

۲. یہ مکمل<sup>۲۹</sup> ہیں، جس سے مراد ہے کہ کسی بھی دوسرے تفاعل  $f(x)$  کو ان کے خطی جوڑے سے بنایا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۳۲) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

میں تفاعلات  $\sin \frac{n\pi x}{a}$  کی کمیت کو یہاں ثابت نہیں کروں گا، البتہ اگر آپ اعلیٰ علم الاحصاء سے واقف ہیں تو آپ پہچان سکتے ہیں کہ مساوات ۲.۳۲ اور کچھ نہیں بلکہ  $f(x)$  کا فوریر تسلسل<sup>۳۰</sup> ہے۔ یہ حقیقت، کہ ہر تفاعل کو فوریر تسلسل کی صورت میں پھیلا کر لکھا جاسکتا ہے، بعض اوقات مسئلہ ڈرشلے<sup>۳۱</sup> کہلاتا ہے۔<sup>۳۲</sup> کسی بھی دیے گئے تفاعل  $f(x)$  کے لئے عددی سروں  $c_n$  کو  $\{\psi_n\}$  کی معیاری عمودیت کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۲.۳۲ کے دونوں اطراف کو  $\psi_m(x)$  سے ضرب دے کر مکمل لیں۔

$$(۲.۳۳) \quad \int \psi_m(x) * f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m(x) * \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m$$

(کرونیکر ڈیلٹا مجموعے میں تمام اجزاء کو ختم کر دے گا مساوائے اس جزو کو جس کے لئے  $n = m$  ہو۔) یوں تفاعل  $f(x)$  کی توسیع کے  $n$  ویں جزو کا عددی سر درج ذیل ہوگا۔<sup>۳۳</sup>

$$(۲.۳۴) \quad c_n = \int \psi_n(x) * f(x) dx$$

درج بالا اچار خواص انتہائی کارآمد ہیں جن کی افادیت صرف لامستثنائی چوکور کنواں تک محدود نہیں ہیں۔ پہلی خاصیت ہر اس صورت میں کارآمد ہوگی جب مخفیہ تشاکلی ہو؛ دوسری خاصیت مخفیہ کی شکل و صورت سے قطع نظر، ایک عالمگیر خاصیت ہے۔ عمودیت بھی کافی عمومی خاصیت ہے، جس کا ثبوت میں باب ۳ میں پیش کروں گا۔ عمومیت ان تمام مخفیہ کے لئے برقرار رہتی ہے جو ہمیں درپیش ہو سکتے ہیں لیکن اس بات کا ثبوت کافی لمبا اور پیچیدہ ہے؛ مجھے خدشہ ہے کہ زیادہ تر ماہرین طبیعیات عام طور پر عمومیت فرض کر لیتے ہیں اور امید رکھتے ہیں کہ ایسا ہی ہوگا۔

لامستثنائی چوکور کنویں کے ساکن حال (مساوات ۲.۱۸) درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۳۵) \quad \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

orthonormal<sup>۲۸</sup>

complete<sup>۲۹</sup>

Fourier series<sup>۳۰</sup>

Dirichlet's theorem<sup>۳۱</sup>

تفاعل  $f(x)$  میں مستثنائی تعداد کے عدم استمرار پائے جاسکتے ہیں۔

۳۳ آپ یہاں فتلی متغیر کے لئے  $m$  یا  $n$  یا کوئی تیسرا حرف استعمال کر سکتے ہیں (بس اپنا خیال رکھیں کہ مساوات کی دونوں اطراف ایک ہی حرف استعمال کیا جائے)، اور ہاں یا در ہے کہ یہ حرف ”کسی مثبت عدد صحیح“ کو ظاہر کرتا ہے۔

باب ۲. غیر تانبہ وقت مساوات شرودنگر

میں نے دعویٰ کیا تھا (مساوات ۲.۱۷) کہ تانبہ وقت مساوات شرودنگر کا عمومی ترین حل، ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t} \quad (۲.۳۶)$$

(اگر آپ کو اس حل پر شق ہو تو اس کی تصدیق ضرور کیجیے گا۔) مجھے صرف اتنا دکھانا ہوگا کہ کسی بھی ابتدائی تفاعل موج  $\psi(x, 0)$  پر اس حل کو بٹھانے کے لیے موجوں کی عددی سر  $c_n$

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

درکار ہوں گے۔ تفاعلات  $\psi$  کی مکملیت (جس کی تصدیق یہاں مسئلہ ڈرشلے کرتی ہے) اس کی ضمانت دیتی ہے کہ میں ہر  $\psi(x, 0)$  کو ہر صورت میں اس طریقے سے لکھ سکتا ہوں، اور ان کی معیاری عمودیت کی بنا پر  $c_n$  کو فورسٹرقل سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Psi(x, 0) dx \quad (۲.۳۷)$$

دی گئی ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  کے لئے ہم سب سے پہلے توسیعی عددی سروں  $c_n$  کو مساوات ۲.۳۷ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد انہیں مساوات ۲.۳۶ میں ڈال کر  $\Psi(x, t)$  حاصل کرتے ہیں۔ تفاعل موج معلوم ہو جائے تو ہم دلچسپی کی کسی بھی حرکی مقدار کا حساب، باب ۱ میں متعلقہ تریکب استعمال کرتے ہوئے، کر سکتے ہیں۔ یہی ترکیب کسی بھی مخفیہ کے لیے کارآمد ہوگی؛ صرف  $\psi$  کی تفاعل شکل اور احبازی توانائیوں کی مساوات مختلف ہوں گی۔

مثال ۲.۲: لامتناہی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے جس میں  $A$  ایک مستقل ہے (شکل ۲.۳)۔

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

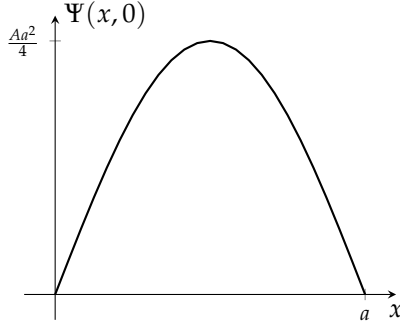
کنویں سے باہر  $\psi = 0$  ہے۔  $\Psi(x, t)$  معلوم کریں۔

حل: ہم پہلے  $\Psi(x, 0)$  کی معمول زنی کرتے ہوئے

$$1 = \int_0^a |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^2(a - x)^2 dx = |A|^2 \frac{a^5}{30}$$

$A$  متعین کرتے ہیں۔

$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$



شکل ۲.۳: ابتدائی تفسیل موج برائے مثال ۲.۲۔

مساوات ۲.۳ کے تحت  $n$  واں عددی سر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[ a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left\{ a \left[ \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right. \\
 &\quad \left. - \left[ 2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \Big|_0^a \right\} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[ -\frac{a^3}{n\pi} \cos(n\pi) + a^3 \frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3} \cos(n\pi) + a^3 \frac{2}{(n\pi)^3} \cos(0) \right] \\
 &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3} [\cos(0) - \cos(n\pi)] \\
 &= \begin{cases} 0 & n \text{ جفت} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3 & n \text{ طاق} \end{cases}
 \end{aligned}$$

یوں تفسیل موج درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۳۶)۔

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-in^2\pi^2\hbar t/2ma^2}$$

□

سر سری طور پر ہم کہتے ہیں کہ  $c_n$ ، ”تفسیل  $\Psi$  میں  $\psi_n$  کی مقدار“ کو ظاہر کرتا ہے۔ بعض اوقات ہم کہتے ہیں کہ

$n$  ویں ساکن حال میں ایک ذرے کے پائے جانے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے جو درست نہیں، چونکہ ذرہ حال  $\Psi$  میں ہے نہ کہ حال  $\psi_n$  میں؛ ویسے بھی، تجربہ گاہ میں آپ کسی ایک ذرے کو کسی ایک مخصوص حال میں نہیں دیکھ پاتے بلکہ آپ کسی متبادل مشاہدہ مقدار کی پیشکش کرتے ہیں، جس کا نتیجہ ایک عدد کی صورت میں سامنے آتا ہے۔ جیسا کہ آپ باب ۳ میں دیکھیں گے، توانائی کی پیشکش سے  $E_n$  قیمت حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔ (کوئی بھی پیشکش، ”جاذبی“ قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت دے گی، اسی لئے انہیں جاذبی قیمتیں کہتے ہیں، اور کوئی مخصوص قیمت  $E_n$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔)

یقیناً ان تمام احتمالات کا مجموعہ 1 ہونا چاہیے،

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \quad (۲.۳۸)$$

جس کا ثبوت  $\Psi$  کی عمود زنی سے حاصل ہوگا (چونکہ تمام  $c_n$  غیر تاجع وقت ہیں لہذا میں  $t = 0$  پر اس کا ثبوت پیش کرتا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے تشویش ہو تو آپ باآسانی اس ثبوت کی تعمیم کسی بھی  $t$  کے لئے کر سکتے ہیں۔)

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\Psi(x, 0)|^2 dx = \int \left( \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \right)^* \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

(یہاں بھی  $m$  پر مجموعہ میں کرونیک کر ڈیلٹا جزو  $m = n$  کو چنتا ہے۔)

مزید یہ کہ توانائی کی توقعاتی قیمت لازماً

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n \quad (۲.۳۹)$$

ہوگی جس کی بلاواسطہ تصدیق کی جاسکتی ہے: غیر تاجع وقت مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۱۲) کہتی ہے کہ

$$H\psi_n = E_n\psi_n \quad (۲.۴۰)$$

لہذا

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left( \sum c_m \psi_m \right)^* H \left( \sum c_n \psi_n \right) dx \\ &= \sum \sum c_m^* c_n E_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum |c_n|^2 E_n \end{aligned}$$



ہوگا۔ دھیان رہے کہ کسی ایک مخصوص توانائی کے حصول کا احتمال غیر تابع وقت ہوگا اور یوں  $H$  کی توقعاتی قیمت حتماً غیر تابع وقت ہوگی۔ کوانٹائی میکانیات میں یہ **بہا توانائی** کا ظہور ہے۔

مثال ۲.۳: ہم نے دیکھا کہ مثال ۲.۲ میں ابتدائی تفاعل عمل موج (شکل ۲.۳) زمینی حال  $\psi_1$  (شکل ۲.۲) کے ساتھ متربی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ  $|c_1|^2$  غالب ہوگا۔ یقیناً ایسا ہی ہے۔

$$|c_1|^2 = \left( \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 = 0.998555 \dots$$

باقی تمام عددی سرمل کر درج ذیل مندرجہ دیئے ہیں۔<sup>۳۵</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left( \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1$$

اس مثال میں توانائی کی توقعاتی قیمت

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{8\sqrt{15}}{n^3 \pi^3} \right)^2 \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{480 \hbar^2}{\pi^4 ma^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{5 \hbar^2}{ma^2}$$

ہوگی جو کہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہے۔ یہ  $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  کے بہت متربی، مگر ہجبان  $\square$  حالتوں کی شمولیت کی بنا پر تھوڑی زیادہ ہے۔

سوال ۲.۳: یہ دکھائیں کہ لامستثنائی چوکور کنویں کے لئے  $E = 0$  یا  $E < 0$  کی صورت میں غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کا کوئی بھی متابل قبول حل نہیں پایا جاتا۔ (یہ سوال ۲.۲ میں دیے گئے عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے، لیکن اس مرتبہ مساوات شرودنگر کو صریحاً حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ آپ سرحدی شرائط کو پورا نہیں کر سکتے۔)

سوال ۲.۴: لامستثنائی چوکور کنویں کے  $n$  ویں ساکن حال کیلئے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$ ،  $\sigma_x$ ، اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول غیر یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ کونسا حال غیر یقینیت کی حد کے متربی ترین ہوگا؟

سوال ۲.۵: لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل عمل موج، پہلے دو ساکن حالات کے برابر حصوں کا مرکب ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

conservation of energy<sup>۳۶</sup>

آپ درج ذیل تسلسل کی ریاضی کی کتاب سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

ا.  $\Psi(x, 0)$  کی معمول زنی کریں۔ یعنی  $A$  تلاش کریں۔ آپ  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کی معیاری عمودیت کا فائدہ اٹھاتے ہوئے باآسانی ایسا کر سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ  $t = 0$  پر  $\Psi$  کی معمول زنی کرنے کے بعد آپ یقین رکھ سکتے ہیں کہ یہ معمول شدہ ہی رہے گا؛ اگر آپ کو شک ہو تو حبز و-ب کا نتیجہ حاصل کرنے کے بعد اس کی صریح تصدیق کریں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  اور  $|\Psi(x, t)|^2$  تلاش کریں۔ موخر الذکر کو وقت کے سائن فکٹا عمل کی صورت میں لکھیں، جیسا مثال ۲.۱ میں کیا گیا ہے۔ نتائج کی تسہیل کے لئے  $\omega \equiv \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$  لیں۔

ج.  $\langle x \rangle$  تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ وقت میں ارتعاش پذیر ہے۔ اس ارتعاش کا زاویائی تعدد کتنا ہوگا؟ ارتعاش کا محیط کیا ہوگا؟ (اگر محیط  $\frac{a}{2}$  سے زیادہ نکل آئے تو آپ سیدھا قید خانے چلے جائیں۔)

د.  $\langle p \rangle$  تلاش کریں (اور اس پر زیادہ وقت صرف نہ کریں)۔

ه. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش کی جائے تو کون کون سی قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر ایک قیمت کا احتمال کتنا ہوگا؟  $H$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔ اس کی قیمت کا موازنہ  $E_1$  اور  $E_2$  کے ساتھ کریں؟

سوال ۲.۶: اگر چہ تفاعل موج کا مجموعی زاویائی مستقل کسی طبعی اہمیت کا حامل نہیں ہے (کیونکہ یہ کسی بھی متابل پیمائش معتد ار کا حساب کرتے ہوئے منسوخ ہو جاتا ہے) لیکن مساوات ۲.۱۷ میں عددی سروں کے اضافی زاویائی مستقل اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر، مندرجہ کریں کہ ہم سوال ۲.۵ میں  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  کے اضافی زاویائی مستقل تبدیل کر دیتے ہیں:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)]$$

یہاں  $\phi$  کوئی مستقل ہے۔  $\Psi(x, t)$ ،  $|\Psi(x, t)|^2$  اور  $\langle x \rangle$  تلاش کر کے ان کا موازنہ پہلے حاصل شدہ نتائج کے ساتھ کریں۔ بالخصوص  $\phi = \pi/2$  اور  $\phi = \pi$  کی صورتوں پر غور کریں۔

سوال ۲.۷: لامتناہی چو کور کنویں میں ایک ذرے کا ابتدائی تفاعل موج درج ذیل ہے۔<sup>۳۶</sup>

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

ا.  $\Psi(x, 0)$  کا خاکہ کھینچیں اور مستقل  $A$  کی قیمت تعیین کریں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔

ج. توانائی کی پیمائش کا نتیجہ  $E_1$  ہونے کا احتمال کتنا ہوگا؟

<sup>۳۶</sup> اصولی طور پر ابتدائی تفاعل موج کی شکل پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی، جب تک کہ وہ متابل معمول زنی ہے۔ بالخصوص، ضروری نہیں کہ  $\Psi(x, 0)$  کا استمراری تفرق پایا جاتا ہو؛ بلکہ تفاعل کا خود استمراری ہونا بھی ضروری نہیں ہے۔ تاہم، اگر آپ  $\langle H \rangle$  کی قیمت کو  $\int \Psi(x, 0)^* H \Psi(x, 0) dx$  سے معلوم کرنا چاہیں گے تو آپ کو تکنیکی مشکلات کا سامن کرنا پڑے گا، اس لئے کہ  $\Psi(x, 0)$  کا دوم تفرق بد معین ہے۔ سوال ۲.۹ میں ایسا کرنا اس لئے ممکن ہوا کہ عدم استمرار آخری سروں پر پائے گئے جہاں تفاعل خود منصر ہے۔ سوال ۲.۷ کی طرح کے مسائل کو حل کرنا آپ سوال ۲.۸ میں دیکھیں گے۔

د. توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۲.۸: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے ابتدا ( $t = 0$ ) میں لامتناہی چوکور کنویں (چوڑائی  $a$ ) کے نصف بائیں حصے میں پایا جاتا ہے جہاں ہر نقطے پر اس کے ہونے کا امکان ایک جیسا ہے۔

ا. اس کا ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(x, 0)$  تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ یہ حقیقی ہے۔ اس کی معمولی زنی کرنامت بھولیں۔)

ب. توانائی کی پیمائش کے نتیجے میں  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  ملنے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۲.۹: لمحہ  $t = 0$  پر مثال ۲.۲ کے تفاعل موج کیلئے  $H$  کی توقعاتی قیمت ”پرانے دقیا نوسی طریقہ“:

$$\langle H \rangle = \int \Psi(x, 0)^* \hat{H} \Psi(x, 0) dx$$

سے حاصل کریں۔ مثال ۲.۳ میں مساوات ۲.۳۹ کی مدد سے حاصل کردہ نتیجے کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔  
توجہ کریں: کیونکہ  $H$  غیر تاجز وقت ہے لہذا  $t = 0$  لینے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

## ۲.۳ ہارمونی مرتعش

کلاسیکی ہارمونی مرتعش کی مثال ایک پلک دار اسپرنگ کی ہے جس کا مقیاس پلک  $k$  اور کمیت  $m$  ہوتا ہے۔ کمیت کی حرکت قانون ہکے<sup>۳۷</sup>

$$F = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

کے تحت ہوگی جہاں رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کا حل

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

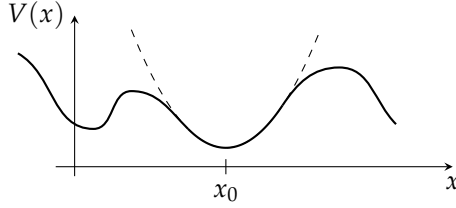
ہوگا، جبکہ

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۲.۴۱)$$

ارتعاش کا (زاویائی) تعدد ہے۔ مخفی توانائی

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (۲.۴۲)$$

ہوگی جس کی ترسیم قطع مکانی ہے۔



شکل ۲.۴: اختیاری مخفیہ کے مقامی اقل قیمت نقطہ کی پڑوس میں قطع مکانی تخمین (نقطہ دار ترسیم)۔

حقیقت میں کامل ہارمونی سر تعش نہیں پایا جاتا؛ اگر آپ اسپرنگ کو زیادہ کھینچیں تو وہ ٹوٹ جائے گا اور تانوں ہلکے اس کے ٹوٹ جانے سے بہت پہلے غیر کارآمد ہو چکا ہوگا۔ تاہم عملاً کوئی بھی مخفیہ، مقامی نقطہ اقل کے پڑوس میں، تخمیناً قطع مکانی ہوتا ہے (شکل ۲.۴)۔ باضابطہ طور پر اگر ہم  $V(x)$  کو نقطہ اقل کے پڑوس میں ٹیلر تسلسل میں کھولیں:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

اس سے  $V(x_0)$  منفی کریں (ہم  $V(x)$  میں بغیر کسی ضرر کے مستقل کا اضافہ کر سکتے ہیں) یہ جانتے ہوئے کہ  $V'(x_0) = 0$  ہوگا (چونکہ  $x_0$  نقطہ اقل ہے) ہم بلنڈر تبی ارکان چھوڑ دیں (جو نظر انداز کیے جاسکتے ہیں جب تک  $(x - x_0)$  مقدار میں کم ہے) تو ہمیں

$$V(x) \cong \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

ملے گا، جو نقطہ  $x_0$  پر ایک ایسی سادہ ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتا ہے جس کا موثر مقیاس پلک  $k = V''(x_0)$  ہو۔<sup>۳۸</sup> یہی وہ وجہ ہے جس کی بنا پر سادہ ہارمونی سر تعش اتنا اہم ہے: حقیقتاً ہر وہ ارتعاشی حرکت جس کا محیط کم ہو تخمیناً سادہ ہارمونی ہوتی ہے۔

کوانٹائی میکانیات میں ہمیں مخفیہ

$$(۲.۴۳) \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

کے لیے مساوات شرودنگر حل کرنی ہوگی (جہاں روایتی طور پر مقیاس پلک کی جگہ کلاسیکی تعدد (مساوات ۲.۴۱) استعمال کیا جاتا ہے)۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، اتنا کافی ہوگا کہ ہم غیر تایم وقت مساوات شرودنگر:

$$(۲.۴۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

<sup>۳۸</sup> چونکہ ہم مندرجہ کر رہے ہیں کہ  $x_0$  نقطہ اقل ہے لہذا  $V''(x_0) \geq 0$  ہوگا۔ صرف  $V''(x_0) = 0$  ہونے کی شاذ صورت میں ارتعاش تخمیناً طور پر بھی سادہ ہارمونی نہیں ہوگا۔

حل کریں۔ اس حوالے سے دو نہایت متفرق انداز نظر ملتے ہیں۔ پہلا، طاقت <sup>۳۹</sup> تسلسل کو استعمال کرتے ہوئے ”طاقت کے بل بوتے پر“ سیدھا سادہ تفرقی مساوات کا حل معلوم کرنا؛ اس کی خوبی یہ ہے کہ یہی طریقہ کار دوسرے کئی محفّیوں کے لئے اختیار کیا جاسکتا ہے (جیسا کہ ہم باب ۴ میں کولمب محفّی کے لیے استعمال کریں گے)۔ دوسرا، ایک نہایت زیرک الجبرائی ترکیب ہے، جس میں سیدھی <sup>۴۰</sup> عامل کا استعمال کیا جاتا ہے۔ میں پہلے الجبرائی ترکیب دکھاؤں گا کیونکہ یہ چست اور سادہ (اور کہیں زیادہ پُر لطف) <sup>۴۱</sup> ہے۔ فی الحال اگر آپ طاقتی تسلسل کی ترکیب کو چھوڑ کر آگے بڑھنا چاہیں تو کوئی مسئلہ نہیں، لیکن آگے کسی موقع پر اس کو سیکھنے کا اہتمام کر لینا چاہیے۔

### ۲.۳.۱ الجبرائی ترکیب

ہم مساوات ۲.۴۴ کو زیادہ معنی خیز روپ میں لکھ کر ابتدا کرتے ہیں

$$(۲.۴۵) \quad \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]\psi = E\psi$$

جہاں  $p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  معیار حرکت کا عامل ہے۔ بنیادی طور پر ہیملٹنی

$$(۲.۴۶) \quad H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]$$

کو کو اجزاء ضربی لکھنے کی ضرورت ہے۔ اگر یہ عداد ہوتے تب ہم یوں لکھ سکتے تھے۔

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

البتہ یہاں بات اتنی سادہ نہیں ہے چونکہ  $p$  اور  $x$  عاملین ہیں اور عاملین عموماً مقلوب <sup>۴۱</sup> نہیں ہوتے ہیں (یعنی آپ  $xp$  سے مراد  $px$  نہیں لے سکتے ہیں)۔ اس کے باوجود یہ ہمیں درج ذیل معتدلوں پر غور کرنے پر آمادہ کرتا ہے

$$(۲.۴۷) \quad a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$$

(جہاں قوسین کے باہر جزو ضربی لگانے سے آخری نتیجہ خوبصورت نظر آئے گا)۔

آئیں دیکھیں حاصل ضرب  $a_- a_+$  کیا ہوگا؟

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(ip + m\omega x)(-ip + m\omega x) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)] \end{aligned}$$

اس میں متوقع اضافی جزو  $(xp - px)$  پایا جاتا ہے جس کو ہم  $x$  اور  $p$  کا مقلوب <sup>۴۲</sup> کہتے ہیں اور جو ان کی آپس

<sup>۴۹</sup> power series

<sup>۴۰</sup> یہی لائحہ عمل ہمیں زاویائی معیار حرکت کے نظریے (باب ۴) میں دیکھنے کو ملیں گی اور اس ترکیب کی تعیم اعلیٰ تشاکل کو اٹانے میں کیا جاتی ہے۔

<sup>۴۱</sup> commute

<sup>۴۲</sup> commutator

باب ۲. غیر تانج وقت مساوات شرودنگر

میں مقلوب نہ ہونے کی پیشکش ہے۔ عمومی طور پر عامل  $A$  اور عامل  $B$  کا مقلوب (جسے چوکور قوسین میں لکھا ہے) درج ذیل ہوگا۔

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (۲.۴۸)$$

اس علامت کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega x)^2] - \frac{i}{2\hbar} [x, p] \quad (۲.۴۹)$$

ہمیں  $x$  اور عددی  $p$  کا مقلوب دریافت کرنا ہوگا۔ انتباہ: عاملین پر ذہنی کام کرنا عموماً غلطی کا سبب بنتا ہے۔ بہتر ہوگا کہ عاملین پر کھنے کے لیے آپ انہیں تفاعل  $f(x)$  عمل کرنے کے لئے پیش کریں۔ آخر میں اس پر کھی تفاعل کو رد کر کے آپ صرف عاملین پر مبنی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$[x, p]f(x) = \left[ x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = -i\hbar f(x) \quad (۲.۵۰)$$

پر کھی تفاعل (جو اپنا کام کر چکا) کو رد کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$[x, p] = i\hbar \quad (۲.۵۱)$$

یہ خوبصورت نتیجہ جو بار بار سامنے آتا ہے باضابطہ مقلوبیت<sup>۴۳</sup> رشتہ<sup>۴۴</sup> کہلاتا ہے۔ اسے استعمال سے مساوات ۲.۴۹ درج ذیل روپ

$$a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (۲.۵۲)$$

یا

$$H = \hbar\omega \left( a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) \quad (۲.۵۳)$$

اختیار کرتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ ہیملٹنی کو ٹھیک اجزائے ضربی کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا اور دائیں ہاتھ اضافی  $-\frac{1}{2}$  ہوگا۔ یاد رہے گاہیاں  $a_+$  اور  $a_-$  کی ترتیب بہت اہم ہے۔ اگر آپ  $a_+$  کو بائیں طرف رکھیں تو درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$a_+ a_- = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \quad (۲.۵۴)$$

<sup>۴۳</sup>canonical commutation relation

<sup>۴۴</sup>گہری نظر سے دیکھا جائے تو کوانٹائی میکانیات کے تمام ظلمات کا دار و مدار اس حقیقت پر ہے کہ معتم اور معیار حرکت آپس میں مقلوب نہیں ہیں۔ بعض مضغین باضابطہ مقلوبیت رشتہ کو مسلمہ لیتے ہوئے  $p = (\hbar/i) d/dx$  اخذ کرتے ہیں۔

بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۵) \quad [a_-, a_+] = 1$$

یوں ہیملٹن کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۶) \quad H = \hbar\omega \left( a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

ہارمونی سر تعش کی مساوات شرودنگر<sup>۴۵</sup> کو  $a_{\pm}$  کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۲.۵۷) \quad \hbar\omega \left( a_{\pm} a_{\mp} \pm \frac{1}{2} \right) = E\psi$$

(ا) اس طرح کی مساوات میں آپ یا تو بالائی علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو اور یا زیریں علامتیں ایک ساتھ پڑھتے ہو۔

ہم ایک اہم موڑ پر ہیں۔ میں دعویٰ کرتا ہوں اگر توانائی  $E$  کی مساوات شرودنگر کو  $\psi$  مطمئن کرتا ہو ( $H\psi = E\psi$ ) تب توانائی  $(E + \hbar\omega)$  کی مساوات شرودنگر کو  $a_+\psi$  مطمئن کرے گا:  $H(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$  ثبوت:

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega \left( a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) (a_+\psi) = \hbar\omega (a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+) \psi \\ &= \hbar\omega a_+ (a_- a_+ + \frac{1}{2}) \psi = a_+ \left[ \hbar\omega (a_+ a_- + 1 + \frac{1}{2}) \psi \right] \\ &= a_+ (H + \hbar\omega) \psi = a_+ (E + \hbar\omega) \psi = (E + \hbar\omega) (a_+\psi) \end{aligned}$$

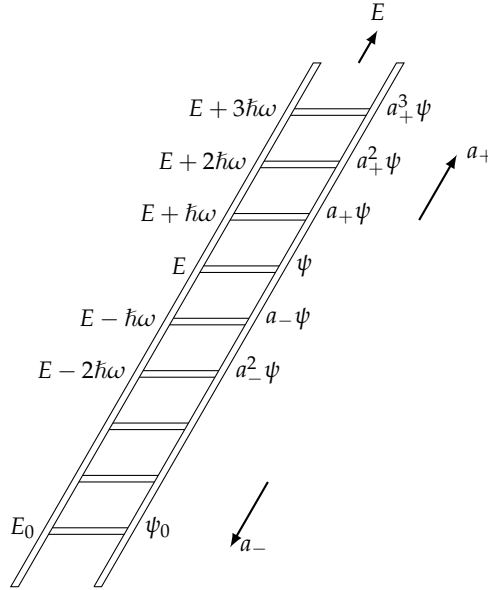
(میں نے دوسری لکیر میں مساوات ۲.۵۵ استعمال کرتے ہوئے  $a_- a_+$  کی جگہ  $a_+ a_- + 1$  استعمال کیا ہے۔ دھیان رہے اگرچہ  $a_+$  اور  $a_-$  کی ترتیب اہمیت کا حامل ہے،  $a_{\pm}$  اور کسی بھی مستقل، مثلاً  $\hbar$ ،  $\omega$  اور  $E$  کی ترتیب اہم نہیں ہے۔ ایک عامل ہر مستقل کے ساتھ مقلوب ہوگا۔)

اسی طرح حل  $a_-\psi$  کی توانائی  $(E - \hbar\omega)$  ہوگی۔

$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega \left( a_- a_+ - \frac{1}{2} \right) (a_-\psi) = \hbar\omega a_- (a_+ a_- - \frac{1}{2}) \psi \\ &= a_- \left[ \hbar\omega (a_- a_+ - 1 - \frac{1}{2}) \psi \right] = a_- (H - \hbar\omega) \psi = a_- (E - \hbar\omega) \psi \\ &= (E - \hbar\omega) (a_-\psi) \end{aligned}$$

یوں ہم نے ایک ایسی خود کار ترکیب دریافت کر لی ہے جس سے، کسی ایک حل کو جاننے ہوئے، بالائی اور زیریں توانائی کے نئے حل دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ چونکہ  $a_{\pm}$  کے ذریعے ہم توانائی میں اوپر چڑھ یا نیچے اتر سکتے ہیں لہذا انہیں ہم **عاملین**

<sup>۴۵</sup> میں بار بار ”غیر تاج وقت مساوات شرودنگر“ کہہ کر تھک گیا ہوں لہذا اب جہاں مستن سے واضح ہو کہ میں کس قسم کی مساوات کی بات کر رہا ہوں، میں اس کو ”مساوات شرودنگر“ پکاروں گا۔



شکل ۲.۵: ہارمونی مرتعش کے حالات کی "سیرھی"۔

سیرھی<sup>۴۶</sup> پکارتے ہیں:  $a_+$  عاملِ رُفعت<sup>۴۷</sup> اور  $a_-$  عاملِ تَقْطیل<sup>۴۸</sup> ہے۔ عاملِ رُفعت کو رُفعتی عامل اور عاملِ تَقْطیل کو تَقْطیلی عامل بھی پکارا جاتا ہے۔ حالات کی "سیرھی" کو شکل ۲.۵ میں دکھایا گیا ہے۔

ذرا رکے! عاملِ تَقْطیل کے بار بار استعمال سے آخر کار ایسا حاصل ہوگا جس کی توانائی صفر سے کم ہوگی (جو سوال ۲.۲ میں پیش عمومی مسئلہ کے تحت ناممکن ہے)۔ نئے حالات حاصل کرنے کی خود کار ترکیب کسی نہ کسی نقطہ پر لازماً ناکامی کا شکار ہوگی۔ ایسا کیوں کر ہوگا؟ ہم جانتے ہیں کہ  $a_- \psi$  مساوات شرودنگر کا ایک نیا حل ہوگا، تاہم اس کی ضمانت نہیں دی جاسکتی ہے کہ یہ متبادل معمول زنی بھی ہوگا؛ یہ صفر ہو سکتا ہے یا اس کا مربع مکمل لامتناہی ہو سکتا ہے۔ عملاً اول الذکر ہوگا: سیرھی کے سب سے نچلے پایہ (جس کو ہم  $\psi_0$  کہتے ہیں) پر درج ذیل ہوگا۔

$$a_- \psi_0 = 0 \quad (۲.۵۸)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\psi_0(x)$  تعین کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left( \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0 = 0$$

ladder operators<sup>۴۶</sup>  
raising operator<sup>۴۷</sup>  
lowering operator<sup>۴۸</sup>



سے تفرقی مساوات

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0$$

لکھی جاسکتی ہے جسے باآسانی حل کیا جاسکتا ہے:

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \implies \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

(C مستقل ہے۔) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ہم اس کی معمول زنی یہ ہیں:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}$$

لہذا  $A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۵۹) \quad \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

اس حال کی توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو (مساوات ۲.۵۷ روپ کی) مساوات شرودنگر میں پر کر کے  $E_0\psi_0 = \hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2})\psi_0$  حاصل کرتے ہیں اور یہ جاننے ہوئے کہ  $a_-\psi_0 = 0$  ہوگا درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۶۰) \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

سیدھی کے نچلا پایہ (جو کوانٹائی سر تعش کا زمینی حال ہے) پر پیر رکھ کر، بار بار عامل رفعت استعمال کر کے ہیجان حالات دریافت کیے جاسکتے ہیں<sup>۹</sup> جہاں ہر قدم پر توانائی میں  $\hbar\omega$  کا اضافہ ہوگا۔

$$(۲.۶۱) \quad \psi_n(x) = A_n(a_+)^n\psi_0(x), \quad E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

یہاں  $A_n$  مستقل معمول زنی ہے۔ یوں  $\psi_0$  پر عامل رفعت بار بار استعمال کرتے ہوئے ہم (اصولاً) ہارمونی سر تعش کے تمام ممکن حالات دریافت کر سکتے ہیں۔ صریحاً ایسا کیے بغیر ہم تمام احبازی توانائیاں تعین کر پائے ہیں۔

<sup>۹</sup> ہارمونی سر تعش کی صورت میں روایتی طور پر، عمومی طریقہ کار سے بہت کر، حالات کی شمار  $n = 1$  کی بجائے  $n = 0$  سے شروع کی جاتی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں مساوات ۲.۱۷ طرز کی مساواتوں میں مجموعہ کی زیریں حد کو بھی تبدیل کیا جائے گا۔  
<sup>۱۰</sup> دھیان رہے کہ ہم اس ترکیب سے (مثلاً معمول زنی) تمام حل حاصل کرتے ہیں۔ اب اگر کسی وجہ کی بنا پر دیگر حل بھی پائے جاتے تب ہم عامل رفعت اور عامل تقلیل استعمال کرتے ہوئے دوسری سیدھی حاصل کر سکتے ہیں، تاہم اس سیدھی کے سب سے نچلے پایہ کو مساوات ۲.۵۸ مطابقت کرنا ہوگا، جس سے ہم لازماً مساوات ۲.۵۹ تک پہنچتے ہیں۔ یوں نچلے پایہ ایک جیسے ہوں گے لہذا دونوں سیدھیاں درحقیقت یکساں ہوں گی۔

مثال ۲.۲: ہارمونی سر تعیش کا پہلا ہیجان حال تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left( -\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \\ &= A_1 \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}\end{aligned}$$

ہم اس کی معمول زنی متلم و کاغذ کے ساتھ کرتے ہیں۔

$$\int |\psi_1|^2 dx = |A_1|^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} dx = |A_1|^2$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں  $A_1 = 1$  ہوگا۔

اگرچہ میں پچاس مرتبہ عامل رفعت استعمال کر کے  $\psi_5$  حاصل نہیں کرنا چاہوں گا، اصولی طور پر، معمول زنی کے علاوہ، مساوات ۲.۶۱ اپنا کام خوش اسلوبی سے کرتی ہے۔ □

آپ الجبرائی طریقے سے ہیجان حالات کی معمول زنی کر سکتے ہیں لیکن اس کے لیے بہت محتاط چلنا ہوگا لہذا دھیان رکھیے گا۔ ہم جانتے ہیں کہ  $a \pm \psi_n$  اور  $\psi_{n \pm 1}$  ایک دوسرے کے راست متناسب ہیں۔

$$(۲.۶۳) \quad a_+ \psi_n = c_n \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = d_n \psi_{n-1}$$

تناسبی مستقل  $c_n$  اور  $d_n$  کیا ہوں گے؟ پہلے جان لیں کہ کسی بھی تفاعلات  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (ظاہر ہے کہ نکلمات کا موجود ہونا لازمی ہے، جس کا مطلب ہے کہ  $\pm \infty$  پر  $f(x)$  اور  $g(x)$  کو لازماً صفر پہنچنا ہوگا۔)

$$(۲.۶۴) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx$$

(خطی الجبر کی زبان میں  $a \mp$  اور  $a \pm$  ایک دوسرے کے ہر مشق جوڑی دار ہیں۔)

ثبوت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f^* \left( \mp \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) g dx$$

تکمل بالخصوص کے ذریعے  $\int f^* \left( \frac{dg}{dx} \right) dx$  سے  $\int \left( \frac{df}{dx} \right)^* g dx$  حاصل ہوگا (جہاں  $\pm \infty$  پر  $f(x)$  اور  $g(x)$  کی قیمتیں صفر تک پہنچنے کی بنا پر سرحدی اجزاء صفر ہوں گے) لہذا

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \pm \hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) f \right]^* g dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx\end{aligned}$$

اور بالخصوص درج ذیل ہوگا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_{\pm} \psi_n)^* (a_{\pm} \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} a_{\pm} \psi_n)^* \psi_n dx$$

ساوات ۲.۵۷ اور مساوات ۲.۶۱ استعمال کرتے ہوئے

$$(۲.۶۵) \quad a_+ a_- \psi_n = n \psi_n, \quad a_- a_+ \psi_n = (n+1) \psi_n$$

ہوگا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_+ \psi_n)^* (a_+ \psi_n) dx = |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 dx = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_n)^* (a_- \psi_n) dx = |d_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 dx = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx$$

چونکہ  $\psi_n$  اور  $\psi_{n\pm 1}$  معمول شدہ ہیں، لہذا  $|c_n|^2 = n+1$  اور  $|d_n|^2 = n$  ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۶) \quad a_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

اس طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$\psi_1 = a_+ \psi_0, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_+ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+)^2 \psi_0,$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_+ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a_+)^3 \psi_0, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_+ \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} (a_+)^4 \psi_0,$$

دیگر تفصیلات بھی اسی طرح حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۶۷) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$

اس کے تحت مساوات ۲.۶۱ میں مستقل معمول زنی  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$  ہوگا۔ (بالخصوص  $A_1 = 1$  ہوگا جو مثال ۲.۴ میں ہمارے نتیجے کی تصدیق کرتا ہے۔)

لامستثنیٰ چوکور کنویں کے ساکن حالات کی طرح ہارمونی سر تقش کے ساکن حالات ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

$$(۲.۶۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$$

باب ۲. غیر تاجع وقت مساوات شروڈنگر

ہم ایک بار مساوات ۲.۶۵ اور دو بار مساوات ۲.۶۴ استعمال کر کے پہلے  $a_+$  اور بعد میں  $a_-$  اپنی جگہ سے ہلا کر اس کا ثبوت پیش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* (a_+ a_-) \psi_n dx &= n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_- \psi_m)^* (a_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_+ a_- \psi_m)^* \psi_n dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx\end{aligned}$$

جب تک  $m = n$  نہ ہو  $\int \psi_m^* \psi_n dx$  لازماً صفر ہو گا۔ معیاری عمودی ہونے کا مطلب ہے کہ ہم  $\psi(x, 0)$  کو اس کے حالات کا خطی جوڑ (مساوات ۲.۱۶) لکھ کر خطی جوڑ کے عددی سر مساوات ۲.۳۴ سے حاصل کر سکتے ہیں اور پیمائش سے توانائی کی قیمت  $E_n$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہو گا۔

مثال ۲.۵: ہارمونی سر تعش کے  $n$  ویں حال کی مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔  
حل:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx$$

اس قسم کے نکلات جن میں  $x$  یا  $p$  کے طاقت پائے جاتے ہوں کے حصول کے لیے یہ ایک بہترین طریقہ کار ہے: متغیرات  $x$  اور  $p$  کو مساوات ۲.۴۷ میں پیش کی گئی تعریفات استعمال کرتے ہوئے عاملین رفعت اور تنقیل کی روپ میں لکھیں:

$$(۲.۶۹) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_+ + a_-); \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a_+ - a_-)$$

اس مثال میں ہم  $x^2$  میں دچپی رکھتے ہیں:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2]$$

لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \int \psi_n^* [(a_+)^2 + (a_+ a_-) + (a_- a_+) + (a_-)^2] \psi_n dx$$

اب (ماسوائے معمول زنی کے)  $(a_+)^2 \psi_n$  تفاعل  $\psi_{n+2}$  کو ظاہر کرتا ہے جو  $\psi_n$  کو عمودی ہے۔ یہی کچھ  $(a_-)^2 \psi_n$  کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے جو  $\psi_{n-2}$  کا راست متناسب ہے۔ یوں یہ اجزاء خارج ہو جاتے ہیں، اور ہم مساوات ۲.۶۵ استعمال کر کے باقی دو کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} (n + n + 1) = \frac{1}{2} \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

جیسا آپ نے دیکھ مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت کل توانائی کی بالکل نصف ہے (باقی نصف حصہ یقیناً حسر کی توانائی ہے)۔  
 جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ ہارمونی سر تعش کی ایک مخصوص خاصیت ہے۔

□

سوال ۲.۱۰:

۱.  $\psi_2(x)$  تیار کریں۔ب.  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  کا حنا کہ کھینچیں۔

ج.  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  کی عمودیت کی تصدیق مکمل لے کر صریح کریں۔ اشارہ: تفاعلات کی جفت پن اور طاق پن کو بروئے کار لاتے ہوئے حقیقتاً صرف ایک مکمل حل کرنا ہوگا۔

سوال ۲.۱۱:

۱. حالات  $\psi_0$  (مساوات ۲.۵۹) اور  $\psi_1$  (مساوات ۲.۶۲) کے لئے صریح مکملات لے کر  $\langle x \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$  کی قیمتیں دریافت کریں۔ تبصرہ: ہارمونی سر تعش کے مسائل میں متغیر  $\sqrt{m\omega/\hbar}x \equiv \xi$  اور  $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$  متعارف کرتے ہوئے مسئلہ سادہ صورت اختیار کرتا ہے۔

ب. عدم یقینیت کے حصول کو ان حالات کے لئے پرکھیں۔

ج. ان حالات کے لیے اوسط حسر کی توانائی  $\langle T \rangle$  اور اوسط مخفی توانائی  $\langle V \rangle$  کی قیمتیں حاصل کریں۔ آپکو نیا مکمل حل کرنے کی اجازت نہیں ہے! کیا ان کا مجموعہ آپ کی توقع کے مطابق ہے؟

سوال ۲.۱۲: ہارمونی سر تعش کے  $n$  ویں ساکن حال کے لئے مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے  $\langle x \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$  تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۲.۱۳: ہارمونی سر تعش مخفی قوہ میں ایک ذرہ درج ذیل حال سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

۱.  $A$  تلاش کریں۔ب.  $\Psi(x, t)$  اور  $|\Psi(x, t)|^2$  تیار کریں۔

ج.  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  تلاش کریں۔ ان کے کلاسیکی تعدد پر ارتعاش پذیر ہونے پر حیران مت ہوں: اگر میں  $\psi_1(x)$  کی بجائے  $\psi_2(x)$  دیتا تب جواب کیا ہوتا؟ تصدیق کریں کہ اس تفاعل موج کے لیے مسئلہ ابھر نفلٹ (مساوات ۱.۳۸) مطمئن ہوتا ہے؟

د. اس ذرے کی توانائی کی پیمائش میں کون کون سی قیمتیں متوقع ہیں اور ان کا احتمال کیا ہوں گے؟

سوال ۲.۱۴: ہارمونی سر تعش کے زمینی حال میں ایک ذرہ کلاسیکی تعدد  $\omega$  پر ارتعاش پذیر ہے۔ ایک دم مقیاس پلک 4 گنا ہو جاتا ہے لہذا  $\omega' = 2\omega$  ہوگا جبکہ ابتدائی تفاعل موج تبدیل نہیں ہوگا (یقیناً؟ ہیلٹنی

باب ۲. غیر تاجع وقت مساوات شرودنگر

تبدیل ہونے کے بنا پر  $\Psi$  اب مختلف انداز سے ارتقا پائے گا۔ اس کا احتمال کتنا ہے کہ توانائی کی پیمائش اب بھی  $\hbar\omega/2$  قیمت دے؟ پیمائشی نتیجہ  $\hbar\omega$  حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

### ۲.۳.۲ تخلیلی ترکیب

ہم اب ہارمونی سرقتش کی مساوات شرودنگر کو دوبارہ لوٹ کر

$$(۲.۴۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

اور اس تو تسلسل کی ترکیب سے بلا واسطہ حل کرتے ہیں۔ درج ذیل غیر بُعدی متغیر متعارف کرنے سے چیزیں کچھ صاف نظر آتی ہیں۔

$$(۲.۴۱) \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

مساوات شرودنگر اب درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۴۲) \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K) \psi$$

جہاں  $K$  توانائی ہے جس کی اکائی  $\frac{1}{2} \hbar\omega$  ہے۔

$$(۲.۴۳) \quad K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega}$$

ہم نے مساوات ۲.۴۲ کو حل کرنا ہوگا۔ ایسا کرتے ہوئے ہمیں  $K$  اور  $(E)$  کی ”اجبازی“ قیمتیں بھی حاصل ہوں گی۔ ہم اس صورت سے شروع کرتے ہیں جہاں  $\xi$  کی قیمت (یعنی  $x$  کی قیمت) بہت بڑی ہو۔ ایسی صورت میں  $\xi^2$  کی قیمت  $K$  کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگی لہذا مساوات ۲.۴۲ درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$(۲.۴۴) \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \approx \xi^2 \psi$$

جس کا تخمینی حل درج ذیل ہے (اس کی تصدیق کیجیے)۔

$$(۲.۴۵) \quad \psi(\xi) \approx A e^{-\xi^2/2} + B e^{+\xi^2/2}$$

اس میں  $B$  کا جب زونا متابل معمول زنی ہے (چونکہ  $|x| \rightarrow \infty$  کرنے سے اس کی قیمت بے متابو بڑھتی ہے)۔ طبعی طور پر متابل مقبول حل درج ذیل مقارب صورت کا ہوگا۔

$$(۲.۴۶) \quad \psi(\xi) \rightarrow ( ) e^{-\xi^2/2} \quad (\xi \text{ کی بڑی قیمت کے لئے})$$

اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہمیں قوت صاحب کو ”چھیانا“ چاہیے،

$$(۲.۷۷) \quad \psi(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

اور توقع کرنی چاہیے کہ جو کچھ باقی رہ جائے،  $h(\xi)$ ، اس کی صورت  $\psi(\xi)$  سے سادہ ہو۔<sup>۵۲</sup> ہم مساوات ۲.۷۷ کے تفسیرات

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \left( \frac{dh}{d\xi} - \xi h \right) e^{-\xi^2/2}$$

اور

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \left( \frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h \right) e^{-\xi^2/2}$$

لیتے ہیں لہذا مساوات شروڈنگر (مساوات ۲.۷۲) درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۷۸) \quad \frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0$$

ہم ترکیبے فروبنیوس<sup>۵۳</sup> استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲.۷۸ کا حل  $\xi$  کے طاقی تسلسل کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$(۲.۷۹) \quad h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

اس تسلسل کے جزو در جزو تفسیرات

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \xi^{j-1}$$

اور

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3\xi + 3 \cdot 4a_4\xi^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

لیتے ہیں۔ انہیں مساوات ۲.۷۸ میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۸۰) \quad \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j] \xi^j = 0$$

<sup>۵۲</sup> اگرچہ ہم نے مساوات ۲.۷۷ لکھتے ہوئے تخمینے سے کام لیا، اس کے بعد باقی تمام بالکل ٹھیک ٹھیک ہے۔ تفسیری مساوات کے طاقی تسلسل حل میں معتدلی جزو کا چھیانا معمولاً پسلا فائدہ ہوتا ہے۔

<sup>۵۳</sup> Frobenius method

طابقی تسلسل توسیع کے یکتائی کی بنا پر جی کے ہر طاق کے عددی سر صفر ہوگا:

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۸۱) \quad a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

یہ کلیہ توالی ۵۴ مساوات شروڈنگر کا مکمل مبدل ہے جو  $a_0$  سے ابتداء کرتے ہوئے تمام جفت عددی سر

$$a_2 = \frac{(1-K)}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{(5-K)}{12} a_2 = \frac{(5-K)(1-K)}{24} a_0, \dots$$

اور  $a_1$  سے شروع کر کے تمام طاق عددی سر پیدا کرتا ہے۔

$$a_3 = \frac{(3-K)}{6} a_1, \quad a_5 = \frac{(7-K)}{20} a_3 = \frac{(7-K)(3-K)}{120} a_1, \dots$$

ہم مکمل حل کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$(۲.۸۲) \quad h(\xi) = h_{\text{جفت}}(\xi) + h_{\text{طاق}}(\xi)$$

جہاں

$$h_{\text{جفت}}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

متغیر جی کا جفت تفاعل ہے جو خود  $a_0$  پر منحصر ہے اور

$$h_{\text{طاق}}(\xi) = a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

طاق تفاعل ہے جو  $a_1$  پر منحصر ہے۔ مساوات ۲.۸۱ دو اختیاری مستقلات  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں جی تعین کرتی ہے، جیسا ہم دو درجی تفرقی مساوات کے حل سے توقع کرتے ہیں۔

البتہ اس طرح حاصل حلوں میں سے کئی نامتابل معمول زنی ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ  $j$  کی بہت بڑی قیمت کے لئے کلیہ توالی (تخمین) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے

$$a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$$

جس کا تخمینہ حل

$$a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$$



ہوگا جہاں  $C$  ایک مستقل ہے اور اس سے (بڑی  $j$  کے لیے جہاں بڑی طاقتیں غالب ہوں گی) درج ذیل حاصل ہو گا،

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j \approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx C e^{\xi^2}$$

اور اب اگر  $h$  کی قیمت  $e^{\xi^2}$  کے لحاظ سے بڑھے تب  $\psi$  (جس کو ہم حاصل کرنا چاہتے ہیں)  $e^{\xi^2/2}$  (مساوات ۲.۷۷) کے لحاظ سے بڑھے گا جو وہی متغیاتی روپ ۵۵ ہے جو ہم نہیں چاہتے۔ اس مشکل سے نکلنے کا ایک ہی طریقہ ہے۔ متبادل معمولی حل کے لئے لازم ہے کہ اس کا طاق تسلسل اختتام پذیر ہو۔ لازمی طور پر  $j$  کی ایک ایسی بلند ترین قیمت،  $n$ ، پائی جائے گی جو  $a_{n+2} = 0$  دیتی ہو (یوں قیمت  $h$  تسلسل یا طاق  $h$  تسلسل اختتام پذیر ہوگا؛ جبکہ دوسرا لازماً ابتداء سے ہی صفر ہوگا؛ قیمت  $n$  کی صورت میں  $a_1 = 0$  ہوگا جبکہ طاق  $n$  کی صورت میں  $a_0 = 0$  ہوگا)۔ یوں متبادل قبول طبعی حل کے لیے مساوات ۲.۸۱ کے تحت درج ذیل ہوگا

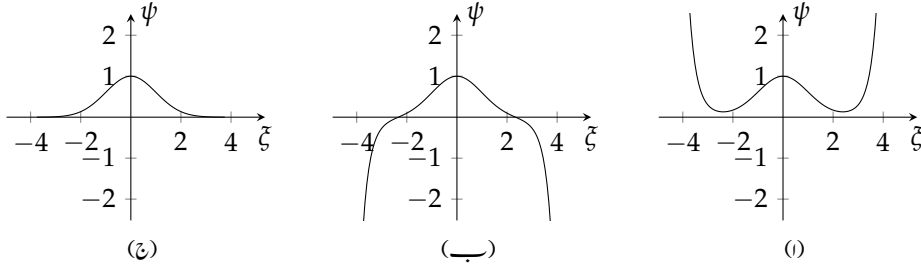
$$K = 2n + 1$$

جہاں  $n$  کوئی غیر منفی عدد صحیح ہوگا، یعنی ہم کہنا چاہتے ہیں کہ (مساوات ۲.۷۳ کو دیکھیے) توانائی ہر صورت درج ذیل ہو گی۔

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲.۸۳)$$

یوں ہم ایک مختلف طریقہ کار سے مساوات ۲.۶۱ میں الجبرائی طریقہ سے حاصل کردہ بنیادی کوانٹائزیشن شرط دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر یہ حیرانی کی بات نظر آتی ہے کہ توانائی کی کوانٹائزیشن، مساوات شرودنگر کے طاق تسلسل حل کے ایک تکنیکی نقطہ سے حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اسے ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں۔ یقیناً  $E$  کے کسی بھی قیمت کے لئے مساوات ۲.۷۰ کے حل ممکن ہیں (درحقیقت ہر  $E$  کے لیے اس کے دو خطی غیر متابع حل پائے جاتے ہیں)۔ تاہم ان میں سے زیادہ تر حل، بڑی  $x$  پر، بے متابو قوت نمائی بڑھتے ہیں جس کی بنا پر یہ نامقابل معمولی زنی ہوں گے۔ مثال کے طور پر فرض کریں ہم  $E$  کی کسی ایک احبازی قیمت سے معمولی کم قیمت (مثلاً  $0.49 \hbar \omega$ ) لے کر حل کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۲.۶-۱)؛ اس کی دم لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ اب  $E$  کی قیمت کسی ایک احبازی قیمت سے معمولی زیادہ (مثلاً  $0.51 \hbar \omega$ ) تصور کر کے حل کو ترسیم کرتے ہیں؛ اب حل کی دم ۵۶ دوسری سمت میں لامتناہی کی طرف بڑھے گی (شکل ۲.۶-۲)۔ اگر ہم اس مقدار معلوم کی قیمت ۰.۴۹ اور ۰.۵۱ کے بیچ چھوٹے قدم لے کر تبدیل کریں تو ہر مرتبہ ۰.۵۰ سے گزرتے ہوئے حل کی دم الٹ (مخالف) طرف لامتناہی کی طرف بڑھے گی۔ ٹھیک ۰.۵۰ پر اس کی دم صفر کو پہنچ کر متبادل معمولی زنی حل دے گی (شکل ۲.۶-۳)۔

۵۵ یہ حیرت کی بات نہیں کہ مساوات ۲.۸۱ میں بدحوہ حل بھی شامل ہے۔ یہ کلیہ توانائی ہر لحاظ سے مساوات شرودنگر کا معادل ہے لہذا اس میں لازماً وہ دونوں متغیاتی حل شامل ہوں گے جنہیں ہم نے مساوات ۲.۷۵ میں حاصل کیا۔  
۵۶ ہم اس کو دم ہلانے (wag the tail) کی ترکیب کہہ سکتے ہیں۔ جب بھی دم بٹے، آپ حبان حبانیں کہ آپ احبازی توانائی پر سے گزرے ہیں۔



شکل ۲.۶: مساوات شرودنگر کی (ا)  $E = 0.49\hbar\omega$ ، (ب)  $E = 0.51\hbar\omega$  اور (ج)  $E = \hbar\omega$  صورت میں حل۔

کلیہ توانی  $K$  کی اجزائی قیمتوں کے لیے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۲.۸۳) \quad a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

اگر  $n = 0$  ہو تب تسلسل میں ایک جزو پایا جائے گا (ہمیں  $a_1 = 0$  لینا ہوگا تاکہ طاق  $h$  خارج ہوں، اور مساوات ۲.۸۳ میں  $j = 0$  سے  $a_2 = 0$  حاصل ہوتا ہے):

$$h_0(\xi) = a_0$$

لہذا

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

(جو ماسوائے معمول زنی، مساوات ۲.۵۹ دوبارہ دیتی ہے)۔ اسی طرح ہم  $n = 1$  کے لیے  $a_0 = 0$  لیں گے، اور مساوات ۲.۸۳ میں  $j = 1$  سے  $a_3 = 0$  حاصل ہوگا، لہذا

$$h_1(\xi) = a_1(\xi)$$

اور

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

ہوگا (جو مساوات ۲.۶۲ کی تصدیق کرتی ہے)۔ ہم  $n = 2$  کے لیے  $j = 0$  لے کر  $a_2 = -2a_0$  اور  $j = 2$  لے کر  $a_4 = 0$  حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$h_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)$$

---

۷۰ دھیان رہے کہ  $n$  کی ہر ایک قیمت کے لئے عددی سروں  $a_j$  کا ایک مندرجہ سلسلہ پایا جاتا ہے۔

جدول ۲.۱: ابتدائی چند ہرمانٹ کشیر کنیاں  $H_n(\xi)$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned}$$

اور

$$\psi_2(\xi) = a_0(1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (سوال ۲.۱۰ کے ساتھ موازنہ کریں جہاں یہ آخری نتیجہ الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا گیا۔) عمومی طور پر  $h_n(\xi)$  متغیر  $\xi$  کا  $n$  درجی کشیر رکنی ہوگا، جو جفت عدد صحیح  $n$  کی صورت میں جفت طاقتوں کا اور طاق عدد صحیح  $n$  کی صورت میں طاق طاقتوں کا کشیر رکنی ہوگا۔ جبز و ضربی  $a_0$  اور  $a_1$  کے علاوہ یہ عین ہرمانٹ کشیر کنیاں<sup>۵۸</sup>  $H_n(\xi)$  ہیں۔<sup>۵۹</sup> جدول ۲.۱ میں اس کے چند ابتدائی ارکان پیش کیے گئے ہیں۔ روایتی طور پر اختیاری جبز و ضربی یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ  $\xi$  کے بلند تر طاقت کا عددی سر  $2^n$  ہو۔ اس روایت کے تحت ہارمونی مرتعش کے معمول شدہ<sup>۶۰</sup> ساکن حالات درج ذیل ہوں گے

$$(۲.۸۵) \quad \psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

جو (یقیناً) مساوات ۲.۶۷ میں الجبرائی طریقے سے حاصل نتائج کے متماثل ہیں۔

سوال ۲.۱۵: ہارمونی مرتعش کے زمینی حال میں کلاسیکی اجزائی خطہ کے باہر ایک ذرہ کی موجودگی کا احتمال (تین یا معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔ اشارہ: کلاسیکی طور پر ایک مرتعش کی توانائی  $E = (1/2)ka^2 = (1/2)m\omega^2 a^2$  ہوگی جہاں  $a$  حیظہ ہے۔ یوں توانائی  $E$  کے مرتعش کا ”کلاسیکی اجزائی خطہ“  $-\sqrt{2E/m\omega^2}$  تا  $+\sqrt{2E/m\omega^2}$  ہوگا۔ عمل کی قیمت ”عمومی تقسیم“ یا ”تفاعل حائل“ کی جدول سے دیکھیں۔

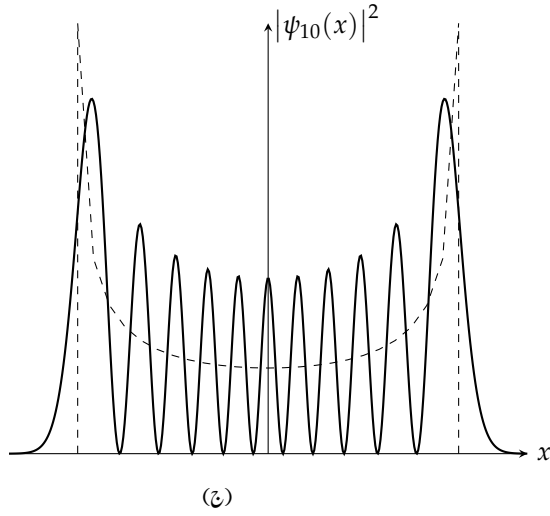
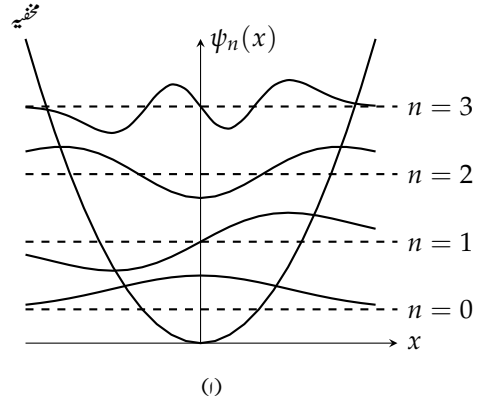
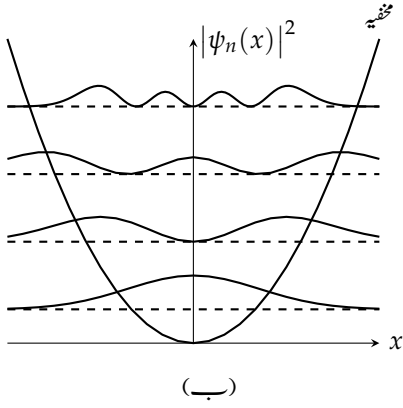
سوال ۲.۱۶: کلیہ توانائی (مساوات ۲.۸۴) استعمال کر کے  $H_5(\xi)$  اور  $H_6(\xi)$  تلاش کریں۔ مجموعی مستقل تعین کرنے کی خاطر  $\xi$  کی بلند تر طاقت کا عددی سر روایت کے تحت  $2^n$  لیں۔

سوال ۲.۱۷: اس سوال میں ہرمانٹ کشیر رکنی کے چند اہم مسائل، جن کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا، پر غور کرتے ہیں۔

<sup>۵۸</sup> Hermite polynomials

<sup>۵۹</sup> ہرمانٹ کشیر رکنیوں پر سوال ۲.۱۷ میں مزید غور کیا گیا ہے۔

<sup>۶۰</sup> میں یہاں معمولی ذنی مستقامات حاصل نہیں کروں گا۔



شکل ۲: ہارمونی سر تعش کے ابتدائی چار ساکن حالات۔

ا. کلیہ روڈریگیس<sup>۱۱</sup> درج ذیل کہتا ہے۔

$$(۲.۸۶) \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

اس کو استعمال کر کے  $H_3$  اور  $H_4$  اخذ کریں۔

ب. درج ذیل کلیہ توانی گزشتہ دو ہر مائٹ کشیر رکنیوں کی صورت میں  $H_{n+1}$  دیتا ہے۔

$$(۲.۸۷) \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi)$$

اس کو جب  $n=1$  کے نتائج کے ساتھ استعمال کر کے  $H_5$  اور  $H_6$  تلاش کریں۔

ج. اگر آپ  $n$  رتبی کشیر رکنی کا تفرق لیں تو آپ کو  $n-1$  رتبی کشیر رکنی حاصل ہوگی۔ ہر مائٹ کشیر رکنیوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$(۲.۸۸) \quad \frac{dH_n}{d\xi} = 2n H_{n-1}(\xi)$$

جس کی تصدیق ہر مائٹ کشیر رکنی  $H_5$  اور  $H_6$  کے لئے کریں۔

د. پیدا کار تفاعل<sup>۱۲</sup>  $e^{-z^2+2z\xi}$  کا  $z=0$  پر  $n$  واں تفرق  $H_n(\xi)$  ہوگا، یا دوسرے لفظوں میں، درج ذیل تفاعل کے ٹیلر توسیع میں یہ  $z^n/n!$  کا مددی سر ہوگا۔

$$(۲.۸۹) \quad e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi)$$

اس کو استعمال کر کے  $H_0$ ،  $H_1$  اور  $H_2$  دوبارہ اخذ کریں۔

## ۲.۴ آزاد ذرہ

ہم اب آزاد ذرہ (جس کے لیے پر جگہ  $V(x) = 0$  ہوگا) پر غور کرتے ہیں جس سادہ ترین صورت ہوئی چاہیے تھی۔ کلاسیکی طور پر اس سے مراد مستقل سمتی رفتار ہوگی، لیکن کوانٹائی میکانیات میں یہ مسئلہ حیران کن حد تک پیچیدہ اور پراسرار ثابت ہوتا ہے۔ غیر متابع وقت مساوات شرودنگر ذیل

$$(۲.۹۰) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

<sup>۱۱</sup>Rodrigues formula  
<sup>۱۲</sup>generating function

یا ذیل ہے۔

$$(۲.۹۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

یہاں تک یہ لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۲۱) کی مانند ہے جہاں (بھی) مخفی قوتہ صفر ہے؛ البتہ اس بار، میں عمومی مساوات کو قوتہ نما (ناکہ سائن اور کوسائن) کی صورت میں لکھنا چاہوں گا، جس کی وجہ آپ پر حبلہ عیاں ہوگی۔

$$(۲.۹۲) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

لامتناہی چوکور کنویں کے برعکس، یہاں کوئی سرحدی شرائط نہیں پائے جاتے ہیں جو  $k$  (اور یوں  $E$ ) کی ممکنہ قیمتوں پر کسی قسم کی پابندی عائد کرتے ہوں؛ لہذا آزاد ذرہ کسی بھی (مثبت) توانائی کا حامل ہو سکتا ہے۔ اس کے ساتھ تاہم وقت  $e^{-iEt/\hbar}$  جوڑتے ہوئے ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۹۳) \quad \Psi(x, t) = Ae^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + Be^{-ik(x + \frac{\hbar k}{2m}t)}$$

ایسا کوئی بھی تفاعل جو  $x$  اور  $t$  متغیرات کی مخصوص جوڑ  $(x \pm vt)$  کا تابع ہو (جہاں  $v$  مستقل ہے)، غیر تغیر شکل و صورت کی ایسی موج کو ظاہر کرے گا جو  $v$  رفتار سے  $\mp x$  رخ حرکت کرتی ہے۔ اس موج پر ایک اٹل نقطہ (مثلاً اٹل یا اعظم قیمت نقطہ) تفاعل کے دلیل<sup>۳</sup> کی ایک اٹل قیمت کا یوں مطابقتی ہوگا کہ درج ذیل ہو۔

$$x \pm vt = \text{مستقل} \quad \text{یا} \quad x \mp vt = \text{مستقل}$$

چونکہ موج پر تمام نقاط ایک جیسی سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا موج کی شکل و صورت حرکت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔ یوں مساوات ۲.۹۳ کا پہلا جبزو دائیں رخ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جبزو بائیں رخ حرکت کرتی (انتی ہی توانائی کی) موج کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ان میں منفرق صرف  $k$  کی علامت کا ہے لہذا انہیں درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(۲.۹۴) \quad \Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)}$$

جہاں  $k$  کی قیمت منفی لینے سے بائیں رخ حرکت کرتی موج حاصل ہوگی۔

$$(۲.۹۵) \quad k \equiv \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{دائیں رخ حرکت} \\ k < 0 \Rightarrow \text{بائیں رخ حرکت} \end{cases}$$

صاف ظاہر ہے کہ آزاد ذرے کے ”ساکن حالات“ حرکت کرتی امواج کو ظاہر کرتے ہیں، جن کی طول موج  $\lambda = 2\pi/|k|$  ہوگا، اور کلیہ ڈی بروگلی (مساوات ۱.۳۹) کے تحت ان کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۶) \quad p = \hbar k$$

ان امواج کی رفتار (یعنی  $t$  کا عددی سر تقسیم  $x$  کا عددی سر) درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۹۷) \quad v_{\text{کوانٹائی}} = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$$

اس کے برعکس ایک آزاد ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو (جو حالتِ حرکی ہوگی چونکہ  $V = 0$  ہے) کی کلاسیکی رفتار  $E = (1/2)mv^2$  سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(۲.۹۸) \quad v_{\text{کلاسیکی}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2v_{\text{کوانٹائی}}$$

ظاہری طور پر کوانٹائی میکانیکی تفاسل موج اس ذرے کی نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔ اس تضاد پر ہم کچھ دیر میں غور کریں گے۔ اس سے پہلے ایک زیادہ سنگین مسئلہ پر غور کرنا ضروری ہے۔ درج ذیل کے تحت یہ تفاسل موج ناقابلِ معمول زنی ہے۔

$$(۲.۹۹) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = |A|^2 (\infty)$$

یوں آزاد ذرے کی صورت میں متابل علیحدگی حل طبیعی طور پر متابل مقبول حالات کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ایک آزاد ذرہ ساکن حال میں نہیں پایا جاسکتا ہے؛ دوسرے لفظوں میں، غیر مبہم توانائی کے ایک آزاد ذرے کا تصور بے معنی ہے۔

اس کا ہر گز یہ مطلب نہیں کہ متابل علیحدگی حل ہمارے کسی کام کے نہیں ہیں، کیونکہ یہ طبیعی مفہوم سے آزاد، ریاضیاتی کردار ادا کرتے ہیں۔ تابع وقت مساوات شرودنگر کا عمومی حل اب بھی متابل علیحدگی حلوں کا خطی جوڑ ہوگا (صرف اتنا ہے کہ غیر مسلسل اشاریہ  $n$  پر مجموعہ کی بجائے اب یہ استمراری متغیر  $k$  کے لحاظ سے کھل ہوگا)۔

$$(۲.۱۰۰) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

(ہم  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  کو اپنی آسانی کیلئے کھل کے باہر نکالتے ہیں؛ مساوات ۲.۱۷ میں عددی سر  $c_n$  کی جگہ یہاں  $(1/\sqrt{2\pi})\phi(k)$  کردار ادا کرتا ہے۔) اب اس تفاسل موج کی (موزوں  $\phi(k)$  کیلئے) معمول زنی کی جاسکتی ہے۔ تاہم اس میں  $k$  کی قیمتوں کی سخت پائی جائے گی، لہذا توانائیوں اور رفتاروں کی بھی سخت پائی جائے گی۔ ہم اس کو موجی اکٹھے<sup>۶۴</sup> کہتے ہیں۔<sup>۶۵</sup>

عمومی کوانٹائی مسئلہ میں ہمیں  $\Psi(x, 0)$  فنر اہم کر کے  $\Psi(x, t)$  تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔ آزاد ذرے کیلئے اس کا حل مساوات ۲.۱۰۰ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ابتدائی تفاسل موج

$$(۲.۱۰۱) \quad \Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

wave packet<sup>۶۶</sup>

سائنس امواج کی وسعت لامتناہی تک پہنچتا ہے اور یہ ناقابلِ معمول زنی ہوتی ہیں۔ تاہم ایسی امواج کا خطی میل تب کن مداخلت پیدا کرتا ہے، جس کی بسا پر معتم ہندی اور معمول زنی ممکن ہوتی ہے۔

پر پورا اترتا ہوا  $\psi(k)$  کیے تعین کیا جائے؟ یہ فوریرس تجزیہ کا کلاسیکی مسئلہ ہے جس کا جواب مسئلہ پلانشرال<sup>۶۶</sup>:

$$(۲.۱۰۲) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \Leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

پیش کرتا ہے (سوال ۲.۲۰ دیکھیں)۔  $F(k)$  کو  $f(x)$  کا فوریر بدل<sup>۶۷</sup> کہا جاتا ہے جبکہ  $f(x)$  کو  $F(k)$  کا الٹے فوریر بدل<sup>۶۸</sup> کہتے ہیں (ان دونوں میں صرف قوت نسا کی علامت کا مندرق پایا جاتا ہے)۔ ہاں، احبازتی تقاسل پر کچھ پابندی ضرور عائد ہے: مکمل کا موجود<sup>۶۹</sup> ہونا لازم ہے۔ ہمارے مقصد کے لئے، تقاسل  $\Psi(x, 0)$  پر بذات خود معمول شدہ ہونے کی طبعی شرط مسلط کرنا اس کی ضمانت دے گا۔ یوں آزاد ذرے کے عمومی کوانٹائی مسئلہ کا حل مساوات ۲.۱۰۰ ہو گا جہاں  $\phi(k)$  درج ذیل ہو گا۔

$$(۲.۱۰۳) \quad \phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

مثال ۲.۶: ایک آزاد ذرہ جوابدائی طور پر خط  $-a \leq x \leq a$  میں رہنے کا پابند ہو کو وقت  $t = 0$  پر چھوڑ دیا جاتا ہے:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے  $\Psi(x, 0)$  کی معمول زنی کرتے ہیں۔

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^a dx = 2a |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

اس کے بعد مساوات ۲.۱۰۳ استعمال کرتے ہوئے  $\phi(k)$  تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi a}} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

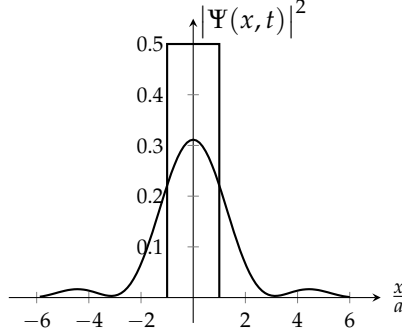
<sup>۶۶</sup> Plancherel's theorem

<sup>۶۷</sup> Fourier transform

<sup>۶۸</sup> inverse Fourier transform

<sup>۶۹</sup> تقاسل  $f(x)$  پر عائد لازم اور کافی پابندی یہ ہے کہ  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$  مستثنای ہو۔ (ایسی صورت میں  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$  بھی مستثنای ہو گا، اور حقیقتاً ان دونوں کمالات کی قیمتیں ایک جتنی ہوں گی۔ Arfken کے حصہ 5.15 میں حاشیہ 24 دیکھیں۔)





شکل ۲.۸: تفاعل  $|\Psi(x, t)|^2$  کی لمحہ  $t = 0$  پر مستطیل اور  $t = ma^2/\hbar$  پر قوسی ترسیم (مساوات ۲.۱۰۴)۔

آخر میں ہم اس کو دوبارہ مساوات ۲.۱۰۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$(۲.۱۰۴) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk$$

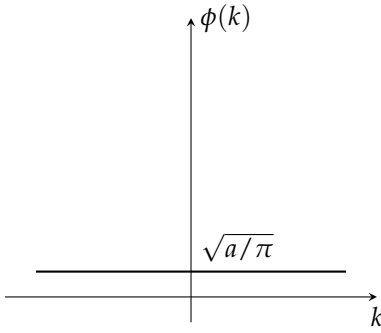
بد قسمتی سے اس عمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے، تاہم اس کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۸)۔ (ایسی بہت کم صورتیں حقیقتاً پائی جاتی ہیں جن کے لئے  $\Psi(x, t)$  کا عمل (مساوات ۲.۱۰۰) صریحاً حل کرنا ممکن ہو۔ سوال ۲.۲۲ میں ایسی ایک بالخصوص خوبصورت مثال پیش کی گئی ہے۔)

آئیں ایک تحدیدی صورت پر غور کریں۔ اگر  $a$  کی قیمت بہت کم ہو تب ابتدائی تفاعل موج خوبصورت مقامی نوکیلی صورت اختیار کرتی ہے (شکل ۲.۹)۔ ایسی صورت میں ہم چھوٹے زاویوں کے لئے تخمینہ  $\sin ka \approx ka$  لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

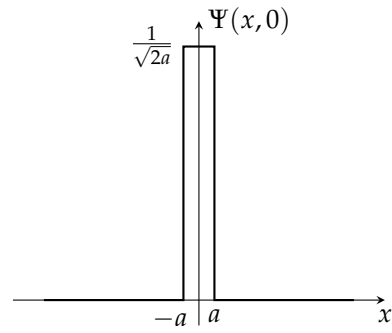
$$\phi(k) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

جو  $k$  کی مختلف قیمتوں کا آپس میں کٹ جانے کی بنا پر افقی ہے (شکل ۲.۹-ب)۔ یہ مثال ہے اصول عدم یقینیت کی: اگر ذرے کے مقام میں وسعت کم ہو، تب اس کی معیار حرکت (لہذا  $k$ ، مساوات ۲.۹۶ دیکھیں) کی وسعت لازمآ زیادہ ہوگا۔ اس کی دوسری انتہا (بڑی  $a$ ) کی صورت میں مقام کی وسعت و زیادہ ہوگی (شکل ۲.۱۰) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ka}{ka}$$

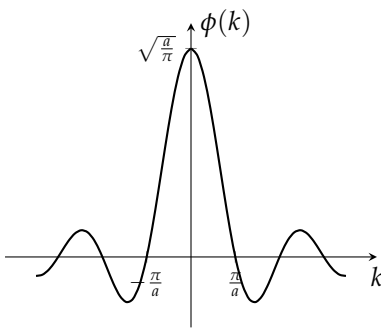


(ب)

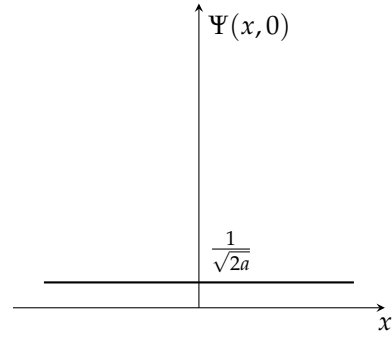


(ا)

شکل ۲.۹: چھوٹے  $a$  کے لئے مثال ۲.۶- (ا)  $\Psi(x, 0)$  کی ترسیم؛ (ب)  $\phi(k)$  کی ترسیم۔

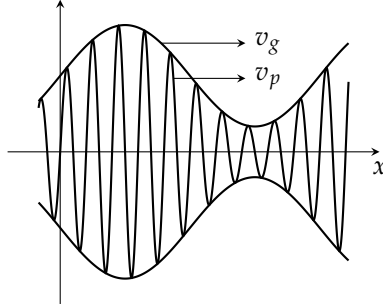


(ب)



(ا)

شکل ۲.۱۰: بڑی  $a$  کے لئے (ا)  $\Psi(x, 0)$  کی ترسیم، (ب)  $\phi(k)$  کی ترسیم (مثال ۲.۶)۔



شکل ۲.۱۱: موجی اکٹھ۔ ”علائف“ گروہی سمتی رفتار جبکہ لہر دوری سمتی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔

اب  $\sin z/z$  کی اعظم قیمت  $z = 0$  پر پائی جاتی ہے جو گھٹ کر  $z = \pm\pi$  (جو یہاں  $k = \pm\pi/a$  کو ظاہر کرتا ہے) پر صفر ہوتی ہے۔ یوں بڑی  $a$  کیلئے  $k = 0$  پر  $\phi(k)$  نوکیلی صورت اختیار کرے گا (شکل ۲.۱۰)۔ اس بار ذرے کی معیار حرکت اچھی طرح معین ہے جبکہ اس کا مقام صحیح طور پر معلوم نہیں ہے۔ □

آئیں اب اس تضاد پر دوبارہ بات کریں جس کا ذکر ہم پہلے کر چکے: جہاں مساوات ۲.۹۴ میں دیا گیا علیحدگی حل  $\Psi_k(x, t)$ ، ٹھیک اس ذرہ کی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے جس کو یہ بظاہر ظاہر کرتی ہے۔ حقیقت یہ مسئلہ وہیں پر ختم ہو گیا تھا جب ہم جان چکے کہ  $\Psi_k$  طبعی طور پر متابل حصول حل نہیں ہے۔ بحر حال آزاد ذرے کی تعامل موج (مساوات ۲.۱۰۰) میں سوئی سمتی رفتار کی معلومات پر غور کرنا دلچسپی کا باعث ہے۔ بنیادی تصور کچھ یوں ہے: سائن متعلقہ علائق کا خطی میل جس کے حیطہ کو  $\phi$  ترمیم کرتا ہو (شکل ۲.۱۱) موجی اکٹھ ہوگا؛ یہ ”علائف“ میں ڈھانکے ہوئے ”لہروں“ پر مشتمل ہوگا۔ انفرادی لہر کی رفتار، جس کو دوری سمتی رفتار  $(v_p)$  کہتے ہیں، ہر گز ذرے کی سمتی رفتار کو ظاہر نہیں کرتی ہے بلکہ علائف کی رفتار، جس کو گروہی سمتی رفتار  $(v_g)$  کہتے ہیں، ذرے کی رفتار ہوگی۔ علائف کی سمتی رفتار لہروں کی فطرت پر منحصر ہوگی؛ یہ لہروں کی سمتی رفتار سے زیادہ، کم یا اس کے برابر ہو سکتی ہے۔ ایک دھاگے پر امواج کی گروہی سمتی رفتار اور دوری سمتی رفتار برابر ہوتی ہیں۔ پانی کی امواج کیلئے یہ دوری سمتی رفتار کی نصف ہوگی، جیسا آپ نے جھیل میں پتھر پھینک کر دیکھا ہوگا (اگر آپ پانی کی ایک مخصوص لہر پر نظر جمائے رکھیں تو آپ دیکھیں گے کہ، پیچھے سے آگے کی طرف بڑھتے ہوئے، آغاز میں اس لہر کا حیطہ بڑھتا ہے جبکہ آخر میں آگے پیچھے کر اس کا حیطہ گھٹ کر صفر ہو جاتا ہے؛ اس دوران یہ تمام بطور ایک مجموعہ نصف رفتار سے حرکت کرتا ہے)۔ یہاں میں نے دکھانا ہوگا کہ کوانٹائی میکانیات میں آزاد ذرے کے تعامل موج کی گروہی سمتی رفتار اس کی دوری سمتی رفتار سے دگنی ہے، جو عین ذرے کی کلاسیکی رفتار ہے۔

ہمیں درج ذیل عمومی صورت کے موجی اکٹھ کی گروہی سمتی رفتار تلاش کرنی ہوگی۔

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

یہاں  $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$  ہے، لیکن جو کچھ میں کہنے جا رہا ہوں وہ کسی بھی موجی اکٹھ کیلئے، اس کے انتشاری رشتہ  $\omega$  کا متغیر  $k$  کے لحاظ سے کلیہ سے قطع نظر، درست ہوگا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی مخصوص قیمتی  $k_0$  پر  $\phi(k)$  نوکیلی صورت اختیار کرتا ہے۔ (ہم زیادہ وسعت کا  $k$  بھی لے سکتے ہیں لیکن ایسے موجی اکٹھ کے مختلف اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں جس کی بنا پر یہ موجی اکٹھ بہت تیزی سے اپنی شکل و صورت تبدیل کرتا ہے اور کسی مخصوص سمتی رفتار پر حرکت کرتے ہوئے ایک مجموعہ کا تصور بے معنی ہو جاتا ہے۔) چونکہ  $k_0$  سے دور مکمل و قابل نظر انداز ہے لہذا ہم تعامل  $\omega(k)$  کو اس نقطہ کے گرد ٹیلر تسلسل سے پھیلا کر صرف ابتدائی اجزاء لیتے ہیں:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \omega'_0(k - k_0)$$

جہاں نقطہ  $k_0$  پر  $k$  کے لحاظ سے  $\omega$  کا تفرق  $\omega'_0$  ہے۔

(مکمل کے وسط کو  $k_0$  پر منتقل کرنے کے عنصر سے) ہم متغیر  $k$  کی جگہ متغیر  $s = k - k_0$  استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i[(k_0 + s)x - (\omega_0 + \omega'_0 s)t]} ds$$

وقت  $t = 0$  پر

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)x} ds$$

جبکہ بعد کے وقت پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-\omega_0 t + k_0 \omega'_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0 + s) e^{i(k_0 + s)(x - \omega'_0 t)} ds$$

ماسوائے  $x$  کو  $(x - \omega'_0 t)$  منتقل کرنے کے یہ  $\Psi(x, 0)$  میں پایا جانے والا مکمل ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۰۵) \quad \Psi(x, t) \cong e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} \Psi(x - \omega'_0 t, 0)$$

ماسوائے دوری جزو ضرب کے (جو کسی بھی صورت میں  $|\Psi|^2$  کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوگا) یہ موجی اکٹھ بظاہر سمتی رفتار  $\omega'_0$  سے حرکت کرے گا:

$$(۲.۱۰۶) \quad v_{گروہی} = \frac{d\omega}{dk}$$

(جس کی قیمت کا حباب  $k = k_0$  پر کیا جائے گا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دوری رفتار سے مختلف ہے جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(۲.۱۰۷) \quad v_{دوری} = \frac{\omega}{k}$$

یہاں  $\omega = (\hbar k^2 / 2m)$  یعنی  $\omega / k = (\hbar k / 2m)$  ہے جبکہ  $d\omega / dk = (\hbar k / m)$  ہے جو دگنا ہے۔ یہ اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ موجی اکٹھ کی گروپی سستی رفتار نہ کہ ساکن حالات کی دوری سستی رفتار کا ایکسی ذرے کی رفتار دے گی۔

$$(۲.۱۰۸) \quad v_{دوری} = 2v_{کلاسیکی}$$

سوال ۲.۱۸: دکھائیں کہ متغیر  $x$  کے کسی بھی تفاعل کو لکھنے کے دو معادل طریقے  $[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]$  اور  $[C \cos kx + D \sin kx]$  ہیں۔ مستقالات  $C$  اور  $D$  کو مستقالات  $A$  اور  $B$  کی صورت میں لکھیں۔ اسی طرح مستقالات  $A$  اور  $B$  کو مستقالات  $C$  اور  $D$  کی صورت میں لکھیں۔ تبصرہ: کوانٹائی میکانیات میں جب  $V = 0$  ہو، قوت نئی تفاعل عمل حرکت کرتے امواج کو ظاہر کرتی ہے اور انہیں استعمال کرتے ہوئے آزاد ذرے پر تبصرہ کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے، جبکہ  $\sin$  اور  $\cos$  ساکن امواج کو ظاہر کرتی ہے جو لامتناہی چوکور کنویں میں پائی جاتی ہے۔

سوال ۲.۱۹: مساوات ۲.۹۴ میں دی گئی آزاد ذرے کے تفاعل موج کا احتمال رو  $J$  تلاش کریں (سوال 14.1 دیکھیں)۔ احتمال رو کے ہر دو کارچ کیا ہوگا؟

سوال ۲.۲۰: اس سوال میں آپ کو مسئلہ پلانشرال کا ثبوت حاصل کرنے میں مدد دیا جائے گا۔ آپ متناہی وقفہ کے فورسٹر تسلسل سے آغاز کر کے اس وقفہ کو وسعت دیتے ہوئے لامتناہی تک بڑھاتے گے۔

۱. مسئلہ ڈرشلے کہتا ہے کہ وقفہ  $[-a, +a]$  پر کسی بھی تفاعل عمل  $f(x)$  کو فورسٹر تسلسل توسیع سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\pi x/a) + b_n \cos(n\pi x/a)]$$

دکھائیں کہ اس کو درج ذیل معادل روپ میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/a}$$

$a_n$  اور  $b_n$  کی صورت میں  $c_n$  کیا ہوگا؟

ب. فورسٹر تسلسل کے عددی سروں کے حصول کی مساواتوں سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-in\pi x/a} dx$$

باب ۲. غیر تابع وقت مساوات شرودنگر

ج.  $n$  اور  $c_n$  کی جگہ نئے متغیرات  $k = (\frac{n\pi}{a})$  اور  $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} ac_n$  استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ  
حبزو- اور حبزو-ب درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \Delta k; \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx,$$

جہاں ایک  $n$  سے اگلی  $n$  تک  $k$  میں تبدیلی  $\Delta k$  ہے۔

د. حد  $a \rightarrow \infty$  لیتے ہوئے مسئلہ پلانشرال حاصل کریں۔ تبصرہ:  $F(k)$  کی صورت میں  $f(x)$  اور  $f(x)$  کی صورت میں  $F(k)$  کے کلیات کے آغاز دو بالکل مختلف جگہوں ہوں گی۔ اس کے باوجود حد  $a \rightarrow \infty$  کی صورت میں ان دونوں کی ساخت مشابہت رکھتی ہیں۔

سوال ۲.۲۱: ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-a|x|}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مثبت حقیقی مستقل ہیں۔

ا.  $\Psi(x, 0)$  کی معمول زنی کریں۔

ب.  $\phi(k)$  تلاش کریں۔

ج.  $\Psi(x, t)$  کو عمل کی صورت میں تیار کریں۔

د. تحدیدی صورتوں پر (جہاں  $a$  بہت بڑا ہو، اور جہاں  $a$  بہت چھوٹا ہو) پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۲۲: گاوچر موج اکٹھا ایک آزاد ذرے کا ابتدائی تقاضا عمل موج درج ذیل ہے

$$\Psi(x, 0) = A e^{-ax^2}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مستقل ہیں ( $a$  حقیقی اور مثبت ہے)۔

ا.  $\Psi(x, 0)$  کی معمول زنی کریں۔

ب.  $\Psi(x, t)$  تلاش کریں۔ اشارہ: ”مربع مکمل کرتے ہوئے“ درج ذیل روپ کے عمل با آسانی حل ہوتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

مان لیں  $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$ ۔ یوں  $y^2 - (b^2/4a) = (ax^2 + bx)$  ہوگا۔ جواب:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+(2i\hbar at/m)]}}{\sqrt{1+(2i\hbar at/m)}}$$

ج.  $|\Psi(x, t)|^2$  تلاش کریں۔ اپنا جواب درج ذیل مقدار کی صورت میں لکھیں۔

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{a}{1 + (2\hbar a t / m)^2}}$$

وقت  $t = 0$  پر  $|\Psi|^2$  کا کث (بطور  $x$  کا قفاسل) بنائیں۔ کسی بڑے  $t$  پر دوبارہ خانہ کھینچیں۔ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $|\Psi|^2$  کو کیا ہوگا؟

د. توقعاتی قیمتیں  $\langle x \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$ ؛ اور احتمالات  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ جزوی جواب:  $\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$ ، تاہم جواب کو اس سادہ روپ میں لانے کیلئے آپ کو کافی الجبرا کرنا ہوگا۔

ه. کیا عدم یقینیت کا اصول یہاں کارآمد ہے؟ کس لمحہ  $t$  پر یہ نظام عدم یقینیت کی حد کے قریب تر ہوگا؟

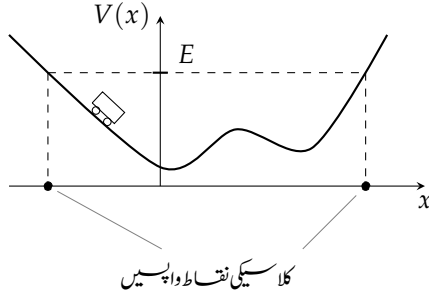
## ۲.۵ ڈیلیٹا قفاسل مخفیہ

### ۲.۵.۱ مقید حالات اور بکھراؤ حالات

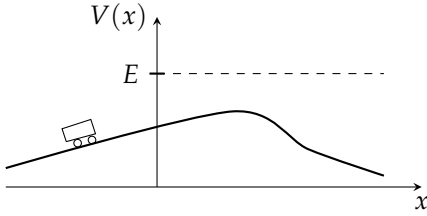
ہم غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کے دو مختلف حل دیکھ چکے ہیں: لامتناہی چوکور کنواں اور ہارمونی سر قش کے حل متابل معمول زنی تھے اور انہیں غیر مسلسل اعشاریہ  $n$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے؛ آزاد ذرے کے لیے یہ متابل معمول زنی ہیں اور انہیں استمراری متغیر  $k$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ اول الذکر بذات خود طبعی طور پر متابل حصول حل کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ موخر الذکر ایسا نہیں کرتے ہیں؛ تاہم دونوں صورتوں میں تابع وقت مساوات شرودنگر کے عمومی حل ساکن حالات کا خطی جوڑ ہوگا۔ پہلی قسم میں یہ جوڑ  $n$  پر لیا گیا) مجموعہ ہوگا، جبکہ دوسرے میں یہ  $(k$  پر) عمل ہوگا۔ اس امتیاز کی طبعی اہمیت کیا ہے؟

کلاسیکی میکانیات میں یک بعدی غیر تابع وقت مخفیہ دو مکمل طور پر مختلف حرکات پیدا کر سکتی ہے۔ اگر  $V(x)$  ذرے کی کل توانائی  $E$  سے دونوں جانب زیادہ بلند ہو (شکل ۲.۱۲-۱) تب یہ ذرہ اس مخفی توانائی کے کنویں میں ”پھنسا“ رہے گا: یہ **واپس** نقاط <sup>۳</sup> کے بیچ آگے پیچھے حرکت کرتا رہے گا اور کنویں سے باہر نہیں نکل سکے گا (ماسوائے اس صورت میں کہ آپ اسے اضافی توانائی مہر اہم کریں جس کی ابھی ہم بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے مقید **حالت** <sup>۴</sup> کہتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر  $E$  ایک (یا دونوں) جانب  $V(x)$  سے تجاوز کرے تب، لامتناہی سے آتے ہوئے، مخفی توانائی کے زیر اثر ذرہ اپنی رفتار کم یا زیادہ کرے گا اور اس کے بعد واپس لامتناہی کو لوٹے گا (شکل ۲.۱۲-۲ ب اور ج)۔ (یہ ذرہ مخفی توانائی میں پھنس نہیں سکتا ہے، ماسوائے اس صورت کہ اس کی توانائی (مثلاً رگڑ کی بنا) گھٹے، لیکن ہم یہاں بھی ایسی صورت کی بات نہیں کر رہے ہیں)۔ ہم اسے **بکھراؤ حالت** <sup>۵</sup> کہتے ہیں۔ بعض مخفی توانائیاں صرف مقید حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً ہارمونی سر قش)؛ بعض صرف بکھراؤ حال پیدا کرتی ہیں (مثلاً پساڑ مخفیہ جو کہیں پر بھی نیچے نہ جھکتا ہو)؛ اور بعض، ذرہ کی توانائی پر منحصر، دونوں اقام کے حال پیدا کرتی ہیں۔

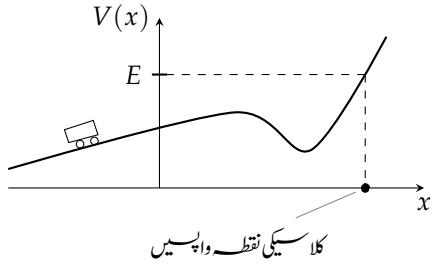
<sup>۳</sup> turning points  
<sup>۴</sup> bound state  
<sup>۵</sup> scattering state



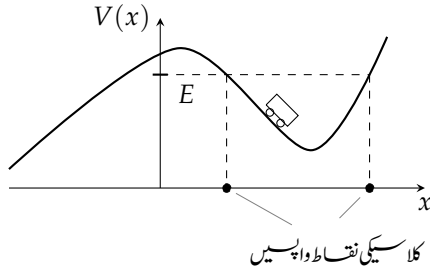
(ا)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۲.۱۲: (ا) مقید حال، (ب، ج) بھراو حالات، (د) کلا سیکی مقید حال، لیکن کوانٹائی بھراو حال۔



مساوات شروع و ڈنگر کے حلوں کے دو اقسام ٹھیک انہیں مقید اور بکھر احوال کو ظاہر کرتی ہیں۔ کوانٹائی کے دائرہ کار میں یہ مندرجہ اس سے بھی زیادہ واضح ہے جہاں سرنگے زلف<sup>۷۲</sup> (جس پر ہم کچھ دیر میں بات کریں گے) ایک ذرے کو کسی بھی مستثنائی مخفیہ رکاوٹ کے اندر سے گزرنے دیتی ہے، لہذا مخفیہ کی قیمت صرف لامتناہی پر اہم ہوگی (شکل ۲.۱۲-د)۔

$$(۲.۱۰۹) \quad \begin{cases} \text{مقید حال} \Rightarrow E < [V(-\infty) \text{ اور } V(+\infty)] \\ \text{بکھر احوال} \Rightarrow E > [V(-\infty) \text{ یا } V(+\infty)] \end{cases}$$

”روزمرہ زندگی“ میں لامتناہی پر عموماً مخفیہ صفر کو پہنچتی ہیں۔ ایسی صورت میں سلمہ معیار مزید سادہ صورت اختیار کرتی ہے:

$$(۲.۱۱۰) \quad \begin{cases} \text{مقید حال} \Rightarrow E < 0 \\ \text{بکھر احوال} \Rightarrow E > 0 \end{cases}$$

چونکہ  $\pm\infty \rightarrow x$  پر لامتناہی چوکور کنویں اور ہارمونی سرکش کی مخفی توانائیاں لامتناہی کو پہنچتی ہیں لہذا یہ صرف مقید حالات پیدا کرتی ہیں جبکہ آزاد ذرے کی مخفی توانائی ہر مقام پر صفر ہوتی ہے لہذا یہ صرف بکھر احوال<sup>۷۳</sup> پیدا کرتی ہے۔ اس حصہ میں (اور اگلے حصہ میں) ہم ایسی مخفی توانائیوں پر غور کریں گے جو دونوں اقسام کے حالات پیدا کرتی ہیں۔

## ۲.۵.۲ ڈیلٹا فنکشنل کنواں

مبادی پر لامتناہی کم چوڑائی اور لامتناہی بلند ایسا نوکیلا فنکشنل جس کا رقبہ اکائی ہو (شکل 13.2) ڈیلٹا فنکشنل<sup>۷۴</sup> کہلاتا ہے۔

$$(۲.۱۱۱) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

نقطہ  $x = 0$  پر یہ فنکشنل مستثنائی نہیں ہے لہذا تکنیکی طور پر اس کو فنکشنل کہنا غلط ہوگا (ریاضی دان اسے متعمم فنکشنل<sup>۷۵</sup> یا متعمم تقسیم<sup>۸۰</sup> کہتے ہیں)۔ تاہم اس کا تصور نظریہ طبیعیات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ (مثال کے طور پر، برقی حرکیات کے میدان میں نقطی بار کی کثافت یا ایک ڈیلٹا فنکشنل ہوگا)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\delta(x - a)$  نقطہ  $a$  پر اکائی رقبہ کا نوکیلی فنکشنل ہوگا۔ چونکہ  $\delta(x - a)$  اور ایک سادہ فنکشنل  $f(x)$  کا

<sup>۷۴</sup>tunneling

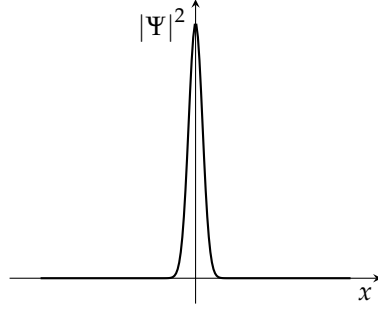
<sup>۷۵</sup>آپ کو یہاں پریشانی کا سامنا ہو سکتا ہے کیونکہ عمومی مسئلہ جس کے لئے  $E > V$  درکار ہے (سوال ۲.۲)، بکھر احوال، جو ناممکن معمول زنی ہیں، پر لاگو نہیں ہوگا۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں ہیں تب  $E \leq 0$  کے لئے مساوات شروع و ڈنگر کو آزاد ذرہ کے لئے حل کر کے دیکھیں کہ اس کے خطی جوڑ بھی ناممکن معمول زنی ہیں۔ صرف مثبت مخفی توانائی حل مکمل سلسلہ دیں گے۔

<sup>۷۶</sup>Dirac delta function

<sup>۷۷</sup>generalized function

<sup>۷۸</sup>generalized distribution

<sup>۷۹</sup>ڈیلٹا فنکشنل کو ایسے مستطیل (باشٹل) کی تصدیق صورت تصور کیا جاسکتا ہے جس کی چوڑائی بتدریج کم اور قد بتدریج بڑھتا ہو۔



شکل ۲.۱۳: ڈیلٹا فنکشن عمل (مساوات ۲.۱۱۱)

حاصل ضرب نقطہ  $a$  کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہو گا لہذا  $\delta(x - a)$  کو  $f(x)$  سے ضرب دینا، اسے  $f(a)$  سے ضرب دینے کے مترادف ہے:

$$(۲.۱۱۲) \quad f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$$

بالخصوص درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ڈیلٹا فنکشن عمل کی اہم ترین خاصیت ہے۔

$$(۲.۱۱۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

تکمل کی علامت کے اندر یہ نقطہ  $a$  پر فنکشن عمل  $f(x)$  کی قیمت ”اٹھاتا“ ہے۔ (لازمی نہیں کہ تکمل  $-\infty$  تا  $+\infty$  ہو، صرف اشتنا ضروری ہے کہ تکمل کے دائرہ کار میں نقطہ  $a$  شامل ہو لہذا  $a - \epsilon$  تا  $a + \epsilon$  تکمل لینا کافی ہو گا جہاں  $\epsilon > 0$  ہے۔)

آئیں درج ذیل روپ کے مخفیہ پر غور کریں جہاں  $\alpha$  ایک مثبت مستقل ہے۔<sup>۸۲</sup>

$$(۲.۱۱۴) \quad V(x) = -\alpha\delta(x)$$

یہ جان لینا ضروری ہے کہ (لامستناہی چو کور کنویں کی مخفیہ کی طرح) یہ ایک مصنوعی مخفیہ ہے، تاہم اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے، اور جو تحلیلی پریشانیوں پیدا کیے بغیر، بنیادی نظریہ پر روشنی ڈالنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ڈیلٹا فنکشن عمل کنویں کے لیے مساوات شروڈنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۲.۱۱۵) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi$$

جو مقید حالات ( $E < 0$ ) اور بکھراؤ حالات ( $E > 0$ ) دونوں پیدا کرتی ہے۔

<sup>۸۲</sup> ڈیلٹا فنکشن عمل کی اکائی ایک بٹ لمبائی ہے (مساوات ۲.۱۱۱ دیکھیں) لہذا  $\alpha$  کا بُعد توانائی ضرب لمبائی ہوگا۔

ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔ خطہ  $x < 0$  میں  $V(x) = 0$  ہوگا لہذا

$$(۲.۱۱۶) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = k^2 \psi$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $k$  درج ذیل ہے (مقید حال کے لئے  $E$  منفی ہوگا لہذا  $k$  حقیقی اور مثبت ہے۔)

$$(۲.۱۱۷) \quad k \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

مساوات ۲.۱۱۶ کا عمومی حل

$$(۲.۱۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

ہوگا جہاں  $x \rightarrow -\infty$  پر پہلا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا ہمیں  $A = 0$  منتخب کرنا ہوگا:

$$(۲.۱۱۹) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad (x < 0)$$

خطہ  $x > 0$  میں بھی  $V(x)$  صفر ہے اور عمومی حل  $Fe^{-kx} + Ge^{kx}$  ہوگا؛ اب  $x \rightarrow +\infty$  پر دوسرا جزو لامتناہی کی طرف بڑھتا ہے لہذا  $G = 0$  منتخب کرتے ہوئے درج ذیل لیا جائے گا۔

$$(۲.۱۲۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad (x > 0)$$

ہمیں نقطہ  $x = 0$  پر سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے ان دونوں تفاعل کو ایک ساتھ جوڑنا ہوگا۔ میں  $\psi$  کے معیاری سرحدی شرائط پہلے بیان کر چکا ہوں

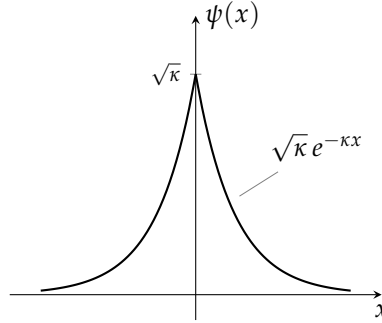
$$(۲.۱۲۱) \quad \begin{cases} 1. & \psi \text{ لازماً استمراری} \\ 2. & \frac{d\psi}{dx} \text{ استمراری، ماسوائے ان نقاط پر جہاں مخفیہ لامتناہی ہو} \end{cases}$$

یہاں اول سرحدی شرط کے تحت  $F = B$  ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۲) \quad \psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & (x \leq 0) \\ Be^{-kx}, & (x \geq 0) \end{cases}$$

تفاعل  $\psi(x)$  کو شکل ۲.۱۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ دوم سرحدی شرط ہمیں ایسا کچھ نہیں بتاتی ہے؛ (لا متناہی چوکور کنویں کی طرح) جوڑ پر مخفیہ لامتناہی ہے اور تفاعل کی ترسیل سے واضح ہے کہ  $x = 0$  پر اس میں بل پایا جاتا ہے۔ مزید اب تک کی کہانی میں ڈیلٹا تفاعل کا کوئی کردار نہیں پایا گیا۔ ظاہر ہے کہ  $x = 0$  پر  $\psi$  کے تفرق میں عدم استمراری ہی ڈیلٹا تفاعل تعین کرے گا۔ میں یہ عمل آپ کو کر کے دکھاتا ہوں جہاں آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ کیوں  $\frac{d\psi}{dx}$  عموماً استمراری ہوتا ہے۔

$$(۲.۱۲۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x) \psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx$$



شکل ۲.۱۳: ڈیلتا تفاعل محفہ (مساوات ۲.۱۲۲) کے لئے مقید حال تفاعل موج۔

پہلا مکمل درحقیقت دونوں آخری نقاط پر  $\frac{d\psi}{dx}$  کی قیمتیں ہوں گی؛ آخری مکمل اس پٹی کا رقبہ ہوگا، جس کا قدمتناہی، اور  $\epsilon \rightarrow 0$  کی تحدیدی صورت میں، چوڑائی صفر کو پہنچتی ہو، لہذا یہ مکمل صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۴) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{+\epsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V(x)\psi(x) dx$$

عمومی طور پر دائیں ہاتھ پر حد صفر کے برابر ہوگا لہذا  $\frac{d\psi}{dx}$  عموماً استمراری ہوگا۔ لیکن جب سرحد پر  $V(x)$  لامتناہی ہو تب یہ دلیل متبادل مقبول نہیں ہوگی۔ بالخصوص  $V(x) = -\alpha\delta(x)$  کی صورت میں مساوات ۲.۱۱۳ درج ذیل دے گی:

$$(۲.۱۲۵) \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0)$$

یہاں درج ذیل ہوگا (مساوات ۲.۱۲۲):

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bke^{-kx}, & (x > 0) \\ \frac{d\psi}{dx} = +Bke^{+kx}, & (x < 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d\psi}{dx}\Big|_{+} = -Bk \\ \frac{d\psi}{dx}\Big|_{-} = +Bk \end{cases}$$

لہذا  $\Delta(d\psi/dx) = -2Bk$  ساتھ ہی  $\psi(0) = B$  ہے۔ اس طرح مساوات ۲.۱۲۵ درج ذیل کہتی ہے:

$$(۲.۱۲۶) \quad k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

اور اجبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی (مساوات ۲.۱۱۷)۔

$$(۲.۱۲۷) \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

آئیں ہمیں  $\psi$  کی معمولی ذی کرتے ہوئے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{|B|^2}{k} = 1$$

(اپنی آسانی کے لیے مثبت حقیقی جذور کا انتخاب کر کے) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۲۸) \quad B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیلتا فنکشن کی ”زور“  $\alpha$  کے قطع نظر، ٹھیک ایک مقید حال دیتا ہے۔

$$(۲.۱۲۹) \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}; \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

ہم  $E > 0$  کی صورت میں بکھراو حالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ مساوات شروڈنگر  $x < 0$  کے لئے درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$$

جہاں

$$(۲.۱۳۰) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۲.۱۳۱) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

جہاں کوئی بھی جبزوبے متاثر نہیں ہڑھتا ہے لہذا انہیں رد نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح  $x > 0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

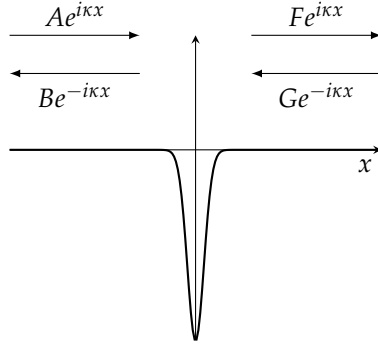
$$(۲.۱۳۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

نقطہ  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  کے استمرار کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۳۳) \quad F + G = A + B$$

تغیرات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = ik(Fe^{ikx} - Ge^{-ikx}), & (x > 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_+ = ik(F - G) \\ \frac{d\psi}{dx} = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}), & (x < 0), \implies \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_- = ik(A - B) \end{cases}$$



شکل ۲.۱۵: ڈیلٹا فنکشن پوٹنشل کنویں سے بھراؤ۔

لہذا  $\Delta(d\psi/dx) = ik(F - G - A + B)$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $\psi(0) = (A + B)$  ہوگا لہذا دوسری سرحدی شرط (مساوات ۲.۱۲۵) کہتی ہے

$$(2.134) \quad ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$$

یا مختصراً:

$$(2.135) \quad F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta), \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

دونوں سرحدی شرائط مسلط کرنے کے بعد ہمارے پاس دو مساوات (مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵) جبکہ چار نامعلوم مستقلات  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $D$  بلکہ  $k$  شامل کرتے ہوئے پانچ نامعلوم مستقل ہوں گے۔ یہ قابل معمول زنی حال نہیں ہے لہذا معمول زنی کرنامدگار ثابت نہیں ہوگا۔ بہتر ہوگا کہ ہم رک کر ان مستقلات کی انحصاری طبیعی اہمیت پر غور کریں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ  $e^{ikx}$  (کے ساتھ تاجع وقت جزو ضربی  $e^{-iEt/\hbar}$  منسلک کرنے سے) دائیں رخ حرکت کرتا ہوا فنکشن عمل موج پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح  $e^{-ikx}$  بائیں رخ حرکت کرتا ہوا موج دیتا ہے۔ یوں مساوات ۲.۱۳۱ میں مستقل  $A$  بائیں سے آمدی موج کا حصہ ہے،  $B$  بائیں رخ واپس لوٹنے ہوئے موج کا حصہ ہے،  $F$  (مساوات ۲.۱۳۲) دائیں رخ نکل کر چلتے ہوئے موج کا حصہ جبکہ  $H$  دائیں سے آمدی موج کا حصہ ہے (شکل ۲.۱۵ دیکھیں)۔ بھراؤ کے عمومی تجربہ میں عموماً ایک رخ (مثلاً بائیں) سے ذرات پھینکے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں دائیں جانب سے آمدی موج کا حصہ صفر ہوگا:

$$(2.136) \quad G = 0, \quad \text{بائیں سے بھراؤ}$$

آمدی موج  $A^{\text{inc}}$  کا حصہ  $A$ ، منعکس موج  $B^{\text{ref}}$  کا حصہ  $B$  جبکہ ترسیل موج  $F^{\text{tr}}$  کا حصہ  $F$  ہوگا۔ مساوات ۲.۱۳۳ اور ۲.۱۳۵ کو  $B$  اور  $F$

incident wave  $A^{\text{inc}}$   
reflected wave  $B^{\text{ref}}$   
transmitted wave  $F^{\text{tr}}$

کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$(۲.۱۳۷) \quad B = \frac{i\beta}{1-i\beta}A, \quad F = \frac{1}{1-i\beta}A$$

(اگر آپ دائیں سے بھراؤ کا مطالعہ کرنا چاہیں تب  $A = 0$  ہوگا؛  $G$  آمدی جیٹ،  $F$  منعکس جیٹ، اور  $B$  ترسیلی جیٹ ہوں گے۔)

چونکہ کسی مخصوص مقام پر ذرے کی موجودگی کا احتمال  $|\psi|$  ہوتا ہے لہذا آمدی ذرہ کے انعکاس کا تناسبی<sup>۸۶</sup> احتمال درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۳۸) \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

جہاں  $R$  کو شرح انعکاس<sup>۸۷</sup> کہتے ہیں۔ (اگر آپ کے پاس ذرات کی ایک شعاع ہو تو  $R$  آپ کو بتائے گا کہ ٹکرائے کے بعد ان میں سے کتنے ذرات واپس لوٹ کر آئیں گے۔) ترسیل کا احتمال درج ذیل ہوگا جسے شرح ترسیل<sup>۸۸</sup> کہتے ہیں۔

$$(۲.۱۳۹) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2}$$

ظاہر ہے ان احتمال کا مجموعہ ایک (1) ہوگا۔

$$(۲.۱۴۰) \quad R + T = 1$$

دھیان رہے کہ  $R$  اور  $T$  متغیر  $\beta$  کے اور لہذا (مساوات ۲.۱۳۰ اور ۲.۱۳۵)  $E$  کے تفاعل ہوں گے۔

$$(۲.۱۴۱) \quad R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}, \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}}$$

توانائی جتنی زیادہ ہو، ترسیل کا احتمال اتنا ہی زیادہ ہوگا (جیسا کہ ظاہری طور پر ہونا چاہیے)۔

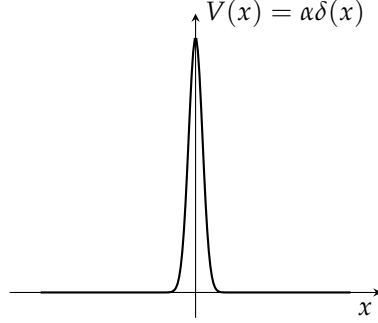
یہاں تک۔ باقی سب ٹھیک ہے تاہم ایک اصولی مسئلہ باقی ہے جسے ہم نظر انداز نہیں کر سکتے ہیں۔ چونکہ بھراؤ موج کے تفاعل ناقابل معمول زنی ہیں لہذا یہ کسی صورت بھی حقیقی ذرے کے حال کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ تاہم ہم اس مسئلہ کا حل جانتے ہیں۔ جیسا ہم نے آزاد ذرہ کے لیے کیا تھا، ہمیں ساکن حالات کے ایسے خطی جوڑ تیار کرنے ہوں گے جو قابل معمول زنی ہوں۔ حقیقی طبی ذرات کو یوں تیار کردہ موجی اکٹھے ظاہر کرے گا۔ یہ ظاہری طور پر سیدھا سادہ اصول ہے جو عملی استعمال میں پیچیدہ ثابت ہوتا ہے لہذا یہاں سے آگے مسئلہ کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کرنا بہتر ہوگا۔<sup>۸۹</sup> چونکہ

<sup>۸۶</sup> یہ ناقابل معمول زنی تفاعل ہے لہذا کسی ایک مخصوص نقطہ پر ذرہ پایا جانے کا احتمال بے معنی ہوگا؛ بہر حال آمدی اور منعکس امواج کے احتمال کا تناسب معنی خیز ہے۔ اگلے پیراگراف میں اس پر مزید بات کی جائے گی۔

<sup>۸۷</sup> reflection coefficient

<sup>۸۸</sup> transmission coefficient

<sup>۸۹</sup> توان اور رکاوٹوں سے موجی اکٹھے بھراؤ کے اعدادی مطالعہ دلچسپ معلومات فراہم کرتے ہیں۔



شکل ۲.۱۶: ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ۔

توانائی کی قیمتوں کا پورا سلسلہ استعمال کیے بغیر آزاد ذرے کے تفاعل موج کی معمولی ذنی نہیں کی جاسکتی ہے لہذا  $R$  اور  $T$  کو (بالترتیب)  $E$  کے متغیر ذرات کی تخمینی شرح انعکاس اور شرح ترسیل سمجھنا چاہیے۔

یہ ایک عجیب بات ہے کہ ہم اب اسباب وقت کے تابع مسئلہ (جہاں ایک آمدی ذرہ مخفیہ سے بھڑک کر لامتناہی کی طرف رواں ہوتا ہے) پر غور، ممکن حالات استعمال کرتے ہوئے کر پاتے ہیں۔ آخر کار (مساوات ۲.۱۳۱ اور ۲.۱۳۲ میں)  $\psi$  ایک مخلوط، غیر تابع وقت، سائن تفاعل ہے جو (مستقل جیٹ کے ساتھ) دونوں اطراف لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔ اس کے باوجود اس تفاعل پر موزوں سرحدی شرائط مسلط کر کے ہم ایک ذرہ (جسے مقامی موجی اکٹھے سے ظاہر کیا گیا ہو) کی مخفیہ سے انعکاس یا ترسیل کا احتمال تعین کر پاتے ہیں۔ اس ریاضیاتی کرامت کی وجہ میرے خیال میں یہ حقیقت ہے کہ ہم پوری نصف میں پھیلے ہوئے، حقیقتاً تفسیر تابعیت وقت کے تفاعل موج کے خطی جوڑ لے کر ایک (حرکت پذیر) نقطہ کے گرد ایسا تفاعل موج تیار کر سکتے ہیں جس پر وقت کے لحاظ سے تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے (سوال ۲.۲۳)

متعلقہ مساوات جانتے ہوئے آئیں ڈیلٹا تفاعل رکاوٹ (شکل ۲.۱۶) کے مسئلہ پر غور کریں۔ ہمیں صرف  $\alpha$  کی علامت تبدیل کرنی ہوگی۔ ظاہر ہے یہ تحدیدی حال کو ختم کرے گا (سوال ۲.۲)۔ دوسری جانب، شرح انعکاس اور شرح ترسیل جو  $\alpha^2$  پر منحصر ہیں تبدیل نہیں ہوں گے۔ کتنی عجیب بات ہے کہ ذرہ ایک رکاوٹ کے اندر سے یا ایک کنویں کے اوپر سے ایک جیسی آسانی کے ساتھ گزرتا ہے۔ کلاسیکی طور پر جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک ذرہ کبھی بھی لامتناہی فاصلہ کے رکاوٹ کو عبور نہیں کر سکتا، چاہے اس کی توانائی کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقتاً کلاسیکی مسائل بھڑکاو غیر دلچسپ ہوتے ہیں: اگر  $V_{\text{عظم}} > E$  ہو تب  $R = 0$  اور  $T = 1$  ہوگا اور ذرہ ہر صورت رکاوٹ عبور کر پائے گا؛ اگر  $V_{\text{عظم}} < E$  ہو تب  $T = 0$  اور  $R = 1$  ہوگا اور ذرہ پہاڑی پر وہاں تک چپڑھے گا جہاں تک اس میں دم ہو اور اس کے بعد اسی راستے واپس لوٹے گا۔ کوانٹائی بھڑکاو زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں: اگر  $E < V_{\text{عظم}}$  ہو تب بھی ایک ذرے کا مخفیہ عبور کرنے کا احتمال غیر صفر ہوگا۔ اس مظہر کو **سرنگ** <sup>۹۰</sup> کہتے ہیں جس پر جدید برقیات کا بیشتر حصہ منحصر ہے اور جو خوردبین میں حیرت انگیز ترقی کا سبب بنا ہے۔ اس کے



برعکس  $E > V_{\text{عظم}}$  کی صورت میں بھی ذرے کے انعکاس کا احتمال غیر صفر ہوگا؛ اگرچہ میں آپ کو کبھی بھی مشورہ نہیں دوں گا کہ چھت سے نیچے کودیں اور توقع رکھیں کہ کوانٹائی میکانیات آپ کی جان بچاپائے گی (سوال ۲.۳۵ دیکھیے)۔

سوال ۲.۲۳: درج ذیل کمالات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$ا. \int_{-3}^{+1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \delta(x + 2) dx$$

$$ب. \int_0^{\infty} [\cos(3x) + 2] \delta(x - \pi) dx$$

$$ج. \int_{-1}^{+1} e^{|x|+3} \delta(x - 2) dx$$

سوال ۲.۲۴: ڈیلٹا فنکشنات زیر علامت تکمل رہتے ہیں اور دو فکٹرے  $D_1(x)$  اور  $D_2(x)$  جو ڈیلٹا فنکشنات پر مبنی ہیں صرف درج صورت میں برابر ہوں گے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx$$

جہاں  $f(x)$  کوئی بھی سادہ فنکشن ہو سکتا ہے۔

ا. درج ذیل دکھائیں

$$(۲.۱۴۲) \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$$

جہاں  $c$  ایک حقیقی مستقل ہے۔ (منفی  $c$  کی صورت میں بھی تصدیق کریں۔)

ب. سیریز تفاعل<sup>۹۱</sup>  $\theta(x)$  درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۳) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(اس نایاب صورت میں جہاں اس کی ضرورت پیش آتی ہو، ہم  $\theta(0)$  کی تعریف  $\frac{1}{2}$  کرتے ہیں۔) دکھائیں کہ  $\delta(x) = d\theta/dx$  ہوگا۔

سوال ۲.۲۵: عدم یقینیت کے اصول کو ۲.۱۲۹ کے تفاعل موج کے لئے پرکھیں۔ اشارہ چونکہ  $\psi$  کے تفرق کا  $x = 0$  پر عدم استمرار پایا جاتا ہے لہذا  $\langle p^2 \rangle$  کا حساب پیچیدہ ہوگا۔ سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کریں۔ جزوی جواب:  $\langle p^2 \rangle = (m\alpha/\hbar)^2$

سوال ۲.۲۶: تفاعل  $\delta(x)$  کا فوری سر تبدیل کیا ہوگا؟ مسئلہ پلانشرل استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۲.۱۴۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

تبصرہ: اس کلیہ دیکھ کر ایک عزت مند ریاضی دان پریشان ضرور ہوگا۔ اگرچہ  $x = 0$  کے لئے یہ مکمل لامتناہی ہے اور  $x \neq 0$  کی صورت میں چونکہ مکمل ہمیشہ کے لئے ارتعاش پذیر رہتا ہے لہذا یہ (صفر یا کسی دوسرے عدد کو) مرکوز نہیں ہوتا ہے۔ اس کی پیوندکاری کے طریقے پائے جاتے ہیں (مثلاً، ہم  $L - L + L$  مکمل لے کر، مساوات ۲.۱۴۴ کو،  $L \rightarrow \infty$  کرتے ہوئے متناہی مکمل کی اوسط قیمت تصور کر سکتے ہیں)۔ یہاں دشواری کا سبب یہ ہے کہ مسئلہ پلانشرل کے (مربع مکالمیت) کی بنیادی شرط کو ڈیلٹا انف عمل مطمئن نہیں کرتا ہے (صفحہ ۶۲ پر مربع مکالمیت کی شرط حاشیہ میں پیش کی گئی ہے)۔ اس کے باوجود مساوات ۲.۱۴۴ نہایت مددگار ثابت ہو سکتا ہے اگر اس کو احتیاط سے استعمال کیا جائے۔

سوال ۲.۲۷: درج ذیل حبڑواں ڈیلٹا انف عمل مخفیہ پر غور کریں جہاں  $\alpha$  اور  $a$  مثبت مستقل ہیں۔

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

۱. اس مخفیہ کا حنا کہ کھینچیں۔

ب. یہ کتنی مقید حالات پیدا کرتا ہے؟  $\alpha = \hbar^2/4ma$  اور  $\alpha = \hbar^2/ma$  کیلئے اجازتی توانائیاں تلاش کریں اور تفصیلات موع کا حنا کہ کھینچیں۔

سوال ۲.۲۸: حبڑواں ڈیلٹا انف عمل کے مخفیہ (سوال ۲.۲۷) کے لئے شرح ترسیل تلاش کریں۔

## ۲.۶ متناہی چوکور کنواں

ہم آخری مثال کے طور پر متناہی چوکور کنویں کا مخفیہ

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (۲.۱۴۵)$$

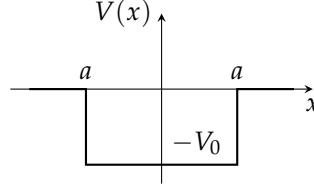
لیتے ہیں جہاں  $V_0$  ایک (مثبت) مستقل ہے (شکل ۲.۱۷)۔ ڈیلٹا انف عمل کنویں کی طرح یہ مخفیہ مقید حالات (جہاں  $E < 0$  ہوگا) کے ساتھ ساتھ بکھراؤ حالات (جہاں  $E > 0$  ہوگا) بھی پیدا کرتا ہے۔ ہم پہلے مقید حالات پر غور کرتے ہیں۔

خط  $x < -a$  میں جہاں مخفیہ صفر ہے، مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

جہاں

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۲.۱۴۶)$$



شکل ۲.۱۷: مستثنائی چوکور کنواں (مساوات ۲.۱۴۵)۔

حقیقی اور مثبت ہے۔ اس کا عمومی حل  $\Psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$  ہے لیکن  $x \rightarrow -\infty$  کے صورت میں اس کا پہلا جزو بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیشہ طرح؛ مساوات ۲.۱۱۹ دیکھیں) طبعی طور پر فتابل مقبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۴۷) \quad \psi(x) = Be^{kx}, \quad x < -a$$

خط  $-a < x < a$  میں جہاں  $V(x) = -V_0$  ہے مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi \quad \text{یا} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -V_0 \psi$$

جہاں  $l$  درج ذیل ہے۔

$$(۲.۱۴۸) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

اگرچہ مقید حالات کے لئے  $E$  منفی ہے تاہم اس  $E > V$  کی بنا پر (سوال ۲.۲ دیکھیں) اس کو  $-V_0$  سے بڑا ہونا ہو گا؛ لہذا  $l$  بھی حقیقی اور مثبت ہوگا۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا<sup>۹۲</sup>

$$(۲.۱۴۹) \quad \psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), \quad -a < x < a$$

جہاں  $C$  اور  $D$  اختیاری مستقلات ہیں۔ آخر میں، خط  $x > a$  جہاں ایک بار پھر مخفیہ صفر ہے؛ عمومی حل  $\psi(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$  ہوگا تاہم  $x \rightarrow \infty$  کی صورت میں دوسرا جزو بے فتابو بڑھتا ہے لہذا فتابل مقبول حل درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۵۰) \quad \psi(x) = Fe^{-kx}, \quad x > a$$

اگلے قدم میں ہمیں سرحدی شرائط ملانے ہوں گے:  $\psi$  اور  $\frac{d\psi}{dx}$  نقاط  $-a$  اور  $a$  پر استمراری ہیں۔ یہ جاننے ہوئے کہ دیانگیا مخفیہ جفت تفاعل ہے، ہم کچھ وقت بچا سکتے ہیں اور فرض کر سکتے ہیں کہ حل مثبت یا طاق

<sup>۹۲</sup> آپ جانتے ہیں تو عمومی حل کو قوت نائی روپ  $(C'e^{ilx} + D'e^{-ilx})$  میں لکھ سکتے ہیں۔ اس سے بھی دبی اختتامی نتائج حاصل ہوں گے، تاہم تشکیلی مخفیہ کی بنا پر ہم جاننے ہیں کہ حل جفت یا طاق ہوں گے، اور  $\sin$  اور  $\cos$  کا استعمال اس حقیقت کو بلا واسطہ بروئے کار لا سکتا ہے۔

ہوں گے (سوال ۲.۱-ج)۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک جانب (مثلاً  $a +$ ) پر سرحدی شرائط مسلط کرنی ہوں گی؛ چونکہ  $\psi(-x) = \pm \psi(x)$  ہے لہذا دوسری جانب کا حل ہمیں خود بخود حاصل ہوگا۔ میں جفت-حل حاصل کرتا ہوں جبکہ آپ کو سوال ۲.۲۹ میں طاق-حل تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔  $\cos$  جفت ہے (جبکہ  $\sin$  طاق ہے) لہذا میں درج ذیل روپ کے حلوں کی تلاش میں ہوں۔

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-\kappa x} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases} \quad (۲.۱۵۱)$$

نقطہ  $x = a$  پر  $\psi(x)$  کی استمراریت درج ذیل کہتی ہے

$$Fe^{-\kappa a} = D \cos(la) \quad (۲.۱۵۲)$$

جبکہ  $\frac{d\psi}{dx}$  کی استمراریت درج ذیل کہتی ہے۔

$$-\kappa Fe^{-\kappa a} = -lD \sin(la) \quad (۲.۱۵۳)$$

مساوات ۲.۱۵۳ کو مساوات ۲.۱۵۲ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\kappa = l \tan(la) \quad (۲.۱۵۴)$$

چونکہ  $\kappa$  اور  $l$  دونوں  $E$  کے تفاعل میں ہیں لہذا اس کلیہ سے احبازتی توانائیاں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ احبازتی توانائی  $E$  کے لئے حل کرنے سے پہلے ہم درج ذیل بہتر علامتیں متعارف کرتے ہیں۔

$$z \equiv la \quad \text{اور} \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad (۲.۱۵۵)$$

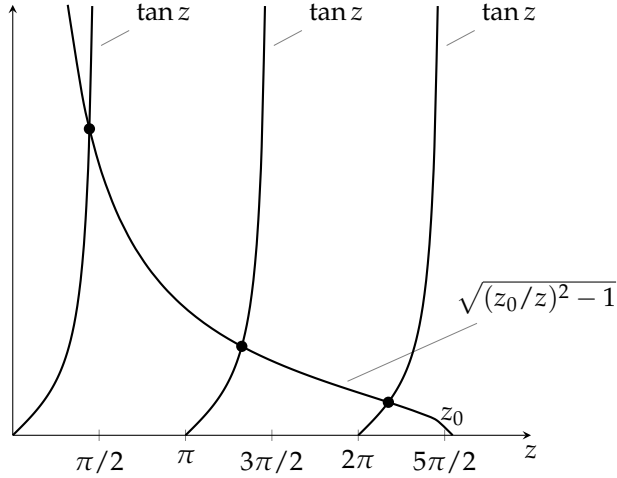
مساوات ۲.۱۴۶ اور ۲.۱۴۸ کے تحت  $(\kappa^2 + l^2) = 2mV_0/\hbar^2$  ہوگا لہذا  $\sqrt{z_0^2 - z^2} = \kappa a$  ہوگا اور مساوات ۲.۱۵۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\tan z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1} \quad (۲.۱۵۶)$$

یہ  $z$  (لہذا  $E$ ) کی ماورائی مساوات ہے جس کا متغیر  $z_0$  ہے (جو کنویں کی ”جہت“ کی ناپ ہے)۔ اس کو اعدادی طریقہ سے کمپیوٹر کے ذریعے حل کیا جاسکتا یا  $\tan z$  اور  $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$  کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقاط تقاطع لیتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے (شکل ۲.۱۸)۔ دو تحدیدی صورتیں زیادہ دلچسپی کے حامل ہیں۔

۱. چوڑا اور گہرا کنواں۔ بہت بڑی  $z_0$  کی صورت میں طاق  $n$  کے لئے نقاط تقاطع  $z_n = n\pi/2$  سے معمولی نیچے ہوں گے؛ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n + V_0 \cong \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} \quad (۲.۱۵۷)$$



شکل ۲.۱۸: تریسیمی حل برائے مساوات ۲.۱۵۶ جہاں  $z_0 = 8$  لیا گیا ہے (جفت حالات)۔

اب  $E + V_0$  کنویں کی تہ سے زیادہ توانائی کو ظاہر کرتی ہے اور مساوات کا دایاں ہاتھ ہمیں  $2a$  چوڑائی کے لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیاں دیتا ہے (مساوات ۲.۲ دیکھیں)؛ بلکہ  $n$  یہاں طاق ہے لہذا توانائیوں کی نصف تعداد حاصل ہوگی۔ (جیسا آپ سوال ۲.۲۹ میں دیکھیں گے کل توانائیوں کی باقی نصف تعداد طاق تفسر موج سے حاصل ہوگی۔) یوں  $V_0 \rightarrow \infty$  کرنے سے مستثنائی چوکور کنواں سے لامستثنائی چوکور کنواں حاصل ہوگا؛ تاہم کسی بھی مستثنائی  $V_0$  کی صورت میں مقید حالات کی تعداد مستثنائی ہوگی۔

ب۔ کم گہرا کم چوڑا کنواں جیسے جیسے  $z_0$  کی قیمت کم کی جاتی ہے مقید حالات کی تعداد کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ آخر کار ( $z_0 < \pi/2$ ) کیلئے جہاں کم ترین طاق حال بھی نہیں پایا جاتا (صرف ایک مقید حال رہ جائے گا۔ دلچسپ بات یہ ہے، کنواں جتنا بھی "کنزور" کیوں نہ ہو، ایک عدد مقید حال ضرور پایا جائے گا۔

اگر آپ  $\psi$  (مساوات ۲.۱۵۱) کی معمول زنی کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں (سوال ۲.۳۰) تو ایسا ضرور کریں جبکہ میں اب بکھراؤ حالات ( $E > 0$ ) کی طرف بڑھنا چاہوں گا۔ بائیں ہاتھ جہاں  $V(x) = 0$  ہے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < -a) \quad (2.158)$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2.159)$$

کنویں کے اندر جہاں  $V(x) = -V_0$  ہے درج ذیل ہوگا

$$\psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad (-a < x < a) \quad (2.160)$$

جہاں پہلے کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۱) \quad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

دائیں جانب، جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کوئی آمدی موج نہیں پائی جاتی، درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۲) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

یہاں آمدی جیٹ  $A$ ، انعکاسی جیٹ  $B$  اور ترسیلی جیٹ  $F$  ہے۔<sup>۹۳</sup>

یہاں چار سرحدی شرائط پائے جاتے ہیں: نقطہ  $-a$  پر  $\psi(x)$  کے استمرار کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۲.۱۶۳) \quad Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

نقطہ  $-a$  پر  $\frac{d\psi}{dx}$  کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۴) \quad ik[Ae^{-ika} - Be^{ika}] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

نقطہ  $+a$  پر  $\psi(x)$  کا استمرار درج ذیل دے گا

$$(۲.۱۶۵) \quad C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika}$$

اور  $+a$  پر  $\frac{d\psi}{dx}$  کا استمرار درج ذیل دے گا۔

$$(۲.۱۶۶) \quad l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika}$$

ہم ان میں سے دو کو استعمال کرتے ہوئے  $C$  اور  $D$  حراج کر کے باقی دو کو  $B$  اور  $F$  کے لئے حل کر سکتے ہیں (سوال ۲.۳۲ دیکھیے)۔

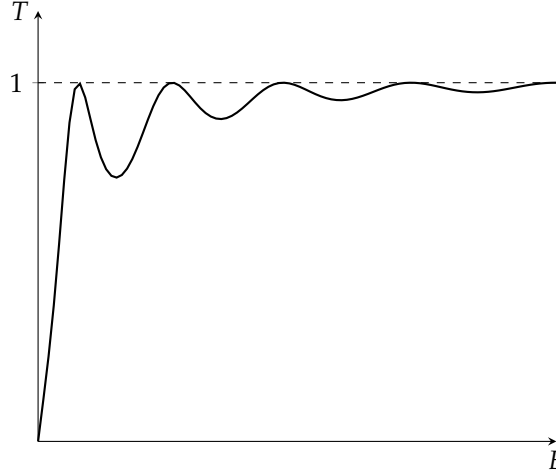
$$(۲.۱۶۷) \quad B = i \frac{\sin(2la)}{2kl} (l^2 - k^2) F$$

$$(۲.۱۶۸) \quad F = \frac{e^{-2ika} A}{\cos(2la) - i \frac{(k^2 + l^2)}{2kl} \sin(2la)}$$

شرح ترسیل  $(T = |F|^2 / |A|^2)$  کو اصل متغیرات کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۲.۱۶۹) \quad T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2 \left( \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \right)$$

<sup>۹۳</sup> متعید حالات کی صورت میں ہم نے طاق اور جفت تفعلات تلاش کیے۔ ہم یہاں بھی ایسا کر سکتے ہیں، تاہم مسئلہ بچر او میں امواج صرف ایک رخ سے آتے ہیں لہذا یہ مسئلہ ذاتی طور پر غیر تشکیلی ہے اور سیاق و سباق کے لحاظ سے (حسرت پذیر امواج کے اظہار کے لئے) قوت نسائی علامت کا استعمال زیادہ موثر ہے۔



شکل ۲.۱۹: ترسیلی مستقل بطور توانائی کا تفاعل (مساوات ۲.۱۶۹)۔

دھیان رہے کہ جہاں بھی سائن کی قیمت صفر ہو، یعنی درج ذیل نقطوں پر جہاں  $n$  عدد صحیح ہے

$$(۲.۱۷۰) \quad \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_n + V_0)} = n\pi$$

وہاں  $T = 1$  (اور کنواں ”مکمل شفاف“) ہوگا۔ یوں مکمل ترسیل کے لیے درکار توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۲.۱۷۱) \quad E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

جو عین لامستثنائی چوکور کنویں کی احبازاتی توانائیاں ہیں۔ شکل ۲.۱۹ میں توانائی کے لحاظ سے  $T$  ترسیم کیا گیا ہے۔<sup>۹۳</sup>

سوال ۲.۲۹: مستثنائی چوکور کنویں کے طاق مقید حال کے تفاعل موج کا تجزیہ کریں۔ احبازاتی توانائیوں کی ماورائی مساوات اخذ کر کے اسے ترسیلی طور پر حل کریں۔ اس کے دونوں تحدیدی صورتوں پر غور کریں۔ کیا ہر صورت ایک طاق مقید حال پایا جائے گا؟

سوال ۲.۳۰: مساوات ۲.۱۵۱ میں دیے گئے  $\psi(x)$  کی معمول زنی کر کے مستقل  $D$  اور  $F$  تعین کریں۔

سوال ۲.۳۱: ڈیراک ڈیلٹا تفاعل کو ایک ایسی مستطیل کی تحدیدی صورت تصور کیا جاسکتا ہے، جس کا رقبہ اکائی (1) رکھتے ہوئے اس کی چوڑائی صفر تک اور فت لامستثنائی تک پہنچائی جائے۔ دکھائیں کہ ڈیلٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) لامستثنائی گہرا ہونے کے باوجود  $0 \rightarrow z_0$  کی بنا پر ایک ”کمزور“ مخفیہ ہے۔ ڈیلٹا تفاعل مخفیہ کو مستثنائی چوکور کنویں کی تحدیدی صورت ایسے ہوئے اس کی مقید حال کی توانائی تعین کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ

<sup>۹۳</sup> اس حیرت کن مظہر کا مشاہدہ تجربہ گاہ میں بطور مزارع وٹاؤنڈا اثر (Ramsauer-Townsend effect) کیا گیا ہے۔

باب ۲. غیر متناہج وقت مساوات شروڈنگر

کا جواب مساوات ۲.۱۲۹ کے مطابق ہے۔ دکھائیں کہ موزوں حد کی صورت میں مساوات ۲.۱۶۹ کی تخفیف مساوات ۲.۱۴۱ دے گی۔

سوال ۲.۳۲: مساوات ۲.۱۶۷ اور ۲.۱۶۸ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۲.۱۶۵ اور ۲.۱۶۶ سے  $C$  اور  $D$  کو  $F$  کی صورت میں حاصل کر کے

$$C = [\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la)] e^{ika} F; \quad D = [\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la)] e^{ika} F$$

انہیں واپس مساوات ۲.۱۶۳ اور ۲.۱۶۴ میں پر کریں۔ شرح ترسیل حاصل کر کے مساوات ۲.۱۲۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۳: مستطیلی رکاوٹ (جسے خط  $-a < x < a$  میں  $V(x) = +V_0 > 0$  سے مساوات ۲.۱۴۵ دیتی ہے) کے لئے شرح ترسیل تعیین کریں۔ تین صورتوں  $E < V_0$ ،  $E = V_0$  اور  $E > V_0$  کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ (آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ کے اندر تینوں صورتوں میں تصاعلی موج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔) جزوی جواب:  $E < V_0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔<sup>۹۵</sup>

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left( \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$$

سوال ۲.۳۴: درج ذیل سیڑھی مخفیہ پر غور کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

ا. شرح انعکاس  $E < V_0$  کی صورت کیلئے حاصل کر کے جواب پر تبصرہ کریں۔

ب. شرح انعکاس  $E > V_0$  کی صورت کے لئے حاصل کریں۔

ج. ایسے مخفیہ کے لئے جو رکاوٹ کے دائیں جانب واپس صفر نہیں ہو جاتا، ترسیلی موج کی رفتار مختلف ہوگی لہذا شرح ترسیل  $|F|^2 / |A|^2$  نہیں ہوگی (جہاں  $A$  آمدی جیٹ اور  $F$  ترسیلی جیٹ ہے)۔ دکھائیں کہ  $E > V_0$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (۲.۱۷۲)$$

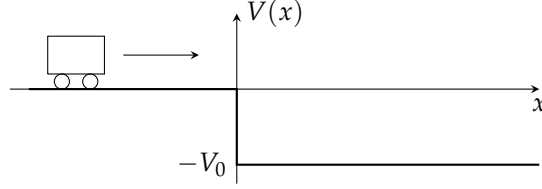
اشارہ: آپ اسے مساوات ۲.۹۸ سے حاصل کر سکتے ہیں؛ یا زیادہ خوبصورتی لیکن کم معلومات کے ساتھ احتمال رد (سوال ۲.۱۹) سے حاصل کر سکتے ہیں۔  $E < V_0$  کی صورت میں  $T$  کیا ہوگا؟

د. صورت  $E > V_0$  کے لئے سیڑھی مخفیہ کے لئے شرح ترسیل تلاش کر کے  $T + R = 1$  کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۳۵: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  اور حرکی توانائی  $E > 0$  ہو مخفیہ کی ایک اچانک گہرائی (شکل ۲.۲۰) کی طرف بڑھتا ہے۔

<sup>۹۵</sup> یہ سرنگ زنی کی ایک اچھی مثال ہے۔ کلاسیکی طور پر ذرہ رکاوٹ سے ٹکرانے کے بعد واپس لوٹے گا۔





شکل ۲.۲۰: عمودی چٹان سے بکھراؤ (سوال ۲.۳۵)۔

۱. صورت  $E = V_0/3$  میں اس کے انعکاس کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: یہ بالکل سوال ۲.۳۴ کی طرح ہے، بس یہاں سیڑھی اوپر کی بجائے نیچے کو ہے۔

ب. میں نے مخفیہ کی شکل و صورت یوں پیش کی ہے گویا ایک گاڑی افقی چٹان سے نیچے گرنے والی ہے تاہم ایسی کھائی سے گاڑی کا ٹکراؤ واپس لوٹنے کا احتمال حبزو-۱ کے نتیجے سے بہت کم ہوگا۔ یہ مخفیہ کیوں ایک افقی چٹان کی صحیح ترجمانی نہیں کرتا ہے؟ اشارہ: شکل ۲.۲۰ میں جیسے ہی گاڑی نقطہ  $x = 0$  پر سے گزرتی ہے، اس کی توانائی عدم استمرار کے ساتھ گر کر  $-V_0$  ہو جاتی ہے؛ کیا یہ نیچے گرتے ہوئی گاڑی کے لیے درست ہوگا؟

ج. ایک نیوٹران مرکزہ میں داخل ہوتے ہوئے مخفیہ میں اچانک کی محسوس کرتا ہے۔ باہر  $V = 0$  جبکہ مرکزہ کے اندر  $V = -12 \text{ MeV}$  ہوتا ہے۔ فرض کریں بذریعہ اشتقاق خارج ایک نیوٹران جس کی حرکی توانائی  $4 \text{ MeV}$  ہو ایک ایسے مرکزہ کو ٹکراتا ہے۔ اس نیوٹران کا جذب ہو کر دوسرا اشتقاق پیدا کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ نے حبزو-۱ میں انعکاس کا احتمال تلاش کیا؛ کلیہ  $T = 1 - R$  استعمال کر کے سطح سے ترسیل کا احتمال حاصل کریں۔

## اضافی سوالات برائے باب ۲

سوال ۲.۳۶: عین مبداء پر  $-a < x < +a$  کے بیچ لامستثنائی چوکور کنویں کے اندر  $V(x) = 0$  اور اس کے باہر  $V(x) = \infty$  ہے۔ غیر تابع وقت مساوات شرودنگر پر موزوں سرحدی شرائط کر کے اسے حل کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کی توانائیاں عین میری حاصل کردہ توانائیوں (مساوات ۲.۲۷) کے مطابق ہیں اور تصدیق کریں کہ میری  $\psi$  (مساوات ۲.۲۸) میں  $(x+a)/2 \rightarrow x$  پر کر کے، موزوں معمول زنی سے آپ کی تمام  $\psi$  حاصل ہوتی ہیں۔ اپنے اولین تین حل ترسیم کریں اور ان کا موازنہ شکل ۲.۲ سے کریں۔ دھیان رہے کہ یہاں کنویں کی چوڑائی  $2a$  ہے۔

سوال ۲.۳۷: لامستثنائی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں ایک ذرے کا ابتدائی تقاعسل موج درج ذیل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

مستقل  $A$  اور  $\Psi(x, t)$  تلاش کر کے وقت کے لحاظ سے  $\langle x \rangle$  کا حساب لگائیں۔ توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہو گی؟ اشارہ:  $\sin^n \theta$  اور  $\cos^n \theta$  کو تخفیف کے بعد  $\sin(m\theta)$  اور  $\cos(m\theta)$  کے خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے جہاں  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  ہوگا۔

سوال ۲.۳۸: کمیت  $m$  کا ایک ذرہ لامستثنائی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں زمینی حال میں ہے۔ احپانک کنویں کا دایاں دیوار  $a$  سے  $2a$  منتقل ہوتا ہے جس سے کنویں کی چوڑائی دگنی ہو جاتی ہے۔ لمبائی طور پر اس عمل سے تفاعل موج اثر انداز نہیں ہوتا۔ اس ذرہ کی توانائی کی پیمائش اب کی جاتی ہے۔

ا. کونسا نتیجہ سب سے زیادہ امکان رکھتا ہے؟ اس نتیجے کے حصول کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. کونسا نتیجہ اس کے بعد زیادہ امکان رکھتا ہے اور اس کا احتمال کیا ہوگا؟

ج. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اشارہ: اگر آپ کو لامستثنائی تسلسل کا سامنا ہو تب کوئی دوسری ترکیب استعمال کریں۔

سوال ۲.۳۹:

ا. دکھائیں کہ لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرہ کا تفاعل موج کو انشائی تجدیدی عرصہ  $T = 4ma^2 / \pi \hbar^2$  کے بعد دوبارہ اپنے اصل روپ میں واپس آتا ہے۔ یعنی (نہ صرف ساکن حال) بلکہ کسی بھی حال کے لئے  $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$  ہوتا ہے۔

ب. دیواروں سے ٹکرا کر دائیں سے بائیں اور بائیں سے دائیں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو کا کلاسیکی تجدیدی عرصہ کیا ہوگا؟

ج. کس توانائی کیلئے یہ تجدیدی عرصہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟<sup>۹۶</sup>

سوال ۲.۴۰: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے درج ذیل مخفی کو میں پایا جاتا ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -32\hbar^2 / ma^2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

ا. اس کے مقید حلوں کی تعداد کیا ہوگی؟

ب. مقید حال میں سب سے زیادہ توانائی کی صورت میں کنویں کے باہر ( $x > a$ ) ذرہ پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب: 0.542، اگرچہ یہ کنویں میں مقید ہے، تاہم اس کا کنویں سے باہر پائے جانے کا امکان زیادہ ہے۔

سوال ۲.۴۱: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے ہارمونی مرتعش کی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے جہاں  $A$  کوئی مستقل ہے۔

$$\Psi(x, 0) = A \left( 1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

ا. توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہے؟

<sup>۹۶</sup> revival time

<sup>۹۷</sup> یہ غور طلب تضاد ہے کہ کلاسیکی اور کوانٹائی تجدیدی عرصوں کا ہر ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور کوانٹائی تجدیدی عرصہ توانائی پر منحصر بھی نہیں ہے۔)

ب. مستقبل کے لمحہ  $T$  پر تفاعل موج درج ذیل ہوگا

$$\Psi(x, T) = B \left( 1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

جہاں  $B$  کوئی مستقل ہے۔ لمحہ  $T$  کی ممکنہ اصل قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۲.۴۲: درج ذیل نصف ہارمونی سرکش کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

(مثلاً ایک ایسا سپرنگ جس کو کھینچا تو جاسکتا ہے لیکن دبایا نہیں جاسکتا ہے۔) اشارہ: اس کو حل کرنے کے لئے آپ کو ایک بار اچھی طرح معنزماری کرنی ہوگی جبکہ حقیقی حساب بہت کم درکار ہوگی۔

سوال ۲.۴۳: آپ نے سوال ۲.۲۲ میں ساکن گاوسی آزاد ذرہ موجی اکٹھ کا تجزیہ کیا۔ اب ابتدائی تفاعل موج

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2} e^{ilx}$$

جہاں  $l$  ایک حقیقی مستقل ہے سے آغاز کرتے ہوئے متحرک گاوسی موجی اکٹھ کے لیے یہی مسئلہ دوبارہ حل کریں۔

سوال ۲.۴۴: مبداء لامستثنائی چوکور کنواں، جس کے وسط پر درج ذیل ڈیلٹا تفاعل عمل رکاوٹ ہو، کے لیے غیر تابع وقت مساوات شرودنگر حل کریں۔

$$V(x) = \begin{cases} \alpha \delta(x) & -a < x < +a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$

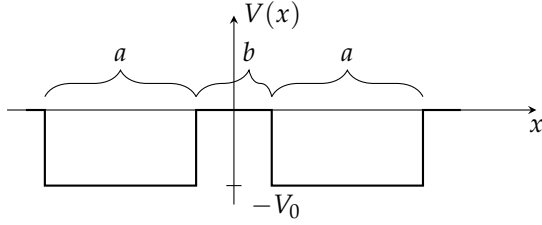
جفت اور طاق تفاعل امواج کو علیحدہ علیحدہ حل کریں۔ ان کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ احبازتی توانائیوں کو (اگر ضرورت پیش آئے) ترمیمی طور پر تلاش کریں۔ ان کا موازنہ ڈیلٹا تفاعل کی غیر موجودگی میں مطابقتی توانائیوں کے ساتھ کریں۔ طاق حلوں پر ڈیلٹا تفاعل کا کوئی اثر نہ ہونے پر تبصرہ کریں۔ تحدیدی صورتیں  $0 \rightarrow a$  اور  $\infty \rightarrow a$  پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۴۵: ایسے دو یا دو سے زیادہ غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کے منفرد<sup>۹۸</sup> حل جن کی توانائی  $E$  ایک جیسی ہو کو **انحطاطی**<sup>۹۹</sup> کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آزاد ذرہ کے حال دوہری انحطاطی ہیں۔ ان میں سے ایک حل دائیں رخ اور دوسرا بائیں رخ حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم ہم نے ایسے کوئی انحطاطی حل نہیں دیکھے جو متبادل معمول زنی ہوں اور یہ محض ایک اتفاق نہیں ہے۔ درج ذیل مسئلہ ثابت کریں: یک بُدی مقید انحطاطی حال نہیں پائے جاتے ہیں۔<sup>۱۰۰</sup> اشارہ:

<sup>۹۸</sup> ایسے دو حل جن میں صرف جزو ضربی کا منفرق پایا جاتا ہو (جن میں، ایک مرتب معمول زنی کرنے کے بعد، صرف دوری جزو  $\phi$  کا منفرق پایا جاتا ہو) درحقیقت ایک ہی حل کو ظاہر کرتے ہیں لہذا انہیں یہاں منفرد نہیں کہا جاسکتا ہے۔ یہاں ”منفرد“ سے مراد ”خطی طور پر غیر تابع“ ہے۔

<sup>۹۹</sup> degenerate

<sup>۱۰۰</sup> جیسا کہ باب ۳ میں دیکھیں گے، بلند ابعاد میں ایسی انحطاطی عمائاتی جاتی ہیں۔ مندرجہ کریں کہ مخفی علیحدہ علیحدہ حصوں پر مشتمل نہیں ہے جن کے سطح میں  $V = \infty$  ہو۔ مثلاً دو تہی لامستثنائی کنویں مقید انحطاطی حال دیں گے جہاں ذرہ ایک یا دوسرے کنویں میں پایا جائے گا۔



شکل ۲.۲۱: دوہرا چوکور کنواں (سوال ۲.۴۷)۔

منرض کریں  $\psi_1$  اور  $\psi_2$  ایسے دو حل ہوں جن کی توانائی،  $E$ ، ایک جیسی ہو۔ حل  $\psi_1$  کی مساوات شرودنگر کو  $\psi_2$  سے ضرب دیں اور اس سے  $\psi_2$  کی مساوات شرودنگر کو  $\psi_1$  سے ضرب دے کر منفی کر کے دکھائیں کہ  $\psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx}$  ایک مستقل ہوگا۔ اب  $\pm\infty$  پر ہر قابل معمول زنی حل،  $\psi \rightarrow 0$  ہوگا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ مستقل درحقیقت صفر ہوگا جس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $\psi_2$  دراصل  $\psi_1$  کا مضرب ہے لہذا یہ حل دو الگ الگ حل نہیں ہو سکتے ہیں۔

سوال ۲.۴۶: منرض کریں کمیت  $m$  کا ایک موتی ایک دائری چھلا پر بے رگڑ حرکت کرتا ہے۔ چھلے کا محیط  $L$  ہے۔ (یہ ایک آزاد ذرہ کی مانند ہے تاہم یہاں  $\psi(x+L) = \psi(x)$  ہوگا) اس کے ساکن حالت تلاش کر کے ان کی معمول زنی کریں اور ان کی مطابقتی اجازتی توانائیاں دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر ایک توانائی  $E_n$  کے لئے دو آپس میں غیر تابَع حل پائے جائیں گے جن میں سے ایک گھڑی وار اور دوسرا خلاف گھڑی حرکت کے لیے ہوگا، جنہیں آپ  $\psi_n^+(x)$  اور  $\psi_n^-(x)$  کہہ سکتے ہیں۔ سوال ۲.۴۵ کے مسئلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ اس انحطاط کے بارے میں کیا کہیں گے (اور یہ مسئلہ یہاں کارآمد کیوں نہیں ہے)؟

سوال ۲.۴۷: آپ کو صرف کتنی تجزیہ کی اجازت ہے حاب کر کے نتیجہ اخذ کرنے کی اجازت نہیں ہے۔ شکل ۲.۲۱ میں دکھائے گئے ”دوہرا چوکور کنواں“ پر غور کریں جہاں گہرائی  $V_0$  اور چوڑائی  $a$  مقررہ ہیں جو اتنے بڑے ضرور ہیں کہ کئی مقید حال ممکن ہوں۔

۱. زمینی تقاعسل موج  $\psi_1$  اور پہلا بوجبان حال  $\psi_2$  کا حنا کہ درج ذیل صورت میں کھینچیں۔

$$b = 0 \quad ۱. \quad b \approx a \quad ۲. \quad b \gg a \quad ۳.$$

ب.  $b$  کی قیمت صفر سے لامتناہی تک بڑھتے ہوئے مطابقتی توانائیاں ( $E_1$  اور  $E_2$ ) کس طرح تبدیل ہوتی ہیں، اس کا کتنی جواب دیں۔  $E_1(b)$  اور  $E_2(b)$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. دو جوہری سالہ میں الیکٹران پر اثر انداز مخفی توانائی کا تاریخی ایک دوری نمونہ دوہرا کنواں پیش کرتا ہے (سرکڑوں کی قوت کشش کو دو کنویں ظاہر کرتی ہیں)۔ اگر سرکڑے آزادی سے حرکت کر سکتے ہوں تب یہ اتل توانائی تشکیل اختیار کریں گے۔ جبزو۔ (ب میں حاصل نتائج کے تحت کیا الیکٹران ان سرکڑوں کو ایک

دوسرے کے متضرب کھینچے گا یا انہیں ایک دوسرے سے دور رہنے پر مجبور کرے گا۔ (اگرچہ دوسرے کڑوں کے بیچ دفع قوت بھی پائی جاتی ہے تاہم اس کی بات یہاں نہیں کی جا رہی ہے۔)

سوال ۲.۳۸: آپ نے مساوات ۲.۳۹ کے تسلسل کا مجموعہ لیتے ہوئے سوال ۲.۷-۲ میں توانائی کی توقعاتی قیمت تلاش کی جہاں حاشیہ میں آپ کو میں نے آگاہ کیا کہ اس کو  $\langle H \rangle = \int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$  کے پرانے طریقے سے حاصل نہ کریں چونکہ  $\psi(x, 0)$  کے پہلے تفرق میں عدم استمرار دوسرے تفرق کو پریشان کن بناتا ہے۔ حقیقت میں آپ مکمل بالخصوص کے ذریعے اسے حل کر سکتے تھے لیکن ڈیراک ڈیلٹا تفاعل اس طرح کے انوکھے مسائل حل کرنے کا ایک بہترین طریقہ فراہم کرتا ہے۔

ا. آپ سوال ۲.۷ میں  $\psi(x, 0)$  کا پہلا تفرق حاصل کر کے اس کو سیڑھی تفاعل  $\theta(x - a/2)$  کی صورت میں لکھیں جسے مساوات ۲.۱۴۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ (آخری سروں کی منکر نہ کریں، صرف اندرونی خط  $0 < x < a$  کے لیے لکھیں۔)

ب. ابتدائی موجی تفاعل  $\psi(x, 0)$  کے دوہرا تفرق کو سوال ۲.۲۴-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

ج. مکمل  $\int \psi(x, 0)^* H \psi(x, 0) dx$  کو حل کر کے اس کی قیمت حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ پہلے حاصل کر چکے ہیں۔

سوال ۲.۳۹:

ا. دکھائیں کہ ہارمونی سر تعلق کی مخفی توانائی (مساوات ۲.۴۳) کے لئے

$$\psi(x, t) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} \left( x^2 + \frac{a^2}{2} (1 + e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t} \right)}$$

تابع وقت مساوات شرودنگر پر پورا اترتا ہے جہاں  $a$  ایک حقیقی مستقل ہے جس کا بُعد لمبائی ہے۔<sup>۱۰</sup>

ب.  $|\psi(x, t)|^2$  تلاش کریں اور موجی اکھ کی حرکت پر تبصرہ کریں۔

ج.  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  کا حساب لگائیں اور دیکھیں آیا مسئلہ ابر نفٹ (مساوات ۱.۳۸) پر یہ پورا اترتے ہیں۔

سوال ۲.۵۰: درج ذیل حرکت کرتے ہوئے ڈیلٹا تفاعل کنویں پر غور کریں

$$V(x, t) = -\alpha \delta(x - vt)$$

جہاں کنویں کی (غیر تغیر) سمتی رفتار کو  $v$  ظاہر کرتا ہے۔

ا. دکھائیں کہ تابع وقت مساوات شرودنگر کا حل درج ذیل ہے

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i[(E + (1/2)m v^2)t - mvx]/\hbar}$$

<sup>۱۰</sup> تابع وقت مساوات شرودنگر کے ٹیکہ ٹیکہ ہندروپ میں حل کی یہ ایک نایاب مثال ہے۔

باب ۲. غنیر تاج وقت مساوات شرودنگر

جہاں  $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$  ساکن ڈیلٹا تفاعل کے مقید حال کی توانائی ہے۔ اشارہ: اس حل کو مساوات شرودنگر میں پُر کر کے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔ سوال ۲.۲۴۔ ب کا نتیجہ استعمال کریں۔  
ب۔ اس حال میں ہیمیلٹن کی توقعاتی قیمت تلاش کر کے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۵۱: درج ذیل مخفیہ پر غور کریں

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax)$$

جہاں  $a$  ایک مثبت مستقل ہے۔

۱۔ اس مخفیہ کو ترسیم کریں۔

ب۔ تصدیق کریں کہ اس مخفیہ کا زمینی حال درج ذیل ہے

$$\psi_0(x) = A \operatorname{sech}(ax)$$

اور اس کی توانائی تلاش کریں۔  $\psi_0$  کی معمول زنی کر کے اس کی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

ج۔ دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کسی بھی (مثبت) توانائی  $E$  کے لیے مساوات شرودنگر کو حل کرتا ہے (جہاں ہمیشہ کی طرح  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے)۔

$$\psi_k(x) = A \left( \frac{ik - a \tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}$$

چونکہ  $z \rightarrow -\infty$  سے  $z \rightarrow -1$   $\tanh z$  ہوگا لہذا  $x$  کی بہت بڑی منفی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا

$$\psi_k(x) \approx A e^{ikx} \quad \text{بڑی منفی } x \text{ کے لیے}$$

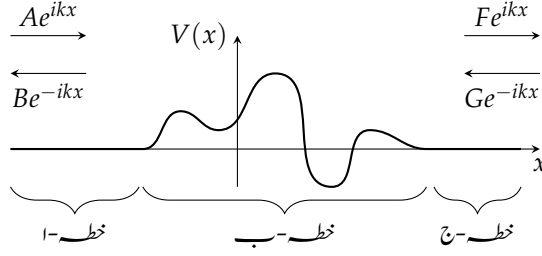
جو  $e^{-ikx}$  کی عدم موجودگی کی بنا، بائیں سے آمد ایک موج کو ظاہر کرتا ہے جس میں کوئی انعکاسی موج نہیں پائی جاتی ہے۔  $x$  کی بڑی مثبت قیمتوں کے لیے  $\psi_k(x)$  کی متغیرابی روپ کیا ہوگی؟ اس مخفیہ کے لیے  $R$  اور  $T$  کیا ہوں گے؟ تبصرہ: یہ بلا انعکاس مخفیہ<sup>۱۰۲</sup> کی ایک بہت مشہور مثال ہے؛ ہر ذرہ، اس سے قطع نظر کہ اس کی توانائی کتنی ہے، اس مخفیہ سے سیدھا گزرتا ہے۔

سوال ۲.۵۲: **قالجہ**۔ بکھراؤ<sup>۱۰۳</sup> امتحانی مخفیہ کے لیے بکھراؤ کا نظریہ ایک عمومی صورت اختیار کرتا ہے (شکل ۲.۲۲)۔ بائیں ہاتھ خطہ-۱ میں  $V(x) = 0$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{جہاں}$$

(۲.۱۴۳)

<sup>۱۰۲</sup> reflectionless potential  
<sup>۱۰۳</sup> scattering matrix



شکل ۲.۲۲: معتمی اختیاری مخفیہ (جو خط-۲ کے علاوہ  $V(x) = 0$  ہے) سے بکھراؤ (سوال ۲.۵۲)۔

دائیں ہاتھ خط-۳ میں بھی  $V(x) = 0$  ہے لہذا یہاں درج ذیل ہوگا

(۲.۱۷۴)

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

ان دونوں کے بیچ خط-۲ میں مخفیہ جانے بغیر میں آپ کو  $\psi$  کے بارے میں کچھ نہیں بتا سکتا، تاہم چونکہ مساوات شروڈنگر خطی اور دور تہی تفرقی ہے لہذا اس کا عمومی حل لازماً درج ذیل روپ کا ہوگا

$$\psi(x) = Cf(x) + Dg(x)$$

جہاں  $f(x)$  اور  $g(x)$  دو خطی غیر تابع مخصوص حل ہیں۔ یہاں چار عدد سرحدی شرائط ہوں گے جن میں سے دو خط-۱ اور ب کو جوڑیں گے اور باقی دو خط-۲ اور ب کو جوڑیں گے۔ ان میں سے دو کو استعمال کر کے  $C$  اور  $D$  کو حارن کرتے ہوئے باقی دو کو حل کر کے  $A$  اور  $G$  کی صورت میں  $B$  اور  $F$  تلاش کیے جاسکتے ہیں:

$$B = S_{11}A + S_{12}G,$$

$$F = S_{21}A + S_{22}G$$

یہ چار عددی سر  $S_{ij}$  جو  $k$  (لہذا  $E$ ) پر منحصر ہیں  $2 \times 2$  متالب  $S$  دیتے ہیں جس کو قالب بکھراؤ<sup>۱۰۴</sup> یا مختصر آقالب  $S$ <sup>۱۰۵</sup> کہتے ہیں۔ متالب  $S$  آپ کو آمدی حیٹوں ( $A$  اور  $G$ ) کی صورت میں رخصتی حیٹوں ( $B$  اور  $F$ ) کی قیمت دیتا ہے:

(۲.۱۷۵)

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

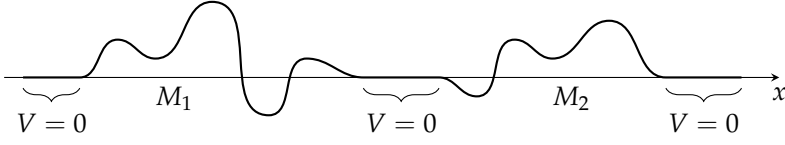
بائیں سے بکھراؤ کی صورت میں  $G = 0$  ہوگا لہذا انعکاسی اور ترسیلی شرح درج ذیل ہوں گی۔

(۲.۱۷۶)

$$R_I = \frac{|B|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{11}|^2,$$

$$T_I = \frac{|F|^2}{|A|^2} \Big|_{G=0} = |S_{21}|^2$$

scattering matrix<sup>۱۰۴</sup>  
S-matrix<sup>۱۰۵</sup>



شکل ۲.۲۳: دو تہا حصوں پر مبنی مخفیہ (سوال ۲.۵۳)۔

دائیں سے بکھراؤ کی صورت میں  $A = 0$  ہو گا لہذا درج ذیل ہوں گے۔

$$(۲.۱۷۷) \quad R_r = \frac{|F|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{22}|^2, \quad T_r = \frac{|B|^2}{|G|^2} \Big|_{A=0} = |S_{12}|^2$$

۱. ڈیٹا انتفاع عمل کنویں (مساوات ۲.۱۱۴) کے لیے بکھراؤ کا تالاب  $S$  تیار کریں۔

ب. لامتناہی چو کور کنویں (مساوات ۲.۱۴۵) کے لیے تالاب  $S$  تیار کریں۔ اشارہ: مسئلہ کی تشکلی پن بروئے کار لائیں۔ نئے کام کی ضرورت نہیں ہوگی۔

سوال ۲.۵۳: **قالبہ ترسیل**۔  $^{۱۰۶}$  اوتالاب  $S$  (سوال ۲.۵۲) آپ کو رخصتی حیطوں ( $F$  اور  $B$ ) کو آمدی حیطوں ( $A$  اور  $G$ ) کی صورت میں پیش کرتا ہے (مساوات ۲.۱۷۵)۔ بعض اوقات ترسیلی تالاب  $M$  کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے جو مخفیہ کے دائیں جانب حیطوں ( $F$  اور  $G$ ) کو بائیں جانب حیطوں ( $A$  اور  $B$ ) کی صورت میں پیش کرتا ہے:

$$(۲.۱۷۸) \quad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ m_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

۱. تالاب  $S$  کے اجزاء کی صورت میں تالاب  $M$  کے چار اجزاء تلاش کریں۔ اسی طرح تالاب  $M$  کے چار اجزاء کی صورت میں تالاب  $S$  کے اجزاء تلاش کریں۔ مساوات ۲.۱۷۶ اور مساوات ۲.۱۷۷ میں دیے گئے  $R_l, T_l, R_r$  اور  $T_r$  کو  $M$  تالاب کے ارکان کی صورت میں لکھیں۔

ب. فرض کریں آپ کے پاس ایک ایسا مخفیہ ہو جو دو تہا ٹکڑوں پر مشتمل ہو (شکل ۲.۲۳)۔ دکھائیں کہ اس پورے نظام کا  $M$  تالاب ان دو حصوں کے انفرادی  $M$  تالاب کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$(۲.۱۷۹) \quad M = M_2 M_1$$

(ظاہر ہے کہ آپ دو سے زیادہ عدد انفرادی مخفیہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ یہی  $M$  تالاب کی اہمیت کا سبب ہے۔)

ج. نقطہ  $a$  پر (درج ذیل) واحد ایک ڈیٹا انتفاع عمل مخفیہ سے بکھراؤ کا  $M$  تالاب تلاش کریں۔

$$V(x) = -\alpha \delta(x - a)$$



د. جبزو-ب کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے دوہرا ڈیلٹا تفاع عمل

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

کے لیے  $M$  متاثر تلاش کریں۔ اس مخفیہ کی ترسیمی شرح کیا ہوگی؟

سوال ۲.۵۴: دم ہلانے کی ترکیب سے ہارمونی سرعش کی زمینی حال توانائیوں کو پانچ معنی خیز ہندسوں تک تلاش کریں۔ یعنی  $K$  کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات ۲.۴۲ کو اعدادی طریقہ سے یوں حل کریں کہ  $\epsilon$  کی بڑی قیمت کے لیے حاصل تفاع عمل موج صفر تک پہنچنے کی کوشش کرے۔ مائیکروٹیکامیں درج ذیل پُر کرنے سے ایسا ہوگا

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[u[x] /. \text{NDSolve}[u''[x] - (x^2 - K) * u[x] == 0, u[0] == 1, u'[0] == 0, \\ u[x], x, 10^{-8}, 10, \text{MaxSteps} \rightarrow 10\,000]], x, a, b, \text{PlotRange} \rightarrow c, d]$$

یہاں  $a, b$  ترسیم کی افقی سمت جبکہ  $c, d$  انضابی سمت ہے (ابتدا  $a = 0, b = 10, c = -10$  اور  $d = 10$  سے کریں)۔ ہم جاننے ہیں کہ اس کا درست جواب  $K = 1$  ہے لہذا آپ  $K = 0.9$  سے شروع کر سکتے ہیں۔ تفاع عمل موج کی ”دم“ پر نظر رکھیں۔ اب  $K = 1.1$  لیں، آپ دیکھیں گے کہ دم دوسری طرف پلٹ جائے گی۔ ان دونوں کے بیچ کہیں درست حل موجود ہے۔  $K$  کی قیمت کو درست قیمت کے دونوں اطراف قریب سے قریب لانے سے درست جواب حاصل ہوگا۔

سوال ۲.۵۵: دم ہلانے کا طریقہ (سوال ۲.۵۴) استعمال کرتے ہوئے ہارمونی سرعش کے ہیجان حال توانائی کو پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ پہلی اور تیسری ہیجان حال کے لیے آپ کو  $u[0] = 0$  اور  $u'[0] = 1$  لینا ہوگا۔

سوال ۲.۵۶: دم ہلانے کی ترکیب سے لامتناہی چوکور کنویں کی اولین چار توانائیوں کی قیمتیں پانچ با معنی ہندسوں تک تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۲.۵۴ کی تفرقی مساوات میں درکار تبدیلیاں لائیں۔ اس بار آپ کو  $u(1) = 0$  چاہتے ہیں۔



## باب ۳

### قواعد و ضوابط

#### ۳.۱ ہلبرٹ فضا

گزشتہ دو ابواب میں سادہ ہارمونی نظاموں کے چند دلچسپ خواص ہماری نظروں سے گزرے۔ ان میں سے چند ایک مخصوص مخفیہ کے ”ناگہاں“ خدوخال تھے (مثلاً ہارمونی سر تعش میں توانائی کی سطح میں جفت و ناصلے) جبکہ باقی (مثلاً عدم یقینیت کا اصول اور ساکن حالات کی عمودیت) زیادہ عمومی معلوم ہوتے ہیں، جنہیں ایک ہی مرتبہ ثابت کرنا مفید ہوگا۔ اس کو مد نظر رکھتے ہوئے اس باب میں نظریہ کو زیادہ مضبوط روپ میں پیش کیا جائے گا۔ یہاں کوئی نئی بات نہیں کی جائے گی بلکہ مخصوص صورتوں میں دیکھے گئے خواص سے معقول نتائج اخذ کیے جائیں گے۔

کوانٹائی نظریہ کا دار و مدار تناسل موج اور عاملین کے تصور پر مبنی ہے۔ نظام کے حال کو تناسل موج ظاہر کرتا ہے جبکہ متابل مشاہدہ کو عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ تناسل موج، ریاضیاتی طور پر، تصوراتی سمتیہ<sup>۱</sup> کی تعریفی شرائط پر پورے اترتے ہیں؛ جبکہ عاملین ان پر خطی متبادلہ<sup>۲</sup> کا عمل کرتے ہیں۔ یوں کوانٹائی میکانیات کی قدرتی زبان خطی الجبرا<sup>۳</sup> ہے۔

مجھے خدشہ ہے کہ یہاں مستعمل خطی الجبرا سے آپ واقف نہیں ہوں گے۔ سمتیہ  $\langle \alpha |$  کو  $N$  بعدی فضا میں کسی مخصوص

<sup>۱</sup>vectors

<sup>۲</sup>linear transformations

<sup>۳</sup>linear algebra

<sup>۴</sup>آگے بڑھنے سے پہلے بہتر ہوگا کہ آپ ضمیمہ پڑھ کر خطی الجبرا سیکھیں۔

معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے  $N$  عدد اجزاء  $\{a_n\}$  سے ظاہر کرنا سادہ ترین ثابت ہوتا ہے۔

$$|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (۳.۱)$$

دو سمتیات کا اندرونی ضرب<sup>۵</sup>  $\langle\alpha|\beta\rangle$  (تین ابعادی نقطہ ضرب کو وسعت دیتے ہوئے) درج ذیل مخلوط عدد ہوگا۔

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_N^* b_N \quad (۳.۲)$$

خطی تبدل<sup>۶</sup>  $T$ ، کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے)  $Q$  والے<sup>۷</sup> سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو تالیبی ضرب کے سادہ قواعد کے تحت سمتیات پر عمل کرتے (ہوئے نئے سمتیات پیدا کرتے) ہیں:

$$|\beta\rangle = T|\alpha\rangle \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (۳.۳)$$

کوانٹائی میکانیات میں پائے جانے والے ”سمتیات“ درحقیقت (زیادہ تر) تفاعلات ہوتے ہیں جو لامتناہی بُعدی فضا میں بستے ہیں۔ انہیں  $N$  اجزائی تالیبی علامت سے ظاہر کرنا زیادہ ٹھیک نہیں ہوگا اور مستثنائی ابعاد میں سمجھ آنے والی ٹھیک وضاحتیں، لامتناہی ابعاد میں پریشان کن ثابت ہو سکتی ہیں۔ (اس کی بنیادی وجہ یہ ہے کہ مساوات ۳.۲ کا مستثنائی مجموعہ ہر صورت موجود ہوتا ہے، البتہ، لامتناہی مجموعہ یا مکمل، عدم سرکوزیت کا شکار ہو سکتا ہے، اور ایسی صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہوگی لہذا اندرونی ضرب پر مبنی کوئی بھی دلیل مشکوک ہوگی۔) یوں اگرچہ خطی الجبرا کی اصطلاحات اور علامتیت سے آپ واقف ہوں گے، مگر بحال ہوشیار رہنا بہتر ہوگا۔

متغیر  $x$  کے تمام تفاعلات مسل کر سکتی فضا قائم کرتے ہیں، جو ہمارے مقصد کے لئے ضرورت سے زیادہ بڑی فضا ہے۔ کسی بھی ممکن طبعی حال کو ظاہر کرنے کے لیے لازم ہے کہ تفاعل موج  $\Psi$  معمول شدہ ہو:

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

کسی مخصوص وقفہ پر تمام مربع مکالمہ تفاعلات<sup>۸</sup>

$$f(x) \quad \text{جہاں} \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{ہو} \quad (۳.۴)$$

inner product<sup>۵</sup>  
matrices<sup>۶</sup>

ہمارے لئے حدود ( $a$  اور  $b$ ) تقریباً ہر مرتبہ  $\pm\infty$  ہوں گی، تاہم یہاں چیزوں کو زیادہ عمومی رکھنا بہتر ہوگا۔  
square-integrable functions<sup>۸</sup>

مسئلہ (۱) اس سے بہت چھوٹی) سمتی فضا قائم کرتے ہیں (سوال ۱.۳-۱۰ دیکھیں)۔ ریاضی دان اسے  $L_2(a, b)$  جبکہ ماہر طبیعیات اسے ہلبرٹ فضا<sup>۹</sup> کہتے ہیں۔ یوں کوٹائی میکانیات میں

(۳.۵) **تفاعلات موج ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔**

دو تفاعلات کے اندرونی ضربے کی تعریف درج ذیل ہے جہاں  $f(x)$  اور  $g(x)$  تفاعلات ہیں۔

$$(۳.۶) \quad \langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

اگر  $f$  اور  $g$  دونوں مربع یکساں ہوں (یعنی دونوں ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہوں)، تب ہم ضمانت کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ ان کی اندرونی ضرب موجود ہوگی (ساوات ۳.۶ کا مکمل ایک متناہی عدد<sup>۱۱</sup> پر مرکوز ہوگا)۔ ایسا شواہد عدم مساوات<sup>۱۲</sup> کے درج ذیل نگلی روپ<sup>۱۳</sup> کے پیش نظر ہوگا۔

$$(۳.۷) \quad \left| \int_a^b f(x)^* g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات ۳.۶ اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر پوری اترتی ہے (سوال ۱.۳-ب)۔ بالخصوص درج ذیل مساوات میں ہم دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۳.۸) \quad \langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$$

مزید  $f(x)$  کی اپنے ہی ساتھ اندرونی ضرب

$$(۳.۹) \quad \langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Hilbert space<sup>۹</sup>

۱۰. تکنیکی طور پر، ہلبرٹ فضا سے مراد مکمل اندرونی ضرب فضا ہے، اور مربع یکساں تفاعلات کا ذخیرہ ہلبرٹ فضا کی قطعاً ایک مثال ہے؛ درحقیقت، ہر متناہی ابعادی سمتی فضا ایک بے وقعت ہلبرٹ فضا ہوگی۔ چونکہ  $L_2$  کوٹائی میکانیات کا اکھاڑا ہے لہذا ماہر طبیعیات اسی کو ”ہلبرٹ فضا“ کہتے ہیں۔ ویسے یہاں لفظ مکمل سے مراد یہ ہے کہ ہلبرٹ فضا کے کسی بھی تفاعل کی کوئی ترتیب جس تفاعل پر مرکوز ہو، وہ اسی فضا میں پایا جائے۔ اس میں کوئی ”سوراخ“ نہیں پایا جاتا، جیسا کہ تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ میں کوئی سوراخ نہیں پایا جاتا (اس کے برعکس، مثالاً، تمام کثیر درجہ کی فضا میں اور تمام ناطق اعداد کے سلسلہ میں بقسینا سوراخ پائے جاتے ہیں)۔ فضا کی مکملیت کا تفاعل کے سلسلہ کی مکملیت کے ساتھ (ایک ہی لفظ استعمال کیے جانے کے باوجود) کوئی تعلق نہیں۔ تفاعلات کی مکملیت سے مراد یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل کو ان تفاعلات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔  
۱۱. باب ۲ میں بعض اوقات ہمیں محسوس ہوتا ہے کہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا پڑا۔ ایسے تفاعلات ہلبرٹ فضا سے باہر لیتے ہیں، اور جیسا آپ جلد دیکھیں گے، انہیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں احتیاط کرنی ہوگی۔ ابھی کے لئے میں مندرجہ کر رہا ہوں کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں لیتے ہیں۔

Schwarz inequality<sup>۱۲</sup>

۱۳. متناہی ابعادی سمتی فضا میں شواہد عدم مساوات  $\langle \alpha|\alpha \rangle \langle \beta|\beta \rangle \geq |\langle \alpha|\beta \rangle|^2$  کو ثابت کرنا آسان ہے (صفحہ ۳۵۵ پر سوال A-۵ دیکھیں)۔ تاہم یہ ثبوت مندرجہ کر رہا ہے کہ جن تفاعلات سے ہمیں واسطہ ہے وہ ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں، جبکہ ہم یہاں اسی حقیقت کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

حقیقی اور غیر منفی ہوگی؛ یہ صرف اس صورت<sup>۱۴</sup> میں صفر ہوگی جب  $f(x) = 0$  ہو۔

ایک تفاعل اس صورت میں معمول<sup>۱۵</sup> شدہ کہلاتا ہے جب اس کی اپنی ہی ساتھ اندرونی ضرب ایک (1) کے برابر ہو؛ دو تفاعلات اس صورت میں عمودی<sup>۱۶</sup> ہوں گے جب ان کی اندرونی ضرب صفر (0) ہو؛ اور تفاعلات کا سلسلہ  $\{f_n\}$  اس صورت میں معیاری<sup>۱۷</sup> عمودی<sup>۱۸</sup> ہوگا جب تمام تفاعلات (درج ذیل دیکھیں) معمول شدہ اور باہمی عمودی ہوں۔

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۱۰)$$

آخر میں، تفاعلوں کا ایک سلسلہ اس صورت میں مکمل<sup>۱۸</sup> ہوگا جب (لمبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت (درج ذیل دیکھیں) میں لکھا جاسکے۔

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (۳.۱۱)$$

معیاری عمودی تفاعلات  $\{f_n(x)\}$  کے عددی سر، فوریئر تسلسل کے عددی سروں کی طرح حاصل کیے جاتے ہیں:

$$c_n = \langle f_n | f \rangle \quad (۳.۱۲)$$

جس کی تصدیق آپ خود کر سکتے ہیں۔ میں نے باب ۲ میں یہی اصطلاح استعمال کی تھی۔ (لا متناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات) (مساوات ۲.۲۸) وقفہ  $(0, a)$  پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں؛ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات (مساوات ۲.۶۷ یا مساوات ۲.۸۵) وقفہ  $(-\infty, \infty)$  پر مکمل معیاری عمودی سلسلہ دیتے ہیں۔

سوال ۳:

ا. ظاہر کریں کہ تمام مربع میکا مل تفاعلات کا سلسلہ مستی فضا دے گا (صفحہ ۴۴۹ پر ضمیمہ A-۱ میں تعریف کا موازنہ کریں)۔ اشارہ: آپ نے دکھانا ہوگا کہ دو مربع میکا مل تفاعلات کا مجموعہ خود مربع میکا مل تفاعل ہوگا۔ مساوات ۳.۱۳ استعمال کریں۔ کیا تمام عمودی تفاعلات کا سلسلہ مستی فضا ہوگا؟

ب. ظاہر کریں کہ مساوات ۳.۶ کا مکمل، اندرونی ضرب (ضمیمہ A-۲) کی تمام شرائط پر پورا اترتا ہے۔

<sup>۱۴</sup> ایسے تفاعل کے لئے کیا کہا جاسکتا ہے جو چند مخصوص تنہا نقاط کے علاوہ ہر مقام پر صفر ہوں؟ اگرچہ تفاعل معدوم نہیں ہے لیکن مکمل (مساوات ۳.۹) اب بھی معدوم ہوگا۔ اگر آپ کو اس بات پر تشویش ہو تو آپ کو ریاضی پڑھنی چاہیے۔ طبییات میں ایسے سمجھیر تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں، تاہم لمبرٹ فضا میں ایسے دو تفاعلات، جن کے مربع مکمل برابر ہوں، کو معادل تصور کیا جاتا ہے۔ تکنیکی طور پر لمبرٹ فضا میں ترسیلات در حقیقت تفاعلات کی تعادل<sup>۱۷</sup> جماعت<sup>۱۸</sup> کو ظاہر کرتی ہیں۔

normalized<sup>۱۵</sup>  
orthogonal<sup>۱۶</sup>  
orthonormal<sup>۱۷</sup>  
complete<sup>۱۸</sup>

سوال ۳.۲:

۱. وقفہ  $(0, 1)$  کے بیچ، متغیر  $v$  کے کس خطہ پر، تعامل  $x^v = f(x)$  ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہے؟ فرض کر لیں کہ  $v$  حقیقی تاہم ضروری نہیں کہ مثبت ہو۔

ب. کیا  $v = \frac{1}{2}$  کی مخصوص صورت میں  $f(x)$  ہلبرٹ فضا میں پایا جائے گا؟ تعامل  $x f(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ تعامل  $(\frac{d}{dx})f(x)$  کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

## ۳.۲ قابل مشاہدہ

۳.۲.۱ ہر مشی عاملین

قابل مشاہدہ  $Q(x, p)$  کی توقعاتی قیمت کو نہایت خوش اسلوبی سے اندرونی ضرب علامت<sup>۱۹</sup>:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle \quad (۳.۱۳)$$

کی صورت میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ اب پیش کش کا نتیجہ ہر صورت حقیقی ہوگا، لہذا بہت ساری پیش کشوں کی اوسط بھی حقیقی (درج ذیل دیکھیں) ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^* \quad (۳.۱۴)$$

لیکن اندرونی ضرب کا مخلوط جوڑی دار ترتیب کو الٹ دیتا ہے (ساواۓ ۳.۸) لہذا ہماری ساواۓ درج ذیل ہو جائے گی

$$\langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{Q} | \Psi | \Psi \rangle^* \quad (۳.۱۵)$$

جو لازماً کسی بھی تعامل موج  $\Psi$  کے لئے درست ہوگی۔ یوں قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے عاملین میں درج ذیل اہم خاصیت پائی جاتی ہے۔

$$\langle f | \hat{Q} | f \rangle = \langle \hat{Q} | f | f \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ کے لئے} \quad (۳.۱۶)$$

ایسے عاملین کو ہم ہر مشی<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں۔

<sup>۱۹</sup> یاد رہے کہ  $\hat{p} = (\hbar/i) d/dx$  پر  $p$  کے  $Q$  سے عامل  $\hat{Q}$  حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ عاملین اس لحاظ سے غلط ہوتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد  $a$  اور  $b$  اور تعامل  $f$  اور  $g$  کے لئے  $a\hat{Q}f(x) + b\hat{Q}g(x) = \hat{Q}[af(x) + bg(x)]$  ہوگا۔ یہ تمام تعاملات کی فضا پر خطی متبادل (ضمیمہ ۳-۸) متانم کرتے ہیں۔ اگرچہ بعض اوقات یہ ہلبرٹ فضا کے اندر کے تعامل کو باہر کے تعامل میں لے جاتے ہیں (سوال ۳.۲-ب)، اور ایسی صورت میں ہمیں عامل کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنے کی ضرورت پیش آسکتی ہے۔

<sup>۲۰</sup> hermitian

درحقیقت زیادہ تر کتابوں میں (درج ذیل) بظاہر زیادہ سخت شرط عامہ کی جاتی ہے۔

$$\langle f | Qg \rangle = \langle Qf | g \rangle \quad \text{تمام } f(x) \text{ اور تمام } g(x) \text{ کے لئے} \quad (۳.۱۷)$$

تاہم مختلف نظر آنے کے باوجود، جیسا آپ سوال ۳.۳ میں ثابت کریں گے، یہ شرط میری پیش کردہ تعریف (مساوات ۳.۱۶) کی عین معادل ہے۔ یوں جو تعریف آپ کو آسان لگتی ہو، آپ اسی کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اصل نکتہ یہ ہے کہ ہر مشی عامل کو اندرونی ضرب کے اول یا دوم رکن پر لاگو کرنے سے نتیجہ تبدیل نہیں ہوتا، اور کو انشائی میکانیات میں ہر مشی عاملین اس لئے قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں کہ ان کی توقعاتی قیمتیں حقیقی ہوتی ہیں۔

قابل مشاہدہ کو ہر مشی عاملین ظاہر کرتے ہیں۔ (۳.۱۸)

آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ مثلاً، کیا معیار حرکت کا عامل ہر مشی ہے؟

$$\langle f | \hat{p}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\hbar}{i} \frac{dg}{dx} dx = \frac{\hbar}{i} f^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} \right)^* g dx = \langle \hat{p}f | g \rangle \quad (۳.۱۹)$$

میں نے مکمل بالخصوص استعمال کیا ہے اور چونکہ  $f(x)$  اور  $g(x)$  مربع مکامل ہیں لہذا  $\pm\infty$  پر ان دونوں کو صفر تک بانٹنا چاہیے<sup>۲۱</sup> جس کی بنا پر مکمل میں سرحدی اجزاء کو رد کیا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مکمل بالخصوص سے پیدا منفی کی علامت کو  $i$  کے مخلوط جوڑی دار سے حاصل منفی کی علامت ختم کرتی ہے۔ عامل  $d/dx$  (جس میں  $i$  نہیں پایا جاتا) غیر ہر مشی ہے اور یہ کسی بھی قابل مشاہدہ کو ظاہر نہیں کرتا۔

سوال ۳.۳: ظاہر کریں کہ اگر (مربع فضا میں) تمام تفاعل  $h$  کے لیے  $\langle \hat{Q}h | h \rangle = \langle h | \hat{Q}h \rangle$  ہو تب تمام  $f$  اور  $g$  کے لیے  $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$  ہوگا (یعنی مساوات ۳.۱۶ اور مساوات ۳.۱۷ میں ہر مشی کی تعریفات معادل ہیں)۔ اشارہ: پہلے  $h = f + g$  اور بعد میں  $h = f + ig$  لیں۔

سوال ۳.۴:

ا. دکھائیں کہ دو ہر مشی عاملین کا مجموعہ خود بھی ہر مشی ہوگا۔

ب. فرض کریں  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے اور  $\alpha$  ایک مخلوط عدد ہے۔  $\alpha$  پر کیا شرائط عامہ کرنے سے  $\alpha \hat{Q}$  بھی ہر مشی ہوگا؟

ج. دو ہر مشی عاملین کا حاصل ضرب کب ہر مشی ہوگا؟

د. دکھائیں کہ عامل مقام ( $\hat{x} = x$ ) اور ہیمیلٹنی عامل ( $\hat{H} = -(\hbar^2/2m) d^2/dx^2 + V(x)$ ) ہر مشی ہیں۔

<sup>۲۱</sup> حقیقت میں ایسا ضروری نہیں ہے۔ جیسا میں نے باب ۱ میں ذکر کیا، ایسے گھمبیر تفاعلات پائے جاتے ہیں جو مربع مکامل ہونے کے باوجود لامتناہی پر صفر کو نہیں پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ایسے تفاعلات طبیعیات میں نہیں پائے جاتے، لیکن اگر آپ اس کے باوجود اس حقیقت کو نظر انداز نہیں کر سکتے تو ہم عاملین کے دائرہ کار کو یوں پابند کر دیتے ہیں کہ یہ شامل نہ ہوں۔ متناہی وقفے پر آپ کو سرحدی اجزاء پر زیادہ دھیان دینا ہوگا کیونکہ  $(-\infty, \infty)$  پر ہر مشی عامل،  $(0, \infty)$  یا  $(-\pi, \pi)$  پر غیر ہر مشی ہو سکتا ہے۔ اگر آپ لامتناہی چوکور کنویں کے بارے میں سوچ رہے ہوں تب تصور کریں کہ تفاعلات موج لامتناہی لکسیر پر پائے جاتے ہیں؛ جو کسی وجہ سے  $(0, a)$  کے باہر صفر ہیں۔



سوال ۳.۵: عامل  $\hat{Q}$  کا ہر مشی جوڑی دار<sup>۲۲</sup> یا شریکے حامل<sup>۲۳</sup>  $\hat{Q}^+$  درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(۳.۲۰) \quad \langle f | \hat{Q} g \rangle = \langle \hat{Q}^+ f | g \rangle \quad (\text{تمام } f \text{ اور } g \text{ کے لئے})$$

یوں ہر مشی عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر  $(\hat{Q} = \hat{Q}^+)$  گا۔

۱.  $x, i$  اور  $d/dx$  کے ہر مشی جوڑی دار تلاش کریں۔

ب. ہارمونی مرتعش کے عامل رفعت  $a_+$  (مساوات ۲.۴) کا ہر مشی جوڑی دار تیار کریں۔

ج. دکھائیں کہ  $(\hat{Q}\hat{R})^+ = \hat{R}^+\hat{Q}^+$  ہوگا۔

### ۳.۲.۲ تعیین حال

عام طور پر بالکل یکساں تیار کردہ نظاموں کے مندرجہ، جس میں تمام  $\psi$  ایک حال میں ہوں، پر قابل مشاہدہ  $Q$  کی پیمائش سے ہر مرتبہ ایک جیسے نتائج حاصل نہیں ہوں گے؛ یہ ہے کوانٹائی میکانیات کی عدم تعینیت<sup>۲۴</sup>۔ سوال: کیا ایسا ممکن ہوگا کہ ہم کوئی ایسا حال تیار کریں جہاں  $Q$  کی ہر پیمائش کوئی مخصوص قیمت (جسے ہم  $q$  کہہ لیں) دے؟ اس کو آپ قابل مشاہدہ  $Q$  کا تعیین حال<sup>۲۵</sup> کہہ سکتے ہیں۔ (درحقیقت، ہم ایسی ایک مثال دیکھ چکے ہیں: ساکن حالات، ہیملٹنی کے تعیین حالات ہیں؛ ساکن حال  $\Psi_n$  میں ایک ذرے کی کل توانائی کی پیمائش ہر صورت مطابقتی ”اجازتی“ توانائی  $E_n$  دیگی۔)

تعیین حال میں  $Q$  کا معیاری انحراف صفر ہوگا جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۲۱) \quad \sigma^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle \Psi | (\hat{Q} - q)^2 \Psi \rangle = \langle (\hat{Q} - q) \Psi | (\hat{Q} - q) \Psi \rangle = 0$$

(اب اگر ہر پیمائش  $q$  دے تب ظاہر ہے کہ اوسط قیمت بھی  $q$  ہوگی:  $\langle Q \rangle = q$ ۔ چونکہ  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے لہذا  $\hat{Q} - q$  بھی ہر مشی عامل ہوگا؛ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے میں نے اندرونی ضرب کے ایک جنز و ضربی  $(\hat{Q} - q)$  کو بائیں منتقل کیا ہے۔) تاہم ایسا واحد نظام جس کی خود اپنے ساتھ اندرونی ضرب معدوم ہو جاتی ہو، 0 ہے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۲) \quad \hat{Q}\Psi = q\Psi$$

یہ عامل  $\hat{Q}$  کی امتیازی قیمتے مساوات<sup>۲۶</sup> ہے؛  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل<sup>۲۷</sup>  $\Psi$  اور مطابقتی امتیازی قیمتے<sup>۲۸</sup>  $q$  ہے۔ یوں

hermitian conjugate<sup>۲۲</sup>

adjoint<sup>۲۳</sup>

<sup>۲۴</sup> ظاہر ہے، میں درست پیمائش کی بات کر رہا ہوں؛ کسی غلطی کی بنا پر غلط پیمائش کی بات نہیں کی جارہی ہے، جس کو کوانٹائی

میکانیات سے نہیں جوازا جاسکتا

determinate state<sup>۲۵</sup>

eigenvalue equation<sup>۲۶</sup>

eigenfunction<sup>۲۷</sup>

eigenvalue<sup>۲۸</sup>

درج ذیل ہوگا۔

(۳.۲۳) **تعیین حالات  $\hat{Q}$  کے امتیازی تفاعلات ہوں گے۔**

ایسے حال پر  $Q$  کی پیمائش لازماً امتیازی قیمت  $q$  دیگی۔

دھیان رہے کہ امتیازی قیمت ایک عدد ہے (نہ کہ عامل یا تفاعل)۔ امتیازی تفاعل کو کسی مستقل سے ضرب دینے سے امتیازی تفاعل ہی حاصل ہوتا ہے، جس کی امتیازی قیمت وہی ہوگی۔ ضمناً امتیازی تفاعل نہیں لیا جاسکتا؛ (ہم تعریفاً اس کو امتیازی تفاعلات میں شامل نہیں کرتے؛ ورنہ کسی بھی عامل  $\hat{Q}$  اور تمام  $q$  کے لیے  $\hat{Q}0 = q0 = 0$  ہوگا جس کی بنا پر ہر عدد ایک امتیازی قیمت ہوگا)۔ ہاں امتیازی قیمت کے ضمناً ہونے میں کوئی قباحت نہیں ہے۔ کسی عامل کی تمام امتیازی قیمتوں کو اکٹھا کرنے سے اس عامل کا طیف<sup>۲۹</sup> حاصل ہوگا۔ بعض اوقات دو (یا دو سے زیادہ) خطی غیر تانب امتیازی تفاعلات کی امتیازی قیمت ایک جتنی ہوگی؛ ایسے طیف کو **انحطاطی**<sup>۳۰</sup> طیف کہا جاتا ہے۔

مشال کے طور پر، کل توانائی کے تعین حالات، ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہوں گے:

$$(۳.۲۴) \quad \hat{H}\psi = E\psi$$

جو بالکل غیر تانب وقت مساوات شروع کرتے ہیں۔ اس سیاق و سباق میں ہم امتیازی قیمت کے لیے حرف  $E$  اور امتیازی تفاعل کے لیے (یونانی چھوٹا حرف)  $\psi$  استعمال کرتے ہیں (جس کے ساتھ  $e^{-iEt/\hbar}$  چسپاں کر کے  $\Psi$  حاصل کیا جاسکتا ہے؛ جواب بھی  $H$  کا امتیازی تفاعل ہوگا)۔

مشال ۳: درج ذیل عامل پر غور کریں جہاں  $\phi$ ، ہمیشہ کی طرح، دو البادی قطبی محدود کا متغیر ہے۔

$$(۳.۲۵) \quad \hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$$

(یہ عامل سوال ۲.۴۶ میں کارآمد ثابت ہو سکتا تھا)۔ کیا  $\hat{Q}$  ہر مثنیٰ ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی قیمتیں تلاش کریں۔

**حل:** یہاں ہم مستثنائی وقفے  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  پر تفاعلات  $f(\phi)$  کے ساتھ کام کر رہے ہیں جہاں  $\phi$  اور  $\phi + 2\pi$  ایک ہی طبعی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۲۶) \quad f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

تکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے یہ نتیجہ ملے گا

$$\langle f | \hat{Q}g \rangle = \int_0^{2\pi} f^* \left( i \frac{dg}{d\phi} \right) d\phi = i f^* g \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} i \left( \frac{df^*}{d\phi} \right) g d\phi = \langle \hat{Q}f | g \rangle$$

لہذا  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے (یہاں مساوات ۳.۲۶ کی بنا پر سرحدی جزو خارج ہو جائے گا)۔  
امتیازی قیمت مساوات:

$$i \frac{d}{d\phi} f(\phi) = q f(\phi) \quad (3.24)$$

کامیابی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f(\phi) = A e^{-iq\phi} \quad (3.28)$$

$q$  کی ممکن قیمتیں کو مساوات ۳.۲۶ درج ذیل رہنے کا پابند بناتی ہے۔

$$e^{-iq2\pi} = 1 \Rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.29)$$

□

اس عامل کا طیف تمام صحیح اعداد پر مشتمل ہوگا اور یہ غیر انخطی ہے۔

سوال ۳.۶: عامل  $\hat{Q} = d^2 / d\phi^2$  پر غور کریں جہاں (مثال ۳.۱ کی طرح) تفاعلات مساوات ۳.۲۶ پر پورا اترتے ہیں اور  $\phi$  قطبی محدود میں انتہی زاویہ ہے۔ کیا  $\hat{Q}$  ہر مشی ہے؟ اس کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی قیمتیں تلاش کریں۔ عامل  $\hat{Q}$  کا طیف تلاش کریں۔ کیا طیف انخطی ہے؟

### ۳.۳ ہر مشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہر مشی عاملین کے امتیازی تفاعل (جو طبعی طور پر متبادل مشاہدہ کے تعیین حالات ہیں) کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف غیر مسلسل<sup>۳۱</sup> ہو (یعنی امتیازی قیمتیں الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جانے کے اور یہ طبعی طور پر متبادل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف استمراری<sup>۳۲</sup> ہو (یعنی امتیازی قیمتیں ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات نا متبادل معمول زنی ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکن تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی قیمتوں کی ایک وسعت موجود ہوگی، متبادل معمول زنی ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہوگا (مثلاً ہارمونی سر نقش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہوگا (مثلاً آزاد ذرے کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہوگا (مثلاً مستحالی چو کو رکنوس کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نہایت زیادہ آسان ہے چونکہ ان کی متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گی؛ در حقیقت یہ مستحالی البادی نظریہ (ہر مشی متبادل کے امتیازی سمتیات) سے بہت مشابہت رکھتا ہے۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

## ۳.۳.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہر مشی عامل کے متابل معمول زنی امتیازی تفاعل میں دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کی امتیازی قیمتیں حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل  $f$  اور امتیازی قیمت  $q$  ہو) اور <sup>۳۳</sup>

$$\langle f | \hat{Q}f \rangle = \langle \hat{Q}f | f \rangle$$

ہو ( $\hat{Q}$  ہر مشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

(چونکہ  $q$  ایک عدد ہے لہذا اس کو مکمل سے باہر نکالا جاسکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات ۳.۶) لہذا دائیں طرف  $q$  بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم  $\langle f | f \rangle$  صفر نہیں ہو سکتا ہے (متانوں کے تحت  $f(x) = 0$  امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا) لہذا  $q = q^*$  یعنی  $q$  حقیقی ہوگا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعیین حال میں ایک ذرے کے متابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: منفرد امتیازی قیمتوں کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں:

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

اور  $\hat{Q}$  ہر مشی ہو، تب  $\langle f | \hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f | g \rangle$  ہوگا، لہذا

$$q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

ہوگا۔ (یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کی اندرونی ضربیں موجود ہوں گی)۔ اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت)  $q$  حقیقی ہے، لہذا  $q' \neq q$  کی صورت میں  $\langle f | g \rangle = 0$  ہوگا۔

□

<sup>۳۳</sup> یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دوسری صورت میں اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتی ہے۔

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چوکور کنویں یا مثال کے طور پر ہارمونی سر تعیش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی قیمتوں والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعین حالات کی بھی ہوگی۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں اخطاطی حالات ( $q' = q$ ) کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک جیسی امتیازی قیمت رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قیمت والا امتیازی حال ہوگا (سوال ۳.۱-۱) اور ہم گرام شد ترکیبے عمودیت<sup>۳۴</sup> (صفحہ ۴۵۴ پر سوال ۴-۱) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک اخطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات مرتب کر سکتے ہیں۔ اصولاً ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہوگا، تاہم (اللہ کا شکر ہے) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ یوں اخطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹائی میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم مندرجہ کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فورسٹر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اسی تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

مستثنائے بعدی سمتی فضا میں ہر مٹی متالاب کے امتیازی سمتیے تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیے کو ان کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے)۔ بد قسمتی سے لامتناہی بعدی فضاوں میں اس خاصیت کے لئے ثبوت نہیں ہے۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹائی میکانیات کے اندرونی ثبات کیلئے لازمی ہے، لہذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسئلہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہر مٹی عاملین پر عائد شرط) لیتے ہیں۔

مسئلہ: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔<sup>۳۵</sup>

سوال ۳.۷:

ا. مندرجہ کریں کہ عامل  $\hat{Q}$  کے دو امتیازی تفاعلات  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہیں اور ان دونوں کی امتیازی قیمت  $q$  ہے۔ دکھائیں کہ  $f$  اور  $g$  کا ہر خطی جوڑ خود  $\hat{Q}$  کا امتیازی تفاعل ہوگا اور اس کی امتیازی قیمت  $q$  ہوگی۔

ب. تصدیق کریں کہ  $f(x) = e^x$  اور  $g(x) = e^{-x}$  عامل  $d^2/dx^2$  کے امتیازی تفاعلات ہیں اور ان کی امتیازی قیمت برابر ہے۔ تفاعل  $f$  اور  $g$  کے ایسے دو خطی جوڑ بنائیں جو وقفہ  $(-1, 1)$  پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۸:

ا. تصدیق کریں کہ مثال ۳.۱ میں ہر مٹی عامل کی امتیازی قیمتیں حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی قیمتوں کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال ۳.۶ کے عامل کے لیے کریں۔

<sup>۳۴</sup> Gram-Schmidt orthogonalization process

<sup>۳۵</sup> چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جاسکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چوکور کنویں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ صرف چند صورتوں میں قابل ثبوت بات کو مسئلہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

## ۳.۳.۲ استمراری طیف

ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کی اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات ناقابل معمول زنی ہوں گے۔ اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقت، عمودیت اور کمبلت) اب بھی کارآمد ہوں گی۔ اس پر اسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہوگا۔

مثال ۳.۲: عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی قیمتیں تلاش کریں۔

ط: فرض کریں کہ  $p$  اس کی امتیازی قیمت اور  $f_p(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۰) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$$

چونکہ  $p$  کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ مربع مکمل نہیں ہے؛ اس لئے ہلبرٹ فضا میں عامل معیار حرکت کا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی قیمتوں تک اپنے آپ کو محدود رکھیں تو ہمیں متبادل ”معیاری عمودیت“ حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۳۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar} dx = |A|^2 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

اگر ہم  $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$  لیں تب

$$(۳.۳۲) \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

لہذا

$$(۳.۳۳) \quad \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')$$

ہوگا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات ۳.۱۰) کی یاد دلاتی ہے؛ یہ اشاریے استمراری متغیر ہیں، اور کرونیٹر ڈیلٹا ڈیراک ڈیلٹا بن گیا ہے؛ تاہم اس کے علاوہ یہ ایک جیسی نظر آتی ہیں۔ میں مساوات ۳.۳۳ کو ڈیراک معیاری عمودیت کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات مکمل ہیں اور ان کے مجموعے (مساوات ۳.۱۱) کی جگہ اب مکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (مربع مکمل) تفاعل  $f(x)$  کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳۴) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

تو سیعی عددی سر (جواب تفاعل  $c(p)$  ہوگا) کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$(۳.۳۵) \quad \langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \langle f_{p'} | f \rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \delta(p - p') dp = c(p')$$

چونکہ یہ توسیع (مساوات ۳.۳۴) درحقیقت ایک فورسٹر تبدیل ہے لہذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳۲) سائن نہیں جن کا طول موج درج ذیل ہے۔

$$(۳.۳۶) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت مناسب وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ، ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پر اسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعین ہوں۔ ہاں ہم قابل معول زنی ایسا موجی اکٹھ بن سکتے ہیں جس کے معیار حرکت کی سرعت مختصر سی ہوگی اور ڈی بروگلی کا تعلق اس پر لاگو ہوگا۔

ہم مثال ۳.۲ سے کیا سمجھیں؟ اگرچہ  $\hbar$  کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کتبہ (جن کی امتیازی قیمتیں حقیقی ہوں گی) مقرر ہی ”مضامات“ میں رہتا ہے اور یہ بظاہر قابل معول زنی ہے۔ یہ ممکن طبعی حالات کو ظاہر نہیں کرتے، لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا کہ ہم یکم بعدی بکسراؤ کو پڑھتے ہوئے دیکھ چکے ہیں)۔<sup>۳۷</sup>

مثال ۳.۳: عامل مقام کی امتیازی قیمتیں اور امتیازی تفاعلات تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ  $y$  امتیازی قیمت اور  $g_y(x)$  امتیازی تفاعل ہے۔

$$(۳.۳۷) \quad x g_y(x) = y g_y(x)$$

یہاں (کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے)  $y$  ایک مقررہ عدد، جبکہ  $x$  استمراری متغیر ہے۔ متغیر  $x$  کا ایسا کون سا تفاعل ہوگا جس کی خاصیت یہ ہو کہ اسے  $x$  سے ضرب دینا، اس کو  $y$  سے ضرب دینے کے

<sup>۳۷</sup> غیر حقیقی امتیازی قیمتوں والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ یہ نہ صرف نا قابل معول زنی ہے بلکہ  $\pm\infty$  پر بے متناہز ہوتے ہیں۔ اس خطے میں، جس کو میں ”مضامات“ کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کی اپنی (مستثنائی) اندرونی ضرب نہیں پائی جاتی، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ لیکن ایسا  $\hbar$  کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہوگا جن کی امتیازی قیمتیں غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے عامل معیار حرکت ہر مشی ہوگا، اگرچہ اس کی دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات ۳.۱۹ میں) سرحدی جہز کو رد کیا گیا۔ (جب تک  $\hbar$  ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہوگا جب  $\hbar$  کا امتیازی تفاعل  $g$  ہو جس کی امتیازی قیمت حقیقی ہو، تاہم امتیازی قیمت کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل  $\hbar$  کی امتیازی قیمت ہوگا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہر مشی عامل  $\hbar$  کی امتیازی قیمتیں ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطے سے باہر پائے جاتے ہیں جس میں  $\hbar$  ہر مشی ہو۔

مستردانف ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نقطہ  $x = y$  کے ایسی خاصیت والا تفاعل صفر ہی ہوگا؛ یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل کے علاوہ اور کچھ نہیں۔

$$g_y(x) = A\delta(x - y)$$

اس مرتبہ امتیازی قیمت کو لازماً حقیقی ہونا چاہیے؛ امتیازی تفاعلات مربع میکانکس میں ہیں، تاہم اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں۔

$$(۳.۳۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x) dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y') \delta(x - y) dx = |A|^2 \delta(y - y')$$

اگر ہم  $A = 1$  لیں تاکہ

$$(۳.۳۹) \quad g_y(x) = \delta(x - y)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۰) \quad \langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y - y')$$

یہ امتیازی تفاعلات بھی مکمل ہیں:

$$(۳.۴۱) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) g_y(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y) \delta(x - y) dy,$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۲) \quad c(y) = f(y)$$

(جس کا حصول اس مثال میں نہایت آسان تھا، تاہم آپ اس کو فورسیر کی ترکیب سے بھی حاصل کر سکتے ہیں)۔ □

اگر کسی ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہو (جس کی امتیازی قیمتوں کو استمراری متغیر  $p$  یا یہاں پیش مثالوں میں  $y$ ، اور بعد ازاں عموماً  $z$  کا نام دیا جائے گا)، تو اس کے امتیازی تفاعلات نامتابل معمولی ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جائیں گے اور کسی بھی ممکنہ طبعی حال کو ظاہر نہیں کریں گے؛ ہاں حقیقی امتیازی قیمتوں والے امتیازی تفاعلات ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں اور مکمل ہوتے ہیں (وہاں مجموعے کی جگہ اب مکمل استعمال ہوگا)۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا۔

سوال ۳.۹:

۱. باب ۲ سے (ہارمونی سر تعش کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو۔

ب. باب ۲ سے (آزاد ذرہ کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کا طیف صرف استمراری ہو۔



ج. باب ۲ سے (مستثنائی چوکور کنویں کے علاوہ) ایک ایسے ہیملٹنی کی نشاندہی کریں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہو۔

سوال ۱۰: ۳. کیا لامستثنائی چوکور کنویں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تب اس کا معیار حرکت کیا ہوگا؟ اگر ایسا نہیں ہے تب ایسا کیوں نہیں ہے؟

### ۳.۴. متمم شماراتی مفہوم

ایک ذرے کا کسی مخصوص مقام پر پائے جانے کے احتمال کا حساب، اور کسی متابل مشاہدہ مقدار کی توقعاتی قیمت تعیین کرنا میں نے آپ کو باب ۱ میں دکھایا۔ باب ۲ میں آپ نے توانائی کی پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنا سیکھا۔ میں اب متمم شماراتی مفہوم<sup>۳۸</sup> پیش کر سکتا ہوں جس میں یہ تمام شامل ہیں اور جو ہمیں ہر پیمائش کے ممکنہ نتائج اور ان کا احتمال حاصل کرنے کے متابل بناتی ہے۔ متمم شماراتی مفہوم اور مساوات شرودنگر (جو وقت کے ساتھ تفاعل موج کی ارتقاء کے بارے میں ہمیں بتاتی ہے) کو انشائی میکانیات کی بنیاد ہے۔

متمم شماراتی مفہوم: حال  $\Psi(x, t)$  میں ایک ذرے کی ایک متابل مشاہدہ  $Q(x, P)$  کی پیمائش ہر صورت ہر مشی حاصل  $\hat{Q}(x, -i\hbar d/dx)$  کی کوئی ایک امتیازی قیمت دے گی۔ اگر  $\hat{Q}$  کا طیف غیر مسلسل ہو تب معیاری عمودی امتیازی تفاعل  $f_n(x)$  سے منسلک کوئی مخصوص امتیازی قیمت  $q_n$  کے حصول کا احتمال

$$|c_n|^2 \text{ ہوگا جہاں } c_n = \langle f_n | \Psi \rangle \text{ ہے۔} \quad (۳.۴۳)$$

استمراری طیف کی صورت میں جہاں امتیازی قیمتیں  $q(z)$  حقیقی ہوں اور منسلک ڈیراک معیاری عمودی امتیازی تفاعلات  $f_z(x)$  ہوں، سعت  $dz$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال

$$|c(z)|^2 dz \text{ ہوگا جہاں } c(z) = \langle f_z | \Psi \rangle \text{ ہوگا۔} \quad (۳.۴۴)$$

پیمائشی عمل کے بنا پر تفاعل موج مطابقتی امتیازی حال پر منہدم<sup>۳۹</sup> ہوتا ہے۔<sup>۴۰</sup>

شماراتی مفہوم ان تمام تصورات سے یکسر مختلف ہے جو کلاسیکی طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔ اس کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھنا بہتر ہوگا: چونکہ ایک متابل مشاہدہ عامل کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے لہذا تفاعل موج کو ان کا ایک خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (۳.۴۵)$$

generalized statistical interpretation<sup>۳۸</sup>  
collapse<sup>۳۹</sup>

<sup>۴۰</sup> استمراری طیف کی صورت میں پیمائشی قیمت کے گرد و نواہ میں، پیمائشی آلہ کی حقیقت پر منحصر محدود سعت پر، تفاعل موج منہدم ہوگا۔

(اپنی آسانی کے لیے میں فرض کرتا ہوں کہ طیف غیر مسلسل ہے؛ اس دلیل کو با آسانی وسعت دے کر استمراری صورت کے لئے پیش کیا جاسکتا ہے۔) چونکہ امتیازی تفاعل معیاری عمودی ہیں لہذا ان کے عددی سر کو فورسٹر ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔<sup>۴۱</sup>

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle = \int f_n(x) * \Psi(x, t) dx \quad (۳.۴۶)$$

کینی طور پر ” $\Psi$  میں  $f_n$  کی مقدار“ کو  $c_n$  ظاہر کرتی ہے اور چونکہ کوئی ایک پیمائش  $\hat{Q}$  کی کوئی ایک امتیازی قیمت دے گی لہذا اہم توقع کرتے ہیں کہ اس مخصوص امتیازی قیمت  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $\Psi$  میں ” $f_n$  کی مقدار“ پر منحصر ہوگا۔ اب چونکہ احتمال کو تفاعل عمل موج کی مطلق قیمت کا مربع تعین کرتا ہے لہذا پیمائش کی ٹھیک ٹھیک قیمت  $|c_n|^2$  ہوگی۔ متعمد شمار یا قی مفہوم کا یہ ایک اثر ہے۔<sup>۴۲</sup>

ہاں (تمام ممکنہ نتائج کا) کل احتمال اکائی کے برابر ہوگا

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (۳.۴۷)$$

جو یقیناً تفاعل عمل موج کی معمول زنی کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle f_{n'} | f_n \rangle \\ &= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \quad (۳.۴۸)$$

اسی طرح تمام ممکنہ امتیازی قیمتوں کو انفرادی طور پر اس قیمت کے حصول کے احتمال کے ساتھ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لینے سے  $Q$  کی توقعاتی قیمت حاصل ہوگی۔

$$\langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2. \quad (۳.۴۹)$$

یقیناً درج ذیل ہوگا

$$\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \left( \sum_{n'} c_{n'} f_{n'} \right) \middle| \left( \hat{Q} \sum_n c_n f_n \right) \right\rangle \quad (۳.۵۰)$$

<sup>۴۱</sup> دھیان رہے کہ تابعیت وقت، جو یہاں مسئلہ خیز نہیں ہے، عددی سروں کا حصہ ہے۔ اس کو واضح رکھنے کی خاطر ہمیں  $c_n(t)$  لکھنا چاہیے۔

<sup>۴۲</sup> یہاں بھی احتیاط سے کام لیتے ہوئے میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ ”اس ذرے کا حاصل  $f_n$  میں پائے جانے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے۔“ ایسا کہنا بالکل غلط ہوگا۔ صرف یہ کہنا درست ہوگا کہ ذرہ حال  $\Psi$  میں ہے۔ ہاں  $Q$  کی پیمائش سے قیمت  $q_n$  کے حصول کا احتمال  $|c_n|^2$  ہوگا۔ ایسی پیمائش اس حال کو تفاعل عمل موج  $f_n$  پر منہدم کرتی ہے لہذا اہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ذرہ جو حال  $\Psi$  میں ہے، اس کا  $Q$  کی پیمائش کے بعد حال  $f_n$  میں ہونے کا احتمال  $|c_n|^2$  ہے، وغیرہ وغیرہ، تاہم یہ ایک بالکل مختلف دعویٰ ہے۔

جسے  $\hat{Q}f_n = q_n f_n$  کی بدولت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۵۱) \quad \langle Q \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \langle f_{n'} | f_n \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n q_n \delta_{n' n} \sum_n q_n |c_n|^2.$$

کم از کم یہاں تک، چیزیں ٹھیک نظر آرہی ہیں۔

کیا ہم مقام کی پیمائش کی اصل شماریاتی مفہوم کو اس زبان میں پیش کر سکتے ہیں؟ جی ہاں! اگرچہ یہ توپ سے چومارنے والی بات ہوگی، آئیں اس کی تصدیق کرتے ہیں۔ حال  $\Psi$  میں ایک ذرے کے لیے  $x$  کی پیمائش لازماً عامل مقام کا کوئی ایک امتیازی قیمت دے گا۔ ہم مثال ۳.۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ ہر (حقیقی) عدد  $y$  متغیر  $x$  کا امتیازی قیمت ہوگا، اور اس کا مطابقتی (ذیراک معیاری عمومی) امتیازی تفاعل  $g_y(x) = \delta(x - y)$  ہوگا۔ ظاہر اُدرج ذیل ہوگا

$$(۳.۵۲) \quad c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \Psi(x, t) dx = \Psi(y, t)$$

لہذا سعت  $dy$  میں نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|\Psi(y, t)|^2$  ہوگا جو ٹھیک اصل شماریاتی مفہوم ہے۔

معیار حرکت کے لیے کیا ہوگا؟ ہم مثال ۳.۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ عامل معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات  $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$  ہوں گے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۳) \quad c(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$$

یہ اتنی اہم معتد ار ہے کہ ہم اسے ایک مخصوص نام سے پکارتے اور ایک مخصوص علامت سے ظاہر کرتے ہیں: اس کو معیار حرکت فضا تفاعل موج پکارا اور  $\Phi(p, t)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ درحقیقت (مقامی فضا) تفاعل موج  $\Psi(x, t)$  کا فورسیر بدل ہے جو مسئلہ پلانشرال کے تحت اس کا الٹ فورسیر بدل ہے ہوگا۔

$$(۳.۵۴) \quad \Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx,$$

$$(۳.۵۵) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp,$$

متعمم شماریاتی مفہوم کے تحت سعت  $dp$  میں معیار حرکت کی پیمائش کے حصول کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۶) \quad |\Phi(p, t)|^2 dp$$

مثال ۳.۴: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے ڈیلٹا تفاعل کنواں  $V(x) = -\alpha\delta(x)$  میں مقید ہے۔ معیار حرکت کی پیمائش کا  $p_0 = m\alpha/\hbar$  سے بڑی قیمت دینے کا احتمال کیا ہے؟

حل: اس کا (مقامی فنکشن) انتفاض عمل موج (مساوات ۲.۱۲۹) درج ذیل ہے (جس میں  $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$  ہے)۔

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} e^{-iEt/\hbar}$$

یوں معیار حرکی فنکشن انتفاض عمل موج درج ذیل ہوگا۔

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2} e^{-iEt/\hbar}}{p^2 + p_0^2}$$

(میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔ یوں احتمال درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} p_0^3 \int_{p_0}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + p_0^2)^2} dp &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{pp_0}{p^2 + p_0^2} + \tan^{-1} \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] \Big|_{p_0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.0908 \end{aligned}$$

□

(اور یہاں بھی میں نے مکمل کا حل جدول سے دیکھ کر لکھا ہے)۔

سوال ۳.۱۱: ہارموننی مرتعش کے زمینی حال میں ایک ذرے کی معیاری حرکی فنکشن انتفاض عمل موج  $\Phi(p, t)$  تلاش کریں۔ اس حال میں (اسی توانائی کے) ایک ذرہ کے  $p$  کی پیشکش کا کلاسیکی سمت کے باہر نتیجہ کا احتمال (دو یا معنی ہندسوں تک) کیا ہوگا؟ اشارہ: جواب کے عددی حصے کے لئے ”عمومی تقسیم“ یا ”انتفاض خلل“ کے جدول سے مدد لیں یا کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۳.۱۲: درج ذیل دکھائیں۔

$$(۳.۵۷) \quad \langle x \rangle = \int \Phi^* \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Phi dp.$$

اشارہ: دھیان رہے کہ  $xe^{(ipx/\hbar)} = -i\hbar \left( \frac{d}{dp} \right) e^{(ipx/\hbar)}$  ہے۔

یوں معیار حرکی فنکشن میں عامل مقام  $i\hbar \partial/\partial p$  ہوگا۔ عمومی طور پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۸) \quad \langle Q(x, p) \rangle = \begin{cases} \int \Psi^* \hat{Q} \left( x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx, & \text{مقامی فنکشن میں} \\ \int \Phi^* \hat{Q} \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p}, p \right) \Phi dp, & \text{معیار حرکی فنکشن میں} \end{cases}$$

اصولی طور پر آپ تمام حساب و کتاب مقامی فنکشن کی بجائے معیار حرکی فنکشن میں کر سکتے ہیں (اگرچہ ایسا کرنا عموماً اتنا آسان نہیں ہوگا)۔

## ۳.۵ اصول عدم یقینیت

میں نے عدم یقینیت کے اصول کو  $\hbar/2$  کی صورت میں حصہ ۱.۶ میں بیان کیا جس کو آپ کئی سوالات حل کرتے ہوئے دیکھ چکے ہیں۔ تاہم اس کا ثبوت ہم نے ابھی تک پیش نہیں کیا ہے۔ اس حصہ میں ہم اصول عدم یقینیت کی عمومی صورت پیش کریں گے اور اس کے چند مضمرات جانیں گے۔ ثبوت کا دلیل خوبصورت ضرور ہے لیکن ساتھ ہی پیچیدہ بھی ہے لہذا اتوجہ رکھیں۔

## ۳.۵.۱ اصول عدم یقینیت کا ثبوت

کسی بھی متابل مشاہدہ  $A$  کے لیے درج ذیل ہوگا (مساوات ۳.۲۱):

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

جہاں  $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi$  ہے۔ اسی طرح کسی دوسرے متابل مشاہدہ  $B$  کے لیے

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{ہوگا جہاں} \quad g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi$$

یوں (شوارز عدم مساوات مساوات ۳.۷ کے تحت) درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۵۹) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

اب کسی بھی مخلوط عدد  $z$  کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۶۰) \quad |z|^2 = [\langle \text{حقیقی}(z) \rangle]^2 + [\langle \text{خیالی}(z) \rangle]^2 \geq [\langle \text{خیالی}(z) \rangle]^2 = \left[ \frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$$

یوں  $z = \langle f | g \rangle$  لیتے ہوئے

$$(۳.۶۱) \quad \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} [\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle] \right)^2$$

ہوگا لیکن  $\langle f | g \rangle$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} - \hat{A} \langle B \rangle - \hat{B} \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle) \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} \hat{B} \Psi) - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\langle g|f\rangle = \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

لہذا

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle \hat{A}\hat{B}\rangle - \langle \hat{B}\hat{A}\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle,$$

ہوگا جہاں

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ان دو عاملین کا مقابلہ ہے (مساوات ۲.۴۸ ہے)۔ نتیجتاً درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (۳.۶۲)$$

یہ اصول عدم یقینیت<sup>۴۴</sup> کی عمومی صورت ہے۔ آپ یہاں سوچ سکتے ہیں کہ اس مساوات کا دایاں ہاتھ منفی ہے؟ یقیناً ایسا نہیں ہے؛ دوسری مشی عاملین کے مقابلہ میں بھی  $i$  کا جذبہ پایا جاتا ہے جو اس مساوات میں موجود  $i$  کے ساتھ کٹ جاتا ہے۔<sup>۴۵</sup>

مثال کے طور پر، فرض کریں مقام ( $\hat{A} = x$ ) پہلا اور معیار حرکت ( $\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ ) دوسرا تابل مشاہدہ ہے۔ ہم باب ۲ (مساوات ۲.۵۱) میں ان کا مقابلہ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

حاصل کر چکے ہیں لہذا

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left( \frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2$$

یا، چونکہ تعریف کی رو سے معیاری انحراف مثبت ہوتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۳)$$

یہ اصل ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت ہے، جو زیادہ عمومی مسئلے کی ایک مخصوص صورت ہے۔

حقیقتاً ہر دو تابل مشاہدہ جوڑی جن کے عاملین غیر متقابل ہوں گے لیے ایک عدد ”اصول عدم یقینیت“ پایا جاتا ہے؛ ہم انہیں غیر ہم آہنگ تابل مشاہدہ<sup>۴۶</sup> کہتے ہیں۔ غیر ہم آہنگ تابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تقاضا عمل نہیں پائے

uncertainty principle<sup>۴۴</sup>

<sup>۴۵</sup> یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ دوسری مشی عاملین کا مقابلہ خود مخالف ہر مشی ( $\hat{Q}^+ = -\hat{Q}$ ) ہوگا اور اس کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی (سوال ۳.۲۶)۔

incompatible observables<sup>۴۶</sup>

جاتے؛ کم از کم ان کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں ہوگا (سوال ۳.۱۵ دیکھیں)۔ اس کے برعکس ہم آہنگ (مقلوب) متابل مشاہدہ کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ ممکن ہے۔<sup>۴۷</sup>

مثال کے طور پر، (جیسا ہم باب ۴ میں دیکھیں گے) ہائیڈروجن جوہر کا ہیملٹنی، اس کی زاویائی معیار حرکت کی مقدار، اور زاویائی معیار حرکت کا  $z$  جزو باہمی ہم آہنگ متابل مشاہدہ ہیں، اور ہم ان تینوں کے بیک وقت امتیازی تفاعل تیار کر کے انہیں متعلقہ امتیازی قیمتوں کے لحاظ سے نام دیں گے۔ اس کے برعکس، چونکہ معتام اور معیار حرکت عاملین غیر ہم آہنگ ہیں لہذا معتام کا ایسا کوئی امتیازی تفاعل نہیں پایا جاتا جو معیار حرکت کا بھی امتیازی تفاعل ہو۔

یاد رہے کہ اصول عدم یقینیت کو انشائی نظریہ میں ایک اضافی مفروضہ نہیں ہے، بلکہ یہ شماراتی مفہوم کا ایک نتیجہ ہے۔ آپ تعجب سے پوچھ سکتے ہیں کہ تجربہ گاہ میں ہم ایک ذرے کا معتام اور معیار حرکت دونوں کیوں تعین نہیں کر سکتے ہیں؟ آپ یقیناً ایک ذرے کا معتام ناپ سکتے ہیں تاہم اس پیمائش سے تفاعل موج ایک نقطے پر نوکیلی صورت اختیار کرتے ہوئے منہدم ہوتا ہے، اور آپ (فوریسر نظریہ سے) جانتے ہیں کہ طول موج کی وسیع وسعت نوکیلی تفاعل موج پیدا کرتی ہے، لہذا اس کے معیار حرکت کی وسعت بھی زیادہ ہو گی۔ اب اگر آپ ذرے کی معیار حرکت کی پیمائش کریں تو یہ حال ایک لمبی سائنس موج پر منہدم ہوگا، جس کا طول موج (اب) پوری طرح معین لیکن معتام پہلی پیمائش سے مختلف ہوگا۔<sup>۴۸</sup> مسئلہ یہ ہے کہ دوسری پیمائش پہلی پیمائش کے نتیجے کو غیر متمثل کرتی ہے۔ صرف اس صورت دوسری پیمائش ذرے کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگی جب تفاعل موج بیک وقت دونوں متابل مشاہدہ کا امتیازی حال ہو (ایسی صورت میں دوسری پیمائش سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا)۔ تاہم ایسا عموماً متنبہ ممکن ہوگا جب دونوں متابل مشاہدہ ہم آہنگ ہوں۔

سوال ۳.۱۳:

۱. درج ذیل مماثل مقلوب ثابت کریں۔

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (3.14)$$

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$[x^n, p] = i\hbar nx^{n-1}$$

<sup>۴۷</sup> یہ اس حقیقت کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے کہ غیر متقابلوں کو ہیک وقت وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے (یعنی، انہیں ایک حسیبی میٹابہ تبادلہ سے وتری نہیں بنایا جاسکتا ہے)، جبکہ مقلوب ہر متقابلوں کو ہیک وقت وتری بنایا جاسکتا ہے۔ حصہ ۵-A دیکھیں۔

<sup>۴۸</sup> جناب بوہر کو یہ ڈھونڈنے میں کافی دشواری پیش آئی کہ (مثلاً)  $x$  کی پیمائش کی طرح اس سے قبل موجود  $p$  کی قیمت کو تباہ کرتی ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی پیمائش کے لئے ضروری ہے کہ ذرے کو کسی طرح کریداجائے، مثلاً اس پر شعاع روشن کی جائے۔ تاہم ایسے نور یہ اس ذرے کو معیار حرکت منتقل کرتے ہیں جو آپ کے متابو میں نہیں ہے۔ اب آپ ذرے کا معتام جانتے ہیں لیکن اس کا معیار حرکت نہیں جانتے۔

ج. دکھائیں کہ زیادہ عمومی طور پر کسی بھی تفاعل  $f(x)$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx} \quad (۳.۶۵)$$

سوال ۳.۱۳: معتم ( $A = x$ ) میں عدم یقینیت اور توانائی ( $B = p^2/2m + V$ ) میں عدم یقینیت کا درج ذیل اصول عدم یقینیت ثابت کریں۔

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|$$

ساکن حالات کیلئے یہ آپ کو کوئی زیادہ معلومات فراہم نہیں کرتا؛ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۳.۱۵: دکھائیں کہ دو غیر مقلوب عاملین کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ اشارہ: دکھائیں اگر  $\hat{P}$  اور  $\hat{Q}$  کے مشترکہ امتیازی تفاعلات کا مکمل سلسلہ پایا جاتا ہو، تب ہلبرٹ فضا میں کسی بھی تفاعل کیلئے  $[\hat{P}, \hat{Q}]f = 0$  ہوگا۔

### ۳.۵.۲ اقل عدم یقینیت کا موجی اکٹھ

ہم ہارمونی سرعش کی زمینی حال (سوال ۲.۱۱) اور آزاد ذرے کی گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۲۲) کے تفاعل موج دیکھ چکے ہیں جو معتم و معیار حرکت کی عدم یقینیت کی حد ( $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ ) کو چھوتے ہیں۔ اس سے ایک دلچسپ سوال پیدا ہوتا ہے: اقل عدم یقینیت کا سب سے زیادہ عمومی موجی اکٹھ کیا ہوگا؟ اصول عدم یقینیت کے ثبوت کے دلائل میں عدم مساوات دو نقطوں پر پیش آیا: مساوات ۳.۵۹ اور مساوات ۳.۶۰۔ ہم دونوں کو عدم مساوات کی بجائے مساوات لیتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ  $\Psi$  کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہے۔

جب ایک تفاعل دوسرے تفاعل کا مضرب ہو:  $g(x) = cf(x)$ ، جہاں  $c$  کوئی مخلوط عدد ہے تب شوارز عدم مساوات ایک مساوات بن جاتی ہے (صفحہ ۴۵۵ پر سوال ۵-A دیکھیں)۔ ساتھ ہی میں مساوات ۳.۶۰ میں  $z$  کے حقیقی جزو کو رد کرتا ہوں؛ جب  $0 = \text{حقیقی}(z)$  ہو، یعنی جب

$$\langle f|g \rangle_{\text{حقیقی}} = (c\langle f|f \rangle)_{\text{حقیقی}} = 0$$

ہو تب مساوات کی صورت پائی جائے گی۔ اب  $\langle f|f \rangle$  یقیناً حقیقی ہے، لہذا مستقل  $c$  لازمًا حاصِلی ہوگا؛ جسے ہم  $ia$  لکھتے ہیں۔ یوں اقل عدم یقینیت کیلئے لازم اور کافی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$g(x) = ia f(x), \quad a_{\text{حقیقی}} \quad (۳.۶۶)$$

معتم و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کیلئے یہ شرط درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - \langle p \rangle \right) \Psi = ia(x - \langle x \rangle) \Psi \quad (۳.۶۷)$$



جو متغیر  $x$  کے تغاقل  $\Psi$  کا تغاقلی مساوات ہے۔ اس کا عمومی حل درج ذیل ہے (سوال ۳.۱۶)۔

$$\Psi(x) = Ae^{-a(x-\langle x \rangle)^2/2\hbar} e^{ip(x)/\hbar} \quad (۳.۶۸)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اتل عدم یقینیت کا موچی اکٹھ در حقیقت گاوسی ہوگا اور جو دو مشالیں ہم دیکھ چکے ہیں وہ بھی گاوسی تھیں۔<sup>۴۹</sup> سوال ۳.۱۶: مساوات ۳.۶۸ کو  $\Psi(x)$  کیلئے حل کریں۔ دھیان رہے کہ  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  مستقلاات ہیں۔

### ۳.۵.۳ توانائی ووقت اصول عدم یقینیت

مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کو عموماً درج ذیل روپ میں لکھا جاتا ہے۔

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۶۹)$$

یکساں تیار کردہ نظام کی بار بار پیمائش کے نتائج کے معیاری انحراف کو بعض اوقات لاپرواہی سے  $\Delta x$  (متغیر  $x$  کی ”عدم یقینیت“) لکھا جاتا ہے جو ایک کمزور علامت ہے۔ مساوات ۳.۶۹ کی طرح کا توانائی و وقت اصول عدم یقینیت<sup>۵۰</sup> درج ذیل ہے۔

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۳.۷۰)$$

چونکہ خصوصی نظریہ اضافت کی مقام و وقت چار سمتیات میں  $x$  اور  $t$  (بلکہ  $ct$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں، جبکہ توانائی و معیار حرکت چار سمتیات میں  $E$  اور  $p$  (بلکہ  $E/c$ ) اکٹھے شامل ہوتے ہیں لہذا خصوصی نظریہ اضافت کے نقطہ نظر سے توانائی و وقت روپ کو مقام و معیار حرکت روپ کا نتیجہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں نظریہ اضافت میں مساوات ۳.۷۰ اور مساوات ۳.۶۹ ایک دوسرے کیلئے لازم و ملزوم ہیں۔ لیکن ہم اضافیتی کوانٹائی میکانیات نہیں کر رہے ہیں۔ مساوات شرودنجر صریحاً غیر اضافی ہے۔ یہ  $t$  اور  $x$  کو ایک جیسی اہمیت نہیں دیتی ہے (یہ بطور تغاقلی مساوات  $t$  میں یک رتی جبکہ  $x$  میں دور رتی ہے)، اور مساوات ۳.۶۹ سے قطعاً مساوات ۳.۷۰ مراد نہیں لی جاسکتی ہے۔ میں اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت اخذ کرتا ہوں اور ایسا کرتے ہوئے کوشش کروں گا کہ آپ کو مطمئن کروں کہ مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے ساتھ اسکی ظاہری مشابہت گمراہ کن ہے۔

اب مقام، معیار حرکت اور توانائی تمام تغیر پذیر تغیرات ہیں، جو کسی بھی وقت پر نظام کے متاثر پیمائش خواص ہیں۔ تاہم (کم از کم غیر اضافی نظریہ میں) وقت تغیر پذیر تغیر نہیں ہے؛ آپ مقام اور توانائی کی

<sup>۴۹</sup> دھیان رہے کہ صرف  $\Psi$  کو کا نتائج ہونا یہاں مسئلہ ہے؛ ”مستقلاات“  $A$ ،  $a$ ،  $\langle x \rangle$  اور  $\langle p \rangle$  تمام وقت کے تابع ہو سکتے ہیں، بلکہ اتل  $\Psi$  صورت سے ارتقا کر سکتا ہے۔ میں صرف اشتاد محو کرتا ہوں کہ اگر کسی لمحہ پر تغاقل موج  $x$  کے لحاظ سے گاوسی ہو، تب (اس لمحہ پر) عدم یقینیت حاصل ضرب اتل ہوگا۔

پیمائش کی طرح ایک ذرے کا وقت نہیں ناپ سکتے ہیں۔ وقت ایک غیر تابع متغیر ہے اور تغیر پذیر مقدار اس کے تفاسلات ہیں۔ بالخصوص توانائی و وقت اصول عدم یقینیت میں وقت کی متعدد پیمائشوں کی معیاری انحراف کو  $\Delta t$  ظاہر نہیں کرتا ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں (اور میں جلد اسکی زیادہ درست صورت پیش کروں گا) کہ یہ اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام ”کافی زیادہ“ تبدیل ہوتا ہے۔

یہ دیکھنے کیلئے کہ نظام کتنی تیزی سے تبدیل ہوتا ہے، ہم وقت کے لحاظ سے کسی متبادل مشاہدہ  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت کے تفرق کا حساب کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{d}{dt}\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{Q} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi | \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

اب مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے (جہاں  $H = p^2/2m + V$  ہیمیلٹنی ہے)۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle \Psi | \hat{Q} \hat{H} \Psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

اب  $\hat{H}$  ہر مشی ہے لہذا  $\langle \hat{H} \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} \hat{Q} \Psi \rangle$  اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle \quad (۳.۷۱)$$

یہ خود ایک دلچسپ اور کارآمد نتیجہ ہے (سوال ۳.۱۷ اور ۳.۳۱ دیکھیں)۔ عمومی صورت میں جہاں عامل صریحاً وقت کا تابع نہیں ہوگا، اسیہ کہتی ہے کہ توقعاتی قیمت کی تبدیلی کی شرح کو عامل اور ہیمیلٹنی کا مقابلہ تعین کرتا ہے۔ بالخصوص اگر  $\hat{H}$  اور  $\hat{Q}$  آپس میں متبادل تبدیل ہوں، تب  $\langle Q \rangle$  مستقل ہوگا، اور اس نقطہ نظر سے  $Q$  بقائی مقدار ہوگا۔

اب فرض کریں عمومی اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) میں ہم  $A = H$  اور  $B = Q$  لے کر فرض کریں کہ  $Q$  صریحاً  $t$  کا تابع نہیں ہے۔ تب

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle \right)^2 = \left( \frac{1}{2i} \hbar \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2 = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2 \left( \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right)^2$$

ہوگا جس کو درج ذیل سادہ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right| \quad (۳.۷۲)$$

اوقات کی صریحاً تابع عاملین بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا عموماً  $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$  ہوگا۔ صریحاً تابعیت وقت کی مثال اسپن کی حواسر ایک ایسے ہارمونی مسرتش کی مخفی توانائی لیتے ہیں جس کے اسپرنگ کا مقبایس پلک تبدیل ہو رہا ہو (مثلاً درجب حسرات تبدیل ہونے سے اسپرنگ زیادہ لمبکدار ہو جاتا ہو)؛  $Q = (1/2)m[\omega(t)]^2 x^2$

ہم  $\sigma_H \equiv \Delta E$  اور درج ذیل تعریفات لیتے ہیں۔

$$(۳.۷۳) \quad \Delta t \equiv \frac{\sigma_Q}{|d\langle Q \rangle / dt|}$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۷۴) \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

جو توانائی و وقت اصول عدم یقینیت ہے۔ یہاں  $\Delta t$  کی معنی کو دھیان دیں۔ چونکہ

$$\sigma_Q = \left| \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \right| \Delta t,$$

ہے لہذا  $\Delta t$  اتنے وقت کو ظاہر کرتا ہے جتنے میں  $Q$  کی توقعاتی قیمت ایک معیاری انحراف کے برابر تبدیل ہو۔ بالخصوص  $\Delta t$  اس قابل مشاہدہ  $Q$  پر منحصر ہوگی جس پر آپ غور کر رہے ہوں؛ کسی ایک قابل مشاہدہ کی تبدیلی بہت تیز ہو سکتی ہے جبکہ دوسرے کی بہت سست ہو سکتی ہے۔ تاہم چھوٹی  $\Delta E$  کی صورت میں تمام قابل مشاہدہ کی تبدیلی کی شرح بہت سست رفتار ہوگی؛ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک قابل مشاہدہ بہت تیزی سے تبدیل ہوتا ہو تب توانائی میں عدم یقینیت بہت زیادہ ہوگی۔

مثال ۳.۵: ساکن حال کی انتہائی صورت میں جہاں توانائی یکتا طور پر معین ہوگی، تمام توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گی ( $\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta t = \infty$ )؛ جیسا ہم نے کچھ دیر پہلے (مساوات ۲.۹ میں) دیکھا۔ کچھ ہونے کے لیے ضروری ہے کہ کم از کم دو ساکن حالات کا خطی جوڑ لیا جائے، مثلاً درج ذیل۔

$$\Psi(x, t) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

اگر  $a, b, \psi_1$  اور  $\psi_2$  حقیقی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$|\Psi(x, t)|^2 = a^2(\psi_1(x))^2 + b^2(\psi_2(x))^2 + 2a\psi_1(x)\psi_2(x) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)$$

ایک ارتعاش کا دوری عرصہ  $\tau = 2\pi\hbar / (E_2 - E_1)$  ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے  $\Delta E = E_2 - E_1$  اور  $\Delta t = \tau$  لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\Delta E \Delta t = 2\pi\hbar$$

□

جو یقیناً  $\geq \hbar/2$  ہے (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۸ دیکھیں)۔

مثال ۳.۶: کسی ایک مخصوص نقطہ سے آزاد ذرے کی موجی اکٹھ کتنی دیر میں گزرتی ہے (شکل ۳.۱)؟ کینی طور پر  $\Delta t = \Delta x / v = m\Delta x / p$  ہوگا لیکن  $E = p^2 / 2m$  ہے، لہذا  $\Delta E = p\Delta p / m$  ہوگا۔ یوں

$$\Delta E \Delta t = \frac{p\Delta p}{m} \frac{m\Delta x}{p} = \Delta x \Delta p$$



شکل ۳.۱: ایک آزاد ذرہ موجی اکٹھ نقطہ A کو پہنچتا ہے (مثال ۳.۶)۔

ہوگا جو مقام و معیار حرکت اصول عدم یقینیت کے تحت  $\hbar/2 \geq$  ہوگا (ٹھیک ٹھیک حساب کے لیے سوال ۳.۱۹ دیکھیں)۔

□

مثال ۳.۷: ذرہ  $\Delta$  تقریباً  $10^{-23}$  سیکنڈ حیات رہنے کے بعد از خود ٹکڑے ہو جاتا ہے۔ اس کی کیمت کی تمام پیمائشوں کا مستطیلی ترسیل، جس س کی شکل کا قوس دے گا جس کا وسط  $1232 \text{ MeV}/c^2$  پر اور چوڑائی تقریباً  $120 \text{ MeV}/c^2$  ہوگی (شکل ۳.۲)۔ ساکن صورت توانائی ( $mc^2$ ) کیوں بعض اوقات  $1232$  سے زیادہ اور بعض اوقات اس سے کم حاصل ہوتی ہے؟ کیا یہ تجرباتی پیمائش کی حائل کے بنا پر ہے؟ جی نہیں کیوں کہ

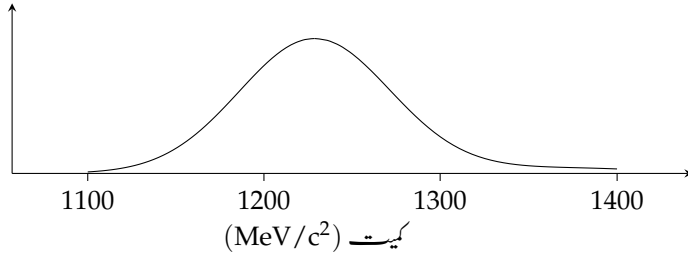
$$\Delta E \Delta t = \left( \frac{120}{2} \text{ MeV} \right) (10^{-23} \text{ s}) = 6 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

ہے جبکہ  $\hbar/2 = 3 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$ ۔ یوں کیمت میں وسعت اتنا ہی کم ہے جتنا اصول عدم یقینیت اجازت دیتا ہے؛ اتنا کم عرصہ حیات کے ذرے کی کیمت پوری طرح معین نہیں ہو سکتی ہے۔<sup>۵۲</sup> □

ان مثالوں میں ہم نے جزو  $\Delta t$  کے کئی مخصوص مطلب دیکھے: مثال ۳.۵ میں اس سے مراد طول موج بھتا؛ مثال ۳.۶ میں اس سے مراد وہ دورانیہ بھتا جس میں ایک ذرہ کسی نقطہ سے گزرتا ہے؛ مثال ۳.۷ میں یہ ایک غیر مستحکم ذرے کے عرصہ حیات کو ظاہر کرتا ہے۔ تاہم تمام صورتوں میں  $\Delta t$  اس دورانیہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں نظام میں ”کافی زیادہ“ تبدیلی رونما ہو۔

عموماً کہا جاتا ہے کہ اصول عدم یقینیت کے بنا پر کوانٹائی میکینیات میں توانائی صحیح معنوں میں بقائی نہیں ہے، یعنی آپ کو اجازت ہے کہ آپ توانائی  $\Delta E$  ”ادھار“ لے کر وقت  $\Delta t \approx \hbar/(2\Delta E)$  کے اندر ”واپس“ کریں۔ توانائی کی بقا کی جتنی زیادہ خلاف ورزی ہو، اتنا وہ دورانیہ کم ہوگا جس کے دوران یہ خلاف ورزی رونما

<sup>۵۲</sup> حقیقت میں مثال ۳.۷ میں غلط بیانی کی گئی ہے۔ آپ  $10^{-23}$  سیکنڈ کو گھسڑی پر ناپ نہیں سکتے ہیں، اور حقیقت میں اتنے کم عرصہ حیات کے ذرے کا عرصہ حیات ایسی کسی ترسیم سے بذریعہ اصول عدم یقینیت اخذ کیا جاتا ہے۔ تاہم، اگرچہ منطق ارات رخ استعمال کی گئی ہے، ہمارا نقطہ درست ہے۔ مزید، اگر آپ مندرجہ کریں کہ  $\Delta$  تقریباً ایک پروٹان ( $10^{-15} \text{ m}$ ) جتنا ہے، تب اس ذرے سے گزرنے کے لئے شعاع کو تقریباً  $10^{-23}$  سیکنڈ درکار ہوں گے، اور یہ مندرجہ کرنا مشکل ہوگا کہ ذرے کا عرصہ حیات اس سے بھی کم ہو گا۔



شکل ۳.۲: کیت  $\Delta$  کی پیسنشوں کی مستطیلی ترسیم (مثال ۳.۷)۔

ہو۔ اب توانائی و وقت اصول عدم یقینیت کے کئی حبانز مطلب لیے جاسکتے ہیں، تاہم یہ ان میں سے ایک نہیں ہے۔ ہمیں کوانٹائی میکانیات کہیں بھی توانائی کی بقا کی خلاف ورزی کی اجازت نہیں دیتی ہے اور نہ ہی مساوات ۳.۷۴ کے حصول میں کوئی ایسی اجازت شامل کی گئی۔ تاہم، حقیقت یہ ہے کہ اصول عدم یقینیت انتہائی زیادہ مضبوط ہے: اس کی عنایت استعمال کے باوجود نتائج زیادہ عنایت نہیں ہوتے ہیں، اور یہی وجہ ہے کہ ماہر طبیعیات عموماً اس کو استعمال کرتے ہوئے زیادہ محتاط نہیں رہتے۔

سوال ۳.۱۷: درج ذیل ذیل مخصوص صورتوں پر مساوات ۳.۷ کی اطلاق کریں۔

ا.  $Q = 1$       ب.  $Q = H$       ج.  $Q = x$       د.  $Q = p$

ہر ایک صورت میں مساوات ۱.۲، مساوات ۱.۳۳، مساوات ۱.۳۸ اور توانائی کی بقا (مساوات ۲.۳۹ کے بعد کا تبصرہ دیکھیں) کو مد نظر رکھتے ہوئے نتیجے پر بحث کریں۔

سوال ۳.۱۸: معیاری انحراف  $\sigma_H$ ،  $\sigma_x$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۵ کے تقاضا عمل موج اور متابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۱۹: معیاری انحراف  $\sigma_H$ ،  $\sigma_x$  اور  $d\langle x \rangle / dt$  کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں کا حساب کرتے ہوئے سوال ۲.۴۳ میں آزاد ذرے کی موجی اکٹھ اور متابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت پر کھیں۔

سوال ۳.۲۰: دکھائیں کہ متابل مشاہدہ  $x$  کے لیے توانائی و وقت اصول عدم یقینیت، تخفیف کے بعد سوال ۳.۱۴ کے اصول عدم یقینیت کاروپ اختیار کرتی ہے۔

## ۳.۶ ڈیراک علامتیت

دو ابعاد میں ایک سادہ سمتیہ **A** پر غور کریں (شکل ۳.۳-۱)۔ آپ اس سمتیہ کو کس طرح بیان کریں گے؟ سب سے آسان طریقہ یہ ہوگا کہ آپ  $x$  اور  $y$  محدود کا ایک کارٹیزی نظام قائم کر کے اس پر سمتیہ **A** کے



شکل ۳.۳: (ا) سمتیہ  $\mathbf{A}$ ، (ب)  $xy$  محدد سے لحاظ سے  $\mathbf{A}$  کے اجزاء، (ج)  $x'y'$  محدد کے لحاظ سے  $\mathbf{A}$  کے اجزاء

اجزاء:  $A_x = \hat{i} \cdot \mathbf{A}$  اور  $A_y = \hat{j} \cdot \mathbf{A}$  وضع کریں (شکل ۳.۳-ب)۔ اب عین ممکن ہے کہ آپ کی بہن ایک مختلف کارٹیزی نظام قائم کرے جس کے محدد  $x'$  اور  $y'$  ہوں، وہ سمتیہ  $\mathbf{A}$  کے اجزاء  $A'_x = \hat{i}' \cdot \mathbf{A}$  اور  $A'_y = \hat{j}' \cdot \mathbf{A}$  پیش کرے گی (شکل ۳.۳-ج)۔ حقیقت میں آپ دونوں ایک ہی سمتیہ کو دو مختلف اساس  $(\{\hat{i}, \hat{j}\})$  اور  $(\{\hat{i}', \hat{j}'\})$  کی صورت میں بیان کر رہے ہیں۔ سمتیہ خود ”باہر فضا“ میں رہتا ہے اور کسی کے بھی قائم کردہ (اختیاری) محددی نظام کا تابع نہیں ہے۔

بہی کچھ کوانٹائی میکانیات میں ایک نظام کے حال کے لیے درست ہوگا۔ اس کو سمتیہ  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جو ”باہر بلبرٹ فضا“ میں رہتا ہے اور جسے ہم مختلف اساس کے لحاظ سے بیان کر سکتے ہیں۔ درحقیقت امتیازی تفاعل مقام کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی توسیعی عددی سرموجی تفاعل  $\Psi(x, t)$  ہوگا:

$$\Psi(x, t) = \langle x | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.45)$$

(جہاں  $\hat{x}$  کے امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $x$  ہے کو سمتیہ  $|x\rangle$  ظاہر کرتا ہے) <sup>۵۳</sup>، جبکہ معیار حرکت امتیازی تفاعل کی اساس میں  $|\mathcal{H}\rangle$  کی وسعت، مقام و معیار حرکت موجی تفاعل ہے:

$$\Phi(p, t) = \langle p | \mathcal{H}(t) \rangle \quad (3.46)$$

(جہاں  $\hat{p}$  کا امتیازی تفاعل جس کی امتیازی قیمت  $p$  ہے کو سمتیہ  $|p\rangle$  ظاہر کرتا ہے)۔ <sup>۵۴</sup> ہم  $|\mathcal{H}\rangle$  کی وسعت کو توانائی امتیازی تفاعل کی اساس میں بھی کر سکتے ہیں (یہاں اپنی آسانی کے لیے ہم غنیر مسلسل طیف فرض کر

<sup>۵۳</sup> میں اس کو  $g_x$  (مساوات ۳.۳۹) نہیں کہتا چاہتا چونکہ وہ اس کی اساس مقام میں روپ ہے، اور یہاں پورا مقصد کسی بھی مخصوص اساس سے چھڑکا رہا ہے۔ یقیناً میں نے پہلی مرتبہ بلبرٹ فضا کو،  $x$  پر، بطور مربع متکامل تفاعل کا سلسلہ متعارف کرتے ہوئے اس کو (اساس مقام کا) پابند بنایا جو ایک امتناعی صورت ہے۔ میں چاہتا ہوں کہ آپ اس کو ایک تصوراتی سمتی فضا سمجھیں، جس کے ارکان کو کسی بھی اساس کے لحاظ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔  
<sup>۵۴</sup> مقامی فضا میں یہ  $f_p(x)$  ہوگا (مساوات ۳.۳۲)۔

رہے ہیں):

$$(۳.۷۷) \quad c_n(t) = \langle n | \mathcal{H}(t) \rangle$$

(جہاں  $\hat{H}$  کے  $n$  ویں امتیازی تفاعل کو سمتیہ  $|n\rangle$  ظاہر کرتا ہے)؛ مساوات ۳.۴۶ تاہم یہ تمام ایک ہی حالت کو ظاہر کرتے ہیں؛ تفاعلات  $\Psi$  اور  $\Phi$ ، اور عددی سروں کا سلسلہ  $\{c_n\}$  ٹھیک ایک جیسی معلومات رکھتے ہیں؛ یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے ہیں:

$$(۳.۷۸) \quad \begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} dp \\ &= \sum c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x) \end{aligned}$$

(متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے) عاملین خطی مبدل ہوتے ہیں جو ایک سمتیہ کا ”تبادلہ“ دوسری سمتیہ میں کرتے ہیں۔

$$(۳.۷۹) \quad |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

بالکل سمتیت کی طرح جنہیں ایک مخصوص اساس  $\{|e_n\rangle\}$  کے لحاظ سے ان کے اجزاء

$$(۳.۸۰) \quad \begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n a_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad a_n = \langle e_n | \alpha \rangle \quad \text{ہے، اور} \\ |\beta\rangle &= \sum_n b_n |e_n\rangle \quad \text{جہاں} \quad b_n = \langle e_n | \beta \rangle \quad \text{ہے} \end{aligned}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے، عاملین کو (کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے) ان کے **قالبی اراکان**<sup>۵۵</sup>

$$(۳.۸۱) \quad \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle \equiv Q_{mn}$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس علامت کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(۳.۸۲) \quad \sum_n b_n |e_n\rangle = \sum_n a_n \hat{Q} |e_n\rangle$$

یا، سمتیہ  $|e_m\rangle$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہوئے

$$(۳.۸۳) \quad \sum_n b_n \langle e_m | e_n \rangle = \sum_n a_n \langle e_m | \hat{Q} | e_n \rangle$$

<sup>۵۵</sup> میں مندرج کرتا ہوں کہ یہ اساس غیر مسلسل ہے؛ مسلسل اساس کی صورت میں  $n$  استمراری ہوگا اور مجموعت کی جگہ نکلاتے ہوں گے۔

<sup>۵۶</sup> matrix elements

<sup>۵۷</sup> یہ اصطلاح مستثنائی ابعادی صورت سے متاثر ہو کر منتخب کی گئی ہے، تاہم اس ”مثالب“ کے اراکین کی تعداد اب لامتناہی ہوگی (جن کی گنتی ناممکن بھی ہو سکتی ہے)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$b_m = \sum_n Q_{mn} a_n \quad (۳.۸۴)$$

یوں اجزاء کے تبادلہ کے بارے میں متالپی ارکان معلومات فراہم کرتے ہیں۔

بعد میں ہمیں ایسے نظاموں سے واسطہ ہوگا جن کے خطی غیر تاج حالات کی تعداد مستثنائی عدد  $(N)$  ہوگا۔ سمتیہ  $|\mathfrak{H}(t)\rangle$  ایسی صورت میں  $N$  ابعادی سستی فضا میں رہتا ہے؛ جس کو (کسی دیے گئے اساس کے لحاظ سے)،  $(N)$  اجزاء کی قطار سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ عاملین  $(N \times N)$  سادہ متالب کاروپ اختیار کرتے ہیں۔ یہ سادہ ترین کوانٹائی نظام ہیں؛ جن میں لامستثنائی آبادی سستی فضا سے وابستہ باریکیاں نہیں پائی جاتی ہیں۔ ان میں سب سے آسان دو حالتی نظام ہے جس پر درج ذیل مثال میں غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۸: تصور کریں کہ ایک نظام میں صرف دو (درج ذیل) خطی غیر تاج حالات ممکن ہیں۔<sup>۵۸</sup>

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اور} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سب سے زیادہ عمومی حال ان کا معمول شدہ خطی جوڑ

$$|\mathfrak{H}\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ہوگا جہاں} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{ہے۔}$$

ہیملٹنی کو ایک (ہر مشی) متالب کے روپ میں لکھا جاسکتا ہے؛ فرض کریں کہ اس کا مخصوص روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

جہاں  $g$  اور  $h$  حقیقی مستقل ہیں۔ اگر  $(t = 0)$  پر یہ نظام حال  $|1\rangle$  سے ابتدا کرے تب وقت  $t$  پر اس کا حال کیا ہوگا؟

حل: (تاج وقت) مساوات شرودنگر درج ذیل کہتی ہے۔

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\mathfrak{H}\rangle = H |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۵)$$

ہمیشہ کی طرح ہم غیر تاج تاج شرودنگر

$$H |\mathfrak{H}\rangle = E |\mathfrak{H}\rangle \quad (۳.۸۶)$$

<sup>۵۸</sup> یہاں ”مساوات“ کی نشان دہی سے مراد ”ظاہر کرتا ہے“ لینا چاہیے، تاہم میرے خیال میں اس غیر رسمی علاقیت کے استعمال سے غلط فہمی پیدا ہونے کا کوئی امکان نہیں پایا جاتا ہے۔



کے حل سے ابتداء کرتے ہیں، یعنی ہم  $H$  کی امتیازی سمتیات اور امتیازی قیمتیں تلاش کرتے ہیں۔ امتیازی قیمت کا تعین امتیازی مساوات کرتی ہے۔

$$\begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} \text{مقطع} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \Rightarrow h-E = \mp g \Rightarrow E_{\pm} = h \pm g$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احبازتی توانائیاں  $(h+g)$  اور  $(h-g)$  ہیں۔ امتیازی سمتیات تعین کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \Rightarrow \beta = \pm \alpha$$

لہذا معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$|\mathcal{B}_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

اس کے بعد ابتدائی حال کو ہم ہیملٹنی کے امتیازی سمتیات کے خطی جوڑ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|\mathcal{B}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{B}_{+}\rangle + |\mathcal{B}_{-}\rangle)$$

آخر میں ہم اس کے ساتھ معیاری تابعیت وقت جزو  $e^{-iE_n t/\hbar}$  منسلک کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(h+g)t/\hbar} |\mathcal{B}_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\mathcal{B}_{-}\rangle] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \left[ e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i \sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اگر آپ کو اس نتیجے پر شک ہو تو آپ اس کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں: کیا یہ تابع وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے؟ کیا یہ  $t=0$  پر ابتدائی حال کے موافق ہے؟

یہ (دیگر چیزوں کے علاوہ) ارتعاش نیوٹرینو کا ایک سادہ نمونہ ہے جہاں  $|1\rangle$  الیکٹران نیوٹرینو<sup>۹۰</sup>، اور  $|2\rangle$  میون نیوٹرینو<sup>۹۱</sup> کو ظاہر کرتا ہے؛ اگر ہیملٹنی میں حلاف وتر جزو  $(g)$  غیر معدوم ہو تب وقت گزرنے کے ساتھ بار بار الیکٹران نیوٹرینو تبدیل ہو کر میون نیوٹرینو میں اور میون نیوٹرینو واپس الیکٹران نیوٹرینو میں تبدیل ہوتا رہے گا۔ □

neutrino oscillations<sup>۹۰</sup>  
electron neutrino<sup>۹۰</sup>  
muon neutrino<sup>۹۱</sup>

کوانٹائی میکانیات میں اندرونی ضرب کو ڈیراک علامتیں<sup>۶۲</sup> سے ظاہر کیا جاتا ہے جو ٹکوئی قوسین،  $\langle$  اور  $\rangle$ ، اور افقی لکیر  $|$  پر مشتمل ہے۔ یوں کوانٹائی میکانیات میں ٹکوئی قوسین کو قوسین نہیں بلکہ عاملین تصور کریں۔ اندرونی ضرب  $\langle \alpha | \beta \rangle$  کو دو حصوں  $\langle \alpha |$  اور  $|\beta \rangle$  میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں بالترتیب **تفاعلیہ**<sup>۶۳</sup> اور **سمتایہ**<sup>۶۴</sup> کہتے ہیں۔ ان میں سے موخر الذکر ایک سمتیہ ہے، مگر اول الذکر کیا ہے؟ یہ اس لحاظ سے سمتیات کا ایک خطی تفاعل ہے کہ اس کے دائیں جانب ایک سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک (مخلوط) عدد حاصل ہوتا ہے جو اندرونی ضرب ہوگا۔ (ایک عامل کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے دوسرا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جبکہ ایک تفاعل علیہ کے ساتھ سمتیہ چسپاں کرنے سے ایک عدد حاصل ہوتا ہے۔) جیسا آپ دیکھیں گے کوانٹائی میکانیات میں تفاعل علیہ کو ایک متالِب اور سمتایہ کو سمتیہ کی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ڈیراک علامتیت کو **تفاعلیہ و سمتایہ علامتیں**<sup>۶۵</sup> بھی کہتے ہیں۔ ایک تفاعل علیہ سمتیہ میں تفاعل علیہ کو عمل لینے کی ہدایت تصور کیا جاسکتا ہے:

$$\langle f | = \int f^*[\dots] dx$$

جہاں چوکور قوسین  $[\dots]$  میں وہ تفاعل پر کیا جائے گا جو تفاعل علیہ کے دائیں ہاتھ سمتایہ میں موجود ہوگا۔ ایک مستثنیٰ ابعاد سمتیہ فضا میں، جہاں سمتیات کو قطاروں

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (۳.۸۷)$$

کی صورت میں بیان کیا گیا ہو، مطابقتی تفاعل علیہ ایک سمتیہ صف

$$\langle \alpha | = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (۳.۸۸)$$

ہوگا۔ تمام تفاعل علیہ کو اکٹھا کرنے سے دوسرا سمتیہ فضا حاصل ہوگا جس کو **دوہرہ فضا**<sup>۶۶</sup> کہتے ہیں۔

تفاعل علیہ کی ایک علیحدہ وجود کا تصور ہمیں طاقتور اور خوبصورت علامتیت کا موقع فراہم کرتی ہے (اگرچہ اس کتاب میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جائے گا)۔ مثال کے طور پر، اگر  $|\alpha\rangle$  ایک معمول شدہ سمتیہ ہو، تب عامل

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (۳.۸۹)$$

کسی بھی دوسرے سمتیہ کا حصہ اٹھاتا (منتخب کرتا) ہے جو  $|\alpha\rangle$  کے ”ساتھ ساتھ“ پایا جاتا ہو:

$$\hat{P}|\beta\rangle = \langle \alpha | \beta \rangle |\alpha\rangle;$$

<sup>۶۲</sup> Dirac notation

<sup>۶۳</sup> bra

<sup>۶۴</sup> ket

<sup>۶۵</sup> bra-ket notation

<sup>۶۶</sup> dual space

ہم اس کو  $|\alpha\rangle$  کے احاطہ کیے گئے ایک بُدی ذیلی فضا پر عامل  $\hat{P}$  <sup>۶۷</sup>تخلیل کرتے ہیں۔ اگر  $\{|e_n\rangle\}$  غیر مسلسل معیاری عمودی اساس،

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn} \quad (۳.۹۰)$$

ہو تب درج ذیل ہوگا

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = 1 \quad (۳.۹۱)$$

(جو عامل مثال ہے)۔ چونکہ کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  پر عمل کرتے ہوئے یہ عامل اساس  $\{|e_n\rangle\}$  میں سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کی وسعت کو دوبارہ سے حاصل کرتا ہے۔

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n | \alpha \rangle = |\alpha\rangle \quad (۳.۹۲)$$

اسی طرح اگر  $\{|e_z\rangle\}$  ڈیراک معیاری عمود شدہ استمراری اساس

$$\langle e_z | e_{z'} \rangle = \delta(z - z') \quad (۳.۹۳)$$

ہو، تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int |e_z\rangle \langle e_z| dz = 1 \quad (۳.۹۴)$$

ساوات ۳.۹۱ اور ساوات ۳.۹۴ مکملیت کو خوش اسلوبی سے بیان کرتے ہیں۔

سوال ۳.۲۱: دکھائیں کہ عاملین تخلیل یکے <sup>۶۸</sup>مافقی ہیں، یعنی ان کے لئے  $\hat{P}^2 = \hat{P}$  ہوگا۔  $\hat{P}$  کے امتیازی قیمتیں تعین کریں اور اس کے امتیازی سمتیات کے خواص بیان کریں۔

سوال ۳.۲۲: معیاری عمودی اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کا احاطہ کیے گئے تین بُدی فضا پر غور کریں۔ سمتاویہ  $|\alpha\rangle$  اور سمتاویہ  $|\beta\rangle$  درج ذیل ہیں۔

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

۱.  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  کو (دوہری اساس  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ،  $|3\rangle$  کی صورت میں) تیار کریں۔

ب.  $\langle\alpha|\beta\rangle$  اور  $\langle\beta|\alpha\rangle$  تلاش کریں اور  $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$  کی تصدیق کریں۔

ج. اس اساس میں عامل  $|\beta\rangle\langle\alpha| \equiv \hat{A}$  کے نوار کان متالب تلاش کر کے متالب **A** تیار کریں۔ کیا یہ ہر مشی ہے؟

سوال ۳.۲۳: کسی دو سطحی نظام کی ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

جہاں  $|1\rangle, |2\rangle$  معیاری عمودی اساس اور  $E$  ایسا عدد ہے جس کا بُعد توانائی کا ہے۔ اس کے امتیازی قیمتیں اور  $|1\rangle$  اور  $|2\rangle$  کے خطی جوڑ کی صورت میں معمول شدہ امتیازی تفاعل تلاش کریں۔ اس اساس کے لحاظ سے  $\hat{H}$  کا تلب  $H$  کیا ہوگا؟

سوال ۳.۲۴: فرض کریں عامل  $\hat{Q}$  کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات کا ایک مکمل سلسلہ درج ذیل ہے۔

$$\hat{Q}|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دکھائیں کہ  $\hat{Q}$  کو اس کے طیفی تحلیل<sup>۶۹</sup>

$$\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اشارہ: تمام ممکن سمتیات پر عامل کے عمل سے عامل کو جانچ جاتا ہے لہذا کسی بھی سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے لیے آپ کو درج ذیل دکھانا ہوگا۔

$$\hat{Q}|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n| \right\} |\alpha\rangle$$

### اضافی سوالات برائے باب ۳

سوال ۳.۲۵: لیہانڈر کثیر رکنیہ<sup>۶۹</sup> وقفہ  $-1 \leq x \leq 1$  پر تفاعلات  $1, x, x^2$  اور  $x^3$  کو گرام و شمد طریقہ کار سے معیاری عمود بنائیں (صفحہ ۴۵۴ پر سوال ۴-۲ A دیکھیں)۔ عین ممکن ہے کہ آپ نتائج کو پہچان پائیں؛ (معیاری عمود زنی کے علاوہ) <sup>۷۰</sup> لیہانڈر کثیر رکنیاں ہیں (جدول ۴.۱)۔

سوال ۳.۲۶: ایک خلاف ہر مشی<sup>۷۱</sup> (یا منحرف ہر مشی<sup>۷۲</sup>) عامل اپنے ہر مشی جوڑی دار کا منفی ہوتا ہے۔

(۳.۹۵)

$$\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$$

<sup>۶۹</sup>spectral decomposition

<sup>۷۰</sup>لیہانڈر کو معلوم نہیں تھا کہ کوئی روایت بہتر ثابت ہوگی۔ انہوں نے مجموعی جبز و ضربیوں منتخب کیا کہ  $x = 1$  پر تمام تفاعلات 1 کے برابر ہوں؛ ہم اس بد قسمت انتخاب کی پیروی کرنے پر مجبور ہیں۔

<sup>۷۱</sup>anti-hermitian

<sup>۷۲</sup>skew-hermitian

ا. دکھائیں کہ خلاف ہر مشی عامل کی توقعاتی قیمت خیالی ہوگی۔

ب. دکھائیں کہ دو عدد ہر مشی عاملین کا مقابلہ خلاف ہر مشی ہوگا۔ دو عدد خلاف ہر مشی عاملین کے مقابلہ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوال ۳۰۲: ترتیب پیمائش: متابل مشاہدہ  $A$  کو ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{A}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\psi_1$  اور  $\psi_2$ ، جن کے امتیازی قیمتیں بالترتیب  $a_1$  اور  $a_2$  ہیں، پائے جاتے ہیں۔ متابل مشاہدہ  $B$  کو ظاہر کرنے والے عامل  $\hat{B}$  کے دو معمول شدہ امتیازی حالات  $\phi_1$  اور  $\phi_2$  اور بالترتیب امتیازی قیمتیں  $b_1$  اور  $b_2$  ہیں۔ ان امتیازی حالات کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

ا. متابل مشاہدہ  $A$  کی پیمائش  $a_1$  قیمت دیتی ہے۔ اس پیمائش کے (فورا) بعد یہ نظام کس حال میں ہوگا؟

ب. اب اگر  $B$  کی پیمائش کی جائے تو کیا نتائج ممکن ہوں گے اور ان کے احتمال کیا ہوں گے؟

ج. متابل مشاہدہ  $B$  کی پیمائش کے فوراً بعد دوبارہ  $A$  کی پیمائش کی جاتی ہے۔ نتیجہ  $a_1$  حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟ (دھیان رہے کہ اگر میں آپ کو  $B$  کی پیمائش کا نتیجہ بتاتا تب جواب بہت مختلف ہوتا۔)

سوال ۳۰۸: لامتناہی چوکور کنویں کے  $n$  ویں ساکن حال کی معیار حرکت و فنس تعامل موج  $\Phi_n(p, t)$  تلاش کریں۔  $|\Phi_1(p, t)|^2$  اور  $|\Phi_2(p, t)|^2$  کو  $p$  کے تعامل کے طور پر ترسیم کریں (نقاط  $p = \pm n\pi\hbar/a$  پر خصوصی توجہ دیں)۔  $\Phi_n(p, t)$  کو استعمال کرتے ہوئے  $p^2$  کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ اپنے جواب کا سوال ۲۰۴ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳۰۹: درج ذیل تعامل موج پر غور کریں

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < x < n\lambda \\ 0, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

جہاں  $n$  کوئی مثبت عدد صحیح ہے۔ اگرچہ وقفہ  $-n\lambda < x < n\lambda$  پر یہ تعامل حائل صاف ساکن ہے (جس کا طول موج  $\lambda$  ہے) تاہم چونکہ یہ تعامل لامتناہی تک ارتعاش جاری نہیں رکھتا لہذا اس کی معیار حرکت کی قیمتیں ایک سعت پر مشتمل ہوں گی۔ اس کا معیار حرکت و فنس تعامل موج  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں۔  $|\Psi(x, 0)|^2$  اور  $|\Phi(p, 0)|^2$  ترسیم کر کے (مرکزی چوٹی کے اطراف صفروں کے بیچ) چوڑائیاں  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  تعین کریں۔ دیکھیں کہ  $n \rightarrow \infty$  کا ان چوڑائیوں پر کیا اثر ہوگا؟  $\omega_x$  اور  $\omega_p$  کو  $\Delta x$  اور  $\Delta p$  کی اندازا قیمتیں لیتے ہوئے تصدیق کریں کہ اصول عدم یقینیت مطمئن ہوتا ہے۔ انتباہ: اگر آپ  $\sigma_p$  کا حساب کرنے کی کوشش کریں تو آپ کو حیرانی کا سامنہ ہوگا۔ کیا آپ اس مسئلہ کی وجہ بتلا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۳۰: درج ذیل مندرجہ ذیل

$$\Psi(x, 0) = \frac{A}{x^2 + a^2}$$

جہاں  $A$  اور  $a$  مستقلات ہیں۔

۱.  $\Psi(x, 0)$  کی معمولی ذنی کرتے ہوئے  $A$  تعین کریں۔

ب. (لحمہ  $t = 0$  پر)  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$  اور  $\sigma_x$  تلاش کریں۔

ج. معیار حرکت و فضا تفاعل موج  $\Phi(p, 0)$  تلاش کریں اور تصدیق کریں کہ یہ معمولی شدہ ہے۔

د.  $\Phi(p, 0)$  استعمال کرتے ہوئے (لحمہ  $t = 0$  پر)  $\langle p \rangle$  اور  $\sigma_p$  کا حساب کریں۔

ه. اس حال کے لیے ہیزنبرگ اصول عدم یقینیت کو جانچیں۔

سوال ۳.۳۱: مسئلہ وریل۔ درج ذیل مساوات ۱.۳ کی مدد سے دکھائیں

$$(۳.۹۶) \quad \frac{d}{dt} \langle xp \rangle - 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

جہاں  $T$  حرکی توانائی ( $H = T + V$ ) ہے۔ ساکن حال میں پایاں ہاتھ صفر ہوگا (ایک یوں ہے؟) لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(۳.۹۷) \quad 2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

اس کو مسئلہ وریل کہتے ہیں۔ ہارمونی سرکش کے ساکن حالات کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $\langle T \rangle = \langle V \rangle$  ہوگا اور تصدیق کریں کہ یہ سوال ۲.۱۱ اور سوال ۲.۱۲ میں آپ کے نتائج کے ہم آہنگ ہے۔

سوال ۳.۳۲: توانائی و وقت کی عدم یقینیت کے اصول کا ایک دلچسپ روپ  $\Delta t = \tau / \pi$  ہے جہاں ابتدائی حال  $\Psi(x, 0)$  کے عمودی حال تک  $\Psi(x, t)$  کی ارتقا کے لیے درکار وقت  $\tau$  ہے۔ دو (معیاری عمودی) ساکن حالات کے برابر حصوں پر مشتمل (اختیاری) مخفیہ کاغذ عمل موج  $\Psi(x, 0) = 1/\sqrt{2} [\psi_1(x) + \psi_2(x)]$  استعمال کرتے ہوئے اس کی چپاچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۳۳: ہارمونی سرکش کے ساکن حالات کی (معیاری عمودی) اساس (مساوات ۲.۶۷) میں متالابی ارکان  $\langle n|x|n' \rangle$  اور  $\langle n|p|n' \rangle$  تلاش کریں۔ آپ سوال ۲.۱۲ میں متالابی وتری رکن  $n = n'$  دریافت کر چکے ہیں؛ وہی ترکیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متعلقہ (لامستناہی) متالاب  $\mathbf{X}$  اور  $\mathbf{P}$  مرتب کریں۔ دکھائیں کہ اساس میں  $\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{X}^2$  وتری ہوگا۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں؟ جسزوی جواب:

$$(۳.۹۸) \quad \langle n|x|n' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1})$$

سوال ۳.۳۴: ایک ہارمونی مرتعش ایسے حال میں ہے کہ اس کی توانائی کی پیمائش، ایک جتنے احتمال کے ساتھ،  $(1/2)\hbar\omega$  یا  $(3/2)\hbar\omega$  دے گی۔ اس حال میں  $\langle p \rangle$  کی ممکنہ اعظم قیمت کیا ہوگی؟ اگر لمحہ  $t = 0$  پر اس کی قیمت (یہی اعظم قیمت) ہو تب  $\Psi(x, t)$  کیا ہوگا؟

سوال ۳.۳۵: 35-3 ہارمونی مرتعش کے اتناقی حالات۔ ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات  $\psi_n(x) = |n\rangle$ ، مساوات (۲.۶۷) میں صرف  $n = 0$  عین عدم یقینیت کی حد  $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$  پر بیٹھتا ہے؛ جیسا آپ سوال ۲.۱۲ میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر  $\sigma_x \sigma_p = (2n+1)\hbar/2$  ہوگا۔ تاہم چند خطی جوڑ (جنہیں اتناقی حالات<sup>۵۷</sup> کہتے ہیں) بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو اتناقل بناتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عامل تقلیل<sup>۵۸</sup> کے امتیازی تعامل ہوں گے

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

(جہاں امتیازی قیمت  $\alpha$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے)۔

ا. حال  $|\alpha\rangle$  میں  $\langle x \rangle$ ،  $\langle x^2 \rangle$ ،  $\langle p \rangle$ ،  $\langle p^2 \rangle$  دریافت کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ کی ترکیب استعمال کریں اور یاد رکھیں کہ  $a_-$  کا ہر مشی جوڑی دار  $a_+$  ہے۔ فرض نہ کریں کہ  $\alpha$  حقیقی ہوگا۔

ب.  $\sigma_x$  اور  $\sigma_p$  تلاش کریں۔ دکھائیں کہ  $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$  ہوگا۔

ج. کسی بھی دوسرے تعامل موج کی طرح، اتناقی حال کو توانائی امتیازی حالات کی وسعت

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ توسیعی عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

د.  $|\alpha\rangle$  کی معمول زنی کرتے ہوئے  $c_0$  تعین کریں۔ جواب:  $e^{-|\alpha|^2/2}$

ه. اس کے ساتھ تابعیت وقت

$$|n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

<sup>۵۷</sup> coherent states

<sup>۵۸</sup> عامل رفعت کے متبادل معمول زنی امتیازی حالات نہیں پائے جاتے۔

شامل کر کے دکھائیں کہ  $|\alpha(t)\rangle$  اب بھی  $a$  کا امتیازی حال ہوگا، تاہم وقت کے ساتھ امتیازی قیمت ارتقا پذیر ہوگا۔

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں اتناقی حال ہمیشہ اتناقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو قلیل کرتا رہے گا۔  
و. کیا زمینی حال  $|n=0\rangle$  خود اتناقی حال ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب امتیازی قیمت کیا ہوگا۔

سوال ۳.۳۶: مبسوط اصول عدم یقینیت۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں  $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$  ہے۔

ا. دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم بنا کر درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad (۳.۹۹)$$

جہاں  $\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - 2\langle A \rangle \langle B \rangle$  ہوگا۔ اشارہ: مساوات ۳.۶۰ میں  $z$  کا حقیقی جزو  $\text{Re}(z)$  جزو

ب. مساوات ۳.۹۹ کو  $A = B$  صورت کے لئے جانچیں (چونکہ اس صورت میں  $C = 0$  ہے لہذا معیاری عدم یقینیت اصول یہاں بے وقعت ہے؛ بد قسمتی سے عدم یقینیت کا مبسوط اصول بھی زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے)۔

سوال ۳.۳۷: ایک نظام جو تین سطحی ہے کی ہیملٹنی درج ذیل متالب دیتا ہے

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں  $a, b$  اور  $c$  حقیقی اعداد ہیں۔

ا. اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\psi(t)\rangle$  کیا ہوگا؟

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



ب۔ اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو تب  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  کیس ہوگا؟

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سوال ۳.۳۸: ایک نظام جو تین سطحی ہے، کی ہیملٹنی درج ذیل متالاب ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

باقی دو متالاب مشاہدہ  $A$  اور  $B$  کو درج ذیل متالاب ظاہر کرتے ہیں

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $\omega$ ،  $\lambda$  اور  $\mu$  حقیقی مثبت اعداد ہیں۔

ا۔  $\mathbf{H}$ ،  $\mathbf{A}$  اور  $\mathbf{B}$  کے امتیازی قیمتیں اور (معمول شدہ) امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

ب۔ یہ نظام عمومی حال

$$|\mathcal{H}(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے آغاز کرتا ہے جہاں  $1 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2$  ہے۔ لمحہ  $t=0$  پر  $H$ ،  $A$  اور  $B$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔

ج۔ لمحہ  $t$  پر  $|\mathcal{H}(t)\rangle$  کیس ہوگا؟ لمحہ  $t$  پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کی قیمتیں دے سکتی ہے، اور ہر ایک قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ انہیں سوالات کے جوابات  $B$  اور  $A$  کے لیے بھی تلاش دیں۔

سوال ۳.۳۹:

ا۔ ایک تفسیر  $f(x)$  جس کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں پھیلا یا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں

$$f(x + x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

(جہاں  $x_0$  کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے)۔ اسی کی بنا پر  $\hat{p}/\hbar$  کو فضا میں انتقال کا پیدا کار  $\hat{Q}$  کہتے ہیں۔ تبصرہ: عامل کی قوت نما کی تعریف درج ذیل طاقتی تسلسلے تو سچ دیتا ہے۔

$$e^{\hat{Q}} \equiv 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$

ب. اگر (تابع وقت) مساوات شرودنگر کو  $\Psi(x, t)$  مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t + t_0) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\Psi(x, t)$$

(جہاں  $t_0$  کوئی بھی مستقل وقت ہو سکتا ہے)؛ اسی بنا پر  $\hat{H}/\hbar - \hat{Q}$  کو وقت میں انتقال کا پیدا کار  $\hat{Q}$  کہتے ہیں۔

ج. دکھائیں لمحہ  $t + t_0$  پر حرکی متغیر  $Q(x, p, t)$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔<sup>۹</sup>

$$\langle Q \rangle_{t+t_0} = \langle \Psi(x, t) | e^{i\hat{H}t_0/\hbar} \hat{Q}(x, p, t + t_0) e^{-i\hat{H}t_0/\hbar} | \Psi(x, t) \rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۳.۷ حاصل کریں۔ اشارہ:  $t_0 = \int dt$  میں پہلے رتبہ تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۴۰:

۱. ایک آزاد ذرہ کے لیے تابع وقت مساوات شرودنگر کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب:

$$(e^{-ip^2t/2m\hbar}\Phi(p, 0))$$

ب. متحرک گاوسی موجی اکٹھ (سوال ۲.۴۳) کے لئے  $\Phi(p, 0)$  تلاش کر کے اس صورت کے لئے  $\Phi(p, t)$  مرتب کریں۔ ساتھ ہی  $|\Phi(p, t)|^2$  مرتب کریں جو تابع وقت نہیں ہوگا۔

ج.  $\Phi$  پر مبنی موزوں کمالات حل کرتے ہوئے  $\langle p \rangle$  اور  $\langle p^2 \rangle$  کی قیمتیں تلاش کر کے سوال ۲.۴۳ کی جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. دکھائیں  $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2/2m + \langle H \rangle_0$  ہوگا (جہاں زیر نوشتہ میں 0 ساکن گاوسی ظاہر کرتا ہے) اور اپنے نتیجے پر تبصرہ کریں۔

<sup>۹</sup> generator of translation in space

generator of translation in time

<sup>۹</sup> بالخصوص  $t = 0$  کی زیر نوشتہ میں صفر لکھے بغیر

$$\langle Q(t) \rangle = \langle \Psi(x, t) | \hat{Q} | \Psi(x, t) \rangle = \langle \Psi(x, 0) | \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} | \Psi(x, 0) \rangle$$

ہوگا جہاں  $\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  ہے۔ یوں  $Q$  کی توقعاتی قیمت کا حساب کرتے ہوئے آپ  $\hat{Q}$  کو  $\Psi(x, t)$  اور  $\Psi(x, t)$  میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو تفاسل موج کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں، جیسا ہم کرتے رہے ہیں، یا  $\hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U}$  کو  $\Psi(x, 0)$  اور  $\Psi(x, 0)$  میں لپیٹ کر (تالیفیت وقت کو عامل کا حصہ بنا کر) لکھ سکتے ہیں۔ اول الذکر کو شرودنگر نقطہ نظر جبکہ موختر الذکر کو ہیبرنبرگ نقطہ نظر کہتے ہیں۔

## باب ۴

# تین ابعادی کوانٹائی میکانیات

۴.۱. کروئی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع آسانی کی جاسکتی ہے۔ مساوات شرودنگر

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی عمل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر اُدرج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھا کلاسیکی متبادل مشاہدہ اور عمل میں مندرجہ کرنا دشوار ہو، وہاں میں عمل پر ”ٹوٹی“ نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عملیں پر ”ٹوٹی“ نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

مختی توانائی  $V$  اور تفاعل موج  $\Psi$  اب  $(x, y, z)$   $\mathbf{r} = (x, y, z)$  اور  $t$  کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم  $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$  میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r}$  ہوگا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 \mathbf{r} = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کوپوری فضا پر لینا ہوگا۔ اگر مخفیہ وقت کے تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فضا ئی تفاعل موج  $\psi_n$  غیر تابع وقت مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل ہوگا

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقلات  $c_n$  ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج  $\Psi(\mathbf{r}, 0)$  سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیے تا ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

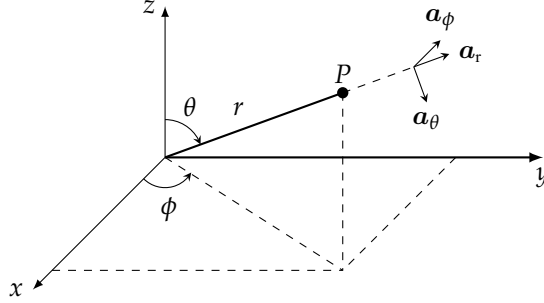
سوال ۴.۱:

۱. عاملین  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{p}$  کے تمام باضابطہ متقلبیہ رشتے<sup>۴</sup>:  $[x, y]$ ،  $[x, p_y]$ ،  $[x, p_x]$ ،  $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ  $x, y$  اور  $z$  کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ  $r_x = x$ ،  $r_y = y$  اور  $r_z = z$  ہیں۔



شکل ۴.۱: کروی محدود: رداس  $r$ ، قطبی زاویہ  $\theta$ ، اور سمتی زاویہ  $\phi$  ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگی۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات ۴.۱۱ تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً)  $\sigma_x \sigma_{p_y}$  پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

#### ۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں کروی محدود  $(r, \theta, \phi)$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل ۴.۱)۔ کروی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کر وہی محدود میں غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو  $RY$  سے تقسیم کر کے  $-2mr^2/\hbar^2$  سے ضرب دیجئے ہیں۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف  $r$  کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف  $\theta$  اور  $\phi$  کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم  $\ell(\ell + 1)$  روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔<sup>۶</sup>

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = \ell(\ell + 1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -\ell(\ell + 1)$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی کئی کئوں (یاؤبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

حل کریں۔

<sup>۶</sup> ایسا کرنے سے ہم معمولیت نہیں کھوئے ہیں، چونکہ یہاں  $\ell$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ  $\ell$  کو لازماً عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $E_3$ ، وغیرہ، سے ظاہر کر کے  $E_1$  تا  $E_6$  تلاش کریں۔ ان کی انخطائیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بُعدی صورت میں انخطائی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال ۲.۴۵)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی  $E_{14}$  کی انخطائیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

## ۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱.۱ متغیرات  $\theta$  اور  $\phi$  پر  $\psi$  کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو  $Y \sin^2 \theta$  سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell+1)Y \sin^2 \theta$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو بچپانے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$(۴.۱۹) \quad Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے  $\Theta\Phi$  سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف  $\theta$  کا تعلق ہے، جبکہ دوسرا صرف  $\phi$  کا تعلق ہے، لہذا ہر جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل  $m^2$  لکھتے ہیں۔

$$(۴.۲۰) \quad \frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + \ell(\ell+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(۴.۲۱) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

متغیر  $\phi$  کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$(۴.۲۲) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

یہاں بھی ہم عمومیّت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ  $m$  کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ  $m$  کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔  
انتباہ: اب صرف  $m$  دو مختلف چیزوں، کیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں:  $e^{im\phi}$  اور  $e^{-im\phi}$ ، تاہم  $m$  کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخہ الزکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جب زو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم  $\Theta$  میں منقسم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محفّی لازماً حقیقی ہوں گے لہذا برقی حرکیات میں سمتی تفاعل  $\Phi$  کو سائن اور کوسائن کی صورت میں لکھا جاتا ہے نہ کہ قوت نسائی صورت میں۔ کوانٹائی میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نسائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی  $\phi$  کی قیمت میں  $2\pi$  کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل ۴.۱ دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط  $\Phi$  کا اضافہ کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں  $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$  یا  $e^{2\pi im} = 1$  ہوگا جس کے تحت  $m$  لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

ساوات  $\theta$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (۴.۲۵)$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = AP_\ell^m(\cos \theta) \quad (۴.۲۶)$$

جہاں  $P_\ell^m$  شریک لیجینڈر تفاعل<sup>۹</sup> ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_\ell^m(x) \equiv (1 - x^2)^{|m|/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_\ell(x) \quad (۴.۲۷)$$

اور  $\ell$  ویں لیجینڈر کثیر رکنی کو  $P_\ell(x)$  ظاہر کرتا ہے<sup>۱۰</sup> جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس<sup>۱۱</sup>:

$$P_\ell(x) \equiv \frac{1}{2^\ell \ell!} \left( \frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell \quad (۴.۲۸)$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

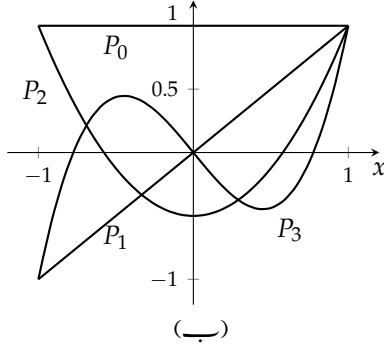
جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیجینڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے،  $P_\ell(x)$  متغیر  $x$  کی

<sup>۹</sup> یہ بظاہر سادہ شرط اتنی سادہ نہیں ہے۔ یاد رہے کہ  $m$  کی قیمت سے قطع نظر، احتمال ثنائیت  $(|\Phi|^2)$  ایک قیمت ہے۔ ہم حصہ ۴.۳ میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے  $m$  پر عائد شرط حاصل کریں گے۔

<sup>۱۰</sup> associated Legendre function  
<sup>۱۱</sup> دھیان رہے کہ  $P_\ell^{-m} = P_\ell^m$  ہوگا۔  
Rodrigues formula



جدول ۴.۱: چند ابتدائی لیٹرانڈرکٹیر کنشیاں  $P_\ell(x)$ ۔ (۱) تناسلی روپ، (ب) تریات۔



$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (۱)$$

درجہ  $\ell$  کنشیر کنی ہے، اور  $\ell$  کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت یا طاق ہوگی۔ تاہم  $P_\ell^m(x)$  عموماً کنشیر کنی نہیں ہوگا؛ اور طاق  $m$  کی صورت میں اس میں  $\sqrt{1-x^2}$  کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) \left( \frac{d}{dx} \right)^2 \left[ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (ب) ہمیں  $P_\ell^m(\cos \theta)$  چاہیے اور چونکہ  $\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$  ہوتا ہے لہذا  $P_\ell^m(\cos \theta)$  کی صورت  $\cos \theta$  کا کنشیر کنی ہوگا جسے طاق  $m$  کی صورت میں  $\sin \theta$  ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں  $\cos \theta$  کے چند شریک لیٹرانڈرکٹیر کنشیاں پیش کیے گئے ہیں۔

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح  $\ell$  کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید  $|m| > \ell$  کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت  $P_\ell^m = 0$  ہوگا۔ یوں  $\ell$  کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2\ell + 1)$  ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$$

ذرا رکے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفسر قی مساوات ہے:  $\ell$  اور  $m$  کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفسر قی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے، تاہم  $\theta = 0$  اور  $\theta = \pi$  پر ایسے حل بے متاثر ہوتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا پر یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محمد میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیڈنڈر تفاعلات  $P_\ell^m(\cos \theta)$ : (۱) تفاعلی روپ، (ب) ترسیات برائے  $r = P_\ell^m(\cos \theta)$  (ان ترسیات میں  $r$  آپ کو  $\theta$  رخ تفاعلی کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو  $z$  محور کے گرد گھمائیے۔)



لہذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

یہاں  $R$  اور  $Y$  کی علیحدہ علیحدہ معمول زنی کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات <sup>۱۲</sup> کو کوکروٹے ہارمونیا <sup>۱۳</sup> کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_\ell^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta)$$

جہاں  $m \geq 0$  کے لئے  $\epsilon = (-1)^m$  اور  $m \leq 0$  کے لئے  $\epsilon = 1$  ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کوکروٹے ہارمونیا <sup>۱۴</sup> عمودی ہیں لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* [Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

<sup>۱۲</sup> معمول زنی مستقل کو سوال ۴.۵۴ میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علاقیت کے ساتھ ہم آہنگی کی منظر  $\epsilon$  (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ  $Y_\ell^{-m} = (-1)^m (Y_\ell^m)^*$  ہوگا۔

<sup>۱۳</sup> spherical harmonics

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات،  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\ Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\ Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \end{aligned}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر  $\ell$  کو انٹیلیجیٹ کوانٹائی عدد<sup>۱۴</sup> جب کہ  $m$  کو مقناطیسی کوانٹائی عدد<sup>۱۵</sup> کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۲۹ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے  $Y_2^1$  اور  $Y_0^0$  تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔ سوال ۴.۴: دکھائیں کہ  $\ell = m = 0$  کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات  $\theta$  (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (دو) نا قابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے  $Y_\ell^\ell(\theta, \phi)$  اور  $Y_3^2(\theta, \phi)$  مرتب کریں۔ (آپ  $P_3^2$  کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ  $P_\ell^\ell$  آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے مرتب کرنا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ  $\ell$  اور  $m$  کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیٹنڈر کشیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \left(\frac{2}{2\ell + 1}\right) \delta_{\ell\ell'} \quad (۴.۳۴)$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: مکمل بالخصوص استعمال کریں۔)

## ۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ،  $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ  $V(r)$  کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ،  $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$(۴.۳۵) \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = \ell(\ell + 1) R$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$(۴.۳۶) \quad u(r) \equiv rR(r)$$

لہذا  $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ،  $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ،  $R = u/r$  درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] u = Eu$$

اس کو رداسی مساوات<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں، جو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بُعدی مساوات شرودنگر (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ<sup>۱۸</sup> درج ذیل ہے

$$(۴.۳۸) \quad V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}$$

جس میں  $(\hbar^2/2m)[\ell(\ell + 1)/r^2]$  اضافی جزو پایا جاتا ہے جو مرکز گریز چڑو اکہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدأ سے دور) باہر جانے دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۳۹) \quad \int_0^\infty |u|^2 dr = 1$$

کسی مخصوص مخفیہ  $V(r)$  کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروئی کنویں<sup>۲۰</sup> پر غور کریں۔

$$(۴.۴۰) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

<sup>۱۶</sup> radial equation

<sup>۱۷</sup> یہاں  $m$  کیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل  $m$  نہیں پایا جاتا ہے۔

<sup>۱۸</sup> effective potential

<sup>۱۹</sup> centrifugal term

<sup>۲۰</sup> infinite spherical well

اس کے تفاعلات موج اور احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔  
 حل: کنویں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنویں کے اندر ردای مساوات درج ذیل ہے

$$(۴.۴۱) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2 \right] u$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۲) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط  $u(a) = 0$  مطبق کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت  $\ell = 0$  کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل ردای تفاعل موج  $u(r)/r$  کی صورت میں  $R(r) = u(r)/r$  ہے اور  $0 \rightarrow r$  کی صورت میں  $[\cos(kr)]/r$  بے وقت بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں  $B = 0$  منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ  $\sin(ka) = 0$  ہو لہذا  $ka = n\pi$  ہوگا جہاں  $n$  عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی

$$(۴.۴۳) \quad E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

جو عین یک بُعدی لامتناہی چکور کنویں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۴.۲۷)۔  $u(r)$  کی معمول زنی کرنے سے  $A = \sqrt{2/a}$  حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو  $1/\sqrt{4\pi}$  ہے)  $Y_0^0(\theta, \phi)$  ہے لہذا اس کی شمولیت یہاں ایک تفسیر سا کام ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۴) \quad \psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کوٹائی  $n$  اعداد  $n$ ،  $\ell$  اور  $m$  استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:  $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی،  $E_{n\ell}$ ، صرف  $n$  اور  $\ell$  پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح  $\ell$  کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$(۴.۴۵) \quad u(r) = A r j_\ell(kr) + B n_\ell(kr).$$

<sup>۲۱</sup> درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج متقابل معمول زنی ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستثنائی ہو: مساوات ۴.۳۱ میں  $r^2$  کی بجائے  $1/r$   $R(r) \sim 1/r$  متقابل معمول زنی ہے۔  
<sup>۲۲</sup> quantum numbers

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات،  $j_n(x)$  اور  $n_\ell(x)$ ؛ چھوٹی  $x$  کے لئے مقترابی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_\ell \rightarrow -\frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} \frac{1}{x^{\ell+1}}, \quad x \ll 1$	$j_\ell \rightarrow \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!} x^\ell$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں  $j_\ell(x)$  رتبہ  $\ell$  کا کروی بیسل تفاعل<sup>۲۲</sup> ہے اور  $n_\ell(x)$  رتبہ  $\ell$  کا کروی نیومن تفاعل<sup>۲۳</sup> ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$(۴.۴۶) \quad j_\ell(x) \equiv (-x)^\ell \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\ell \frac{\sin x}{x}; \quad n_\ell(x) \equiv -(-x)^\ell \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\ell \frac{\cos x}{x}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

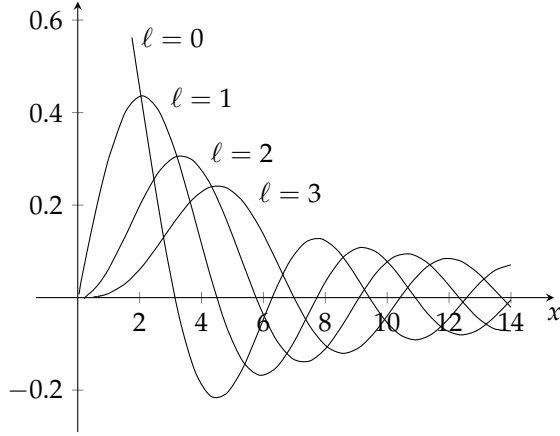
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی، بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر  $x$  کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

<sup>۲۲</sup>spherical Bessel function  
<sup>۲۳</sup>spherical Neumann function



شکل ۳.۲: ابتدائی چار کروی بیل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدأ پر بیل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدأ پر نیومن تفاعلات بے فتابوڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً  $B_\ell = 0$  منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۷) \quad R(r) = A j_\ell(kr)$$

اب سرحدی شرط  $R(a) = 0$  کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ  $k$  کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۳.۴۸) \quad j_\ell(ka) = 0$$

یعنی  $\ell$  رتبی کروی بیل تفاعل کا  $(ka)$  ایک صفر ہوگا۔ اب بیل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۳.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے (جیسا کہ نقاط  $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{n\ell}$$

جہاں  $\beta_{n\ell}$  رتبہ  $\ell$  کروی بیل تفاعل کا  $n$  واں صفر ہوگا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$(۳.۵۰) \quad E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{n\ell}^2.$$

اور تفاعلات موج ذیل ہوں گے

$$(۳.۵۱) \quad \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = A_{n\ell} j_\ell(\beta_{n\ell} r/a) Y_\ell^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل  $A_{n1}$  کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ  $\ell$  کی ہر ایک قیمت کے لئے  $m$  کی  $(2\ell + 1)$  مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح  $(2\ell + 1)$  گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروئی نیومن تقاضات  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریضات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر  $x \ll 1$  کے لئے کارآمد  $n_1(x)$  اور  $n_2(x)$  کے تخمینہ کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر جلتا بوجھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ  $V(r) = 0$  اور  $\ell = 1$  کے لئے  $Arj_\ell(kr)$  رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کنویں کیلئے  $\ell = 1$  کی صورت میں اجزائی توانائیاں ترمیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ  $n$  کی بڑی قیمت کے لئے  $(\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2 \approx E_{n1}$  ہوگا۔ (اشارہ: پہلے  $j_1(x) = 0 \implies x = \tan x$  دکھائیں۔ اس کے بعد  $x$  اور  $\tan x$  کو ایک ساتھ ترمیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے کو مستناہی کروئی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

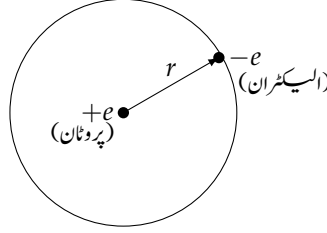
میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال،  $\ell = 0$  کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ  $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$  کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

## ۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار  $e$  کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار  $-e$  کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ وٹانون کولمب کے تحت مخفی توانائی (بین الاقوامی اکائیوں میں) درج ذیل ہوگی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (۴.۵۲)$$





شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

لہذا درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

ہم نے اس مساوات کو  $u(r)$  کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں  $E$  تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سر نقش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم بامقدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب محفہ، مساوات ۴.۵۲،  $E > 0$  کے لئے، استمراریہ حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

#### ۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے  $e$  منفی ہونے کی وجہ سے  $\kappa$  حقیقی ہوگا)

$$(۴.۵۴) \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

مساوات ۴.۵۳ کو  $E$  سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[ 1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(kr)} + \frac{\ell(\ell+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$(۴.۵۵) \quad \rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa}$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(۴.۵۶) \quad \frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[ 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] u$$

اس کے بعد ہم حالات کے مفتربیروپ پر غور کرتے ہیں۔ اب  $\rho \rightarrow \infty$  کرنے سے قوسین کے اندر مستقل  
حبز و غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$(۴.۵۷) \quad u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho}$$

تاہم ( $\rho \rightarrow \infty$  کی صورت میں)  $e^{\rho}$  بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیں  $B = 0$  لینا ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے درج  
ذیل ہوگا۔

$$(۴.۵۸) \quad u(\rho) \sim Ae^{-\rho}$$

اس کے برعکس  $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں مرکز گریز حبز و غالب ہوگا؛<sup>۲۵</sup> لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا  
ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

تاہم ( $0 \rightarrow \rho$  کی صورت میں)  $\rho^{-\ell}$  بے فتابو بڑھتا ہے لہذا  $D = 0$  ہوگا۔ یوں  $\rho$  کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو  
گا۔

$$(۴.۵۹) \quad u(\rho) \sim C\rho^{\ell+1}$$

اگلے قدم پر مفتربیروپ کو چھیلنے کی خاطر نیا فن عمل  $v(\rho)$ :

$$(۴.۶۰) \quad u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho} v(\rho)$$

<sup>۲۵</sup> دلیل  $\ell = 0$  کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ  $u(\rho)$  سے زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^\ell e^{-\rho} \left[ (\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^\ell e^{-\rho} \left\{ \left[ -2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho} \right] v + 2(\ell + 1 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح  $v(\rho)$  کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(\ell + 1 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(\ell + 1)]v = 0 \quad (۴.۶۱)$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل،  $v(\rho)$ ، کو  $\rho$  کا متقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad (۴.۶۲)$$

ہمیں عددی سر (  $c_0$  ،  $c_1$  ،  $c_2$  ، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزود تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”فرضی اشاریہ“  $j$  کو  $j + 1$  کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ نیا مجموعہ  $-1 = j$  سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبزود ضربی  $(j + 1)$  اس جبزود کو ختم کرتا ہے لہذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(\ell + 1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(\ell + 1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک حبیبی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(\ell+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(\ell+1)]c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+\ell+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2\ell+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تعادل  $v(\rho)$  تعین کرتا ہے۔ ہم  $c_0$  سے شروع کر کے (جو) مجموعی مستقل کاروپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمولی زنی سے حاصل کیا جائے گا، مساوات ۴.۶۳ سے  $c_1$  تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے  $c_2$  تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔<sup>۲۶</sup>

آئیں  $j$  کی بڑی قیمت (جو  $\rho$  کی بڑی قیمت کی مطابقتی ہوگی جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔<sup>۲۷</sup>

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کریں کہ یہ بالکل ٹھیک ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$(۴.۶۴) \quad c_j = \frac{2^j}{j!} c_0$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۶۵) \quad u(\rho) = c_0 \rho^{\ell+1} e^{\rho}$$

<sup>۲۶</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب  $u(\rho)$  پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے مطابق سے قبل متنازعی روسیہ کو کیوں (حبز و ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ حبز و ضربی  $\rho^{\ell+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر  $c_{\ell+1}$  ہوگا)؛  $\rho^{\ell+1}$  باہر نہ نکالنے سے تسلسل کا پہلا حبز و  $\rho^0$  حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس حبز و ضربی  $e^{-\rho}$  باہر نکالت زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے  $c_{j+2}$ ،  $c_{j+1}$  اور  $c_j$  پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

<sup>۲۷</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں  $\rho_0 - 2(\ell+1)$  اور نسب نامہ میں  $2\ell+2$  رد کرنے کی طرح  $j+1$  میں  $1$  کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ  $1$  کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا تھا جہاں ہوں۔

جو  $\rho$  کی بڑی قیمتوں کے لیے بے متابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نفاذی غیر پسندیدہ متغیراتی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیراتی حل بھی رداسی مساوات کے حبانز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے کیونکہ یہ نامقابل معمول زنی ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا اعظم عدد صحیح،  $j_{\text{اعظم}}$  پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c(j_{\text{اعظم}}+1) = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ توانی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j_{\text{اعظم}} + \ell + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو اثنائی عدد<sup>۲۸</sup>

$$n \equiv j_{\text{اعظم}} + \ell + 1 \quad (۴.۶۷)$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب  $E$  کو  $\rho_0$  تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

لہذا احبازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر<sup>۲۹</sup> ہے جو غالباً پورے کوانٹائی میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے ۱۹۱۳ء میں، نامقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹائی میکانیات کے ذریعہ اس کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر ۱۹۲۴ء میں منظر عام پر آئی۔ مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$(۴.۷۲) \quad a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$$

رداس بولہر<sup>۳۰</sup> کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۷۳) \quad \rho = \frac{r}{an}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تناسلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد ( $n$ ،  $\ell$  اور  $m$ ) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$(۴.۷۴) \quad \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$(۴.۷۵) \quad R_{n\ell}(r) = \frac{1}{r}\rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho)$$

ہوگا جبکہ  $v(\rho)$  متغیر  $\rho$  میں درجہ  $n - \ell - 1 = j_{\text{اعظم}}$  کا کثیررکتی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تناسل کی معمول زنی کرنا باقی ہے)۔

$$(۴.۷۶) \quad c_{j+1} = \frac{2(j + \ell + 1 - n)}{(j + 1)(j + 2\ell + 2)}c_j$$

زمینے حال<sup>۳۲</sup> (یعنی اصل توانائی کے حال) کے لیے  $n = 1$  ہوگا؛ طبیعی منتظلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۷۷) \quad E_1 = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] = -13.6 \text{ eV}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بند شے توانائی<sup>۳۳</sup> (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مختار جو جوہر کو باردارہ بنائے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۶ کے تحت  $\ell = 0$  لہذا  $m = 0$  ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۴.۷۸) \quad \psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi)$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے  $j = 0$  کے لئے  $c_1 = 0$  حاصل ہوتا ہے)، لہذا  $v(\rho)$  ایک مستقل ( $c_0$ ) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۴.۷۹) \quad R_{10}(r) = \frac{c_0}{a}e^{-r/a}$$

<sup>۳۰</sup> Bohr radius

<sup>۳۱</sup> رداس بولہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے:  $a_0$ ، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا اس میں اس کو صرف  $a$  لکھوں گا۔

<sup>۳۲</sup> ground state

<sup>۳۳</sup> binding energy

اس کی مساوات ۴.۳ کے تحت معمول زنی کرنے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی  $c_0 = 2/\sqrt{a}$  حاصل ہوگا۔ مزید  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حالت درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح  $n = 2$  کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی پیمائش کے مطابق  $\ell = 0$  ہو سکتا ہے (جس میں  $m = 0$  ہوگا) یا  $\ell = 1$  ہو سکتا ہے (جس کے لئے  $m$  کی قیمت  $-1, 0$  یا  $+1$  ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی بھی توانائی ہوگی۔ کلیہً توانائی (مساوات ۴.۷۶)  $\ell = 0$  کے لئے  $j = 0$  استعمال کرتے ہوئے  $c_1 = -c_0$  اور  $j = 1$  استعمال کرتے ہوئے  $c_2 = 0$  دے گا لہذا  $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad (۴.۸۲)$$

[دھیان رہے کہ مختلف توانائی اعداد  $\ell$  اور  $n$  کے لئے توسیعی عددی سر  $\{c_j\}$  مکمل طور پر مختلف ہونگے۔] کلیہً توانائی  $\ell = 1$  کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛  $v(\rho)$  ایک مستقل ہوگا لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \quad (۴.۸۳)$$

(ہر منفرد صورت میں  $c_0$  معمول زنی سے تعین ہوگا سوال ۴.۱۱ دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری  $n$  کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ)  $\ell$  کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۴.۸۴)$$

جبکہ ہر  $\ell$  کے لئے  $m$  کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد  $(2\ell + 1)$  ہوگی (مساوات ۴.۲۹)، لہذا  $E_n$  سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$d(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2 \quad (۴.۸۵)$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنچ کشیر رکنیاں،  $L_q(x)$

---


$$\begin{aligned}
 L_0 &= 1 \\
 L_1 &= -x + 1 \\
 L_2 &= x^2 - 4x + 2 \\
 L_3 &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\
 L_4 &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \\
 L_5 &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \\
 L_6 &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720
 \end{aligned}$$


---

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنچ کشیر رکنیاں،  $L_{q-p}^p(x)$

---


$$\begin{array}{ll}
 L_0^2 = 2 & L_0^0 = 1 \\
 L_1^2 = -6x + 18 & L_1^0 = -x + 1 \\
 L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144 & L_2^0 = x^2 - 4x + 2 \\
 L_0^3 = 6 & L_0^1 = 1 \\
 L_1^3 = -24x + 96 & L_1^1 = -2x + 4 \\
 L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200 & L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18
 \end{array}$$


---

کشیر رکنی  $v(\rho)$  (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان، بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۴.۸۶) \quad v(\rho) = L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2\rho)$$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left( \frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

ایک شریک لاگنچ کشیر رکنی<sup>۳۴</sup> ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left( \frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

$q$  دیں لاگنچ کشیر رکنی<sup>۳۵</sup> ہے۔<sup>۳۶</sup> (جدول ۴.۵) میں چند ابتدائی لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

<sup>۳۴</sup> associated Laguerre polynomial

<sup>۳۵</sup> Laguerre polynomial

<sup>۳۶</sup> دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔



جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات،  $R_{n\ell}(r)$

---


$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$


---

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$


---

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$


---

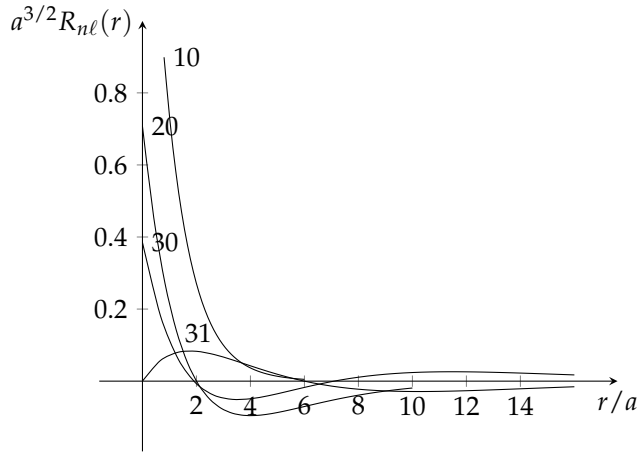
$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$


---



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تقاسمات  $R_{n\ell}(r)$  کی تریسٹ۔

جدول ۴.۸: ہائیڈروجنی جوہروں کے ابتدائی چند تقاضاے موج-ہائیڈروجن کے لئے  $Z = 1$  ہوگا۔

$\Psi_{100}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}}$
$\Psi_{200}$	$\frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 2 - \frac{Zr}{a} \right) e^{-\frac{Zr}{2a}}$
$\Psi_{210}$	$\frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Zr}{a} \right) e^{-\frac{Zr}{2a}} \cos(\theta)$
$\Psi_{21\pm 1}$	$\frac{1}{\sqrt{64\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Zr}{a} \right) e^{-\frac{Zr}{2a}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi}$
$\Psi_{300}$	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 27 - 18\left(\frac{Zr}{a}\right) + 2\left(\frac{Zr}{a}\right)^2 \right) e^{-\frac{Zr}{3a}}$
$\Psi_{310}$	$\frac{1}{81} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 6\left(\frac{Zr}{a}\right) - \left(\frac{Zr}{a}\right)^2 \right) e^{-\frac{Zr}{3a}} \cos(\theta)$
$\Psi_{31\pm 1}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 6\left(\frac{Zr}{a}\right) - \left(\frac{Zr}{a}\right)^2 \right) e^{-\frac{Zr}{3a}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi}$
$\Psi_{320}$	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Zr}{a} \right)^2 e^{-\frac{Zr}{3a}} (3 \cos^2(\theta) - 1)$
$\Psi_{32\pm 1}$	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Zr}{a} \right)^2 e^{-\frac{Zr}{3a}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{\pm i\phi}$
$\Psi_{32\pm 2}$	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Zr}{a} \right)^2 e^{-\frac{Zr}{3a}} \sin^2(\theta) e^{\pm i2\phi}$

چند ابتدائی شریک لائین کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعلات موج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درجہ ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{n\ell m} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+\ell)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^\ell [L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2r/na)] Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

(جدول ۴.۸ میں ہائیڈروجنی (ہائیڈروجن جیسے) جوہروں کے چند ابتدائی تفاعلات موج دیے گئے ہیں، جہاں ہائیڈروجن کے لئے  $Z = 1$  ہوگا۔) یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بندروپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تیسوں کو انشائی اعداد کے تابع ہیں، تو انیوں (مادرات ۴.۷۰) کو صرف  $n$  تعین کرتا ہے۔ یہ کولم توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہوگا کہ کروی کنویں میں توانائیاں  $\ell$  پر منحصر تھیں (مادرات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{n\ell m}^* \psi_{n'\ell' m'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مادرات ۴.۳۳) اور ( $n \neq n'$ ) کی صورت میں  $H$  کی منفرد امتیازی قیمتوں کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا پر ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک  $|\psi|^2$  کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل ۴.۵)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل ۴.۶) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہوگا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مادرات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج  $R_{30}$ ،  $R_{31}$  اور  $R_{32}$  حاصل کریں۔ ان کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مادرات ۴.۸۲ میں دیے گئے  $R_{20}$  کی معمول زنی کر کے  $\psi_{200}$  تیار کریں۔

ب. مادرات ۴.۸۳ میں دیے گئے  $R_{21}$  کی معمول زنی کر کے  $\psi_{210}$ ،  $\psi_{211}$  اور  $\psi_{21-1}$  تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

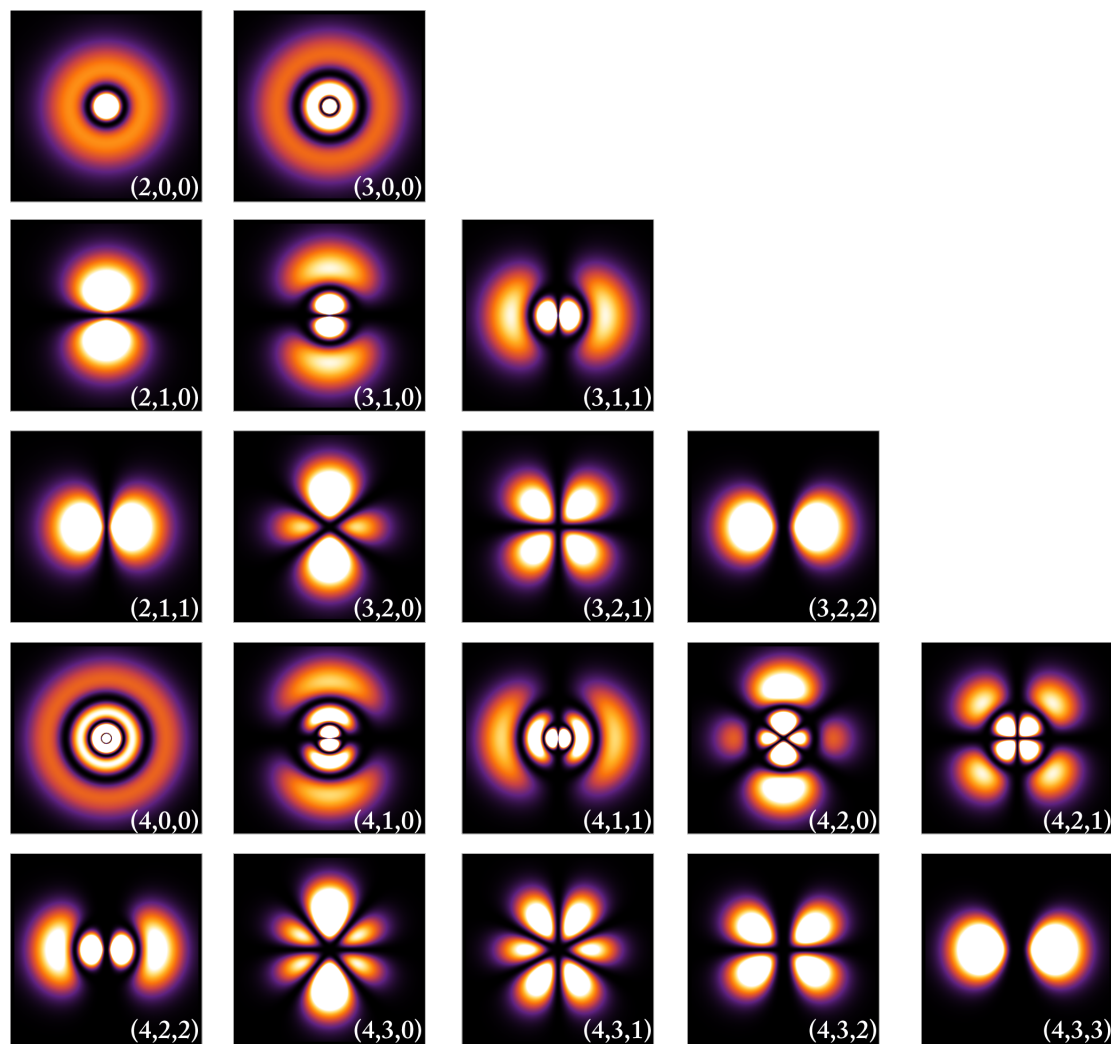
ا. مادرات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لائین کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مادرات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $\ell = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

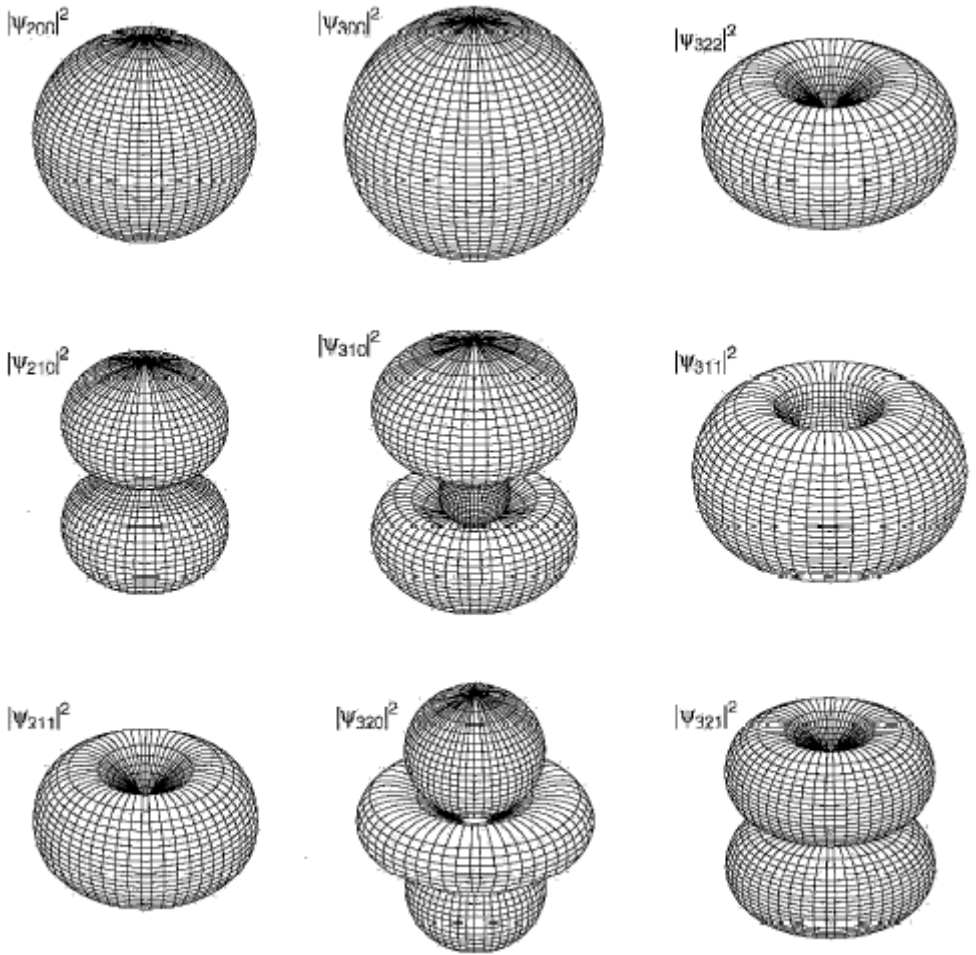
ج. کلیہ توانائی (مادرات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے  $n = 5$ ،  $\ell = 2$  کی صورت میں  $v(\rho)$  تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle r \rangle$  اور  $\langle r^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔



شکل ۵.۴: ہائیڈروجن تناسل موج  $(n, l, m)$  کی کثافتی ترسیات۔



شکل ۴.۶: چند ابتدائی ہائیڈروجن تفاعی موج کی مستقل  $|\Psi|^2$  سطحیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے  $\langle x \rangle$  اور  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا نکل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  ہوگا، اور از مین حال میں تشکیلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال  $n = 2, \ell = 1, m = 1$  کے لیے  $\langle x^2 \rangle$  تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال  $x, y$  اور  $z$  کے لحاظ سے تشکیلی نہیں ہے۔ یہاں  $x = r \sin \theta \cos \phi$  استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں  $r$  کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ  $r$  اور  $r + dr$  کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال  $n = 2, \ell = 1, m = 1$  اور  $n = 2, \ell = 1, m = -1$  کے درج ذیل خطی مجموعے سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال  $\Psi(r, t)$  تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت  $\langle V \rangle$  تلاش کریں۔ (کیا یہ  $t$  کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تصویرت میں پیش کریں۔

### ۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال  $\psi_{n\ell m}$  میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں <sup>۳۷</sup>تحویل کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی نور یہ کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔<sup>۳۸</sup> عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہذا <sup>۳۷</sup>تحویل (جنہیں ”کوانٹائی چھلانگ“ کہتے ہیں) منتقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا پر ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (نور یہ) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_{\gamma} = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

<sup>۳۷</sup>transition

<sup>۳۸</sup>فطرۃ، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب کلیہ پلانک<sup>۴۹</sup> کے تحت نوریہ کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

جبکہ طول موج  $\lambda = c/\nu$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left( \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل<sup>۴۱</sup> کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ<sup>۴۲</sup> ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقامت کی صورت میں  $R$  کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ( $n_f = 1$ ) میں تحویل، بالائے بصری خط میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کا لیمائز تسلسل<sup>۴۳</sup> کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال ( $n_f = 2$ ) میں تحویل، دکھائی دینے والے خط میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے بالمر تسلسل<sup>۴۴</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح  $n_f = 3$  میں تحویل، پاشن تسلسل<sup>۴۵</sup> دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۷ دیکھیں)۔ اس شکل میں مساوات ۴.۷۰ سے حاصل  $E_1$ ،  $E_2$ ، اور  $E_3$  بھی دکھائے گئے ہیں۔ (ربانٹی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ انحرافی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجنی جوہر<sup>۴۶</sup>  $Z$  پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں  $Z = 1$  جبکہ باردارہ ہیلیم<sup>۴۷</sup> میں  $Z = 2$  اور دہری باردارہ لیتھیم<sup>۴۸</sup> میں  $Z = 3$  ہوگا، وغیرہ وغیرہ) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں  $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی  $E_1(Z)$ ، رداس بوہر  $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل

Planck's formula<sup>۴۹</sup>

<sup>۴۰</sup>نوریہ درحقیقت برقی طاقتی انحراف کا ایک کوانٹائی ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹائی میکانات مشابہ استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر نوریہ کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

Rydberg constant<sup>۴۱</sup>

Rydberg formula<sup>۴۲</sup>

Lyman series<sup>۴۳</sup>

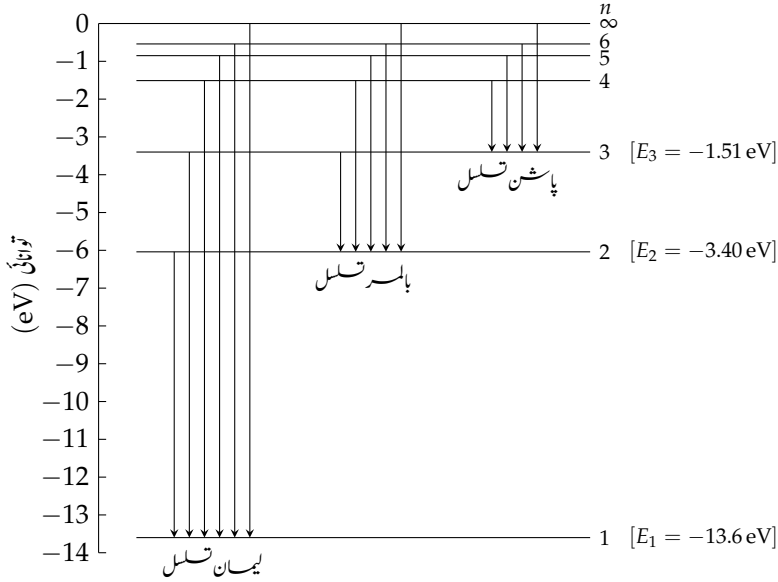
Balmer series<sup>۴۴</sup>

Paschen series<sup>۴۵</sup>

hydrogenic atom<sup>۴۶</sup>

Helium<sup>۴۷</sup>

Lithium<sup>۴۸</sup>



شکل ۴.۷: ہائیڈروجن طیف میں سطحیں توانائی اور تحویلات۔

$R(Z)$  تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقن طیفی طیف کے کس خطہ میں  $Z = 2$  اور  $Z = 3$  کی صورت میں لیمن تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مفہیم (مسائل ۴.۵۲) میں  $e^2 \rightarrow Ze^2$  ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کمیت  $m$  جبکہ سورج کی کمیت  $M$  لیں۔)

ب. اس نظام کا ”رداس بوہر“  $a_g$  کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس  $r_0$  کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو  $E_n$  کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ  $n = \sqrt{r_0/a_g}$  ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد  $n$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح  $(n - 1)$  میں تحویل کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احسراج ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔ حصارن نوریہ (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹائٹ) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)



## ۴.۳. زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد  $n$ ،  $\ell$  اور  $m$  کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹائی عدد ( $n$ ) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ  $\ell$  اور  $m$  مدارچی زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی قنائی متبادریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹائی میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدأ کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$(۴.۹۵) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۹۶) \quad L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

ان کے متعلقہ کوانٹائی عاملین معیاری نسخہ  $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ ،  $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$ ،  $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$  سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجزائی توانائیوں کو حائل الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی قیمتیں حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

## ۴.۳.۱ امتیازی قیمتیں

عاملین  $L_x$  اور  $L_y$  آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔<sup>۵۰</sup>

$$(۴.۹۷) \quad [L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ = [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

باضابطہ مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف  $x$  اور  $p_x$ ،  $y$  اور  $p_y$ ،  $z$  اور  $p_z$  عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

ہم  $[L_y, L_z]$  یا  $[L_z, L_x]$  بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چکر اول بدل ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ ) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

<sup>۵۰</sup> کوانٹائی میکانیات میں تمام عاملین و تانوں جنہیں تقسیم:  $(B + C) = AB + AC$  پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۱۷۷ پر حاشیہ ۳۶ دیکھیں)۔ بالخصوص  $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$  ہوگا۔

جو زاویائی معیار حرکت کی بنیاد پر مقلبتی رشتے<sup>۵۱</sup> ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ  $L_x$ ،  $L_y$  اور  $L_z$  غیر ہم آہنگ و تابل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

یا

$$(۴.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو  $L_x$  اور  $L_y$  کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$(۴.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

عامل  $L_x$  کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

(مقابلہ کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $L_y$  اور  $L_z$  کے ساتھ بھی  $L^2$  مقلوب ہوگا

$$(۴.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اور ج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۰۳) \quad [L^2, \mathbf{L}] = 0$$

اس طرح  $\mathbf{L}$  کے ہر جزو کے ساتھ  $L^2$  ہم آہنگ ہوگا اور ہم  $L^2$  کا (مثلاً)  $L_z$  کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات

$$(۴.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی سر تعش پر سیدھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y \quad (۳.۱۰۵)$$

$L_z$  کے ساتھ مقب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہذا

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad (۳.۱۰۶)$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہوگا۔

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (۳.۱۰۷)$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر  $L^2$  اور  $L_z$  کا امتیازی تفاعل  $f$  ہو تب  $L_{\pm}(f)$  بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا: مساوات ۳.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f) \quad (۳.۱۰۸)$$

لہذا اسی امتیازی قیمت  $\lambda$  کے لیے  $L_{\pm}f$  بھی  $L^2$  کا امتیازی تفاعل ہوگا، اور مساوات ۳.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)f + L_{\pm}L_zf = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad (۳.۱۰۹)$$

لہذا نئے امتیازی قیمت  $\mu \pm \hbar$  کے لیے  $L_z$  کا  $L_{\pm}f$  امتیازی تفاعل ہوگا۔ ہم  $L_+$  کو **عالمی** <sup>۵۲</sup> کہتے ہیں چونکہ یہ  $L_z$  کے امتیازی قیمت کو  $\hbar$  بڑھاتا ہے جبکہ  $L_-$  **عالمی** <sup>۵۳</sup> کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو  $\hbar$  کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں  $\lambda$  کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیدھی ملتی ہے، جس کا ہر پایہ مترہی پایہ سے  $L_z$  کی امتیازی قیمت کے لحاظ سے  $\hbar$  کی ایک اکائی فاصلہ پر ہوگا (مشکل ۳.۸)۔ سیدھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیدھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچ گے جس کا  $z$  جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت <sup>۵۴</sup> ہے۔ لازماً سیدھی کا ایسا ”بالا ترین پایہ“  $f_t$ ، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن <sup>۵۵</sup> کرے گا۔

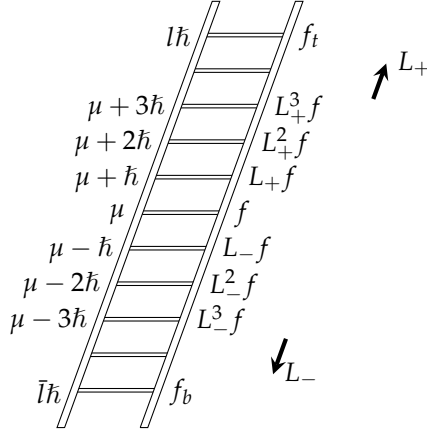
$$L_+f_t = 0 \quad (۳.۱۱۰)$$

فرض کریں اس بالا ترین پایہ پر  $L_z$  کی امتیازی قیمت  $\hbar\ell$  ہو (حرف  $\ell$  کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوگی)۔

raising operator <sup>۵۲</sup>

lowering operator <sup>۵۳</sup>

<sup>۵۴</sup> بانسٹیل طور پر  $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$  ہوگا، لیکن  $\langle L^2 \rangle = \langle L_x f | L_x f \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle = \langle L_x^2 f | f \rangle$  اور  $L_y$  کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا لہذا  $\lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$  ہوگا۔  
<sup>۵۵</sup> درحقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ  $L_+f_t$  ناقابل معمول زنی ہے؛ اس کا معیار ضرر کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔ سوال ۳.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۴.۸: زاویائی معیار حرکت حالات کی "سیڑھی"۔

$$(۴.۱۱۱) \quad L_z f_t = \hbar \ell f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t$$

اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm} L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

یاد دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 \ell^2 + \hbar^2 \ell) f_t = \hbar^2 \ell(\ell + 1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

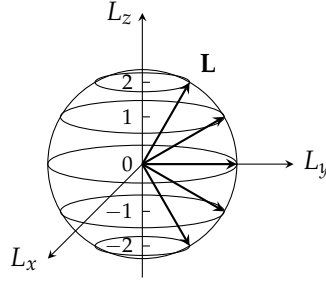
$$(۴.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$$

یہ ہمیں  $L_z$  کی امتیازی قیمت کی اعظم قیمت کی صورت میں  $L^2$  کی امتیازی قیمت دیتی ہے۔ ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ  $f_b$  بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$(۴.۱۱۴) \quad L_- f_b = 0$$

معرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر  $L_z$  کا امتیازی قیمت  $\hbar \bar{\ell}$  ہو:

$$(۴.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{\ell} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$



شکل ۹.۴: زاویائی معیار حرکت حالات (برائے  $\ell = 2$ )۔

مسوات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{\ell}^2 - \hbar^2 \bar{\ell}) f_b = \hbar^2 \bar{\ell} (\bar{\ell} - 1) f_b$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۶) \quad \lambda = \hbar^2 \bar{\ell} (\bar{\ell} - 1)$$

مسوات ۴.۱۱۳ اور مسوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے  $\ell(\ell + 1) = \bar{\ell}(\bar{\ell} - 1)$  ہوگا لہذا یا  $\bar{\ell} = \ell + 1$  (جو بے معنی ہے، چونکہ خپلاترین پایہ، بالاترین پایہ سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۷) \quad \bar{\ell} = -\ell$$

ظاہر ہے کہ  $L_z$  کی امتیازی قیمتیں  $m\hbar$  ہونگے، جہاں  $m$  (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہوگی) کی قیمت  $N$  عدد صحیح قدم لیتے ہوئے  $-\ell$  تا  $+\ell$  ہوگی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\ell = -\ell + N$  یعنی  $\ell = N/2$  ہوگا، لہذا  $\ell$  لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد  $\ell$  اور  $m$  کرتے ہیں:

$$(۴.۱۱۸) \quad L^2 f_\ell^m = \hbar^2 \ell(\ell + 1) f_\ell^m; \quad L_z f_\ell^m = \hbar m f_\ell^m$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$(۴.۱۱۹) \quad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$$

$\ell$  کی کسی ایک قیمت کے لیے  $m$  کی  $2\ell + 1$  مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی ”سیدھی“ کے  $2\ell + 1$  ”پائے“ ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۹.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو  $2 = \ell$  کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیسرے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں  $\hbar$  کی اکائیوں میں

$\sqrt{\ell(\ell+1)}$  ہوگی جو (یہاں  $\sqrt{6} = 2.45$  ہے) جبکہ ان کے  $z$  اجزاء  $m$  کی اجزائی قیمتیں  $0, -1, -2$  ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کردار داس)،  $z$  جزو کی اعظم قیمت سے بڑا ہے! (ماسوائے  $0$ ) کی ”حقیر“ صورت میں، عموماً  $\sqrt{\ell(\ell+1)} > 0$  ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا  $z$  رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ ”کیا میں  $z$  محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟“ اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی  $z$  محدود کو  $L$  کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ  $L$  کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت تعین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر  $L_z$  کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب  $L_x$  اور  $L_y$  ہم نہیں جان سکتے ہیں شکل ۴.۹ میں سمتیات گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لپائی کی حباتی جو یہ ظاہر کرتی کہ  $L_x$  اور  $L_y$  بلا تعین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی تراکیب استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر،  $L^2$  اور  $L_z$  کی امتیازی قیمتوں کا تعین کیا۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا۔ میں کانٹنے کی بات  $Y_\ell^m = f_\ell^m$  سے شروع کرتا ہوں؛  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی تفاعلات وہی کروئی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف  $\ell$  اور  $m$  استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروئی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی قیمتوں کے ہر مشی عملین ( $L^2$  اور  $L_z$ ) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل  $m$  کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm} f_\ell^m = (A_\ell^m) f_\ell^{m \pm 1} \quad (۴.۱۲۰)$$

جہاں  $A_\ell^m$  کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کی معمول زنی کرنے کی خاطر  $A_\ell^m$  کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ  $L_{\pm}$  اور  $L_z$  ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہیں (چونکہ  $L_x$  اور  $L_y$  متبادل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_\ell^m = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)} \quad (۴.۱۲۱)$$

دیکھیے گائے سیزھی کی بلند ترین اور نیچے ترین پایہ پر کیا ہوگا (جب آپ  $f_\ell^\ell$  پر یا  $f_\ell^{-\ell}$  پر  $L_{\pm}$  لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

۱. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل

مقابلہ حاصل کریں۔

$$(۴.۱۲۲) \quad [L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0$$

ب۔ ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے حاصل کریں۔

ج۔ مقابلہ  $[L_z, r^2]$  اور  $[L_z, p^2]$  کی قیمتیں (جہاں  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  اور  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ) تلاش کریں۔

د۔ اگر  $V$  صرف  $r$  کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہیملٹنی  $H = (p^2/2m) + V$  زاویائی عامل  $L$  کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں  $H$ ،  $L^2$  اور  $L_z$  باہمی ہم آہنگ مقابلہ مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا۔ دکھائیں کہ مخفیہ  $V(r)$  میں ایک ذرے کی مدارچی زاویائی معیار حرکت  $L$  کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسرود کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt} \langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$N = r \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہر نفٹ کا مکمل گھومتا تعلق ہے۔)

ب۔ دکھائیں کہ کسی بھی کروئی تشکیلی مخفیہ کے لیے  $d\langle L \rangle / dt = 0$  ہوگا۔ (یہ زاویائی معیار حرکت کے بقا کا کوانٹائی میکانی روپ ہے۔)

## ۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے  $L_x$ ،  $L_y$  اور  $L_z$  کو کروئی محدود میں لکھنا ہوگا اب  $L = (\hbar/i)(r \times \nabla)$  ہے جبکہ کروئی محدود میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$(۴.۱۲۳) \quad \nabla = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

جہاں  $r = ra_r$  ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[ r(a_r \times a_r) \frac{\partial}{\partial r} + (a_r \times a_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (a_r \times a_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹائی میکانیٹ

اب  $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$  اور  $(\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_r$  (شکل ۴.۱) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۲۴) \quad \mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left( \mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

اکائی سمتیات  $\mathbf{a}_\theta$  اور  $\mathbf{a}_\phi$  کو ان کے کارٹینیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$(۴.۱۲۵) \quad \mathbf{a}_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k}$$

$$(۴.۱۲۶) \quad \mathbf{a}_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا۔ برعکس درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۲۷) \quad L_x = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۴.۱۲۸) \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left( +\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۴.۱۲۹) \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ہمیں عمل رفت اور عمل تقصیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[ (-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

تاہم  $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$  لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۳۰) \quad L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

بالخصوص (سوال ۴.۲۱-۱) درج ذیل

$$(۴.۱۳۱) \quad L_+ L_- = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$



لہذا (سوال ۴.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (۴.۱۳۲)$$

ہم اب  $f_\ell^m(\theta, \phi)$  تعین کر سکتے ہیں۔ یہ  $L^2$  کا امتیازی تقاعسل ہے، جس کا امتیازی قیمت  $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$  ہے۔

$$L^2 f_\ell^m = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_\ell^m = \hbar^2 \ell(\ell + 1) f_\ell^m$$

یہ ٹھیک ”زاویائی مساوات“ (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ  $L_z$  کا امتیازی تقاعسل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قیمت  $m\hbar$  ہو گا:

$$L_z f_\ell^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_\ell^m = \hbar m f_\ell^m$$

جو انتہائی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ  $L^2$  اور  $L_z$  کے امتیازی تقاعسلات  $Y_\ell^m$  ہارمونیات ہونگے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروع کرنا شروع کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقبولی عاملین  $H$  اور  $L^2$  کے بیک وقت امتیازی تقاعسلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 \ell(\ell + 1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۴.۱۳۳)$$

ہم مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کرتے ہوئے مساوات مساوات شروع کرتے ہیں۔ ۴.۱۴ کو مختصر اور درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تقاعسلات کی صرف عدد صحیح  $\ell$  قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہوئیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ،  $\ell$  کی (اور لہذا  $m$  کی) نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

۱. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: آزمائشی تقاعسل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۲:

ا. حاب کیے بغیر بتائیں  $L + Y_\ell^1$  کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جزو-اکا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ  $\hbar l Y_\ell^l = L_z Y_\ell^l$  ہوگا،  $Y_\ell^l(\theta, \phi)$  کی قیمت معمول زنی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلاواسطہ عمل کے ذریعے معمول زنی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجے کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۳ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عامل رنڈت کا  $Y_2^2(\theta, \phi)$  پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی  $a$  ہے، کے دونوں سروں پر کمیت  $m$  کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

ا. دکھائیں کہ اس بے پلکے پھرکے<sup>۵۷</sup> کی احباب زنی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تقاضات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی  $n$  وی توانائی سطح کی انحطاطیت کیا ہوگی؟

## ۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے پلکے جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مدار<sup>۵۸</sup> ( $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ) کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم پھرکے<sup>۵۹</sup> ( $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$ ) کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنیاد پر زمین کا مدار چلی زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنیاد پر اس کا چکر کی زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ مندرجہ محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی ”مداری“ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ  $\mathbf{S}$  کے برابر ہوگا۔ کوانٹائی میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی مندرجہ پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنیاد پر مدار چلی زاویائی معیار حرکت (جسے کروئی ہارمونیاں بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار

<sup>۵۷</sup>rigid rotor  
<sup>۵۸</sup>orbital  
<sup>۵۹</sup>spin

حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا نصف میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو معتام کے متغیرات  $r$ ،  $\theta$  اور  $\phi$  سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطہ ذرہ ہے، لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مدار چکی زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے (سوال ۲۵: ۴، دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات غیر غلطی<sup>۶۰</sup> زاویائی معیار حرکت  $L$  کے ساتھ ساتھ غلطی<sup>۶۱</sup> زاویائی معیار حرکت  $S$  بھی رکھتے ہیں۔

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مدار چکی زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبت رشتوں<sup>۶۲</sup> سے شروع کرتے ہیں۔

$$(۴.۱۳۴) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

یوں (پہلے کی طرح)  $S^2$  اور  $S_z$  کے امتیازی تفاسلات درج ذیل تعلقات<sup>۶۳</sup>

$$(۴.۱۳۵) \quad S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle$$

اور

$$(۴.۱۳۶) \quad S_{\pm}|sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں  $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$  ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات  $(\theta$  اور  $\phi$  کے تفاسل نہیں ہیں) لہذا یہ کروہی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنا پر ہم  $s$  اور  $m$  کی نصف عدد صحیح قیمتوں

$$(۴.۱۳۷)$$

کو مقبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے  $s$  کی ایک مخصوص اور نامتابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل) کا چکر<sup>۶۴</sup> کہتے ہیں:  $\pi$  میڈان کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر  $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1؛ ڈیٹ کا چکر  $3/2$ ؛ گریویشن کا چکر 2؛ وغیرہ

extrinsic<sup>۶۵</sup>  
intrinsic<sup>۶۶</sup>

<sup>۶۲</sup> ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ مداری زاویائی معیار حرکت کے مثال کلیات (مساوات ۹۹: ۴) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۹۶: ۴) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ نفیس انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھما کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقلوبی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکری، مداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ مداری شامل ہوں گے۔

<sup>۶۳</sup> چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاسلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے ”سمتایہ“ عملیات استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے  $Y^m_\ell$  کو  $|lm\rangle$  لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاسل روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہذا میں  $S_z$  کے امتیازی قیمت کے لئے  $m$  استعمال کروں گا، جیسا میں نے  $L_z$  کے لئے بھی کیا (بعض مصنفین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں  $m_\ell$  اور  $m_s$  لکھتے ہیں)۔

spin<sup>۶۷</sup>

وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران کا) مدارچی زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد  $l$  کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حاصل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہوگا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا  $s$  اٹل ہوگا، جس کی بنا پر نظریہ چکر نسبتاً سادہ ہے۔<sup>۶۵</sup>

سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کینٹ کا جواز دیتے ہوئے، آہنٹائن کلیب  $E = mc^2$  سے کلاسیکی الیکٹران رداس  $r_c$ ،<sup>۶۶</sup> حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت  $(1/2)\hbar$  ہوتا، تب ”خط استوا“ پر کسی نقطے کی رفتار ( $\text{ms}^{-1}$  میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (درحقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس  $r_c$  سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید عنط مترا دیتا ہے۔)

## 1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک<sup>۶۷</sup> اور تمام لپٹان<sup>۶۸</sup> کیلئے  $\frac{1}{2} = s$  ہوگا لہذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید  $1/2$  چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف ”دو“ امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (یا غیر رسمی طور پر  $\uparrow$ ) ہے جو ہم میدان چکر<sup>۶۹</sup> چکارا جاتا ہے اور دوسرا  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  ہے جو مخالف میدان چکر<sup>۷۰</sup> کہلاتا ہے۔ انہیں کواس سمتیت لیتے ہوئے  $1/2$  چکر ذرے کے عمومی حال کو دور کئی متالب قطار (یا چکر کارائے) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

<sup>۶۵</sup> یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے  $1/2$  چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ پیچیدگیوں اور باریکیوں سے لیں لامتناہی ابعادی لمبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بعدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تشریفی مساوات اور تنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ  $2 \times 2$  متالب اور  $2$  رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مصنفین کوانٹائی میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی سادگی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

<sup>۶۶</sup> classical electron radius

<sup>۶۷</sup> quarks

<sup>۶۸</sup> leptons

<sup>۶۹</sup> spin up

<sup>۷۰</sup> spin down

<sup>۷۱</sup> spinor

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

ساتھ ہی، عاملین چکر  $2 \times 2$  متالاب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_- \quad (۴.۱۴۲)$$

ہم  $\mathbf{S}^2$  کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالاب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا  $c = \frac{3}{4} \hbar^2$  اور  $e = 0$  ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا  $d = 0$  اور  $f = \frac{3}{4} \hbar^2$  ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۳)$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad \mathbf{S}_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-, \quad (۴.۱۴۴)$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ  $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$  ہے لہذا  $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$  اور  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ  $S_x, S_y, S_z$  تینوں میں  $\hbar/2$  کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ  $\frac{\hbar}{2} \sigma$  میں لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالب چکر <sup>۴۲</sup> ہیں۔ دھیان رکھیں کہ  $S_x, S_y, S_z$  اور  $S^2$  تمام ہر مٹی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس  $S_+$  اور  $S_-$  غیر ہر مٹی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ یقیناً  $S_z$  کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت})$$

عمومی حال  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی  $S_z$  کی پیمائش،  $|a|^2$  احتمال کے ساتھ  $\hbar/2$  یا  $|b|^2$  احتمال کے ساتھ  $-\hbar/2$  دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا (یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہوگا)۔<sup>۴۳</sup>

$$(۴.۱۵۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

<sup>۴۲</sup>Pauli spin matrices

<sup>۴۳</sup>لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہئے ہیں کہ اگر  $S_z$  کی پیمائش کی جائے تب  $\frac{\hbar}{2}$  نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال  $|a|^2$  ہوگا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۴۲ دیکھیں۔)

تاہم اس کی بجائے آپ  $S_x$  کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شماراتی مفہوم کے تحت ہمیں  $S_x$  کے امتیازی قیمتیں اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ  $S_x$  کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو  $S_z$  کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طور پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

لہذا  $\beta = \pm \alpha$  ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $S_x$  کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قیمت})$$

بطور ہر مشی و طالب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right) \chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right) \chi_-^{(x)}$$

اگر آپ  $S_x$  کی پیمائش کریں تب  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $|a+b|^2/2$  اور  $-\hbar/2$  کے حصول کا احتمال  $|a-b|^2/2$  ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔) مثال ۴.۲: فرض کریں  $\frac{1}{2}$  چکر کار ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ  $S_z$  اور  $S_x$  کی پیمائش کرتے ہوئے  $+\hbar/2$  اور  $-\hbar/2$  حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔  
حل: یہاں  $a = (1+i)\sqrt{6}$  اور  $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$  ہے لہذا  $S_z$  کیلئے  $+\hbar/2$  کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ  $\frac{\hbar}{2}$  - حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح  $S_x$  کیلئے  $\frac{\hbar}{2} +$  کے حصول کا احتمال  $5/6 = \left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$  جبکہ  $\frac{\hbar}{2} -$  کے حصول کا احتمال  $1/6 = \left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$  ہوگا۔ انقسات  $S_x$  کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left( +\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left( -\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقے سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو  $1/2$  چکرے متعلق ایک مندرجہ پیشہ تجربے سے گزارتا ہوں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب اس میں تبصرہ کیا گیا۔ مندرجہ کریں ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال  $\psi_+$  میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ”اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا  $z$  جزو کیا ہے؟“، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب  $+\hbar/2$  ہے؛ چونکہ  $S_z$  کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ”اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا  $x$  جزو کیا ہوگا؟“، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ  $S_x$  کی پیمائش  $+\hbar/2$  یا  $-\hbar/2$  کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ”حقیقت پسند“ ہو تب وہ اس جواب کو کافی بلکہ غمیر متعلقہ سمجھے گا: ”کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟“ نہیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو  $\psi_+$  ہے۔ ”تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا  $x$  جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟“ اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص  $x$  جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر  $S_x$  اور  $S_z$  کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا  $x$  جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ مندرجہ کریں وہ  $+\hbar/2$  قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے) ”اس ذرے کی  $S_x$  قیمت ٹھیک  $+\hbar/2$  ہے۔“ جی آپ درست مندرجہ کر رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔“ ظاہر ہے، آپ بال کی کمال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بسنا؟ میں اب  $S_x$  اور  $S_z$  دونوں کو حثانتا ہوں۔ ”جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ  $\chi_+^{(x)}$  میں ہے اور آپ اس کے  $S_x$  کی قیمت جانتے ہیں جبکہ  $S_z$  کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔“ لیکن



$S_x$  کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون خراب نہ ہو۔ ”اچھا اگر آپ میسر ہی بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ  $S_z$  کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔ (عین ممکن ہے کہ  $\hbar/2$  حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ  $\hbar/2$  حاصل ہوگا۔)

ایک عام آدمی، فلسفی یا کلاسیکی ماہر طبیعیات کے لئے ایسا فقرہ: ”اس ذرے کا ٹھیک ٹھیک مقام (یا معیار حرکت یا چکر زاویائی معیار حرکت کا  $x$  جزو، وغیرہ) نہیں پایا جاتا ہے“ ایک گول مول جواب ہے جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نظر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا بالکل نہیں ہے۔ تاہم، اس کے اصل معنی، کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کوانٹائی میکانیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو، تفسیر ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہو (اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تب اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی) تب  $1/2$  چکر نظام پر دوبارہ غور کریں جو کوانٹائی میکانیات کی تصوراتی پیچیدگیوں کو جاننے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال ۴.۲۶:

ا. تصدیق کیجیے گا کہ چکری متالاب (مساوات ۴.۱۴۵ اور مساوات ۴.۱۴۷) زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں۔

ب. دکھائیں کہ پالی چکری متالاب (مساوات ۴.۱۴۸) متاعده ضرب

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_{\ell} \epsilon_{jkl} \sigma_{\ell} \quad (۴.۱۵۳)$$

کو مطمئن کرتا ہے جہاں اشاریہ  $x, y$  اور  $z$  کو ظاہر کرتے ہیں، اور  $\epsilon_{jkl}$  علامت لوی و چوینا<sup>۴</sup> ہے، جس کی قیمت  $123 = jkl$  یا  $231$  یا  $312$  کی صورت میں  $+1$  جبکہ  $132 = jkl$  یا  $213$  یا  $321$  کی صورت میں  $-1$  اور بصورت دیگر  $0$  ہوگی۔

سوال ۴.۲: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

ا. معمول زنی مستقل  $A$  تعین کریں۔

ب.  $S_x, S_y$  اور  $S_z$  کی توقعاتی قیمتیں تلاش کریں۔

ج. ”عدم یقینیت“  $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$  اور  $\sigma_{S_z}$  تلاش کریں۔ (دھیان رہے یہاں  $\sigma$  سے مراد معیار انحراف ہے نہ کہ پالی متالاب!)۔

د. تصدیق کیجیے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰ اور اس کے چکر دار ترتیبی مرتبہ اجتماعات جہاں  $L$  کی جگہ  $S$  ہوگا) کے عین مطابق ہیں۔

سوال ۴.۲۸: سب سے زیادہ عمومی معمول شدہ چپکار  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) کے لیے  $\langle S_x \rangle$ ،  $\langle S_y \rangle$ ،  $\langle S_z \rangle$ ،  $\langle S_x^2 \rangle$ ،  $\langle S_y^2 \rangle$ ، اور  $\langle S_z^2 \rangle$ ، تلاش کریں۔ تصدیق کیجیے کہ  $\langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle = \langle S^2 \rangle$  ہے۔  
سوال ۴.۲۹:

۱.  $S_y$  کی امتیازی قیمتیں اور امتیازی چپکار تلاش کریں۔

ب. عمومی حال  $\chi$  (مساوات ۴.۱۳۹) میں پائے جانے والے ذرے کے  $S_y$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہے۔ دھیان رہے کہ  $a$  اور  $b$  غیر حقیقی ہو سکتے ہیں!

ج.  $S_y^2$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۰: کسی اختیاری رخ  $a_r$  کے ہم رہ چپکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا فالتاب  $S_r$  تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$a_r = \sin \theta \cos \phi i + \sin \theta \sin \phi j + \cos \theta k \quad (۴.۱۵۴)$$

فالتاب  $S_r$  کی امتیازی قیمتیں اور (معمول شدہ) امتیازی چپکار تلاش کریں۔ جواب:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad (۴.۱۵۵)$$

چونکہ آپ مرضی کے دوری جزو ضرب، مثلاً  $e^{i\phi}$ ، سے ضرب دے سکتے ہو لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال ۴.۳۱: ایک ذرہ جس کا چپکار ایک (1) ہے کے لیے چپکری فالتاب ( $S_x$ ،  $S_y$  اور  $S_z$ ) تیار کریں۔ اشارہ:  $S_z$  کے کتنے امتیازی حالات ہونگے؟ ہر (ان) حال پر  $S_+$ ،  $S_z$  اور  $S_-$  کا عمل تعین کریں۔ فالتاب میں  $1/2$  چپکار کے لیے مستعمل ترکیب استعمال کریں۔

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

چپکار کاغٹا ہوا بار دار ذرہ، مقناطیسی جفت قطب قائم کرتا ہے۔ اس کا مقناطیسی جفت قطبی معیار  $\mu$ ، ذرے کی چپکری زاویائی معیار حرکت  $S$  کا راست متناسب ہوگا:

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۶)$$

جہاں تناسبی مستقل  $\gamma$  مسکن مقناطیسی نسبت<sup>۷۶</sup> کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان  $B$  میں رکھے گئے مقناطیسی جفت قطب پر قوت سرور  $\mu \times B$  عمل کرتی ہے جو (مقناطیسی قطب نما کی سوئی طرح) اس کو میدان کے متوازی لانے کی کوشش کرتی ہے۔ اس قوت سرور کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۷)$$

لہذا مقناطیسی میدان  $B$  میں، ایک مقام پر ساکن<sup>۷۸</sup> باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کی ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۵۸)$$

مثال ۴.۳: لارمر استقبالی حرکت<sup>۷۹</sup>: فرض کریں  $z$  رخ نیکیاں مقناطیسی میدان

$$B = B_0 k \quad (۴.۱۵۹)$$

میں  $1/2$  چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے۔ متوالی روپ میں ہیمیلٹنی (مساوات ۴.۱۵۸) درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۰)$$

ہیمیلٹنی  $H$  کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو  $S_z$  کے تھے:

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۱)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی اقل توانائی اس صورت ہوگی جب جفت قطب معیار اثر، مقناطیسی میدان کا متوازی ہو۔

چونکہ ہیمیلٹنی غصیر تابع وقت ہے لہذا تابع وقت مساوات شرودنگر

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi \quad (۴.۱۶۲)$$

<sup>۷۶</sup> gyromagnetic ratio

<sup>۷۷</sup> کلاسیکی طور پر ایک جسم، جس میں بار  $q$  اور کمیت  $m$  کی تقسیم یکساں ہو، کی مسکن مقناطیسی نسبت  $q/2m$  ہوگی۔ چند وجوہات کی بنا، جن کی وضاحت صرف کوانٹائی نظریے سے ممکن ہے، الیکٹران کی مسکن مقناطیسی نسبت کی قیمت کلاسیکی قیمت کے (تقریباً) ٹھیک دگنی ہے۔ ( $\gamma = -e/m$ )

<sup>۷۸</sup> اگر ذرہ کو حرکت کی اجازت ہو، تب حرکی توانائی پر بھی نظر رکھنی ہوگی، اور مزید اس کو قوت لورنز ( $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) کا بھی سامنا ہوگا، جس کو غنی توانائی تقا عمل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے، لہذا اس کو (اب تک متعارف) مساوات شرودنگر میں نسبت نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت کو نمٹنے کا طریقہ میں جلد پیش کروں گا (سوال ۴.۵۹)۔ تاہم ابھی تصور کریں کہ ذرہ گھوم سکتا ہے لیکن بصورت دیگر ساکن ہے۔

<sup>۷۹</sup> Larmor precession

کے عمومی حل کو سکن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات  $a$  اور  $b$  کو ابتدائی معلومات:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے (یقیناً  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  ہوگا)۔ ہم ان مستقلات کو

$$a = \cos(\alpha/2), \quad b = \sin(\alpha/2)$$

لکھ سکتے ہیں<sup>۸۰</sup> جہاں  $\alpha$  ایک مقررہ زاویہ ہے جس کی اہمیت جلد عیاں ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۳)$$

آئیں  $S$  کی توقعاتی قیمت بطور تفہیم حاصل کریں:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۴)$$

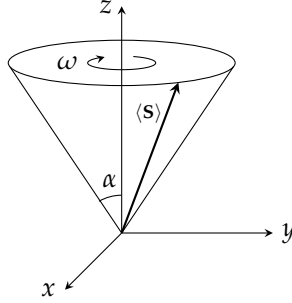
اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۵)$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۶)$$

<sup>۸۰</sup> یہاں  $a$  اور  $b$  کو حقیقی مندرجہ ذیل کیا گیا ہے۔ آپ چاہیں تو مخلوط صورت کے لئے بھی ایسی مساواتیں ڈھونڈ سکتے ہیں، جو  $t$  کے ساتھ محض ایک مستقل جمع کرتا ہے۔



شکل ۴.۱۰: یکاں مقناطیسی میدان میں  $\langle S \rangle$  کی استقبالی حرکت۔

کلاسیکی صورت کی طرح (شکل ۴.۱۰) محور  $z$  کے ساتھ  $\langle S \rangle$  مستقل زاویہ  $\alpha$  پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد<sup>۸۱</sup>  $\omega = \gamma B_0$  (۴.۱۶۷)

سے استقبالی حرکت<sup>۸۲</sup> کرتا ہے۔ یہ حیرت کی بات نہیں ہے؛ مسئلہ اہر نفٹ (کی وہ صورت جسے سوال ۴.۲۰ میں اخذ کیا گیا) ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت  $\langle S \rangle$  ارتقا پائے گا۔ بہرحال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق کو سابق میں دیکھنا اچھا لگا۔ □

مثال ۴.۴: تجربہ شٹراخ و گرلاخ:<sup>۸۳</sup> ایک غیر یکاں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت قطب پر نہ صرف قوت مسرود بلکہ قوت:<sup>۸۴</sup>

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۶۸)$$

بھی پایا جاتا ہے۔ اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے کسی مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں نسبتاً بھاری تعدیلی<sup>۸۵</sup> جوہروں کی شعاع  $y$  رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکاں مقناطیسی میدان:

$$B(x, y, z) = -\alpha x i + (B_0 + \alpha z) k \quad (۴.۱۶۹)$$

کے خطے سے گزرتی ہے (شکل ۴.۱۱)، جہاں  $B_0$  ایک طاقتور یکاں میدان ہے جبکہ مستقل  $\alpha$  میدان کی یکانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے۔ (حقیقت میں ہمیں صرف  $z$  حبزوے عنرض ہے، لیکن بد قسمتی

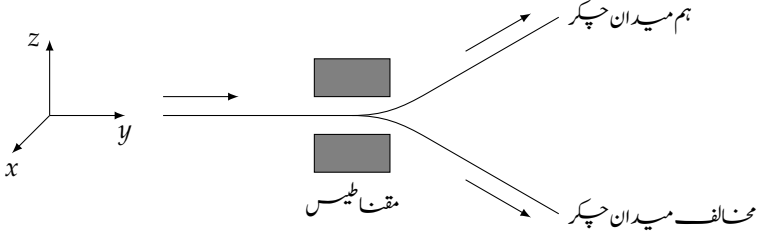
Larmor frequency<sup>۸۱</sup>

کلاسیکی صورت میں صرف توقعاتی قیمت نہیں بلکہ زاویائی معیار حرکت سمتیہ بھی مقناطیسی میدان میں لارمر تعدد سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔

Stern-Gerlach experiment<sup>۸۴</sup>

توانائی (مساوات ۴.۱۵۷) کی منفی و حلو ان کے برابر قوت  $F$  ہوگی۔

ہم تعدیلی جوہر کا انتخاب کر کے قوت لورنزی بنا پر شعاع کے جھکنے سے چپکرا حاصل کرتے ہیں، اور بھاری جوہر اس لئے لیتے ہیں تاکہ ہم معتمی موجی اکٹھے مسرتب کر کے حرکت کو کلاسیکی تصور کر سکیں۔ عسا، شٹراخ و گرلاخ تجربہ، آزاد الیکٹران کی شعاع کے لئے کارآمد نہیں ہوگا۔



شکل ۱۱.۴: مشرن و گراخ آلہ۔

سے ایسا ممکن نہیں ہوگا؛ چونکہ برقی مقناطیسی متانوں  $\nabla \cdot B = 0$  کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں  $x$  جزو بھی پایا جائے گا۔ ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگی۔

$$F = \gamma \alpha (-S_x i + S_z k)$$

تاہم  $B_0$  کے گرد لامرستہائی حرکت کی بنا،  $S_x$  تیزی سے ارتعاش کرتے ہوئے صفر اور مثبت و منفی، لہذا  $z$  رخ حاصل قوت درج ذیل ہوگی

$$F_z = \gamma \alpha S_z \quad (۴.۱۷۰)$$

اور شعاع کے چپکری زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی۔ کلاسیکی طور پر (چونکہ  $S_z$  کوانٹا شدہ نہیں ہوگا) ہم توقع کرتے کہ  $z$  محور پر شعاع کی لپٹائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع  $2s + 1$  علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹائی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے۔ (چاندی کو مثال بناتے ہوئے، چونکہ چاندی کے جوہر میں اندر جانب تمام الیکٹران جوڑیوں کی صورت میں یوں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چپکر اور مدار پچی زاویائی معیار حرکت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں، لہذا صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چپکر  $s = 1/2$  ہی جوہر کا چپکر ہوگا۔ یوں شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی۔)

اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل حاکمیت کا اسیکی بحث جبکہ کوانٹائی میکانیات میں ”قوت“ کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے، لہذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا۔ ہم اس عمل کو اس حوالہ چھوڑنے کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہو۔ اس چھوڑنے میں ہیملٹنی صفر سے آغاز کرتے ہوئے وقت  $T$  (جس دوران ذرہ مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے) کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے۔

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۱)$$

(جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں  $B$  کے  $x$  جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا ہمیں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں۔) فرض کریں جوہر کا چکر  $1/2$  ہے اور یہ درج ذیل حال سے آغاز کرتا ہے۔

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے دوران  $\chi(t)$  ہمیشہ کی طرح ارتقا پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq t \leq T$$

جہاں (مساوات ۴.۱۶۱ کے تحت)

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۲)$$

ہوگا لہذا ( $t \geq T$  کے لیے) یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا۔

$$\chi(t) = \left( a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha \gamma T/2)z} + \left( b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha \gamma T/2)z} \quad (۴.۱۷۳)$$

ان دونوں اجزاء کا اب  $z$  رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے (مساوات ۳.۳۲ دیکھیں)؛ ہم میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$p_z = \frac{\alpha \gamma T \hbar}{2} \quad (۴.۱۷۴)$$

اور یہ مثبت  $z$  رخ حرکت کرے گا؛ مخالف میدان جزو کا معیار حرکت الٹ ہے اور یہ منفی  $z$  رخ حرکت کرے گا۔ یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی۔ (چونکہ یہاں  $\hbar/2$  اور  $p_z = F_z T$  اور  $S_z = \hbar/2$  ہیں)۔ (مساوات ۴.۱۷۰ کے مطابق ہے۔)

کوانٹائی میکانیات کے فلسفہ میں شٹرن و گراخ تجربہ نے کلیدی کردار ادا کیا ہے۔ اس کے ذریعے کوانٹائی حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹائی پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے۔ ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ہم نظام کا ابتدائی حال جانتے ہیں (جس سے مساوات شرودنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جاسکتا ہے)؛ تاہم، یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر کس طرح لاتے ہیں۔ آپ کسی مخصوص چکر کے جوہر کی شعاع تیار کرنے کی حنا طر غیر تنظیم شدہ شعاع کو شٹرن و گراخ مقناطیس سے گزار کر اجرائی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو۔ اسی طرح اگر اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا  $z$  جزو جاننا چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گراخ آلہ سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں۔ میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے، لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کی یہ ایک سادہ مثال ہے۔ □

سوال ۴.۳۲: لارمر استقبالی حرکت کی مثال ۴.۳ میں:

باب ۴. تین ابعادی کوانٹائی میکانیات

۱. وقت  $t$  پر چپکری زاویائی معیار حرکت کی  $x$  رخ جزو کا پیمائشی نتیجہ  $\hbar/2$  حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟

ب.  $y$  رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

ج.  $z$  رخ اسی سوال کا جواب کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳۳: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$$

جہاں  $B_0$  اور  $\omega$  مستقل ہیں، میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے۔

۱. اس نظام کا ہیملٹنی متالاب تیار کریں۔

ب. محور  $x$  کے لحاظ سے وقت  $t = 0$  پر الیکٹران ہم میدان حال (یعنی  $\chi_+^{(x)} = \chi(0)$ ) سے آغاز کرتا ہے۔ مستقبل کسی بھی وقت کے لیے  $\chi(t)$  تعین کریں۔ دھیان رہے کہ یہ ہیملٹنی تایع وقت ہے، لہذا آپ ساکن حالات سے  $\chi(t)$  حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ خوش قسمتی سے آپ تایع وقت مساوات شروع ونگر (مساوات ۴.۱۶۲) کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں۔

ج.  $S_x$  کی پیمائش سے  $\hbar/2$  نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟ جواب:

$$\sin^2 \left( \frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

د.  $S_x$  کو مکمل الٹ کرنے کے لیے اقل درکار میدان ( $B_0$ ) کتنا ہوگا؟

## ۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس  $1/2$  چکر کے دو ذرات، مثلاً، ہائیڈروجن کے زمینی حال<sup>۸۹</sup> میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا مخالف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوں گی:<sup>۹۰</sup>

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow \quad (۴.۱۷۵)$$

جہاں پہلا تیسر کا نشان (یعنی بیاں تیسر) الیکٹران کو جبکہ دوسرا (یعنی دایاں) تیسر کا نشان پروٹان کو ظاہر کرتا ہے۔ سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا؟ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)} \quad (۴.۱۷۶)$$

<sup>۸۹</sup> میں انہیں زمینی حال میں اس مقصد سے رکھتا ہوں کہ سنہ تو مدار چلی زاویائی معیار حرکت ہو اور سنہ ہی نہیں اس کے بارے میں فکر مند ہونے کی ضرورت ہو۔

<sup>۹۰</sup> یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ہر ایک ذرہ ہم میدان اور مخالف میدان کا خطی مجموعہ ہوگا، اور مرکب نظام ان چار حالات کا خطی مجموعہ ہوگا۔



ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک،  $S_z$  کا امتیازی حال ہوگا: ان کے  $z$  اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ سادہ طریقے سے جمع ہوتے ہیں:

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar (m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

دیتے ہیں۔ یاد رہے  $S^{(1)}$  صرف  $\chi_1$  پر عمل کرتا ہے اور  $S^{(2)}$  صرف  $\chi_2$  پر عمل کرتا ہے۔ یہ علاقیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے۔ یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد  $m$  یہاں  $m_1 + m_2$  ہوگا:

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow: \quad m &= m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \uparrow\downarrow: \quad m &= m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \downarrow\uparrow: \quad m &= m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ \downarrow\downarrow: \quad m &= m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے:  $m$  کو چاہیے کہ  $-s$  تا  $+s$  عدد صحیح قدموں کے لحاظ سے بڑھے؛ ایسا لگتا ہے کہ  $s = 1$  ہے لیکن یہاں ایک ”اضافی“ حال جس کا  $m = 0$  ہے بھی پایا جاتا ہے۔ اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات ۴.۱۴۶ استعمال کرتے ہوئے  $\uparrow\uparrow$  حال پر عامل تقلیل  $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$  لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $s = 1$  کے تین حالات  $|sm\rangle$  علامتی روپ میں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۷۷) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (ت۳)}$$

(تصدیق کی خاطر  $|10\rangle$  پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں؛ آپ کو کیا حاصل ہونا چاہیے؟ سوال ۴.۳۴-۴.۳۵ دیکھیں۔) اسی بنا پر اسے  $s = 1$  ملاپ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی، وہ عمودی حال جس کا  $m = 0$  ہو  $s = 0$  کا حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۷۸) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (ت۲)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کے اطلاق سے مندر حاصل ہوگا (سوال ۴.۳۴-ب دیکھیں)۔  
یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ  $1/2$  ہیکر کے دو ذرات کا کل ہیکر ایک (1) یا منفر (0) ہوگا، جو اس پر منفر ہوگا کہ آیا وہ سہ تائیک تانتظیم اختیار کرتے ہیں۔ اس کی تصدیق کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ سہ تاحالات،  $S^2$  کے امتیازی سمتیات ہیں جن کا امتیازی قیمت  $2\hbar^2$  ہے، اور ایک تاحالات،  $S^2$  کا وہ امتیازی سمتیہ ہے جس کا امتیازی قیمت منفر ہے۔ اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۷۹) \quad S^2 = (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) \cdot (\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}$$

ساوات ۴.۱۳۵ اور مساوات ۴.۱۳۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} (\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} (2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

یوں

$$(۴.۱۸۰) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4} |10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۱) \quad \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2 \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4} |00\rangle$$

ہوئے۔

ساوات ۴.۱۷۹ پر دوبارہ غور کرتے ہوئے (اور مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کر کے) ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$(۴.۱۸۲) \quad S^2 |10\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\right) |10\rangle = 2\hbar^2 |10\rangle$$

ہے لہذا  $|10\rangle$  یقیناً  $S^2$  کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قیمت  $2\hbar^2$  ہوگی، اور

$$(۴.۱۸۳) \quad S^2 |00\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right) |00\rangle = 0$$

ہے لہذا  $|00\rangle$  یقیناً  $S^2$  کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قیمت 0 ہوگی۔ (میں آپ کے لئے سوال ۳.۳۲-ج چھوڑتا ہوں، جہاں آپ نے تصدیق کرنی ہوگی کہ  $|11\rangle$  اور  $|1-1\rangle$  موزوں امتیازی قیمت کے،  $S^2$  کے امتیازی تقابلات ہیں۔)

ہم نے  $1/2$  چکر اور  $1/2$  چکر کو ملا کر 1 چکر اور 0 چکر حاصل کیا، جو ایک بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے: اگر آپ  $s_1$  چکر اور  $s_2$  چکر کو ملائیں تب کل چکر  $s$  کیا حاصل ہوئے؟<sup>۸۹</sup> اس کا جواب<sup>۹۰</sup> ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے  $(s_1 + s_2)$  سے  $s_2 > s_1$  کی صورت میں  $(s_2 - s_1)$  تک؛ اور  $s_1 > s_2$  کی صورت میں  $(s_1 - s_2)$  تک، نیچے آتے ہوئے ہر چکر:

$$(۴.۱۸۴) \quad s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2|$$

حاصل ہوگا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے، اعظم کل چکر اس صورت حاصل ہوگا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صاف بند ہوں، اور اقل اس صورت ہوگا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صاف بند ہوں۔) مثال کے طور پر، اگر آپ  $3/2$  چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ 2 چکر کا ایک ذرہ ملائیں تب آپ کو  $7/2, 5/2, 3/2, 1/2$  کل چکر حاصل ہو سکتا ہے جو تفکیک پر منحصر ہوگا۔ دوسری مثال پیش کرتا ہوں: حال  $\psi_{nlm}$  کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا حلال زاویائی معیار حرکت (چکر جمع مدار چکی)  $1/2 + \ell$  یا  $1/2 - \ell$  ہوگا؛ اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں، تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد  $1 + \ell$ ،  $\ell$  یا  $\ell - 1$  ہوگا (جہاں  $\ell$  کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے، جس کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا کہ الیکٹران خود  $1/2 + \ell$  تفکیک یا  $1/2 - \ell$  تفکیک میں ہے۔)

(چونکہ  $z$  اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں، لہذا صرف وہ مرکب حالات جن کے لئے  $m_1 + m_2 = m$  ہو حصہ ڈال سکتے ہیں، لہذا) مجموعی حال  $|sm\rangle$  جس کا کل چکر  $s$  ہو اور  $z$  جزو  $m$  ہو، مرکب حالات  $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$  کا خطی مجموعہ:

$$(۴.۱۸۵) \quad |sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$$

ہوگا۔ مساوات ۴.۱۷۷ اور مساوات ۴.۱۷۸ اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں  $s_1 = s_2 = 1/2$  ہے (میں نے یہاں غیر رسمی علامت  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle$ ،  $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle = |\downarrow\rangle$  استعمال کیا ہے)۔ مستطالات  $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$  کو **کلیش وگورڈن عددی** سر<sup>۹۱</sup> کہتے ہیں۔ جدول ۴.۹ میں ان کی چند سادہ مثالیں پیش کی گئی ہے۔ مثال کے طور پر  $2 \times 2$  جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے۔

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |21\rangle |1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |20\rangle |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2-1\rangle |11\rangle$$

بالخصوص، اگر ایک ڈب میں (2 چکر اور 1 چکر کے) ساکن ذرات پائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3، اور  $z$  جزو 0 ہو تب  $S_z^{(1)}$  کی پیمائش ( $1/5$  احتمال کے ساتھ)  $\hbar$  یا ( $3/5$  احتمال کے ساتھ) 0 یا ( $1/5$  احتمال کے

<sup>۸۹</sup> میں یہاں چکروں کی بات کر رہا ہوں، تاہم ان میں سے کوئی ایک (یادوں) مدار چکی زاویائی معیار حرکت بھی ہو سکتے ہیں (جن کے لئے، البتہ، ہم صرف  $I$  استعمال کرتے)۔

<sup>۹۰</sup> ثبوت کے لئے آپ کو عملی نصاب دیکھنا ہوگا۔

<sup>۹۱</sup> Clebsch-Gordon coefficients

ساتھ  $\hbar$  - قیمت دے سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ 1 ہے۔ (کلیش و گورڈن جدول کے کسی بھی قطار کے سر مجموعوں کا مجموعہ 1 ہوگا۔)  
ان جدول کو الٹ کر کے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s m\rangle \quad (۴.۱۸۶)$$

بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر  $3/2 \times 1$  جدول میں سب دار صف درج ذیل کہتی ہے۔

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}} |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں  $3/2$  چکر اور  $1$  چکر کے دو ذرات رکھیں اور آپ جانتے ہوں کہ پہلے کے لیے  $m_1 = 1/2$  اور دوسرے کے لئے  $m_2 = 0$  ہے ( $m$  لازماً  $1/2$  ہوگا) اور آپ کل چکر  $s$  کی پیشکش کریں تب آپ ( $3/5$  احتمال کے ساتھ)  $5/2$  یا ( $1/15$  احتمال کے ساتھ)  $3/2$  یا ( $1/3$  احتمال کے ساتھ)  $1/2$  حاصل کر سکتے ہیں۔ اب بھی احتمالات کا مجموعہ 1 ہوگا (کلیش و گورڈن جدول میں ہر صف کے سر جمع کا مجموعہ 1 ہوگا)۔

یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہو۔ ہم اس کتاب میں کلیش و گورڈن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے۔ میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں۔ ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ عملی گروہ نظریہ کا حصہ ہے۔

سوال ۴.۳۴:

ا. مساوات ۴.۱۷۷ میں دیے گئے  $|10\rangle$  پر  $S_-$  کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ  $\sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$  حاصل ہوگا۔

ب. مساوات ۴.۱۷۸ میں  $|00\rangle$  پر  $S_{\pm}$  کا اطلاق کر کے تصدیق کیجیے کہ 0 حاصل ہوگا۔

ج. دکھائی کہ  $|11\rangle$  اور  $|1-1\rangle$  (جنہیں مساوات ۴.۱۷۷ میں پیش کیا گیا ہے)  $S^2$  کے موزوں امتیازی قیمت والے امتیازی تقاضات ہیں۔

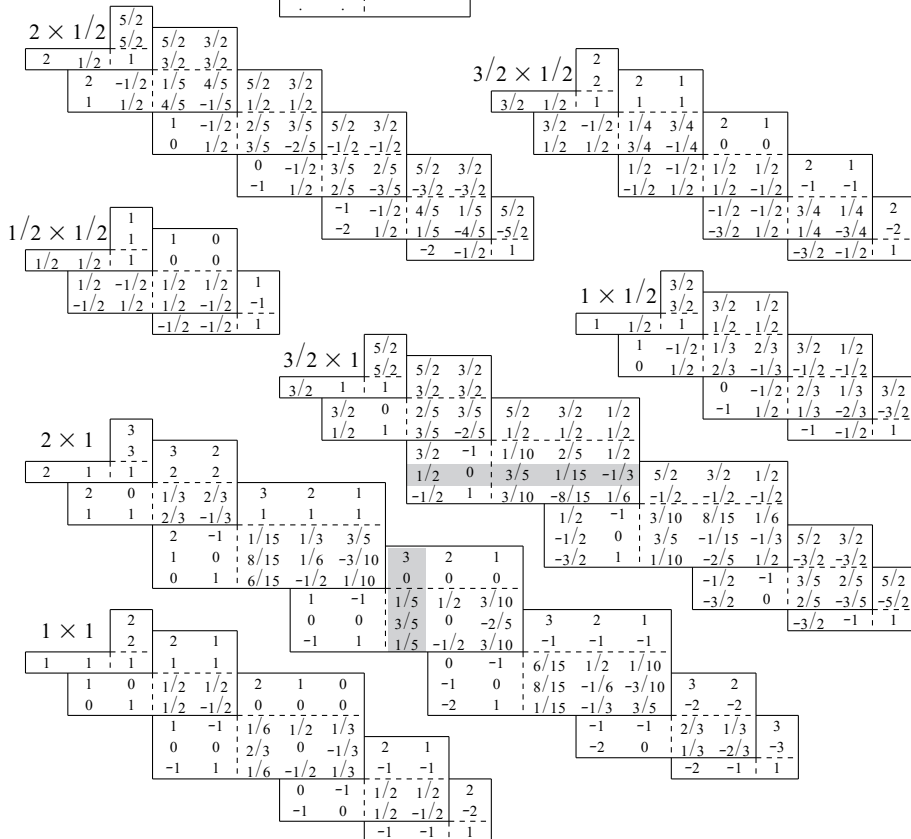
سوال ۴.۳۵: کوارک<sup>۹۳</sup> کا چکر  $1/2$  ہے۔ تین کوارک کے مل کر ایک **پیریاڈ**<sup>۹۴</sup> مرتب کرتے ہیں (مثلاً پروٹان یا نیوٹران)؛ دو کوارک کے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک) مل کر ایک **میزاڈ**<sup>۹۵</sup> مرتب کرتے ہیں (مثلاً **پایاڈ**<sup>۹۶</sup> یا **کایاڈ**<sup>۹۷</sup>)۔ فرض کریں یہ کوارک کے زمینی حال میں ہیں (الہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا)۔

ا. سیریاں کے کیا ممکن چکر ہونگے؟

group theory<sup>۹۸</sup>  
quark<sup>۹۳</sup>  
baryon<sup>۹۴</sup>  
meson<sup>۹۵</sup>  
pion<sup>۹۶</sup>  
kion<sup>۹۷</sup>

$j_1 \times j_2$	$J$	$J$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$M$	$M$
$m_1$	$m_2$	$M$	$M$
$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$		

عددی سر



ب. میڈان کے کیا ممکنہ چکر ہونگے؟

سوال ۴.۳۶:

ا. چکر 1 کا ایک ساکن ذرہ اور چکر 2 کا ایک ساکن ذرہ اس تفکیک میں پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3، اور  $z$  جزو  $\hbar$  ہے۔ چکر 2 ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر ایک قیمت کا احتمال کیا ہوگا؟

ب. ہائیڈروجن جوہر کے حال  $\psi_{510}$  میں ایک مخالف میدان الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اگر آپ (پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر) صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کے مربع کی پیمائش کر سکیں، تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۳:  $S^2$  اور  $S_z^{(1)}$  کا مقلوب تعین کریں (جہاں  $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$  ہوگا)۔ اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(S^{(1)} \times S^{(2)}) \quad (۴.۱۸۷)$$

تبصرہ: میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ  $S_z^{(1)}$  اور  $S^2$  آپس میں غیر مقلوبی ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے قاصر ہو گئے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہوں۔ ہمیں  $S^2$  کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر  $S_z^{(1)}$  کے امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے۔ (مساوات ۴.۱۸۵ میں) کلیبش و گورڈن عددی سریمبی کچھ کرتے ہیں۔ ساتھ ہی مساوات ۴.۱۸۷ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $S^2$  کے ساتھ مجموعہ  $S^{(1)} + S^{(2)}$  مقلوبی ہوگا، جو ہماری معلومات (مساوات ۴.۱۰۳) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

اضافی سوالات برائے باب ۴

سوال ۴.۳۸: ایک ایسے تیز ابعادی ہارمونی مرٹش<sup>۹۸</sup> پر غور کریں جس کا مخفیہ درج ذیل ہے۔

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (۴.۱۸۸)$$

ا. کارٹیزی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بُعدی مرٹش میں تبدیل کر کے، موخر الذکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے، احبازتی توانائیاں تعین کریں۔ جواب:

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۸۹)$$

ب.  $E_n$  کی انخطائیت  $d_{(n)}$  تعین کریں۔

سوال ۴.۳۹: چونکہ (مساوات ۴.۱۸۸ میں دیا گیا) تین ابعادی ہارمونی سر تعش مخفیہ کردی تشاکلی ہے لہذا اس کی مساوات شرودنگر کو کارتیسی محدود کے علاوہ کردی محدود میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے۔ طمستی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ردای مساوات حل کریں۔ عددی سروں کا کلیہ توالی حاصل کرتے ہوئے اجزائی توانائیاں تعیین کریں۔ اپنے جواب کی تصدیق مساوات ۴.۱۸۹ کے ساتھ کریں۔

سوال ۴.۴۰:

۱. (ساکن حالات کے لئے) درج ذیل تیض ابعادی مسئلہ وریل<sup>۹۹</sup> ثابت کریں۔

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۰)$$

اشارہ: سوال ۳.۳۱ دیکھیے گا۔

ب. مسئلہ وریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۱)$$

ج. مسئلہ وریل کو (سوال ۴.۳۸ کے) تین ابعادی ہارمونی سر تعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۲)$$

سوال ۴.۴۱: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہوں۔ سوال ۱.۱۴ کو عمومیت دیتے ہوئے تین ابعادی روابط<sup>۱۰۰</sup> کی درج ذیل تعریف پیش کی جاتی ہے۔

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۳)$$

۱. دکھائے کہ  $\mathbf{J}$  استراری مساوات<sup>۱۰۱</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۴)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو متامی بقا احتمال<sup>۱۰۲</sup> کو بیان کرتی ہے۔ یوں (مسئلہ پھیلاؤ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3 r \quad (۴.۱۹۵)$$

جہاں  $V$  ایک مقررہ حجم اور  $S$  اس کی سرحدی سطح ہے۔ دوسرے الفاظ میں، کسی سطح سے احتمال کا اخراج، اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا۔

<sup>۹۹</sup> three-dimensional virial theorem

<sup>۱۰۰</sup> probability current

<sup>۱۰۱</sup> continuity equation

<sup>۱۰۲</sup> conservation of probability

ب. حال  $m = 1$ ،  $\ell = 1$ ،  $n = 2$  میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے  $\mathbf{J}$  تلاش کریں۔ جواب:

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \alpha_\phi$$

ج. اگر ہم کمیت کے ہمواد کو  $m\mathbf{J}$  سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = m \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3 r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال  $\psi_{211}$  کے لیے  $L_z$  کا حساب کر کے نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۴۲: (غیر تاج وقت) معیار حرکت فضا تفاعل موج کی تعریف تین ابعاد میں مساوات ۴.۵۴ کی قدرتی عمومیت سے پیش کرتے ہیں۔

$$\phi(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3 r \quad (۴.۱۹۶)$$

۱. زمینی حال میں ہائیڈروجن (مساوات ۴.۸۰) کے لیے معیار حرکت کی فضا تفاعل عمل موج تلاش کریں۔ اشارہ:  $\mathbf{p}$  کے رخ رکھیں اور  $\theta$  کا مکمل پہلے حاصل کریں۔ جواب:

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۷)$$

ب. تصدیق کیجیے گا کہ  $\phi(\mathbf{p})$  معمول شدہ ہے۔

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن کے لیے  $\psi(\mathbf{p})$  استعمال کرتے ہوئے  $\langle p^2 \rangle$  کا حساب لگائیں۔

د. اس حال میں حرکت توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ اپنے جواب کو  $E_1$  کی مضرب کی صورت میں لکھ کر تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ ورل (مساوات ۴.۱۹۱) کا ہلکا تھا ہے۔

سوال ۴.۴۳:

۱. حال  $m = 1$ ،  $l = 2$ ،  $n = 3$  میں ہائیڈروجن کے لیے فضا تفاعل عمل موج  $(\psi)$  تیار کریں۔ اپنی جواب کو صرف  $r$ ،  $\theta$ ،  $\phi$  اور  $a$  (رد اس بوجہ) کے تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ کسی دوسرے متغیر ( $\rho$ ،  $z$ ، وغیرہ) یا تفاعل ( $Y$ ،  $v$ ، وغیرہ) یا مستقلات ( $A$ ،  $c_0$ ، وغیرہ) یا تصرفات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہے (ہاں  $\pi$  اور  $e$  2، وغیرہ استعمال کیے جاسکتے ہیں)۔

ب.  $r$ ،  $\theta$  اور  $\phi$  کے لحاظ سے موزوں نکلات حاصل کر کے تصدیق کریں کہ یہ تفاعل موج معمول شدہ ہے۔

ج. اس حال میں  $r^s$  کی توقعاتی قیمت تلاش کریں۔  $s$  کی کس سمت (مثبت اور منفی) کے لیے جواب مستثنیٰ ہوگا؟



سوال ۴.۴:۴:

ا. حال  $n = 4$ ،  $\ell = 3$ ،  $m = 3$  کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں۔ اپنے جواب کو  $r$ ،  $\theta$  اور  $\phi$  کا تفاعل لکھیں۔

ب. اس حال میں  $r$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟ (کملات کو جدول سے دیکھنے کی اجازت ہے۔)

ج. اس حال میں ایک جوہر کے متبادل مشاہدہ  $L_x^2 + L_y^2$  کی پیمائش سے کیا قیمت (یا قیمتیں) متوقع ہے اور ہر ایک کا انحصار ادبی احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۴:۵: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں، مرکزہ کے اندر الیکٹران پایا جانے کا احتمال کیا ہوگا؟

ا. پہلے فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج (مساوات ۴.۸۰)  $r = 0$  تک درست ہے اور مرکزہ کا رداس  $b$  لیتے ہوئے بالکل ٹھیک ٹھیک جواب حاصل کریں۔

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد  $\epsilon \equiv 2b/a$  کے طاقتی تسلسل کے روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ قلیل رتبہ حبز و کبھی:  $P \approx (4/3)(b/a)^3$  ہوگا۔ دکھائیں کہ  $b \ll a$  کی صورت میں (جیسا کہ ہے) یہ تخمین موزوں ہوگی۔

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کے (نہایت چھوٹے) حجم میں  $\psi(r)$  تقریباً مستقل ہوگا لہذا  $|\psi(0)|^2 \approx (4/3)\pi b^3$  لیا جاسکتا ہے۔ تصدیق کیجیے گا کہ اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا۔

د.  $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$  اور  $b \approx 10^{-15} \text{ m}$  لیتے ہوئے  $P$  کی اندازاً اعدادی قیمت حاصل کریں۔ یہ الیکٹران کا، اندازاً وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے۔

سوال ۴.۴:۶:

ا. کلیہ توانی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ  $\ell = n - 1$  کی صورت میں رداسی تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلا واسطہ عمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی  $N_n$  تعین کریں۔

ب. حال  $\psi_n(n-1)m$  روپ کے حالات کے لیے  $\langle r \rangle$  اور  $\langle r^2 \rangle$  کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی  $r(\sigma_r)$  میں ”عدم یقینیت“  $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$  ہوگی۔ دھیان رہے کہ  $n$  بڑھانے سے  $r$  میں نسبتی وسعت گھٹتی ہے (یوں  $n$  کی بڑی قیمت کے لیے یہ نظام کلاسیکی نظر آنا شروع ہوتا ہے، جس میں دائری مدار پرچہ پانے جاسکتے ہیں)۔ رداسی تفاعل امواج کا خاکہ،  $n$  کی کئی قیمتوں کے لیے، بناتے ہوئے اس نکتہ کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴:۷: ہم مکافض طیفی خطوط: <sup>۱۰۴</sup> کلیہ رڈبرگ (مساوات ۴.۹۳) کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات

باب ۴. تین ابعادی کوانٹائی میکانیات

کے صدر کوانٹائی اعداد ہائیڈروجن طیف کے لکیر کا طول موج تعین کرتے ہیں۔ ایسی دو منفرد جوڑیاں  $\{n_i, n_f\}$  تلاش کریں جو  $\lambda$  کی ایک ہی قیمت دیتے ہوں، مثلاً  $\{6851, 6409\}$  اور  $\{15283, 11687\}$  ایسا کرتے ہیں۔ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوں گی۔

سوال ۴.۴۸: متبادل مشاہدہ  $A = x^2$  اور  $B = L_z$  پر غور کریں۔

۱.  $\sigma_A \sigma_B$  کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں۔

ب. حال  $\psi_{n\ell m}$  میں ہائیڈروجن کے لیے  $\sigma_B$  کی قیمت معلوم کریں۔

ج. اس حال میں  $\langle xy \rangle$  کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

سوال ۴.۴۹: ایک الیکٹران درج ذیل چپکری حال میں ہے۔

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

۱.  $\chi$  کی معمول زنی کرتے ہوئے مستقل  $A$  تعین کریں۔

ب. اس الیکٹران کے  $S_z$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟  $S_z$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

ج. اس الیکٹران کے  $S_x$  کی پیمائش کی بجائے تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟  $S_x$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

د. اس الیکٹران کے  $S_y$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟  $S_y$  کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۰: فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ  $1/2$  چپکر کے دو ذرات یکساں تنظیم (۴.۱۷۸) میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $a_a$  کے رخ ذرہ 1 کے چپکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو  $S_a^{(1)}$  ہے۔ اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیہ  $a_b$  کے رخ ذرہ 2 کے چپکری زاویائی معیار حرکت کا حبزو  $S_b^{(2)}$  ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں  $a_a$  اور  $a_b$  کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہے۔

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۹۸)$$

سوال ۴.۵۱:

۱. کلیش گورڈن عددی سرکو،  $s_1 = 1/2$  اور  $s_2$  کچھ بھی لیتے ہوئے، حاصل کریں۔ اشارہ: آپ درج ذیل میں  $A$  اور  $B$  عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے  $S^2$  کا امتیازی حال  $|sm\rangle$  ہو۔

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |s_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |s_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مسواۛت ۴.۱۷۹ تا مسواۛت ۴.۱۸۲ کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاصر ہوں کہ (مثلاً)  $S_x^{(2)}$  حال  $|s_2 m_2\rangle$  کو کیا کرتا ہے، تب مسواۛت ۴.۱۳۶ سے رجوع کریں اور مسواۛت ۴.۱۴۷ سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; \quad B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں  $s = s_2 \pm 1/2$  علامتیں تعین کرتا ہے۔

ب۔ اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول ۴.۹ میں تین یا چار اندراج کے لئے کریں۔

سوال ۴.۵۲: (ہمیشہ کی طرہ  $S_z$  کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے)  $3/2$  چکر ذرہ کے لیے متالاب  $S_x$  تلاش کریں۔ امتیازی مسواۛت حل کرتے ہوئے  $S_x$  کی امتیازی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال ۴.۵۳: مسواۛت ۴.۱۴۵ اور مسواۛت ۴.۱۴۷ میں  $1/2$  چکر، سوال ۴.۳۱ میں  $1$  چکر، اور سوال ۴.۵۲ میں  $3/2$  چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری  $s$  چکر کے لیے چکر کی متالاب تلاش کریں۔ جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں  $b_j \equiv \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$  ہے۔

سوال ۴.۵۴: کروئی ہارمونیات کے لیے معمول زنی ضربیہ درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ ۴.۱.۲ سے درج ذیل جانتے ہیں۔

$$Y_\ell^m = B_\ell^m e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta)$$

آپ کو جبزو  $B_\ell^m$  تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات ۴.۳۲ میں کیا)۔ مساوات ۴.۱۲۰، مساوات ۴.۱۲۱، اور مساوات ۴.۱۳۰ استعمال کرتے ہوئے  $B_\ell^m$  کی صورت میں  $B_\ell^{m+1}$  کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو  $m$  کے ریاضی ماخوذ کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے  $B_\ell^m$  کو مجموعی مستقل  $C(\ell)$  تک حل کریں۔ آخر میں سوال ۴.۲۲ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کی قیمت تلاش کریں۔ شریک لیڈنڈر تفاعل کے تفرق کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1 - x^2) \frac{dP_\ell^m}{dx} = \sqrt{1 - x^2} P_\ell^{m+1} - mx P_\ell^m \quad (۴.۱۹۹)$$

سوال ۴.۵۵: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضا کی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے۔

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi_-)$$

۱. مدارچی زاویائی معیار حرکت کے مربع  $(L^2)$  کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ مدارچی زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جبزو  $(L_z)$  کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع  $(S^2)$  کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جبزو  $(S_z)$  کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  لیں۔

ه. آپ  $J^2$  کی پیمائش کرتے ہیں۔ آپ کیا قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں ان کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا؟

و. یہی کچھ  $J_z$  کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس کی  $r$ ،  $\theta$ ،  $\phi$  پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

ح. آپ چکر کا  $z$  جبزو اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ و متابل مشاہدہ ہیں)۔ ایک ذرے کا رداس  $r$  پر اور ہم میدان ہونے کی کثافت احتمال کیا ہوگی؟

سوال ۴.۵۶:

۱. دکھائیں کہ ایک تفاعل  $f(\phi)$  جس کو ٹیلر تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) = e^{\frac{iL_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں  $\varphi$  اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا پر  $L_z/\hbar$  کو  $z$  کے گرد گھومنے کا پیدا کار<sup>۱۰۵</sup> کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۲۹ استعمال کریں اور سوال ۳.۳۹ سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$  ہو گا جو  $\mathbf{a}_n$  رخ گھومنے کا پیدا کار ہے، یعنی  $e^{i(\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_n \varphi/\hbar)}$  محور  $\mathbf{a}_n$  کے گرد (دائیں ہاتھ سمت میں) زاویہ  $\varphi$  گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_n/\hbar$  ہو گا۔ بالخصوص  $1/2$  چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_n) \varphi/2} \chi \quad (۴.۲۰۰)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور  $x$  کے لحاظ سے  $180^\circ$  گھومنے کو ظاہر کرنے والا  $(2 \times 2)$  متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ، ہماری توقعات کے عین مطابق، ہم میدان  $(\chi_+)$  کو خلاف میدان  $(\chi_-)$  میں تبدیل کرتا ہے۔

ج. محور  $y$  کے لحاظ سے  $90^\circ$  گھومنے والا متالب تیار کریں اور  $(\chi_+)$  پر اس کا اثر دیکھیں؟

د. محور  $z$  کے لحاظ سے  $360^\circ$  زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ه. درج ذیل دکھائیں۔

$$e^{i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_n) \varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\mathbf{a}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۱)$$

سوال ۴.۵۷: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (مساوات ۴.۹۹) امتیازی قیمتوں کی (عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ) نصف عدد صحیح قیمتوں کی اجازت دیتے ہیں، جبکہ مدارچی زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ خصوصی روپ  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  پر ضرور کوئی اضافی شرط مسلط ہے جو نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتی ہے۔ ہم متقل  $a$  جس کا بُعد لمبائی ہو (مثلاً، ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوجہ) لیتے ہوئے درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں۔

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; \quad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y]$$

ا. تصدیق کیجیے کہ  $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ ;  $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$  ہیں۔ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو تمام  $q$  اور  $p$  مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

generator of rotation<sup>۱۰۵</sup>

ج. تصدیق کیجیے کہ ایسا ہارمونی سر تعش جس کی کیت  $\hbar/a^2$   $m$  اور تعدد  $1$   $\omega$  ہو کے لیے  $L_z = H_1 - H_2$  ہوگا جہاں  $H$  ہیمیلٹنی ہیں۔

د. ہم جانتے ہیں ہارمونی سر تعش ہیمیلٹنی کی امتیازی قیمتیں  $(n + 1/2)\hbar\omega$  ہیں جہاں  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ہو گا (حصہ ۱.۳ کے الجبرائی نظریہ میں ہیمیلٹنی کے روپ اور بانڈ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا)۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کریں کہ  $L_z$  کی امتیازی قیمتیں لازماً عدد صحیح ہوں گے۔

سوال ۴.۵۸: عمومی حال (مساوات ۴.۱۳۹) میں  $1/2$  چکر کے  $S_z$  اور  $S_y$  کی اتل عدم یقینیت کے لئے شرط معلوم کریں (یعنی، فقرہ  $|\langle S_z \rangle| \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$  میں مساوی (=) صورت تلاش کریں)۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر ہم  $a$  کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں؛ تب عدم یقینیت کی اتل قیمت اس صورت حاصل ہوگی جب  $b$  حالص حقیقی یا حالص خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۹: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ، جس کا بار  $q$  ہو اور جو برقی میدان  $E$  اور مقناطیسی میدان  $B$  میں سمتی رفتار  $v$  کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جسے لورینز قوت کا قانون<sup>۱۰۶</sup>

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۲)$$

پیش کرتا ہے۔ اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تقا عمل کی ڈھلوان کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنگر اپنی اصلی روپ (مساوات ۴.۱) میں اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے۔ تاہم اس کا نفیس روپ:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (۴.۲۰۳)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتا ہے۔ کلاسیکی ہیمیلٹنی درج ذیل،

$$H = \frac{1}{2m}(p - qA)^2 + q\phi \quad (۴.۲۰۴)$$

جہاں  $A$  سمتی مخفی ( $B = \nabla \times A$ ) اور  $\phi$  غیر سمتی مخفی ( $E = -\nabla\phi - \partial A/\partial t$ ) ہے، لہذا مساوات شرودنگر (بانڈابطہ متبادل  $(\hbar/i)\nabla \rightarrow p$ ) پر کر کے درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\phi \right] \Psi \quad (۴.۲۰۵)$$

۱. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (p - qA) \rangle \quad (۴.۲۰۶)$$

ب۔ ہمیشہ کی طرح (مساوات ۴.۳۲ دیکھیں) ہم  $\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt}$  کو  $\langle \mathbf{v} \rangle$  لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$(۴.۲۰۷) \quad m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{q}{2m} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \rangle$$

ج۔ بالخصوص موجی اکھ کے حجم پر یکساں  $\mathbf{E}$  اور  $\mathbf{B}$  میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں۔

$$(۴.۲۰۸) \quad m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B})$$

اس طرح  $\langle \mathbf{v} \rangle$  کی توقعاتی قیمت عین لورینسنز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی، جیسا ہم مسئلہ ہر نفٹ کے تحت توقع کر سکتے تھے۔

سوال ۴.۶۰: [پس منظر جاننے کے لیے سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] فرض کریں

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) \quad \text{اور} \quad \varphi = Kz^2$$

ہیں جہاں  $B_0$  اور  $K$  مستقلات ہیں۔

ا۔ میدان  $\mathbf{E}$  اور  $\mathbf{B}$  تلاش کریں۔

ب۔ ان میدان اس ذرہ کے امتیازی تفاعلات اور اجبازتی توانائیاں تلاش کریں جس کی کیت  $m$  اور بار  $q$  ہو۔  
جواب:

$$(۴.۲۰۹) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں  $\omega_1 \equiv \sqrt{2qKm}/m$  اور  $\omega_2 \equiv \omega_1$ ۔ تبصرہ:  $K = 0$  کی صورت میں یہ سائیکلوٹرون حرکت کا کوانٹائی مشاں ہوگا؛ کلاسیکی سائیکلوٹرون تعدد  $\omega_1$  ہوگا اور یہ  $z$  رخ میں آزاد ذرہ ہوگا۔  
اجبازتی توانائیاں  $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1$  لنڈو سطحیں<sup>۱۰۸</sup> کہلاتی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: [پس منظر جاننے کی خاطر سوال ۴.۵۹ پر نظر ڈالیں۔] کلاسیکی برقی حرکیات میں محفے  $\mathbf{A}$  اور  $\varphi$  یکتا طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں؛ طبعی متداریں میدان  $\mathbf{E}$  اور  $\mathbf{B}$  ہوں گے۔  
ا۔ دکھائیں کہ محفے

$$(۴.۲۱۰) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

(جہاں  $\Lambda$  معتام اور وقت کا ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان دیتے ہیں جو  $\varphi$  اور  $\mathbf{A}$  دیتے ہیں۔  
مساوات ۴.۲۱۰ ماچے متبادلہ<sup>۱۰۹</sup> کہلاتی ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ ماچے غیر متغیر<sup>۱۱۰</sup> ہے۔

cyclotron motion<sup>۱۰۷</sup>

Landau Levels<sup>۱۰۸</sup>

gauge transformation<sup>۱۰۹</sup>

gauge invariant<sup>۱۱۰</sup>

ب. کوانٹائی میکانیات میں مخفیہ کارکردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ ماپ غیر متغیر رہتا ہے یا نہیں۔ دکھائیں کہ ماپ تبادلہ محض  $\phi'$  اور  $A$  لیتے ہوئے درج ذیل

$$\Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar}\Psi \quad (۴.۲۱۱)$$

مساوات شرودنگر (مساوات ۴.۲۰۵) کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ  $\Psi$  اور  $\Psi'$  میں صرف پتی جزو ضربی کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبعی حال<sup>۱۱</sup> کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ ماپ غیر متغیر ہوگا (مزید معلومات کے لیے حصہ ۱۰.۲.۳ سے رجوع کیجیے)۔

سوال ۴.۶۲: ہائیڈروجنی جوہروں کے چند ابتدائی تقاضات موج جدول ۴.۸ میں پیش کیے گئے ہیں۔ انہیں مساوات ۴.۸۹ کی مدد سے حاصل کریں۔ آپ کو  $Z$  خود شامل کرنا ہوگا۔

<sup>۱۱</sup> یعنی  $\langle \mathbf{r} \rangle$ ،  $d\langle \mathbf{r} \rangle / dt$ ، وغیرہ تبدیل نہیں ہوں گے۔ چونکہ  $\Lambda$  معتمد کا تابع ہے،  $\langle p \rangle$  (جس کا  $p$  کو عاقل  $(\hbar/i)\nabla$  ظاہر کرتا ہے) تبدیل ہوگا، تاہم جیسا ہم نے مساوات ۴.۲۰۶ میں دیکھا،  $p$  موجودہ سیاق و سباق میں میکائی معیار حرکت  $(mv)$  کو ظاہر نہیں کرتا ہے (گراؤنڈ میکانیات میں اس کو باضابطہ معیار حرکت کہتے ہیں)۔



## باب ۵

# متماثل ذرات

### ۵.۱ دو ذروی نظام

ایک ذرے کے لیے (فی الحال چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے)  $\psi(r, t)$  فضائی محدود،  $r$ ، اور وقت  $t$ ، کا تعین عمل ہوگا۔ دو ذروی نظام کا حال پہلے ذرے کے محدود،  $(r_1)$ ، دوسرے ذرے کے محدود،  $(r_2)$ ، اور وقت کا تابع ہوگا۔

$$(۵.۱) \quad \psi(r_1, r_2, t)$$

یہ وقت کے لحاظ سے (ہمیشہ کی طرح) مساوات شرودنگر

$$(۵.۲) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

کے تحت ارتقا کرے گا، جہاں  $H$  مکمل نظام کا ہیملٹن ہے۔

$$(۵.۳) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(r_1, r_2, t)$$

(ذره 1 اور ذره 2 کے محدود کے لحاظ سے تعریفات کو،  $\nabla$  کے زیر نوشتہ میں، بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔) ذره 1 کا حجم  $d^3 r_1$  اور ذره 2 کا حجم  $d^3 r_2$  میں پائے جانے کا احتمال درج ذیل ہوگا:

$$(۵.۴) \quad |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2$$

جہاں شماریاتی مفہوم معمول کے مطابق کارآمد ہوگا۔ ظاہر ہے کہ  $\psi$  کی معمولی ذنی درج ذیل کے تحت کرنی ہوگی۔

$$(۵.۵) \quad \int |\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 = 1$$

غیر تابع وقت مخفیہ کے لیے علیحدگی متغیرات سے حلوں کا مکمل سلسلہ:

$$(۵.۶) \quad \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$

حاصل ہوگا جہاں فنکشنی تفاعل موج ( $\psi$ ) غیر تابع وقت مساوات شرودنگر:

$$(۵.۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے جس میں  $E$  نظام کی کل توانائی ہے۔

سوال ۱: عام طور پر باہم عمل مخفیہ کا انحصار صرف دو ذرات کے بیچ سمتیہ  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  پر ہوگا۔ ایسی صورت میں متغیرات  $\mathbf{r}_1$  اور  $\mathbf{r}_2$  کی جگہ نئے متغیرات  $\mathbf{r}$  اور (مرکز کیت)  $\mathbf{R} \equiv \frac{(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2}$  کے استعمال سے مساوات شرودنگر دو حصوں میں علیحدہ ہوگی۔

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \\ \nabla_1 &= \frac{\mu}{m_2} \nabla_R + \nabla_r, & \nabla_2 &= \frac{\mu}{m_1} \nabla_R - \nabla_r \end{aligned}$$

جہاں

$$(۵.۸) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

نظام کی تخفیف شدہ کمیت ہے۔

ب. دکھائیں کہ (غیر تابع وقت) مساوات شرودنگر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi$$

ج. متغیرات کو  $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_R(\mathbf{R})\psi_r(\mathbf{r})$  لیتے ہوئے علیحدہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ  $\psi_R$  ایک ذروی مساوات شرودنگر، جس میں کیت  $m$  کی بجائے کل کیت  $(m_1 + m_2)$ ، مخفیہ صفر ہو اور نظام کی توانائی  $E_R$  ہو، کو مطمئن کرتا ہے، جبکہ  $\psi_r$  ایک ذروی مساوات شرودنگر، جس میں کیت  $m$  کی بجائے تخفیف شدہ کیت، مخفیہ  $V(\mathbf{r})$  اور توانائی  $E_r$  ہو، کو مطمئن کرتا ہے۔ کل توانائی ان کا مجموعہ:  $E = E_R + E_r$  ہوگا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز کیت ایک آزاد ذرہ کی مانند حرکت کرتا ہے اور (ذرہ 1 کے لحاظ سے ذرہ 2 کی) نسبتی حرکت۔ ایسی ہوگی جیسا مخفیہ  $V$  میں تخفیف شدہ کیت کا ایک ذرہ کرتا ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں بالکل یہی تحلیل ہوگی، جو دو جسی مسئلہ کو معادل یک جسی مسئلہ میں تبدیل کرتی ہے۔

سوال ۵.۲: یوں ہائیڈروجن کے مرکزہ کی حرکت کو درست کرنے کے لیے ہم الیکٹران کی کیت کی جگہ تخفیف شدہ کیت استعمال کرتے ہیں (سوال ۵.۱)۔

ا. ہائیڈروجن کی بندشی توانائی (مساوات ۳.۷۷) جاننے کی خاطر  $\mu$  کی جگہ  $m$  استعمال کرنے سے پیدا فی صد سہو، (دو یا معنی ہندسوں تک) تلاش کریں۔

ب. ہائیڈروجن اور ڈیوٹیریم کے لیے سرخ بالمر لکیریوں ( $n = 2 \rightarrow n = 3$ ) کے طول موج کے بیچ فاصلہ (منسرق) تلاش کریں۔

ج. پازٹرونیم<sup>۲</sup> کی بندشی توانائی تلاش کریں۔ پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران رکھنے سے پازیسٹرانیم پیدا ہوگا۔ ضد الیکٹران کی کیت الیکٹران کی کیت کے برابر جبکہ اس کا بار الیکٹران کے بار کے مخالف ہے۔

د. مندرجہ کریں آپ **میونی ہائیڈروجن**<sup>۳</sup> (جس میں الیکٹران کی جگہ ایک میون ہوگا) کی وجودیت کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ میون کا بار الیکٹران کے بار کے برابر ہے، تاہم اس کی کیت الیکٹران سے 206.77 گنا زیادہ ہے۔ آپ ”ایمان  $\alpha$ “ لکیر ( $n = 1 \rightarrow n = 2$ ) کے لیے کس طول موج پر نظر رکھیں گے؟

سوال ۵.۳: کلورین کے دو قدرتی ہم جاب  $Cl^{35}$  اور  $Cl^{37}$  پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ  $HCl$  کارلزشی طیف متریب متریب جوڑیوں پر مشتمل ہوگا جن میں فاصلہ  $\Delta\nu = 7.51 \times 10^{-4} \nu$  ہوگا جہاں  $\nu$  حار جی نوری کا تعدد ہے۔ (اشارہ: اس کو ایک ہارمونی سر نقش تصور کریں جہاں  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$  ہوگا، جہاں  $\mu$  تخفیف شدہ کیت۔ مساوات ۵.۸) ہے، جبکہ دونوں ہم جاب کا  $k$  ایک جیسا تصور کریں۔)

### ۵.۱.۱ بوسن اور فرمیان

مندرجہ کریں ذرہ 1 (یک ذروی) حال  $\psi_a(r)$  اور ذرہ 2 حال  $\psi_b(r)$  میں پائے جاتے ہیں۔ (یاد رہے، میں یہاں چکر کو نظر انداز کر رہا ہوں۔) ایسی صورت میں  $\psi(r_1, r_2)$  سادہ حاصل ضرب ہوگا۔<sup>۴</sup>

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \quad (۵.۹)$$

ہم یہاں مندرجہ کر رہے ہیں ان ذرات کو علیحدہ علیحدہ پہچانا جاسکتا ہے؛ ورنہ یہ کہنا کہ ذرہ 1 حال  $\psi_a$  اور ذرہ 2 حال  $\psi_b$  میں ہے، بے معنی ہوگا؛ ہم صرف اتنا کہہ پاتے کہ ایک ذرہ حال  $\psi_a$  اور دوسرا ذرہ حال  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہے، تاہم ہم نہیں جان پاتے کہ کونسا ذرہ کس حال میں ہے۔ کلاسیکی میکانیات میں یہ ایک بے

positronium<sup>۲</sup>  
muonic hydrogen<sup>۳</sup>

در حقیقت، ضروری نہیں کہ ہر دو ذروی تقابلاً عمل موج دو ایک ذروی تقابلاً عمل موج کا حاصل ضرب ہو۔ ایسے حال جنہیں ہم **ہمبستہ** حال (entangled states) کہتے ہیں کو اس طرح دو حصوں میں علیحدہ نہیں کیا جاسکتا ہے۔ تاہم اگر ذرہ 1 حال  $a$  اور ذرہ 2 حال  $b$  میں ہوں، تب دو ذروی حال حاصل ضرب ہوگا۔ میں جانتا ہوں، آپ سوچ رہے ہیں: ”ذرہ 1 کیسے کسی حال میں اور ذرہ 2 کسی دوسرے حال میں نہیں ہوں گے؟“ اس کی کلاسیکی مثال ایک تاحکری تشاکل ہے (مساوات ۳.۱۷۸)؛ میں آپ کو آکیلے ذرہ 1 کا حال نہیں بتا سکتا ہوں، چونکہ یہ ذرہ 2 کے حال کے ساتھ ہمبستہ ہے۔ اگر 2 کی پیمائش کی جائے اور نتیجہ ہم میدان چکر ہو تب 1 ہم میدان چکر اور 2 مخالف میدان چکر ہوگا۔

دو متماثلہ اعتراض ہوگا: اصولاً ایک ذرے کو سرخ رنگ اور دوسرے کو نیلا رنگ دے کر آپ انہیں ہر وقت پہچان سکتے ہیں۔ کوانٹائی میکانیات میں صورتحال بنیادی طور پر مختلف ہے: آپ کسی الیکٹران کو سرخ رنگ نہیں دے سکتے اور نہ ہی اس پر کوئی پرچی چسپاں کر سکتے ہیں۔ حقیقت یہ ہے کہ تمام الیکٹران بالکل متماثل ہوتے ہیں جبکہ کلاسیکی اشیاء میں اتنی یکسانیت کبھی نہیں ہوتی۔ ایسا نہیں ہے کہ ہم الیکٹرانوں کو پہچاننے سے متاثر ہیں بلکہ حقیقت یہ ہے کہ ”یہ“ الیکٹران اور ”وہ“ الیکٹران کہنا کوانٹائی میکانیات میں بے معنی ہیں؛ ہم صرف ”ایک“ الیکٹران کی بات کر سکتے ہیں۔

ایسے ذرات کی موجودگی کو، جو اصولاً غیر ممیز ہوتے ہیں، کوانٹائی میکانیات خوش اسلوبی سے سمجھتی ہے: ہم ایسا غیر مشروط تعادل عمل موج تیار کرتے ہیں جو یہ بات نہیں کرتا کہ کون ذرہ کس حال میں ہے۔ ایسا درج ذیل دو طریقوں سے کرنا ممکن ہے۔

$$(۵.۱۰) \quad \psi_{\pm}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) \pm \psi_b(r_1)\psi_a(r_2)]$$

یوں یہ ذرہ دو اقسام کے متماثل ذرات کا حاصل ہوگا: <sup>۵</sup>بوسن جن کے لئے ہم مثبت علامت استعمال کرتے ہیں اور <sup>۶</sup>فرمیاؤں جن کے لئے ہم منفی علامت استعمال کرتے ہیں۔ بوسن کی مثالیں نوریہ اور میوزون ہیں جبکہ فرمیان کی مثالیں پروٹان اور الیکٹران ہیں۔ ایسا ہے کہ

$$(۵.۱۱) \quad \left. \begin{array}{l} \text{عدد صحیح چکر کے تمام ذرات۔ بوسن جبکہ} \\ \text{نصف عدد صحیح چکر کے تمام ذرات فرمیان ہوں گے۔} \end{array} \right\}$$

چکر اور شماریات کے مابین یہ تعلق (جیسا کہ ہم دیکھیں گے، فرمیان اور بوسن کے شماریاتی خواص ایک دوسرے سے بہت مختلف ہوتے ہیں) کو اضافی کوانٹائی میکانیات میں ثابت کیا جاسکتا ہے؛ تفسیر اضافی نظریہ میں اس کو ایک مسلمہ لیا جاتا ہے۔<sup>۷</sup>

اس سے بالخصوص ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ دو متماثل فرمیان (مثلاً دو الیکٹران) ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے۔ اگر  $\psi_a = \psi_b$  ہو تب

$$\psi_{-}(r_1, r_2) = A[\psi_a(r_1)\psi_a(r_2) - \psi_a(r_1)\psi_a(r_2)] = 0$$

کی بنا پر کوئی تعادل عمل موج<sup>۸</sup> نہیں ہوگا۔ یہ مشہور نتیجہ <sup>۹</sup>پالے اصول مناعت کہلاتا ہے۔ یہ کوئی عجیب مفروضہ نہیں جو صرف الیکٹران پر لاگو ہوتا ہو، بلکہ یہ دوزوی تعادلات موج کی تیاری کے قواعد کا ایک نتیجہ ہے، جس کا اطلاق تمام متماثل فرمیان پر ہوگا۔

bosons<sup>۵</sup>  
fermions<sup>۶</sup>

<sup>۷</sup>اضافہ کے اثرات۔ یہاں پائے جہانا عجیب سی بات ہے۔

<sup>۸</sup>یاد رہے کہ میں چکر کو نظریہ انداز کر رہا ہوں؛ اگر آپ کو اس سے الجھن ہو (کیوں کہ بغیر چکر فرمیان خود ایک تعادل ہے)، مندرجہ کریں تمام الیکٹران کے چکر ایک جیسے ہیں۔ میں جہلہ چکر کو بھی شامل کروں گا۔

Pauli exclusion principle<sup>۹</sup>

میں نے دلائل پیش کرنے کے نقطہ نظر سے فرض کیا تھا کہ ایک ذرہ حال  $\psi_a$  اور دوسرا حال  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہے، تاہم اس مسئلہ کو زیادہ عمومی (اور زیادہ نفیس) طریقے سے وضع کیا جاسکتا ہے۔ ہم عامل مبادلہ  $P$ ، متعارف کرتے ہیں جو دو ذرات کا باہمی مبادلہ کرتا ہے۔

$$Pf(r_1, r_2) = f(r_2, r_1) \quad (۵.۱۲)$$

صاف ظاہر ہے کہ  $P^2 = 1$  ہوگا لہذا (تصدیق کریں کہ)  $P$  کی امتیازی قیمتیں  $\pm 1$  ہوں گی۔ اب اگر یہ دونوں ذرات متماثل ہوں، تب لازماً ہمیں ان کے ساتھ ایک جیسو یہ برے لگے گا:  $m_1 = m_2$  اور  $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ ۔ اس طرح  $P$  اور  $H$  ہم آہنگ متماثل مشاہدہ ہوں گے:

$$[P, H] = 0 \quad (۵.۱۳)$$

لہذا ہم دونوں کے یک وقت امتیازی حالات کے تقاضوں کا مکمل سلسلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں ہم زیر مبادلہ، مساوات شروڈنگر کے ایسے حل تلاش کر سکتے ہیں جو باتشاکلی (امتیازی قیمت  $+1$ ) یا غیر باتشاکلی (امتیازی قیمت  $-1$ ) ہوں۔

$$\psi(r_1, r_2) = \pm \psi(r_2, r_1) \quad (۵.۱۴)$$

مزید، ایک نظام جو اس طرح کے حال سے آغاز کرے، اسی حال میں برقرار رہتا ہے۔ متماثل ذرات کا نیا تعداد (جس کو میں ضرورتاً تشاکلیت<sup>۱۱</sup> کہتا ہوں) کے تحت تفاعل موج کو مساوات ۵.۱۳ پر صرف پورا اتارنے کی اجازت نہیں بلکہ اس پر لازم ہے کہ وہ اس مساوات کو مطمئن کرتا ہو؛ یوں سن کے لئے مثبت علامت اور ضرب میان کے لئے منفی علامت ہوگی۔<sup>۱۲</sup> یہ ایک عمومی فترہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت مساوات ۵.۱۰ ہے۔

مثال ۵.۱: فرض کریں ایک لامتناہی چوکور کنویں (حصہ ۲.۲) میں کیت  $m$  کے باہم غیر متعامل دو ذرات (جو ایک دوسرے کے اندر سے گزر سکتے ہوں) پائے جاتے ہیں؛ آپ کو منکر کرنے کی ضرورت نہیں کہ عملاً ایسا کیسے کیا جاسکتا ہے ایک ذروی حالات درج ذیل ہوں گے (جہاں اپنی سہولت کے لئے ہم  $K \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  لیتے ہیں)۔

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

exchange operator<sup>۱۰</sup>  
symmetrization requirement<sup>۱۱</sup>

<sup>۱۲</sup> بعض اوقات اشارہ دیا جاتا ہے کہ  $P$  اور  $H$  کے باہمی متقابل ہونا ضرورت تشاکلیت (مساوات ۵.۱۳) کی پشت پر ہے۔ یہ بالکل غلط ہے؛ ہم دو متماثل ممیز ذرات (مثلاً ایک الیکٹران اور ایک ضد الیکٹران) کا ایسا نظام تصور کر سکتے ہیں جس کا ہمیں تشاکلی ہو، جس کے باوجود تفاعل موج کا تشاکلی (یا غیر تشاکلی) ہونے کی ضرورت نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس متماثل ذرات کو لازماً تشاکلی یا غیر تشاکلی حالات کا مکمل ہونا ہوگا، اور یہ بالکل نیا بنیادی تعداد ہے؛ جو مساوات شروڈنگر اور شماراتی مفہوم جتنی اہمیت کا حامل ہے۔ اب، ایسا ضروری نہیں تھا کہ متماثل ذرات پائے جاتے؛ ایسا ہو سکتا تھا کہ ہر دو ذروں کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہوتا۔ کوانٹائی میکانیات متماثل ذرات کے امکان کی اجازت دیتی ہے، اور فترت نے اس موقع کو ہاتھ سے جانے نہیں دیا۔ مجھے کوئی شکوہ نہیں ہے چونکہ اس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں!

### باب ۵: متماثل ذرات

متماثل ممیز ذرات کی صورت میں، جب ذرہ 1 حال  $n_1$  میں اور ذرہ 2 حال  $n_2$  میں ہو، مرکب تقاعسل موج سادہ حاصل ضرب:

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2)K.$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر زمینی حال:

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{11} = 2K$$

ہوگا، اور پہلا ہیجان حال دو چند انخطاطی:

$$\psi_{12} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad E_{12} = 5K,$$

$$\psi_{21} = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad E_{21} = 5K$$

ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔ دونوں ذرات متماثل بوسن ہونے کی صورت میں زمینی حال تبدیل نہیں ہوگا، تاہم پہلا ہیجان حال:

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

(جس کی توانائی اب بھی 5K ہوگی) غیر انخطاطی ہوگا۔ اور اگر ذرات متماثل فرمیان ہوں، تب 2K توانائی کا کوئی بھی حال نہیں ہوگا؛ زمینی حال جس کی توانائی 5K ہوگی درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right],$$

□

سوال ۵.۴:

ا. اگر  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  عمودی ہوا اور دونوں معمول شدہ ہوں، تب مساوات ۵.۱۰ میں مستقل A کیا ہوگا؟

ب. اگر  $\psi_a = \psi_b$  ہو (اور یہ معمول شدہ ہوں)، تب A کیا ہوگا؟ (یہ صورت صرف بوسن کیلئے ممکن ہے۔)

سوال ۵.۵:

ا. لامتناہی چوکور کنویں میں باہم غیر متعاضل دو متماثل ذرات کا ہیملٹنی لکھیں۔ تصدیق کریں کہ مثال ۵.۱ میں دیے گئے فرمیان کے زمینی حال H کا مناسب امتیازی قیمت والا امتیازی تقاعسل ہوگا۔

ب. مثال ۵.۱ میں دیے گئے ہیجان حالات سے اگلے دو تقاعسل موج اور توانائیاں، تینوں صورتوں (متماثل ممیز، متماثل بوسن، متماثل فرمیان) میں ہر ایک کے لئے حاصل کریں۔

## ۵.۱.۲ قوت مبادلہ

میں ایک سادہ یک بُعدی مثال کے ذریعہ آپ کو ضرورت تشاکلیت کی وضاحت کرنا چاہتا ہوں۔ مندرجہ کریں ایک ذرہ حال  $\psi_a(x)$  میں اور دوسرا حال  $\psi_b(x)$  میں ہے، اور یہ دونوں حالات عمودی اور معمول شدہ ہیں۔ اگر دونوں ذرات متبادل ممیز ہوں، اور ذرہ 1 حال  $\psi_a$  میں ہو تب ان کا مجموعی تفاعل موج

$$(۵.۱۵) \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

ہوگا: اگر یہ متبادل بوسن ہوں تب ان کا مرکب تفاعل موج (معمول زنی کے لئے سوال ۵.۴ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$(۵.۱۶) \quad \psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

اور اگر یہ متبادل فرمیون ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۷) \quad \psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

آئیں ان ذرات کے بیچ فاصلہ علیحدگی کے سرچ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔

$$(۵.۱۸) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

صورتے اول: قابل ممیز ذرات۔ مساوات ۵.۱۵ میں دیے گئے تفاعل موج کے لئے

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

(یک ذروی حال  $\psi_a$  میں  $x^2$  کی توقعاتی قیمت)،

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

اور

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

ہوں گی۔ یوں اس صورت درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۱۹) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

(انتفاقی جواب ذرہ 1 حال  $\psi_b$  میں اور ذرہ 2 حال  $\psi_a$  میں ہونے کی صورت میں بھی حاصل ہوتا ہے۔)

صورتے دوم: متماثل ذرات۔ مساوات ۵.۱۶ اور مساوات ۵.۱۷ کے قسعات موج کے لئے

$$\begin{aligned}\langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)\end{aligned}$$

اور بالکل اسی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

(ظاہر ہے  $\langle x_2^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle$  ہوگا کیونکہ آپ ان میں تمیز نہیں کر سکتے۔) تاہم

$$\begin{aligned}\langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2\end{aligned}$$

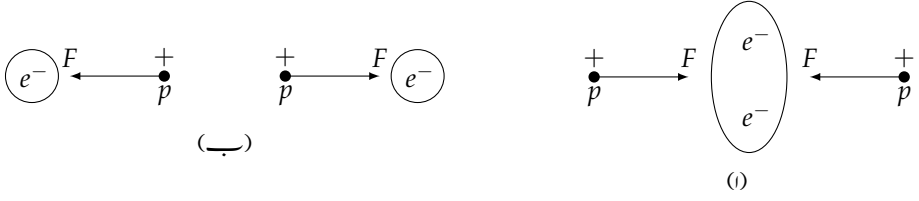
جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۵.۲۰) \quad \langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۲۱) \quad \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$





شکل ۱.۵: شریک گرہتی بندھ کی نقشہ کشی: (ا) تشاکلی تفکیک قوت کشش پیدا کرتی ہے، (ب) خلاف تشاکلی تفکیک دفع قوت پیدا کرتی ہے۔

ساوات ۱۹.۵ اور مساوات ۲۱.۵ کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ منفرق صرف آخری جزو میں پایا جاتا ہے۔

$$(۵.۲۲) \quad \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm}}_{\text{متماثل}} = \underbrace{\langle (\Delta x)^2 \rangle_d}_{\text{متماثل میسر}} \underbrace{\mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2}_{\text{منفرق}}$$

متماثل میسر ذرات کے لحاظ سے متماثل بوسن (بالائی علامتیں) ایک دوسرے کے نسبتاً متریب جبکہ متماثل منفرمیان (زیریں علامتیں) ایک دوسرے سے نسبتاً دور ہوں گے (جہاں ذرات ایک جیسے دو حالات میں ہوں)۔ دھیان رہے کہ جب تک یہ دو تفاعلات موج ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں،  $\langle x \rangle_{ab}$  صفر ہوگا (غیر صفر  $\psi_b(x)$  کی صورت میں جب بھی  $\psi_a(x)$  صفر ہو تب مساوات ۵.۲۰ میں عمل کی قیمت صفر ہوگی)۔ یوں اگر کراچی میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو  $\psi_a$  سے ظاہر کیا گیا ہو، جبکہ صوابی (میرے آبائی ضلع) میں ایک جوہر کے اندر الیکٹران کو  $\psi_b$  سے ظاہر کیا گیا ہو، تب تفاعل موج کو غیر تشاکلی بنانے یا نہ بنانے سے کوئی منفرق نہیں پڑے گا۔ یوں عملی نقطہ نظر سے ایسے الیکٹران جن کے تفاعلات موج غیر منطبق ہوں، ان کو آپ متماثل میسر تصور کرنے کا ڈھونگ رہا سکتے ہیں۔ (یقیناً اسی کی بنا پر ماہر طبیعیات اور کیمیا دان آگے بڑھ سکتے ہیں چونکہ اصولاً کائنات میں ہر ایک الیکٹران باقی تمام کے ساتھ، ان کے تفاعلات موج کی عدم تشاکلیت کے ذریعہ، جڑا ہے اور اگر یہ واقعی اہمیت کا حامل ہوتا تب تمام کائنات کے الیکٹرانوں کی بات کے بغیر ہم کسی ایک الیکٹران کی بات کرنے سے قاصر ہوتے!)

دلچسپ صورت تب پیدا ہوتی ہے جب انکے تفاعلات موج حبزوی منطبق ہوں۔ ایسی صورت میں نظام کا رویہ کچھ یوں ہوگا جیسے متماثل بوسن کے بیچ ”قوت کشش“ پائی جاتی ہو، جو انہیں متریب کھینچتی ہے، اور متماثل منفرمیان کے بیچ ”دفع قوت“ پائی جاتی ہو، جو انہیں ایک دوسرے سے دور دھکا دیتی ہے (یاد رہے کہ ہم فی الحال چکر کو نظر انداز کر رہے ہیں)۔ ہم اس کو قوت مبادلہ<sup>۳</sup> کہتے ہیں اگرچہ یہ حقیقتاً ایک قوت نہیں ہے؛ کوئی بھی چیز ان ذرات کو دھکیل نہیں رہی ہے؛ یہ صرف ضرورت تشاکلیت کا ہمدی نتیجہ ہے۔ ساتھ ہی یہ کوانٹائی میکانی مظہر ہے جس کا کلاسیکی میکانیات میں کوئی مائل نہیں پایا جاتا۔ بہر حال اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ مثلاً، ہائیڈروجن سالہ ( $H_2$ ) پر غور کریں۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، جوہری زمینی حال (مساوات ۳.۸۰) جس کا مرکز مرکزہ 1 پر واقع ہے، میں ایک الیکٹران اور جوہری زمین حال جس کا مرکز مرکزہ 2

<sup>۳</sup> exchange force

پرواقع ہے، میں ایک الیکٹران پر زمینی حال مشتمل ہوگا۔ اگر الیکٹران بوسن ہوتے تب ضرورت تشاکلیت (یا "قوت مبادلہ"، اگر آپ اسے پسند کرتے ہیں) کو شش کرتی ہے کہ دونوں پروٹان کے بیچ الیکٹرانوں کو جمع کرے (شکل ۵.۱-۱)۔ نتیجتاً منفی بار کا انبار دونوں پروٹان کو اندر کی طرف ایک دوسرے کی جانب کھینچتا ہے، جو شریکے گرفت بندھ<sup>۱۳</sup> کا سبب بنتا۔<sup>۱۵</sup> بد قسمتی سے الیکٹران درحقیقت مندرمیان میں نہ کہ بوسن جس کی بنا پر منفی بار اطراف پر انبار ہوگا (شکل ۵.۱-۲) جو سالہ کو ٹکڑے ٹکڑے کر دے گا!

ذرات کی گاہ! ہم اب تک چکر کو نظر انداز کرتے رہے ہیں۔ الیکٹران کا مقناطی تفاعل موج اور چکر دار (جو الیکٹران کے چکر کی سمت بندی کو بیان کرتا ہے) مل کر اس کا (درج ذیل) مکمل حال دیں گے۔<sup>۱۶</sup>

(۵.۲۳)

$$\psi(\mathbf{r})\chi(s)$$

دو الیکٹران حال مرتب کرتے ہوئے ہمیں مبادلہ کے لحاظ سے صرف فضائی جزو کو عدم تشاکلی نہیں بلکہ مکمل حال کو عدم تشاکلی بنانا ہوگا۔ مرکب چکری حالات (مساوات ۴.۱۷ اور مساوات ۴.۱۷۸) پر نظر ڈالتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک تاملاپ خلاف تشاکلی ہے (ابنذا اس کو تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ جوڑنا ہوگا) جبکہ تینوں نہ تاحالات تشاکلی ہیں (ابنذا انہیں خلاف تشاکل فضائی تفاعل کے ساتھ منسلک کرنا ہوگا)۔ ظاہر ہے کہ یوں ایک تاحال بندھ پیدا کرے گا جبکہ نہ تاحال خلاف بندھ ہوگا۔ یقیناً کیمیادان ہمیں بتاتے ہیں کہ شریکے گرفت بندھ کے لئے ضروری ہے کہ دونوں الیکٹران ایک تاحال کے ملین ہوں اور ان کا کل چکر صفر ہو۔<sup>۱۷</sup>

سوال ۵.۲: لامتناہی چوکور کنوین میں دو غیر متعامل ذرات، جن میں سے ہر ایک کی کیت  $m$  ہے، پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک حال  $\psi_n$  (مساوات ۲.۲۸) اور دوسرا حال  $\psi_\ell$  ( $\ell \neq n$ ) میں ہے۔ آپ کو  $\langle x_1 - x_2 \rangle$  کا حساب اس صورت کرنا ہے جب (الف) ذرات غیر متقابل ممیز ہوں، (ب) ذرات متناثر بوسن ہوں اور (ج) ذرات متناثر فرمیان ہوں۔

سوال ۵.۷: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات ہیں، جن میں سے ایک حال  $\psi_a$ ، دوسرا حال  $\psi_b$ ، اور تیسرا حال  $\psi_c$  میں پایا جاتا ہے۔ حالات  $\psi_a$ ،  $\psi_b$ ، اور  $\psi_c$  کو معیاری عمودی تصور کرتے ہوئے (مساوات ۵.۱۵، ۵.۱۶ اور ۵.۱۷ کی طرز پر) تین ذروی حالات تیار کریں جو (الف) متقابل ممیز ذرات، (ب) متناثر بوسن اور (ج) متناثر فرمیان کو ظاہر کرتے ہوں۔ یاد رہے کہ کسی بھی دو ذرات کی جوڑی کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے (ب) کو مکمل طور پر تشاکلی ہونا ہوگا، جبکہ (ج) کو مکمل طور پر خلاف تشاکلی ہونا ہوگا۔ تبصرہ: مکمل طور پر خلاف تشاکلی تفاعلات موج تیار کرنے کا ایک بہترین طریقہ پایا جاتا ہے: <sup>۱۸</sup>مقطع سلیئر تیار کریں جس کی پہلی صف

covalent bond<sup>۱۹</sup>

<sup>۱۵</sup>امراکزہ کے بیچ شراکتی الیکٹران جمع ہو کر جوہروں کو مشترک کھینچ کر شریکے گرفت بندھ پیدا کرتے ہیں۔ اس کے لئے دو عدد الیکٹران لازمی نہیں۔ ہم حصہ ۳ میں صرف ایک الیکٹران پر مبنی شریکے گرفت بندھ دیکھیں گے۔

<sup>۱۶</sup>چکر اور مقام کے بیچ عدم ارتباط کی صورت میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ چکر اور فضائی محدود میں حال کو علیحدہ کرنا ممکن ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ ہم میدان چکر حاصل کرنے کا احتمال، ذرے کے مقام پر منحصر نہیں ہوگا۔ ارتباط کی موجودگی میں عمومی حال، سوال ۵.۵ کی طرز پر، خطی ملاپ  $\psi_+(\mathbf{r})\chi_+ + \psi_-(\mathbf{r})\chi_-$  کا روپ اختیار کرے گا۔

<sup>۱۷</sup>اے اعلیٰ میں ہم عموماً کہتے ہیں کہ الیکٹران ایک دوسرے کے مختلف صنف بندھ ہیں (ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان)۔ یہ ضرورت سے زیادہ سادہ صورت ہوگی چونکہ یہی کچھ  $m = 0$  نہ تاحال کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ درست فقرہ یہ ہوگا: "وہ ایک تاشکیل میں ہیں۔"

Slater determinant<sup>۱۸</sup>

$\psi_a(x_1)$ ،  $\psi_b(x_1)$ ،  $\psi_c(x_1)$  وغیرہ ہوگی، اس کی دوسری صنف  $\psi_a(x_2)$ ،  $\psi_b(x_2)$ ،  $\psi_c(x_2)$  وغیرہ ہوگی اور اسی طرح اس کی باقی صنفیں ہوں گی (یہ طرہ کیف کسی بھی تعداد کے ذرات کیلئے کارآمد ہے)۔

## ۵.۲ جوہر

ایک معادل جوہر جس کا جوہری عدد  $Z$  ہو، ایک بھاری مرکزہ جس کا بار  $Ze$  ہو اور جس کو  $Z$  الیکٹران (کیست  $m$ ، بار  $-e$ ) گھیرتے ہوں، پر مشتمل ہوگا۔ اس نظام کی ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگی۔<sup>۱۹</sup>

$$(۵.۲۴) \quad H = \sum_{j=1}^Z \left\{ -\frac{h^2}{2m} \nabla_j^2 - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Ze^2}{r_j} \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}$$

لہذا تو سین میں بند جزو، مرکزہ کے برقی میدان میں  $j$  ویں الیکٹران کی حسی کی توانائی جمع مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے؛ دوسرا مجموعہ (جو مساوائے  $j = k$ ، تمام  $j$  اور  $k$  پر لیا گیا ہے) الیکٹرانوں کی باہمی دافع قوت سے وابستہ مخفی توانائی کو ظاہر کرتا ہے (جہاں  $\frac{1}{2}$  اس حقیقت کو درست کرتا ہے کہ مجموعہ لیتے ہوئے ہر جوڑی کو دو مرتبہ گن گیا ہے)۔ ہمیں تفہ عمل موج  $\psi(r_1, r_2, \dots, r_Z)$  کیلئے درج ذیل مساوات شروڈنگر:

$$(۵.۲۵) \quad H\psi = E\psi$$

حل کرنا ہوگی۔ البتہ الیکٹران متماثل مندرمیان ہیں، لہذا، تمام حل متماثل مقبول نہیں ہوں گے: صرف وہ حل متماثل مقبول ہوں گے جن میں مکمل حال (مقام اور چکر):

$$(۵.۲۶) \quad \psi(r_1, r_2, \dots, r_Z) \chi(s_1, s_2, \dots, s_Z),$$

کسی بھی دو الیکٹران کے باہمی مبادلہ کے لحاظ سے خلاف تشاکلی ہو۔ بالخصوص کوئی بھی دو الیکٹران ایک ہی حال کے ممکن نہیں ہو سکتے۔

بد قسمتی سے مساوات شروڈنگر کو مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیمیلٹنی کے لئے، مساوائے سادہ ترین صورت  $Z = 1$  (ہائیڈروجن)، ٹھیک حل نہیں کیا جاسکتا (کم از کم آج تک کوئی بھی ایسا نہیں کر پایا)۔ عموماً ہمیں پیچیدہ تخمینی تراکیب استعمال کرنے ہوں گے۔ ان میں سے چند ایک تراکیب پر اگلے ابواب میں غور کیا جائے گا؛ ابھی میں الیکٹران کی دافع قوت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے حلوں کا کافی تجزیہ پیش کرنا چاہوں گا۔ حصہ ۵.۲.۱ میں ہم ہیلیم کے زمینی حال اور بیجان حالات پر غور کریں گے جبکہ حصہ ۵.۲.۲ میں ہم زیادہ بڑے جوہر کے زمینی حالات پر غور کریں گے۔

<sup>۱۹</sup> مرکزہ کو ساکن تصور کیا گیا ہے۔ مرکزہ کی حرکت کو تخفیف شدہ کیرت (سوال ۵.۱) کے ذریعہ شامل کرنا صرف دو جسی نظام کے لئے ممکن ہے؛ خوش قسمتی سے مرکزہ کی کیرت الیکٹران کی کیرت سے اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ درکار درستگی، ہائیڈروجن کے لئے بھی، نظر انداز کی جاسکتی ہے (سوال ۵.۲-الف دیکھیں)۔ اور زیادہ بھاری جوہروں کے لئے یہ مزید کم ہوگی۔ مرکزہ کی متناہی جسامت، اضافیتی تصحیح اور الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی باہم عمل کے زیادہ دلچسپ اثرات پائے جاتے ہیں۔ ان پر آنے والے ابواب میں غور کیا جائے گا، تاہم یہ تمام ”خالص کولب“ جوہر، جسے مساوات ۵.۲۴ بیان کرتی ہے، میں انتہائی چھوٹی درستگیاں ہیں۔

سوال ۵.۸: فرض کریں مساوات ۵.۲۴ میں دی گئی ہیملٹنی کے لیے آپ مساوات شرودنگر (مساوات ۵.۲۵) کا حل  $(\psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_Z))$  حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ اسے ایک ایسا مکمل تشاکلی تفاعل اور ایک مکمل خلاف تشاکلی تفاعل کس طرح بنائیں گے جو مساوات شرودنگر کو اسی توانائی کیے مطمئن کرتا ہو؟

### ۵.۲.۱ ہیلیم

ہائیڈروجن کے بعد سب سے سادہ جوہر ہیلیم ( $Z = 2$ ) ہے۔ اس کی ہیملٹنی

(۵.۲۷)

$$H = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_1} \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_2} \right\} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|}$$

(ہر  $2e$  مرکزہ کے) دو ہائیڈروجنی ہیملٹنی، ایک الیکٹران ۱ اور ایک الیکٹران ۲، کے ساتھ دو الیکٹران کے بیچ دافع توانائی پر مشتمل ہوگا۔ یہ آخری جزو ہمارے لئے پریشانی کا سبب بنتا ہے۔ اس کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات شرودنگر متاثر علیحدگی ہوگی، اور اس کے حلوں کو نصف بوہر رداس (مساوات ۴.۷۲) اور چارگن بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) [وجہ سمجھ نہ آنے کی صورت میں سوال ۴.۱۶ پر دوبارہ نظر ڈالیں] کے ہائیڈروجن تفاعلات موج کے حاصل ضرب:

(۵.۲۸)

$$\psi(r_1, r_2) = \psi_{n\ell m}(r_1) \psi_{n'\ell' m'}(r_2)$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی، جہاں  $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$  ہوگا۔

(۵.۲۹)

$$E = 4(E_n + E_{n'})$$

بالخصوص زمینی حال

(۵.۳۰)

$$\psi_0(r_1, r_2) = \psi_{100}(r_1) \psi_{100}(r_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

ہوگا (مساوات ۴.۸۰ دیکھیں) اور اس کی توانائی درج ذیل ہوگی۔

(۵.۳۱)

$$E_0 = 8(-13.6 \text{ eV}) = -109 \text{ eV}$$

چونکہ  $\psi_0$  تشاکلی تفاعل ہے، لہذا چکری حال کو خلاف تشاکلی ہونا ہوگا اور یوں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاشکیلی میں ہوگا، جس میں چکر ایک دوسرے کے ”مخالف صفت بند“ ہوں گے۔ یقیناً حقیقت میں ہیلیم کا زمینی حال ایک تاہی ہے، تاہم اس کی تجرباتی حاصل توانائی  $-78.975 \text{ eV}$  ہے جو مساوات ۵.۳۱ سے کافی مختلف ہے۔ یہ زیادہ حیرت کی بات نہیں ہے: ہم نے الیکٹران کی دافع توانائی کو مکمل طور پر نظر انداز کیا جو کہ چھوٹی

مقدار نہیں ہے۔ یہ ایک مثبت مقدار (مساوات ۵.۲۷ دیکھیں) ہے جس کو شامل کرتے ہوئے کل توانائی کم ہو کر  $109 \text{ eV}$  کی بجائے  $79 \text{ eV}$  ہو جائے گی (سوال ۵.۱۱ دیکھیں)۔

ہیلیم کے ہیجان حالات:

(۵.۳۲)

$$\psi_{nlm}\psi_{100}$$

ہائیڈروجنی زمینی حال میں ایک الیکٹران اور ہیجان حال میں دوسرے الیکٹران، پر مشتمل ہوگا۔ [دونوں الیکٹران کو ہیجان حالات میں ڈالنے سے ایک الیکٹران فوراً زمینی حال میں واپس گر کر توانائی خارج کرتا ہے، جو دوسرے الیکٹران کو جوہر سے باہر استمراریہ ( $E > 0$ ) میں دھکیلتا ہے، اور یوں ایک آزاد الیکٹران اور ہیلیم یاردار یہ ( $\text{He}^+$ ) حاصل ہوگا۔ یہ بذات خود ایک دلچسپ نظام ہے جس پر ہم یہاں بات نہیں کر رہے؛ سوال ۵.۹ دیکھیں] ہم ہمیشہ کی طرح تشاکلی اور خلاف تشاکلی ملاپ تیار کر سکتے ہیں (مساوات ۵.۱۰): اول الذکر خلاف تشاکلی چکر تفکیک (یک تا) کے ساتھ جابجا، جنہیں نزد ہیلیم<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں، جبکہ موخر الذکر کو تشاکلی چکر تفکیک (سہ تا) درکار ہوگی اور انہیں ہیلیم پرستے<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں۔ زمینی حال لازماً نزد ہیلیم ہوگا؛ جبکہ ہیجان حالات دونوں روپ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم نے حصہ ۵.۱.۲ میں دریافت کیا، تشاکلی فصائی حال الیکٹرانوں کو متعجب لاتا ہے، جس کی بنا پر ہم توقع کرتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی باہم متعادل توانائی زیادہ ہوگی، اور یقیناً تجربہ بات سے تصدیق ہوتی ہے کہ ہیلیم پرست پرست کے لحاظ سے نزد ہیلیم حالات کی توانائی زیادہ ہے (شکل ۵.۲ دیکھیں)۔

سوال ۵.۹:

۱. فرض کریں کہ آپ ہیلیم جوہر کے دونوں الیکٹران کو  $n = 2$  حال میں رکھتے ہیں؛ خارجی الیکٹران کی توانائی کیا ہوگی؟

ب. ہیلیم یاردار یہ  $\text{He}^+$  کے طیف پر (مقداری) تجزیہ کریں۔

سوال ۵.۱۰: ہیلیم توانائی سطحوں پر درج ذیل صورت میں (کیفی) تجزیہ کریں۔ (۱) اگر الیکٹران متقابل بوسن ہوتے، (ب) اگر الیکٹران متقابل ممیز ذرات ہوتے (لیکن ان کی کیریت اور بار ایک جیسے ہوں)۔ فرض کریں کہ الیکٹران کا چکر اب بھی  $\frac{1}{2}$  ہے، لہذا چکر کی شکلیات یک تا اور سہ تا ہوں گی۔

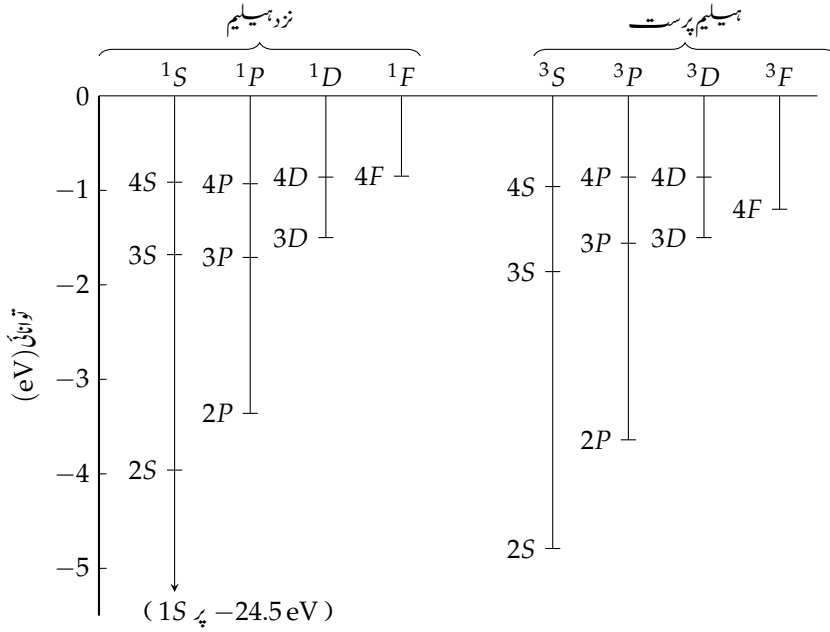
سوال ۵.۱۱:

۱. مساوات ۵.۳۰ میں دیے گئے حال  $\psi_0$  کیلئے  $\langle (1/r_1 - r_2) \rangle$  کا حساب لگائیں۔ اشارہ: کروی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو  $r_1$  پر رکھیں تاکہ

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}.$$

ہو۔ پہلے  $r_2$  کا کھل حل کریں۔ زاویہ  $\theta_2$  کے لحاظ سے مکمل آسان ہے، بس مثبت جذر لینا یاد رکھیں۔ آپ کو  $r_2$  کھل دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہوگا؛ پہلا 0 سے  $r_1$  تک اور دوسرا  $r_1$  سے  $\infty$  تک۔ جواب:  $\frac{5}{4a}$

parahelium<sup>۲۰</sup>  
orthohelium<sup>۲۱</sup>



شکل ۵.۲: ہیلیم کی توانائیوں کی سطحیں (علاقہ کی وضاحت حصہ ۵.۲.۲ کی گئی ہے)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نزد ہیلیم کی توانائیاں مطابقتی ہیلیم پرست سے زیادہ ہیں۔ انتہائی پیچیدہ باردار ہیلیم کے زمینی حال  $(He^+ : 4 \times (-13.6) \text{ eV} = -54.4 \text{ eV})$  کے لحاظ سے ہیں؛ کسی بھی حال کی کل توانائی جاننے کی خاطر  $54.4 \text{ eV}$  منفی کریں۔

ب۔ جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے ہیلیم کے زمینی حال میں الیکٹران کی باہمی متعادل توانائی کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کو الیکٹران دواصل کی صورت میں پیش کریں اور اس کو  $E_0$  (مساوات ۵.۳۱) کے ساتھ جمع کر کے زمینی حال توانائی کی بہتر تخمین حاصل کریں۔ اس کا موازنہ تجرباتی قیمت کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ اب بھی آپ تخمینی تفاعل موج کے ساتھ کام کر رہے ہیں، لہذا آپ کا جواب ٹھیک تجرباتی جواب نہیں ہوگا۔)

### ۵.۲.۲ دوری جدول

بھاری جوہروں کے زمینی حال الیکٹران کی تفصیل تقریباً اسی طرح جو ذکر حاصل کیے جاتے ہیں۔ پہلی تخمین میں (انکی باہمی دافع توانائی کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے) ہار  $Z_e$  کے مرکزہ کے کولمب مخفیہ میں یک ذروی ہائیڈروجنی حالات  $(n, \ell, m)$ ، جنہیں مدارچے<sup>۲۲</sup> کہتے ہیں، کے انفرادی الیکٹران ممکن ہوں گے۔ اگر الیکٹران بوسن (یا متبادل ممیز ذرات) ہوتے تب یہ زمینی حال  $(1, 0, 0)$  میں گر جاتے اور یکساں اتنا دلچسپ نہ ہوتا۔ حقیقت میں الیکٹران متقابل مندرمیان ہیں، جن پر پالی اصول منعیت لاگو ہوتا ہے، لہذا کسی ایک مدارچے کے صرف دو الیکٹران ممکن ہو سکتے ہیں (ایک ہم میدان اور ایک خلاف میدان؛ بلکہ یہ کہنا زیادہ بہتر ہوگا، کہ ایک تفصیل حال میں)۔ کسی بھی  $n$  کی قیمت کے لئے  $n^2$  ہائیڈروجنی تفاعل حالت موج پائے جاتے ہیں (جن میں سے ہر ایک کی توانائی  $E_n$  ہوگی، یوں  $n = 1$  خول<sup>۲۳</sup> میں دو الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی،  $n = 2$  خول میں آٹھ،  $n = 3$  میں اٹھارہ، اور  $n$  ویں خول میں  $2n^2$  الیکٹرانوں کی جگہ ہوگی۔ کئی طور پر بات کرتے ہوئے **دورچہ جدول**<sup>۲۴</sup> کے افقی صف، ہر ایک انفرادی خول کو بھرنے کے مترادف ہے (اگرچہ یہ پوری کہانی نہیں ہے؛ اگر ایسا ہوتا، انکی لمبائیاں 2، 8، 18، 32، 50، وغیرہ ہوتیں نہ کہ 2، 8، 18، 18، 18، وغیرہ؛ ہم جلد دیکھیں گے کہ الیکٹران کا باہمی دافع اس شمار کو کس طرح خراب کرتا ہے)۔

ہیلیم میں،  $n = 1$  خول بھرا ہوگا، لہذا اگلے جوہر لتھیم ( $Z = 3$ ) کو  $n = 2$  خول میں ایک الیکٹران رکھنا ہوگا۔ اب  $n = 2$  کے لئے  $\ell = 0$  یا  $\ell = 1$  ہو سکتا ہے؛ تیسرا الیکٹران ان میں سے کسی ایک کا انتخاب کرے گا؟ (چونکہ بوجہ توانائی  $n$  پر منحصر ہوتی ہے نہ کہ  $\ell$  پر) لہذا الیکٹران کا باہمی عمل نہ ہونے کی صورت میں ان دونوں کی توانائی ایک جیسی ہوگی۔ تاہم درج ذیل وجہ کی بنا پر الیکٹران کی دافع توانائی  $\ell$  کی امتل قیمت کی طرف داری کرتی ہے۔ زاویائی معیار حرکت الیکٹران کو بیرونی رخ دھکیلنے کی کوشش کرتا ہے اور الیکٹران جتنا زیادہ مرکزہ سے دور ہوگا اتنا مرکزہ، اندرونی الیکٹرانوں کے زیادہ **پلچہ** پر<sup>۲۵</sup> ہو کر اوجھل ہوگا۔ (اندازاً بات کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اندرونی الیکٹران کو مرکزہ کا پورا ہار  $Z_e$  ”نظر“ آتا ہے جب کہ بیرونی الیکٹران کو مشکل سے  $e$  سے کچھ زیادہ بار نظر آتا ہے۔) یوں کسی بھی ایک خول میں امتل توانائی کا حال (یعنی دوسرے لفظوں میں سب سے سخت مقید الیکٹران)  $\ell = 0$  ہوگا، اور بڑھتے  $\ell$  کے ساتھ توانائی بڑھے گی۔ اس طرح لتھیم میں تیسرا الیکٹران مدارچہ  $(2, 0, 0)$  کا ممکن ہوگا۔ اگلا جوہر (بیریلیم جس کا  $Z = 4$  ہے) بھی اسی حال میں ہوگا (پس اس کا چکر ”الٹ رخ“ ہوگا) لیکن بوران ( $Z = 5$ )

orbitals<sup>۲۲</sup>  
shell<sup>۲۲</sup>  
periodic table<sup>۲۲</sup>  
screened<sup>۲۵</sup>

کو  $l = 1$  استعمال کرنا ہوگا۔

اسی طرح چلتے ہوئے ہم نیون ( $Z = 10$ ) کو پہنچتے ہیں جہاں  $n = 2$  خول مکمل بھرا ہوگا اور ہم دوری جدول کی اگلی صف کو پہنچ کر  $n = 3$  خول کو بھرنا شروع کرتے ہیں۔ اس صف کے آغاز میں دو جوہر (سوڈیم اور مگنیشیم) کا  $l = 0$  ہے اور اس کے بعد (سلور<sup>۲۶</sup> سے آرگن تک) چھ ایسے جوہر ہیں جن کا  $l = 1$  ہوگا۔ آرگن کے بعد ہم ”توقع“ کرتے ہیں کہ دس ایسے جوہر پائے جائیں گے جن کے لیے  $n = 3$  اور  $l = 2$  ہوگا؛ البتہ یہاں پہنچ کر اندرونی الیکٹران کا مرکزہ کو پس پردہ کرنے کا اثر اتنا زور پکڑتا ہے کہ اگلا خول بھی اس کے نظر ہو جاتا ہے (یعنی یہ خول بھی اوچھل ہو جاتا ہے) لہذا پوناشیم ( $Z = 19$ ) اور کالمیم ( $Z = 20$ )،  $n = 3$ ،  $l = 2$  کی بجائے  $n = 4$ ،  $l = 0$  منتخب کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دوبارہ نیچے اتر کر  $n = 3$  اور  $l = 2$  (اسکینڈیم تا جہت)، اور اس کے بعد  $n = 4$ ،  $l = 1$  (گیسٹیم تا کرپٹان) اٹھاتے ہیں، اور یہاں پہنچ کر ہم دوبارہ قبل از وقت اگلی صف ( $n = 5$ ) میں چھلانگ لگا کر بعد میں  $n = 4$  خول کے  $l = 2$  اور  $l = 3$  بھرتے ہیں۔

یہاں جوہری حالات کے تسمیہ جس کو تمام کیمیادان اور ماہر طبیعیات استعمال کرتے ہیں، پر تبصرہ کرنا ضروری ہوگا۔ اس کی وجہ شاید صرف انیسویں صدی کے طیف پیمائی کاروں کو معلوم ہوگی کہ  $l = 0$  کو کیوں  $s$  کہتے ہیں،  $l = 1$  کو  $p$ ،  $l = 2$  کو  $d$ ، اور  $l = 3$  کو  $f$  کہتے ہیں؛ میرے خیال سے اس کے بعد وہ سیدھی راہ پر آگئے اور انہوں نے لاطینی حروف تہجی کے تحت ( $g, h, i$ ، اور  $j$  کو نظر انداز کرتے ہوئے،  $k, l$ ، وغیرہ) نام دیے۔ کسی ایک الیکٹران کے حال کو  $nl$  کی جوڑی ظاہر کرتی ہے، جہاں  $n$  (عدد) حال کو اور  $l$  (حرف) مدار پچی زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے؛ کوانٹائی عدد  $m$  کا ذکر نہیں کیا جاتا لیکن قوت نسبیہ میں حال کے ممکن الیکٹرانوں کی تعداد لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل تفصیل

$$(5, 3) \quad (1s)^2 (2s)^2 (2p)^2$$

کہتی ہے کہ مدار چپ ( $1, 0, 0$ ) میں دو الیکٹران، مدار چپ ( $2, 0, 0$ ) میں دو الیکٹران جبکہ مدار چپ ( $2, 1, 1$ )، اور ( $2, 1, 0$ ) اور ( $2, 1, -1$ ) کے کسی ملاپ میں دو الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ یہ درحقیقت کاربن کا زمینی حال ہے۔

اس مثال میں دو الیکٹران ایسے ہیں جن کا مدار پچی زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد ایک (1) ہے، لہذا کل مدار پچی زاویائی معیار حرکت کوانٹائی عدد  $L$  (چھوٹے  $l$  کی بجائے بڑا  $L$  جو انفرادی ذرہ کا نہیں بلکہ کل کو ظاہر کرتا ہے) 1، 2، یا 0 ہو سکتا ہے۔ ساتھ ہی،  $(1s)$  کے دو الیکٹران ایک دوسرے کے ساتھ یک تاحال بندھن میں ہیں اور ان کا کل چکر صفر ہوگا؛ یہی کچھ  $(2s)$  کے دو الیکٹران کے لئے بھی ہوگا، لیکن  $(2p)$  کے دو الیکٹران یا تو یک تانظام اور یا سہ تانظام میں ہوں گے۔ یوں کل چکر کوانٹائی عدد  $S$  (کل کو ظاہر کرنے کے لئے یہاں بھی بڑا حرف استعمال ہوگا) 1 یا 0 ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ میٹران کل (مدار پچی جمع چکر)  $J$  کی قیمت 1، 2، 3، یا 0 ہو سکتی ہے۔ کسی ایک جوہر کے لئے ان کل قیمتوں کو قواعد ہونڈ<sup>۲۸</sup> (سوال ۵.۱۳ دیکھیں) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ کو درج ذیل علامتی

<sup>۲۹</sup>aluminium

<sup>۲۸</sup>نیز  $n = 1$  کا نام  $K$ ،  $n = 2$  کا نام  $L$ ،  $n = 3$  کا نام  $M$ ، وغیرہ رکھے گئے۔ خولوں کے نام  $M$  سے شروع ہو کر لاطینی حروف تہجی کے ترتیب سے ہیں۔  
<sup>۲۹</sup>Hund's Rules



روپ میں لکھا جاسکتا ہے

(۵.۳۴)

$$2S+1 L_J$$

(جہاں  $S$  اور  $J$  اعداد جبکہ  $L$  جوکل کو ظاہر کرتا ہے) بڑا حرف ہوگا۔ کاربن کا زمینی حال  $^3P_0$  ہے؛ اس کا کل چکر 1 ہے (جس کی بنا پر 3 لکھا گیا ہے)، کل مدارچی زاویائی معیار حرکت 1 ہے (لہذا  $P$  لکھا گیا ہے) اور میزان کل زاویائی معیار حرکت صفر ہے (لہذا 0 لکھا گیا ہے)۔ جدول ۱.۵ میں دوری جدول کی ابتدائی چار صفوں کے لئے انفراردی شکلیات اور کل زاویائی معیار حرکت مساوات ۵.۳۴ کی روپ میں پیش کئے گئے ہیں۔<sup>۲۹</sup>

سوال ۵.۱۲:

۱. دوری جدول کی ابتدائی دو صفوں (نیون تک) کے لئے مساوات ۵.۳۳ کے روپ میں الیکٹران شکلیات پیش کر کے ان کی تصدیق جدول ۱.۵ کے ساتھ کریں۔

ب. ابتدائی چار عناصر کے لئے مساوات ۵.۳۴ کے روپ میں مطابقتی کل زاویائی معیار حرکت تلاش کریں۔ بوران، کاربن اور نائسیروجن کے لئے تمام ممکنات پیش کریں۔

سوال ۵.۱۳:

۱. ہض کا پہلا قاعدہ<sup>۳۰</sup> کہتا ہے کہ باقی چیزیں ایک جیسی ہونے کی صورت میں وہ حال جس کا کل چکر  $S$  اعظم ہو، کی توانائی افضل ہوگی۔ ہیلیم کے بھجان حالات کے لیے یہ کیا پیشگوئی کرتا ہے۔

ب. ہض کا دوسرا قاعدہ<sup>۳۱</sup> کہتا ہے کہ کسی ایک چکر کی صورت میں مجموعی طور پر خلاف تشاکلیت پر پورا اترتا ہو وہ حال جس کا اعظم کل مدارچی زاویائی معیار حرکت  $L$  ہو، کی توانائی افضل ہوگی۔ کاربن کے لئے  $L = 2$  کیوں نہیں ہے؟ اشارہ: یاد رہے کہ ”سیڑھی کابلانی سر“ ( $M_L = L$ ) تشاکلی ہے۔

ج. ہض کا تیسرا قاعدہ<sup>۳۲</sup> کہتا ہے کہ اگر ایک ذیلی خول ( $n, \ell$ ) نصف سے زیادہ بھرا نہ ہو، تب افضل توانائی کی سطح کے لئے  $|L - S|$  ہوگا؛ اگر یہ نصف سے زیادہ بھرا ہو تب  $J = L + S$  کی توانائی افضل ہوگی۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۱۲-ب میں بوران کے مسئلہ سے شک دور کریں۔

د. قواعد بن کے ساتھ یہ حقیقت استعمال کرتے ہوئے کہ تشاکلی چکری حال کے ساتھ خلاف تشاکل مقام حال (اور خلاف تشاکل مقام حال کے ساتھ تشاکلی چکری حال) استعمال ہوگا، سوال ۵.۱۲-ب میں کاربن اور نائسیروجن میں درپیش مشکلات سے چھکارا حاصل کریں۔ اشارہ: کسی بھی حال کی تشاکلی جاننے کی خاطر ”سیڑھی کے کابلانی سر“ کو دیکھیں۔

سوال ۵.۱۴: (دوری جدول کی چھٹے صف میں عنصر 66) ڈسپر وزیم کا زمینی حال  $I_8^5$  ہے۔ اس کے کل چکر، کل مدارچے، اور میزان کل زاویائی معیار حرکت کے کوانٹائی اعداد کیا ہوں گے؟ ڈسپر وزیم کے الیکٹران تشکیل کا حنا کہ تجویز کریں۔

<sup>۲۹</sup>کرپٹان، عنصر 36 کے بعد، صورت حال زیادہ پیچیدہ ہو جاتی ہے (حالات کے ترتیب میں مہین ساخت زیادہ بڑا کردار ادا کرنے لگتا ہے) لہذا یہ صفحہ پر بگ کی کمی نہیں تھی جس کی وجہ سے جدول کو یہاں اختتام پذیر کیا گیا۔

<sup>۳۰</sup>Hund's first rule

<sup>۳۱</sup>Hund's second rule

<sup>۳۲</sup>Hund's third rule

جدول ۱.۵: دوری جدول کی اولین چار قطاروں کی الیکٹران تقیلات

تفصیل	عنصر	Z
$^2S_{1/2}$ (1s)	H	1
$^1S_0$ (1s) <sup>2</sup>	He	2
$^2S_{1/2}$ (He)(2s)	Li	3
$^1S_0$ (He)(2s) <sup>2</sup>	Be	4
$^2P_{1/2}$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p)	B	5
$^3P_0$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>2</sup>	C	6
$^4S_{3/2}$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>3</sup>	N	7
$^3P_2$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>4</sup>	O	8
$^2P_{3/2}$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>5</sup>	F	9
$^1S_0$ (He)(2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup>	Ne	10
$^2S_{1/2}$ (Ne)(3s)	Na	11
$^1S_0$ (Ne)(3s) <sup>2</sup>	Mg	12
$^2P_{1/2}$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p)	Al	13
$^3P_0$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p) <sup>2</sup>	Si	14
$^4S_{3/2}$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p) <sup>3</sup>	P	15
$^3P_2$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p) <sup>4</sup>	S	16
$^2P_{3/2}$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p) <sup>5</sup>	Cl	17
$^1S_0$ (Ne)(3s) <sup>2</sup> (3p) <sup>6</sup>	Ar	18
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)	K	19
$^1S_0$ (Ar)(4s) <sup>2</sup>	Ca	20
$^2D_{3/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d)	Sc	21
$^3F_2$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>2</sup>	Ti	22
$^4F_{3/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>3</sup>	V	23
$^7S_3$ (Ar)(4s)(3d) <sup>5</sup>	Cr	24
$^6S_{5/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>5</sup>	Mn	25
$^5D_4$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>6</sup>	Fe	26
$^4F_{9/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>7</sup>	Co	27
$^3F_4$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>8</sup>	Ni	28
$^2S_{1/2}$ (Ar)(4s)(3d) <sup>10</sup>	Cu	29
$^1S_0$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup>	Zn	30
$^2P_{1/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p)	Ga	31
$^3P_0$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p) <sup>2</sup>	Ge	32
$^4S_{3/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p) <sup>3</sup>	As	33
$^3P_2$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p) <sup>4</sup>	Se	34
$^2P_{3/2}$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p) <sup>5</sup>	Br	35
$^1S_0$ (Ar)(4s) <sup>2</sup> (3d) <sup>10</sup> (4p) <sup>6</sup>	Kr	36

## ۵.۳. ٹھوس اجسام

ٹھوس حال میں ہر جوہر کے بیرونی ڈھیلے مقید گرفتہ ۳۳ الیکٹران میں سے چند ایک علیحدہ ہو کر، کسی مخصوص ”موروثی“ مرکزہ کے کولمب میدان سے آزاد، تمام قتلحی حبال کے مخفیہ کے زیر اثر، حرکت کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم دو انتہائی سادہ نمونوں پر غور کریں گے: پہلا نمونہ سمرفلڈ کا الیکٹران گیس نظر ہے جس میں (سرحد کے علاوہ) باقی تمام قوتوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے اور ان الیکٹران کو (لامستثنائی) جو کورکٹوں کے تین ابعادی مسائل کی طرح ڈبلے میں آزاد ذرات تصور کیا جاتا ہے؛ اور دو سمرانمونه نظریہ بلوخ ہے جو الیکٹران کے باہمی دفع کو نظر انداز کرتے ہوئے باقاعدگی سے ایک جتنے فاصلے پر مثبت بار کے مرکزہ کی قوت کشش کو دوری مخفیہ سے ظاہر کرتا ہے۔ یہ نمونے ٹھوس اجسام کی کوانٹائی نظریہ کی طرف پہلے لڑکھڑاتے قدم ہیں، لیکن اس کے باوجود یہ ”جود“ کے حصول میں پالی حصول مناعت کے گہرے کردار پر اور موصل، غیر موصل، اور نیم موصل کی حیرت کن برقی خواص پر روشنی ڈالنے میں مدد دیتے ہیں۔

## ۵.۳.۱ آزاد الیکٹران گیس

فرض کریں، ایک ٹھوس جسم مستطیل شکل کا ہے جس کے اضلاع  $\ell_x$ ،  $\ell_y$  اور  $\ell_z$  ہیں، اور اس جسم کے اندر الیکٹران پر کوئی قوت اثر انداز نہیں ہوتی، ماسوائے نامتابل گزردیواروں کے۔

$$(۵.۳۵) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \ell_x, \quad 0 < y < \ell_y, \quad 0 < z < \ell_z \\ \infty & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

ساوات شرودنگر،

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi$$

کار تیزی محدود میں علیحدہ ہوتی ہے:  $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  جہاں

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E_x X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Y}{dy^2} = E_y Y; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 Z}{dz^2} = E_z Z$$

اور  $E = E_x + E_y + E_z$  ہوں گے۔ اب

$$k_x \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}, \quad k_y \equiv \frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar}, \quad k_z \equiv \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

لکھ کر درج ذیل عمومی حل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} X(x) &= A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x), & Y(y) &= A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y), \\ Z(z) &= A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z) \end{aligned}$$

سرحدی شرائط کے تحت  $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$  لہذا  $B_x = B_y = B_z = 0$  اور  
 $X(\ell_x) = Y(\ell_y) = Z(\ell_z) = 0$  ہوں گے اور یوں

$$(۵.۳۶) \quad k_x \ell_x = n_x \pi, \quad k_y \ell_y = n_y \pi, \quad k_z \ell_z = n_z \pi$$

ہوں گے جہاں ہر  $n$  ایک مثبت عدد صحیح ہوگا۔

$$(۵.۳۷) \quad n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

(معمول شدہ) تناسبات موج:

$$(۵.۳۸) \quad \psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{\ell_x \ell_y \ell_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{\ell_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{\ell_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{\ell_z} z\right)$$

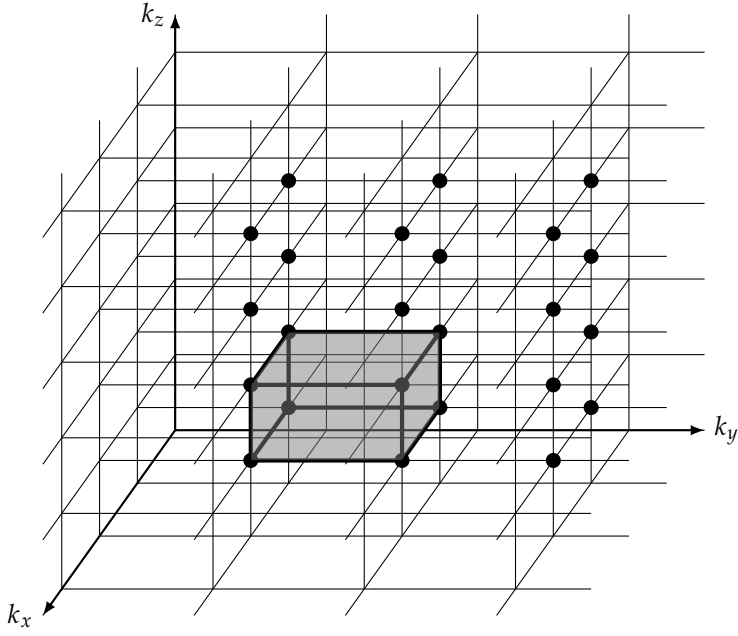
ہوں گے اور احباب زنی توانائیاں:

$$(۵.۳۹) \quad E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{\ell_x^2} + \frac{n_y^2}{\ell_y^2} + \frac{n_z^2}{\ell_z^2} \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

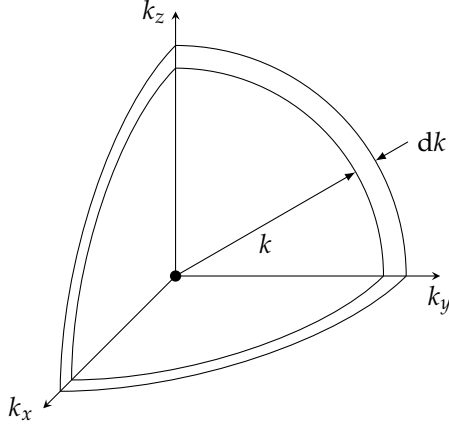
ہوں گی، جہاں سمتیہ موج  $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$  کی مقدار  $k$  ہے۔

ایک تین ابعادی فضا جس کے محور  $k_x$ ،  $k_y$ ،  $k_z$  ہوں کا تصور کریں جس میں

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\pi}{\ell_x}, \frac{2\pi}{\ell_x}, \frac{3\pi}{\ell_x}, \dots \\ k_y &= \frac{\pi}{\ell_y}, \frac{2\pi}{\ell_y}, \frac{3\pi}{\ell_y}, \dots \\ k_z &= \frac{\pi}{\ell_z}, \frac{2\pi}{\ell_z}, \frac{3\pi}{\ell_z}, \dots \end{aligned}$$



شکل ۵.۳: آزاد الیکٹران گیس۔ حال کا ہر نقطہ تقاطع ایک ساکن حال کو ظاہر کرتا ہے۔ ایک ”ڈبے“ کو سیاہ دکھایا گیا ہے۔ ایک ڈبے کے لئے ایک حال پایا جاتا ہے۔



شکل ۵.۲: کروی خول کا  $k$  فضا میں ایک مشتمل۔

پرسیدھی سطحیں پائی جاتی ہوں؛ اس فضا میں ہر انفرادی نقطہ تقاطع، منفرد ایک ذروی ساکن حال دیگا (شکل ۵.۳)۔ اس حال کا ہر خانہ، اور یوں ہر حال،  $k$  فضا میں درج ذیل حجم گھیرے گا، جہاں پورے جسم کا حجم  $V \equiv \ell_x \ell_y \ell_z$  ہے۔

$$(۵.۲۰) \quad \frac{\pi^3}{\ell_x \ell_y \ell_z} = \frac{\pi^3}{V}$$

فرض کریں مادہ کے ایک ٹکڑا میں  $N$  جوہر پائے جاتے ہوں اور ہر جوہر اپنے حصہ کے  $q$  آزاد الیکٹران دیتا ہو۔ (عملاً، کسی بھی کلاں بین جسامت کی چیز کے لئے  $N$  کی قیمت بہت بڑی ہوگی، جس کی گنتی ایوگاڈرو عدد میں کی جائے گی؛ جبکہ  $q$  ایک چھوٹا عدد مثلاً 1 یا 2 ہوگا۔) اگر الیکٹران بوسن (یا متبادل ممیز ذرات) ہوتے تب وہ زمینی حال  $\psi_{111}$  میں سکونت اختیار کرتے ہیں۔ لیکن، حقیقت میں الیکٹران متشکل فضا میں ہیں جن پر پالی اصول منعبت کا اطلاق ہوتا ہے، لہذا کسی بھی حال کے صرف دو الیکٹران ممکن ہو سکتے ہیں۔ یوں یہ الیکٹران  $k$  فضا میں رداس  $k_F$  کے کرہ کا ایک مشتمل  $^{۳۶}$  بھرتے ہیں؛ اس رداس کا تعین اس حقیقت سے کیا جا سکتا ہے کہ الیکٹران کے ہر ایک جوڑے کو  $\frac{\pi^3}{V}$  حجم درکار ہوگا (مساوات ۵.۲۰)۔

<sup>۵۵</sup> ہمیں یہاں فرض کر رہا ہوں کہ ایسا کوئی حراری یا دیگر اضطراب نہیں پایا جاتا جو محسوس جسم کو مجموعی زمینی حال سے اٹھاتا ہو۔ میں ”ٹھنڈے“ ٹھوس جسم کی بات کر رہا ہوں، اگرچہ جیسا آپ سوال ۵.۱۶-ج میں دیکھیں گے، ٹھوس اجسام، رہائشی درجہ حرارت سے بہت زیادہ درجہ حرارت پر بھی موجودہ نقطہ نظر سے ”ٹھنڈے“ ہوتے ہیں۔  
<sup>۳۶</sup> کیونکہ،  $N$  بہت بڑا عدد ہے لہذا ہمیں حبال کی اصل دقیق سطح اور کرہ کی اس ہموار سطح میں منرق کرنے کی ضرورت نہیں جو اس کو تختیت ظاہر کرتی ہے۔

$$\frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left( \frac{\pi^3}{V} \right)$$

یوں

$$(۵.۳۱) \quad k_F = (3\rho\pi^2)^{\frac{1}{3}}$$

ہوگا جہاں

$$(۵.۳۲) \quad \rho \equiv \frac{Nq}{V}$$

کثافت آزاد الیکٹرانز<sup>۳۷</sup> (کاٹنی حجم میں آزاد الیکٹران کی تعداد) ہے۔

$k$  نصف میں آباد حالات (الیکٹران ان کے مکین ہیں) اور غیر آباد حالات (الیکٹران ان کے مکین نہیں ہیں) کی سرحد کو فرمی سطح<sup>۳۸</sup> کہتے ہیں (جس کی بنا پر زیر نوشت میں  $F$  لکھا گیا ہے)۔ اس سطح پر طاقتی توانائی کو فرمی توانائی<sup>۳۹</sup>  $E_F$  کہتے ہیں، آزاد الیکٹران گیس کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۳۳) \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\rho\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$

الیکٹران گیس کی کل توانائی کو درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے: ایک خول جس کی موٹائی  $dk$  ہو (شکل ۵.۴) کا حجم

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk$$

ہوگا، لہذا اس خول میں الیکٹران حالات کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{2[(1/2)\pi k^2 dk]}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

ان میں سے ہر ایک حال کی توانائی  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  (مساوات ۵.۳۹) ہے، لہذا خول کی توانائی

$$(۵.۳۴) \quad dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

free electron density<sup>۳۷</sup>  
Fermi surface<sup>۳۸</sup>  
Fermi energy<sup>۳۹</sup>

اور کل توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$(۵.۴۵) \quad E_{کل} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m} \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\hbar^2 k_F^5 V}{10\pi^2 m} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-2/3}$$

کوانٹائی میکانی توانائی کا کردار کچھ ایسا ہی ہے جیسے سادہ گیس میں اندرونی حرارتی توانائی ( $U$ ) کا ہوتا ہے۔ بالخصوص یہ دیواروں پر ایک دباؤ پیدا کرتا ہے اور اگر ڈبے کے حجم میں  $dV$  کا اضافہ ہو تب کل توانائی میں درج ذیل کی رونما ہوگی

$$dE_{کل} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-5/3} dV = -\frac{2}{3} E_{کل} \frac{dV}{V}$$

جو کوانٹائی دباؤ  $P$  کا سبب ہوا۔ سیرونی کام ( $dW = P dV$ ) ہوگا۔ ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۴۶) \quad P = \frac{2}{3} \frac{E_{کل}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} \rho^{5/3}$$

یہ اس سوال کا جزوی جواب ہے کہ ایک ٹھنڈا ٹھوس جسم اندر کی طرف منہدم کیوں نہیں ہو جاتا: ایک اندرونی کوانٹائی میکانی دباؤ توازن برقرار رکھتا ہے جس کا الیکٹران کے باہمی دفع (جنہیں ہم نظر انداز کر چکے ہیں) یا حرارتی حرکت (جس کو ہم خارج کر چکے ہیں) کے ساتھ کوئی تعلق نہیں، بلکہ جو متناثر مندرمیان کی ضرورت خلاف تشاکلیت سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات **انحطاطی دباؤ**<sup>۴۰</sup> کہتے ہیں، اگرچہ ”مناسقی دباؤ“ بہتر اصطلاح ہو گی۔<sup>۴۱</sup>

سوال ۵.۱۵: ایک آزاد الیکٹران کی اوسط توانائی  $\frac{E_{کل}}{Nq}$  کو مندری توانائی کی نسبت کی صورت میں لکھیں۔ جواب:  $\frac{3}{5} E_F$

سوال ۵.۱۶: تانبے کی کثافت  $8.96 \text{ g cm}^{-3}$  ہے، جبکہ اس کا جوری وزن  $63.5 \text{ g mol}^{-1}$  ہے۔

ا. مساوات ۵.۴۳ استعمال کر کے  $q = 1$  لیتے ہوئے تانبے کی مندری توانائی کا حساب لگا کر نتیجے کو الیکٹران دولٹ میں لکھیں۔

ب. الیکٹران کی مطابقتی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ اشارہ:  $(\frac{1}{2})mv^2 = E_F$  لیں۔ کیا تانبے میں الیکٹران کو غیر اضافیتی تصور کرنا خطرے سے باہر ہوگا؟

ج. تانبے کے لئے کس درجہ حرارت پر امتیازی حرارتی توانائی ( $k_B T$  جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل اور  $T$  کیلون حرارت ہے)، مندری توانائی کے برابر ہوگی؟ تبصرہ: اس کو **فرمی درجہ حرارت**<sup>۴۲</sup> کہتے ہیں۔ جب تک اصل درجہ حرارت مندری درجہ حرارت سے کافی کم ہو، مادے کو ”ٹھنڈا“ تصور کیا جاسکتا ہے، اور اس میں الیکٹران نچلے ترین متابل پہنچ حال میں ہوں گے۔ کیونکہ تانبہ  $1356 \text{ K}$  پر پگھلتا ہے، لہذا ٹھوس تانبہ ہر صورت ٹھنڈا ہوگا۔

<sup>۴۰</sup> degeneracy pressure

<sup>۴۱</sup> ہم نے مساوات ۵.۴۱، مساوات ۵.۴۳، مساوات ۵.۴۵، اور مساوات ۵.۴۶ لامتناہی مستطیل جسم کے لئے اخذ کیے، تاہم یہ کسی بھی شکل کے ہر اس جسم کے لئے درست ہیں جس میں ذرات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔

<sup>۴۲</sup> Fermi temperature



د. الیکٹران گیس نمونہ میں تانب کے لئے اخطائی دباؤ (مساوات ۵.۴۶) کا حساب لگائیں۔

سوال ۵.۱۷: کسی جسم پر دباؤ میں معمولی کمی اور نتیجتاً حجم میں نسبتی اضافہ کے تناسب کو جیم مقیاس<sup>۴۳</sup> کہتے ہیں۔

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

دکھائیں کہ آزاد الیکٹران نمونہ میں  $\frac{5}{3}P = B$  ہوگا، اور سوال ۵.۱۶-دکا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تانبے کے لئے جیم مقیاس کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ تبصرہ: تجربے سے حاصل قیمت  $13.4 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$  ہے؛ مکمل درست جواب کی توقع نہ کریں، کیونکہ ہم نے الیکٹران مرکزہ اور الیکٹران الیکٹران قوتوں کو نظر انداز کیا ہے! حقیقت میں یہ حیران کن ہے کہ حساب سے حاصل نتیجہ حقیقت کے اتنا قریب ہے۔

### ۵.۳.۲ پٹی دار ساخت

ہم آزاد الیکٹران نمونہ میں منظم و فاصلوں پر ساکن مثبت بار کے مراکزہ کی الیکٹرانوں پر قوت کو شامل کر کے بہتر نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ٹھوس اجسام کاروب نمائیاں حد تک اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اس کا مخفیہ دوری ہوتا ہے۔ مخفیہ کی حقیقی شکل مادہ کی تفصیلی رویہ میں کردار ادا کرتی ہے۔ یہ عمل دیکھنے کی خاطر میں سادہ ترین نمونہ تیار کرتا ہوں، جسے یک بُعدی ڈیراکہ<sup>۴۴</sup> کہتے ہیں، اور جو برابر و فاصلوں پر ڈیلٹا فنکشن سوزنات پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵.۵)۔<sup>۴۵</sup> لیکن اس سے پہلے میں ایک طاقور مسئلہ پیش کرتا ہوں جو دوری مخفیہ کے مسائل کا حل نہایت آسان بناتا ہے۔

دوری مخفیہ سے مراد ایسا مخفیہ ہے جو کسی مستقل فاصلہ  $a$  کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہو۔

(۵.۴۷)

$$V(x+a) = V(x)$$

مسئلہ بلوخ<sup>۴۶</sup> کہتا ہے کہ دوری مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر،

(۵.۴۸)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کے حل سے مراد وہ فنکشن عملیابا سکتا ہے جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرتا ہو

(۵.۴۹)

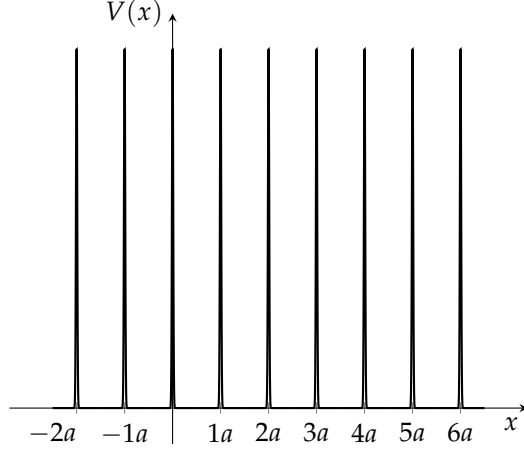
$$\psi(x+a) = e^{iKa} \psi(x)$$

bulk modulus<sup>۴۷</sup>

Dirac comb<sup>۴۸</sup>

<sup>۴۵</sup> ڈیلٹا فنکشنات کو نیچے رخ رکھنا زیادہ ٹھیک ہوتا، جو مراکزہ کے قوت کشش کو ظاہر کرتے؛ تاہم، ایسا کرنے سے مثبت توانائی حل کے ساتھ ساتھ منفی توانائی حل بھی حاصل ہوتے جس کی بنا پر حساب کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے (سوال ۵.۴۰ دیکھیں)۔ ہم یہاں مخفیہ کی دوریت کے اثرات میں دلچسپی رکھتے ہیں؛ بظاہر کم معقول شکل منتخب کر کے مسئلہ کا حل آسان ہوتا ہے؛ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ مراکزہ  $a/2$ ،  $\pm 3a/2$ ،  $\pm 5a/2$ ، وغیرہ پر پائے جاتے ہیں۔

Bloch's theorem<sup>۴۹</sup>



شکل ۵.۵: ذرات ایک کنگھی (مساوات ۵.۵۷)۔

جہاں  $K$  ایک مستقل ہے (یہاں ”مستقل“ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو  $x$  کا تابع نہیں ہے؛ اگرچہ یہ  $E$  کا تابع ہو سکتا ہے)۔

ثبوت: مان لیں کہ  $D$  ایک ”ہٹاؤ“ عامل ہے:

$$(۵.۵۰) \quad Df(x) = f(x + a)$$

دوری مخفیہ مساوات ۵.۴۷ کی صورت میں  $D$  ہیملٹنی کا مقلوبی ہوگا:

$$(۵.۵۱) \quad [D, H] = 0$$

لہذا ہم  $H$  کے ایسے امتیازی تفاعلات چن سکتے ہیں جو بیک وقت  $D$  کے امتیازی تفاعلات بھی ہوں:  $D\psi = \lambda\psi$  یا درج ذیل۔

$$(۵.۵۲) \quad \psi(x + a) = \lambda\psi(x)$$

یہاں  $\lambda$  کسی صورت صفر نہیں ہو سکتی (اگر ایسا ہو تب چونکہ مساوات ۵.۵۲ تمام  $x$  کے لئے مطمئن ہوگا، لہذا ہمیں  $\psi(x) = 0$  ملے گا جو قابل قبول امتیازی تفاعل نہیں ہے)؛ کسی بھی غیر صفر مخلوط عدد کی طرح، اس کو قوت نہائی روپ میں لکھا جاسکتا ہے:

$$(۵.۵۳) \quad \lambda = e^{iKa}$$

جہاں  $K$  ایک مستقل ہوگا۔

□

اس مقام پر مساوات ۵.۵۳ امتیازی قیمت  $\lambda$  لکھنے کا ایک انوکھا طریقہ ہے، لیکن ہم جلد دیکھیں گے کہ  $K$  ”حقیقی“ ہے اور یوں اگرچہ  $\psi(x)$  خود غیر دوری ہے  $|\psi(x)|^2$ :

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (۵.۵۴)$$

دوری ہوگا، جیسا کہ ہم توقع کرتے آئے ہیں۔<sup>۴</sup>

اب ظاہر ہے کہ کوئی بھی ٹھوس جسم ہمیشہ کے لئے چلتا نہیں جانے گا بلکہ کہیں نہ کہیں اس کی سرحد پائی جائے گی جو  $V(x)$  کی دوریت کو ختم کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ کو ناکارہ بنا دے گی۔ تاہم کسی بھی کلاں بین متلم میں کئی ایوگا درو عدد کے برابر جوہر پائے جائیں گے، اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹھوس جسم کی سطح سے بہت دور، الیکٹران پر سطحی اثر قابل نظر انداز ہوگا۔ ہم مسئلہ بلوخ کو کارآمد رکھنے کی خاطر  $x$  کو ایک دائرے پر رکھتے ہیں تاکہ اس کا سر، بہت بڑی تعداد  $N \approx 10^{23}$  دوری فاصلوں کے بعد، اس کے دم پر پایا جاتا ہو؛ باضابطہ طور پر ہم درج ذیل سرحدی شرط عائد کرتے ہیں۔

$$\psi(x + Na) = \psi(x) \quad (۵.۵۵)$$

یوں (مساوات ۵.۴۹ کے تحت) درج ذیل ہوگا

$$e^{iNka} \psi(x) = \psi(x)$$

لہذا  $e^{iNka} = 1$  یا  $Nka = 2\pi n$  ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$K = \frac{2\pi n}{Na}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (۵.۵۶)$$

(درج بالا مساوات میں حقیقتاً  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ہوگا؛ تفصیل کے لئے مساوات ۵.۶۶ کے نیچے پیراگراف پڑھیں۔) موجودہ صورت میں  $K$  لازماً حقیقی ہوگا۔ مسئلہ بلوخ کی امادیت یہ ہے کہ ہمیں صرف ایک حنا (مثلاً  $0 \leq x < a$ ) کے وقفہ پر مسئلہ شرودنگر حل کرنا ہوگا؛ مساوات ۵.۴۹ کی بار بار اطلاق سے باقی تمام جگہوں کے لئے حل حاصل ہوگا۔

اب فرض کریں کہ مخفیہ درحقیقت (درج ذیل) نوکیلی ڈیٹا انتقال سوزنات (ڈیراک کنگھی) پر مشتمل ہو۔

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja) \quad (۵.۵۷)$$

(شکل ۵.۵ میں آپ تصور کریں گے کہ محور  $x$  کو یوں دائروی شکل میں لپیٹا گیا ہے کہ  $N$  ویں سوزن درحقیقت نقطہ  $x = -a$  پر پائی جاتی ہے۔) اگرچہ یہ حقیقت پسند نمونہ نہیں ہے، لیکن یاد رہے، ہمیں صرف دوریت کے

<sup>۴</sup> یقیناً، آپ دلیل کو اس وقت کے مساوات ۵.۵۴ سے آواز کرتے ہوئے مسئلہ بلوخ ثابت کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنا ممکن نہیں ہے، کیونکہ مساوات ۵.۴۹ کے یقینی جزو ضروری کو  $x$  کا انتقال عمل ہونے کی اجازت صرف مساوات ۵.۵۴ دیتا ہے۔

اثرات میں دلچسپی ہے؛ کلاسیکی کرائنگ و پیننی نمونہ<sup>۴۸</sup> میں دہراتا ہوا مستطیل مخفیہ استعمال کیا گیا، جو اب بھی بہت سے مصنفین کا پسندیدہ مخفیہ ہے۔ خط  $(0 < x < a)$  میں مخفیہ صفر ہوگا، لہذا

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi,$$

یا

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi,$$

ہوگا، جہاں ہمیشہ کہ طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۵۸) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$(۵.۵۹) \quad \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (0 < x < a).$$

مسئلہ بلوخ کے تحت مبداء کے بائیں جانب پہلے خانہ میں تقاضا عمل موج درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۶۰) \quad \psi(x) = e^{-iKa} [A \sin k(x+a) + B \cos k(x+a)], \quad (-a < x < 0).$$

نقطہ  $x = 0$  پر  $\psi$  لازماً استمراری ہوگا، لہذا

$$(۵.۶۱) \quad B = e^{-iKa} [A \sin(ka) + B \cos(ka)]$$

ہوگا؛ اس کے تفرق میں ڈیٹا تقاضا عمل کے زور کے براہ راست متناسب عدم استمراریا چبائے گا (مداوات ۲.۱۲، جس میں  $\alpha$  کی علامت الٹ ہوگی، چونکہ یہاں کنوؤں کی بجائے سوزنات پائے جاتے ہیں):

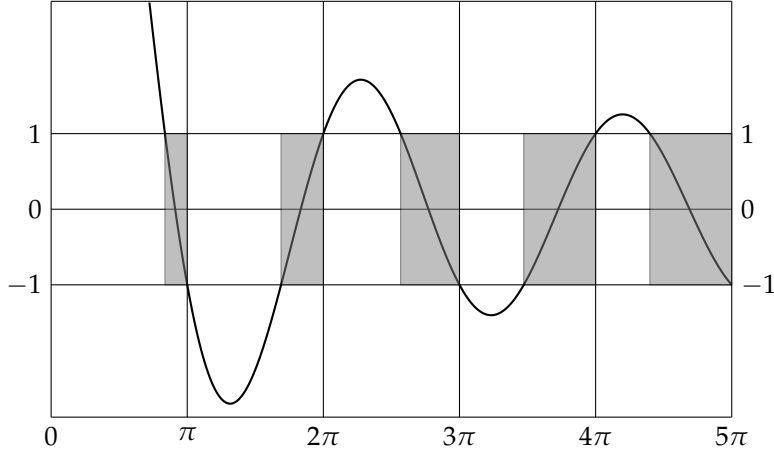
$$(۵.۶۲) \quad kA - e^{-iKa} k[A \cos(ka) - B \sin(ka)] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} B$$

مداوات ۵.۶۱ کو  $A \sin(ka)$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$(۵.۶۳) \quad A \sin(ka) = [e^{iKa} - \cos(ka)] B$$

اس کو مداوات ۵.۶۲ میں پُر کر کے اور  $k_B$  کو منسوخ کرتے ہوئے

$$[e^{iKa} - \cos(ka)][1 - e^{-iKa} \cos(ka)] + e^{-iKa} \sin^2(ka) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$



شکل ۵.۶: تفاعل  $f(z)$  (مساوات ۵.۶۱ کو  $\beta = 10$  کے لئے ترمیم کر کے اجبازتی پٹیاں (سایہ دار) دکھائی گئی ہیں جن کے بیچ ممنوعہ درج (جہاں  $|f(z)| > 1$  ہوگا) پائے جاتے ہیں۔

حاصل ہوگا، جس سے درج ذیل سادہ روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka) \quad (۵.۶۳)$$

یہ وہ بنیادی نتیجہ ہے جس سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔ کرائنگ و پٹی مخفیہ کے لئے کلیہ زیادہ پیچیدہ ہوگا، لیکن جو خدوخال ہم دیکھنے حارہ ہیں، وہی اس میں بھی پائے جاتے ہیں۔

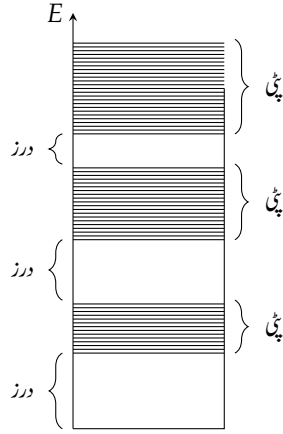
مساوات ۵.۶۳ متغیر  $k$  کی ممکنہ قیمتیں، لہذا اجبازتی توانائیاں، تعین کرتی ہے۔ علاقیت کو سادہ بنانے کی عنصر سے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$z \equiv ka, \quad \beta \equiv \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \quad (۵.۶۵)$$

جس سے مساوات ۵.۶۳ کا دایاں ہاتھ درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$f(z) \equiv \cos(z) + \beta \frac{\sin(z)}{z} \quad (۵.۶۶)$$

مستقل  $\beta$ ، ڈیٹا تفاعل کے ”زور“ کا، بے بُندی ناپ ہے۔ شکل ۵.۶ میں میں نے  $\beta = 10$  کے لئے  $f(z)$  کو ترمیم کیا ہے۔ یہاں دیکھنے کی اہم بات یہ ہے کہ  $f(z)$  سعت  $(-1, +1)$  سے باہر بھٹکتا ہے، اور چونکہ  $|\cos(Ka)|$  کی قیمت کسی صورت بھی 1 سے تجاوز نہیں کر سکتی، لہذا ایسے خطوں میں مساوات ۵.۶۳ کا حل



شکل ۵.۷: دوری مخفیہ کی احبازتی توانائیاں بنیادی طور پر استمراری پٹیاں پیدا کرتی ہیں۔

نہیں پایا جائے گا۔ یہ درز<sup>۴۹</sup> ممنوع توانائیوں کو ظاہر کرتی ہیں؛ انکے بچ احبازتی توانائیوں کی پٹیاں<sup>۵۰</sup> پائی جاتی ہیں۔ مساوات ۵.۵۶ کے تحت،  $Ka = \frac{2\pi n}{N}$  ہوگا، جہاں  $N$  ایک بہت بڑا عدد ہے، لہذا  $n$  کوئی بھی عدد صحیح ہو سکتا ہے۔ یوں کسی ایک پٹی میں تقریباً ہر توانائی احبازتی ہوگی۔ آپ تصور میں شکل ۵.۶ پر  $\cos(\frac{2\pi n}{N})$  قیمت کے منسلکوں پر  $+1$  (یعنی  $n = 0$ ) سے لے کر نیچے  $-1$  (یعنی  $n = \frac{N}{2}$ ) تک اور واپس تقریباً  $+1$  (یعنی  $n = N - 1$ ) تک (جہاں بلوغت جزو ضربی  $e^{iKa}$  دوبارہ چکر شروع کرتا ہے) لہذا  $n$  کو مزید بڑھانے سے کوئی نیا حاصل نہیں ہوگا) لکیریں کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں۔ ہر لکیر کا  $f(z)$  کے ساتھ تقاطع، ایک احبازتی توانائی دیگا۔ ظاہر ہے کہ ہر پٹی میں  $N$  حالات پائے جاتے ہیں، جو ایک دوسرے کے اتنے تقریب ہیں کہ عموماً مقصد کے لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ ایک استمراری پیدا کرتے ہیں (شکل ۵.۷)۔ (یوں مساوات ۵.۵۶ میں  $n = 0, \pm 1, \dots$  کی بجائے  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  ہوگا۔)

اب تک ہم نے اپنے مخفیہ میں صرف ایک الیکٹران رکھا ہے۔ حقیقت میں  $Nq$  الیکٹران ہوں گے، جہاں ہر ایک جوہر  $q$  تعداد کے آزاد الیکٹران مہیا کرے گا۔ پالی اصول مناعت کی بنا پر صرف دو الیکٹران کسی ایک فضائی حال کے ممکن ہو سکتے ہیں، یوں  $q = 1$  کی صورت میں یہ زمینی حال میں پہلی پٹی کو آدھا بھریں گے، اگر  $q = 2$  ہو تب یہ پہلی پٹی کو مکمل بھریں گے، اگر  $q = 3$  ہو تب یہ دوسری پٹی کو آدھا بھریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ (تین ابعاد میں، اور زیادہ حقیقی مخفیہ کی صورت میں، پٹییوں کی ساخت زیادہ پیچیدہ ہو سکتی ہے، لیکن احبازتی پٹیاں جن کے بچ ممنوع درز پائے جاتے ہوں، تب بھی ہوں گی؛ دوری مخفیہ کی نشانی ہی پٹی دار ساخت ہے۔)

اب اگر ایک پٹی مکمل طور پر بھری ہوئی ہو، ممنوع خطے سے گزر کر اگلی پٹی تک چھلانگ کے لئے ایک الیکٹران کو نسبتاً زیادہ توانائی درکار ہوگی؛ ایسا مادہ برقی طور پر غیر موصل<sup>۵۱</sup> ہوگا۔ اس کے برعکس اگر ایک پٹی پوری طرح بھری نہ ہو

<sup>۴۹</sup> gaps  
<sup>۵۰</sup> bands  
<sup>۵۱</sup> insulator

تب ایک الیکٹران کو ہجیان<sup>۵۲</sup> کرنے کے لئے بہت کم توانائی درکار ہوگی؛ اس طرح کامادہ عموماً موصل<sup>۵۳</sup> ہوگا۔ ایک غیر موصل میں، زیادہ یا کم  $q$  والے، چند جوہر کی ملاوٹ<sup>۵۴</sup> سے، اگلی بالا پٹی میں چند اضافی الیکٹران آجباتے ہیں، یا سابقہ بھری پٹی میں چند خول<sup>۵۵</sup> پیدا ہو جاتے ہیں؛ ان دونوں صورتوں میں ایک کمزور برقی رو گزر سکتا ہے؛ ایسی اشیاء نیم موصل<sup>۵۶</sup> کہلاتی ہیں۔ آزاد الیکٹران نمونہ میں تمام ٹھوس اجسام کو لازماً اچھا موصل ہونا ہوگا چونکہ انکی اجزائی توانائیوں کے طیف میں کوئی بڑا وقفہ نہیں پایا جاتا۔ قدرت میں پائے جانے والے ٹھوس اجسام کی برقی موصلیت میں اتنا زیادہ فرق صرف پٹی دار نظریہ کی مدد سے سمجھا سکتا ہے۔

سوال ۵.۱۸:

۱. مساوات ۵.۵۹ اور مساوات ۵.۶۳ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دوری ڈیٹا تفاعل مخفیہ میں ایک ذرے کا تفاعل موج درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\psi(x) = C[\sin(kx) + e^{-iKa} \sin k(a-x)], (0 \leq x \leq a).$$

(معمول زنی مستقل  $C$  کا تعین کرنے کی ضرورت نہیں۔)

ب۔ البتہ پٹی کے بالائی سر پر، جہاں  $z$  مستقل  $\pi$  کا عدد صحیح مضرب ہوگا (شکل ۵.۶)، جزو-الف  $\psi(x) = 0$  دیگا۔ ایسی صورت میں درست تفاعل موج تلاش کریں۔ دیکھیں کہ ہر ایک ڈیٹا تفاعل پر  $\psi$  کو کیا ہوتا ہے؟

سوال ۵.۱۹: پہلی اجزائی پٹی کی تہ پر،  $\beta = 10$  کی صورت میں توانائی کی قیمت، تین با معنی ہندسوں تک، تلاش کریں۔ دلائل پیش کرتے ہوئے  $\frac{\alpha}{a} = 1 \text{ eV}$  تصور کریں۔

سوال ۵.۲۰: فرض کریں ہم ڈیٹا تفاعل سوزنات کے بجائے ڈیٹا تفاعل کنووں پر غور کر رہے ہیں (یعنی مساوات ۵.۵۷ میں  $\alpha$  کی علامت الٹ ہے)۔ ایسی صورت میں شکل ۵.۶ اور شکل ۵.۷ طرز کی اشکال بنا کر تجزیہ کریں۔ مثبت توانائی حلوں کے لئے آپ کو کوئی نیا حساب کرنے کی ضرورت نہیں ہے (بس مساوات ۵.۶۶ میں موزوں تبدیلیاں لائیں)، لیکن منفی توانائی حلوں کے لئے آپ کو کام کرنا ہوگا؛ اور انہیں ترسیم پر شامل کرنا مت بھولیں (جواب منفی  $z$  تک وسیع ہوگا)۔ پہلی اجزائی پٹی میں کتنے حالات ہونگے؟

سوال ۵.۲۱: دکھائیں کہ مساوات ۵.۶۳ سے متعین زیادہ تر توانائیاں دوہری انحطاطی ہیں۔ کونسی توانائیاں ایسی نہیں ہیں؟ اشارہ:  $N = 1, 2, 3, 4, \dots$  لیتے ہوئے دیکھیں کہ کیا ہوتا ہے۔ ایسی ہر صورت میں  $\cos(Ka)$  کی کیا ممکن قیمتیں ہوں گی؟

<sup>۵۲</sup> غیر مکمل بھری پٹی میں الیکٹران کی موجودہ توانائی سے معمولی زیادہ توانائی والا حال دستیاب ہوگا جس میں الیکٹران ہجیان ہو کر داخل ہو سکتا ہے۔

<sup>۵۳</sup> conductor

<sup>۵۴</sup> dope

<sup>۵۵</sup> hole

<sup>۵۶</sup> semiconductors

## ۵.۴ کوانٹائی شماریاتی میکانیات

مطلق صفر حرارت پر ایک طبعی نظام اپنی متل احبازتی توانائی تفکیک کا مکین ہوگا۔ درجہ حرارت بڑھانے سے بلا منصوبہ حراری سرگرمیوں کی بنا پر پیمانی حالات بھرنے شروع ہونگے، جس سے درج ذیل سوال پیدا ہوتا ہے: اگر درجہ حرارت  $T$  پر، حراری توازن میں  $N$  ذرات پائے جاتے ہوں، جہاں  $N$  ایک بڑا عدد ہے، تب اس کا کیا احتمال ہوگا کہ ایک ذرہ جس کو بلا منصوبہ منتخب کیا گیا ہو، کی توانائی بالخصوص  $E_j$  ہوگی؟ دھیان رہے کہ اس ”احتمال“ کا کوانٹائی عدم تعینیت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں؛ بالکل یہی سوال کلاسیکی شماریاتی میکانیات میں بھی کھڑا ہوتا ہے۔ ہمیں احتمالی جواب اس لئے منظور ہوگا کہ جن ذرات کی بات ہم کر رہے ہیں انکی تعداد اتنی زیادہ ہوگی کہ کسی بھی صورت میں ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ نظر رکھنا ممکن نہیں ہوگا، چاہے متمثل میکانیات تعینی ہو یا نہ ہو۔

شماریاتی میکانیات کا بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ حراری توازن<sup>۵۷</sup> میں ایک جیسی کل توانائی،  $E$ ، والا ہر منفرد حال ایک جتنا متمثل ہوگا۔ بلا واسطہ حراری حرکت کی بنا پر توانائی ایک ذرہ سے دوسرے ذرہ، اور ایک روپ (حرکی، گردشی، لرزشی، وغیرہ) سے دوسرے روپ میں مسلسل منتقل ہوگا لیکن (بیرونی مداخلت کی عدم موجودگی میں) بقا توانائی کی بنا پر کل مقررہ ہوگا۔ یہاں (بہت گہرا اور متابل سوچ) مفروضہ یہ ہے کہ توانائی کی مستمر تقسیم کسی مخصوص حال کو ترجیح نہیں دیتی۔ درجہ حرارت<sup>۵۸</sup>،  $T$ ، حراری توازن میں ایک نظام کی کل توانائی کی ایک پیمائش ہے۔ ان منفرد حالات کی گنتی میں کوانٹائی میکانیات ایک نئی پیچیدگی پیدا کرتی ہے (تاہم حالات غیر مسلسل ہوتے ہیں جس کی بنا پر یہ کلاسیکی نظریہ کی گنتی سے زیادہ آسان ہوگا)، اور گنتی کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا ذرات متابل ممیز، متماثل بوسن یا متماثل فرمیان ہیں۔ ان کے دلائل نسبتاً سیدھے لیکن ریاضی کافی گہری ہے، لہذا میں ایک انتہائی سادہ مثال سے شروع کرتا ہوں تاکہ آپ بنیادی حقائق سمجھ سکیں۔

## ۵.۴.۱ ایک مثال

فرض کریں ہمارے پاس ایک بُجری لامستناہی چوکور کنویں (حصہ ۲.۲) میں، کیت  $m$  والے، صرف تین باہم غیر متماثل ذرات پائے جاتے ہیں۔ کل توانائی درج ذیل ہوگی (مساوات ۲.۲۷ دیکھیں)

$$(۵.۶۷) \quad E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

جہاں  $n_A$ ،  $n_B$  اور  $n_C$  مثبت عدد صحیح ہوں گے۔ ہم  $E = 363 \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)$  یعنی

$$(۵.۶۸) \quad n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363$$

لیتے ہوئے تبصرہ جاری رکھتے ہیں۔ جیسا کہ آپ تصدیق کر سکتے ہیں، تین مثبت عدد صحیح اعداد کے تیسرے ایسے ملاپ پائے جاتے ہیں جن کے مربعوں کا مجموعہ 363 ہو: تینوں اعداد 11 ہو سکتے ہیں، دو اعداد 13 اور

<sup>۵۷</sup> thermal equilibrium  
<sup>۵۸</sup> temperature



ایک 5 (جو تین مرتب اجتماعات میں پایا جائے گا)، ایک عدد 19 اور دو 1 (یہاں بھی تین مرتب اجتماعات ہوں گے)، یا ایک عدد 17، ایک 7 اور ایک 5 (چھ مرتب اجتماعات) ہو سکتے ہیں۔ یوں  $(n_A, n_B, n_C)$  درج ذیل میں سے ایک ہوگا۔

$$(11, 11, 11), \\ (13, 13, 5), (13, 5, 13), (5, 13, 13), \\ (1, 1, 19), (1, 19, 1), (19, 1, 1), \\ (5, 7, 17), (5, 17, 7), (7, 5, 17), (7, 17, 5), (17, 5, 7), (17, 7, 5)$$

اگر یہ ذرات متماثل میسر ہوں، تب ان میں سے ہر ایک کسی ایک منفرد کوانٹائی حال کو ظاہر کرے گا، اور شماریاتی میکانیات کے بنیادی مفروضے کے تحت، حراری توازن<sup>۵۹</sup> میں یہ سب برابر محتمل ہوں گے۔ لیکن میں اس میں دلچسپی نہیں رکھتا کہ کون ذرہ کس (یک ذروی) حال میں پایا جاتا ہے، بلکہ میں یہ جاننا چاہتا ہوں کہ ہر ایک حال میں کل کتنے ذرات پائے جاتے ہیں؛ جس کو حال  $\psi_n$  کی تعداد  $N_n$  کہتے ہیں۔ ہم اس 3 ذروی حال کی تمام تعداد ممکن کے اجتماع کو **تشکیل**<sup>۶۰</sup> کہتے ہیں۔ اگر تینوں حال  $\psi_{11}$  میں ہوں تب تشکیل درج ذیل ہوگی

$$(5.۶۹) \quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

(یعنی  $N_{11} = 3$  ہے اور باقی تمام صفر ہیں)۔ اگر دو حال  $\psi_{13}$  میں اور ایک  $\psi_5$  میں ہو، تب تشکیل درج ذیل ہوگی

$$(5.۷۰) \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

(یعنی  $N_5 = 1$ ،  $N_{13} = 2$ ، اور باقی تمام صفر ہوں گے)۔ اگر دو  $\psi_1$  میں اور ایک  $\psi_{19}$  میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہوگی

$$(5.۷۱) \quad (2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

(یعنی  $N_1 = 2$ ،  $N_{19} = 1$  اور باقی تمام صفر ہوں گے)۔ اور اگر ایک ذرہ  $\psi_5$  میں، ایک  $\psi_7$  میں اور ایک  $\psi_{17}$  میں ہو تب تشکیل درج ذیل ہوگی

$$(5.۷۲) \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

<sup>۵۹</sup>غیر متجانس ذرات کس طرح حراری توازن برقرار رکھتے ہیں؟ میں اس کے بارے میں سوچنا نہیں چاہوں گا؛ حقیقتاً، توانائی کی مستحکم تقسیم ذرات کے باہم عمل سے ہی ممکن ہوگی۔ ہم مندرجہ کر سکتے ہیں کہ ذرات کا باہم عمل اتنا کمزور ہے کہ اگر چہ یہ (بے عرصہ کی صورت میں) حراری توازن پیدا کرتا ہے، تاہم یہ اتنا کمزور ہے کہ نظام کے ساکن حالات اور احبابائی توانائیوں پر متاثر نہیں ڈالتا۔

<sup>۶۰</sup>occupation number configuration

(یعنی  $1 = N_5 = N_7 = N_{17}$  اور باقی صفر ہوں گے)۔ ان تمام میں، آخری تشکیل زیادہ محتمل ہوگی، چونکہ اس کو چھ مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے، جبکہ درمیانی دو کو تین طریقوں سے اور پہلی کو صرف ایک طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

میں اب دوبارہ اپنے اصل سوال پر آتا ہوں کہ بلا واسطہ تین ذرات منتخب کرتے ہوئے کوئی مخصوص (اجزائی) توانائی  $E_n$  حاصل کرنے کا احتمال ( $P_n$ ) کیا ہوگا؟ توانائی  $E_1$  صرف اس صورت حاصل ہوگی جب وہ تیسری تشکیل (مساوات ۵.۷) میں ہو؛ اس تشکیل میں نظام ہونے کا اتفاق 13 میں سے 3 ہے، اور اس تشکیل میں  $E_1$  کے حصول کا احتمال  $\frac{2}{3}$  ہے لہذا  $P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{39}$  ہوگا۔ آپ  $E_5$  کو تشکیل 2 (مساوات ۵.۷) سے 13 میں سے 3 امکان اور احتمال  $\frac{1}{3}$  یا تشکیل 4 (مساوات ۵.۷) سے 13 میں سے 6 امکان اور احتمال  $\frac{1}{3}$  کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں، لہذا  $P_5 = \frac{3}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{39}$  ہوگا۔ آپ  $E_7$  کو صرف تشکیل 4 سے حاصل کر سکتے ہیں اور  $P_7 = \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{13}$  ہوگا۔ اسی طرح  $E_{11}$  صرف پہلی تشکیل (مساوات ۵.۷) سے 13 میں سے 1 امکان اور احتمال ایک (1) کے ساتھ حاصل ہوگا، لہذا  $P_{11} = \frac{1}{13}$  ہوگا۔ اسی طرح  $P_{13} = \frac{3}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{13}$ ،  $P_{17} = \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{13}$  اور  $P_{19} = \frac{3}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{13}$  ہوں گے۔ انکی تصدیق درج ذیل سے ہوگی۔

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1$$

یہ متقابل ممیز ذرات کے لئے تھا۔ اس کی بجائے اگر ذرات متشائل مندرمیان ہوتے، ضرورت خلاف تشاکلیت (اپنی آسانی کے لئے چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے، یا اگر آپ چاہیں تو، یہ تصور کرتے ہوئے کہ تمام ایک جیسے چکر کی حال میں ہیں) کی بنا پر پہلی تین تشکیلات (جو دو ذرات کو، یا اس سے بھی بری صورت میں تین ذرات کو، ایک ہی حال میں ڈالتے ہیں) ناممکن ہوں گی، اور چوتھی تشکیل میں صرف ایک حال ہوگا (سوال ۵.۲۲-الف دیکھیں)۔ متشائل مندرمیان کے لئے  $P_5 = P_7 = P_{17} = \frac{1}{3}$  ہوگا (اور اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک (1) ہے)۔ اس کے برعکس، اگر ذرات متشائل بوسن ہوتے تو ضرورت تشاکلیت ہر تشکیل میں ایک حال کی اجازت دیتا (سوال ۵.۲۲-ب دیکھیں)، لہذا  $P_1 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ،  $P_5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ،  $P_{11} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$ ،  $P_7 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$  اور  $P_{17} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ،  $P_{13} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ،  $P_{19} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$  ہوتا۔ ہمیشہ کی طرح احتمالات کا مجموعہ ایک (1) ہے۔

اس مثال کا مقصد آپ کو یہ دکھانا تھا کہ حالات کی شمار کس طرح ذرات کی قسم پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک لحاظ سے حقیقی صورت، جہاں  $N$  ایک بہت بڑا عدد ہوگا، سے یہ مثال زیادہ پیچیدہ تھی۔ چونکہ  $N$  کی قیمت بڑھانے سے زیادہ محتمل تشکیل (جو متقابل ممیز ذرات کے لئے اس مثال میں  $1 = N_5 = N_7 = N_{17}$  ہے) پایا جانے کا امکان اتنا زیادہ ہو جائے گا کہ کسی بھی شماراتی مقاصد کے لئے باقی تمام امکانات کو رد کیا جاسکتا ہے:  $^{23}$  توازن کی صورت میں انفرادی ذروی توانائیوں کی تقسیم، انکی اعظم محتمل تشکیل میں تقسیم ہے۔ (اگر  $N = 3$  کے لئے یہ درست ہوتا، جو کہ یہ نہیں ہے، ہم متقابل ممیز ذرات کے لئے  $\frac{1}{3} = P_5 = P_7 = P_{17}$  اخذ کرتے)۔ میں حصہ ۵.۳ میں اس نقطہ پر دوبارہ آؤں گا لیکن اس سے پہلے گنتی کی ترکیب کو عموماً دیتے ہیں۔

<sup>۲۳</sup> بڑے اعداد کی شماریات کا یہ ایک حیرت کن اور غیر متوقع حقیقت ہے۔

سوال ۵.۲۲:

ا. حال  $\psi_5$  میں ایک، حال  $\psi_7$  میں ایک، اور حال  $\psi_{17}$  میں ایک متماثل تین فرمیان کا مکمل خلاف تشاکلی تعامل موج  $\psi(x_A, x_B, x_C)$  تیار کریں۔

ب. تین متماثل بوسن کے لئے مکمل تشاکلی تعامل موج  $\psi(x_A, x_B, x_C)$  درج ذیل صورتوں میں تیار کریں (۱) تینوں حال  $\psi_{11}$  میں ہوں، (ب) اگر دو  $\psi_1$  اور ایک  $\psi_{19}$  میں ہو، (ج) اگر ایک حال  $\psi_5$  ایک حال  $\psi_7$  اور ایک حال  $\psi_{17}$  میں ہو۔

سوال ۵.۲۳: فرض کریں ایک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں آپ کے پاس تین باہم غیر متعامل ذرات، حراری توازن میں پائے جاتے ہوں، جن کی کل توانائی  $E = \frac{9}{2} \hbar \omega$  ہے۔

ا. اگر یہ (ایک جیسی کیت کے) متماثل میسر ذرات ہوں تب انکی تعداد مکین کی کتنی تھیلاٹ ہوں گی اور ہر ایک کے لئے کتنے منفرد (تین ذروی) حالات ہوں گے؟ سب سے زیادہ محتمل تفکیک کیا ہوگی؟ اگر آپ ایک ذرہ بلا منصوب منتخب کر کے اسکی توانائی کی پیشانہ کریں تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر ایک کا احتمال کیا ہوگا؟ سب سے زیادہ محتمل توانائی کیا ہوگی؟

ب. یہی کچھ متماثل فرمیان کے لئے کریں (چپکر کو نظر انداز کریں جیسا ہم نے حصہ ۵.۴.۱ میں کیا)۔  
ج. یہی کچھ (چپکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) متماثل بوسن کے لئے کریں۔

## ۵.۴.۲ عمومی صورت

اب ایک ایسے اختیاری مخفیہ پر غور کرتے ہیں جس کی ایک ذروی توانائیاں  $E_1, E_2, E_3, \dots$  اور انحطاط  $d_1, d_2, \dots, d_3$  ہوں (یعنی توانائی  $E_n$  کے  $d_n$  منفرد ذروی حالات ہیں)۔ فرض کریں ہم (ایک جیسی کیت کے)  $N$  ذرات کو اس مخفیہ میں رکھتے ہیں، ہم تفکیک  $(N_1, N_2, N_3, \dots)$  میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں  $N_1$  ذرات کی توانائی  $E_1$ ،  $N_2$  ذرات کی توانائی  $E_2$ ، وغیرہ ہوگی۔ سوال: ایسا کتنے مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ اس مخصوص تفکیک کے مطابق کتنے منفرد حالات ہوں گے)؟ اس کے جواب  $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$  کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا ذرات متماثل میسر، متماثل فرمیان، یا متماثل بوسن ہیں، لہذا ہم ان تین صورتوں پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔

ہم پہلے یہ فرض کرتے ہیں کہ ذرات متماثل میسر ہیں۔ دستیاب کل  $N$  ذرات میں سے کتنے طریقوں سے  $N_1$  منتخب کر کے پہلے ”نو کرے“ میں رکھے جاسکتے ہیں؟ جواب: **مثالی عدد** سر ۳:

$$(5.43) \quad \binom{N}{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

$N_1$  کو  $N$  میں سے منتخب کرتا ہے۔ پہلا ذرہ  $N$  مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے، جس کے بعد  $(N - 1)$  ذرات رہ جاتے ہیں لہذا دوسرے ذرے کے انتخاب کے  $N - 1$  مختلف طریقے ہوں گے،

binomial coefficient<sup>۳۳</sup>

وغیرہ۔

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-N_1+1) = \frac{N!}{(N-N_1)!}$$

لیکن یہ  $N_1$  ذرات کے  $N_1!$  مختلف مرتب اجتماعات کو علیحدہ علیحدہ گنتا ہے جبکہ ہمیں اس سے کوئی دلچسپی نہیں کے عدد 37 کو پہلے انتخاب میں یا 29 ویں انتخاب میں منتخب کیا گیا؛ لہذا ہم  $N_1!$  سے تقسیم کرتے ہیں جس سے مساوات ۵.۷۳ حاصل ہوتا ہے۔ اب پہلے ٹوکرے کے اندر ان  $N_1$  ذرات کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے؟ چونکہ پہلے ٹوکرے میں  $d_1$  حالات ہیں لہذا ہر ایک ذرے کو  $d_1$  مختلف طریقوں سے چننا جاسکتا ہے؛ یوں کل ممکنات  $(d_1)^{N_1}$  ہوں گے۔ اس طرح ایک ٹوکرہ، جس میں  $d_1$  منفرد حق انتخاب ہوں، میں کل آبادی  $N$  میں سے  $N_1$  ذرات منتخب کر کے رکھنے کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!}$$

دوسرے ٹوکرے میں صرف  $(N-N_1)$  ذرات ہونے کے علاوہ بالکل ایسا ہی ہوگا:

$$\frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!}$$

وغیرہ وغیرہ۔ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} Q(N_1, N_2, N_3, \dots) &= \frac{N!d_1^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!} \frac{(N-N_1)!d_2^{N_2}}{N_2!(N-N_1-N_2)!} \frac{(N-N_1-N_2)!d_3^{N_3}}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!} \dots \\ (5.73) \quad &= N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} d_3^{N_3} \dots}{N_1! N_2! N_3! \dots} = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!} \end{aligned}$$

(یہاں رک کر حصہ ۵.۴ میں دیے گئے مثال کے لئے اس نتیجے کی تصدیق کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)

متماثل مندرمیان کے لئے یہ مسئلہ نسبتاً بہت آسان ہے۔ چونکہ یہ غیر ممیز ہیں لہذا اس سے کوئی منسحق نہیں پڑتا کہ کون سے ذرات کن حالات میں ہیں؛ ضرورت خلاف تشاکلیت کے تحت ایک مخصوص یک ذروی حالات کے سلسلہ کو بھرنے کے لئے صرف ایک  $N$  ذروی حال ہوگا۔ مزید واحد ایک ذرہ کسی ایک حال کو بھر سکتا ہے۔ لہذا  $n$  ویں ٹوکرہ میں  $N_n$  بھرے حالات کو منتخب کرنے کے

$$\binom{d_n}{N_n}$$

طریقہ ۶۴ جو گئے۔ اس طرح درج ذیل ہوگا

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!} \quad (5.45)$$

(اس کی تصدیق حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)۔

متشائل بوسن کے لیے یہ حساب سب سے مشکل ہوگا۔ یہاں ضرورت تشاکلیت کے تحت ایک ذروی حالات کے ایک مخصوص سلسلہ کو بھرنے کا صرف ایک  $N$  ذروی حال ہوگا، تاہم اس مرتبہ ایک ذروی حال کو بھرنے کے لئے ذرات کی تعداد پر پابندی عائد نہیں ہوگی۔ یہاں  $n$  ویں نوکرے کیلئے سوال یہ ہوگا: ہم متشائل  $N_n$  ذرات کو  $d_n$  مختلف خانوں میں کس طرح رکھ سکتے ہیں؟ غیر مرتبہ اجتماعات کے اس سوال کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ ایک دلچسپ طریقہ درج ذیل ہے: ہم ذرہ کو نقطہ اور خانوں کو صلیب سے ظاہر کرتے ہیں؛ یوں مثال کے طور پر،  $d_n = 5$  اور  $N_n = 7$  کی صورت میں

$$\bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad \bullet \quad \times$$

یہ ظاہر کرے گا کہ پہلے حال میں دو ذرات، دوسرے حال میں ایک ذرہ، تیسرے میں تین، چوتھے میں ایک، اور پانچویں میں کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا۔ دھیان رہے کہ نقطوں کی تعداد  $N_n$  اور صلیبوں کی تعداد  $d_n - 1$  ہے (جو ان نقطوں کو  $d_n$  گروہ میں خانہ بند کرتے ہیں)۔ اگر ان انفرادی نقطوں اور صلیبوں کو نام دیے جاتے تب انہیں  $(N_n + d_n - 1)!$  مختلف طریقوں سے رکھا جاسکتا تھا۔ تاہم ہمارے لئے تمام نقطے ایک جیسے ہیں؛ اور ان کو  $(N_n!)$  مختلف) مرتبہ اجتماعات کی صورت میں لکھنے سے حال تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح تمام صلیب معادل ہیں اور انہیں  $(d_n - 1)!$  مختلف) مرتبہ اجتماعات لکھنے سے کچھ بھی تبدیل نہیں ہوگا۔ یوں  $N$  ویں نوکرے میں  $d_n$  ایک ذروی حالات کو  $N_n$  ذرات مختص کرنے کے درج ذیل مندر طریقہ ہو گئے

$$\frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} = \binom{N_n + d_n - 1}{N_n} \quad (5.46)$$

جس کی بنا پر ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!} \quad (5.47)$$

(اس کی تصدیق حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے کریں۔ سوال ۵.۲۴ دیکھیں)۔

سوال ۵.۲۴: حصہ ۵.۴.۱ میں دیے گئے مثال کے لئے مساوات ۵.۴۵ اور مساوات ۵.۴۷ کی تصدیق کریں۔

سوال ۵.۲۵: مساوات ۵.۴۶ کو الگراچی ماخوذ کی مدد سے حاصل کریں۔ غیر مرتبہ اجتماعات کا سوال درج ذیل ہوگا: آپ  $d$  نوکریوں میں  $N$  متشائل گیسندوں کو کتنے مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں (یہاں زیر نوشتہ میں

<sup>۶۴</sup> ظاہر ہے کہ  $N_n > d_n$  کی صورت میں یہ مندر ہوگا، جو منفی عدد صحیح کے عدد ضربیہ کو لامتناہی تصور کرنے سے ہوگا۔

$n$  کو نظر انداز کریں؟ آپ تمام کے تمام  $N$  کو تیسرے ٹوکرے میں رکھ سکتے تھے، یا ایک کو پانچویں اور باقیوں کو دوسرے ٹوکرے میں، یا دو کو پہلے اور تین کو تیسرے ٹوکرے میں اور باقی کو ساتویں ٹوکرے میں، وغیرہ، رکھ سکتے تھے۔ اس کو صریحاً  $N = 1$ ،  $N = 2$ ،  $N = 3$ ، اور  $N = 4$  کے لئے حاصل کریں؛ یہاں تک پہنچ کر آپ عمومی کلیہ اخذ کر پائیں گے۔

### ۵.۴.۳ سب سے زیادہ محتمل تشکیل

حراری توازن میں ہر وہ حال جس کی کل توانائی  $E$  اور ذروی عدد  $N$  ہو ایک جتنا محتمل ہو گا۔ یوں سب سے زیادہ محتمل تشکیل  $N_1, N_2, N_3, \dots$  وہ ہو گا جس کو سب سے زیادہ مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہو؛ یہ وہ مخصوص تشکیل ہو گی جو جس کے لئے

$$(۵.۷۸) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$$

اور

$$(۵.۷۹) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E$$

پر پورا اترے ہوئے  $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$  کی قیمت اعظم ہو۔

زیر شرائط  $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ،  $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ، وغیرہ، متعدد متغیرات کے ایک تفاعل  $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  کی اعظم قیمت لگرائج مضرب<sup>۱۵</sup> کی ترکیب سے با آسانی حاصل ہوتی ہے۔ ہم ایک نیا تفاعل

$$(۵.۸۰) \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

متعارف کر کے اس کے تمام تصرفات کو مضرب کے برابر رکھتے ہیں

$$(۵.۸۱) \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0$$

موجودہ صورت میں  $Q$  کی بجائے  $Q$  کے لوگار تھم کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے؛ جو حاصل ضرب کو مجموعہ میں تبدیل کرتا ہے۔ چونکہ لوگار تھم اپنے دلیل کا یکسر تفاعل ہے، لہذا  $Q$  کی اعظم قیمت اور  $\ln(Q)$  کی اعظم قیمت ایک ہی نقطے پر پائی جائیں گی۔ لہذا تفاعل  $Q$  کے لئے ہم مساوات ۵.۸۰ میں  $Q$  کی بجائے  $\ln(Q)$  لکھتے ہیں:

$$(۵.۸۲) \quad G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  لگرائنج مضرب ( $\lambda_1$  اور  $\lambda_2$ ) ہیں (اور چونکہ کورقوسین مساوات ۵.۷۸ اور مساوات ۵.۷۹ میں دیے گئے شرط ہیں)۔  $\alpha$  اور  $\beta$  کے لحاظ سے تفرقات کو صفر کے برابر رکھنے سے محض (مساوات ۵.۷۸ اور مساوات ۵.۷۹ میں دی گئے) پابندیاں دوبارہ حاصل ہوتی ہیں؛ یوں  $N_n$  کے لحاظ سے تفرق کو صفر کے برابر رکھنا باقی ہے۔

اگر ذرات متماثل میز ہوں، تب مساوات ۵.۷۴ ہمیں  $Q$  دے گی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] \quad (۵.۸۳)$$

$$+ \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

ہم متعلقہ تعداد مکین ( $N_n$ ) کو بہت بڑا تصور کرتے ہوئے سٹرلنگ تقریب<sup>۲۶</sup>:

$$\ln(z!) \approx z \ln(z) - z \quad z \ll 1 \quad (۵.۸۴)$$

بروئے کار لاتے ہوئے<sup>۲۷</sup> درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta E_n N_n] \quad (۵.۸۵)$$

$$+ \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n \quad (۵.۸۶)$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر  $N_n$  کے لیے حل کرتے ہوئے ہم متماثل میز ذرات کی سب سے زیادہ محتمل تعداد مکین کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)} \quad (۵.۸۷)$$

<sup>۲۶</sup> Stirling's approximation

سٹرلنگ قسمل کے مزید اجزاء مفصل کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمینہ کو مزید بہتر بنایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری ضرورت اولین دو اجزاء لینے سے پوری ہو جاتی ہے۔ اگر حصہ ۵.۴.۱ کی طرح، متعلقہ تعداد مکین بہت زیادہ نہ ہوں، تب شماریاتی میکانیات کارآمد نہیں ہو گی۔ یہاں ہمارا مقصد یہی ہے کہ تعداد اتنی زیادہ ہو کہ شماریاتی پیش گوئی متماثل اعتماد ہو۔ یقیناً ایسے ایک ذروی حالات ضرور ہوں گے جن کی توانائی انتہائی زیادہ ہوگی اور جو بھسرے نہیں ہوں گے؛ ہماری خوش قسمتی ہے کہ سٹرلنگ تخمینہ  $z = 0$  کے لئے بھی کارآمد ہے۔ میں نے لفظ ”متعلقہ“ استعمال کرتے ہوئے ان غیر مطلوب حالات کو شامل نہیں کیا ہے جو حاشیہ پر رہتے ہوں اور جن کے لئے  $N_n$  نہ تو بہت زیادہ ہو اور نہ ہی صفر ہو۔

اگر ذرات متماثل منبر میان ہوں تب  $Q$  کی قیمت مساوات ۵.۷۷ دیگی لہذا درج ذیل ہوگا

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} \quad (5.88)$$

$$+ \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں ہم  $N_n$  کی قیمت بہت بڑی تصور کرنے کے ساتھ ساتھ  $d_n \gg N_n$  بھی فرض کرتے ہیں لہذا سٹرلنگ تخمینہ دونوں اجزاء کے لیے قابل استعمال ہوگی۔ ایسی صورت میں

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) \right. \quad (5.89)$$

$$\left. + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta E_n N_n \right] + \alpha N + \beta E$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n - N_n) - \alpha - \beta E_n \quad (5.90)$$

اس کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے  $N_n$  کے لیے حل کر کے ہم متماثل منبر میان کی تعداد مکینوں کی سب سے زیادہ ممکن تعداد مکین  $N_n$  کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} + 1} \quad (5.91)$$

آخر میں اگر ذرات متماثل بوسن ہوں تب  $Q$  کی قیمت مساوات ۵.۷۷ دیگی اور درج ذیل ہوگا۔

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln[(d_n!)] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} \quad (5.92)$$

$$+ \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

یہاں بھی ہمیشہ کی طرح  $1 \gg N_n$  فرض کرتے ہوئے سٹرلنگ تخمینہ استعمال کرتے ہوئے

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} \{ (N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) \} \quad (5.93)$$

$$+ N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha N_n - \beta E_n N_n \} + \alpha N + \beta E$$

<sup>۱۸</sup> ایک بُعد میں توانائیاں غیر انعطافی ہوں گی (سوال ۲.۴۵ دیکھیں)، لیکن تین ابعاد میں  $n$  بڑھنے سے  $d_n$  معمولاً بہت تیزی سے بڑھتا ہے (مثلاً، ہائیڈروجن کے لئے  $d_n = n^2$  ہے)۔ یوں زیادہ تر بھڑے حالات کے لئے  $1 \gg d_n$  فرض کرنا غیر معقول نہیں ہوگا۔ اس کے برعکس، مطلق صفر درجہ حرارت کے قریب،  $d_n$  کی قیمت کسی صورت بھی  $N_n$  سے بہت زیادہ نہیں ہوگی، منبری سطح تک تمام حالات بھڑے ہوں گے لہذا  $d_n = N_n$  ہوگا۔ یہاں بھی ہمیں یہ حقیقت مدد کرنی ہے کہ سٹرلنگ کلیب  $z = 0$  کے لئے کارآمد ہے۔



لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۵.۹۴) \quad \frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n$$

اس کو صفر کے برابر رکھ کر  $N_n$  کے لئے حل کرتے ہوئے ہم متبذل بوسن کی تعداد مکینوں کی سب سے زیادہ محتمل قیمتیں تلاش کرتے ہیں۔

$$(۵.۹۵) \quad N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$$

(مشرمیان کے لئے مستعمل تخمین کے ساتھ شبات کی خاطر شمار کنندہ میں 1 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے؛ میں یہاں سے آگے ایسا ہی کروں گا۔)

سوال ۵.۲۶:  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  کے اندر سب سے بڑے رقبے کا ایسا مستطیل جس کے اضلاع محور کے متوازی ہوں، لگرائج مضرب کی ترکیب سے تلاش کریں۔ یہ اعظم رقبہ کتنے ہوگا؟

سوال ۵.۲۷:

۱.  $z = 10$  کے لیے سٹرلنگ تخمین میں فی صد سہو کتنی ہوگی؟

ب. سہو کو ایک فی صد سے کم رکھنے کیلئے عدد صحیح  $z$  کی اقل قیمت کیا ہوگی؟

### ۵.۴.۴ $\alpha$ اور $\beta$ کی طبعی اہمیت

لگرائج مضرب کی کہانی میں ذرات کی کل تعداد اور کل توانائی سے بالترتیب منسلک مقدار معلوم  $\alpha$  اور  $\beta$  پائے گئے۔ ریاضیاتی طور پر تعداد مکین (ساوات ۵.۸۷، ساوات ۵.۹۱، اور ساوات ۵.۹۵) کو واپس ملط شرائط (ساوات ۵.۷۸ اور ساوات ۵.۷۹) میں پر کرتے ہوئے انہیں تعیین کیا جاتا ہے۔ البتہ کسی مخفیہ کے لیے مجموعہ کے حصول کے لئے ہمیں احبازتی توانائیاں ( $E_n$ ) اور ان کی انحطاط ( $d_n$ ) کا معلوم ہونا ضروری ہے۔ میں سہ ابعادی لامتناہی چوکور کنویں میں ایک جتنی کیت کی بہت بڑی تعداد کے باہم غیر متعامل ذرات کی کامل گلیں<sup>۶۹</sup> کی مثال لیتے ہوئے آپ کو اس ترکیب سے متعارف کرتا ہوں۔ اس سے ہم پر  $\alpha$  اور  $\alpha$  کی طبعی مفہوم عیاں ہوگی۔

ہم نے حصہ ۵.۳.۱ میں احبازتی توانائیاں (ساوات ۵.۳۹):

$$(۵.۹۶) \quad E_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

اخذکیں جہاں درج ذیل ہوتا۔

$$k = \left( \frac{\pi n_x}{\ell_x}, \frac{\pi n_y}{\ell_y}, \frac{\pi n_z}{\ell_z} \right)$$

پہلے کی طرح، یہاں بھی ہم مجموعہ کو مکمل میں بدل لیتے ہیں، جہاں  $k$  ایک استمراری متغیر ہے، اور جہاں  $k$  فضا کے  $\pi^3/V$  حجم میں ایک حال (یا، چکر  $s$  کی صورت میں،  $2s + 1$  حالات) پائے جاتے ہیں۔ منٹن اول میں کردی خولوں کو ”ٹوکریاں“ تصور کرتے ہوئے (شکل ۵.۴، دیکھیں) ”خطا“ (یعنی ہر ٹوکریے میں حالات کی تعداد) درج ذیل ہوگی۔

$$d_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{8(\pi^3/V)} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad (۵.۹۷)$$

متماثل ممیز ذرات (مساوات ۵.۸۷) کیلئے پہلی عائد پابندی (مساوات ۵.۷۸) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^2 dk = V e^{-\alpha} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \left( \frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \quad (۵.۹۸)$$

دوسری عائد شرط (مساوات ۵.۷۹) درج ذیل کہتی ہے

$$E = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^4 dk = \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$

جس میں مساوات ۵.۹۸ سے  $e^{-\alpha}$  پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$E = \frac{3N}{2\beta} \quad (۵.۹۹)$$

(اگر آپ مساوات ۵.۹۷ میں چکری جزو ضربی،  $2s + 1$ ، شامل کرتے تو وہ یہاں پہنچ کر حذف ہو جاتا ہے، لہذا مساوات ۵.۹۹ تمام چکر کے لیے درست ہوگی۔)

یہ نتیجہ (مساوات ۵.۹۹) ہمیں درج حرارت  $T$  پر ایک جوہر کی اوسط حرکی توانائی کے کلاسیکی کلیہ:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (۵.۱۰۰)$$

کی یاد دلاتی ہے، جہاں  $k_B$  بولٹزمن مستقل ہے۔ یہ ہمیں  $\beta$  اور حرارت کے درمیان درج ذیل تعلق پر آمادہ کرتا ہے۔

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (۵.۱۰۱)$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ تعلق صرف تین ابعادی لامتناہی چوکور کنویں میں موجود ممیز ذرات کے لئے نہیں بلکہ عمومی نتیجہ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ، مختلف اشیاء کے لئے، جو ایک دوسرے کے ساتھ حراری توازن میں ہوں،

$\beta$  کی قیمت ایک جیسی ہے۔ یہ دلیل کئی کتابوں میں پیش کی گئی ہے، جس کو میں یہاں پیش نہیں کروں گا؛ بلکہ میں مساوات ۵.۱۰۱ کو  $T$  کی تعریف مان لیتا ہوں۔

روایتی طور پر  $\alpha$  (جو مساوات ۵.۹۸ کی خصوصی صورت سے ظاہر ہے کہ  $T$  کا تعادل ہے) کی جگہ کیمیاوی محفّیہ<sup>۴۰</sup>:

$$\mu(T) \equiv -\alpha k_B T \quad (۵.۱۰۲)$$

استعمال کر کے مساوات ۵.۸، مساوات ۵.۹۱، اور مساوات ۵.۹۵ کو دوبارہ یوں لکھا جاتا ہے کہ یہ توانائی  $\epsilon$  کے کسی ایک مخصوص (یک ذروی) حال میں ذرات کی سب سے زیادہ محتمل عدد دے (کسی ایک توانائی کے حاصل ذرات کی تعداد سے اس توانائی کے حاصل کسی مخصوص حال میں ذرات کی تعداد حاصل کرنے کے حنطرہ صرف اس حال کے انحطاط سے تقسیم کرنا ہوگا)۔

$$n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} & \text{میکسویل بولٹزمن} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} & \text{فسرمی وڈیراک} \\ \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} & \text{بوس و آئنسٹائن} \end{cases} \quad (۵.۱۰۳)$$

متابل میسز ذرات پر میکسویل بولٹزمن تقسیم<sup>۴۱</sup>، متابل فسرمیان پر فرمی وڈیراک تقسیم<sup>۴۲</sup> اور متابل بوسن پر بوس و آئنسٹائن تقسیم<sup>۴۳</sup> کا اطلاق ہوگا۔

فسرمی وڈیراک تقسیم  $T \rightarrow 0$  کے لئے خصوصی طور پر سادہ رویہ رکھتی ہے:

$$e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} \rightarrow \begin{cases} 0, & \epsilon < \mu(0) \\ \infty, & \epsilon > \mu(0) \end{cases}$$

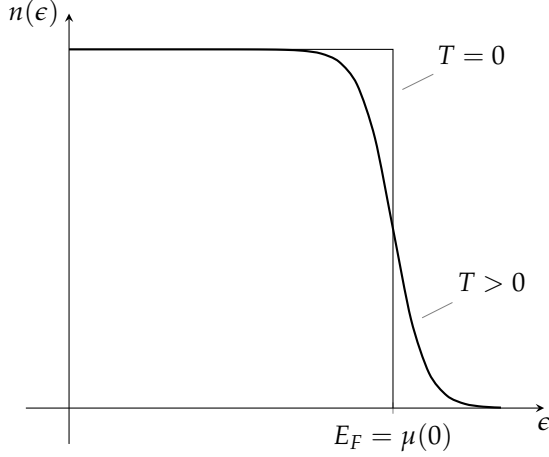
لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \epsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (۵.۱۰۴)$$

توانائی  $\mu(0)$  تک تمام حالات بھرے ہوں گے جبکہ اس سے زیادہ توانائی کے تمام حالات خالی ہوں گے (شکل ۵.۸)۔ ظاہر ہے کہ مطلق صفر حرارت پر کیمیاوی محفّیہ عین فسرمی توانائی ہوگی۔

$$\mu(0) = E_F \quad (۵.۱۰۵)$$

<sup>۴۰</sup> chemical potential  
<sup>۴۱</sup> Maxwell-Boltzmann distribution  
<sup>۴۲</sup> Fermi-Dirac distribution  
<sup>۴۳</sup> Bose-Einstein distribution



شکل ۵.۸: فیرمی وڈیراک تقسیم برائے  $T = 0$  اور صفر سے کچھ زیادہ  $T$  کے لئے۔

درج حرارت بڑھنے سے بھرے حالات اور خالی حالات کے بیچ غیر استمراری سرحد کو فیرمی وڈیراک تقسیم استمراری بناتا ہے، جو شکل ۵.۸ میں دائری منحنی سے ظاہر ہے۔

ہم متابل ممیز ذرات کی کامل گیس کی مثال پر دوبارہ لوٹتے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ حرارت  $T$  پر کل توانائی (مساوات ۵.۹۹) درج ذیل ہوگی

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \quad (۵.۱۰۶)$$

جبکہ (مساوات ۵.۹۸ کے تحت) کیمیائی پختہ درج ذیل ہوگا۔

$$\mu(T) = k_B T \left[ \ln \left( \frac{N}{V} \right) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right) \right] \quad (۵.۱۰۷)$$

میں مساوات ۵.۸۷ کی بجائے مساوات ۵.۹۱ اور مساوات ۵.۹۵ استعمال کرتے ہوئے متمثل فیرمیان اور متمثل بوسن کے کامل گیس کے لئے مطابقتی کلیات حاصل کرنا چاہوں گا۔ پہلی عائد پابندی (مساوات ۵.۷۸) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{[(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu] / k_B T} \pm 1} dk \quad (۵.۱۰۸)$$

جہاں مثبت علامت فیرمیان کو اور منفی علامت بوسن کو ظاہر کرتی ہے دوسری عائد پابندی (مساوات

۵.۷۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$E = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \frac{k^4}{e^{[(\hbar^2 k^2 / 2m) - \mu] / k_B T} \pm 1} dk \quad (5.109)$$

ان میں سے پہلی  $\mu(T)$  اور دوسری  $E(T)$  تعین کرتی ہے (موخر الذکر سے، مثلاً، ہم مخصوص حراری استعداد  $C = \partial E / \partial T$  حاصل کرتے ہیں)۔ بد قسمتی سے ان عملات کو بنیادی تفاعلات کی صورت میں حل کرنا ممکن نہیں ہے اور میں انہیں آپ کے لئے غور کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں (سوال ۵.۲۸ اور سوال ۵.۲۹ دیکھیں)۔

سوال ۵.۲۸: مطلق صفر درجہ حرارت پر متناثر مندرمیان کے لیے ان عملات (مساوات ۵.۱۰۸ اور مساوات ۵.۱۰۹) کی قیمتیں حاصل کریں۔ اپنے نتائج کا موازنہ مساوات ۵.۲۳ اور مساوات ۵.۴۵ کے ساتھ کریں۔ (دھیان رہے کہ مساوات ۵.۱۰۸ اور مساوات ۵.۱۰۹ میں الیکٹرانوں کے لیے 2 اضافی جزو ضربی پایا جاتا ہے جو چپکری انحطاط کو ظاہر کرتا ہے)۔

سوال ۵.۲۹:

۱. بوسن کے لیے دکھائیں کہ کیسے ہر صورت میں اتل احبازی توانائی سے کم ہوگا۔ اشارہ:  $n(\epsilon)$  منفی نہیں ہو سکتا ہے۔

ب. بالخصوص تمام  $T$  کے لیے، کامل بوس گیس کے لیے  $\mu(T) < 0$  ہوگا۔ ایسی صورت میں  $N$  اور  $V$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے دکھائیں کہ  $T$  کم کرنے سے  $\mu(T)$  یکسر بڑھے گا۔ اشارہ: منفی علامت لیتے ہوئے مساوات ۵.۱۰۸ پر غور کریں۔

ج. حرارت  $T$  کم کرتے ہوئے اس وقت ایک بحران (جسے بوسہ انجماد<sup>۴</sup> کہتے ہیں) پیدا ہوتا ہے جب  $\mu(T)$  صفر کو پہنچتا ہے۔ عمل کی قیمت،  $\mu = 0$  کے لیے، حاصل کرتے ہوئے اس فنصل حرارت کا کلیہ اخذ کریں جس پر ایسا ہوگا۔ اس فنصل حرارت سے نیچے ذرات زمینی حال میں جمع ہو جائیں گے لہذا غیر مسلسل مجموعہ (مساوات ۵.۷۸) کی جگہ استمراری عمل (مساوات ۵.۱۰۸) کا استعمال بے معنی ہو جائے گا۔ اشارہ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s) \quad (5.110)$$

جہاں  $\Gamma$  کو یولر کا گاما تفاعل<sup>۵</sup> اور  $\zeta$  کو ریمان زیتا تفاعل<sup>۶</sup> کہتے ہیں۔ ان کی موزوں اعدادی قیمتیں جدول سے دیکھیں۔

د. ہیلیم  $^4\text{He}$  کی حرارت فنصل تلاش کریں۔ اس درجہ حرارت پر اس کی کثافت  $0.15 \text{ g cm}^{-3}$  ہوگی۔ تبصرہ: ہیلیم کی تجرباتی فنصل حرارت کی قیمت  $2.17 \text{ K}$  ہے۔

<sup>۴</sup>Bose condensation

<sup>۵</sup>gamma function

<sup>۶</sup>Riemann zeta function

## ۵.۴.۵ سیاہ جسمی طیف

نور (برقناطیسی میدان کے کوانٹا) چکر 1 کے متناثر بوسن ہیں، تاہم یہ بے کیت ذرات لہذا حلقی طور پر اضافیتی ہیں۔ ہم درج ذیل چار دعوے، جو غیر اضافیتی کوانٹائی میکانیات کا حصہ نہیں ہیں، مقبول کر کے انہیں یہاں شامل کر سکتے ہیں۔

۱. نوریہ کی تعداد اور توانائی کا تعلق کلیہ پلانک  $E = hv = \hbar\omega$  دیتا ہے۔

۲. عدد موج  $k$  اور تعدد کا تعلق  $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$  ہے جہاں  $c$  روشنی کی رفتار ہے۔

۳. صرف دو چکر کی حالات ہو سکتے ہیں (کوانٹائی عدد  $m$  کی قیمت  $+1$  یا  $-1$  ہو سکتی ہے، تاہم یہ 0 نہیں ہو سکتی۔

۴. نوریہ کی تعداد بقائی مقدار نہیں ہے؛ درج حرارت بڑھانے سے (فی اکائی حجم) نوریہ کی تعداد بڑھتی ہے۔

حبزو 4 کی موجودگی میں، پہلی عائد پابندی (مساوات ۵.۷۸) کا اطلاق نہیں ہوگا۔ ہم مساوات ۵.۸۲ اور اس کے بعد آنے والی مساواتوں میں  $0 \rightarrow \alpha$  لے کر اس شرط کو ختم کر سکتے ہیں۔ یوں نوریہ کے لیے سب سے زیادہ محتمل تعداد ممکن (مساوات ۵.۹۵) درج ذیل ہوگی۔

$$(5.111) \quad N_\omega = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

ایک ڈبہ جس کا حجم  $V$  ہو، میں آزاد نوریہ کے لیے  $d_k$  کی قیمت، مساوات ۵.۹۷ کو چکر (حبزو 3) کی بنا پر 2 سے ضرب دے کر حاصل ہوگی، جس کو  $k$  (حبزو 2) کی بجائے  $\omega$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(5.112) \quad d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^3 d\omega$$

یوں تعددی سعت  $d\omega$  میں کثافت توانائی  $N_\omega \hbar\omega / V$  کی قیمت  $\rho(\omega) d\omega$  ہوگی جہاں  $\rho\omega$  درج ذیل ہے۔

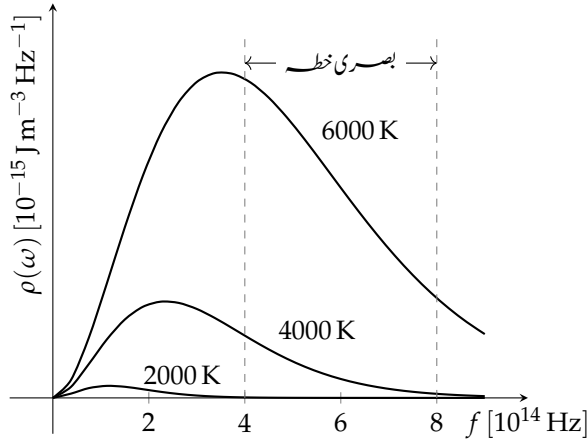
$$(5.113) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

یہ سیاہ جسمی طیف<sup>۷۸</sup> کے لئے پلانک کا مشہور کلیہ ہے جو برقناطیسی میدان کی، حرارت  $T$  پر توازن کی صورت میں، فی اکائی حجم فی اکائی تعدد، توانائی دیتا ہے۔ اس کو تین مختلف حرارتوں پر شکل ۵.۹ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۰:

۱. مساوات ۵.۱۱۳ استعمال کرتے ہوئے طول موج کی سعت  $d\lambda$  میں کثافت توانائی تعیین کریں۔ اشارہ:  $\rho(\omega) d\omega = \bar{\rho}(\lambda) d\lambda$  کے لیے حل کریں۔

<sup>۷۸</sup>درحقیقت ہمیں اس کلیہ سے کچھ لینا دینا نہیں چونکہ یہ (غیر اضافیتی) مساوات شہرڈنگر سے حاصل ہوا؛ خوش قسمتی سے اضافیتی صورت میں بھی انحطاط ٹھیک یہی ہے۔  
blackbody spectrum<sup>۷۸</sup>



شکل ۵.۹: سیاہ جسمی اخراج کے لئے کلیہ پلانک، مساوات ۵.۱۱۳۔

ب۔ اس طول موج کے لئے، جس پر سیاہ جسمی کثافت توانائی اعظم ہو، وائٹز قانون<sup>۹</sup> ہٹاؤ:

$$\lambda_{\text{عظم}} = \frac{2.90 \times 10^{-3} \text{ mK}}{T} \quad (۵.۱۱۴)$$

اخذ کریں۔ اشارہ: آپ کو کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی استعمال سے مساوات  $5e^{-x} = (5 - x)$  حل کرتے ہوئے ہندسوں تک اعدادی جواب حاصل کرنا ہوگا۔

سوال ۵.۳۱: سیاہ جسمی اخراج میں کل کثافت توانائی کا سٹیفن بولٹزمنز<sup>۱۰</sup> کلیہ:

$$\frac{E}{V} = \left( \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4 = (7.57 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}) T^4 \quad (۵.۱۱۵)$$

اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۵.۱۱۰ استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ یاد رہے کہ  $\pi^4/90 = 4.07$  ہوگا۔

### اضافی سوالات برائے باب ۵

سوال ۵.۳۲: فرض کریں ایک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ (مساوات ۲.۴۳) میں کمیت  $m$  کے دو غیر متعامل ذرات پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں ان میں سے ایک زمینی حال اور دوسرا پہلے ہیجہن حال میں پایا جاتا ہے۔ درج ذیل صورتوں میں  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$  کا حساب کریں۔ (الف) ذرات متبادل ممیز ہیں، (ب) یہ متماثل

<sup>۹</sup> Wien displacement law  
<sup>۱۰</sup> Stefan-Boltzmann formula

بوسن ہیں، (ج) یہ متماثل منرمیان ہیں۔ چپکر کو نظر انداز کریں (اگر آپ ایسا نہیں کرنا چاہتے تو دونوں کو ایک ہی چپکری حال میں تصور کریں)۔

سوال ۵.۳۳: فرض کریں آپ کے پاس تین ذرات اور تین منفرد یک ذروی حالات  $(\psi_a(x), \psi_b(x))$  اور  $(\psi_c(x))$  دستیاب ہیں۔ درج ذیل صورتوں میں کتنے (مختلف) تین ذروی حالات تیار کیے جاسکتے ہیں؟ (الف) ذرات قابل ممیز ہیں، (ب) یہ متماثل بوسن ہیں، (ج) یہ متماثل منرمیان ہیں۔ (ضروری نہیں کہ ذرات مختلف حالات میں ہوں؛ قابل ممیز ذرات کی صورت میں  $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$  ایک ممکن صورت ہو سکتا ہے۔)

سوال ۵.۳۴: دو ابعادی لامتناہی چوکور کنویں میں غیر متعادل الیکٹرانوں کی مندرجہ ذیل توانائی کا حساب کریں۔ فی اکائی رقبہ آزاد الیکٹرانوں کی تعداد  $\sigma$  لیں۔

سوال ۵.۳۵: ایک مخصوص قسم کے سرد ستارے (جنہیں سفید بونا<sup>۱</sup> کہتے ہیں) کو تجاذبی انہدام سے الیکٹرانوں کی انحطاطی دباؤ (مساوات ۵.۴۶) روکتا ہے۔ متقل کشاف فرض کرتے ہوئے، ایسے جسم کا رداس  $R$  درج ذیل طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔

ا. کل الیکٹران توانائی (مساوات ۵.۴۵) کو رداس، مرکزویہ (پروٹان جمع نیوٹران) کی تعداد  $N$ ، فی مرکزویہ الیکٹران کی تعداد  $q$ ، اور الیکٹران کی کیت  $m$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. یکساں کشاف کے کرہ کی تجاذبی توانائی تلاش کریں۔ اپنے جواب کو (عالمگیر تجاذبی مستقل)  $G$ ،  $R$ ،  $N$ ، اور (ایک مرکزویہ کی کیت)  $M$  کی صورت میں لکھیں۔ یاد رہے کہ تجاذبی توانائی منفی ہے۔

ج. وہ رداس معلوم کریں جس پر حبزو-الف اور حبزو-ب کی مجموعی توانائی متل ہو۔ جواب:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 q^{5/3}}{GmM^2 N^{1/3}}$$

(کل کیت بڑھنے سے رداس گھٹتا ہے!) مساوائے  $N$  کے، تمام متقلات کی قیمتیں پر کریں اور  $q = 1/2$  لیں (حقیقت میں، جوہری عدد بڑھنے سے  $q$  کی قیمت معمولی کم ہوتی ہے، لیکن ہمارے مقصد کے لئے یہ کافی ٹھیک ہے)۔ جواب:  $R = 7.6 \times 10^{25} N^{-1/3}$

د. سورج کے برابر کیت کے سفید بونا کا رداس، کلو میٹروں میں، دریافت کریں۔

ه. الیکٹران کی ساکن توانائی کے ساتھ، حبزو-د میں سفید بونا کی مندرجہ ذیل توانائی (الیکٹران وولٹ میں تعین کرتے ہوئے) کا موازنہ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ نظام اضافیت کے بہت قریب ہے (سوال ۵.۳۶ دیکھیں)۔

سوال ۵.۳۶: ہم کلاسیکی حرکی توانائی  $E = p^2/2m$  میں اضافیتی کلیہ  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$  پر کرتے ہوئے آزاد الیکٹران گیس نظریہ (حصہ ۵.۳.۱) کو اضافیتی دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔ معیار حرکت اور سمتیہ موج کا تعلق ہمیشہ کی طرح  $\hbar k = p$  ہوگا۔ بالخصوص انتہائی اضافیتی حد میں  $E \approx pc = \hbar ck$  ہوگا۔



ا. مساوات ۵.۴ میں  $\hbar^2 k^2 / 2m$  کی جگہ بالائے اضافیتی فکٹر،  $\hbar c k$ ، پر کر کے  $E$  حاصل کریں۔

ب. بالائے اضافیتی الیکٹران گیس کی صورت میں سوال ۵.۳۵ کے جزو-الف اور جزو-ب کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ،  $R$  سے قطع نظر، کوئی مستحکم اصل قیمت نہیں پائی جاتی؛ اگر کل توانائی مثبت ہو تب اخطائی قوتیں تجاذبی قوتوں سے تجاوز کرتی ہیں، جس کی بنا پر ستارہ پھولے گا، اس کے برعکس اگر کل توانائی منفی ہو تب تجاذبی قوتیں جیتی ہیں، جس کی بنا پر ستارہ منہدم ہوگا۔ مرکز ویب کی وہ فاصل تعداد،  $N_c$ ، معلوم کریں جس کے لیے  $N > N_c$  پر تجاذبی انہدام واقع ہوگا۔ اس کو چند **ٹیکھر** حد<sup>۸۲</sup> کہتے ہیں۔ جواب:  $2.4 \times 10^{57}$ ۔ مطابقتی ستارہ کی کیت کیا ہوگی (اپنے جواب کو سورج کی کیت کے مضرب کے صورت میں لکھیں)۔ اس سے بھاری ستارے سفید بونا نہیں بنتے، بلکہ مزید منہدم ہو کر (اگر حالات درست ہوں) نیوٹرائز ستارے<sup>۸۳</sup> بنتے ہیں۔

ج. انتہائی زیادہ کثافت پر، مخالفے **بیٹا تحلیل**<sup>۸۴</sup>،  $e^- + p^+ \rightarrow n + \nu$ ، تقریباً تمام پروٹان اور الیکٹران کو نیوٹران میں بدلتا ہے (جس کی بنا پر نیوٹرینو خارج ہوتے ہیں جو ساتھ توانائی لے کر جاتے ہیں)۔ آخر کار نیوٹران اخطائی دباؤ انہدام کو روکتا ہے، جیسا کہ سفید بونا میں الیکٹران اخطائی قوتیں کرتی ہیں (سوال ۵.۳۵ دیکھیں)۔ سورج کے برابر کیت کے نیوٹران ستارہ کا رداس تلاش کریں۔ ساتھ ہی (نیوٹران) مضرمی توانائی کا حساب کر کے، اس کا ساکن نیوٹران کی توانائی کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا نیوٹران ستارہ کو غیر اضافیتی تصور کیا جاسکتا ہے؟

سوال ۵.۳:

ا. تین البادی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ (سوال ۴.۳۸) میں متبادل میسوزرات کا کیپاوی مخفیہ اور کل توانائی تلاش کریں۔ اشارہ: یہاں مساوات ۵.۷۸ اور مساوات ۵.۷۹ میں دیے گئے مجموعوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک حاصل کی جاسکتی ہیں؛ ہمیں لامتناہی چوکور کنویں کی مثال میں مکمل کی تخمینی قیمت پر ہمیں گزارہ کرنا پڑا ہوتا ہے؛ یہاں ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہندسہ **تسلسل**<sup>۸۵</sup>

$$(۵.۱۱۶) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

کا تفرق لینے سے

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$$

حاصل ہوگا۔ اسی طرح بلند تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ جواب:

$$(۵.۱۱۷) \quad E = \frac{3}{2} N \hbar \omega \left( \frac{1 + e^{-\hbar \omega / k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}} \right)$$

Chandrasekhar limit<sup>۸۲</sup>  
neutron star<sup>۸۳</sup>  
inverse beta decay<sup>۸۴</sup>  
geometric series<sup>۸۵</sup>

ب. تحدیدی حد  $k_B T \ll \hbar \omega$  پر تبصرہ کریں۔

ج. مسئلہ مساوی خانہ بندی<sup>۸۶</sup> کی روشنی میں کلاسیکی حد  $k_B T \gg \hbar \omega$  پر تبصرہ کریں۔ تین ابعادی ہارمونی مرتعش میں ایک ذرے کے درجات آزادی<sup>۸۷</sup> کتنے ہوں گے؟

---

<sup>۸۶</sup> equipartition theorem  
<sup>۸۷</sup> degrees of freedom

## باب ۶

# غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

## ۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

### ۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت مساوات شروع کرتے ہیں:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات  $\psi_n^0$  کا مکمل سلسلہ

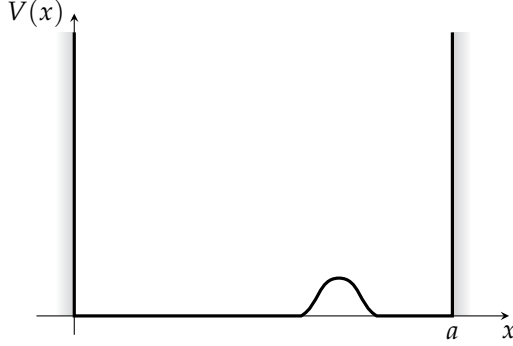
$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی قیمتیں  $E_n^0$  حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہ میں ایک چھوٹا موڑ اڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نے امتیازی تفاعلات اور امتیازی قیمتیں جاننا چاہیں گے

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم ہماری خوش قسمتی کے علاوہ ایسی کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروع نہ کر سکیں۔  
ٹھیک ٹھیک حل کر پائیں۔ نظریہ اضطراب، غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر،  
قدم بہ قدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے۔ ہم نے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ:

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

لکھ کر آغاز کرتے ہیں، جہاں  $H'$  اضطراب ہے (زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے)۔ ہم وقتی طور پر  $\lambda$  کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں؛ بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی، اور  $H$  اصل ہیملٹنی ہوگی۔ اگلے قدم میں، ہم  $\psi_n$  اور  $E_n$  کو  $\lambda$  کی وقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں  $n$  ویں امتیازی قیمت میں اول رتبہ تصحیح کو  $E_n^1$  ظاہر کرتا ہے جبکہ  $n$  ویں امتیازی تفاعل میں اول رتبہ تصحیح کو  $\psi_n^1$  ظاہر کرتا ہے؛ اسی طرح  $E_n^2$  اور  $\psi_n^2$  دوم رتبہ تصحیح ہوں گی، وغیرہ۔ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پُر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H') [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots) [\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا  $\lambda$  کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر (درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

کمتر رتبہ ( $\lambda^0$ ) کی صورت میں اس سے  $E_n^0 \psi_n^0 = H^0 \psi_n^0$  حاصل ہوتا ہے، جو نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱)۔ رتبہ اول ( $\lambda^1$ ) تک درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

ہمیشہ کی طرح، وقتی تسلسل پھیلاؤ کی یکتائی ضمانت دیتی ہے کہ ایک جسمی طاقت کے عددی سرا یک جتے ہوں گے۔

رتبہ دوم ( $\lambda^2$ ) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

وغیرہ۔ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے  $\lambda$  استعمال کیا؛ اب اس کی کوئی ضرورت نہیں لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں۔)

### ۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مسوات ۶.۷ کا  $\psi_n^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں (یعنی  $(\psi_n^0)^*$  سے ضرب دے کر حمل لیتے ہیں)۔

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم  $H^0$  ہر مشی ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا، جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا۔ مزید  $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$  کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔<sup>۲</sup>

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے؛ بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹائی میکانیات میں غالب سب سے اہم مساوات ہے۔ یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت، توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی۔

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کے غیر مضطرب تصاعلات موج (مساوات ۲.۲۸) درج ذیل ہیں۔

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی ”تہ“ (زمین) کو مستقل مقدار  $V_0$  اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں (شکل ۶.۲)۔ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں۔

حل: یہاں  $H' = V_0$  ہوگا لہذا  $n$  ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی۔

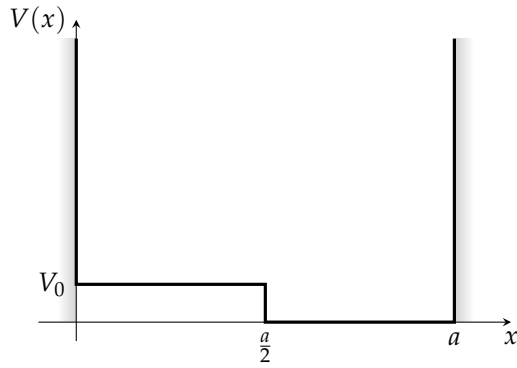
$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں  $E_n \cong E_n^0 + V_0$  ہوں گی؛ جی ہاں، تمام  $V_0$  مقدار اوپر اٹھتی ہیں۔ یہاں حیرانگی کی بات صرف یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی

<sup>۲</sup> موجودہ سیاق و سباق میں  $\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$  یا  $\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$  (جس میں اضافی انتہائی لکیر شامل کی گئی ہے) لکھنے میں کوئی منہر نہیں، چونکہ ہم حال کو تصحیح عمل موج کے لحاظ سے ”نام“ دیتے ہیں۔ لیکن مومنہ الذکر علامتی اظہار زیادہ بہتر ہے، چونکہ یہ ہمیں اس روایت سے آزاد کرتا ہے۔



شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی۔ اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت (شکل ۶.۳) میں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح  $\frac{V_0}{2}$  اوپر اٹھتی ہے۔ یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں، تاہم اول رتبی تخمین کے نقطہ نظر سے معقول ہے۔  
□

کیساں کوئی ٹیچسز لامستناہی چو کو رکنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے، البتہ اپنی کچھ کسی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا۔

مساوات ۶.۹ ہمیں توانائی کی اول رتبہ تصحیح دیتا ہے؛ تفاعل موج کے لئے اول رتبہ تصحیح حاصل کرنے کی ضرورت ہے ہم مساوات ۶.۷ کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \quad (۶.۱۰)$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے، لہذا یہ  $\psi_n^1$  کی غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہذا (کسی بھی تفاعل کی طرح)  $\psi_n^1$  کو ان کا خطی جوڑ:

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۱)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $\psi_n^1$  مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتے ہوں تب کسی بھی مستقل  $\alpha$  کے لیے  $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$  بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے، لہذا ہم جزو  $\psi_n^0$  کو منفی کر سکتے ہیں؛ ایسا ہی کرتے ہوئے مساوات ۶.۱۱ کے مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں کیا گیا۔ عددی سر  $c_m^{(n)}$  تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۶.۱۰ میں مساوات ۶.۱۱ پُر کرتے ہوئے، اور یہ جانے ہوئے کہ غیر مضطرب مساوات شرودنگر (مساوات ۶.۱) کو  $\psi_m^0$  مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا  $\psi_l^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر  $l = n$  ہو تب بایاں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات ۶.۹ ملتی ہے؛ اگر  $l \neq n$  ہو تو

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۲)$$

ہوگا، لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۳)$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو، نسب نہ کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے  $m = n$  نہیں ہوگا)۔ ہاں اگر دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک جتنی ہوں (مساوات ۶.۱۲ کے نسب نہ میں صفر پایا جائے گا) تب نسب نہ ہمیں مصیبت میں ڈالتا ہے؛ ایسی صورت میں انخطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی، جس پر حصہ ۶.۲ میں غور کیا جائے گا۔

یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے۔ توانائی کی اول رتبی تصحیح،  $E_n^1$ ، مساوات ۶.۹ دیتی ہے، اور تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح،  $\psi_n^1$ ، مساوات ۶.۱۳ دیتی ہے۔ میں آپ کو یہاں یہ ضرورت ناپا ہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی انتہائی درست قیمتیں دیتا ہے (یعنی  $E_n^0 + E_n^1$  اصل قیمت  $E_n$  کے بہت قریب ہوگی)، اس سے حاصل تفاعلات موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں۔

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں  $\delta$  تفاعلی موڑا:

$$H' = \alpha \delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ڈالتے ہیں، جہاں  $\alpha$  ایک مستقل ہے۔

ا. احبازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ بتائیں جفت  $n$  کی صورت میں توانائیاں کیوں مضطرب نہیں۔

ب. زمینی حال کی تصحیح،  $\psi_1^1$ ، کی اتساع (مساوات ۶.۱۳) کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش  $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$  کی احبازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں  $\omega = \sqrt{k/m}$  کلاسیکی تعدد ہے۔ اب فرض کریں مقیاس پلک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے:  $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$  (جس سے اسپرنگ کی پلک کم ہوگی)۔

ا. نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کریں (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک  $\epsilon$  کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں۔

ب. اب مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حاسب لگائیں۔ یہاں  $H'$  کیا ہوگا؟ اپنے نتیجے کا جزو-۱ کے ساتھ موازنہ کریں۔ اشارہ: یہاں کسی نئے مکمل کی قیمت کے حصول کی ضرورت اور نہ احبازت ہے۔

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں۔ یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

(جہاں  $V_0$  ایک مستقل جس کا بُعد توانائی ہے اور  $a$  کنویں کی چوڑائی ہے) کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں۔



ا. پہلے قدم میں، ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے، زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تعاملات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں۔

ب. زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کی توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبہ نظریہ اضطراب سے دریافت کریں۔

### ۶.۱.۳ دوم رتبہ توانائیاں

اسی طرح بڑھتے ہوئے، ہم  $\psi_n^0$  اور دور تہی مساوات (مساوات ۶.۸) کا اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم  $H^0$  کے ہر مشی پن کو بروئے کار لاتے ہیں:

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ ساتھ ہی  $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$  ہے لہذا  $E_n^2$  کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۶.۱۴) \quad E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

تاہم مجموعہ میں  $m = n$  شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا

$$(۶.۱۵) \quad E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

ہوگا۔ یہ دور تہی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفہیم عمل موج  $(\psi_n^2)$  کی دوم رتبہ تصحیح، توانائی کی سوم رتبہ تصحیح، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں، لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات ۶.۱۵ تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔<sup>۵</sup>

سوال ۶.۴:

۱. توانائیوں کی دوم رتبہ تصحیح  $(E_n^2)$ ، سوال ۶.۱ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق  $n$  کیلئے  $2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$  حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبہ تصحیح  $(E_n^2)$ ، سوال ۶.۲ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجہ کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو ایک بُعدی ہارمونک ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ مندرجہ کریں ہم ایک کمزور برقی میدان  $(E)$  چلا کر دیتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں  $H' = qEx$  متدار کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۱. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبہ تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبہ تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۳.۳۳ دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات  $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$  استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں مساوات شروع کر کے بلا واسطہ حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تحمین کے مطابق ہیں۔

## ۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں؛ یعنی، دو (یا دو سے زیادہ) منفرد حالات  $(\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0)$  کی توانائیاں ایک جیسی ہوں، تب سادہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہوگا، چونکہ  $c_a^{(b)}$  (مساوات ۶.۱۲) اور  $E_a^2$  (مساوات ۶.۱۵) بے فتاویٰ بڑھتے ہیں (ماسوائے اس صورت میں جب شمار کنندہ صفر ہو:  $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$ )؛ اس پوشیدہ صورت کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انحطاطی صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبہ تصحیح (مساوات ۶.۹) پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

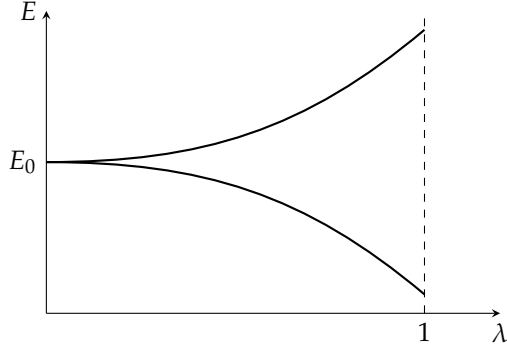
### ۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط

درج ذیل مندرجہ کریں جہاں  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  معمول شدہ ہیں۔

$$(۶.۱۶) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

<sup>۵</sup> مختصر انداز لکھائی میں  $\Delta_{mn} \equiv E_m^0 - E_n^0$ ،  $V_{mn} \equiv \langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$  اور  $n$  ویں توانائی کی پہلی تین تصحیح درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n^1 = V_{nn}, \quad E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}}, \quad E_n^3 = \sum_{l, m \neq n} \frac{V_{nl} V_{lm} V_{mn}}{\Delta_{nl} \Delta_{nm}} - V_{nn} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}^2}$$



شکل ۶.۲: انخطاط کا حتمہ بذریعہ اضطراب۔

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

(۶.۱۷)

$$\psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی  $H^0$  کا امتیازی حال ہو گا اور اس کی امتیازی قیمت  $E^0$  بھی وہی ہو گی۔

(۶.۱۸)

$$H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$

عام طور پر اضطراب ( $H'$ ) انخطاط کو ”توڑے“ (یا ”منسوخ“ کرے) گا: جیسے جیسے ہم  $\lambda$  کی قیمت (0 سے 1 کی طرف) بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی  $E^0$  دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی (شکل ۶.۲)۔ مخالف رخ چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند (یعنی صفر) کر دیں تب ”بالائی“ حال کی تخفیف،  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے ایک خطی جوڑ میں جبکہ ”زیریں“ حال کی تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا، تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے کہ یہ ”موزوں“ خطی جوڑ کیا ہوں گے۔ چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے، لہذا ہم اول رتبی توانائیوں (مساوات ۶.۹) کا حاب نہیں کر سکتے۔

اسی لیے، ہم ان ”موزوں“ غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ (مساوات ۶.۱۷) میں لکھتے ہیں، جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  متبادل تغیر ہوں گے۔ ہم مساوات شروڈنگر

(۶.۱۹)

$$H\psi = E\psi$$

کو  $H = H^0 + \lambda H'$  اور

(۶.۲۰)

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots$$

باب ۶. غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں۔ انہیں مساوات ۶.۱۹ میں ڈال کر (ہمیشہ کی طرح)  $\lambda$  کی ایک جیسی طاقتیں اکٹھی کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \dots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \dots$$

اب  $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$  (مساوات ۶.۱۸) کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے، جبکہ  $\lambda^1$  رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۲۱) \quad H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0$$

اس کا  $\psi_a^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

چونکہ  $H^0$  ہر مشی ہے، لہذا بائیں ہاتھ پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ مساوات ۶.۱۷ کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط (مساوات ۶.۱۶) کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$(۶.۲۲) \quad \alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۲۳) \quad W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b)$$

اسی طرح  $\psi_b^0$  کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا۔

$$(۶.۲۴) \quad \alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1$$

دھیان رہے کہ (اصولاً) ہمیں تمام  $W$  معلوم ہیں، چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  کے لحاظ سے  $H'$  کے ارکان متال ہیں۔ مساوات ۶.۲۳ کو  $W_{ab}$  سے ضرب دے کر، مساوات ۶.۲۲ استعمال کرتے ہوئے  $\beta W_{ab}$  کو خارج کر کے، درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۲۵) \quad \alpha [W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0$$

غیر صفر  $\alpha$  کی صورت میں مساوات ۶.۲۵ ہمیں  $E^1$  کی مساوات دیگی۔

$$(۶.۲۶) \quad (E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0$$

دو درجی کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور (مساوات ۱.۲۳ سے) جانتے ہوئے کہ  $W_{ba} = W_{ab}^*$  ہوگا، ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$(۱.۲۷) \quad E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[ W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right]$$

یہ انحطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے، جہاں دو جبزدہ مضطرب توانائیاں ہیں۔

لیکن صفر  $\alpha$  کی صورت میں کیا ہوگا؟ ایسی صورت میں  $\beta = 1$  ہوگا، لہذا مساوات ۱.۲۲ کے تحت  $W_{ab} = 0$  اور مساوات ۱.۲۳ کے تحت  $E^1 = W_{bb}$  ہوگا۔ یہ درحقیقت عمومی نتیجہ (مساوات ۱.۲۷) میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے (مثبت علامت  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 0$  کی صورت میں ہوگا)۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل ہوتے (مساوات ۱.۹)۔ یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے: حالات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  پہلے سے ”موزوں“ خطی جوڑ تھے۔ کیا اچھا ہوتا، اگر ہم آغاز سے ہی ”موزوں“ حالات جان پاتے؛ تب ہم غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے۔ حقیقت میں درج ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں۔

مسئلہ ۱.۲: فرض کریں  $A$  ایک ایسا ہر مشی عامل ہے، جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ مقلوبی ہے۔ اگر  $H^0$  کے انحطاطی امتیازی تفاعلات  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  عامل  $A$  کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں، جن کے منفرد امتیازی قیمتیں ہوں،

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب  $W_{ab} = 0$  ہوگا (لہذا  $\psi_a^0$  اور  $\psi_b^0$  نظریہ اضطراب میں متبادل استعمال، ”موزوں“ حالات ہوں گے)۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے کہ  $[A, H'] = 0$  ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] | \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | A H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A | \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' | \nu \psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب  $\mu \neq \nu$  ہے لہذا  $W_{ab} = 0$  ہوگا۔

سنت: اگر آپ کا سامنا انحطاطی حالات سے ہو، ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کرنے کی کوشش کریں جو  $H^0$  اور  $H'$  کے ساتھ مقلوبی ہو؛  $H^0$  اور  $A$  کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتی نظریہ اضطراب بروئے کار لائیں۔ ایسے عامل کی تلاش میں ناکامی کی صورت میں آپ کو مساوات ۱.۲ استعمال کرنا ہوگا، جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے۔

□

سوال ۶.۶: دو ”موزوں“ غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

لیں، جہاں  $\alpha_{\pm}$  اور  $\beta_{\pm}$  کو (معمول زنی تک) مساوات ۶.۲۲ (یا مساوات ۶.۲۴) تعین کرتا ہے۔ صریحاً درج ذیل دکھائیں۔

$$1. \quad \psi_{\pm}^0 \text{ عمودی ہیں: } (\langle \psi_{+}^0 | \psi_{-}^0 \rangle = 0) ;$$

$$2. \quad \langle \psi_{+}^0 | H' | \psi_{-}^0 \rangle = 0 ;$$

$$3. \quad \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E_{\pm}^1 \text{ کی قیمت مساوات ۶.۲۷ دیتی ہے۔}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ، جس کی کمیت  $m$  ہے، ایک بندیک بُدی تار، جس کی لمبائی  $L$  ہے، پر آزادی سے حرکت کرتا ہے (سوال ۲.۴۶)۔

۱. دکھائیں کہ ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{2}{m} \left( \frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال ( $n = 0$ ) کے علاوہ تمام حالات دہرے انحطاطی ہیں۔

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں  $L \ll a$  ہے۔ (یہ  $x = 0$  پر مخفیہ میں ایک ٹوپا پیدا کرتا ہے، گویا تار کو سروڑ کر پکڑ بسایا گیا ہو۔) مساوات ۶.۲۷ استعمال کرتے ہوئے  $E_n$  کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: چونکہ  $H'$  خطہ  $-a < x < a$  کے باہر تقریباً صفر ہے اور  $a \ll L$  ہے لہذا مکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت مکمل کی حدود کو  $\pm L/2$  کی بجائے  $\pm \infty$  رکھیں۔

ج. اس مسئلہ کے لئے  $\psi_n$  اور  $\psi_{-n}$  کے ”موزوں“ خطی جوڑ کیا ہوں گے؟ دکھائے کہ ان حالات کو لے کر، مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے، اول رتبی تصحیح حاصل ہوگی۔

د. ایسا ہر مشی عامل  $A$  تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو، اور دکھائیں کہ  $H^0$  اور  $A$  کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہیں جنہیں آپ نے جزو-ج میں استعمال کیا۔

## ۶.۲.۲. بلندرتبی انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا، تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶.۲۲ اور مساوات ۶.۲۴ کو ہم متالابی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(1.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ  $W E^1$ ، متالب کے امتیازی قیمتیں ہیں۔ مساوات ۶.۲۶ اس متالب کی امتیازی مساوات ہے، اور غیر مضطرب حالات کے ”موزوں“ خطی جوڑ  $W$  کے امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم  $n$  پڑتا انخطاط کی صورت میں  $n \times n$  متالب:

$$(1.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی قیمتیں تلاش کرتے ہیں۔ الجبر کی زبان میں ”موزوں“ غیر مضطرب تقاضات موج کی تلاش سے مراد انخطاطی ذیلی فضا میں ایسی اساس تیار کرنا ہے جو متالب  $W$  کو وتری بناتی ہو۔ یہاں بھی اگر آپ ایسا عامل  $A$  تلاش کر سکیں، جو  $H'$  کا مقلوبی ہو، اور  $A$  اور  $H'$  کے بیک وقت امتیازی تقاضات استعمال کر سکیں تو متالب  $W$  خود بخود وتری ہوگا، لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی۔<sup>۷</sup> (اگر آپ کو میری دو پڑتا انخطاط کو عمومیت دیتے ہوئے  $n$  پڑتا انخطاط پر یقین نہ ہو تو سوال ۶.۱۰ حل کر کے اپنی تسلی کر لیں۔)

مشال ۶.۲: تین ابعادی لامتناہی کعبی کنویں (سوال ۴.۲):

$$(1.30) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(1.31) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

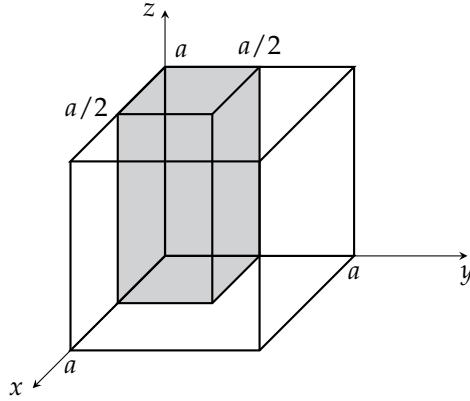
جہاں  $n_x$ ،  $n_y$  اور  $n_z$  مثبت عدد صحیح ہیں۔ ان کی مطابقتی احباباتی توانائیاں درج ذیل ہیں۔

$$(1.32) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

دھیان رہے کہ زمینی حال ( $\psi_{111}$ ) غیر انخطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے۔

$$(1.33) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

<sup>۷</sup> انخطاطی نظریہ اضطراب، درحقیقت، ہیملٹنی کے انخطاطی حصہ کو وتری بنانے کے مترادف ہے۔ توالب کا وتری بنانا (اور مقلوبی توالب کا ہیکو وتری بنانا) خیمہ کے حصہ A میں سکھایا گیا ہے۔



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار  $V_0$  بڑھاتا ہے۔

تاہم پہلا ہیجان حال (تہہ) انخطاطی ہے:

$$(۱.۳۳) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی:

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

جو ڈبل کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو  $V_0$  مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبہ تصحیح مساوات ۶.۹ دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\ (۱.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔

اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انخطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی۔ پہلے قدم میں ہم  $\mathbf{W}$  تیار کرتے ہیں۔ اس کے وٹری ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں (سوائے اس بات کے، کہ ان میں



سے ایک سائن کا دلیل دگن ہے؛ آپ درج ذیل کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیروتری ارکان زیادہ دلچسپ ہیں۔

$$W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz$$

تاہم  $z$  مکمل صفر ہوگا (جیسا  $W_{ac}$  کے لیے بھی ہوگا)، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

الغرض

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں  $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$  ہے۔

$$(۶.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

متالب  $\mathbf{W}$  بلکہ  $4\mathbf{W} / V_0$  جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات (ضمیمہ ۵-A کے تحت):

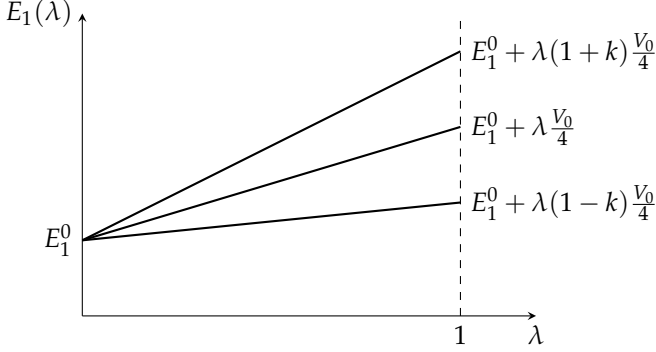
$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کی امتیازی قیمتیں درج ذیل ہوگی۔

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$



شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام برائے مثال ۶.۲ (مسادات ۶.۳۹)۔

یوں  $\lambda$  کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں  $E_1^0$  (مشترکہ) غیر مضطرب توانائی (مسادات ۶.۳۵) ہے۔ یہ اضطراب، توانائی  $E_1^0$  کو تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط حتم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ اگر ہم بھول کر اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تصحیح (مسادات ۶.۹) تینوں حالات کے لئے ایک جتنی اور  $V_0/4$  کے برابر ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لئے درست ہے۔

مزید ”موزوں“ غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہو گئے

$$(۶.۴۰) \quad \psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$

جہاں عددی سر  $(\alpha, \beta, \gamma)$  متالب  $\mathbf{W}$  کے امتیازی سمتیات ہیں۔

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں  $w = 1$  کے لئے  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ ؛ جبکہ  $w = 1 \pm \kappa$  کے لئے  $\alpha = 0, \beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$ ۔

حاصل ہوتے ہیں۔ (میں نے انہیں معمول شدہ کیا ہے۔) یوں ”موزوں“ حالات درج ذیل ہوں گے۔<sup>۸</sup>

$$(۶.۴۱) \quad \psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c) / \sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c) / \sqrt{2} \end{cases}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں (مسواۃ ۶.۳۰) میں نقطہ  $(a/4, a/2, 3a/4)$  پر ڈیلتا فنکشنی ”موڑا“:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور (تہرا انحطاطی) اول ہیجان حال کی توانائیوں میں اول رتبہ تصحیح کتنی ہوگی؟

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف ”تین“ خطی غیر تاجع حالات پائے جاتے ہوں۔ فرض کریں متالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$H = V_0 \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں  $V_0$  ایک مستقل ہے، اور  $\epsilon$  کوئی چھوٹا عدد ( $\epsilon \ll 1$ ) ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی ( $\epsilon = 0$ ) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی قیمتیں لکھیں۔

ب. متالب  $H$  کے ٹھیک ٹھیک امتیازی قیمتوں کے لئے حل کریں۔ ہر ایک کو  $\epsilon$  کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں۔

ج. اول رتبہ اور دوم رتبہ غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قیمت کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو  $H^0$  کے غیر انحطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کا جزو-ا کے ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

<sup>۸</sup> یہ جاننے ہوئے کہ  $H'$  کے ساتھ،  $x$  اور  $y$  کو آپس میں تبدیل کرنے والا عامل،  $P_{xy}$  مقلوب ہے، ہم اس نتیجے کو قیاساً معلوم کر سکتے تھے۔ اس کے امتیازی قیمتیں (زیر تبدیلی جفت تفاعلوں کے لئے)  $+1$  اور (طاق تفاعلات کے لئے)  $-1$  ہے۔ یہاں  $\psi_a$  پہلے سے جفت ہے،  $(\psi_b + \psi_c)$  جفت اور  $(\psi_b - \psi_c)$  طاق ہے۔ یہ فیصلہ کن نہیں ہے، چونکہ جفت حالات کا ہر ایک خطی جوڑ جفت ہوگا۔ لیکن، اگر ہم عامل  $Q$  بھی استعمال کریں، جو  $z$  کو  $a - z$  منتقل کرتا ہو، اور یہ جاننے ہوں کہ  $\psi_a$  ایسا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قیمت  $-1$  ہے اور باقی دو امتیازی تفاعلات کی امتیازی قیمت  $+1$  ہے، ابہام دور ہو جاتا ہے۔ یہاں عاملین  $P_{xy}$  اور  $Q$  مل کر، حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں  $A$  کا کردار ادا کرتے ہیں۔

د. دو ابتدا میں انخطاطی امتیازی قیمتوں کی اول رتبہ تصحیح کو انخطاطی نظریہ اضطراب سے تلاش کریں۔ ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ  $n$  پڑتا انخطاطی توانائی کی اول رتبہ تصحیح،  $W$  کی امتیازی قیمتیں ہوں گی۔ میں نے اس دعویٰ کی وجہ یہ پیش کی کہ یہ  $n = 2$  صورت کی "قدرتی" عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ ۶.۲.۱ کے قدموں پر چل کر، درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات ۶.۱۷ کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات ۶.۲۲ کے مسائل کا مفہوم  $W$  کی امتیازی قیمت مساوات لی جاسکتی ہے۔

### ۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر (حصہ ۴.۲) کے مطالعہ کے دوران ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (۶.۴۲)$$

(جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کو لب مخفی توانائی ہے)۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے۔ ہم  $m$  کی بجائے تخفیف شدہ کیت (سوال ۵.۱) استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ زیادہ اہم مہین ساخت<sup>۹</sup> ہے، جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافیتی تصحیح<sup>۱۰</sup> اور پکرو مدار ربط<sup>۱۱</sup> کی بنا پر پیدا ہوتی ہے۔ بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کے لحاظ سے مہین ساخت،  $\alpha^2$  حبز ضربی کم، نہایت چھوٹا اضطراب ہے، جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۴۳)$$

مہین ساخت مستقل<sup>۱۲</sup> کہلاتا ہے۔ اس سے بھی (مزید  $\alpha$  حبز ضربی) چھوٹا لیمبہ انتقال<sup>۱۳</sup> ہے، جو برقی میدان کی کوانٹائزیشن سے وابستہ ہے، اور اس سے مزید ایک رتبہ کم، نہایت مہین ساخت<sup>۱۴</sup> کہلاتی ہے، جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے پیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول ۶.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے۔ سوال ۶.۱۱:

fine structure<sup>۹</sup>  
relativistic correction<sup>۱۰</sup>  
spin-orbit coupling<sup>۱۱</sup>  
fine structure constant<sup>۱۲</sup>  
Lamb shift<sup>۱۳</sup>  
hyperfine structure<sup>۱۴</sup>

جدول ۶.۱: ہائپر روجن کی بوہر توانائیوں میں تصحیح کی درجہ بندی۔

$\alpha^2 mc^2$	کارتبہ	بوہر توانائی:
$\alpha^4 mc^2$	کارتبہ	مہین ساخت:
$\alpha^5 mc^2$	کارتبہ	لیب انتتال:
$(m/m_p)\alpha^4 mc^2$	کارتبہ	نہایت مہین ساخت:

۱. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی ( $mc^2$ ) کی صورت میں لکھیں۔

ب۔ ( $\epsilon_0, e, \hbar, c$  کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر) مہین ساخت مستقل کی قیمت بنیادی اصول استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ تبصرہ: پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حناص (بے بُعدی) بنیادی عدد ہے۔ یہ برقناطیسیت (الیکٹران کا بار)، اضافیت (روشنی کی رفتار) اور کوانٹائی میکانیات (پلانک مستقل) کے بنیادی مستقلات کے پیچ رشتہ بیان کرتا ہے۔ اگر آپ حبزو-ب حل کر پائیں، یقیناً آپ کو نوہیل انعام سے نوازا جائے گا۔ البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس پر زیادہ وقت ضائع نہ کریں؛ (اب تک) بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں۔

### ۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا حبزو و بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$(۶.۴۴) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

جس میں باضابطہ متبادل  $\nabla^2 \rightarrow (\hbar/i)p$  پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۴۵) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

تاہم مساوات ۶.۴۴ حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے؛ اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$(۶.۴۶) \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

جہاں پہلا حبزو و کل اضافیتی توانائی ہے (جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے، اور جس سے ہمیں فی الحال عنرض بھی نہیں ہے)، جبکہ دوسرا حبزو ساکن توانائی ہے؛ ان کے فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں سمتی رفتار کی بجائے (اضافیتی) معیار حرکت

$$(۶.۴۷) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

کی صورت میں  $T$  کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 [1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

غیر اضافیتی حد  $mc \ll p$  کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتیجہ (مساوات ۶.۴۴) دیتی ہے؛ ایک چھوٹے عدد  $(p/mc)$  کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۴۹) \quad T = mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc}\right)^4 \dots - 1 \right] \\ = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

ظاہر ہے کہ ہیمیلٹنی کی سب سے کم رتبہ ۱۵ اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے۔

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3 c^2}$$

غیر مضطرب حال میں  $H'$  کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں  $E_n$  کی تصحیح ہوگی (مساوات ۶.۹)۔

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب (غیر مضطرب حالات کے لئے) مساوات شروڈنگر کہتی ہے کہ

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔<sup>۱۶</sup>

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

<sup>۱۵</sup> چونکہ ہائیڈروجن میں الیکٹران کی حرکی توانائی کا رتبہ 10 eV ہے، جو اس کی ساکن توانائی (511 000 eV) سے بہت کم ہے، لہذا ہائیڈروجن جوہر بنیادی طور پر غیر اضافیتی ہے اور یوں ہم صرف سب سے کم رتبہ تصحیح رکھ سکتے ہیں۔ مساوات ۶.۴۹ میں  $p$  اضافیتی معیار حرکت (مساوات ۶.۴۷) ہے تاکہ کلاسیکی معیار حرکت  $(mv)$ ۔ ہم مساوات ۶.۵۰ میں اب کو انشائی عامل  $-i\hbar\nabla$  کے ساتھ اول الذکر منسلک کرتے ہیں۔

<sup>۱۶</sup> ایسا، ہم نے  $p^2$  اور  $(E - V)$  کی ہر مشابہت استعمال کی جو درست نہیں ہے۔ درحقیقت ان حالات کے لئے جن کا  $\ell = 0$  ہو عامل  $p^4$  غیر ہر مشابہت ہوگا (سوال ۶.۱۵)، اور مساوات ۶.۵۰ پر  $\ell = 0$  کی صورت میں (نظریہ اضطراب کا اطلاق ٹکے سے حنائی نہیں ہوگا۔ خوش قسمتی سے، ہمیں ٹھیک ٹھیک جواب معلوم ہے؛ جسے (غیر اضافیتی) مساوات شروڈنگر کی بجائے (اضافیتی) مساوات ڈیراک استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے، اور جو یہاں سرسری انداز میں حاصل نتیجہ کی تصدیق کرتا ہے (سوال ۶.۱۹، دیکھیں)۔

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے؛ تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے  $(-1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$  لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں  $E_n$  زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے۔

یہ کام مکمل کرنے کی خاطر، ہمیں (غیر مضطرب) حال  $\psi_{n\ell m}$  (مساوات ۴.۸۹) میں  $1/r$  اور  $1/r^2$  کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی۔ ان میں سے پہلا دریافت کرنا آسان ہے (سوال ۶.۱۲ دیکھیں):

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں  $a$  رداس بوہر (مساوات ۴.۷۲) ہے۔ دوسرا اتنا آسان نہیں ہے (سوال ۶.۳۳ دیکھیں)، تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے۔<sup>۱۷</sup>

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(\ell + 1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[ E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(\ell + 1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا (مساوات ۴.۷۲ استعمال کرتے ہوئے)  $a$  کو خارج کر کے، (مساوات ۴.۷۰ استعمال کر کے) تمام کو  $E_n$  کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۵۷) \quad E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[ \frac{4n}{\ell + 1/2} - 3 \right]$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار  $E_n$  سے تقریباً  $2 \times 10^{-5}$   $E_n/mc^2$  جزو ضربی کم ہے۔

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے، میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا (مساوات ۶.۵۱)۔ لیکن یہاں اضطراب کردی تشاکلی ہے، لہذا یہ  $L^2$  اور  $L_z$  کا مقلوب ہوگا۔ مزید کسی  $E_n$  کے  $n^2$  حالات کے لئے ان (ایک ساتھ تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کی منفرد امتیازی قیمتیں ہوں گی۔ یوں خوش قسمتی سے، تفاعلات  $\psi_{n\ell m}$  اس مسئلہ کے ”موزوں“ حالات ہوں گے (یا جیسا ہم کہتے ہیں  $n$ ،  $\ell$  اور  $m$  موزوں کو اٹھائے اعداد<sup>۱۸</sup>)، لہذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال قانوناً درست ہوتا (حصہ ۶.۲.۱ کے آخر میں سبق دیکھیں)۔

<sup>۱۷</sup> متغیر  $r$  کے کسی بھی طاقت کی توقعاتی قیمت کا عمومی گلیہ موجود ہے۔  
good quantum numbers<sup>۱۸</sup>

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل (سوال ۴.۴۰) استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۵۵ ثابت کریں۔

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴.۴۳ میں حال  $\psi_{321}$  میں  $r^s$  کی توقعاتی قیمت حاصل کی۔ اپنے جواب کی تصدیق  $s = 0$  (حقیر کام)،  $s = -1$  (مساوات ۶.۵۵)،  $s = -2$  (مساوات ۶.۵۶)، اور  $s = -3$  (مساوات ۶.۶۴) کے لیے کریں۔ اس پر تبصرہ کریں کہ  $s = -7$  کی صورت میں کیا ہوگا۔

سوال ۶.۱۴: ایک بُعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے (سب سے کم رتبہ) اضافیتی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: مشال ۲.۵ میں متعل ترکیب بروئے کار لائیں۔

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے  $\ell = 0$  لیتے ہوئے  $p^2$  ہر مشی اور  $p^4$  غیر ہر مشی ہے۔ ایسے حالات کے لئے  $\psi$ ، متغیرات  $\theta$  اور  $\phi$  کا غیر تابع ہے، لہذا درج ذیل ہوگا (مساوات ۴.۱۳)۔

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

تکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle f | p^2 g \rangle = -4\pi\hbar^2 \left( r^2 f \frac{dg}{dr} - r^2 g \frac{df}{dr} \right) \Big|_0^\infty + \langle p^2 f | g \rangle$$

تصدیق کریں کہ  $\psi_{n00}$  کے لیے، جو مبداء کے متریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}} e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ  $p^4$  کے لئے کر کے دیکھیں، اور دکھائیں کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

$$\langle \psi_{n00} | p^4 \psi_{m00} \rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4} \frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4 \psi_{n00} | \psi_{m00} \rangle$$

۶.۳.۲ چپکرومدار رابط

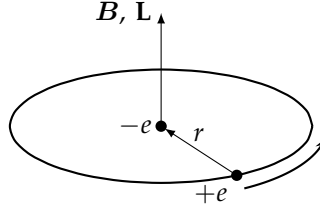
سرکڑہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں؛ الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوٹے میں مقناطیسی میدان  $B$  پیدا کرتا ہے، جو چپکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر قوت سرور پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر ( $\mu$ ) کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس کی ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵) درج ذیل ہے۔

(۶.۵۸)

$$H = -\mu \cdot B$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان ( $B$ ) اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر ( $\mu$ ) درکار ہوگا۔





شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

پروٹان کا مقناطیسی میدان۔ ہم (الیکٹران کے نقطہ نظر سے) پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے، اس کے مقناطیسی میدان کو باؤٹ و سیوارٹ متانوں سے حاصل کرتے ہیں:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو  $I = e/T$  ہے، جہاں  $e$  پروٹان کا بار، اور  $T$  دائرے پر ایک چکر کا دوری عرصہ ہے۔ اس کے برعکس،  $L = rmv = 2\pi mr^2/T$  (مركزہ کے ساکن چھوٹے میں) الیکٹران کا مدار کی زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ مزید،  $B$  اور  $L$  دونوں کا رخ ایک جیسا ہوگا (شکل ۶.۷ میں اوپر جانب)، لہذا

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} L \quad (۶.۵۹)$$

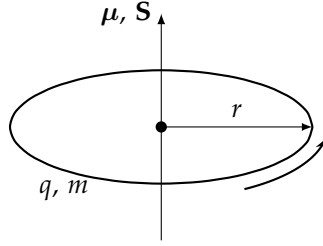
لکھا جاسکتا ہے (جہاں میں نے  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  استعمال کر کے  $\mu_0$  کی جگہ  $\epsilon_0$  استعمال کیا ہے)۔

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار حرکت۔ چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اس کے (چکری) زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے؛ ممکن مقناطیسی نسبت (جسے ہم حصہ ۴.۴.۱ میں دیکھ چکے ہیں)، ان کے بیچ تناسبی جزو ضربی ہوگا۔ آئیں اس مرتبہ، کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے، اسے اخذ کرتے ہیں۔ ایک ایسا بار  $q$  جس کی لمبائی  $r$  کے چلا پر کی گئی ہو، اور جو محور کے گرد دوری عرصہ  $T$  سے گھومتا ہو، پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف، رو  $(q/T)$  ضرب رقبہ  $(\pi r^2)$  ہے۔

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلے کی کمیت  $m$  ہو، جمودی معیار اثر  $(mr^2)$  ضرب زاویائی سمتی رفتار  $(2\pi/T)$  اس کا زاویائی معیار حرکت،  $S$ ، ہوگا۔

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

اس تفکیک کے لیے ظاہر ہے کہ ممکن مقناطیسی نسبت  $\mu/S = q/2m$  ہوگا۔ دھیان رہے کہ یہ  $r$  (اور  $T$ ) کا تابع نہیں ہے۔ اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل کا جسم ہوتا، مثلاً ایک کرہ (صرف اتنا ضروری ہے کہ یہ اپنے محور کے گرد گھومتا ہو) شکل طواف ہو، میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے، تمام چھلوں کی پیداوار کی مجموعہ لے کر  $\mu$  اور  $S$  کی قیمتیں معلوم کر پاتا۔ جب تک کیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو (تاکہ بار اور کیت کی نسبت یکساں ہو)، ہر چھلے کا اور لہذا پورے جسم کا ممکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہوگا۔ مزید،  $\mu$  اور  $S$  کے رخ ایک جیسے (یا اگر بار منفی ہو تو ایک دوسروں کے مخالف) ہوں گے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mu = \left(\frac{q}{2m}\right) S$$

یہ حالصاً کلاسیکی حساب ہے، درحقیقت، الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کی کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے۔

$$\mu_e = -\frac{e}{m} S \quad (۶.۹)$$

ڈیراک نے الیکٹران کی (اپنے) اضافیتی نظریہ میں ”اضافی“ حوضی 2 کی وجہ پیش کی ہے۔<sup>۱۹</sup> ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L$$

اس حساب میں ایک مندریب سے کام لیا گیا ہے: میں نے الیکٹران کے ساکن چھوٹے میں تجزیہ کیا، جو ایک غیر جمودی نظام ہے؛ چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے، لہذا یہ چھوٹے اسراع

<sup>۱۹</sup> ہم دیکھ چکے ہیں کہ الیکٹران کو محور کے گرد چکر کاٹتا ہوا کرہ تصور کرنا، خطرے سے باہر نہیں ہے (سوال ۳.۲۵ دیکھیں)، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ سادہ لوح کلاسیکی نمونہ، ممکن مقناطیسی نسبت کی علاقہ قیمت دیتا ہے۔ کلاسیکی توقعات سے حاصل قیمت کو  $g$  جو ضرب کہتے ہیں:  $\mu = g(q/2m)S$ ، لہذا نظریہ ڈیراک میں  $g$  حوضی کی قیمت ٹھیک 2 ہے۔ لیکن کوٹائی برقی حرکیات اس میں معمولی تصحیح دیتی ہے: بے ضابطہ مقناطیسی معیار اثر،  $g_e$ ، کی قیمت دراصل  $2.002... = 2 + (\alpha/\pi) + ...$  ہے۔ اس کا حساب اور اس کی پیمائش (جو آپس میں شاندار حقیقت تک متفق ہیں) بیسویں صدی طبیعیات کی اہم ترین کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

پذیر ہوگا۔ اس حساب میں مجبوراً حرکت تصحیح، جسے طامس استقبال حرکت<sup>۲۰</sup> کہتے ہیں، شامل کر کے مقبول کیا جاسکتا ہے، جو حساب میں حبز و ضربی 1/2 شامل کرتا ہے۔<sup>۲۲</sup>

$$H'_{so} = \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (۶.۲۱)$$

یہ چکر و مدار باہم علی<sup>۲۳</sup> ہے؛ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ ممکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبال حرکت حبز و ضربی جو اتنا ذاتاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) کے، یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ سادہ لوح کلاسیکی نمونے سے حاصل کرتے ہیں۔ طبعی طور پر، یہ الیکٹران کے لحاقی ساکن چھوٹے میں، چکر کاٹتے ہوئے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر، پروٹان کے مقناطیسی میدان کی قوت سروڑ کے بدولت ہے۔

اب کوانٹائی میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں  $\mathbf{L}$  اور  $\mathbf{S}$  کے ساتھ ہیملٹنی غیر مقلوب ہوگا، لہذا چکر اور مداری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے (سوال ۶.۱۶ دیکھیں)۔ البتہ،  $L^2$ ،  $S^2$  اور کل زاویائی معیار حرکت:

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (۶.۲۲)$$

کے ساتھ  $H'_{so}$  مقلوب ہوگا، لہذا یہ متداریں بقائی ہوں گی (مساوات ۳.۷۱ اور اس کے نیچے پیراگراف دیکھیں)۔ دوسرے لفظوں میں،  $L_z$  اور  $S_z$  کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے ”موزوں“ حالات نہیں ہیں، جبکہ  $L^2$ ،  $S^2$ ،  $J^2$ ، اور  $J_z$  کے امتیازی حالات ”موزوں“ حالات ہیں۔ اب

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \quad (۶.۲۳)$$

ہوگا لہذا  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  کی امتیازی قیمتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]$$

Thomas precession<sup>۲۴</sup>

<sup>۲۰</sup> سوچنے کا ایک انداز یہ ہوگا کہ آپ تصور کریں کہ الیکٹران مستمر انداز میں ایک ساکن نظام سے دوسرے ساکن نظام میں متدرج رکھتا ہے؛ ان لوہے کی تبادول کے مجموعی اثر کو طامس استقبال حرکت بیان کرتا ہے۔ ہم تجربہ گاہ کی چھوٹے میں، جہاں پروٹان ساکن ہے، رہ کر اس پوری مصیبت سے مخفیات حاصل کر سکتے تھے۔ ایسی صورت میں، پروٹان کا میدان حثاقت برقی ہوگا، اور آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ الیکٹران پر قوت سروڑ کیسا پیدا کرتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ حرکت پذیر مقناطیسی جفت قطب، برقی جفت قطب معیار اثر اختیار کرتا ہے، اور تجربہ گاہ کے چھوٹے میں سروڑ کے برقی میدان اور الیکٹران کے برقی جفت قطب معیار اثر کے بیچ باہم عمل، چکر و مدار ربط کا باعث بنتا ہے۔ چونکہ اس تجزیہ کے لئے زیادہ پیچیدہ برقی حرکت درکار ہوگا لہذا ابتر رہی ہے کہ ہم الیکٹران کے ساکن چھوٹے میں کام کریں جہاں طبعی پرسلو زیادہ واضح ہے۔

<sup>۲۲</sup> بہ نسبت زیادہ درست ہوگا کہ طامس استقبال حرکت  $g$  حبز و ضربی سے 1 منفی کرتا ہے۔

spin-orbit interaction<sup>۲۳</sup>

یہاں یقیناً  $s = 1/2$  ہے۔ مزید  $1/r^3$  کی توقعاتی قیمت (سوال ۶.۳۵-ج دیکھیں)

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{\ell(\ell + 1/2)(\ell + 1)n^3 a^3} \quad (۶.۶۴)$$

ہے، لہذا

$$E_{so}^1 = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2} \frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - \ell(\ell+1) - 3/4]}{\ell(\ell + 1/2)(\ell + 1)n^3 a^3}$$

یا تمام کو  $E_n$  کی صورت میں لکھتے ہوئے، درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔<sup>۲۴</sup>

$$E_{so}^1 = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{n[j(j+1) - \ell(\ell+1) - 3/4]}{\ell(\ell + 1/2)(\ell + 1)} \right\} \quad (۶.۶۵)$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ، بالکل مختلف طبیعی پہلوؤں کے باوجود، اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چکر و مدار ربط (مساوات ۶.۶۵) ایک جتنا رتبہ  $(E_n^2/mc^2)$  رکھتے ہیں۔ انہیں جمع کر کے، ہمیں مکمل مہین ساخت کلیہ:

$$E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left( 3 - \frac{4n}{j + 1/2} \right) \quad (۶.۶۶)$$

(سوال ۶.۱۷ دیکھیں) حاصل ہوتا ہے۔ اسے کلیہ بوہر کے ساتھ ملا کر، ہم ہائیڈروجن توانائی سطحوں کا عظیم نتیجہ:

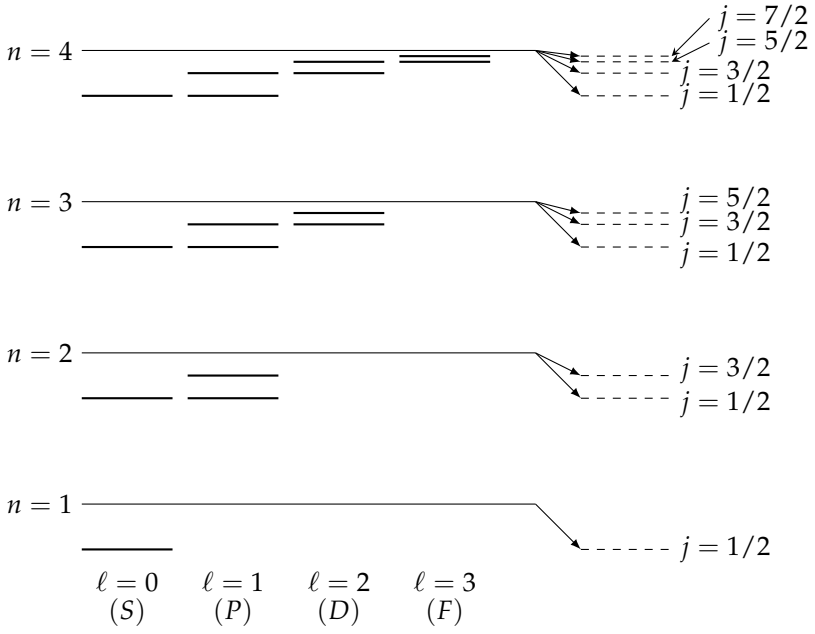
$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (۶.۶۷)$$

حاصل کرتے ہیں، جس میں مہین ساخت شامل ہے۔

مہین ساخت  $\ell$  میں انحطاط توڑتی ہے (یعنی کسی ایک  $n$  کیلئے،  $\ell$  کی مختلف اجزائی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہوں گی)، تاہم اب بھی یہ  $j$  میں انحطاط برقرار رکھتی ہے (شکل ۶.۹ دیکھیں)۔ مدارچی اور چکری زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو امتیازی قیمتیں ( $m_\ell$  اور  $m_s$ ) اب ”موزوں“ کو انشائی اعداد نہیں ہونگے؛ ان مقداروں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے؛ ”موزوں“ کو انشائی اعداد  $n$ ،  $\ell$ ،  $s$ ،  $j$  اور  $m_j$  ہوں گے۔<sup>۲۵</sup>

<sup>۲۴</sup> یہاں بھی،  $\ell = 0$  کی صورت میں ہمیں مسئلہ درجیش ہوگا، چونکہ ہم بلاہر صفر سے تقسیم کرتے ہیں۔ ساتھ ہی، اس صورت میں  $j = 1/2$  کی بنا پر، شمار کنندہ بھی صفر ہے، لہذا مساوات ۶.۶۵ بلا تعین ہوگا۔ طبیعی بنیادوں پر  $\ell = 0$  کی صورت میں چکر و مدار ربط ہونانی نہیں چاہیے۔ اس ایہام کو دور کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم جزو ڈاروٹ متعارف کریں۔ غیر متوقع طور پر، اگرچہ اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چکر و مدار ربط (مساوات ۶.۶۵) دونوں  $\ell = 0$  کی صورت میں ٹک سے مبرا اٹھیں ہیں، ان کا مجموعہ (مساوات ۶.۶۶) تمام  $\ell$  کے لئے درست ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

<sup>۲۵</sup> کسی  $\ell$  اور  $s$  کے لئے،  $|jm_\ell\rangle$  کو  $|sm_s\rangle$  کا خطی جوڑ لکھنے کی خاطر ہمیں مناسب کلیش و گورڈن عددی سر (مساوات ۳.۱۸۵) استعمال کرنے ہوں گے۔



شکل ۶.۹: ہائیڈروجن کی سطحیں توانائی، جن میں مہین ساخت شامل ہے (درست پیمانہ کے مطابق نہیں ہے)۔

سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقاب کی قیمتیں تلاش کریں۔ (الف)  $[L \cdot S, L]$ ، (ب)  $[L \cdot S, S]$ ، (ج)  $[L \cdot S, J]$ ، (د)  $[L \cdot S, L^2]$ ، (ه)  $[L \cdot S, S^2]$ ، (و)  $[L \cdot S, f^2]$ ؛ اشارہ:  $L$  اور  $S$  زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابیت رشتوں (مادات ۴.۹۹ اور مادات ۴.۱۳۴) کو مطمئن کرتے ہیں، لیکن یہ ایک دوسرے کے ساتھ مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح (مادات ۶.۵۷) اور چپکرو مدار رابط (مادات ۶.۶۵) سے مہین ساخت کلیہ (مادات ۶.۶۶) اخذ کریں۔ اشارہ: دھیان رہے کہ  $j = \ell \pm 1/2$  (مادات ۶.۶۲) ہے؛ مثبت اور منفی علامت کو باری باری لیں، آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں ایک جیسا نتیجہ حاصل ہوگا۔

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن طیف کے مرکزی خطے میں سرخ بالمر لکیر نمایاں ترین ہے، جو  $n = 3$  سے  $n = 2$  میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے۔ سب سے پہلے، اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد دوہر نظریہ سے تعین کریں۔ مہین ساخت اس لکیر کو متریب متریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتی ہے؛ اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہوگی اور ان کے بچ فاصلہ کتنا ہوگا؟ اشارہ: پہلے قدم میں، معلوم کریں کہ  $n = 2$  سطح کتنی ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگی، اور ہر ایک کے لیے، eV میں،  $E_{fs}^1$  تلاش کریں۔ یہی کچھ  $n = 3$  کے لیے کریں۔ سطح توانائی کی شکل کا خاکہ بنا کر  $n = 3$  سے  $n = 2$  تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں۔ توانائی کا اخراج (نوریہ کی صورت میں)  $(E_3 - E_2) + \Delta E$  ہوگا، جہاں پر صاحبزوب میں مشترک جبکہ (مہین ساخت کی پیدا)  $\Delta E$  کی قیمت ہر منتقلی کے لئے بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے  $\Delta E$  کو (eV میں) تلاش کریں۔ آخر میں، تعدد نوریہ میں تبدیل کر کے، ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بچ فاصلہ (Hz کی صورت میں) تعین کریں؛ یہ ہر لکیر اور غیر مضطرب لکیر کے بچ تعددی فاصلہ نہیں (جو یقیناً، قابل مشاہدہ نہیں)، بلکہ یہ ہر لکیر اور اس سے اگلی لکیر کے بچ تعددی فاصلہ ہوگا۔ آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے: ”سرخ بالمر لکیر ( ) لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے۔ بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1)  $j = (???)$  سے  $j = (???)$ ،  $j = 2$  لکیر 2 اور لکیر 1 کے بچ تعددی فاصلہ (???) Hz ہے، لکیر 2 اور لکیر 3 کے بچ فاصلہ ??? Hz ہے، ...۔“

سوال ۶.۱۹: مادات ڈیراک سے (نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر) ہائیڈروجن کے مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\}$$

اس کو (یہ جانتے ہوئے کہ  $1 \ll \alpha$  ہے)  $a^4$  رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ مادات ۶.۶۷ حاصل ہوتا ہے۔

## ۶.۴. زیرمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان  $B$  بیرونی  $B$  میں رکھنے سے، اس کی توانائی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ اس مظہر کو **زیرمان اثر**<sup>۲۶</sup> کہتے ہیں۔ واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_\ell + \mu_s) \cdot B \quad \text{بیرونی} \quad (۶.۶۸)$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m} S \quad (۶.۶۹)$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اور

$$\mu_{ell} = -\frac{e}{2m} L \quad (۶.۷۰)$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت قطب معیار اثر ہے۔  $\mu_{ell}$  یوں درج ذیل ہوگا۔

$$H'_z = \frac{e}{2m} (L + 2S) \cdot B \quad \text{بیرونی} \quad (۶.۷۱)$$

زیرمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان (مساوات ۶.۵۹)، جو چکر و مدار رابطہ پیدا کرتا ہے، کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگی۔ اگر اندرونی  $B \ll$  بیرونی  $B$  ہو تب مہین ساخت غالب ہوگی، اور  $H'$  کو ایک چھوٹا اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے، جبکہ اندرونی  $B \gg$  بیرونی  $B$  کی صورت میں زیرمان اثر غالب ہوگا، اور مہین ساخت اضطراب تصور کی جائے گی۔ ان خطوں کے بیچ، جہاں دونوں میدان مد معتمیل ہوں گے، ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی، اور ہیملٹنی کے متعلقہ حصے کو ”ہاتھ سے“ وتری بنانا لازم ہوگا۔ درج ذیل حصوں میں ہائیڈروجن کے لئے ہم ان تینوں صورتوں پر غور کریں گے۔

سوال ۶.۲۰: ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت، مساوات ۶.۵۹ استعمال کرتے ہوئے، تلاش کر کے ”طفتور“ اور ”کمزور“ زیرمان میدان کی متداری تصویر کشی کریں۔

## ۶.۴.۱ کمزور میدان زیرمان اثر

اگر اندرونی  $B \ll$  بیرونی  $B$  ہو تب مہین ساخت (مساوات ۶.۶۷) غالب ہوگی، اور ”موزوں“ کوانٹائی اعداد  $n$ ،  $\ell$ ،  $j$ ، اور  $m_j$  ہونگے (تاہم، چکر و مدار رابطہ کی موجودگی میں  $L$  اور  $S$  علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہونگے، لہذا  $m_\ell$  اور  $m_s$

<sup>۲۶</sup> Zeeman effect

<sup>۲۷</sup> مداری حرکت کے لئے کلاسیکی قیمت  $(q/2m)$  ہی مسکن مقناطیسی نسبت ہوگی؛ صرف چکر کی صورت میں ۲ کا ”انسانی“ حیزو ضربی پلا جاسکتا ہے۔

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

”موزوں“ کو انشائی اعداد نہیں ہونگے۔<sup>۲۸</sup> تب اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زمین تصحیح درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۷۲) \quad E_Z^1 = \langle n\ell jm_j | H_Z' | n\ell jm_j \rangle = \frac{e}{2m} B_{\text{بیرونی}} \cdot \langle L + 2S \rangle$$

اب  $L + 2S = J + S$  ہوگا۔ بد قسمتی سے، ہمیں  $S$  کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے۔ لیکن ہم درج ذیل طریقے سے اسے جان سکتے ہیں: کل زاویائی معیار حرکت  $J = L + S$  ایک مستقل ہے (شکل ۶.۱۰): اس مقررہ سمتیہ کے گرد  $L$  اور  $S$  تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں۔ بالخصوص،  $J$  پر  $S$  کی متاثرہ تظلیل،  $S$  کی (ومتقی) اوسط قیمت:

$$(۶.۷۳) \quad S_{\text{اوسط}} = \frac{(S \cdot J)}{J^2} J$$

ہوگی۔ لیکن  $L = J - S$  ہے، لہذا  $L^2 = J^2 + S^2 - 2J \cdot S$

$$(۶.۷۴) \quad S \cdot J = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)]$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۶.۷۵) \quad \langle L + 2S \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{S \cdot J}{J^2}\right) J \right\rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + 3/4}{2j(j+1)}\right] \langle J \rangle$$

چونکہ کورنوسین میں بندرکن کو لنڈے  $g$  ضرور<sup>۲۹</sup> کہتے ہیں جس کو  $g_J$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم محور  $Z$  کو بیرونی  $B$  کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں؛ تب

$$(۶.۷۶) \quad E_Z^1 = \mu_B g_J B_{\text{بیرونی}} m_j$$

ہوگا، جہاں

$$(۶.۷۷) \quad \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

بوہر مقناطیہ<sup>۳۰</sup> کہلاتا ہے۔ مہین ساخت (مساوات ۶.۶۷) اور زمینان (مساوات ۶.۷۶) حصوں کا مجموعہ کل توانائی دے گا۔ مثال کے طور پر، زمینی حال ( $n = 1$ ،  $\ell = 0$ ،  $j = 1/2$ ، لہذا  $g_J = 2$ ) دو سطحوں:

$$(۶.۷۸) \quad \underbrace{-13.6 \text{ eV}(1 + \alpha^2/4)}_{\text{مساوات ۶.۶۷}} \pm \underbrace{\mu_B B_{\text{بیرونی}}}_{\text{مساوات ۶.۷۶}}$$

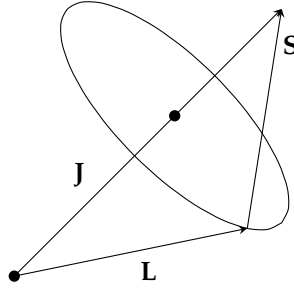
میں بٹ جباے گا، جہاں  $m_j = 1/2$  کے لیے مثبت علامت اور  $m_j = -1/2$  کے لیے منفی علامت استعمال ہوگی۔ ان توانائیوں کو (بیرونی  $B$  کے تفاعل کے طور پر) شکل ۶.۱۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

<sup>۲۸</sup> یہاں ایک اضطراب (زمینان بنوارا) کے اوپر دوسرا اضطراب (مہین ساخت) انبار ہے۔ ”موزوں“ کو انشائی اعداد وہ ہوں گے جو غالب اضطراب، جو موجودہ مسئلہ میں مہین ساخت ہے، کے لئے درست ہوں۔ ثانوی اضطراب (زمینان بنوارا)  $J_z$  میں، جہاں حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں عامل  $A$  کا کردار ادا کرتا ہے، باقی انخطاطا اٹھاتا ہے۔ عامل  $J_z$  تخنیک لفظ سے  $H_Z'$  کے ساتھ غیر متعلق ہے، تاہم مساوات ۶.۷۳ کی ومتقی اوسط نقطہ نظر سے یہ متعلق ہوں گے۔

<sup>۲۹</sup> Lande g-factor

<sup>۳۰</sup> Bohr magneton





شکل ۶.۱۰: چکر و مدار رابط کی عدم موجودگی میں  $L$  اور  $S$  علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت  $J$  کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد  $n = 2$  حالات  $|2\ell jm_j\rangle$  پر غور کریں۔ کمزور میدان زمین بنوارے کی صورت میں ہر ایک حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۱ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں۔ بیرونی  $B$  بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے۔ ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔

#### ۶.۴.۲ طاقتور میدان زمین اثر

اگر اندرونی  $B \gg$  بیرونی  $B$  ہو، تب زمین اثر غالب ہوگا؛<sup>۳</sup> میدان بیرونی  $B$  کو  $z$  محور پر رکھ کر ”موزوں“ کوانٹائی اعداد  $n, \ell, m_\ell$  اور  $m_s$  ہونگے (جبکہ  $j$  اور  $m_j$  نہیں ہونگے، چونکہ بیرونی قوت سروڈ کی صورت میں کل زاویائی معیار حرکت بقائی نہیں ہوگا، جبکہ  $L_z$  اور  $S_z$  بقائی ہونگے)۔ زمین ہیملٹنی

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{\text{بیرونی}} (L_z + 2S_z)$$

ہوگا، جبکہ ”غیر مضطرب“ توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

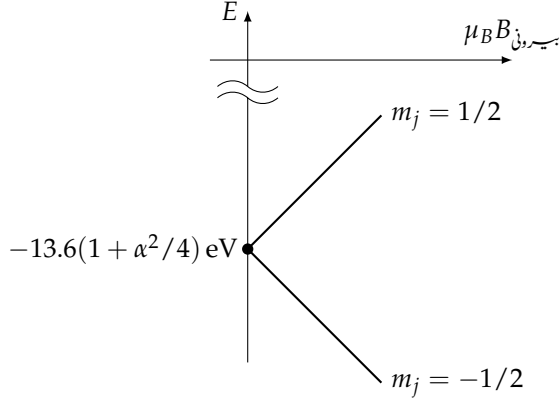
$$(۶.۷۹) \quad E_{n\ell m_s} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} + \mu_B B_{\text{بیرونی}} (m_\ell + 2m_s)$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہوگا۔ تاہم ہم اس سے بہتر جواب حاصل کر سکتے ہیں۔

رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۸۰) \quad E_{fs}^1 = \langle n\ell m_\ell m_s | (H'_r + H'_{so}) | n\ell m_\ell m_s \rangle$$

<sup>۳</sup> یہی صورت میں زمین اثر کو پاشی و پیکے اثر بھی کہتے ہیں۔



شکل ۶.۱۱: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا کمزور میدان میں انی زمین بٹوارا، بالائی لکیر ( $m_j = 1/2$ ) کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر ( $m_j = -1/2$ ) کی ڈھلوان -1 ہے۔

اضافیتی حصہ وہی ہوگا جو پہلے تھا (مساوات ۶.۵۷)؛ چپکرومدار جبزو (مساوات ۶.۶۱) کے لیے ہمیں

$$(۶.۸۱) \quad \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \langle S_x \rangle \langle L_x \rangle + \langle S_y \rangle \langle L_y \rangle + \langle S_z \rangle \langle L_z \rangle = \hbar^2 m_\ell m_s$$

درکار ہوگا (یاد رہے  $S_z$  اور  $L_z$  کے امتیازی تناسبات کے لیے  $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$  ہوگا)۔ ان تمام کو اکٹھے کر کے (سوال ۶.۲۲) ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$(۶.۸۲) \quad E_{fs}^1 = \frac{13.6 \text{ eV}}{n^3} \alpha^2 \left\{ \frac{3}{4n} - \left[ \frac{\ell(\ell+1) - m_\ell m_s}{\ell(\ell+1/2)(\ell+1)} \right] \right\}$$

(چو کورتوسین میں جبزو،  $\ell = 0$  کے لئے بلا تعین ہے؛ اس صورت میں اس کی درست قیمت 1 ہے؛ سوال ۶.۲۴ دیکھیں)۔ زمین (مساوات ۶.۷۹) اور مہین ساخت (مساوات ۶.۸۲) حصوں کا مجموعہ کل توانائی دے گا۔

سوال ۶.۲۲: مساوات ۶.۸۰ سے آغاز کر کے مساوات ۶.۵۷، مساوات ۶.۶۱، مساوات ۶.۶۲، اور مساوات ۶.۸۱ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۸۲ اخذ کریں۔

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد  $n = 2$  حالات  $|2\ell m_\ell m_s\rangle$  پر غور کریں۔ طاق طور میدان زمین بٹوارا کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کریں۔ اپنے جواب کو بوہر توانائی، ( $\alpha^2$  کے راست متناسب) مہین ساخت، اور  $\mu_B B$  کے راست متناسب) زمین حصہ کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔ مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے، منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہوگی، اور ان کے انحطاط کیا ہوں گے؟

سوال ۶.۲۴: اگر  $\ell = 0$  ہو، تب  $j = s$ ،  $m_j = m_s$  ہوگا، اور کمزور اور طاق طور میدانوں کے لیے موزوں حالات ( $|nm_s\rangle$ ) ایک جیسے ہوں گے۔ (مساوات ۶.۷۲ سے)  $E_Z^1$  اور (مساوات ۶.۶۷ سے) مہین ساخت

توانائیاں تعین کر کے، میدان کی طاقت سے قطع نظر،  $\ell = 0$  زمین اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں۔ دکھائیں کہ چوکور قوسین رکن کی قیمت 1 لیتے ہوئے، طاقتور میدان کلیہ (مساوات ۶.۸۲) یہی نتیجہ دے گا۔

### ۶.۴.۳ درمیان میدان زمین اثر

درمیان میدان کی صورت میں  $H'_Z$  اور  $H'_{fs}$  غائب ہوگا، لہذا ہمیں دونوں کو، ایک نظر سے دیکھ کر، پوہر ہیملٹنی (مساوات ۶.۴۲) کے اضطراب تصور کرنا ہوگا۔

$$(۶.۸۳) \quad H' = H'_Z + H'_{fs}$$

میں  $n = 2$  صورت پر اپنی توجہ محدود رکھ کر، ان حالات کو، جن کی تصویر کشی  $\ell$ ،  $j$ ، اور  $m_j$  کرتے ہیں،  $3^2$  اضطرابی نظریہ اضطراب کی اساس لیتا ہوں۔ کلیش و گورڈن عددی سر (سوال ۴.۵۱ یا جدول ۴.۹) استعمال کرتے ہوئے  $|jm_j\rangle$  کو  $|sm_s\rangle |m_\ell\rangle$  کا خطی جوڑ لکھ کر، درج ذیل ہوگا۔

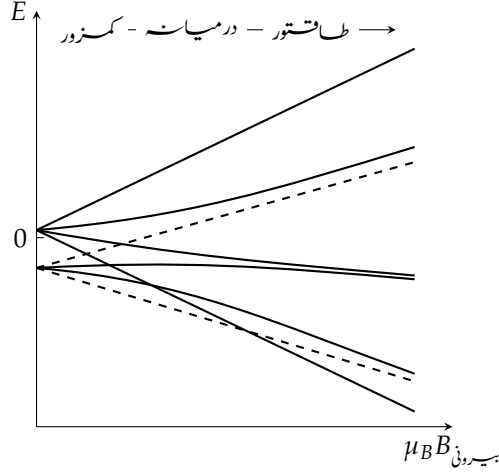
$$\ell = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

$$\ell = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = |11\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں  $H'_{fs}$  کے تمام غیر صفر و تالبی ارکان، جنہیں مساوات ۶.۶۶ دیتی ہے، وتر پر ہوں گے؛  $H'_Z$  کے چار غیر وتری ارکان پائے جاتے ہیں، اور مکمل متالب  $W$  (سوال ۶.۲۵ دیکھیں) درج ذیل ہوگا

$$\begin{pmatrix} 5\gamma - \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5\gamma + \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 5\gamma - \frac{1}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 5\gamma + \frac{1}{3}\beta \end{pmatrix}$$

$3^2$  آپ چاہیں تو  $\ell$ ،  $m_\ell$ ،  $m_s$  حالات استعمال کر سکتے ہیں، جو  $H'_Z$  کے متالبی ارکان کا حصول آسان لیکن  $H'_{fs}$  کا زیادہ مشکل بناتے ہیں؛ متالب  $W$  زیادہ پیچیدہ ہوگا، لیکن امتیازی قیمتیں (جو اساس کی تابع نہیں) دونوں صورتوں میں ایک جیسی ہوں گی۔



شکل ۶.۱۲: کمزور، درمیانہ اور طفتور میدان میں ہائیڈروجن کے  $n = 2$  حال کا زیران بنواری۔

جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6 \text{ eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B B$$

ابتدائی چار امتیازی قیمتیں پہلے سے وتر پرد کھائے گئے ہیں؛ اب صرف دو  $2 \times 2$  ڈیو کی امتیازی قیمتیں تلاش کرنا باقی ہے۔ ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیہ درج ذیل امتیازی قیمتیں دے گا۔

$$(۶.۸۳) \quad \lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)}$$

دوسرے ڈبلے کی امتیازی قیمتیں بھی مساوات دے گی، لیکن اس میں  $\beta$  کی علامت الٹ ہوگی۔ ان آٹھ توانائیوں کو جدول ۶.۲ میں پیش کیا گیا ہے، اور شکل ۶.۱۲ میں  $B$  کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے۔  
ضرمیدان حد ( $\beta = 0$ ) میں یہ گھٹ کر مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں؛ کمزور میدان ( $\beta \ll \gamma$ ) میں یہ سوال ۶.۲۱ میں حاصل نتائج دیتی ہیں؛ طفتور میدان ( $\beta \gg \gamma$ ) میں سوال ۶.۲۳ کے نتائج حاصل ہوتے ہیں (دھیان رہے، جیسا سوال ۶.۲۳ میں پیشگوئی کی گئی، بہت زیادہ طفتور میدانوں میں پانچ منفرد سطح توانائی پر ارتکاز ہوگا)۔

سوال ۶.۲۵: قواعد  $H'_Z$  اور  $H'_{f_s}$  کے ارکان دریافت کر کے،  $n = 2$  کے لئے، متن میں دیا گیا متالب  $W$  مرتب کریں۔

جدول ۶.۲: مہین ساخت اور زمین بٹوارا کے ساتھ ہائیڈروجن کے  $n = 2$  حالات کی سطحیں توانائی۔

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= E_2 - 5\gamma + \beta \\ \epsilon_2 &= E_2 - 5\gamma - \beta \\ \epsilon_3 &= E_2 - \gamma + 2\beta \\ \epsilon_4 &= E_2 - \gamma - 2\beta \\ \epsilon_5 &= E_2 - 3\gamma + \beta/2 + \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\ \epsilon_6 &= E_2 - 3\gamma + \beta/2 - \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\ \epsilon_7 &= E_2 - 3\gamma - \beta/2 + \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4} \\ \epsilon_8 &= E_2 - 3\gamma - \beta/2 - \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + \beta^2/4}\end{aligned}$$

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے  $n = 3$  حالات کے لیے کمزور، طاقوتور اور درمیانے میدان خطوں کے لیے زمین اثر کا تجزیہ کریں۔ (جدول ۶.۲ کی طرز پر) توانائیوں کا جدول تیار کر کے، انہیں (شکل ۶.۱۲ کی طرح) بیرونی میدان کے تقاطعات کے طور پر ترسیم کریں، اور تصدیق کریں کہ درمیانے میدان نتائج دو تحدیدی صورتوں میں گھٹ کر درست بنتی دیتی ہیں۔

## ۶.۵ نہایت مہین بٹوارا

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت قطب ہے، اگرچہ نسب نامہ میں بڑی کیفیت کی بنا پر اس کا جفت قطب معیار اثر، الیکٹران کے جفت قطب معیار اثر سے بہت کم ہوگا (مساوات ۶.۶۰)۔

$$(۶.۸۵) \quad \mu_p = \frac{g_p e}{2m_p} \mathbf{S}_p, \quad \mu_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}_e$$

(پروٹان تین کوارکوں پر مشتمل مخلوط ساخت کا ذرہ ہے، اور اس کی ممکن مقناطیسی نسبت الیکٹران کی ممکن مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں؛ اسی لئے  $g$  جزو ضربی کو  $g_p$  لکھا گیا ہے، جس کی پیمائشی قیمت 5.59 ہے جو الیکٹران کی قیمت (2) سے مختلف ہے۔) کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت، جفت قطب  $\mu$  درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے۔<sup>۲۳</sup>

$$(۶.۸۶) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{r})$$

<sup>۲۳</sup> اگر آپ مساوات ۶.۸۶ میں مستعمل ڈیلٹا فنکشن عملی جزو سے واقف نہیں، جفت قطب کو چپکے کاٹتے ہوئے دار کردی خول تصور کر کے، ( $\mu$  کو برقرار رکھ کر) اس کو صفر تک اور باہر کو لامتناہی تک پہنچا کر، آپ اس کو اخذ کر سکتے ہیں۔

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

یوں، پروٹان کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا (مساوات ۶.۵۸)۔

$$(۶.۸۷) \quad H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \delta^3(\mathbf{r})$$

نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبہ تخفیف (مساوات ۶.۹) اضطرابی ہیمیلٹنی کی توقعاتی قیمت ہوگی۔

$$(۶.۸۸) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle |\psi(0)|^2$$

زمینی حال میں (یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں  $\ell = 0$  ہو) تفاعل موج کروئی تشاکلی ہوگا، اور پہلی توقعاتی قیمت صفر ہوگی (سوال ۶.۲۷ دیکھیں)۔ مزید، مساوات ۶.۸۰ کے تحت  $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$  ہوگا، لہذا زمینی حال میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۸۹) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle$$

چونکہ اس میں دو چکروں کے بیچ ضرب نقطہ پائی جاتی ہے، لہذا اس کو چکر چکر ربط  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$  پایا جاتا ہے۔

چکر چکر ربط کی موجودگی میں، انفرادی چکری زاویائی معیار اثر بقائی نہیں رہتے؛ ”موزوں“ حالات، کل چکر:

$$(۶.۹۰) \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p$$

کے امتیازی سمتیات ہوں گے۔ پہلے کی طرح، ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

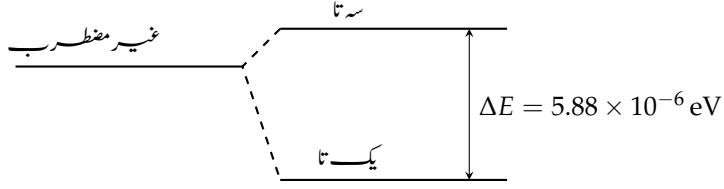
$$(۶.۹۱) \quad \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2} (S^2 - S_e^2 - S_p^2)$$

اب الیکٹران اور پروٹان دونوں کا چکر  $\frac{1}{2}$  ہے، لہذا  $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$  ہوگا۔ سہ تاحال (تمام چکر ”ہم متوازی“) میں کل چکر 1 ہوگا، لہذا  $S^2 = 2\hbar^2$  ہوگا؛ یک تاحال میں کل چکر 0، لہذا  $S^2 = 0$  ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۲) \quad E_{hf}^1 = \frac{4g_p \hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \begin{cases} +1/4, & (\text{سہ تہ}) \\ -3/4, & (\text{یک تہ}) \end{cases}$$

چکر چکر ربط، زمینی حال کے چکری انحطاط کو توڑ کر سہ تہ تفکیک کو اٹھاتا جبکہ یک تہ تفکیک کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۳)۔ ظاہر ہے کہ ان کے بیچ درز توانائی  $^{۲۵}$  درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۹۳) \quad \Delta E = \frac{4g_p \hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}$$



شکل ۶.۱۳: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین ہوارا۔

سہ تا حال سے یک تا حال منتقلی کی بنا پر خارج نوریہ کا تعدد

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420 \text{ MHz} \quad (۶.۹۴)$$

ہوگا، اور اس کا مطابقتی طول موج  $c/\nu = 21 \text{ cm}$  ہوگا، جو خورد موج خط میں پایا جاتا ہے۔ یہ وہ مشہور 21 سینٹی میٹر لکیر<sup>۳۶</sup> ہے جو کائنات میں اخراج کی صورت میں ہر طرف پائی جاتی ہے۔

سوال ۶.۲: فرض کریں  $a$  اور  $b$  دو مستقل سمتیات ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$\int (a \cdot a_r)(b \cdot a_r) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} (a \cdot b) \quad (۶.۹۵)$$

(کمل ہمیشہ کی طرح سمت  $0 < \theta < \pi$ ،  $0 < \phi < 2\pi$  پر کر لیا گیا ہے)۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے  $l = 0$ ، درج ذیل دکھائیں۔

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ:  $\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن گلیب میں موزوں ترمیم کرتے ہوئے، درج ذیل کے لیے زمینی حال کی نہایت مہین ساخت تعین کریں: (الف) میونی ہائیڈروجن<sup>۳۷</sup> (جس میں الیکٹران کے بجائے میون ہوگا، جس کا بار اور  $g$  حبزو ضربی، بالستریب، الیکٹران کے بار اور  $g$  حبزو ضربی کے برابر، لیکن کیت 207 گنا زیادہ ہے)، (ب) پازیٹرانیم<sup>۳۸</sup> جس میں پروٹان کی جگہ ضد الیکٹران ہوگا، جس کی کیت اور  $g$  حبزو ضربی، بالستریب، الیکٹران کی کیت اور  $g$  حبزو ضربی ہیں، لیکن بار کی علامت الٹ ہے)، (ج) میونیئم<sup>۳۹</sup> (جس میں پروٹان کی جگہ ضد میون ہوگا، جس

<sup>۳۶</sup> spin-spin coupling  
<sup>۳۷</sup> energy gap  
<sup>۳۸</sup> 21-centimeter line  
<sup>۳۹</sup> muonic hydrogen  
<sup>۴۰</sup> positronium  
<sup>۴۱</sup> muonium

کی کیت اور  $g$  جزو ضربی عین میون کے برابر، لیکن بار الٹ ہے۔ اشارہ یاد رہے کہ ان عجیب ”جوہروں“ کا رداس بوہر حاصل کرتے وقت تخفیف شدہ کیت (سوال ۱۵) استعمال کی جانی گی۔ دیکھایا گیا ہے کہ پازیٹرونیم کے لئے حاصل جواب  $(4.85 \times 10^{-4} \text{ eV})$ ، تجرباتی حاصل قیمت  $(8.41 \times 10^{-4} \text{ eV})$  سے بہت مختلف ہے؛ اتنے زیادہ منفرد کی وجہ نامعلوم جوڑا  $^{40} \text{ e}^+ + \text{e}^- \rightarrow \gamma + \gamma$  ہے، جو اضافی  $\Delta E (3/4)$  حصہ ڈالتا ہے، اور جو سادہ ہائیڈروجن، میونی ہائیڈروجن، اور میونیئم میں (نفاہر ہے کہ) نہیں ہوگا۔

### اضافی سوالات برائے باب ۶

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی مستثنای جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی میں تصحیح کی اندازا قیمت تلاش کریں۔ پروٹان کو رداس  $b$  کا یکساں بار دار کر دی خول تصور کریں، یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل،  $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ، ہوگی؛ یہ زیادہ درست نہیں ہے، لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے، جس سے ہمیں مقدار کارتبہ ٹھیک دے گا۔ اپنے نتیجے کو چھوٹی مقدار معلوم  $(b/a)$  کے طاقتی تسلسل توسیع میں لکھ کر، جہاں  $a$  رداس بوہر ہے، صرف ابتدائی جزو رکھ کر، درج ذیل روپ میں جواب حاصل کریں۔

$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

آپ نے مستقل  $A$  اور طاقت  $n$  کی قیمتیں تعین کرنی ہیں۔ آخر میں  $10^{-15} \text{ m} \approx b$  (جو تقریباً پروٹان کا رداس ہے) پر کر کے اصل عدد تلاش کریں۔ اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۰: ہم ست تین ابعادی ہارمونی مرکز تش (سوال ۴.۳۸) پر غور کریں۔ اضطراب

$$H' = \lambda x^2 y z$$

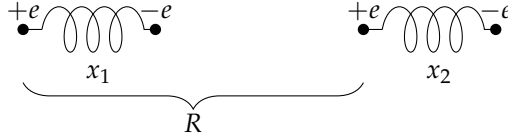
(جہاں  $\lambda$  ایک مستقل ہے) کے، درج ذیل پر، (رتبہ اول) اثر پر بحث کریں۔

۱. زمینی حال؛

ب. (تہرا انخطاطی) پہلا ہیجان حال۔ اشارہ: سوال ۲.۱۲ اور سوال ۳.۳۳ کے جوابات استعمال کریں۔

سوال ۶.۳۱: **وضو و الہام عمل**۔ دو ایسے جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ  $R$  ہو۔ چونکہ دونوں برقی معادل ہیں، لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جاتی، تاہم متقابل تقطیب ہونے کی صورت میں ان کے بیچ کمزور قوت کشش پائی جاتی گی۔ اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر، جوہر کو (کیت  $m$ ، بار  $-e$ ) کا ایک الیکٹران جو (بار  $+e$ ) کے مرکزہ کے ساتھ ایک اسپرنگ (جس کا مقیاس پک  $k$  ہے) سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۴)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مرکزہ بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے۔ اس





شکل ۶.۱۳: دو متماثل تنظیم فیزیکی جوہر (سوال ۶.۳۱)۔

غیر مضطرب نظام کی ہیملٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۹۶) \quad H^0 = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۷) \quad H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} \right)$$

۱. مساوات ۶.۹۷ کی تفصیل پیش کریں۔ فاصلہ  $R$  سے  $|x_1|$  اور  $|x_2|$  کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(۶.۹۸) \quad H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

ب. دکھائیں کہ کل ہیملٹنی (مساوات ۶.۹۶ جمع مساوات ۶.۹۸) دو پارامونی مرتعش ہیملٹنیوں:

$$(۶.۹۹) \quad H = \left[ \frac{1}{2m} p_+^2 + \frac{1}{2} \left( k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_+^2 \right] + \left[ \frac{1}{2m} p_-^2 + \frac{1}{2} \left( k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_-^2 \right]$$

میں زیر تبدیلی متغیرات:

$$(۶.۱۰۰) \quad p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 \pm p_2) \quad \text{اور نتیجتاً} \quad x_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 \pm x_2)$$

علیحدہ علیحدہ ہوگی۔

ج. ظاہر ہے کہ اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۱۰۱) \quad \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}} \quad \text{جہاں} \quad E = \frac{1}{2} \hbar (\omega_+ + \omega_-)$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

کولم باہم عمل کے بغیر  $E_0 = \hbar\omega_0$  ہوتی، جہاں  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ  $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$  درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^6} \quad (۶.۱۰۲)$$

ماخوذ: دو جوہروں کے پھٹکشی مخفی پایا جاتا ہے، جو ان کے پھٹک فصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے۔ یہ دو معادل جوہروں کے پھٹک دروازہ باہم عمل<sup>۴۱</sup> ہے۔

د. یہی حاب دور تہی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے دوبارہ کریں۔ اشارہ: غیر مضطرب حالات کا روپ  $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$  ہوگا، جہاں  $\psi_n(x)$  ایک ذروی سر تقش تفاعل موج ہے جس میں کیفیت  $m$  اور مقیاس پلک  $k$  ہوگا؛ مساوات ۶.۹۸ میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دور تہی تصحیح  $\Delta V$  ہوگی (دھیان رہے کہ اول رتہ تہی تصحیح صفر ہے)۔

سوال ۶.۳۲: فرض کریں، ایک مخصوص کوانٹائی نظام کی ہیملٹنی  $H$ ، کسی مقدار معلوم  $\lambda$  کی تفاعل ہے؛  $H(\lambda)$  کی امتیازی قیمتیں  $E_n(\lambda)$ ، اور امتیازی تفاعلات  $\psi_n(\lambda)$  لیں۔ مسئلہ فائمنز و ہلمنز<sup>۴۲</sup> درج ذیل کہتا ہے<sup>۴۳</sup>

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi_n \right\rangle \quad (۶.۱۰۳)$$

(جہاں  $E_n$  کو غیر انحطاطی تصور کریں، یا؛ اگر انحطاطی ہو تب، تمام  $\psi_n$  کو انحطاطی امتیازی تفاعلات کے ”موزوں“ خطی جوڑ تصور کریں)۔

ا. مسئلہ فائمنز و ہلمنز ثابت کریں۔ اشارہ: مساوات ۶.۹ استعمال کریں۔

ب. اس کا اطلاق ایک بعدی ہارمونی سر تقش پر درج ذیل صورتوں میں کریں۔

۱.  $\lambda = \omega$  لیں (جو  $V$  کی توقعاتی قیمت کا کلیہ دے گا)،

۲.  $\lambda = \hbar$  لیں (جو  $\langle T \rangle$  دے گا)، اور

۳.  $\lambda = m$  لیں (جو  $\langle T \rangle$  اور  $\langle V \rangle$  کا رشتہ دے گا)۔

اپنے جوابات کا سوال ۱۲.۱۲ اور مسئلہ وریل کی پیشگوئیوں (سوال ۳.۳۱) کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۳۳: مسئلہ فائمنز و ہلمنز (سوال ۶.۳۲) استعمال کرتے ہوئے ہائیڈروجن کے لئے  $1/r$  اور  $1/r^2$  کی توقعاتی قیمتیں

<sup>۴۱</sup> Van der Waals interaction

<sup>۴۲</sup> Feynmann-Hellmann theorem

<sup>۴۳</sup> فائمنز نے مساوات ۶.۱۰۳ اپنی اعلیٰ تعلیم کے دوران اخذ کی، جبکہ ہلمنز اسی مسئلہ کو چار سال قبل ایک غیر مشہور روسی حبریدہ میں کر چکے تھے۔

تعمین کی جاسکتی ہیں۔ رداسی تفاسلات موج (مساوات ۴.۵۳) کی موثر ہیلٹنی درج ذیل ہے

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

اور امتیازی قیمتیں (جنہیں  $\ell$  کی صورت میں لکھا گیا ہے)  $^{۴۴}$  درج ذیل ہیں (مساوات ۴.۷۰)۔

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2(j_{\text{عظمی}} + \ell + 1)^2}$$

ا. مسئلہ نمونہ ولہن میں  $e = \lambda$  لیتے ہوئے  $\langle 1/r \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات ۶.۵۵ سے کریں۔

ب.  $\ell = \lambda$  لیتے ہوئے  $\langle 1/r^2 \rangle$  تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات ۶.۵۶ سے کریں۔

سوال ۶.۳۴: رشتہ کرامر<sup>۴۵</sup>

$$(۶.۱۰۴) \quad \frac{s+1}{n^2} \langle r^s \rangle - (2s+1)a \langle r^{s-1} \rangle + \frac{s}{4} [(2\ell+1)^2 - s^2] a^2 \langle r^{s-2} \rangle = 0$$

ثابت کریں؛<sup>۴۶</sup> یہ ہائیڈروجن کے حال  $\psi_{n\ell m}$  میں الیکٹران کے لئے،  $r$  کی تین مختلف طاقتوں ( $s-1$ ،  $s$ ) اور  $(s+1)$  کے توقعاتی قیمتوں کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۳) کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2 a^2} \right] u$$

$\int (ur^s u'') dr$  کو  $\langle r^s \rangle$ ،  $\langle r^{s-1} \rangle$ ،  $\langle r^{s-2} \rangle$  کی صورت میں لکھیں۔ اس کے بعد مکمل بالخصوص کے ذریعہ دہرے تفرق کو گھٹائیں۔ دکھائیں کہ

$$\int (ur^s u') dr = -(s/2) \langle r^{s-1} \rangle$$

$$\int (u' r^s u') dr = -[2/(s+1)] \int (u'' r^{s+1} u') dr \quad \text{اور}$$

ہوں گے۔ یہاں سے آگے چلیں۔

سوال ۶.۳۵:

<sup>۴۴</sup> جبکہ ب میں ہم  $\ell$  کو استمراری متغیر تصور کرتے ہیں؛ یوں مساوات ۴.۶۷، جس میں  $j_{\text{عظمی}}$  جولا زما عدد صحیح ہوگا ایک مستقل ہے، کے تحت  $n$  متغیر  $\ell$  کا تعلق عمل ہوگا۔ ایسا دور کرنے کی عذر سے میں نے  $n$  کو خارج کیا تاکہ  $\ell$  پر تابعیت واضح ہو۔

<sup>۴۵</sup> Kramers' relation

<sup>۴۶</sup> اس تعلق کو رشتہ پتریکے بھی کہتے ہیں۔

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

ا. رشتہ کرامرس (مساوات ۶.۱۰۴) میں  $s = 0$ ،  $s = 1$ ،  $s = 2$  اور  $s = 3$  ڈال کر  $\langle r^{-1} \rangle$ ،  $\langle r \rangle$ ،  $\langle r^2 \rangle$  اور  $\langle r^3 \rangle$  کے کلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس طرح چلتے ہیں کسی بھی مثبت طاقت کے کلیات دریافت کیے جاسکتے ہیں۔

ب. البتہ، مخالف رخ چلتے ہوئے آپ کو ایک مسئلہ درپیش ہوگا۔ آپ  $s = -1$  ڈال کر دیکھ سکتے ہیں کہ صرف  $\langle r^{-2} \rangle$  اور  $\langle r^{-3} \rangle$  کا رشتہ حاصل ہوتا ہے۔

ج. اگر آپ کسی دوسرے طریقے سے  $\langle r^{-2} \rangle$  دریافت کر پائیں، تب آپ رشتہ کرامرس استعمال کر کے باقی تمام مخفی قوتوں کے لئے کلیات دریافت کر سکتے ہیں۔ مساوات ۶.۵۶ (جو سوال ۶.۳۳ میں اخذ کی گئی ہے) استعمال کرتے ہوئے  $\langle r^{-3} \rangle$  تعین کریں، اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مساوات ۶.۶۴ کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۶: جوہر کو یکساں بیرونی برقی میدان  $E$  بیرونی  $E$  میں رکھنے سے اس کی سطحیں توانائی اپنی جگہ سے سرک جاتی ہیں، جسے شٹارک اثر<sup>۴</sup> کہتے ہیں (اور جو زیمن انٹرکابرٹی مثال ہے)۔ اس سوال میں ہم ہائیڈروجن کے  $n = 1$  اور  $n = 2$  حالات کے لئے شٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان  $z$  رخ ہے، لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H'_S = eE z = eE r \cos \theta \quad \text{بیرونی } z = eE r \cos \theta$$

اس کو بوہر ہیملٹنی (مساوات ۶.۴۲) میں اضطراب تصور کریں۔ (اس مسئلہ میں چپکر کا کوئی کردار نہیں ہے، لہذا اسے نظر انداز کریں، اور ہمیں ساخت کو نظر انداز کریں۔)

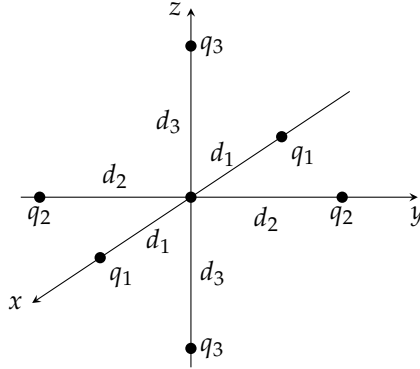
ا. دکھائیں کہ اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔

ب. پہلا ہیجان حال 4 پڑتا اخطاطی:  $\psi_{200}$ ،  $\psi_{211}$ ،  $\psi_{210}$ ،  $\psi_{21-1}$  ہے۔ اخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے، توانائی کی اول رتبہ تصحیح تعین کریں۔ توانائی  $E_2$  کا بنواری کتنی سطحوں میں ہوگا؟

ج. درج بالا حبزوں-ب میں ”موزوں“ تفاعلات موج کیا ہونگے؟ ہر ایک ”موزوں“ حال میں برقی جفت قطب معیار اثر ( $p_e = -er$ ) کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو کیے گئے میدان کے تابع نہیں ہیں؛ ظاہر ہے کہ پہلے ہیجان حال میں ہائیڈروجن ایک دائمی برقی جفت قطب معیار اثر کا حامل ہوگا۔

اشارہ: اس سوال میں بہت سارے کمالات پائے جاتے ہیں، تاہم تقریباً تمام کی قیمت صفر ہے۔ اس لئے حساب سے قبل غور کریں، اگر  $\phi$  تکمل صفر ہو تو  $r$  اور  $\theta$  کمالات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔ اگر  $\phi$  تکمل صفر ہو،  $r$  اور  $\theta$  کمالات کا حساب کرنا بے معنی ہوگا! حبزوی جواب: بیرونی  $W_{13} = W_{31} = -3eaE$ ؛ باقی تمام ارکان صفر ہیں۔

سوال ۶.۳۷: ہائیڈروجن کے  $n = 3$  حالات کے لئے شٹارک اثر (سوال ۶.۳۶) پر غور کرتے ہیں۔ ابتدائی طور پر (پہلے کی طرح، چپکر کو نظر انداز کرتے ہوئے) نو اخطاطی حالات  $\psi_{3\ell m}$  ہونگے، اور اب ہم  $z$  رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔



شکل ۶.۱۵: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (متساوی حبال کا ایک سادہ نمونہ؛ سوال ۶.۳۹)۔

۱. اضطرابی ہیلٹنی کو تلف ہر کرنے والا  $9 \times 9$  متالب تیار کریں۔ جزوی جواب:

$$\langle 300|z|310 \rangle = -3\sqrt{6}a, \quad \langle 310|z|320 \rangle = -3\sqrt{3}a, \quad \langle 31 \pm 1|z|32 \pm 1 \rangle = -(9/2)a$$

ب. امتیازی قیمتیں اور انکے انحطاط دریافت کریں۔

سوال ۶.۳۸: ڈیوٹریم<sup>۳۸</sup> کے زمینی حال ( $n = 1$ ) میں نہایت مہین منتقلی کی بدولت خارج نورس کا طول موج، سنٹی میٹروں میں، تلاش کریں۔ ڈیوٹریم در حقیقت ”بھاری“ ہائیڈروجن ہے، جس کے مرکز میں ایک اضافی نیوٹران پایا جاتا ہے؛ پروٹان اور نیوٹران کی بندش سے ڈیوٹریم<sup>۳۹</sup> پیدا ہوتا ہے، جس کا چکر 1 اور مقناطیسی معیار اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d$$

ہے؛ ڈیوٹریم کا  $g$  جزو ضربی 1.71 ہے۔

سوال ۶.۳۹: ایک قلم میں متربی بارداریہ کے برقی میدان جوہر کی سطحیں توانائی کو مضطرب کرتے ہیں۔ سادہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۵)، فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کے گرد نقطی بار کی تین جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ (چونکہ چکر اس سوال سے غیر متعلقہ ہے، لہذا اسے نظر انداز کریں۔)

۱. فرض کریں  $d_1, r \ll d_2, r \ll d_3$  ہے۔ دکھائیں:

$$H' = V_0 + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)r^2,$$

deuterium<sup>۳۸</sup>  
deuteron<sup>۳۹</sup>

جہاں درج ذیل ہیں۔

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{d_i^3}, \quad V_0 = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2)$$

ب. زمینی حال توانائی کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔

ج. پہلے ہجبان حالات ( $n = 2$ ) کی توانائی کے اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں اس پار پڑتا انحطاطی نظام کا بنواری کتنی سطحوں میں ہوگا؟

۱. کعبہ تشاکل<sup>۵۰</sup>،  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ ؛

۲. چوزاویہ تشاکل<sup>۵۱</sup>،  $\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3$ ؛

۳. قائمہ معینہ<sup>۵۲</sup> تشاکل کی عمومی صورت (جس میں تینوں مختلف ہوں گے)۔

سوال ۶.۴۰: بعض اوقات  $\psi_n^1$  کو غیر مضطرب تفاعلات موج (مساوات ۶.۱۱) میں پھیلائے بغیر مساوات ۶.۱۰ کو بلا واسطہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اسکی دو خوبصورت مثالیں درج ذیل ہیں۔

۱. ہائیڈروجن کے زمینی حال میں شٹارک اثر۔

۲. یکساں بیرونی برقی میدان  $E$  کی صورت میں ہائیڈروجن کے زمینی حال کا اول رتبی تصحیح تلاش کریں (سوال ۶.۳۶؛ شٹارک اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کا درج ذیل روپ

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/a} \cos \theta$$

استعمال کر کے دیکھیں؛ آپ نے مستطالات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتی ہوں۔

۲. زمینی حال توانائی کی دوم رتبی تصحیح مساوات ۶.۱۴ کی مدد سے تعیین کریں (جیسا اپنے سوال ۶.۳۶-الف میں دیکھا اول رتبی تصحیح صفر ہوگی)۔ جواب:  $-m(3a^2 eE / 2\hbar)^2$  (بیرونی  $E$ )

ب. اگر پروٹان کا برقی جفت قطب معیار اثر  $p$  ہوتا، تو ہائیڈروجن میں الیکٹران کی محلی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{ep \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

۱. زمینی حال تفاعل موج کی اول رتبی تصحیح کو مساوات ۶.۱۰ حل کر کے تلاش کریں۔

<sup>۵۰</sup>cubic symmetry

<sup>۵۱</sup>tetragonal symmetry

<sup>۵۲</sup>orthorhombic symmetry

۲. دکھائیں کہ اس رتبہ تک جو ہر کامل برقی جفت قطب معیار اثر (حیرت کی بات ہے) صفر ہے۔
۳. زمینی حال توانائی کی دومرتبی تصحیح مساوات ۶.۱۴ سے تعین کریں۔ اولرتبی تصحیح کتنی ہوگی؟





## باب ۷

# تغیری اصول

### ۷.۱ نظریہ

فرض کریں آپ ایک نظام، جسے ہیمیلٹنی  $H$  بیان کرتی ہو، کی زمینی حال توانائی  $E_{gs}$  کا حساب کرنا چاہتے ہیں لیکن آپ (غیر تابع وقت) مساوات شروڈنگر حل نہیں کر پاتے۔ اصول تغیرتے آپ کو  $E_{gs}$  کی بالائی حد بندی دیتا ہے، اور بعض اوقات آپ کو صرف اسی سے عرض ہوگا، اور عموماً، ہوشیاری سے کام لیتے ہوئے آپ بالکل ٹھیک قیمت کے متریب قیمت حاصل کر سکیں گے۔ آئیں اس کا استعمال دیکھیں: کوئی ایک معمول شدہ تفاعل  $\psi$  لیں۔ میں درج ذیل دعویٰ کرتا ہوں:

$$(۷.۱) \quad E_{gs} \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \langle H \rangle$$

یعنی کسی بھی (مکمل طور پر عسلط) حال  $\psi$  میں  $H$  کی توقعاتی قیمت کی تخمین، زمینی حال توانائی سے زیادہ ہوگی۔ یقیناً، اگر  $\psi$  اتفاقیاً ہیجان حالات میں سے ایک ہو، تب  $\langle H \rangle$  کی قیمت  $E_{gs}$  سے تباوز کرے گی؛ (جاننے والا) اصل نقطہ یہ ہے کہ کسی بھی تفاعل  $\psi$  کے لیے درست ہوگا۔

ثبوت: چونکہ  $H$  کے (نامعلوم) امتیازی تفاعلات مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہذا ہم  $\psi$  کو ان کا خطی جوڑ:

$$H\psi_n = E_n\psi_n \quad \text{جہاں} \quad \psi = \sum_n c_n\psi_n$$

ہے لکھ سکتے ہیں۔ چونکہ  $\psi$  معمول شدہ ہے، لہذا درج ذیل ہوگا

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \left| \sum_n c_n \psi_n \right. \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

variational principle<sup>۱</sup>

<sup>۲</sup> اگر ہیمیلٹنی متغیر حالات کے ساتھ بکھر حالات کا بھی حاصل ہو، تب ہمیں مجموعہ کے ساتھ عمل بھی درکار ہوگا، تاہم باقی دلیل یہی رہی

گی۔

باب ۷. تغیری اصول

(جہاں فرض کیا گیا ہے کہ امتیازی تعاملات معیاری عمود شدہ ہیں:  $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$ )۔ ساتھ ہی درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H \rangle = \left\langle \sum_m c_m \psi_m \middle| H \sum_n c_n \psi_n \right\rangle = \sum_m \sum_n c_m^* E_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2$$

لیکن تعریف کی رو سے، زمینی حال توانائی اصل امتیازی قیمت ہوگی، لہذا  $E_{gs} \leq E_n$  ہوگا، جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\langle H \rangle \geq E_{gs} \sum_n |c_n|^2 = E_{gs}$$

ہم یہی ثابت کرنا چاہتے تھے۔

□

مثال ۷.۱: فرض کریں ہم ایک بُعدی ہارمونی مرتعش:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ یقیناً، ہم اس کا ٹھیک ٹھیک جواب جانتے ہیں (مسواۃ ۲.۶۱):  $E_{gs} = (1/2) \hbar \omega$ ؛ جس سے اس ترکیب کو پرکھ جاسکتا ہے۔ ہم گاوسی تعامل:

$$(۷.۲) \quad \psi(x) = A e^{-bx^2}$$

کو اپنا ”آزمائشی“ تعامل موج منتخب کرتے ہیں، جہاں  $b$  ایک مستقل ہے، اور  $A$  کو معمول زنی

$$(۷.۳) \quad 1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \Rightarrow A = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4}$$

تعیین کرتی ہے۔ اب

$$(۷.۴) \quad \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

ہے، جبکہ یہاں

$$(۷.۵) \quad \langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-bx^2}) dx = \frac{\hbar^2 b}{2m}$$

اور

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} x^2 dx = \frac{m \omega^2}{8b}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۶) \quad \langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m \omega^2}{8b}$$

مسوات ۷.۱ کے تحت کسی بھی  $b$  کے لئے یہ  $E_{gs}$  سے تجاوز کرے گا؛ سخت سے سخت حد بندی کی خاطر ہم  $\langle H \rangle$  کی اقل قیمت تلاش کرتے ہیں:

$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m \omega^2}{8b^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{m \omega}{2\hbar}$$

اس کو واپس  $\langle H \rangle$  میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۷.۷) \quad \langle H \rangle_{\min} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

یہاں ہم بالکل ٹھیک زمینی حال توانائی حاصل کر پائے ہیں، جو حیرانی کی بات نہیں، چونکہ میں نے (انتفاض) ایسا آزمائشی تنفس منتخب کیا جس کا روپ ٹھیک اصل زمینی حال (مسوات ۲.۵۹) کی طرح ہے۔ تاہم، گاوسی کے ساتھ کام کرنا انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے، لہذا یہ ایک مقبول آزمائشی تنفس عمل ہے، اور وہاں بھی استعمال کیا جاتا ہے جہاں اصل زمینی حال کے ساتھ اس کی کوئی مشابہت نہ ہو۔ □

مثال ۷.۲: فرض کرے ہم ڈیلٹا تنفس مخفی:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \alpha \delta(x)$$

کی زمینی حال توانائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہمیں ٹھیک جواب (مسوات ۲.۱۲۹):  $E_{gs} = -m\alpha^2/2\hbar^2$  یہاں بھی معلوم ہے۔ پہلے کی طرح، ہم گاوسی آزمائشی تنفس عمل (مسوات ۷.۲) کا انتخاب کرتے ہیں۔ ہم معمول زنی کر چکے ہیں، اور  $\langle T \rangle$  کا حساب کر چکے ہیں؛ ہمیں صرف درج ذیل درکار ہے۔

$$\langle V \rangle = -\alpha |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2bx^2} \delta(x) dx = -\alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

ظاہر ہے

$$(۷.۸) \quad \langle H \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} - \alpha \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ تمام  $b$  کے لیے  $E_{gs}$  سے تجویز کرے گا۔ اس کی اصل قیمت تلاش کرتے ہیں

$$\frac{d}{db} \langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}} = 0 \Rightarrow b = \frac{2m^2 \alpha^2}{\pi \hbar^4}$$

لہذا

$$(۷.۹) \quad \langle H \rangle_{\text{اصل}} = -\frac{m\alpha^2}{\pi \hbar^2}$$

□

ہوگا، جو یقیناً  $E_{gs}$  سے معمولی زیادہ ہے (چونکہ  $\pi > 2$  ہے)۔

میں نے کہا آپ کسی بھی (معمول شدہ) آزمائشی تقاضا عمل  $\psi$  کا انتخاب کر سکتے ہیں، جو ایک لحاظ سے درست ہے۔ البتہ، غیر استمراری تقاضا کے دہرا تفرق (جو  $\langle T \rangle$  کی قیمت حاصل کرنے کے لیے درکار ہوگا) کو معنی خیز مطلب مختص کرنے کے لیے انوکھے چال چلتا ہوگا۔ ہاں، اگر آپ محتاط رہیں تو، استمراری تقاضا جن میں بل پائے جاتے ہوں کا استعمال نہ بننا آسان ہے۔ اگلی مثال میں ان سے نمٹنا دکھایا گیا ہے۔<sup>۳</sup>

مثال ۷.۳: آزمائشی ”مکونی“ تقاضا موج (شکل ۷.۱):

$$(۷.۱۰) \quad \psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

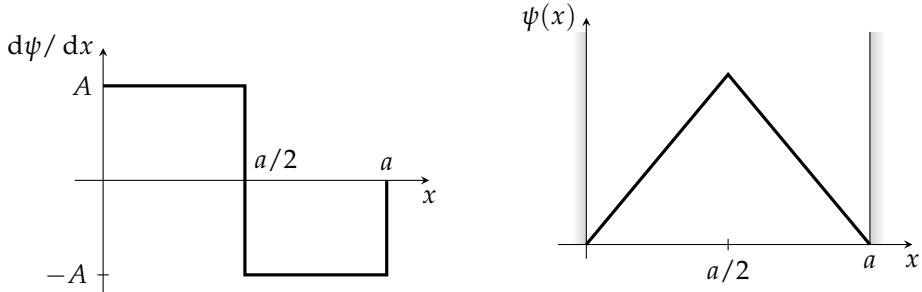
استعمال کرتے ہوئے ایک بُعدی لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی کی بالائی حد بندی تلاش کریں، جہاں  $A$  معمولی زنی سے تعین کیا جائے گا۔

$$(۷.۱۱) \quad 1 = |A|^2 \left[ \int_0^{a/2} x^2 dx + \int_{a/2}^a (a-x)^2 dx \right] = |A|^2 \frac{a^3}{12} \Rightarrow A = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{3}{a}}$$

جیسا کہ شکل ۷.۲ میں دکھایا گیا ہے یہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} A & 0 < x < a/2 \\ -A & a/2 < x < a \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

<sup>۳</sup> ایسا تقاضا عمل (مثلاً گاوسی) جو کنویں سے باہر سرکنا ہوا استعمال کرنا بے مقصد ہے، چونکہ آپ  $\langle V \rangle$  حاصل کرتے ہیں اور مساوات ۷.۱۱ کچھ نہیں بتاتی۔



شکل ۱.۷: لامتناہی چوکور کنواں کے لئے آزمائشی ٹکونی  
تف عمل موج (مساوات ۷.۱۰)۔

سیدھی تف عمل کا تفرق ایک ڈیلٹا تف عمل ہے (سوال ۲.۲۴-ب دیکھیں):

$$(۷.۱۲) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = A\delta(x) - 2A\delta(x - a/2) + A\delta(x - a)$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۱۳) \quad \begin{aligned} \langle H \rangle &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} \int [\delta(x) - 2\delta(x - a/2) + \delta(x - a)] \psi(x) dx \\ &= -\frac{\hbar^2 A}{2m} [\psi(0) - 2\psi(a/2) + \psi(a)] = \frac{\hbar^2 A^2 a}{2m} = \frac{12\hbar^2}{2ma^2} \end{aligned}$$

ٹھیک زمینی حال توانائی  $E_{gs} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  (مساوات ۲.۲۷) ہے، لہذا یہ مسئلہ کارآمد ہے ( $12 > \pi^2$ )۔ □

اصول تغیریت انتہائی طاقتور اور استعمال کے نقطہ نظر سے شرمناک حد تک آسان ہے۔ کسی پیچیدہ سالہ کی زمینی حال توانائی جاننے کے لئے ماہر کیمیا متعدد مقدار معلوم والا آزمائشی تف عمل موج منتخب کر کے ان مقدار معلوم کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے  $\langle H \rangle$  کی سب سے کم ممکن قیمت تلاش کرتا ہے۔ اصل تف عمل موج کے ساتھ  $\psi$  کی کوئی مشابہت نہ ہونے کی صورت میں بھی آپ کو  $E_{gs}$  کی حیرت کن حد تک درست قیمت حاصل ہوگی۔ ظاہر ہے، اگر آپ  $\psi$  کو اصل تف عمل کے جتنا زیادہ متعرب منتخب کر پائیں، اتنا بہتر ہوگا۔ اس ترکیب کے ساتھ صرف ایک مسئلہ ہے: آپ کبھی بھی نہیں جان سکتے کہ آپ ہدف کے کتنے متعرب ہیں؛ آپ صرف بالائی حدودی جان پاتے ہو۔<sup>۴</sup> مزید، اس روپ میں یہ ترکیب صرف زمینی حال کے لیے کارآمد ہے (البتہ سوال ۷.۴ دیکھیں)۔

<sup>۴</sup> عموماً یہ بہت بڑا مسئلہ نہیں اور بعض اوقات درستگی کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ زمینی حال ہیلم کو کئی یا معنی ہندسوں تک اس طرح حل کیا گیا ہے۔

سوال ۷.۱: درجہ ذیل مخفیہ کی زمینی حال توانائی جاننے کے لئے گاوسی آزمائشی تفاعل (مساوات ۷.۲) کی سب سے کم بالائی حد بندی تلاش کریں۔

$$V(x) = \alpha |x| \quad ; \quad \text{خطی مخفیہ}$$

$$V(x) = \alpha x^4 \quad \text{چو طاق ت مخفیہ}$$

سوال ۷.۲: ایک بُعدی ہارمونی سر تفاعل کے  $E_{gs}$  کی بہترین حد بندی درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل عمل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

استعمال کر کے تلاش کریں، جہاں  $A$  معمول زنی سے تعین ہوگا اور  $b$  قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

سوال ۷.۳: ڈیلٹا تفاعل مخفیہ  $V(x) = -\alpha \delta(x)$  کی  $E_{gs}$  کی بہترین بالائی حد بندی کو ٹکنونی آزمائشی تفاعل عمل (مساوات ۷.۱۰، لیکن جس کا وسط مبداء پر ہو) استعمال کر کے تلاش کریں۔ یہاں  $a$  قابل تبدیل مقدار معلوم ہے۔

سوال ۷.۴:

۱. اصول تغیریت کا درجہ ذیل ضمنی نتیجہ ثابت کریں: اگر  $\langle \psi | \psi_{gs} \rangle = 0$  ہو، تب  $\langle H \rangle \geq E_{fe}$  ہوگا، جہاں پہلے ہیجان حال کی توانائی  $E_{fe}$  ہے۔

یوں، اگر ہم کسی طرح ایسا آزمائشی تفاعل تلاش کر سکیں جو اصل زمینی حال کو عمودی ہو، تب ہم پہلے ہیجان حال کی بالائی حد بندی جان سکیں گے۔ چونکہ ہم زمینی حال تفاعل  $\psi_{gs}$  (غالباً) نہیں جانتے، لہذا عموماً یہ کہنا مشکل ہوگا کہ  $\psi$  ہمارے آزمائشی تفاعل  $\psi_{gs}$  کو عمودی ہوگا۔ ہاں، اگر  $x$  کے لحاظ سے مخفیہ  $V(x)$  جفت تفاعل ہو، تب زمینی حال بھی جفت ہوگا، اور یوں کوئی بھی طاق آزمائشی تفاعل خود بخود اس ضمنی نتیجہ کے شرط پر پورا اترے گا۔

ب. آزمائشی تفاعل:

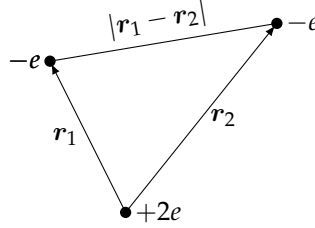
$$\psi(x) = A x e^{-bx^2}$$

استعمال کرتے ہوئے ایک بُعدی ہارمونی سر تفاعل کے پہلے ہیجان حال کی بہترین بالائی حد بندی تلاش کریں۔

سوال ۷.۵:

۱. اصول تغیریت استعمال کر کے ثابت کریں کہ رتبہ اول غیر انخطاطی نظریہ اضطراب ہر صورت زمینی حال توانائی کی قیمت سے تجاوز کرے گا (یا کم از کم کبھی بھی اس سے کم قیمت نہیں دے گا)۔

ب. آپ حبز و الف جاننے ہوئے توقع کریں گے کہ زمینی حال کی دو تہی تصحیح لازماً منفی ہوگی۔ مساوات ۶.۱۵ کا معائنہ کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ ایسا ہی ہوگا۔



شکل ۷.۳: ہیلیم جوہر۔

## ۷.۲ ہیلیم کا زمینی حال

ہیلیم جوہر (شکل ۷.۳) کے مرکزہ میں دو پروٹان (اور دو نیوٹران جو ہمارے مقصد سے غیر متعلقہ ہیں) پائے جاتے ہیں اور مرکزہ کے گرد مدار میں دو الیکٹران حرکت کرتے ہیں۔ (مہین ساخت اور باریک تہج نظر انداز کرتے ہوئے) اس نظام کی ہیملٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$(۷.۱۴) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{|r_1 - r_2|}\right)$$

ہم نے زمینی حال توانائی  $E_{gs}$  کا حساب کرنا ہے۔ طبعی طور پر یہ دونوں الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی کو ظاہر کرتی ہے۔ ( $E_{gs}$  جانتے ہوئے، ہم ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار ”بارداریتی توانائی“ معلوم کر سکتے ہیں (سوال ۷.۶ دیکھیں)۔ تجربہ گاہ میں ہیلیم کی زمینی حل توانائی کی قیت کی پیمائش انتہائی زیادہ درستگی تک کی گئی ہے۔

$$(۷.۱۵) \quad E_{gs} = -78.975 \text{ eV} \quad (\text{تجرباتی})$$

ہم نظریہ سے اس عدد کو حاصل کرنا چاہیں گے۔

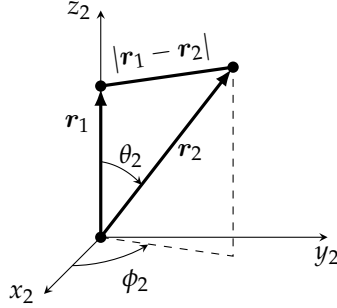
یہ تجسس کی بات ہے کہ ابھی تک اتنے سادہ اور اہم مسئلے کا ٹھیک حل نہیں ڈھونڈا جا سکا ہے۔<sup>۵</sup> الیکٹران دفع:

$$(۷.۱۶) \quad V_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|}$$

مسئلہ پیدا کرتا ہے۔ اس جزو کو نظر انداز کرنے سے  $H$  دو ہائیڈروجن ہیملٹنیوں میں علیحدہ علیحدہ ہوتا ہے (تاہم مرکزہ بار  $e$  کی بجائے  $2e$  ہوگا)؛ ٹھیک ٹھیک حل ہائیڈروجنی تفاعلات موج کا حاصل ضرب:

$$(۷.۱۷) \quad \psi_0(r_1, r_2) \equiv \psi_{100}(r_1)\psi_{100}(r_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

<sup>۵</sup>ہیلیم کے کئی خرد و خال والے، ایسے تین جسی مسئلے پائے جاتے ہیں جن کا ٹھیک ٹھیک حل حاصل کیا جا سکتا ہے، تاہم ان میں صحیح غیر کولب ہیں (سوال ۷.۱۷ دیکھیں)۔



شکل ۷.۴: محدود کا انتخاب برائے  $r_2$  مکمل (مساوات ۷.۲۰)۔

ہوگا، اور توانائی  $8E_1 = -109 \text{ eV}$  الیکٹران وولٹ (مساوات ۵.۳۱) ہوگی۔<sup>۱</sup> یہ  $-79 \text{ eV}$  سے بہت مختلف ہے، تاہم یہ ابھی ابتدائی ہے۔

ہم  $\psi_0$  کو آزمائشی تفاعل موج لے کر  $E_{gs}$  کی بہتر تخمین اصول تغیریت سے حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ یہ ہیملٹنی کے زیادہ تر حصے کا امتیازی تفاعل ہے:

$$H\psi_0 = (8E_1 + V_{ee})\psi_0 \quad (۷.۱۸)$$

لہذا یہ بہت بہتر انتخاب ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$\langle H \rangle = 8E_1 + \langle V_{ee} \rangle \quad (۷.۱۹)$$

جہاں درج ذیل ہے۔<sup>۲</sup>

$$\langle V_{ee} \rangle = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{8}{\pi a^3} \right)^2 \int \frac{e^{-4(r_1+r_2)/a}}{|r_1 - r_2|} d^3r_1 d^3r_2 \quad (۷.۲۰)$$

میں  $r_2$  مکمل پہلے حل کرتا ہوں؛ اس مقصد کے لئے  $r_1$  مقررہ ہوگا، اور ہم  $r_2$  محدودی نظام کو یوں رکھتے ہیں کہ اس کا قطبی محور  $r_1$  پر پایا جاتا ہو (شکل ۷.۴)۔ وٹانوں کو سائن کے تحت

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2} \quad (۷.۲۱)$$

<sup>۱</sup> یہاں  $a$  سادہ داس یوہر ہے اور  $n$  یوہر توانائی  $E_n = -13.6/n^2 \text{ eV}$  ہے؛ یاد رہے کہ ایک مرکزہ جس کا جوہری عدد  $Z$  ہو، کے لئے  $E_n \rightarrow Z^2 E_n$  اور  $a \rightarrow a/Z$  ہوں گے (سوال ۳.۱۶)۔ مساوات ۷.۱۷ کے ساتھ وابستہ چپکری تشکیل غیر تاشکی (یک تاشکی) ہوگی۔  
<sup>۲</sup> آپ  $V_{ee} = H'$  لیتے ہوئے مساوات ۷.۲۰ کا مفہوم اول رتبہ نظریہ اضطراب لے سکتے ہیں۔ میں اس کو اس ترکیب کا غلط استعمال سمجھتا ہوں، چونکہ یہاں اضطراب اور غیر مضطرب ہیملٹنی ہم پلہ ہیں۔ اس وجہ سے میں اس کو تغیریتی حساب تصور کرتا ہوں، جس میں ہم  $E_{gs}$  کی بالائی حدود کی تلاش کرتے ہیں۔



ابھذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۲۲) \quad I_2 \equiv \int \frac{e^{-4r^2/a}}{|r_1 - r_2|} d^3 r_2 = \int \frac{e^{-4r^2/a}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}} r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\phi_2$$

متغیر  $\phi_2$  کا (نسایت آسان) مکمل  $2\pi$  دے گا؛ متغیر  $\theta_2$  کا مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}} d\theta_2 &= \left. \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}}{r_1 r_2} \right|_0^\pi \\ &= \frac{1}{r_1 r_2} \left( \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2} \right) \\ (۷.۲۳) \quad &= \frac{1}{r_1 r_2} [(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|] = \begin{cases} 2/r_1 & r_2 < r_1 \\ 2/r_2 & r_2 > r_1 \end{cases} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\pi \left( \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-4r_2/a} r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^\infty e^{-4r_2/a} r_2 dr_2 \right) \\ (۷.۲۴) \quad &= \frac{\pi a^3}{8r_1} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2r_1}{a} \right) e^{-4r_1/a} \right] \end{aligned}$$

اس طرح  $\langle V_{ee} \rangle$  درج ذیل ہوگا۔

$$\left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{8}{\pi a^3} \right) \int \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2r_1}{a} \right) e^{-4r_1/a} \right] e^{-4r_1/a} r_1 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\phi_1$$

زاویائی کمالات  $4\pi$  دیں گے، جبکہ  $r_1$  مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\int_0^\infty \left[ r e^{-4r/a} - \left( r + \frac{2r^2}{a} \right) e^{-8r/a} \right] dr = \frac{5a^2}{128}$$

یوں، آخر کار

$$(۷.۲۵) \quad \langle V_{ee} \rangle = \frac{5}{4a} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = -\frac{5}{2} E_1 = 34 \text{ eV}$$

جس کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۲۶) \quad \langle H \rangle = -109 \text{ eV} + 34 \text{ eV} = -75 \text{ eV}$$

یہ جواب زیادہ برا نہیں ہے (یاد رہے، تجرباتی قیمت  $79 \text{ eV}$  ہے)۔ تاہم ہم اس سے بہتر جواب حاصل کر سکتے ہیں۔

ہم  $\psi_0$  (جو دو الیکٹرانوں کو یوں تصور کرتا ہے جیسے یہ ایک دوسرے پر بالکل اثر انداز نہیں ہوتے) سے بہتر زیادہ حقیقت پسند آزمائشی تف عمل سوچ سکتے ہیں۔ ایک الیکٹران کے دوسرے الیکٹران پر اثر کو مکمل نظر انداز کرنے کی بجائے، ہم ایک الیکٹران کو اوسط منفی بار کا بادل تصور کرتے ہیں، جو مرکزہ کو جزوی طور پر سپر (پناہ) کرتا ہے، جس کی بنا پر دوسرے الیکٹران کو موثر مرکزہ بار  $(Z)$  کی قیمت 2 سے کچھ کم نظر آتی ہے۔ یہ تصور ہمیں آمادہ کرتی ہے کہ ہم درج ذیل روپ کا آزمائشی تف عمل استعمال کریں۔

$$(۷.۲۷) \quad \psi_1(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi a^3} e^{-Z(r_1+r_2)/a}$$

ہم  $Z$  کو تغیری مقدار معلوم تصور کر کے اس کی وہ قیمت منتخب کرتے ہیں جو  $H$  کی قیمت کم تر بناتی ہو (دھیان رہے کہ تغیریت ترکیب میں کبھی بھی ہیمیلٹنی تبدیل نہیں کی جاتی؛ ہیلیئم کی ہیمیلٹنی مساوات ۷.۱۴ دیتی ہے اور دیتی رہے گی۔ البتہ ہیمیلٹنی کی تخمینی قیمت کے بارے میں سوچ کر بہتر آزمائشی تف عمل موج حاصل کرنا چاہئے)۔

یہ تف عمل موج اس ”غیر مضطرب“ ہیمیلٹنی (الیکٹران دفع نظر انداز کیا گیا ہے) کا امتیازی حال ہے جس کے کولمب اجزاء میں 2 کی بجائے  $Z$  ہے۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے، ہم  $H$  (مساوات ۷.۱۴) کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(۷.۲۸) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(Z-2)}{r_1} + \frac{(Z-2)}{r_2} + \frac{1}{|r_1 - r_2|} \right)$$

نہاں ہے کہ  $H$  کی تحقیقاتی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(۷.۲۹) \quad \langle H \rangle = 2Z^2 E_1 + 2(Z-2) \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \langle V_{ee} \rangle$$

یہاں  $\langle 1/r \rangle$  سے مراد (یک ذروی) ہائیڈروجنی زمینی حال  $\psi_{100}$  (جس میں مرکزہ بار  $Z$  ہو) میں  $1/r$  کی توقعاتی قیمت ہے؛ مساوات ۶.۵۵ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۳۰) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{a}$$

یہاں بھی  $V_{ee}$  کی توقعاتی قیمت وہی ہوگی جو پہلے تھی (مساوات ۷.۲۵)، لیکن اب ہم  $Z = 2$  کی بجائے اختیاری  $Z$  استعمال کرنا چاہتے ہیں؛ لہذا ہم  $a$  کو  $2/Z$  سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(۷.۳۱) \quad \langle V_{ee} \rangle = \frac{5Z}{8a} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) = -\frac{5Z}{4} E_1$$

ان تمام کو اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۷.۳۲) \quad \langle H \rangle = [2Z^2 - 4Z(Z - 2) - (5/4)Z] E_1 = [-2Z^2 + (27/4)Z] E_1$$

اصول تغیریت کے تحت  $Z$  کی کسی بھی قیمت کے لیے یہ مقدار  $E_{gs}$  سے تجاوز کرے گی۔ بالائی حد بندی کی سب سے کم قیمت تب پائی جائے گی جب  $\langle H \rangle$  کی قیمت کم تر ہو:

$$\frac{d}{dZ} \langle H \rangle = [-4Z + (27/4)] E_1 = 0$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۷.۳۳) \quad Z = \frac{27}{16} = 1.69$$

یہ ایک معقول منتخب نظر آتا ہے؛ جو کہتا ہے دوسرا الیکٹران مرکزہ کو سپر کرتا ہے جس کی بنا پر مرکزہ کا موثر بار 2 کی بجائے 1.69 نظر آتا ہے۔ اس قیمت کو  $Z$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

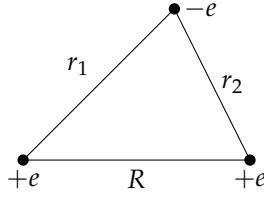
$$(۷.۳۴) \quad \langle H \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^6 E_1 = -77.5 \text{ eV}$$

متبادل تبدیل مقدار معلوم کی تعداد بڑھا کر، زیادہ پیچیدہ آزمائشی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے، ہیلیم کی زمینی حال توانائی کو اس طرح انتہائی زیادہ درستگی تک حاصل کیا گیا ہے۔ ہم اصل جواب کے دو فی صد سے بھی کم قریب ہیں، لہذا اس کو یہی پرچھوڑتے ہیں۔<sup>۸</sup>

سوال ۷.۶: ہیلیم کی زمینی حال توانائی  $E_{gs} = -79 \text{ eV}$  لیتے ہوئے باردار بتی توانائی (صرف ایک الیکٹران اکھاڑنے کے لیے درکار توانائی) کا حساب کریں۔ اشارہ: پہلے ہیلیم باردار  $\text{He}^+$ ، جس کے مرکزہ کے گرد صرف ایک الیکٹران مدار میں حرکت کرتا ہے، کی زمینی حال توانائی تلاش کریں؛ اس کے بعد دونوں توانائیوں کا فرق لیں۔

سوال ۷.۷: اس حصے میں متحمل ترکیبات کا اطلاق  $\text{H}^-$  اور  $\text{Li}^+$  باردار یہ پر کریں (جن میں ہیلیم کی طرح دو الیکٹران پائے جاتے ہیں، لیکن مرکزہ کی بار بالترتیب  $Z = 1$  اور  $Z = 3$  ہیں)۔ ایک ایک باردار یہ کا موثر (جزوی سپر شدہ) مرکزہ کی بار تلاش کر کے،  $E_{gs}$  کی بہترین بالائی حد بندی تعیین کریں۔ تبصرہ: باردار یہ  $\text{H}^-$  کی صورت میں آپ دیکھیں گے کہ  $\langle H \rangle > -13.6 \text{ eV}$  ہے، جس کے تحت مفید حال نہیں ہوگا، چونکہ توانائی کے نقطہ نظر سے زیادہ بہتر صورتحال یہ ہوگی کہ ایک الیکٹران نکل کر اڑ جائے اور پیچھے معادل ہائیڈروجن جو ہر چھوڑے۔ یہ حیرت کی بات نہیں چونکہ ہیلیم کے لحاظ سے مرکزہ کے ساتھ الیکٹران کی قوت کشش کم ہے، اور الیکٹران کی باہم دافع قوت جو ہر کوڑنا چاہتی ہے۔ البتہ، حقیقت میں یہ سب عنط ہے۔ زیادہ نفیس آزمائشی تفاعل (سوال ۷.۲۰ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے دکھایا جاسکتا ہے کہ  $E_{gs} < -13.6 \text{ eV}$  ہے، لہذا مفید

<sup>۸</sup> ایسا آزمائشی تفاعل، جو زمینی حال کو عموماً ہی ہو، منتخب کر کے ہیلیم کا پہلا چھان حال اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل ۷.۵: ہائیڈروجن سالمہ باردار  $H_2^+$

حال موجود ہو گا۔ تاہم، یہ بمشکل مقید ہے، اور ہجبان حال نہیں پائے جاتے، اور یوں  $H_-$  کا کوئی غیر مسلسل طیف نہیں پایا جاتا (تمام استمراریہ سے اور استمراریہ میں ہوں گے)۔ نتیجتاً، تجربہ گاہ میں اس کا مطالعہ کرنا دشوار ہوتا ہے، اگرچہ سورج کی سطح پر یہ وافر مقدار میں پائے جاتے ہیں۔

### ۷.۳ ہائیڈروجن سالمہ باردار

اصول تغیریت کا ایک اور کلاسیکی استعمال ہائیڈروجن سالمہ باردار  $H_2^+$ ، جو دو پروٹان کے کولمب میدان میں ایک الیکٹران پر مشتمل ہے، کا معائنہ ہے (شکل ۷.۵)۔ میں فی الوقت فرض کرتا ہوں کہ دونوں پروٹان کا مقام مقصورہ، اور ان کے بیچ فاصلہ  $R$  ہے، اگرچہ اس حساب کا ایک دلچسپ ذیلی نتیجہ  $R$  کی اصل قیمت ہوگی۔ ہیملٹنی درجہ ذیل ہے

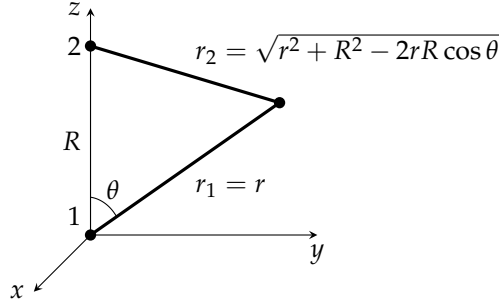
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad (۷.۳۵)$$

جہاں الیکٹران سے متعلقہ پروٹان تک فاصلے  $r_1$  اور  $r_2$  ہیں۔ ہمیشہ کی طرح ہم کوشش کریں گے کہ ایک معقول آزمائشی تفاعل موج منتخب کر کے زمینی حال توانائی کی حد بندی اصول تغیریت سے دریافت کریں۔ (در حقیقت، ہماری دلچسپی یہ جاننے میں ہے کہ آیا اس نظام میں بندھن پیدا ہوگی؛ یعنی کیا ایک معادل ہائیڈروجن جوہر جمع ایک آزاد پروٹان سے اس نظام کی توانائی کم ہوگی۔ اگر ہمارا آزمائشی تفاعل موج دکھائے کہ مقید حال پایا جاتا ہے، اس سے بہتر آزمائشی تفاعل اس بندھ کو صرف زیادہ طاقتور بنا سکتا ہے۔)

آزمائشی تفاعل موج تیار کرنے کی حنا طرہ فرض کریں کہ زمینی حال (مساوات ۴.۸۰)

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۷.۳۶)$$

میں ہائیڈروجن جوہر کے قریب فاصلہ  $R$  پر، دوسرا پروٹان ”لامتناہی“ سے لاکر رکھتے ہوئے باردار یہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر رداس بولہ  $R$  کافی زیادہ ہو تب الیکٹران کا تفاعل موج غالباً زیادہ تبدیل نہیں ہوگا۔ تاہم، ہم دونوں پروٹان کو ایک نظر سے دیکھنا چاہیں گے، لہذا دونوں کے ساتھ الیکٹران کی وابستگی کا احتمال ایک جیسا ہوگا۔ یوں ہم



شکل ۷.۶: مقدار  $I$  کے حساب کی خاطر محدود (مساوات ۷.۳۹)۔

آمادہ ہوتے ہیں کہ درجہ ذیل روپ کا آزمائشی تنفس استعمال کریں۔

$$(۷.۳۷) \quad \psi = A[\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)]$$

(چونکہ ہم سال باقی تنفس عمل موج کو جو ہری مدار چوں کا خطی جوڑ لکھتے ہیں لہذا ماہر کو انسانی کیب اس کو جوہری مدار چوں کے خطی جوڑ ترکیب<sup>۹</sup> کہتے ہیں۔)

پہلا کام آزمائشی تنفس عمل کی معمول زنی ہے۔

$$(۷.۳۸) \quad 1 = \int |\psi|^2 d^3 r = |A|^2 \left[ \int |\psi_0(r_1)|^2 d^3 r + \int |\psi_0(r_2)|^2 d^3 r + 2 \int \psi_0(r_1) \psi_0(r_2) d^3 r \right]$$

پہلے دو نکلات 1 ہیں (چونکہ  $\psi_0$  معمول شدہ ہے)؛ تیسرا زیادہ پیچیدہ ہے۔ درجہ ذیل لیں۔

$$(۷.۳۹) \quad I \equiv \langle \psi_0(r_1) | \psi_0(r_2) \rangle = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a} d^3 r$$

ایسا مدی نظام کھڑا کر کے، جس کے مباد پر پروٹان 1 اور  $z$  محور پر  $R$  فاصلے پر پروٹان 2 ہو (شکل ۷.۶)۔

$$(۷.۴۰) \quad r_1 = r \quad \text{اور} \quad r_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

ہوں گے لہذا اور جب ہوگا۔

$$(۷.۴۱) \quad I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-r/a} e^{-\frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}{a}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

متغیر  $\phi$  کا (نہایت آسان) مکمل  $2\pi$  دے گا۔ متغیر  $\theta$  کا مکمل کرنے کی خاطر درج ذیل لیں۔

$$y \equiv \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta} \Rightarrow d(y^2) = 2y dy = 2rR \sin \theta d\theta$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-\frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}{a}} \sin \theta d\theta &= \frac{1}{rR} \int_{|r-R|}^{r+R} e^{-y/a} y dy \\ &= -\frac{a}{rR} \left[ e^{-(r+R)/a} (r+R+a) - e^{-|r-R|/a} (|r-R|+a) \right] \end{aligned}$$

اب مکمل  $r$  با آسانی حل ہوگا۔

$$\begin{aligned} I = \frac{2}{a^2 R} \left[ -e^{-R/a} \int_0^\infty (r+R+a) e^{-2r/a} r dr + e^{-R/a} \int_0^R (R-r+a) r dr \right. \\ \left. + e^{R/a} \int_R^\infty (r-R+a) e^{-2r/a} r dr \right] \end{aligned}$$

ان عملیات کی قیمتوں کے حساب کے بعد الجبرائی تسہیل سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۷.۴۲) \quad I = e^{-R/a} \left[ 1 + \left( \frac{R}{a} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right]$$

ہم  $I$  کو ڈھانپائی مکمل<sup>۱۰</sup> کہتے ہیں؛ جو  $\psi_0(r_1)$  کے  $\psi_0(r_2)$  پر چڑھنے کی مقدار کی پیمائش ہے (دھیان رہے کہ  $R \rightarrow 0$  کی صورت میں یہ 1 کو، اور  $R \rightarrow \infty$  کی صورت 0 کو پہنچتا ہے) ڈھانپائی مکمل  $I$  کی صورت میں مستقل معمول ذنی (مساوات ۷.۳۸) درج ذیل ہوگا۔

$$(۷.۴۳) \quad |A|^2 = \frac{1}{2(1+I)}$$

اس کے بعد ہمیں آزمائشی حال  $\psi$  میں  $H$  کی توقعاتی قیمت کا حساب کرنا ہوگا۔ یاد رہے کہ

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right) \psi_0(r_1) = E_1 \psi_0(r_1)$$

ہوگا (جہاں  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$  جوہری ہائیڈروجن کی زمینی حال توانائی ہے)؛ اور  $r_1$  کی جگہ  $r_2$  کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا؛ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} H\psi &= A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right] [\psi_0(r_1) + \psi_0(r_2)] \\ &= E_1 \psi - A \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[ \frac{1}{r_2} \psi_0(r_1) + \frac{1}{r_1} \psi_0(r_2) \right] \end{aligned}$$

یوں  $H$  کی توقعاتی قیمت درجہ ذیل ہوگی۔

$$(۷.۴۴) \quad \langle H \rangle = E_1 - 2|A|^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[ \langle \psi_0(r_1) \left| \frac{1}{r_2} \right| \psi_0(r_1) \rangle + \langle \psi_0(r_1) \left| \frac{1}{r_1} \right| \psi_0(r_2) \rangle \right]$$

میں آپ کے لئے باقی دو مقدار جو بلا واسطہ مکمل:"

$$(۷.۴۵) \quad D \equiv a \langle \psi_0(r_1) \left| \frac{1}{r_2} \right| \psi_0(r_1) \rangle$$

اور مبادلہ مکمل:"

$$(۷.۴۶) \quad X \equiv a \langle \psi_0(r_1) \left| \frac{1}{r_1} \right| \psi_0(r_2) \rangle$$

کہلاتے ہیں، حل کرنے کے لئے چھوڑتا ہوں۔ بلا واسطہ مکمل کا نتیجہ:

$$(۷.۴۷) \quad D = \frac{a}{R} - \left( 1 + \frac{a}{R} \right) e^{-2R/a}$$

اور مبادلہ مکمل کا نتیجہ درجہ ذیل ہے (سوال ۷.۸ دیکھیں)۔

$$(۷.۴۸) \quad X = \left( 1 + \frac{R}{a} \right) e^{-R/a}$$

ان تمام نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے اور (مساوات ۷.۴۰ اور مساوات ۷.۴۲) یاد کرتے ہوئے کہ  $E_1 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a}$  ہے، ہم درجہ ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$(۷.۴۹) \quad \langle H \rangle = \left[ 1 + 2 \frac{(D + X)}{(1 + I)} \right] E_1$$

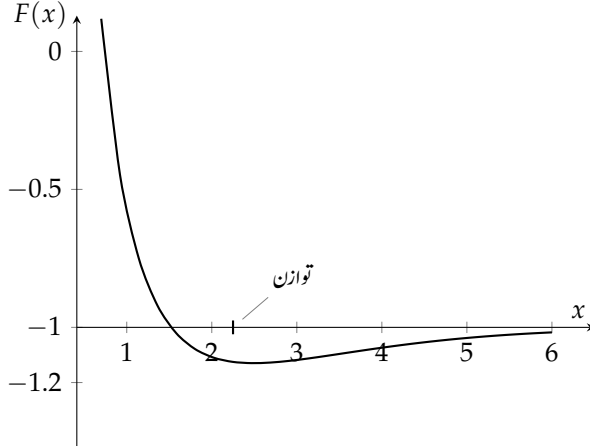
اصول تغیریت کے تحت، زمینی حال توانائی  $\langle H \rangle$  سے کم ہوگی۔ یقیناً، یہ صرف الیکٹران کی توانائی ہے؛ اس کے علاوہ پروٹان پروٹان دفع سے وابستہ مخفی توانائی:

$$(۷.۵۰) \quad V_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{2a}{R} E_1$$

بھی پائی جاتی ہے۔ یوں نظام کی کل توانائی ( $E_1 - E_1$  کی اکائیوں میں)،  $x \equiv R/a$  کا تناسب لکھتے ہوئے، درجہ ذیل سے کم ہوگی۔

$$(۷.۵۱) \quad F(x) = -1 + \frac{2}{x} \left\{ \frac{(1 - (2/3)x^2)e^{-x} + (1 + x)e^{-2x}}{1 + (1 + x + (1/3)x^2)e^{-x}} \right\}$$

direct integral<sup>۱۱</sup>  
exchange integral<sup>۱۲</sup>



شکل ۷.۷: تفاعل  $F(x)$  (مساوات ۷.۵۱) کی ترسیم مقبیل حال کی موجودگی دکھاتی ہے (بوہر رداس کی اکائیوں میں  $x$  دو پروٹان کے بیچ فاصلہ ہے)۔

اس تفاعل کو شکل ۷.۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ اس ترسیم کا کچھ حصہ  $-1$  سے نیچے ہے، جہاں معادل جوہر جمع ایک آزاد پروٹان کی توانائی ( $-13.6 \text{ eV}$ ) سے کم ہے، لہذا اس نظام میں بندھ پیدا ہوگا۔ یہ ایک شریک گرضتی بندھ ہوگا، جہاں الیکٹران دونوں پروٹان کا برابر شریک ہوگا۔ پروٹان کے بیچ توازنی فاصلہ تقریباً  $2.4$  رداس بوہر، یعنی  $0.13 \text{ nm}$  ہے (تجرباتی قیمت  $0.106 \text{ nm}$  ہے)۔ بندشی توانائی کے حساب سے حاصل قیمت  $1.8 \text{ eV}$ ، جبکہ پیمائشی قیمت  $2.8 \text{ eV}$  ہے (اصول تغیریت ہمیشہ زمینی حال توانائی سے تجاوز کرتا ہے، لہذا یہ طاقت بندھ کی کم قیمت دے گا؛ بہر حال اس کی فنکشن کریں: یہاں اہم نقطہ یہ ہے کہ بندھ پایا جاتا ہے؛ بہتر تغیری تفاعل اس مخفیہ کو مزید گہرا بنائے گا۔

سوال ۷.۸: بلا واسطہ مکمل  $D$  اور مبادلہ مکمل  $X$  مساوات ۷.۴۵ اور مساوات ۷.۴۶ کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ مساوات ۷.۴۷ اور مساوات ۷.۴۸ کے ساتھ کریں۔

سوال ۷.۹: فرض کریں ہم نے آزمائشی تفاعل موج (مساوات ۷.۳۷) میں منفی علامت استعمال کی ہوئی۔

$$\psi = A[\psi_0(r_1) - \psi_0(r_2)] \quad (7.52)$$

کوئی نیا مکمل حل کیے بغیر (مساوات ۷.۵۱ کا مکمل)  $F(x)$  معلوم کر کے ترسیم کریں۔ دکھائیں کہ ایسی صورت میں بندھ پیدا ہونے کا کوئی ثبوت نہیں ملتا۔<sup>۳</sup> (چونکہ اصول تغیریت صرف بالائی حد بندی دیتا ہے، لہذا اس سے یہ ثابت نہیں ہوگا کہ ایسے حال میں بندھ نہیں پایا جائے گا، تاہم اس سے زیادہ امید بھی نہیں کرنی

<sup>۳</sup> بندھن اس صورت پیدا ہوتا ہے جب دو پروٹان کے بیچ رہنے کو الیکٹران ترجیح دیتا ہو، اور ان کے بیچ رہ کر یہ دونوں پروٹان کو اندر جانب کھینچتا ہے۔ لیکن طاق خطی جوڑ (مساوات ۷.۵۲) کا وسط میں عقدہ پایا جاتا ہے، لہذا حیرانی کی بات نہیں کہ یہ تشکیل پروٹان کو ایک دوسرے سے دور کرتی ہے۔



چاہیے۔) تبصرہ: درحقیقت درج ذیل روپ کے مرتفع

$$\psi = A[\psi_0(r_1) + e^{i\phi}\psi_0(r_2)] \quad (۷.۵۳)$$

کی خاصیت یہ ہے کہ الیکٹران دونوں پروٹان کے ساتھ برابر کا وابستگی رکھتا ہے۔ تاہم، چونکہ باہمی اول بدل  $P : r_1 \leftrightarrow r_2$  کی صورت میں ہیمیلٹنی (مساوات ۷.۳۵) غیر متغیر ہے، لہذا اس کے امتیازی تفاعلات کو یک وقت  $P$  کے امتیازی تفاعلات چن سکتا ہے۔ امتیازی قیمت  $+1$  کے ساتھ مثبت علامت (مساوات ۷.۳۷) اور امتیازی قیمت  $-1$  کے ساتھ منفی علامت (مساوات ۷.۵۲) ہوگی۔ زیادہ عمومی صورت (مساوات ۷.۵۳) کے استعمال سے مزید فائدہ نہیں ہوگا؛ آپ چاہیں تو اسے استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔

سوال ۷.۱۰: نقطہ توازن پر  $F(x)$  کے دوہرا تفرق سے ہائیڈروجن سالمہ باردار ہے (حصہ ۲.۳ دیکھیں) میں دونوں پروٹان کے ارتعاش کی قدرتی تعدد  $(\omega)$  کی اندازاً قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔ اگر اس مرتعش کی زمینی حال توانائی  $(\hbar\omega/2)$  نظام کی بندشی توانائی سے زیادہ ہو، تب نظام بکھر کر ٹوٹ جائے گا۔ دکھائیں کہ حقیقت میں مرتعش توانائی اتنی کم ہے کہ ایسا کبھی بھی نہیں ہوگا، اور ساتھ ہی مقید لرزشی سطحوں کی اندازاً تعداد دریافت کریں۔ تبصرہ: آپ تحلیلی طور پر نقطہ اقل، یا اس نقطہ پر دوہرا تفرق حاصل نہیں کرپائیں گے۔ اعدادی طریقہ یا کمپیوٹر کی مدد سے ایسا کریں۔

### اضافی سوالات برائے باب ۷

سوال ۷.۱۱:

۱. درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل موج

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos(\pi x/a) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے ایک بُدی ہارمونی مرتعش کی زمینی حال توانائی کی حد بندی تلاش کریں۔ متغیر  $a$  کی ”بہترین“ قیمت کیا ہوگی؟ اصل  $\langle H \rangle$  کا موازنہ اصل توانائی سے کریں۔ تبصرہ: آزمائشی تفاعل میں  $\pm a/2$  پر ایک ”بل“ (غیر استمراری تفرق) پایا جاتا ہے؛ کیا آپ کو اس سے نمٹنا ہوگا، جیسا مجھے مثال ۷.۳ میں کرنا پڑا؟

ب. وقفہ  $(-a, a)$  پر  $\psi(x) = B \sin(\pi x/a)$  استعمال کرتے ہوئے پہلے ہیجان حال کی حد بندی تلاش کریں۔ اپنے جواب کا اصل جواب سے موازنہ کریں۔

سوال ۷.۱۲:

۱. درج ذیل آزمائشی تفاعل موج

$$\psi(x) = \frac{A}{(x^2 + b^2)^n}$$

باب ۷. تغیری اصول

جہاں  $n$  اختیاری مستقل ہے، استعمال کرتے ہوئے سوال ۷.۲ کو عمومیت دیں۔ جزوی جواب: مقدار معلوم  $b$  کی بہترین قیمت درج ذیل دے گی۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[ \frac{n(4n-1)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ب. ہارمونی سرعش کے پہلے ہیجان حال کی بالائی حد بندی کی سب سے کم قیمت درج ذیل آزمائشی تفاعل استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

$$\psi(x) = \frac{Bx}{(x^2 + b^2)^n}$$

جزوی جواب: مقدار معلوم  $b$  کی بہترین قیمت درج ذیل دے گی۔

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left[ \frac{n(4n-5)(4n-3)}{2(2n+1)} \right]^{1/2}$$

ج. آپ دیکھیں گے کہ  $n \rightarrow \infty$  سے حد بندیاں بالکل ٹھیک تو انہیں تک پہنچتی ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟ اشارہ: آزمائشی تفاعلات موج کو  $n = 2$ ،  $n = 3$  اور  $n = 4$  کے لیے ترسیم کرتے ہوئے ان کا موازنہ اصل تفاعلات موج (مساوات ۱۲.۵۹ اور مساوات ۲.۶۲) کے ساتھ کریں۔ تحلیلی طور پر ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل مثال سے آغاز کریں۔

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

سوال ۷.۱۳: ہائیڈروجن کے زمینی حال کی سب سے کم حد بندی، گاوسی آزمائشی موج تفاعل:

$$\psi(r) = Ae^{-br^2}$$

استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں، جہاں  $A$  معمول زنی سے تعین ہوگا، جبکہ  $b$  متبادل مقدار معلوم ہے۔ جواب:  $-11.5 \text{ eV}$

سوال ۷.۱۴: اگر نوریہ کی کیفیت غیر صفر ( $m_\gamma \neq 0$ ) ہوتی تب مخفیہ کی جگہ یوکاوا مخفیہ:<sup>۱۴</sup>

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (۷.۵۴)$$

استعمال ہوتا، جہاں  $\mu = m_\gamma c / \hbar$  ہے۔ اپنی مرضی کا آزمائشی تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے اس مخفیہ کے "ہائیڈروجن" جوہر کی بندشی توانائی کی اندازہ قیمت معلوم کریں۔ آپ  $1 \ll \mu a$  لیں اور اپنے جواب کو  $(\mu a)^2$  رتبہ درستگی تک لکھیں۔

سوال ۱۵.۷: فرض کریں آپکو ایسا کوانٹائی نظام دیا جاتا ہے جس کا ہیملٹنی  $H_0$  صرف دو امتیازی حالات  $\psi_a$  (جس کی توانائی  $E_a$  ہے) اور  $\psi_b$  (جس کی توانائی  $E_b$  ہے) کا حاصل ہے۔ یہ حالات عمودی معمول شدہ اور غیر انحطاطی ہیں (دونوں توانائیوں میں  $E_a$  کو کم تصور کریں)۔ اب ہم اضطراب  $H'$  جس کے متعلق ارکان درج ذیل ہیں چالو کرتے ہیں، جہاں  $h$  کوئی مخصوص مستقل ہے۔

$$(۷.۵۵) \quad \langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle = 0; \quad \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle = h$$

- اضطراب ہیملٹنی کی امتیازی قیمتیں ٹھیک ٹھیک تلاش کریں۔
- دوم رتی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے مضطرب نظام کی توانائیوں کی انداز اُ قیمت معلوم کریں۔
- مضطرب نظام کی زمینی حال توانائی کی انداز اُ قیمت درج ذیل روپ کا آزمائشی تعادل، جہاں  $\phi$  متبادل تبدیل مقدار معلوم ہے

$$(۷.۵۶) \quad \psi = (\cos \phi) \psi_a + (\sin \phi) \psi_b$$

- استعمال کر کے اصول تغیریت سے حاصل کریں۔ تبصرہ: خطی جوڑیوں لکھنے سے  $\psi$  لازماً معمول شدہ ہوگا۔
- اپنے جوابات کا جزو الف، ب، اور ج کے ساتھ موازنہ کریں۔ یہاں اصول تغیریت اتنا زیادہ درست کیوں ہے؟
- سوال ۱۶.۷: ہم سوال ۱۵.۷ میں تیار کی گئی ترکیب کی مثال کے طور پر، یکساں مقناطیسی میدان  $B = B_z \hat{k}$  میں ایک ساکن الیکٹران پر غور کرتے ہیں، جس کی ہیملٹنی (ساوات ۳.۱۵۸) درج ذیل ہوگی۔

$$(۷.۵۷) \quad H_0 = \frac{eB_z}{m} S_z$$

امتیازی چکر کار  $\chi_a$  اور  $\chi_b$  اور ان کی مطابقتی توانائیاں  $E_a$  اور  $E_b$  ساوات ۳.۱۶۱ میں دی گئی ہیں۔ اب ہم  $x$  رخ درج ذیل روپ کے یکساں میدان

$$(۷.۵۸) \quad H' = \frac{eB_x}{m} S_x$$

- اضطراب چالو کرتے ہیں۔
- اضطراب  $H'$  کے متعلق ارکان تلاش کر کے تصدیق کریں کہ ان کی ساخت ساوات ۷.۵۵ کی طرح ہے۔ یہاں  $h$  کیا ہوگا؟
- دوم رتی نظریہ اضطراب میں نئی زمینی حال توانائی کو سوال ۱۵.۷-ب کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔
- زمینی حال توانائی کی اصول تغیریت حد بندی، سوال ۱۵.۷-ج کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال ۷.۱۷: اگر چہ ہیلیم کے لیے مساوات شرودنگر کا اصل حل تلاش نہیں کیا جاسکتا، ایسے ”ہیلیم نم“ نظام پائے جاتے ہیں جن کے اصل حل پائے جاتے ہیں۔ اس کی ایک سادہ مثال ”ربڑی ہیلیم“ ہے جس میں کولمب قوتوں کی بجائے متوازن ہک کی درج ذیل قوتیں استعمال کی جاتی ہیں۔

$$(۷.۵۹) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\lambda}{4}m\omega^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$$

۱. دکھائیں کہ  $\mathbf{r}_1$ ،  $\mathbf{r}_2$  کی بجائے متغیرات

$$(۷.۶۰) \quad \mathbf{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

استعمال کرنے سے ہیمیلٹنی دو علیحدہ علیحدہ تین البادی ہارمونی سرعشتات:

$$(۷.۶۱) \quad H = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_u^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 \right] + \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_v^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)m\omega^2 v^2 \right]$$

میں تقسیم ہوگی۔

ب. اس نظام کی اصل زمینی حال توانائی کیا ہوں گی؟

ج. اصل حل نہ جاننے کی صورت میں ہم ہیمیلٹنی کی اصل صورت (مساوات ۷.۵۹) پر حصہ ۷.۲ کی ترکیب استعمال کرنا چاہیں گے۔ ایسا (سپر کرنے کو نظر انداز کرتے ہوئے) ہوئے کریں۔ اپنے نتیجے کا اصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب:  $\langle H \rangle = 3\hbar\omega(1 - \lambda/4)$

سوال ۷.۱۸: ہم نے سوال ۷.۷ میں دیکھا کہ سپر مہیا کرتا ہوا آزمائشی تفاعل (مساوات ۷.۲۷) جو ہیلیم کے لئے عمدہ ثابت ہوا، منفی ہائیڈروجن بارداریہ میں مقید حال کی تصدیق کرنے کے لیے کافی نہیں ہے۔ چند ریشیکھرنے درج ذیل روپ کا آزمائشی تفاعل موج استعمال کیا

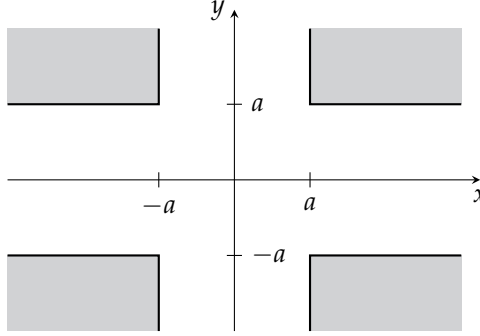
$$(۷.۶۲) \quad \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv A[\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) + \psi_2(r_1)\psi_1(r_2)]$$

جہاں درج ذیل ہیں۔

$$(۷.۶۳) \quad \psi_1(r) \equiv \sqrt{\frac{Z_1^3}{\pi a^3}} e^{-Z_1 r/a}, \quad \psi_2(r) \equiv \sqrt{\frac{Z_2^3}{\pi a^3}} e^{-Z_2 r/a}$$

یعنی، انہوں نے دو مختلف سپر اجزائے ضربی کی اجازت دی، جہاں ایک الیکٹران کو مرکزہ کے قریب اور دوسرے کو مرکزہ سے دور تصور کیا گیا۔ (چونکہ الیکٹران متماثل ذرات ہیں، لہذا افصائی تفاعل موج کو باہمی مبادلہ کے لحاظ سے لازماً تشابہ بنانا ہوگا۔ چپکری حال، جس کا موجودہ حساب میں کوئی کردار نہیں، خلاف تشابہ ہے۔) دکھائیں کہ متبادل تبدیل مقدار معلوم  $Z_1$  اور  $Z_2$  کی قیمتوں کو سوچ سمجھ کر منتخب کرنے سے  $\langle H \rangle$  کی قیمت  $-13.6 \text{ eV}$  سے کم حاصل کی جاسکتی ہے۔ جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{E_1}{x^6 + y^6} \left( -x^8 + 2x^7 + \frac{1}{2}x^6y^2 - \frac{1}{2}x^5y^2 - \frac{1}{8}x^3y^4 + \frac{11}{8}xy^6 - \frac{1}{2}y^8 \right)$$



شکل ۷.۸: صلیبی شکل کا خطہ برائے سوال ۷.۲۰

جہاں  $x \equiv Z_1 + Z_2$  اور  $y \equiv 2\sqrt{Z_1 Z_2}$  ہیں۔ چندر شیکھر نے  $Z_1 = 1.039$  (چونکہ یہ 1 سے بڑا ہے، لہذا اس کو موثر مرکزوی بار تصور نہیں کیا جاسکتا ہے، تاہم اس کے باوجود اس کو آزمائشی تلف عمل موج مقبول کیا جاسکتا ہے) اور  $Z_2 = 0.283$  استعمال کیے۔

سوال ۷.۱۹: مرکزوی اختلاط برقرار رکھنے میں بنیادی مسئلہ، دو ذرات (مثلاً دو ڈیوٹیران) کو ایک دوسرے کے اتنے متریب لانا ہے، کہ کولمب دافع قوت پر ان کے بیچ (متریب اثر) کششی مرکزوی قوتیں سبقت لے جائیں۔ ہم ذرات کو شاندار درجہ حرارت تک گرم کر کے، بلا منصوبہ تصادم کے ذریعے انہیں ایک دوسرے کے متریب زبردستی لاسکتے ہیں۔ دوسری تجویز **میون عمل انگیزہ**<sup>۱۵</sup> ہے، جس میں ہم پروٹان کی جگہ ڈیوٹیران اور الیکٹران کی جگہ میون رکھ کر ”ہائیڈروجن سالہ بارداریہ“ تیار کرتے ہیں۔ اس ساخت میں ڈیوٹیران کے بیچ توازنی فاصلے کی پیشگوئی کریں، اور سمجھائیں کہ اس مقصد کی حتمی طور الیکٹران سے میون کیوں بہتر ثابت ہوگا۔

سوال ۷.۲۰: **کوانٹائی نقطہ**<sup>۱۶</sup> فرض کریں ایک ذرے کو شکل ۷.۸ میں دکھائے گئے دو ابعادی صلیبی شکل کے خطہ پر حرکت کرنے کا پابند بنایا جاتا ہے۔ صلیب کی ”شاخیں“ لامتناہی تک پہنچتی ہیں۔ صلیب کے اندر مخفیہ صفر جبکہ باہر سایہ دار خطوں میں لامتناہی ہے۔ حیرانی کی بات ہے کہ یہ تفصیل مثبت کوانٹائی مقید حال کی حسی ہے۔<sup>۱۷</sup>

۱. دکھائیں کہ سب سے کم کوانٹائی جو لامتناہی کی طرف حرکت کر سکتی ہے درج ذیل ہے:

$$E_{\text{دیر}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

اس سے کم کوانٹائی کا حل لازماً مقید حال ہوگا۔ اشارہ: ایک شانخ پر بہت دور (مثلاً  $a \gg x$ ) چل کر، مساوات شرودنگر کو علیحدگی متغیرات سے حل کریں؛ اگر تلف عمل موج لامتناہی کی جانب حرکت

<sup>۱۵</sup> muon catalysis  
<sup>۱۶</sup> quantum dots

<sup>۱۷</sup> کوانٹائی سرنگ زنی کی موجودگی میں، کلاسیکی مقید حال غیر مقید ہو جاتا ہے؛ یہاں اس کے الٹ ہے: کلاسیکی غیر مقید حال، کوانٹائی بیگانی مقید ہے۔

کر تا ہو، تب تابعیت  $x$  کاروپ لازماً  $e^{ik_x x}$  ہوگا، جہاں  $k_x > 0$  ہے۔

ب. اب اصول تغیریت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ زمینی حال کی توانائی، ہیئر  $E$  سے کم ہے۔ درج ذیل آزمائشی تفاعل موج استعمال کریں۔

$$\psi(x, y) = A \begin{cases} (1 - |xy|/a^2)e^{-\alpha} & |x| \leq a \text{ اور } |y| \leq a \\ (1 - |x|/a)e^{-\alpha|y|/a} & |x| \leq a \text{ اور } |y| > a \\ (1 - |y|/a)e^{-\alpha|x|/a} & |x| > a \text{ اور } |y| \leq a \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

اس کی معمول زنی کر کے  $A$  کا تعین کریں، اور  $H$  کی توقعاتی قیمت کا حساب لگائیں۔ جواب:

$$\langle H \rangle = \frac{3\hbar^2}{ma^2} \left( \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{6 + 11\alpha} \right)$$

اب  $\alpha$  کے لحاظ سے کم ترین قیمت تلاش کر کے دکھائیں کہ نتیجہ، ہیئر  $E$  سے کم ہے۔ صلیب کی تشاکل سے پورا فائدہ اٹھائیں؛ آپکو کھلے خطے کے صرف  $1/8$  حصے پر مکمل لین ہوگا؛ باقی سات نکلات بھی یہی جواب دیں گے۔ البتہ دھیان رہے کہ، اگرچہ آزمائشی تفاعل موج استمراری ہے، اس کے تفروقات غیر استمراری ہیں؛ ”رکاوٹی لکیریں“  $x = 0$ ،  $y = 0$ ،  $x = \pm a$  اور  $y = \pm a$  پر پائی جاتی ہیں جہاں آپکو مشال ۷.۳ کی ترکیب کا سہارا لینا ہوگا۔

## باب ۸

# ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین

ونٹزل وکرامرس وبرلوان ترکیب سے غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کی یک بُعدی تخمینہ حل حاصل کیے جاسکتے ہیں (اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفسیقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شرودنگر کی رد اسی حصے پر کیا جاسکتا ہے)۔ یہ مقید حال توانائیوں اور مخفی رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں خصوصاً مفید ثابت ہوتا ہے۔

اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ایک ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو ایک ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ  $V(x)$  مستقل ہو۔ تفاعل موج،  $E > V$  کی صورت میں، درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لئے منفی علامت استعمال ہوگا (یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دے گا)۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے، جس کا طول موج  $(\lambda = 2\pi/k)$  اٹل اور حیطہ (A) غیر تغیری ہے۔ اب فرض کریں  $V(x)$  مستقل نہیں، بلکہ  $\lambda$  کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہوگا، لہذا کئی مکمل طول موج پر مخفیہ مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\psi$  عملائن نہ ہوگا، تاہم اس کا طول موج اور حیطہ  $x$  کے ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین کے تصور کی بنیاد ہے۔ درحقیقت، یہ  $x$  پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے: تیز ارتعاشات، اور ان کے طول موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی۔

اسی طرح،  $E < V$  (جہاں  $V$  مستقل ہے) کی صورت میں  $\psi$  قوت نمائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V - E)}}{\hbar}$$

WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)<sup>1</sup>

اور اگر  $V(x)$  مستقل نہ ہو، بلکہ  $1/\kappa$  کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو، تب حل عملاً قوت نہائی ہوگا، البتہ  $A$  اور  $\kappa$  اب  $x$  کے تفاعل ہوں گے جو آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔

یہ پورا قصہ کلاسیکی نقطہ والپیڈ<sup>۲</sup>، جہاں  $V \approx E$  ہو، کے مثریتی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا۔ چونکہ یہاں  $\lambda$  (یا  $1/\kappa$ ) لامتناہی تک بڑھتا ہے، اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ  $V(x)$  مقابلے میں ”آہستہ آہستہ“ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا ہم دیکھیں گے، اس تخمین میں نقاط واپس سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا، اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

## ۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شرڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے، جس کی کل توانائی  $E$  اور محلی توانائی  $V(x)$  ہے۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ  $E > V(x)$  ہے، لہذا  $p(x)$  حقیقی ہوگا؛ اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں چونکہ کلاسیکی طور پر یہ ذرہ سرعت  $x$  پر رہنے کا پابند ہوگا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر،  $\psi$  ایک مخلوط تفاعل ہوگا؛ اس کو جیٹ،  $A(x)$ ، اور ہیٹ،  $\phi(x)$ ، جہاں دونوں حقیقی ہیں، کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

ہم  $x$  کے لحاظ سے تفرق کو قوت نہائی میں چھوٹی لکیر (') سے ظاہر کرتے ہوئے

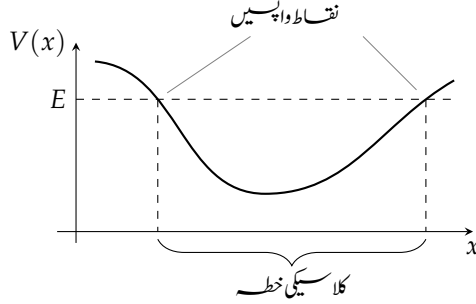
$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

turning point<sup>۳</sup>





شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خط میں مقید ہوگا جہاں  $E \geq V(x)$  ہو۔

لکھ سکتے ہیں۔ اس کو مساوات ۸.۱ میں پُر کرتے ہیں۔

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$

دونوں ہاتھ کے حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات:

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \Rightarrow A'' = A \left[ (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

جبکہ خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسری حقیقی مساوات:

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0 \Rightarrow (A^2\phi')' = 0$$

حاصل ہوگی۔

مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ ہر لحاظ سے اصل مساوات شرودنگر کے معادل ہیں۔ ان میں سے دوسری یا آسانی حاصل ہوتی ہے:

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2 \Rightarrow A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں  $C$  (حقیقی) مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۸.۶) عموماً حل نہیں کی جاسکتی ہے، لہذا ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے: ہم فرض کرتے ہیں کہ جیلہ  $A$  بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے، لہذا اجزاء  $A''$  متابل نظر انداز ہوگا (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ہم فرض کرتے ہیں کہ  $(\phi')^2$  اور  $p^2/\hbar^2$  سے  $A''/A$  بہت کم ہے)۔ ایسی صورت میں، ہم مساوات ۸.۶ کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے:

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

حاصل کرتے ہیں، لہذا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

ہوگا۔ (میں فی الحال اس کو ایک غیر قطعی شکل لکھتا ہوں؛ کسی بھی مستقل کو  $C$  میں ضم کیا جاسکتا ہے، جس کے تحت  $C$  مخلوط ہو سکتا ہے۔) اس طرح

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (\text{ونڈل وکرامرس وبرلوان کلیہ})$$

ہوگا، اور (تخمینی) عمومی حل اس طرح کے دو اجزاء کا خطی جوڑ ہوگا، جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت، نقطہ  $x$  پر ذرہ پایا جانے کا احتمال، اس نقطہ پر ذرے کے (کلاسیکی) معیار حرکت (لہذا سمتی رفتار) کا بالکل عکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں، چونکہ جس مقام پر ذرے کی رفتار تیز ہو، وہاں اس کے پائے جانے کا احتمال کم ہوگا۔ درحقیقت، بعض اوقات تفسیقی مساوات میں جزو  $A''$  نظر انداز کرنے کی بجائے، اس نیم کلاسیکی مشاہدے سے آغاز کرتے ہوئے ونڈل وکرامرس وبرلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ موحصر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے، لیکن اول الذکر بہتر طبعی و جب پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ موڑے دار ہو (شکل ۸.۲)۔

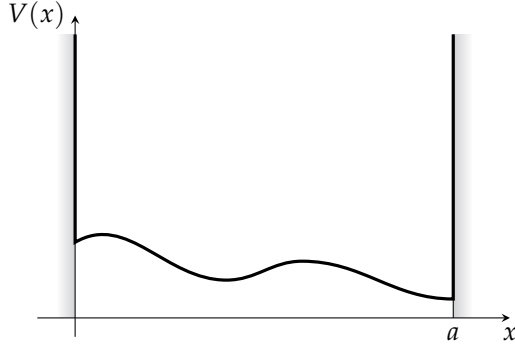
$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کوئی منتخب تناسب} & 0 < x < a \\ \infty, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

کنونیں کے اندر (ہر جگہ  $E > V(x)$  مندرجہ کرتے ہوئے)

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

ہوگا، جس کو بہتر انداز میں

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$



شکل ۸.۲: ایسا لامستثنائی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

لکھا جاسکتا ہے، جہاں (یہ جانتے ہوئے کہ ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی سے منتخب کر سکتے ہیں) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۱۴) \quad \phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'$$

اب  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  لازماً صفر کو پہنچے گا، لہذا (چونکہ  $\psi(0) = 0$  ہے)  $C_2 = 0$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $x = a$  پر بھی  $\psi(x)$  صفر کو پہنچے گا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۱۵) \quad \phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ماخوذ:

$$(۸.۱۶) \quad \int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar$$

یہ کوانٹائی شرط (تخمینی) احبازی توانائیوں کا تعین کرتی ہے۔

مثلاً، اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو ( $V(x) = 0$ )، تب  $p(x) = \sqrt{2mE}$  (ایک مستقل) ہوگا، اور مساوات ۸.۱۶ کے تحت  $p(x) = n\pi\hbar$  یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

ہوگا، جو لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرائما کلیہ ہے (مساوات ۲.۲۷)۔ یہاں ڈنڈل وکرام سرس ویرلوان تخمین ہمیں بالکل ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے (اصل تفعل موج کا حیط مستقل ہے، لہذا  $A''$  کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا)۔ □

سوال ۸.۱: ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی احبازتی توانائیاں ( $E_n$ ) تلاش کریں جس کی نصف تہ میں  $V_0$  بلند سیر ہی پائی جاتی ہو (شکل ۶.۳)۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

اپنے جواب کو  $V_0$  اور  $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$  (بغیر سیر ہی لامتناہی چوکور کنویں کی  $n$  ویں احبازتی توانائی) کی صورت میں لکھیں۔ فرض کریں  $E_1^0 > V_0$  ہے، تاہم یہ فرض نہ کریں کہ  $E_n \gg V_0$  ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال ۶.۱ میں رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹے  $V_0$  (جہاں نظریہ اضطراب کا آمد ہوگا) یا بہت بڑے  $n$  (جہاں ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کارآمد ہوگی) کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونڈل وکرامرسس و برلوان کلیہ (مساوات ۸.۱۰) کو  $\hbar$  طاقتی توسیع سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ آزاد ذرے کے تفاعل موج  $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$  سے حوصلہ افزا ہو کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں  $f(x)$  کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ (دھیان رہے کہ ہم یہاں عمومیت نہیں کھوتے؛ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔)

۱. اس کو (مساوات ۸.۱ روپ کی) مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

ب. تفاعل  $f(x)$  کو  $\hbar$  کے طاقتی تسلسل کی صورت:

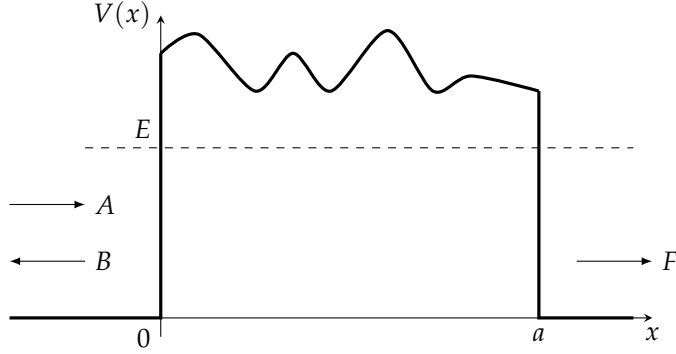
$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

میں لکھ کر  $\hbar$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ}$$

ج. انہیں  $f_0(x)$  اور  $f_1(x)$  کے لئے حل کر کے دکھائیں کہ  $\hbar$  کی اول رتبہ تک آپ مساوات ۸.۱۰ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عدد کے لوگار تھم کی تعریف  $\ln(-z) = \ln(z) + i\pi$  ہے، جہاں  $n$  طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں، تب دونوں اطراف کو قوت نام میں منتقل کر کے دیکھیں۔



شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کی مستطیلی رکاوٹ سے بکھراؤ۔

## ۸.۲ سرنگ زنی

اب تک  $E > V$  فرض کیا گیا، لہذا  $p(x)$  حقیقی تھا۔ ہم غیر کلاسیکی خط  $(E < V)$  کا مطالعہ کرتے ہیں: نتیجہ باآسانی لکھ سکتے ہیں:

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

یہ پہلے کی طرح ہے (مساوات ۸.۱۰)، تاہم اب  $p(x)$  تخیلی ہے۔<sup>۳</sup>

ایک مثال کے طور پر، مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہو (شکل ۸.۳) سے بکھراؤ کے مسئلے پر غور کریں۔ رکاوٹ کی بائیں جانب  $(x < 0)$

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

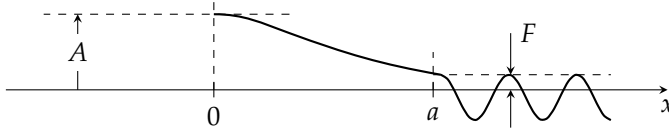
ہوگا، جہاں  $A$  آمدی جیٹ اور  $B$  منعکس جیٹ ہے، اور  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے (حصہ ۲.۵ دیکھیں)۔ رکاوٹ کے دائیں جانب  $(x > a)$

$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

ہوگا؛  $F$  ترسیلی جیٹ ہے، اور ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

<sup>۳</sup> اس صورت میں تصاعلی موج حقیقی ہوگا، اور مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ کے ممابث ضروری نہیں کہ مساوات ۸.۵ سے حاصل ہوں، اگرچہ یہ اب بھی کافی ہیں۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں، سوال ۸.۲ میں پیش متبادل حصول کے طریقے پر غور کریں۔



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بھراؤ کے تعامل موج کی کیفی ساخت۔

سرنگ زنی خطہ  $(0 \leq x \leq a)$  میں ونٹرل وکرامرس ویرلوان تخمین درج ذیل دیگی۔

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

اگر رکاوٹ بہت بلند، یا بہت چوڑا یا دونوں ہو (یعنی جب سرنگ زنی کا احتمال بہت کم ہو)، تب قوت نمائی بڑھتے حبز و کا عددی سر (C) لازماً چھوٹا ہوگا (در حقیقت، لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا)، اور تعامل موج کا نقش شکل ۸.۴ کی طرز سے ہوگا۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوت نمائی میں کل کی، آمدی اور ترسیلی امواج کے حیثوں کے تناسب کو تعین کرتا ہے

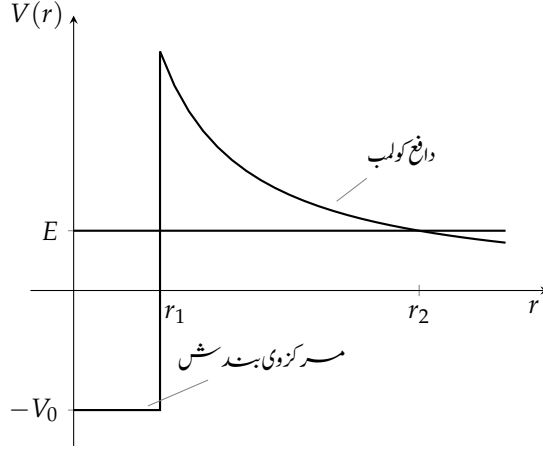
$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۲) \quad T \cong e^{-2\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx$$

مشال ۸.۴: الفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ ۱۹۲۸ء میں جارج گامو نے مساوات ۸.۲۲ استعمال کرتے ہوئے الفا تحلیل (چند مخصوص تابکار مرکزہ سے، دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل، الفا ذرہ کے احسراج) کی وجہ پیش کی۔ چونکہ الفا ذرہ مثبت بار (2e) کا حامل ہے، لہذا اچھے ہی یہ مرکزوی بندشی قوت کی پہنچ سے باہر نکلتا ہے، باقی مرکزہ (کے بار Ze) کی برقی قوت دافع اس کو دور جانے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن، اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا (جو یورینیم کی صورت میں) حنارجی الفا ذرہ کی توانائی سے دو گن سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر (پروٹان کے رداس  $r_1$  وسعت کے چور کنواں) (جو مرکزوی قوت کشش کو ظاہر کرتا ہے) کو کولمب قوت دافع کی دم سے جوڑ کر ظاہر کیا (شکل ۸.۵)، اور کوانٹائی سرنگ زنی کو الفا ذرہ کی منسراج کی وجہ مترا دیا (مرکزوی طبعیات پر کوانٹائی میکانیات کے اطلاق کا یہ پہلا واقعہ ہے)۔

<sup>۳</sup> اس تخمینی دلیل کو زیادہ بہتہ بنایا جاسکتا ہے (سوال ۸.۱۰ دیکھیں)۔  
Gamow's theory of alpha decay<sup>۵</sup>



شکل ۸.۵: تابکار مرکزہ میں الفا ذرے کی مخفی توانائی کا گامونہ۔

اگر خارج الفا ذرے کی توانائی  $E$  ہو، بیرونی واپس نقطے ( $r_2$ ) کا تعین درج ذیل کرے گا۔

(۸.۲۳)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E$$

ظاہر ہے قوت نہ  $\gamma$  (مساوات ۸.۲۲) درج ذیل ہوگا۔<sup>۱</sup>

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr$$

اس نکل میں  $r \equiv r_2 \sin^2 u$  پر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$$(۸.۲۴) \quad \gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right]$$

عام طور پر  $r_1 \ll r_2$  ہوگا، لہذا ہم چھوٹے زاویوں کا تخمینہ  $(\sin \epsilon \cong \epsilon)$  استعمال کر کے اس نتیجے کا سادہ روپ حاصل کرتے ہیں:

$$(۸.۲۵) \quad \gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ \frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}$$

<sup>۱</sup> یہاں رکاوٹ کی بائیں جانب مخفی عنصر نہیں ہے (مزید، حقیقتاً یہ تین بعدی مسئلہ ہے)، تاہم مساوات ۸.۲۲ میں پیش بنیادی تصور سے ہمیں دلچسپی ہے۔

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

(عمومی مرکزہ کی جامت تقریباً  $10^{-15} \text{ m}$  یعنی  $1 \text{ fm}$  ہوتی ہے۔)

اگر ہم مرکزہ کے اندر الفا ذرے کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار  $v$  ہے، تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً  $2r_1/v$  ہوگا، لہذا تصادم کا تعدد  $v/2r_1$  ہوگا۔ ہر تصادم پر فائر ہونے کا احتمال  $e^{-2\gamma}$  ہے، لہذا اکائی وقت میں احسراج کا احتمال  $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$  ہوگا، اور یوں مائی مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم  $v$  نہیں جانتے، لیکن اس سے زیادہ مشرق نہیں پڑتا، چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوت نمائی جزو ضرری بچیں رتی تک تبدیل ہوتا ہے؛ اس کے سامنے  $v$  کی تبدیلی متابل نظر انداز ہے۔ بالخصوص، عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو  $1/\sqrt{E}$  کے ساتھ تسم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط (شکل ۸.۶) حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ کے تحت ہوگا۔ □

سوال ۸.۳: ایک مستثانی چوکور کاوٹ، جس کی اونچائی  $E > V_0$  اور چوڑائی  $2a$  ہے، سے ایسے ذرے، جس کی توانائی  $E$  ہے، کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ اصل نتیجے (سوال ۲.۳۳) کے ساتھ کریں، جس تک ونٹرل وکرامرس ویرلوان طریق  $T \ll 1$  میں اس کی تخفیف ہوگی۔

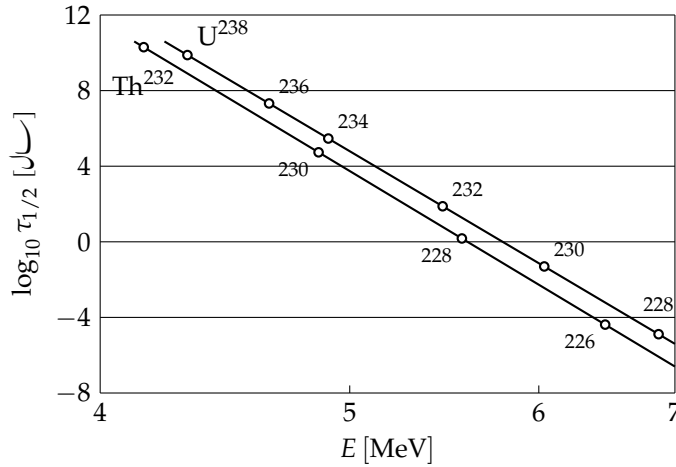
سوال ۸.۴: مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے  $^{238}\text{U}$  اور  $^{212}\text{Po}$  کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ اشارہ: تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً ایک جیسی ہوتی ہے، لہذا  $(r_1)^3$  (پروٹان اور نیوٹران کی تعداد کے مجموعہ)  $A$  کا راست متناسب ہوگا۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے۔

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}$$

حسراج شدہ الفا ذرے کی توانائی، کلیہ آئنشتائن ( $E = mc^2$ ) سے اخذ کی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2$$





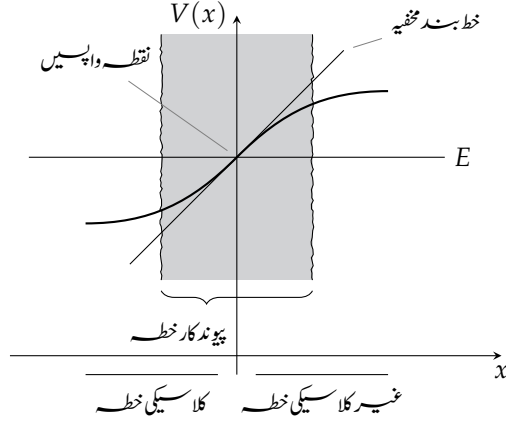
شکل ۸.۶: یورینیم اور تھوریئم کے عرصہ حیات کے لوگار تھم بالقابل  $1/\sqrt{E}$  کی ترسیات (جہاں  $E$  خارج الفازے کی توانائی ہے)۔

جہاں  $m_p$  مائی سرکڑہ کی کمیت،  $m_d$  بیٹی سرکڑہ کی کمیت، اور  $m_\alpha$  الفا ذرے (یعنی  $\text{He}^4$  سرکڑہ) کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی سرکڑہ کیا ہوگا، یاد رہے کہ الفا ذرہ دو پروٹون اور دو نیوٹرون لے کر فضا رہا ہوتا ہے، لہذا  $Z$  سے دو اور  $A$  سے چار منفی کریں۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی عنصر کا تعین کریں۔ سستی رفتار  $v$  کی اندازاً قیمت  $E = (1/2)m_\alpha v^2$  سے حاصل کریں؛ یہ سرکڑہ کے اندر منفی تخفیفی توانائی کو نظر انداز کرتی ہے، لہذا  $v$  کی قیمت اصل سے زیادہ دیگی، تاہم اب تک ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی عنصر کی تجربہ سے حاصل کردہ عرصہ حیات بالترتیب  $6 \times 10^9$  سال اور  $0.5 \mu\text{s}$  ہے۔

## ۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و فکر میں میں فمرض کرتا رہا کہ مخفی کنویں (یار کاوش) کی ”دیواریں“ انتصابی تھیں، جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ درحقیقت، ہمارے مرکزی نتائج (مساوات ۸.۱۶ اور مساوات ۸.۲۲) اس صورت میں بھی کافی حد تک درست ثابت ہوئے ہیں جب کہ ان کی ڈھلان زیادہ منہ ہو (یقیناً نظریہ گاموم میں ایسی صورت پر ہی ان کا اطلاق کیا گیا)۔ بہر حال، نقطہ واپسیں ( $E = V$ )، جہاں ”کلاسیکی“ اور ”غیر کلاسیکی“ خطے جڑتے ہیں اور منزل و کمرس ویرلو ان تخمین نامتابل استعمال ہوگی، پر ہم تعاف عمل موج کا فتر ہی مطالبہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مقید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) پر غور کروں گا؛ آپ مسئلہ بھراؤ (سوال ۸.۱۰) حل کریں گے۔<sup>۸</sup>

۸ انتباہ: درج ذیل دلائل زیادہ تکنیکی ہیں جنہیں پہلی مرتبہ پڑھ کر سمجھنا ضروری نہیں۔



شکل ۸.۴: دائیں ہاتھ نقطہ واپس کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

اپنی آسانی کی خاطر، ہم محدودیوں منتخب کرتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپس  $x = 0$  پر واقع ہو (شکل ۸.۴)۔ ونزل و کرامرس و برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \end{cases}$$

(یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام  $x > 0$  کے لئے  $E$  سے  $V(x)$  بڑا ہوگا، ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمک کو خارج کر سکتے ہیں، چونکہ  $x \rightarrow \infty$  پر یہ بے فتابو بڑھتا ہے۔) ہمارا کام ان دو حل کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے۔ لیکن یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا درپیش ہے: ونزل و کرامرس و برلوان تخمین میں نقطہ واپس (جہاں  $p(x) \rightarrow 0$  ہوگا) پر  $\psi$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تقاضا عمل یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا؛ جیسا ہمارا گمان بھتا، ونزل و کرامرس و برلوان تخمین نقطہ واپس کی پڑوس میں نافتا بل استعمال ہے۔ لیکن احبازتی توانائیوں کا تعین نقطہ واپس پر سرحدی شرائط کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا ”پیوند کار“ تقاضا عمل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپس کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل و کرامرس و برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تقاضا عمل موج ( $\psi_p$ ) صرف مبدا کے پڑوس میں چاہیے، لہذا ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر:

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمینہ دے کر، اس خط بند  $V$  کے لئے مساوات شروڈنگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p$$

حل کرتے ہیں، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان  $\alpha$  کو غیر تابع متغیر میں ضم کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p$$

یہ مساوات <sup>۹</sup> ایریز<sup>۱۰</sup> کے حلوں کو تفاعلاتی ایریز کہتے ہیں۔ "چونکہ مساوات ایسری دور تہی تفرقی مساوات ہے، لہذا دو خطی غیر تابع ایسری تفاعلات  $\text{Ai}(z)$  اور  $\text{Bi}(z)$  پائے جاتے ہیں۔

ان کا تعلق رتبہ  $1/3$  کے میل تفاعلات کے ساتھ ہے؛ ان کے چند خواص جدول ۸.۱ میں پیش کیے گئے ہیں جبکہ شکل ۸.۸ میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج  $\text{Ai}(z)$  اور  $\text{Bi}(z)$  کا خطی جوڑ:

$$(۸.۳۷) \quad \psi_p(x) = a \text{Ai}(\alpha x) + b \text{Bi}(\alpha x)$$

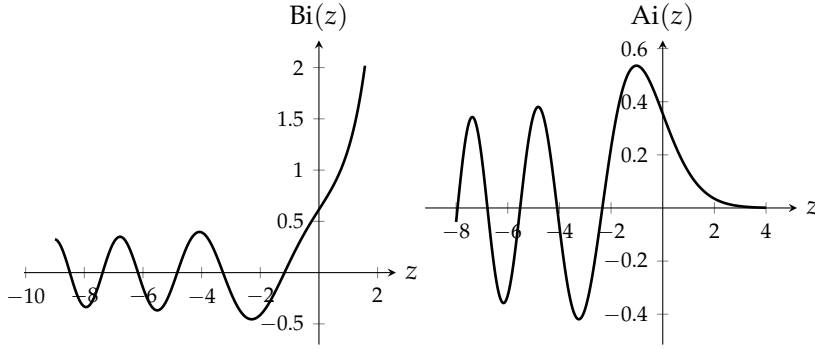
ہوگا، جہاں  $a$  اور  $b$  مناسب مستقلات ہیں۔

اب  $\psi_p$  مبداء کے پڑوس میں (تخمینی) تفاعل موج ہے؛ ہم نے مبداء کے دونوں اطراف منطق خطوں میں  $\psi_p$  کو ونڈل وکرامرس و برلوان حلوں کے ساتھ ہم پلہ بنانا ہوگا (شکل ۸.۹ دیکھیں)۔ یہ منطق خطے نقطہ واپس کے اتنے متضرب ہیں کہ خط بند مخفیہ کافی درست ہوگا (لہذا  $\psi_p$  اصل تفاعل موج کا بہترین تخمینہ ہوگا)، اور ساتھ ہی

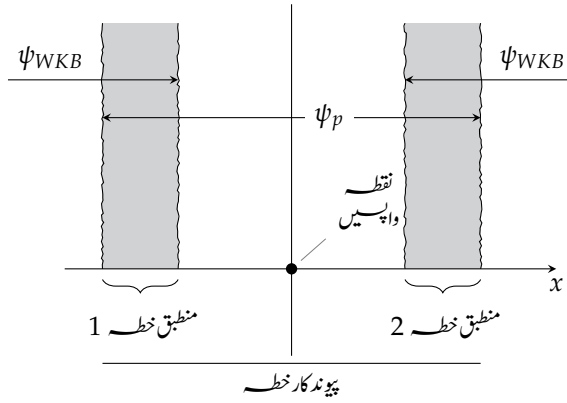
<sup>۹</sup> Airy's equation

<sup>۱۰</sup> Airy functions

اکلاسیکی طور پر، خطی مخفیہ سے مراد مستقل قوت، لہذا مستقل اسراع ہے؛ یہ سادہ ترین حسرت ہے، جہاں سے بنیادی میکانیات کا آغاز ہوتا ہے۔ ستم ظریفی کی بات ہے کہ یہی سادہ مخفیہ، کوانٹائی میکانیات میں مادرائی تفاعلات کو جنم دیتا ہے، اور اس نظریہ میں کلیدی کردار ادا نہیں کرتا۔



شکل ۸.۸: ایسری تفاعلات کی ترسیات



شکل ۸.۹: پیوندی خط اور دو منطق خط۔

جدول ۸.۱: ایسری تفاعلات کے چند خواص۔

$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$ <p>تفصیلی مساوات:</p> <p>حل:</p> $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$ $Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{s^3}{3} + sz} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$	<p>متقارب روپ:</p> $\left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \right\} z \ll 0$ $\left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \end{aligned} \right\} z \gg 0$
---	--

نقطہ واپس سے اتنے دور ضرور ہیں کہ ونڈل وکرا مسرس و برلوان تخمین پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔<sup>۱۲</sup> منطق خطوں میں مساوات ۸.۳۲ کارآمد ہے، لہذا (مساوات ۸.۳۴ کی علاقیت میں) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۸) \quad p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar \alpha^{3/2} \sqrt{-x}$$

بالخصوص منطق خطہ 2 میں

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar \alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar (\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، لہذا ونڈل وکرا مسرس و برلوان تفاعل موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۸.۳۹) \quad \psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar \alpha^{3/4} x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

ایسری تفاعلات کی بڑی  $z$  متقارب روپ<sup>۱۳</sup> (جدول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے، منطق خطہ 2 میں پیوند کار

<sup>۱۲</sup> یہ نازک دوہری مسلط شرط ہے، اور ایسے گھمبیر مچنے حیا کرنا ممکن ہے کہ جن میں اس طرز کا کوئی منطق خطہ نہ پایا جاتا ہو۔ البتہ، عملی استعمال میں ایسا ساز و ناری ہوتا ہے۔ سوال ۸.۸ دیکھیں۔

<sup>۱۳</sup> پہلی نظر میں، اس خطہ میں، جسے  $z = 0$  پر نقطہ واپس کا متعرب تصور کیا گیا ہے (لہذا محفہ کا خط بند تخمین کارآمد ہوگا)، بڑی  $z$  تخمین کا استعمال نامعقول نظر آتا ہے۔ لیکن یہاں تفاعل کا دلیل  $z$  نہیں  $\alpha x$  ہے، اور اگر آپ غور کریں (سوال ۸.۸ دیکھیں) تو آپ دیکھیں گے کہ (عموماً) ایسا خطہ ہوگا جہاں  $\alpha x$  بڑا ہوگا، اور ساتھ ہی  $V(x)$  کو خطی کسیرے تخمین دینا معقول ہوگا۔

تفاعل موج (مادات ۸.۳۷) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D \quad \text{اور} \quad b = 0$$

ہم یہی کچھ منطبق خط 1 کے لئے بھی کرتے ہیں۔ اب بھی مادات ۸.۳۸ ہمیں  $p(x)$  دیگی، تاہم اس مرتبہ  $x$  منفی ہوگا، لہذا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3} \hbar (-\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، اور ونڈل وکرامرس ویرلوان تفاعل موج (مادات ۸.۳۱) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}}} \left[ B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی  $z$  کے لئے ایسری تفاعل کا متعارف روپ (جدول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل (مادات ۸.۳۷) جس میں  $b = 0$  لیا گیا ہو) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۴) \quad \begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[ \frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

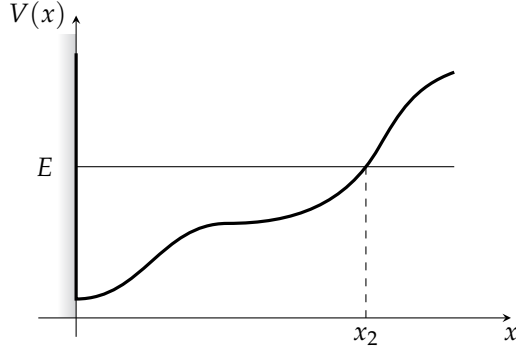
منطبق خط 1 میں ونڈل وکرامرس ویرلوان اور پیوندی تفاعل موج کے موازنہ سے

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

حاصل ہوگا، جس میں  $a$  کی قیمت مادات ۸.۴۱ سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۸.۴۵) \quad B = -ie^{i\pi/4} D \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4} D$$

انہیں **کلیاتے جوڑ**<sup>۱۴</sup> کہتے ہیں، جو نقطہ واپسیں کے دونوں اطراف ونڈل وکرامرس ویرلوان حلوں کو آپس میں پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام، نقطہ واپسیں پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا؛ اس کی ضرورت آگے نہیں آئے



شکل ۸.۱۰: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

گی۔ تمام چیزوں کو معمولی زنی مستقل  $D$  کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپس کو واپس مبداءے اختیاری نقطہ  $x_2$  منتقل کرتے ہوئے، ونڈل وکرا مسرس ویرلوان تفاعل موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۸.۳۶) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2 \end{cases}$$

مثال ۸.۳: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔ فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی  $x = 0$  پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہے (شکل ۸.۱۰)۔ ایسی صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا لہذا مساوات ۸.۳۶ کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

یاد رہے ذیل ہوگا۔

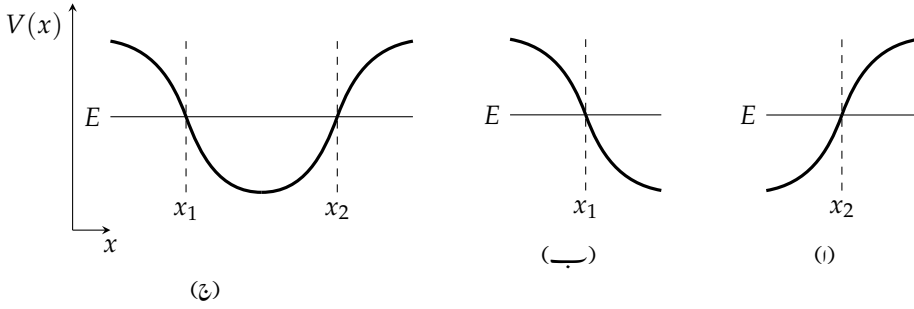
$$(۸.۴۷) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi \hbar$$

مثلاً، ”نصف ہارمونی مرتعش“:

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & x > 0, \\ 0, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}$$



شکل ۸.۱۱: بالائی رخ ڈھلوان اور نیچے رخ ڈھلوان نقطہ واپسیں۔

ہوگا، جہاں

$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

نقطہ واپسیں ہے۔ لہذا

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}$$

ہوگا، اور کوانٹائزیشن شرط (مساوات ۸.۴۷) درج ذیل دیگا۔

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar\omega$$

اس مخصوص صورت میں ونڈل وکرامرس برلوان تخمین اصل اجبازتی توانائیاں دیتی ہے (جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں؛ سوال ۲.۴۲ دیکھیں)۔ □

مثال ۸.۴: بغیر امتصالی دیواروں کا مخفیہ کنوائے۔ اس نقطہ واپسیں پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۱۱-۱) ہو، مساوات ۸.۴۶ ونڈل وکرامرس برلوان تقاضات موج کو آپس میں پیوند کرتی ہے۔ نیچے ڈھلوان نقطہ واپسیں (شکل ۸.۱۱-ب) پر یہی دلائل درج ذیل دیگا (سوال ۸.۹)۔

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'}, & x < x_1 \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x > x_1 \end{cases}$$

بالخصوص، مخفیہ کنویں (شکل ۸.۱۱-ج) کی بات کرتے ہوئے، ”اندرونی“ خطے ( $x_1 < x < x_2$ ) میں تقاضا موج کو



$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۴۶)، یاد رنج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۵۰)۔ ظاہر ہے، ماسوائے مضرب  $\pi$  کے،<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل لازماً برابر ہوں گے:  $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۵۱) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

یہ کوانٹائزیشن شرط، دو ڈھلوان اطراف کے ”عمومی“ مخفیہ کنویں کی احبازتی توانائیوں کو تعین کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ دو انتضائی دیواروں کے کلیہ (مساوات ۸.۱۶) یا ایک انتضائی دیوار کے کلیہ (مساوات ۸.۴۷) اور موجودہ کلیہ (مساوات ۸.۵۱) میں صرف اس عدد (0، 1/4 یا 1/2) کا منفرق ہے جو  $n$  سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونزئل و کرامرس و برلوان تخمین (بڑی  $n$  کی) نیم کلاسیکی طریق میں بہترین کام کرتی ہے، لہذا یہ منفرق صرف دکھاوے کی حد تک ہے۔ بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے، جس کو استعمال کر کے، مساوات شرودنگر حل کیے بغیر، ایک سادہ گھم کی قیمت حاصل کر کے تخمینی احبازتی توانائیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔  
□

سوال ۸.۵: زمین پر ٹپکدار ٹپکیاں لیتے ہوئے (کمیت  $m$  کی) گیند کے کلاسیکی مسئلے کے مشاغل کوانٹائی میکانی مسئلے پر غور کریں۔<sup>۱۶</sup>

ا. مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی  $x$  کا تقاعیل لکھیں؟ (منفی  $x$  کی صورت میں مخفیہ لامتناہی ہوگا؛ گیند کبھی وہاں نہیں جاسکتا۔)

ب. اس مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر حل کر کے جواب کو مناسب ایسری تقاعیل کے روپ میں لکھیں (یاد رہے، بڑی  $z$  پر  $\text{Bi}(z)$  بے فتابو بڑھتا ہے، لہذا اس کو لازماً رد کرنا ہوگا)۔ تقاعیل  $\psi(x)$  کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

ج. پہلی چار احبازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک  $9.80 \text{ m/s}^2 = g$  اور  $0.1 \text{ kg} = m$  لے کر حاصل کریں۔

د. اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی، eV میں، کتنی ہوگی؟ اوسطاً الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ ورمل سے  $\langle x \rangle$  کا تعین کریں۔

<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل میں منفرق مضرب  $\pi$  نہ کے مضرب  $2\pi$  ہوگا، چونکہ مجموعی منفی علامت کو معمول زنی مستطانت  $D$  اور  $D'$  میں ضم کیا جاسکتا ہے۔  
<sup>۱۶</sup> ایک معنوی مسئلہ نظر آتا ہے؛ درحقیقت، نیوٹران کے لئے یہ تجربہ سراسیمہ دیا گیا ہے۔

سوال ۸.۶: ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے (سوال ۸.۵ کی) ڈیکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

۱. اجزائی توانائیوں  $E_n$  کو  $m$ ،  $g$  اور  $\hbar$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. سوال ۸.۵-ج میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا "بالکل ٹھیک" نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. کوانٹائی عدد  $n$  کو کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسط زمین سے، مثلاً، ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجزائی توانائیوں کو ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش (جس کی زاویائی تعدد  $\omega$  ہو) کی  $n$  ویں ساکن حال میں کیفیت  $m$  کے ایک ذرے پر غور کریں۔

۱. نقطہ واپس،  $x_2$ ، تلاش کریں۔

ب. نقطہ واپس سے کتنی بلندی ( $d$ ) پر خط بند مخفیہ (مادرات ۸.۳۲ لیکن نقطہ واپس  $x_2$  پر ہو) میں سہو 1% ہوگا؟ یعنی، اگر

$$\frac{V(x_2 + d) - V(x_2)}{V(x_2)} = 0.01$$

ہو، تب  $d$  کیا ہوگا؟

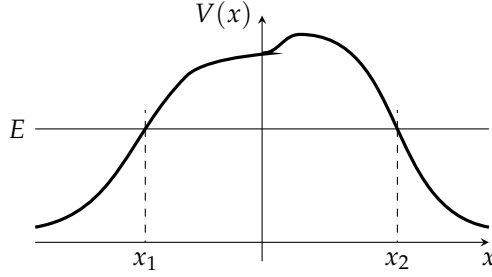
ج. جب تک  $z \geq 5$  ہو  $\text{Ai}(z)$  کا مقدرابی روپ 1% تک درست ہوگا۔ جزو-ب میں حاصل کردہ  $d$  کے لئے  $n$  کی ایسی سب سے کم قیمت تلاش کریں کہ  $\alpha d \geq 5$  ہو۔ (اس سے بڑی  $n$  کے لئے ایسا منطبق خطہ موجود ہوگا جس میں خط بند مخفیہ 1% تک درست اور بڑی  $z$  روپ کا ایسری تقابل 1% درست ہوگا۔)

سوال ۸.۹: نیچے ڈھلوان نقطہ واپس کا پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات ۸.۵۰ کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۲) سے بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کے ونڈل وکراسرس ویرلوان تقابل موج سے آواز کریں۔

$$(۸.۵۲) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Ae^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p(x') dx'} + Be^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p(x') dx'} \right], & (x < x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ Ce^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + De^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Fe^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2) \end{cases}$$

کسی صورت  $C = 0$  مت لیں۔ سرنگ زنی احتمال  $T = |F|^2 / |A|^2$  کا حساب کریں، اور دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں آپ کا نتیجہ مساوات ۸.۲۲ دے گا۔



شکل ۸.۱۲: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

### اضافی سوالات برائے باب ۸

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ:

$$V(x) = \alpha |x|^\nu$$

جہاں  $\nu$  ایک مثبت عدد ہے، کی احبازتی توانائیوں کو ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو  $\nu = 2$  جابجائیں۔ جواب: ۷۱

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[ (n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2\nu}{\nu+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین استعمال کر کے سوال ۲.۵۱ کے مخفیہ کے لئے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجہ کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب:  $-\left[(9/8) - (1/\sqrt{2})\right] \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے ہم رداسی حصے (مساوات ۴.۳۷) پر ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات ۸.۴ کی درج ذیل روپ کو  $l = 0$  کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا<sup>۱۸</sup>

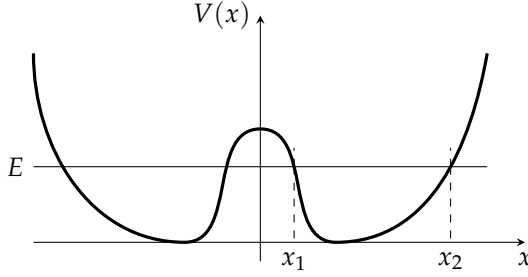
$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar$$

جہاں  $r_0$  نقطہ واپس ہے، (یعنی ہم  $r = 0$  کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں)۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگار تخی مخفیہ:

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

۷۱ ہمیشہ کی طرح، ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین نیم کلاسیکی (بڑی  $n$ ) طریق میں سب سے زیادہ درست ثابت ہوتی ہے۔ بالخصوص، مساوات ۸.۵۳ زمینی حال ( $n=1$ ) کے لئے اتنی اچھی نہیں ہے۔

۱۸ رداسی مساوات پر ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کا اطلاق چند نازک اور پیچیدہ مسائل پیدا کرتا ہے، جس پر یہاں کوئی بات نہیں کی جائے گی۔



شکل ۸.۱۳: تشاکی دوہر اکنوں؛ سوال ۸.۱۵۔

کی احبازتی توانائیوں کی اندازا قیمت تلاش کریں (جہاں  $V_0$  اور  $a$  مستقل ہیں)۔ صرف  $l = 0$  کی صورت پر غور کریں۔ دکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار قیمت پر نہیں۔ جبزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left( \frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right)$$

سوال ۸.۱۴: ونزل و کرامرس و برلوان تئمن کا درج ذیل روپ

$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$

استعمال کر کے ہائیڈروجن کی مقید حال توانائیوں کی اندازا قیمت تلاش کریں۔ موثر مخفیہ (مساوات ۴.۳۸) میں مرکز گریز جبزوشا مسل کر نامت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

آپ دیکھیں گے کہ  $l \gg n$  اور  $n \gg 1/2$  کی صورت میں پوہر سطحیں حاصل ہوں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}$$

سوال ۸.۱۵: تشاکی دوہر اکنوں (شکل ۸.۱۳) پر غور کریں۔ ہم  $E < V(0)$  والی مقید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱. خطہ (i)  $x > x_2$ ، (ii)  $x_1 < x < x_2$ ، اور (iii)  $0 < x < x_1$  کے لئے ونزل و کرامرس و برلوان تفاعلات موج لکھیں۔ نقطہ  $x_1$  اور  $x_2$  پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے

(مساوات ۸.۴۶ میں  $x_2$  کے لئے ایسا کیا گیا ہے؛ آپ کو  $x_1$  کے لئے کرنا ہوگا) درج ذیل دکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ 2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right] & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

ب۔ چونکہ  $V(x)$  تشاکی ہے، لہذا ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تقاضات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول الذکر صورت میں  $\psi'(0) = 0$  ہوگا، جبکہ موخر الذکر صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا۔ دکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹائزیشن شرط حاصل ہوتی ہے

$$(۸.۵۹) \quad \tan \theta = \pm 2e^{\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۶۰) \quad \phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'$$

مساوات ۸.۵۹ (تخمینی) احبازتی توانائیوں کا تعین کرتی ہے (دھیان رہے کہ  $x_1$  اور  $x_2$  میں  $E$  کی قیمت داخل ہوتی ہے، لہذا  $\theta$  اور  $\phi$  دونوں  $E$  کے تقاضات ہوں گے)۔

ج۔ ہم بالخصوص ایسی درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں جو بلند یا چوڑی یا دونوں ہو؛ ایسی صورت میں  $\phi$  بڑا ہوگا، لہذا  $e^{\phi}$  انتہائی بڑا ہوگا۔ مساوات ۸.۵۹ کے تحت  $\theta$  کی قیمتیں  $\pi$  کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے  $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ ، جہاں  $|\epsilon| \ll 1$  ہے، لکھ کر دکھائیں کہ کوانٹائزیشن شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۸.۶۱) \quad \theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}$$

د۔ فرض کریں دونوں کنودوں میں مخفیہ قطع مکانی ہیں۔<sup>۱۹</sup>

$$(۸.۶۲) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & x > 0 \end{cases}$$

<sup>۱۹</sup> حصہ ۲ کے شروع کے تذکرہ میں  $\omega \cong \sqrt{V''(x_0)}/m$  لیتے ہوئے جہاں  $x_0$  نقطہ اقل کا مقام ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ اگر دونوں کنودوں میں مخفیہ ٹیکہ قطع مکانی نہ ہوں تب بھی یہاں  $\theta$  کا سبب، لہذا نتیجہ (مساوات ۸.۶۳) تخمینہ درست ہوگا۔

اس مخفیہ کوترسیم کر کے  $\theta$  (مساوات ۸.۵۸) تلاش کریں، اور درج ذیل دکھائیں۔

$$(۸.۶۳) \quad E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi} e^{-\phi}$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نامتناہل گزر  $(\phi \rightarrow \infty)$  ہو، تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی سرعشتا ہوتے، اور توانائیاں  $E_n = (n + 1/2) \hbar\omega$  دوہری اخطاطی ہوتیں، چونکہ ذرہ بائیں کنویں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ مستثنای رکاوٹ کی صورت میں (دونوں کنویں کے بیچ ”رابطہ“ ممکن ہوگا، لہذا) اخطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات  $(\psi_n^+)$  کی توانائی معمولی کم اور طاق تقاسمات  $(\psi_n^-)$  کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

فرض کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے؛ یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n^+ + \psi_n^-)$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ ہیئت کی وہ قیمتیں منتخب کی جاتی ہیں کہ ذرے کا بیشتر حصہ دائیں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دکھائیں کہ یہ ذرہ دونوں کنویں کے بیچ دوری عرصہ:

$$(۸.۶۴) \quad \tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}$$

کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔

و. متغیر  $\phi$  کی قیمت، جسزود کے مخصوص مخفیہ کے لئے تلاش کریں، اور دکھائیں کہ  $E \gg V(0)$  کے لئے  $\phi \sim m\omega a^2 / \hbar$  ہوگا۔

سوال ۸.۱۶: شمارکے اثر میں سرنگ زنی۔ بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولاً ایک الیکٹران جوہر سے سرنگ زنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار یہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا عمومی شمارک اثر تجربے میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ یک بُعدی نمونہ استعمال کر کے اس احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں: فرض کریں ایک ذرہ بہت گہرے مستثنای چوکور کنواں (حصہ ۲.۶) میں پایا جاتا ہے۔

ا. کنویں کی تہ سے ناپٹے ہوئے، زمینی حال توانائی کتنی ہوگی؟ یہاں  $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$  فرض کریں۔ اشارہ: یہ  $2a$  چوڑائی کے) لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

ب. اب اضطراب  $H' = -\alpha x$  متعارف کریں (برقی میدان  $E$  بیرونی)  $E = -E$  میں الیکٹران کے لئے بیرونی  $eE = \alpha$  ہوگا۔ فرض کریں یہ نسبتاً کمزور اضطراب  $(\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2)$  ہے۔ کل مخفیہ کا حنا کہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت  $x$  رخ سرنگ زنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

ج. سرنگ زنی جسزو ضربی  $\gamma$  (مساوات ۸.۲۲) کا حساب کریں، اور ذرے کو منہا ہونے کے لئے درکار وقت

$$(مساوات ۸.۲۸) \quad \gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}, \tau = (8ma^2 / \pi\hbar) e^{2\gamma} \text{ جواب:}$$

د. معقول اعداد:  $V_0 = 20 \text{ eV}$  (بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت)،  $a = 10^{-10} \text{ m}$  (عمومی جوہری رداس)،  $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$  (تجربہ گاہ میں مضبوط میدان)، الیکٹران بار  $e$  اور الیکٹران کمیت  $m$  لیں۔ عرصہ  $\tau$  کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر سے کریں۔

سوال ۸.۱: میز پر کھڑی بوتل، رہائشی درجہ حرارت پر کوانٹائی سرنگ زنی کی وجہ سے کتنی دیر میں از خود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت  $m$ ، رداس  $R$ ، اور فتد  $h$  کی یکساں ٹکلی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کی، توازنی مقام  $(h/2)$  سے، بلندی کو  $x$  سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی  $mgx$  ہوگی، اور بوتل اس صورت گرے گی جب  $x$  کی قیمت فاصل قیمت  $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$  کو پہنچے۔ سرنگ زنی احتمال (مساوات ۸.۲۲)  $E = 0$  کے لئے حاصل کریں۔ حراری توانائی  $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$  لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات ۸.۲۸ سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔





## باب ۹

# تابع وقت نظریہ اضطراب

اب تک ہم جو کچھ کر چکے ہیں اس کو کوانٹائی سکونیاتے کہا جاسکتا ہے، جس میں مخفی توانائی تفاع عمل غیر تابع وقت:  $V(r, t) = V(r)$  ہے۔ ایسی صورت میں (تابع وقت) مساوات شرودنگر:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

کو علیحدگی متغیرات:

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$$

سے حل کیا جاسکتا ہے، جہاں  $\psi(r)$  غیر تابع مساوات شرودنگر

$$H\psi = E\psi$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ علیحدگی حلوں میں تابعیت وقت کو قوت نہائی جزو ضربی  $(e^{iEt/\hbar})$  ظاہر کرتا ہے، جو کسی بھی طبیعی مقدار  $|\Psi|^2$  کے حصول میں منسوخ ہوتا ہے، لہذا تمام احتمالات اور توقعاتی قیمتیں وقت کے لحاظ سے مستقل ہوں گے۔ ان ساکن حالات کے خطی جوڑے ہم زیادہ دلچسپ تابعیت وقت والے تفاعلات موج تیار کر سکتے ہیں، لیکن اب بھی توانائی اور ان کے متعلقہ احتمالات مستقل ہوں گے۔

توانائی کی ایک سطح سے دوسری سطح میں الیکٹران کی **تحویلات** (جنہیں بعض اوقات **کوانٹائی پھلانگ**<sup>۲</sup> کہتے ہیں) ممکن بنانے کی خاطر، ضروری ہے کہ ہم تابع وقت مخفیہ (کوانٹائی حرکت) **حرکیات**<sup>۳</sup> متعارف کریں۔ کوانٹائی حرکیات میں

quantum statics<sup>۱</sup>  
quantum jumps<sup>۲</sup>  
quantum dynamics<sup>۳</sup>

ایسے بہت کم مسائل پائے جاتے ہیں جن کا بالکل ٹھیک ٹھیک حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہاں، اگر ہیملٹنی کے غیر تابع وقت حصہ کے لحاظ سے تابع وقت حصہ بہت چھوٹا ہو، تب اسے اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں، میں تابع وقت نظریہ اضطراب تیار کرتا ہوں، اور اس کی دو اہم ترین استعمال: جوہر سے اشعاعی احراج اور انجذاب، پر غور کرتا ہوں۔

## ۹.۱ دو سطحی نظام

شروعات کرنے کی غرض سے فرض کریں (غیر مضطرب) نظام کے صرف دو حالات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  پائے جاتے ہیں۔ یہ غیر مضطرب ہیملٹنی،  $H^0$ ، کے امتیازی حالات:

$$(9.1) \quad H^0 \psi_b = E_b \psi_b, \quad \text{اور} \quad H^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

ہوں گے جو معیاری عمودی ہیں۔

$$(9.2) \quad \langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$$

کسی بھی حال کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے؛ بالخصوص، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.3) \quad \Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

اس سے مندرجہ نہیں پڑتا کہ تفاعلات  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  مقام و فضائی تفاعلات، یا چپکے کار، یا کوئی اور عجیب تفاعل ہوں؛ ہمیں یہاں صرف تابعیت وقت سے غرض ہے، لہذا جب میں  $\Psi(t)$  لکھتا ہوں، میرا مراد وقت  $t$  پر نظام کا حال ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں، ہر حبز و اپنی خصوصی قوت نمائی حبز و ضربی کے ساتھ ارتقا:

$$(9.4) \quad \Psi(t) = c_a \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

پائے گا۔ ہم کہتے ہیں کہ ”حال  $\psi_a$  میں ذرہ پائے جانے کا احتمال“  $|c_a|^2$  ہے؛ جس سے ہمارا مطلب دراصل یہ ہے کہ پیمائش سے توانائی کی قیمت  $E_a$  حاصل ہونے کا احتمال  $|c_a|^2$  ہے۔ یقیناً، تفاعل  $\Psi$  کی معمول زنی کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(9.5) \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

## ۹.۱.۱ مضطرب نظام

فرض کریں، اب ہم تابع وقت اضطراب،  $H'(t)$ ، چالو کرتے ہیں۔ چونکہ  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  ایک مکمل سلسلہ نام کرتے ہیں، لہذا تفاعل موج  $\Psi(t)$  کو بھی ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ صرف اتنا ہوگا کہ اب  $c_a$  اور  $c_b$  وقت  $t$  کے تفاعلات ہوں گے۔

$$(9.6) \quad \Psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t) \psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$$

(میں قوت نسائی حبز و ضربیوں کو  $c_a(t)$  یا  $c_b(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں، جیسا بعض لوگ کرنا پسند کرتے ہیں، لیکن میں چاہتا ہوں کہ تابعیت وقت کا وہ حصہ جو عدم اضطراب کی صورت میں بھی پایا جاتا ہو نظر آتا رہے۔) ہمارا پورا کام صرف اتنا ہے کہ ہم وقت کے تفاعلات  $c_a$  اور  $c_b$  کا تعین کریں۔ مثال کے طور پر، اگر ایک ذرہ آغاز میں حال  $\psi_a$  ( $c_a(0) = 1, c_b(0) = 0$ ) میں پایا جاتا ہو اور بعد میں کسی وقت  $t_1$  پر  $c_a(t_1) = 0, c_b(t_1) = 1$  ہوں، تب ہم کہیں گے کہ نظام  $\psi_a$  سے  $\psi_b$  میں تحویل ہوا ہے۔

ہم  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  معلوم کرنے کی غرض سے مطالبہ کرتے ہیں کہ  $\Psi(t)$  تابع وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرے۔

$$(9.4) \quad H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad H = H^0 + H'(t)$$

مساوات ۹.۶ اور مساوات ۹.۷ سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} c_a[H^0\psi_a]e^{-iE_a t/\hbar} + c_b[H^0\psi_b]e^{-iE_b t/\hbar} + c_a[H'\psi_a]e^{-iE_a t/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_b t/\hbar} \\ = i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_b t/\hbar} \right. \\ \left. + c_a\psi_a \left(-\frac{iE_a}{\hbar}\right) e^{-iE_a t/\hbar} + c_b\psi_b \left(-\frac{iE_b}{\hbar}\right) e^{-iE_b t/\hbar} \right] \end{aligned}$$

مساوات ۹.۱ کی بدولت بائیں ہاتھ کے پہلے دو اجزاء دائیں ہاتھ کے آخری دو اجزاء کے ساتھ کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(9.8) \quad c_a[H'\psi_a]e^{-iE_a t/\hbar} + c_b[H'\psi_b]e^{-iE_b t/\hbar} = i\hbar \left[ \dot{c}_a\psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + \dot{c}_b\psi_b e^{-iE_b t/\hbar} \right]$$

تفعل  $\psi_a$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  کی عمودیت (مساوات ۹.۲) بروئے کار لاتے ہوئے ہم  $\dot{c}_a$  کو الگ کرتے ہیں۔

$$c_a\langle\psi_a|H'|\psi_a\rangle e^{-iE_a t/\hbar} + c_b\langle\psi_a|H'|\psi_b\rangle e^{-iE_b t/\hbar} = i\hbar\dot{c}_a e^{-iE_a t/\hbar}$$

مختصر لکھائی کے غرض سے ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں:

$$(9.9) \quad H'_{ij} \equiv \langle\psi_i|H'|\psi_j\rangle$$

دھیان رہے کہ  $H'$  ہر مشی ہے، لہذا  $H'_{ji} = (H'_{ij})^*$  ہوگا۔ دونوں اطراف کو  $-(i/\hbar)e^{iE_a t/\hbar}$  سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(9.10) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-i(E_b - E_a)t/\hbar} \right]$$

اسی طرح  $\psi_b$  کے ساتھ اندرونی ضرب سے  $\dot{c}_b$  الگ کیا جاسکتا ہے:

$$c_a \langle \psi_b | H' | \psi_a \rangle e^{-iE_a t / \hbar} + c_b \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle e^{-iE_b t / \hbar} = i \hbar \dot{c}_b e^{-iE_b t / \hbar}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(9.11) \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} \left[ c_b H'_{bb} + c_a H'_{ba} e^{i(E_b - E_a)t / \hbar} \right]$$

مساوات ۹.۱۰ اور مساوات ۹.۱۱ مل کر  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کا تعین کرتے ہیں؛ یہ دونوں مل کر دو سطحی نظام کی (تابع وقت) مساوات شرودنگر کے مکمل معادل ہیں۔ عمومی طور پر  $H'$  کے وتری متابلی ارکان صفر ہوں گے:

$$(9.12) \quad H'_{aa} = H'_{bb} = 0$$

(عمومی صورت کے لیے سوال ۹.۴ دیکھیں)۔ اگر ایسا ہو تب مساوات سادہ رہے:

$$(9.13) \quad \dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b, \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a$$

اختیار کرتی ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(9.14) \quad \omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

(میں  $E_b \geq E_a$  فرض کرتا ہوں، لہذا  $\omega_0 \geq 0$  ہوگا۔)

سوال ۹.۱: ایک ہائیڈروجن جوہر کو (تابع وقت) برقی میدان  $E = E(t) \mathbf{k}$  میں رکھا جاتا ہے۔ زمینی حال ( $n = 1$ ) اور (چارگٹ انحطاطی) پہلے ہیجان حالات ( $n = 2$ ) کے بیچ اضطراب  $H' = eEz$  کے چاروں متابلی ارکان  $H'_{ij}$  تلاش کریں۔ دکھائیں کہ پانچوں حالات کے لیے  $H'_{ii} = 0$  ہوگا۔ تبصرہ: محور  $z$  کے لحاظ سے طاق پڑے ہوئے کارلاتے ہوئے، صرف ایک مکمل حل کرنے کی ضرورت ہوگی؛ اس روپ کا اضطراب زمینی حال سے  $n = 2$  حالات میں سے صرف ایک تک رسائی دیتا ہے، لہذا یہ نظام دو حالات تشکیل کے طور پر کام کرے گا؛ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ بلند ہیجان حالات تک تحویل نظریہ انداز کی جاسکتی ہے۔

سوال ۹.۲: غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں  $c_a(0) = 1$  اور  $c_b(0) = 0$  لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔ تبصرہ: نظریہ نظام ”حصص  $\psi_a$ “ اور ”کسی  $\psi_b$ “ کے بیچ ارتعاش کرتا ہے۔ کیا یہ میرے اس عمومی دعوے کی نفی نہیں کرتا کہ غیر تابع وقت اضطراب کی صورت میں تحویل نہیں ہوگی؟ جی نہیں، لیکن اس کی وجہ کچھ لطیف ہے: یہاں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  نہ کبھی ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات تھے اور نہ ہی؛ توانائی کی پیمائش کبھی بھی  $E_a$  یا  $E_b$  نہیں دیگی۔ نظام پر نظر ڈالنے کی خاطر، تابع وقت نظریہ اضطراب میں ہم عموماً اضطراب چالو کر کے کچھ دورانیہ کے بعد بند

کرتے ہیں۔ آغاز اور اختتام میں  $\psi_a$  اور  $\psi_b$  بالکل ٹھیک ہیملٹنی کے امتیازی حالات ہوں گے، اور صرف اس سیاق و سباق میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نظام ایک سے دوسرے میں تحویل ہوا۔ یوں، موجودہ مسئلے میں، فرض کریں کہ وقت  $t = 0$  پر اضطراب چالو کیا جاتا ہے جسے وقت  $t$  پر بند کیا جاتا ہے؛ اس سے حساب پر کوئی فرق نہیں پڑے گا، تاہم یہ نتائج کی معقول تشریح ممکن بناتی ہے۔

سوال ۹.۳: فرض کریں اضطراب کاروپ (وقت کا  $\delta$  تفاعل ہے۔

$$H' = U\delta(t)$$

فرض کریں  $U_{aa} = U_{bb} = 0$  اور  $U_{ab} = U_{ba}^* \equiv \alpha$  ہے۔ اگر  $c_a(-\infty) = 1$  اور  $c_b(-\infty) = 0$  ہوں،  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  تلاش کریں، اور تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔ تحویل ہونے کا حتمی احتمال  $t \rightarrow \infty$  کے لیے  $P_{a \rightarrow b}$  کیا ہوگا؟ اشارہ: آپ ڈیلٹا تفاعل کو مستطیلوں کے تسلسل کی تحدیدی حد لے سکتے ہیں۔

$$P_{a \rightarrow b} = \sin^2(|\alpha|/\hbar)$$

## ۹.۱.۲ تاجع وقت نظریہ اضطراب

اب تک سب کچھ بالکل ٹھیک رہا ہے: ہم نے اضطراب کی جامت کے بارے میں کچھ فرض نہیں کیا۔ لیکن، ”چھوٹے“  $H'$  کی صورت میں ہم مساوات ۹.۱۳ کو (درج ذیل) ایک بعد دیگر تخمینے سے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ذرہ زیریں حال:

$$(9.15) \quad c_a(0) = 1, \quad c_b(0) = 0$$

سے آغاز کرتا ہے۔ عدم اضطراب کی صورت میں ذرہ ہمیشہ کے لیے یہیں (صفر رتبی میں) رہے گا۔  
صفر رتبہ:

$$(9.16) \quad c_a^{(0)}(t) = 1, \quad c_b^{(0)}(t) = 0$$

(میں تخمینے کے رتبہ کو زیر بالا میں قوسین میں لکھتا ہوں۔ یوں  $c_a^{(0)}(t)$  میں 0 رتبہ صفر کو ظاہر کرتا ہے۔)

ہم مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں صفر قیمتیں پڑ کر کے اول رتبی تخمینے حاصل کرتے ہیں۔

اول رتبہ:

$$(9.17) \quad \frac{dc_a^{(1)}}{dt} = 0 \rightarrow c_a^{(1)}(t) = 1$$

$$\frac{dc_b^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \rightarrow c_b^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

اب ہم انہیں دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے رتبہ دوم تخمین حاصل کرتے ہیں۔

دوم رتبہ:

$$(9.18) \quad \frac{dc_a^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt' \rightarrow$$

$$c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left[ \int_0^{t'} H'_{ba}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right] dt'$$

جہاں  $c_b$  تبدیل نہیں ہوا  $c_b^{(1)}(t) = c_b^{(2)}(t)$  - (دھیان رہے کہ  $c_a^{(2)}(t)$  میں صفر رتبی جزو بھی شامل ہے؛ دوم رتبی تصحیح صرف عملی حصہ ہوگا۔)

اصولاً، ہم اسی طرح چلتے ہوئے  $n$  رتبی تخمین کو مساوات ۹.۱۳ کے دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے  $(n + 1)$  رتبی تخمین کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ صفر رتبی میں  $H'$  کا کوئی جزو ضربی نہیں پایا جاتا، اول رتبی تصحیح میں  $H'$  کا ایک جزو ضربی پایا جاتا ہے، دوم رتبی تصحیح میں  $H'$  کے دو جزو ضربی پائے جاتے ہیں، وغیرہ۔<sup>۵</sup> اول رتبی تخمین میں سہو ہوگا۔ ہاں  $H'$  میں اول رتبہ تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 \neq 1$  سے صاف ظاہر ہے (ٹھیک عددی سروں کو یقیناً مساوات ۹.۵ پر پورا اترنا چاہیے)۔ یہی کچھ زیادہ بلند رتبی تخمین کے لیے بھی ہوگا۔

سوال ۹.۴: فرض کریں آپ  $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$  نہیں لیتے۔

۱. صورت 1  $c_a(0) = 0$  اور  $c_b(0) = 1$  کے لئے اول رتبی نظریہ اضطراب سے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں۔ دکھائیں کہ  $H'$  میں اول رتبہ تک  $|c_a^{(1)}(t)|^2 + |c_b^{(1)}(t)|^2 = 1$  ہوگا۔

ب. اس مسئلے کو بہتر انداز میں نمٹا جاسکتا ہے۔ درج ذیل لیکر

$$(9.19) \quad d_a \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{aa}(t') dt'} c_a, \quad d_b \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{bb}(t') dt'} c_b$$

دکھائیں کہ

$$(9.20) \quad \dot{d}_a = -\frac{i}{\hbar} e^{i\phi} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} d_b; \quad \dot{d}_b = -\frac{i}{\hbar} e^{-i\phi} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} d_a$$

ہوگا، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(9.21) \quad \phi(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t [H'_{aa}(t') - H'_{bb}(t')] dt'$$

<sup>۵</sup> دھیان رہے کہ ہر جفت رتبہ میں  $c_a$ ، اور ہر طاق رتبہ میں  $c_b$  تبدیل ہوتا ہے؛ اگر نظام ان دو حالات کے خطی جوڑے آفساز کرے، یا اضطراب میں وتری ارکان پائے جاتے ہیں، تب ایسا نہیں ہوگا۔

یوں ( $H'$ ) کے ساتھ چسپاں اضافی جزو ضرب  $e^{i\phi}$  کے علاوہ  $d_a$  اور  $d_b$  کی مساواتیں، ساخت کے لحاظ سے مساوات ۹.۱۳ کی متماثل ہیں۔

ج. اول رتبی نظریہ اضطراب سے، جزو-ب کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے،  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  حاصل کریں، اور اپنے جواب کا جزو-الف کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں مندرجہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵: عمومی صورت  $c_b(0) = b$ ،  $c_a(0) = a$  کے لیے نظریہ اضطراب میں مساوات ۹.۱۳ کو دوم رتبہ تک حل کریں۔

سوال ۹.۶: غیر تابع وقت اضطراب (سوال ۹.۲) کے لیے  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو دوم رتبہ تک حاصل کریں۔ اپنے جواب کا ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

### ۹.۱.۳ سائنس اضطراب

معرض کریں اضطراب میں تابعیت وقت سائنس:

$$H'(r, t) = V(r) \cos(\omega t) \quad (9.22)$$

تب

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos(\omega t) \quad (9.23)$$

ہوگا، جہاں  $V_{ab}$  درج ذیل ہے۔

$$V_{ab} \equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle \quad (9.24)$$

(عملاً، تقریباً ہر صورت میں وتری متالبی ارکان صفر ہوتے ہیں، لہذا پہلے کی طرح یہاں بھی میں معرض کرتا ہوں کہ وتری متالبی ارکان صفر ہیں۔) اول رتبہ تک (یہاں سے آگے، ہم صرف اول رتبہ تک کام کریں گے، لہذا زیر بالا میں رتبہ کی نشاندہی نہیں کی جائے گی) درج ذیل ہوگا (مساوات ۹.۱۷)۔

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = -\frac{i V_{ba}}{2\hbar} \int_0^t \left[ e^{i(\omega_0 + \omega)t'} + e^{i(\omega_0 - \omega)t'} \right] dt' \\ (9.25) \quad &= -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right] \end{aligned}$$

یہی جواب ہے، لیکن اس کے ساتھ کام کرنا ذرا دشوار ہوگا۔ جبری تعدد  $(\omega)$  کو تجویلی تعدد  $(\omega_0)$  کے بہت قریب رہنے کا پابند بنانے سے، چوکور قوسین میں دوسرا جزو غالب ہوگا، جس سے چیزیں نہایت آسان ہو جاتی ہیں؛ بالخصوص ہم درج ذیل معرض کرتے ہیں۔

$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega| \quad (9.26)$$

یہ بہت بڑی پابندی نہیں ہے، چونکہ کسی دوسرے تعدد پر تحویل کا احتمال نہ ہونے کے برابر ہے۔<sup>۶</sup> پہلے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} c_b(t) &\cong -\frac{V_{ba}}{2\hbar} \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t/2}}{\omega_0-\omega} \left[ e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2} \right] \\ (9.24) \quad &= -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{\omega_0-\omega} e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \end{aligned}$$

ایک ذرہ جو حال  $\psi_a$  سے آغاز کر کے لمحہ  $t$  پر حال  $\psi_b$  میں پایا جاتا ہو، کے تحویل کا احتمال، جس کو **تحویل احتمال**<sup>۷</sup> کہتے ہیں، درج ذیل ہوگا۔

$$(9.28) \quad P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)^2}$$

اس نتیجے کا دلچسپ پہلو یہ ہے کہ، وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال سائن نمائندگی کرتا ہے (شکل ۹.۱)۔ یہ  $\omega^2 (\omega_0 - \omega)^2 / \hbar^2 |V_{ab}|^2$  کی اعظم قیمت تک پہنچ کر، جولا زماً 1 سے بہت کم ہے (درج ذیل اضطراب کو چھوٹا فرض نہیں کر پائیں گے) یہ واپس گر کر صفر ہوتا ہے! لمحات  $t_n = 2n\pi / |\omega_0 - \omega|$  پر، جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$  ہے، ذرہ لازماً خپلے حال میں ہوگا۔ اگر آپ تحویل کا احتمال بڑھانا چاہتے ہیں، اضطراب کو لمبے عرصے کے لیے حوالہ رکھیں؛ بہتر ہوگا کہ آپ وقت  $\pi / |\omega_0 - \omega|$  پر اضطراب کو بند کر کے نظام کو بالائی حال میں ”پانے“ کی امید کریں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ دو حالات کے بیچ تحویل، نظریہ اضطراب کی پیدا کردہ مصنوعی خاصیت نہیں، بلکہ ٹھیک حال میں بھی ایسا ہی ہوگا، اگرچہ تحویلی تعدد کچھ مختلف ہوگا۔

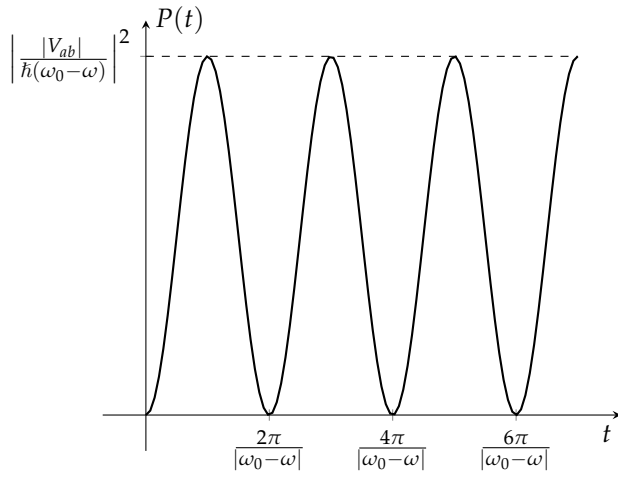
جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، تحویل کا احتمال اس صورت سب سے زیادہ ہوگا جب جبری تعدد قدرتی تعدد  $\omega_0$  کے قریب ہو۔ شکل ۹.۲ میں  $\omega$  کے لحاظ سے  $P_{a \rightarrow b}$  ترسیم کر کے اس حقیقت کو اجاگر کیا گیا ہے۔ چوٹی کی بلندی  $(|V_{ab}| t / 2\hbar)^2$  جبکہ چوڑائی  $4\pi / t$  ہے؛ ظاہر ہے کہ وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اس کی بلندی بڑھتی اور چوڑائی گھٹتی ہے۔ (بظاہر، اعظم قیمت بغیر کسی حد کی بتدریج بڑھتی ہے۔ تاہم 1 تک پہنچنے سے بہت پہلے چھوٹے اضطراب کا مفروضہ ناکارہ ہو جاتا ہے، لہذا ہم نہایت کم  $t$  کے لیے اس نتیجے پر یقین کر سکتے ہیں۔ سوال ۹.۷ میں آپ دیکھیں گے کہ ٹھیک نتیجہ 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔)

سوال ۹.۷: مساوات ۹.۲۵ میں پہلا جزو  $\cos(\omega t)$  کے  $e^{i\omega t} / 2$  حصے، اور دوسرا  $e^{-i\omega t} / 2$  سے آتا ہے۔ یوں پہلے جزو کو نظر انداز کرنا مضابطہ طور پر  $H' = (V/2)e^{-i\omega t}$  لکھنے کا معادل ہے، یعنی ہم درج ذیل کہہ سکتے ہیں۔

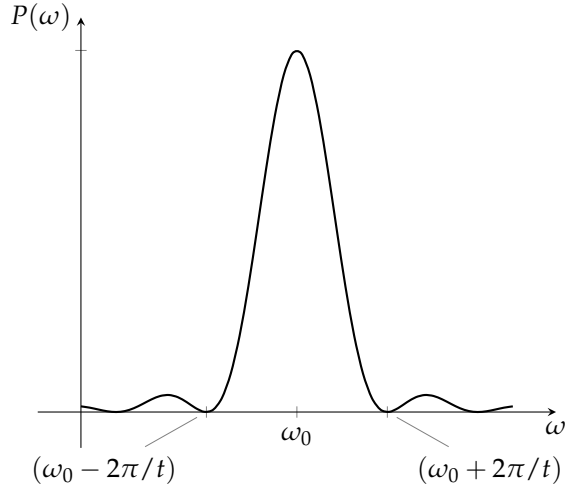
$$(9.29) \quad H'_{ba} = \frac{V_{ba}}{2} e^{-i\omega t}, \quad H'_{ab} = \frac{V_{ab}}{2} e^{i\omega t}$$

<sup>۶</sup> آنے والے حصوں میں ہم اس نظریے کا اطلاق روشنی پر کریں گے، جس کا  $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ہے، لہذا دونوں اجزاء میں نسب نمائندگی بڑا ہوگا، ماسوائے  $\omega_0$  کے قریب (دوسرے جزو میں)۔  
<sup>۷</sup> transition probability





شکل ۹.۱: سائنس مضرب اب کے لئے وقت کے لحاظ سے تحویلی احتمال (مساوات ۹.۲۸)۔



شکل ۹.۲: تحویلی احتمال بالقابل متحرک تعدد (مساوات ۹.۲۸)۔

(ہیملٹنی متالب کو ہر مشی بنانے کی خاطر مومنہ ذکر کی ضرورت پیش آتی ہے؛ آپ کہہ سکتے ہیں کہ ہم  $c_a(t)$  کے لیے مساوات ۹.۲۵ کی طرح کلیہ میں غلاب جزو منتخب کرتے ہیں۔) اس کو گھومتی موج تخیل<sup>۸</sup> کہتے ہیں۔ جناب رابی نے دیکھا کہ حساب کے آغاز میں گھومتی موج تخمین کرتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ کو، نظریہ اضطراب استعمال کیے بغیر اور میدان کے زور کے بارے میں کچھ فرض کیے بغیر، بالکل ٹھیک ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

۱. عمومی ابتدائی معلومات  $c_b(0) = 0$ ،  $c_a(0) = 1$  کے لیے گھومتی موج تخمین (مساوات ۹.۲۹) لیتے ہوئے مساوات ۹.۱۳ حل کریں۔ اپنے جوابات  $c_a(t)$  اور  $c_b(t)$  کو رابی پلٹتی تعداد<sup>۹</sup>

$$\omega_r \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (|V_{ab}| / \hbar)^2} \quad (9.30)$$

کی صورت میں لکھیں۔

ب. تحویلی احتمال  $P_{a \rightarrow b}(t)$  کا تعین کریں، اور دکھائیں کہ یہ کبھی بھی 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔ تصدیق کریں کہ  $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$  ہے۔

ج. تصدیق کریں کہ ”کم“ اضطراب کی صورت میں  $P_{a \rightarrow b}(t)$  نظریہ اضطراب کا نتیجہ (مساوات ۹.۲۸) دے گا۔ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں ”کم“ سے مراد  $V$  پر عائد کیا پابندی ہے۔

د. نظام پہلی مرتبہ اپنے ابتدائی حال میں کس وقت واپس آئے گا؟

## ۹.۲ اشعاعی اخراج اور انجذاب

### ۹.۲.۱ برقناطیسی امواج

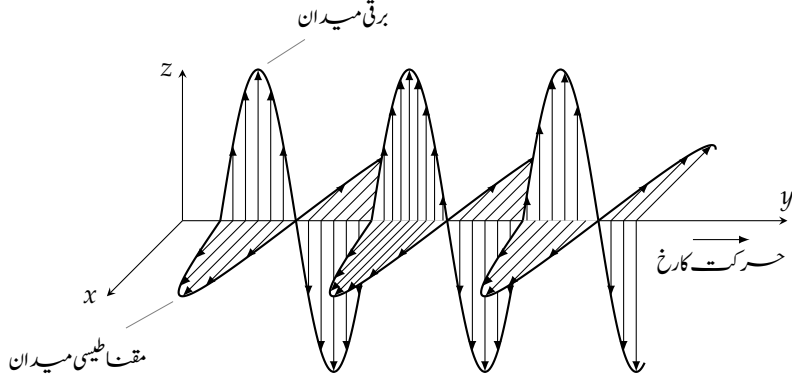
ایک برقناطیسی موج (جس کو میں روشنی کہوں گا، اگرچہ یہ زیریں سرخ، بالائے بصری شعاع، خنرد امواج، ایکس رے، وغیرہ ہو سکتی ہے؛ جن میں صرف تعداد کا فرق ہے) عرضی (اور باہم متعام) ارتعاشی برقی اور مقناطیسی میدانوں پر مشتمل ہوگا (شکل ۹.۳)۔ ایک جوہر، گزرتی ہوئی بصری موج کی برقی حبزو کو، بنیادی طور پر رد عمل کرتا ہے۔ اگر طول موج (جوہر کی جامت کے لحاظ سے) لمبا ہو، ہم میدان کے فاصلاتی تغیر کو نظر انداز کر سکتے ہیں۔<sup>۱۰</sup> تب جوہر سائنس ارتعاشی برقی میدان:

$$E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{k} \quad (9.31)$$

<sup>۸</sup> rotating wave approximation

<sup>۹</sup> Rabi flopping frequency

<sup>۱۰</sup> بصری روشنی کے لئے  $500 \text{ nm} \sim \lambda$  جبکہ جوہر کا قطر  $0.1 \text{ nm}$  کے لگ بھگ ہے، لہذا یہ تخمین معقول ہے؛ تاہم ایکس رے کے لئے ایسا نہیں ہوگا۔ سوال ۹.۲۱ میدان کے فاصلاتی تغیر پر غور کرتا ہے۔



شکل ۹.۳: برقی و مغناطیسی موج۔

کے زیر اثر ہوگا (فی الحال میں روشنی کو ایک رنگی اور  $z$  رخ تنظیم شدہ فرض کرتا ہوں)۔ اضطرابی ہیملٹنی "درج ذیل ہوگی، جہاں  $q$  الیکٹران کا بار ہے۔"<sup>۱۲</sup>

$$(9.32) \quad H' = -qE_0 z \cos(\omega t)$$

بظاہر درج ذیل ہوگا۔"<sup>۱۳</sup>

$$(9.33) \quad H'_{ba} = -\wp E_0 \cos(\omega t), \quad \wp \equiv q \langle \phi_b | z | \phi_a \rangle$$

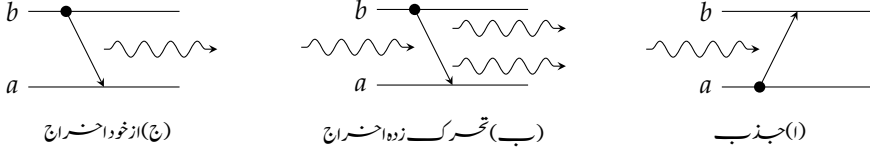
عمومی طور پر،  $\psi$  متغیر  $z$  کا جفت یا طاق تفاعل ہوگا؛ دونوں صورتوں میں  $z|\psi|^2$  طاق ہوگا، جس کا مکمل صفر ہوگا (چند مثالوں کے لئے سوال ۹.۱ دیکھیں)۔ اسی کی بنا پر ہم فرض کرتے ہیں کہ  $H'$  کے وتری متالابی ارکان صفر ہوں گے۔ یوں

$$(9.34) \quad V_{ba} = -\wp E_0$$

لیتے ہوئے، روشنی اور مادے کا باہم عمل ٹھیک اسی قسم کے ارتعاشی اضطراب کے تحت ہوگا جس پر ہم نے حصہ ۹.۱ میں غور کیا۔

<sup>۱۲</sup> اس کا میدان  $E$  میں بار  $q$  کی توانائی  $-q \int E \cdot dr$  ہوگی۔ آپ تابع وقت (یعنی غیر ساکن) میدان کے لئے برقی سکونیات کے کلب کے استعمال پر ناراض ہو سکتے ہیں۔ میں بغیر کہے، فرض کرتا ہوں کہ (جوہر کے اندر) الیکٹران کو حرکت کرنے کے لئے درکار وقت سے ارتعاش کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

<sup>۱۳</sup> ہمیشہ کی طرح ہم فرض کرتے ہیں کہ مرکزہ بھاری اور ساکن ہے؛ ہمیں یہاں الیکٹران کے تفاعل موج سے عرض ہے۔  
<sup>۱۴</sup> حرف  $\wp$  کے استعمال سے آپ کو برقی جفت قطب کا معیار اثر یاد دلایا جاتا ہے (جس کے لئے برقی حرکیات میں حرف  $p$  مستعمل ہے؛ یہاں اسے میٹر  $\wp$  لکھا گیا ہے تاکہ معیار حرکت کے ساتھ غلط فہمی پیدا نہ ہو)۔ درحقیقت، جفت قطب معیار حرکت عامل،  $q\mathbf{r}$ ، کے  $z$  جزو کا،  $\wp$  غیر وتری متالابی رکن ہے۔ برقی جفت قطب معیار حرکات کے ساتھ وابستگی کی بنا پر، ایسا اخراج جو مواد ۹.۳ کے تحت ہو برقی جفت قطب اخراج کہلاتا ہے۔ یہ، کم از کم بصیری خطہ میں، غالب قسم ہے۔ عمومی اور اصطلاحات کے لئے سوال ۹.۲۱ دیکھیں۔



شکل ۹.۴: روشنی کا جوہر کے ساتھ تین قسم کے باہم عمل پائے جاتے ہیں۔

### ۹.۲.۲ انجذاب، تحرک شدہ احسراج اور از خود احسراج

ایک جوہر جو ابتدائی طور پر زیریں حال  $\phi_a$  میں پایا جاتا ہو پر تقطیب شدہ یک رنگی روشنی کی شعاع ڈالی جاتی ہے۔ بالاحال  $\psi_b$  میں تحویل کا احتمال مساوات ۹.۲۸ دیتی ہے جو (مساوات ۹.۳۴ کو مد نظر رکھتے ہوئے) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left( \frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.35)$$

اس عمل میں برقناطیسی میدان سے جوہر  $E_b - E_a = \hbar\omega_0$  توانائی جذب کرتا ہے۔ ہم کہتے ہیں اس نے ”ایک نوری جذب کیا“ (شکل ۹.۴-۱)۔ (جیسا میں ذکر کر چکا ہوں، لفظ ”نوری“ درحقیقت کو اٹانے برقی حرکیات<sup>۱۴</sup> [برقناطیسی میدان کی کوانٹائی نظریہ] سے تعلق رکھتا ہے، جبکہ ہم میدان کو کلاسیکی نقطہ نظر سے دیکھ رہے ہیں۔ یہ زبان اس وقت تک استعمال کرنا مناسب ہے جب تک آپ اس سے زیادہ گہرے مطلب نہ لیں۔) یقیناً، میں بالاحال  $(c_a(0) = 0)$  اور  $(c_b(0) = 1)$  سے آغاز کرتے ہوئے پورا عمل دوبارہ کر سکتا ہوں۔ آپ چاہیں تو ایسا کر سکتے ہیں؛ نتیجہ بالکل وہی ہوگا؛ البتہ اس مرتبہ  $P_{b \rightarrow a} = |c_a(t)|^2$  حاصل ہوگا، جو نیچے زیریں سطح میں تحویل کا احتمال ہوگا۔

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left( \frac{|\phi| E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (9.36)$$

(چونکہ ہم  $a$  اور  $b$  کو آپس میں بدل  $(a \leftrightarrow b)$  رہے ہیں جو  $\omega_0$  کی جگہ  $-\omega_0$  ڈالتا ہے، لہذا لازماً یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ مساوات ۹.۲۵ پر پہنچ کر اب ہم پہلا جزو چنتے ہیں جس کے نسب نامہ  $-\omega_0 + \omega$  ہوگا، باقی باب پہلے کی طرح ہے۔) لیکن اگر آپ رک کر سوچیں تو یہ ایک حیرت انگیز نتیجہ ہے: بالاحال میں پائے جانے والے ذرے پر روشنی کی شعاع ڈالنے سے ذرہ زیریں حال میں تحویل ہوتا ہے اور اس کا احتمال بالکل ٹھیک وہی ہوگا جو زیریں حال سے بالاحال تحویل کا ہے۔ اس عمل کو تحرک زدہ اخراج<sup>۱۵</sup> کہتے ہیں، جس کی پیشگوئی آئنسٹائن نے کی تھی۔

تحرک زدہ انحرانج کی صورت میں برقناطیسی میدان جوہر سے  $\hbar\omega$  توانائی کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں ایک نوریہ داخل ہوا اور دو نوریہ (ایک اصل جس نے تحویل پیدا کی اور دوسرا جو تحویل کی بدولت پیدا ہوا) باہر نکلے (شکل ۹.۲-ب)۔ اس طرح افزائش<sup>۱۶</sup> کا امکان پیدا ہوتا ہے، چونکہ ایک بوقتل میں بہت سارے جوہر، جو بلا حال میں ہوں، کو ایک آمدی نوریہ متحرک<sup>۱۷</sup> کے مسلسل تعامل<sup>۱۸</sup> پیدا کرے گا؛ یوں پہلا نوریہ 2 نوریہ پیدا کرے گا، یہ نوریہ 4 پیدا کریں گے، وغیرہ۔ لیور<sup>۱۹</sup> کا اصول یہی ہے۔ دھیان رہے کہ (سیزر عمل کے لیے) ضروری ہے کہ جوہر کی اکثریت بلا حال میں پہنچائی جائے (جسے آبادی<sup>۲۰</sup> الٹنا<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں)؛ چونکہ انخذاب (جو ایک نوریہ کم کرتا ہے) اور تحرک زدہ انحرانج (جو ایک پیدا کرتا ہے) بالمقابل ہوں گے، لہذا دونوں حالات کی برابر تعداد سے آغاز کر کے افزائش پیدا نہیں کی جاسکتی۔

(انخذاب اور تحرک شدہ انحرانج کے علاوہ) روشنی اور مادے کے باہم عمل کا تیسرا طریقہ بھی پایا جاتا ہے؛ اس کو ازخود ازخارج<sup>۲۱</sup> کہتے ہیں۔ اس میں بیرونی برقناطیسی میدان، جو انحرانج پیدا کر سکتا تھا، کی عدم موجودگی میں ہیجان جوہر زیریں حال میں تحویل ہو کر ایک نوریہ خارج کرتا ہے (شکل ۹.۲-ج)۔ ہیجان حال سے جوہر کا زمینی حال میں تنزل عموماً آبی ذریعے سے ہوتا ہے۔ پہلی نظر میں واضح نہیں کہ ازخود انحرانج کیوں کر ہوگا۔ ساکن حال (اگرچہ ہیجان) جوہر کو کیا ضرورت پیش آتی ہے کہ وہ بیرونی اضطراب کی عدم موجودگی میں زمینی حال میں تحویل ہو، اسے وہیں عسر بھروسہ نہ چاہیے۔ درحقیقت، جوہر وہیں رہتا اگر اس پر کسی قسم کا بیرونی اضطراب اثر انداز نہ ہوتا۔ البتہ، کوانٹائی برقی حرکیات میں زمینی حال میں بھی میدان غیر صفر نہیں ہوتے؛ جیسا (مثال کے طور پر) ہارمونی مرتعش زمینی حال میں بھی غیر صفر توانائی ( $\hbar\omega/2$ ) کا حاصل ہے۔ آپ تمام روشنی کو روک لیں، کمرے کو مطلق صفر حرارت پر لے جائیں، تب بھی کچھ برقناطیسی شعاع پائی جائے گی، اور یہی ”صفر نقطی“ انحرانج ازخود انحرانج کا سبب بنتا ہے۔ اگر حبڑ سے دیکھا جائے تو تمام انحرانج تحرک شدہ انحرانج ہوگا۔ آپ کو یہ امتیاز کرنا ہوگا کہ آیا آپ میدان مبراہم کر رہے ہیں یا قدرتی میدان پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ نظر سے یہ کلاسیکی انحرانجی عمل کے بالکل الٹ ہے، جہاں تمام انحرانج ازخود ہوتا ہے اور تحرک شدہ انحرانج کا تصور نہیں پایا جاتا۔

کوانٹائی برقی حرکیات اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے، تاہم آئنسٹائن کی ایک خوبصورت دلیل ان تینوں (انخذاب، تحرک شدہ انحرانج اور ازخود انحرانج) کا تعلق پیش کرتی ہے۔ آئنسٹائن نے ازخود انحرانج کی وجہ (زمینی حال برقناطیسی میدان کا اضطراب) پیش نہیں کی، تاہم انکے نتائج ہمیں ازخود انحرانج کا حساب کرنے کا محاذ بتاتی ہے، جس سے ہیجان جوہری حال کا قدرتی عرصہ حیات تلاش کیا جاسکتا ہے۔<sup>۲۳</sup> البتہ ایسا کرنے سے پہلے، ہر طرف سے غیر یک رنگی، غیر تقطیب شدہ، غیر اتاتی برقناطیسی امواج کی آمد (جیسا

amplification<sup>۱۶</sup>trigger<sup>۱۷</sup>chain reaction<sup>۱۸</sup>laser<sup>۱۹</sup>population inversion<sup>۲۰</sup>spontaneous emission<sup>۲۱</sup>

<sup>۲۲</sup> آئنسٹائن کا متالہ مساوات شرودنگر کی آمد سے قبل 1917 میں شائع ہوا۔ اس دلیل میں پلانک سیاہ جسمی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳) میں منظر عام پر آیا، کے ذریعہ کوانٹائی حرکیات داخل ہوتی ہے۔

<sup>۲۳</sup> متبادل اشتقاق کے لئے سوال ۹.۸ دیکھیں۔

حقیقت میں ہوگا) سے جو ہر کے رد عمل پر بات کرتے ہیں؛ حراری شعاع میں جو ہر رکھنے سے ایسی صورتحال پیدا ہوگی۔

### ۹.۲.۳ غیر اتالی اضطراب

برقن طوسی موج کی کثافت توانائی درج ذیل ہے، جہاں  $E_0$  ہمیشہ کی طرح برقی میدان کا محیط ہے۔<sup>۲۴</sup>

$$(۹.۲.۷) \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

یوں حیرانی کی بات نہیں کہ تحویلی احتمال (مساوات ۹.۳۶) میدان کی کثافت توانائی کا راستہ متناسب ہے۔

$$(۹.۳۸) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

تاہم یہ نتیجہ واحد ایک تعدد  $\omega$  پر یکے رنگ<sup>۲۵</sup> موج کے لیے درست ہوگا۔ عملی استعمال کے کئی نظاموں پر وسیع تعددی سرعت کی برقن طوسی امواج کی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں  $\rho(\omega) d\omega \rightarrow u$  ہوگا، جہاں  $\rho(\omega) d\omega$  تعددی سرعت  $d\omega$  میں کثافت توانائی ہے، اور حناص تحویلی احتمال درج ذیل مکمل کاروپ اختیار کرے گا۔<sup>۲۶</sup>

$$(۹.۳۹) \quad P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

لہذا توسیع میں حبزد کی  $\omega_0$  پر نوکدار چوٹی پائی جاتی ہے (شکل ۹.۲)، جبکہ عام طور پر  $\rho(\omega)$  کافی چوڑا ہوگا، لہذا ہم  $\rho(\omega)$  کی جگہ  $\rho(\omega_0)$  لکھ کر اسے مکمل کے باہر منتقل کر سکتے ہیں۔

$$(۹.۴۰) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{2|\wp|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

<sup>۲۴</sup> برقن طوسی میدان میں فی اکائی حجم توانائی درج ذیل ہے۔

$$u = (\epsilon_2/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2$$

برقن طوسی موج کے لئے برقی اور مقناطیسی حصے برابر ہوں گے، لہذا

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$$

ہوگا، اور چونکہ  $\cos^2$  (یا  $\sin^2$ ) کا اوسط  $1/2$  ہے لہذا ایک مکمل پھیروے پر اوسط  $(\epsilon_0/2)E_0^2$  ہوگا۔  
monochromatic<sup>۲۵</sup>

<sup>۲۶</sup> مساوات ۹.۳۹ مندرج کرتی ہے کہ مختلف تعدد پر تحویل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں، لہذا اکل تحویلی احتمال ان انفرادی احتمالات کا مجموعہ ہوگا۔ اگر مختلف حصے الٹاتے ہوں، تب ہمیں حیطوں  $(c_b(t))$  سنہ کہ احتمالات  $(|c_b(t)|^2)$  کا مجموعہ لینا ہوگا، اور اس میں حیطوں کے مرکبوں کے علاوہ حاصل ضرب بھی پائے جاتے ہیں گے۔ ہم عملی استعمال میں ہر مرتبہ مندرج کرتے ہیں کہ اضطراب غیر اتالی ہے۔

متغیرات کو تبدیل کر کے  $x \equiv (\omega_0 - \omega)t/2$  لکھ کر (اور چونکہ بنیادی طور پر مستعمل باہر منسری ہے) مکمل کی حدود کو  $x = \pm\infty$  تک وسعت دے کر، اور قطعی مکمل کو جدول سے دیکھ کر:

$$(9.41) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.42) \quad P_{b \rightarrow a}(t) \cong \frac{\pi |\wp|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

اس مرتبہ تحویلی احتمال  $t$  کا راست متناسب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یک رنگی اضطراب کے برعکس، غیر اتفاقی وسیع تعدد کی شعاع پلسٹیں کھاتا ہوا احتمال نہیں دیتی۔ بالخصوص، **تحویلی شرح**  $R \equiv dP/dt$  اب ایک مستقل ہو گا۔

$$(9.43) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2 \rho(\omega_0) \quad (\text{مستقل تحویلی شرح})$$

اب تک ہم مندرجہ کرتے رہے ہیں کہ اضطرابی موج  $y$  رخ سے آمدی (شکل ۹.۳) اور  $z$  رخ تنظیم شدہ ہے۔ لیکن ہم اس صورت میں دلچسپی رکھتے ہیں جب جو ہر پر شعاع ہر رخ سے آمدی ہو، اور اس میں ہر ممکن تنظیم پائی جاتی ہو؛ میدان کی توانائی  $(\rho(\omega))$  ان مختلف انداز میں برابر تقسیم ہوگی۔ ہمیں  $|\wp|^2$  کے بجائے  $|\wp \cdot a_n|^2$  کی اوسط قیمت درکار ہوگی، جہاں (مادات ۹.۳۳ کو عموماً دیتے ہوئے) درج ذیل ہوگا،

$$(9.44) \quad \wp \equiv q \langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle$$

اور اوسط تمام تنظیم اور تمام آمدی رخ پر لیا جائے گا۔

اوسط درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے: کروی محدودیوں منتخب کریں کہ شعاع کی حرکت کارخ  $z$  محور پر ہو (تاکہ تنظیم  $xy$  سطح میں ہو) اور (اغل) سمتیہ  $p$  سطح  $yz$  میں پایا جاتا ہو (شکل ۹.۵)۔<sup>۲۸</sup>

$$(9.45) \quad \mathbf{a}_n = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \wp = \wp \sin \theta \mathbf{j} + \wp \cos \theta \mathbf{k}$$

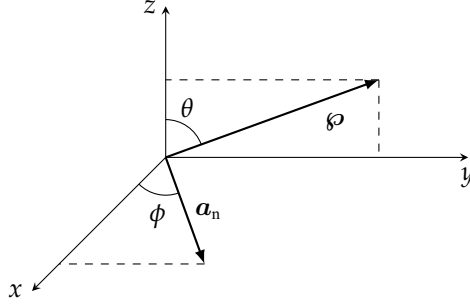
<sup>۲۸</sup> میں  $\wp$  کو حقیقی کی طرح تصور کرتا ہوں، اگرچہ عموماً مخلوط ہوگا۔ درج ذیل کی بنا پر transition rate<sup>۲۷</sup>

$$|\wp \cdot \mathbf{a}_n|^2 = |(\wp \cos \theta) \cdot \mathbf{a}_n + i(\wp \sin \theta) \cdot \mathbf{a}_n|^2 = |(\wp \cos \theta) \cdot \mathbf{a}_n|^2 + |(\wp \sin \theta) \cdot \mathbf{a}_n|^2$$

ہم حقیقی اور خیالی حصوں کا حساب علیحدہ علیحدہ کر کے نتائج جمع کر سکتے ہیں۔ مادات ۹.۴۷ میں مطلق قیمت علامت دو کام کر رہی ہے، یہ سمتیہ کی مقدار اور مخلوط حیثیت:

$$|\wp|^2 = |\wp_x|^2 + |\wp_y|^2 + |\wp_z|^2$$

ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۹.۵: محدد برائے  $|\rho \cdot a_n|^2$  کی اوسط زنی۔

تب

$$\rho \cdot a_n = \rho \sin \theta \sin \phi$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |\rho \cdot a_n|_{\text{avg}}^2 &= \frac{1}{4\pi} \int |\rho|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi \\ (9.36) \quad &= \frac{|\rho|^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{3} |\rho|^2 \end{aligned}$$

مانو: ہر جانب سے آمدی، غیر قطبی، غیر اتقی شعاع کے زیر اثر حال  $b$  سے حال  $a$  میں تحریک شدہ احراج کی تحویلی شرح درج ذیل ہوگی،

$$(9.37) \quad R_{b \rightarrow a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\rho|^2 \rho(\omega_0)$$

جہاں دو حالات کے بیچ برقی جفت قطب معیار اثر کا متالہی رکن  $\rho$  ہوگا (مساوات ۹.۳۴) اور  $\omega_0 = (E_b - E_a) / \hbar$  پرنی کائی تعدد میدان میں کثافت توانائی  $\rho(\omega_0)$  ہوگی۔<sup>۲۹</sup>

<sup>۲۹</sup> یہ تابعت وقت نظریہ اضطراب کے فرم کے سہرا قانون کی ایک مخصوص صورت ہے، جو کہتا ہے کہ تحویلی شرح، اضطرابی مٹھنے کے متالہی ارکان کے مربع اور تحویلی تعدد پر اضطراب کے زور کاراست متناسب ہوگا۔



## ۹.۳. از خود احسراج

۹.۳.۱ آئنشٹائن عددی سر  $A$  اور  $B$ 

فرض کریں ایک برتن میں زیریں حال  $\psi_a$  میں  $N_a$  اور بالا حال  $\psi_b$  میں  $N_b$  جو ہر پائے جباتے ہوں۔ از خود احسراجی شرح کو  $A$  لیتے ہوئے،  $^{30}$  اکائی وقت میں بالا حال سے  $N_b A$  ذرات از خود عمل کے ذریعے نکلیں گے۔  $^{31}$  جیسا ہم (مساوات ۹.۴۷) دیکھ چکے ہیں تحرک شدہ احسراج کی تحویلی شرح برقتناطیسی میدان کی کثافت توانائی،  $B_{ab}\rho(\omega_0)$  کے راست متناسب ہوگی؛ یوں بالا حال سے تحرک شدہ احسراج کی بنا پر اکائی وقت میں  $N_b B_{ba}\rho(\omega_0)$  ذرات نکلیں گے۔ اسی طرح انجذابی شرح  $\rho(\omega_0)$  کی راست متناسب ہے، جسے ہم  $B_{ab}\rho(\omega_0)$  کہتے ہیں؛ لہذا اکائی وقت میں  $N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$  ذرات بالا حال میں شامل ہوں گے۔ ان تمام کو یکجا کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۹.۴۸) \quad \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba}\rho(\omega_0) + N_a B_{ab}\rho(\omega_0)$$

فرض کریں یہ جوہر محیط میدان کے ساتھ حراری توازن میں ہیں، لہذا ہر سطح میں ذرات کی تعداد مستقل ہوگی۔ یوں  $dN_b/dt = 0$  لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۴۹) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{(N_a/N_b)B_{ab} - B_{ba}}$$

ہم بنیادی شماراتی میکانیات سے جانتے ہیں کہ، درجہ حرارت  $T$  پر حراری توازن میں، توانائی  $E$  کے حامل ذرات، کی تعداد بولٹزمنز  $^{32}$   $e^{(-E/k_B T)}$  کے راست متناسب ہوگی؛ یوں

$$(۹.۵۰) \quad \frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_B T}}{e^{-E_b/k_B T}} = e^{\hbar\omega_0/k_B T}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۵۱) \quad \rho(\omega_0) = \frac{A}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} B_{ab} - B_{ba}}$$

لیکن پلانک کا سیاہ جسی کلیہ (مساوات ۵.۱۱۳) ہمیں حراری شعاع کی کثافت توانائی دیتی ہے۔

$$(۹.۵۲) \quad \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

<sup>۳۰</sup> میں عام طور پر تحویلی شرح کے لئے علامت  $R$  استعمال کرتا ہوں، لیکن اس سیاق و سباق میں، باقی لوگوں کی طرح، میں بھی آئنشٹائن کی علامت استعمال کروں گا۔

<sup>۳۱</sup> ذرات کی تعداد  $N_a$  اور  $N_b$  بہت بڑی تصور کریں، لہذا ہم انہیں وقت کے استمراری تقاضات تصور کر کے شماراتی اتار چھڑاؤ نظر انداز کرتے ہیں۔

<sup>۳۲</sup> Boltzmann factor

ان دونوں ریاضی فکٹروں کا موازنہ کرنے سے

$$(۹.۵۳) \quad B_{ab} = B_{ba}$$

اور درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۹.۵۴) \quad A = \frac{\omega_0^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba}$$

مسوات ۹.۵۳ اس بات کی تصدیق کرتی ہے جو ہم پہلے سے جانتے تھے: تحرک شدہ احسراج کی تحویلی شرح وہی ہے جو انجذاب کی ہے۔ 1907ء میں یہ ایک حیرت کن نتیجہ تھا جس میں آئنشٹائن کو اس بات پر مجبور کیا کہ وہ کلیہ پلانک حاصل کرنے کی خاطر تحرک شدہ احسراج کا تصور پیدا کرے۔ تاہم ہم یہاں مسوات ۹.۵۴ میں دلچسپی رکھتے ہیں، جو ہمیں تحرک شدہ احسراجی شرح  $(B_{ba} \rho(\omega_0))$ ، جسے ہم پہلے سے جانتے ہیں، کی صورت میں از خود احسراجی شرح  $(A)$  دیتی ہے۔ جسے ہم جاننا چاہتے ہیں مسوات ۹.۴۷ سے

$$(۹.۵۵) \quad B_{ba} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\wp|^2$$

لیتے ہیں، لہذا از خود احسراجی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$(۹.۵۶) \quad A = \frac{\omega_0^3 |\wp|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

سوال ۹.۸: نیچے کی طرف تحویل میں از خود احسراج اور حراری تحرک شدہ احسراج (وہ تحرک شدہ احسراج جو سیاہ جسم شعاع کی بنا پر ہو) میں معتدل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ رہائشی درجہ حرارت  $(T = 300 \text{ K})$  پر  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت کم تعددوں پر حراری تحرک شدہ احسراج غالب ہوگا، جبکہ  $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$  سے بہت زیادہ تعددوں پر از خود احسراج غالب ہوگا۔ بصری روشنی کے لیے کونسا غالب ہوگا؟

سوال ۹.۹: برقناطیسی میدان کی زمینی حال کثافت توانائی  $\rho_0(\omega)$  جانتے ہوئے از خود احسراجی شرح در حقیقت تحرک شدہ احسراجی شرح (مسوات ۹.۴۷) ہوگی، لہذا آئنشٹائن عددی سر  $A$  اور  $B$  جانتے بغیر آپ از خود احسراجی شرح (مسوات ۹.۵۶) اخذ کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنے کے لیے کوانٹائی برقی حرکیات بروئے کار لانی ہوگی، تاہم اگر آپ یہ مقبول کریں کہ زمینی حال میں ایک نوریہ فی انداز پایا جاتا ہے، تب اس کو اخذ کرنا بہت آسان ہوگا:

۱. مسوات ۵.۱۱ کی جگہ  $N_\omega = d_k$  پُر کر کے  $\rho_0(\omega)$  اخذ کریں (زیادہ تعدد پر اس کلیہ کو ناکارہ ہونا ہوگا ورنہ کل "حقلی توانائی" لامتناہی ہوگی، تاہم یہ کہانی کسی دوسرے دن کے لیے چھوڑتے ہیں)۔

ب. اپنے نتیجہ کے ساتھ مسوات ۹.۴۷ استعمال کر کے از خود احسراجی شرح حاصل کریں۔ مسوات ۹.۵۶ کے ساتھ موازنہ کریں۔

## ۹.۳.۲ ہیجان حال کا عرصہ حیات

مساوات ۹.۵۶ ہمارا بنیادی نتیجہ ہے: یہ تحرک شدہ احسراج کی تحویلی شرح دیتا ہے۔ اب فرض کریں کسی طرح آپ بہت بڑی تعداد میں جوہر کو ہیجان حال منتقل کرتے ہیں۔ از خود احسراج کے نتیجے میں، وقت کے ساتھ یہ تعداد گھٹنے گی؛ بالخصوص، دورانہ  $dt$  میں جوہروں کی تعداد میں  $A dt$  کمی ہوگی:

$$dN_b = -AN_b dt \quad (9.57)$$

(جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ مزید جوہر ہیجان انگیز نہیں کیے جا رہے ہیں)۔<sup>۳۳</sup> اس کو  $N_b(t)$  کے لیے حل کرتے ہیں:

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} \quad (9.58)$$

بظاہر، ہیجان حال میں تعداد، قوت نمائی طور پر وقتی مستقل:

$$\tau = \frac{1}{A} \quad (\text{عرصہ حیات}) \quad (9.59)$$

کے ساتھ کم ہوگی، جسے اس حال کا عرصہ حیات<sup>۳۴</sup> کہتے ہیں۔ ایک عرصہ حیات میں  $N_b(t)$  کی قیمت ابتدائی قیمت کی  $1/e \approx 0.368$  گنتا ہوگی۔

میں اب تک فرض کرتا آ رہا ہوں کہ نظام میں صرف دو حالات پائے جاتے ہیں، تاہم علاقیت سادہ رکھنے کی خاطر ایسا کیا گیا؛ تحرک شدہ احسراج کا کلیہ (مساوات ۹.۵۶)، دیگر قابل رسائی حالات سے قطع نظر،  $\psi_a \rightarrow \psi_b$  کی تحویلی شرح دیتا ہے (سوال ۹.۱۵ دیکھیں)۔ عمومی طور پر ایک ہیجان جوہر کے کئی مختلف انداز تزلزل<sup>۳۵</sup> ہوں گے (یعنی:  $\psi_b$  کا تنزل بہت سارے زیریں توانائی حالات  $\psi_{a1}, \psi_{a2}, \psi_{a3}$ ، وغیرہ میں ہو سکتا ہے)۔ ایسی صورت میں تمام تحویلی شرحیں جمع ہو کر درج ذیل خالص عرصہ حیات دیں گی۔

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} \quad (9.60)$$

مثال ۹.۱: فرض کریں ایک اسپرنگ کے ساتھ باندھا ہوا بار  $q$  محور  $x$  پر ارتعاش کا پابند ہے۔ فرض کریں یہ حال  $|n\rangle$  (مساوات ۲.۶۷) سے آغاز کر کے از خود احسراج کے ذریعے حال  $|n'\rangle$  کو پہنچتا ہے۔ مساوات ۹.۴۴ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$g_{nn'} = q\langle n|x|n'\rangle i$$

آپ نے سوال ۳.۳۳ میں  $x$  کے فتالجبی ارکان:

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

<sup>۳۳</sup> یہ حساری توازن نہیں ہے جس پر گزشتہ حصے میں بات کی گئی۔ یہاں ہم فرض کر رہے ہیں کہ جوہروں کو ہیجان حال میں اٹھایا گیا ہے اور یہ اب واپس توازن سطحوں کو لوٹ رہے ہیں۔  
lifetime<sup>۳۴</sup>  
decay modes<sup>۳۵</sup>

تلاش کئے، جہاں مرتعش کا قدرتی تعدد  $\omega$  ہے۔ (مجھے تحریک شدہ احسراج کے تعدد کے لیے اس حرف کی ضرورت اب پیش نہیں آئے گی۔) ہم احسراج کی بات کر رہے ہیں لہذا  $n'$  لازماً  $n$  سے نیچے ہوگا: یوں ہمارے اس مقصد کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\wp = q \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} \delta_{n',n-1} i \quad (9.۶۱)$$

بظاہر ”سیڑھی“ پر صرف ایک پایہ نیچے تحویل ممکن ہے ( $n - n' = 1$ )؛ اور احسراجی نوریہ کا تعدد درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = \frac{E_n - E'_n}{\hbar} = \frac{(n + 1/2)\hbar\omega - (n' + 1/2)\hbar\omega}{\hbar} = (n - n')\omega = \omega \quad (9.۶۲)$$

کوئی حیرانی کی بات نہیں، نظام کلاسیکی ارتعاشی تعدد پر شعاع ریز ہے۔ تحویلی شرح (مسوات ۹.۵۶) درج ذیل

$$A = \frac{nq^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (9.۶۳)$$

اور  $n$  ویں سال کن حال کا عمر صحت درج ذیل ہوگا۔

$$\tau_n = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{nq^2\omega^2} \quad (9.۶۴)$$

چونکہ ہر ایک احسراجی نوریہ  $\hbar\omega$  توانائی ساتھ لے جاتا ہے، لہذا اشعاعی طاقت  $A\hbar\omega$  ہوگی

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} (n\hbar\omega)$$

یا،  $n$  ویں سال میں مرتعش کی توانائی  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگی۔

$$P = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left( E - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \quad (9.۶۵)$$

(ابتدائی) توانائی  $E$  کے کوانٹائی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت اتنی ہوگی۔

موازنہ کی خاطر اسی طاقت کے کلاسیکی مرتعش کی اوسط اشعاعی طاقت کا تعین کرتے ہیں۔ کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت مسرع بار  $q$  کی اشعاعی طاقت کلیم لارمر<sup>۳۶</sup>

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.۶۶)$$

دیتا ہے۔ ہارمونی مرتعش  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  کا جیٹ  $x_0$ ، اور اسراع  $a = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t)$  ہوگا۔ ایک مکمل پھیرے پر اوسط درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

لیکن اس مرتعش کی توانائی  $E = (1/2)m\omega^2 x_0^2$  ہے، لہذا  $x_0^2 = 2E/m\omega^2$  ہوگا، جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.16) \quad P = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} E$$

توانائی  $E$  کا کلاسیکی مرتعش اوسطاً اتنی اشعاعی طاقت دے گا۔ کلاسیکی حد ( $\hbar \rightarrow 0$ ) میں کلاسیکی اور کوانٹائی کلیات آپس میں متفق ہیں؛<sup>۳۷</sup> البتہ زمینی حال کو کوانٹائی کلیہ (مساوات ۹.۶۵) تحفظ دیتا ہے: اگر  $E = (1/2)\hbar\omega$  ہو تب مرتعش شعاع ریز نہیں ہوگا۔ □

سوال ۹.۱۰: ہیجان حال کی نصف حیات<sup>۳۸</sup> ( $t_{1/2}$ ) سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں بڑی تعداد کے جوہروں میں سے نصف تھویل کرتے ہوں۔ نصف حیات  $t_{1/2}$  اور ( $t_{1/2}$  کے) ”عمر حیات“  $\tau$  کے بیچ رشتہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۱: ہائیڈروجن کے چاروں  $n = 2$  حالات کے لیے عمر حیات (سیکنڈوں میں) تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو  $\langle \psi_{100} | x | \psi_{200} \rangle$ ،  $\langle \psi_{100} | y | \psi_{211} \rangle$ ، وغیرہ طرز کے متوالی ارکان کی قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی۔ یاد رہے کہ  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ،  $y = r \sin \theta \sin \phi$  اور  $z = r \cos \theta$  ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر کمالات صفر کے برابر ہیں، لہذا حساب شروع کرنے سے پہلے ان پر ایک گہری نظر ضرور ڈالیں۔ جواب: سوائے  $\psi_{200}$  جو لامتناہی ہے، باقی تمام کے لیے  $1.60 \times 10^{-9}$  سیکنڈ ہوگا۔

### ۹.۳.۳ قواعد انتخاب

از خود احسراجی شرح درج ذیل روپ کے متوالی ارکان معلوم کر کے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$\langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle$$

اگر آپ نے سوال ۹.۱۱ حل کیا ہو (اگر حل نہیں کیا، اسی وقت پہلے اس کو حل کریں!) تو آپ نے دیکھا ہوگا کہ یہ مقداریں عموماً صفر ہوتی ہیں، اور کیا بہتر ہوگا اگر ہم پہلے سے جان سکیں کہ کون سے کمالات صفر دیں گے، تاکہ ہم اپنا وقت غیر ضروری کمالات حل کرنے میں ضائع نہ کریں۔ مندرجہ کریں ہم ہائیڈروجن کی طرح کے نظام

<sup>۳۷</sup> درحقیقت،  $P$  کو زمینی حال سے زائد توانائی کی صورت میں لکھیں تو دونوں کلیات متبادل ہوں گے۔  
half-life<sup>۳۸</sup>

میں دلچسپی رکھتے ہیں، جس کی ہیملٹنی کروی تشاکلی ہے۔ ایسی صورت میں ہم حالات کو عمومی کوانٹائی اعداد  $n, \ell$ ، اور  $m$  سے ظاہر کر سکتے ہیں اور متوالی ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$\langle n' \ell' m' | r | n \ell m \rangle$$

زاویائی معیاری حرکت مقلبت رشتے اور زاویائی معیاری حرکت عاملین کی ہر مشی پن مل کر اس مقدار پر طفتور پابندیاں عائد کرتے ہیں۔

انتخابی قواعد برائے  $m$  اور  $m'$ :

ہم پہلے  $x, y$ ، اور  $z$  کے ساتھ  $L_z$  کے مقابل پر غور کرتے ہیں جنہیں باب ۴ میں حاصل کیا گیا (مادرات ۱۲۲.۴ دیکھیں)۔

$$(9.68) \quad [L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0$$

ان میں تیسرے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n' \ell' m' | [L_z, z] | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | L_z z - z L_z | n \ell m \rangle \\ &= \langle n' \ell' m' | [(m' \hbar) z - z (m \hbar)] | n \ell m \rangle = (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | z | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(9.69) \quad \langle n' \ell' m' | z | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad m' = m$$

لہذا، ماسوائے  $m' = m$  کی صورت میں،  $z$  کے متوالی ارکان ہر صورت صفر ہوں گے۔  
ساتھ ہی،  $x$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابل درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L_z, x] | n \ell m \rangle &= \langle n' \ell' m' | (L_z x - x L_z) | n \ell m \rangle \\ &= (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i\hbar \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

ماخوذ:

$$(9.70) \quad (m' - m) \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle$$

یوں، آپ  $y$  کے متوالی ارکان کو  $x$  کے مطابق متوالی ارکان سے حاصل کر سکتے ہیں، اور آپ کو کبھی بھی  $y$  کے متوالی ارکان کے حساب کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

اور آخر میں،  $y$  کے ساتھ  $L_z$  کا مقابل درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L_z, y] | n \ell m \rangle &= \langle n' \ell' m' | (L_z y - y L_z) | n \ell m \rangle \\ &= (m' - m) \hbar \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = -i\hbar \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

مانڈ:

$$(9.41) \quad (m' - m) \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = -i \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle$$

بالخصوص، مساوات ۹.۴۰ اور مساوات ۹.۴۱ کو ملا کر:

$$(m' - m)^2 \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = i(m' - m) \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle$$

لہذا،

$$(9.42) \quad \langle n' \ell' m' | x | n \ell m \rangle = \langle n' \ell' m' | y | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا} \quad (m' - m)^2 = 1 \quad \text{یا پھر}$$

ہوگا۔ مساوات ۹.۶۹ اور مساوات ۹.۷۲ سے ہمیں  $m$  کے انتخابی قواعد<sup>۳۹</sup>

$$(9.43) \quad \Delta m = 1, 0, -1 \quad \text{تحویل صرف اس صورت ہوگی جب یہ ہو:}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس نتیجہ (کو اخذ کرنا آسان نہیں ہوتا، تاہم اس) کو سمجھنا آسان ہے۔ آپ کو یاد ہوگا، نوریہ چکر 1 کا حاصل ہے، لہذا اس کی  $m$  قیمت 1، 0، یا -1 ہو سکتی ہے؛<sup>۴۰</sup> زاویائی معیار حرکت کے  $z$  جزو کی بقا کے تحت نوریہ جو کچھ لے کر جاتا ہے، جوہر اتنا کچھ کھوئے گا۔

انتخابی قواعد برائے  $\ell$  اور  $\ell'$ :

آپ سے سوال ۹.۱۲ میں درج ذیل مقلبت رشتہ اخذ کرنے کا کہا گیا۔

$$(9.44) \quad [L^2, [L^2, \mathbf{r}]] = 2\hbar^2 (\mathbf{r} L^2 + L^2 \mathbf{r})$$

ہمیشہ کی طرح، ہم اس مقلبت کو  $|n \ell m\rangle$  اور  $\langle n' \ell' m'|$  کے بیچ لپیٹ کر انتخابی قواعد اخذ کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \langle n' \ell' m' | [L^2, [L^2, \mathbf{r}]] | n \ell m \rangle &= 2\hbar^2 \langle n' \ell' m' | (\mathbf{r} L^2 + L^2 \mathbf{r}) | n \ell m \rangle \\ &= 2\hbar^4 [\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1)] \langle n' \ell' m' | \mathbf{r} | n \ell m \rangle \\ &= \langle n' \ell' m' | (L^2 [L^2, \mathbf{r}] - [L^2, \mathbf{r}] L^2) | n \ell m \rangle \\ &= \hbar^2 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \langle n' \ell' m' | [L^2, \mathbf{r}] | n \ell m \rangle \\ &= \hbar^2 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \langle n' \ell' m' | (L^2 \mathbf{r} - \mathbf{r} L^2) | n \ell m \rangle \\ (9.45) \quad &= \hbar^4 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)]^2 \langle n' \ell' m' | \mathbf{r} | n \ell m \rangle \end{aligned}$$

مانڈ:

$$2[\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1)] = [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)]^2 \quad \text{یا}$$

$$(9.46) \quad \langle n' \ell' m' | \mathbf{r} | n \ell m \rangle = 0 \quad \text{یا پھر}$$

selection rules<sup>۴۱</sup>

<sup>۴۰</sup> جب قطبی محور حرکت کے رخ کے ساتھ ساتھ ہو، درمیانی قیمت نہیں پائی جاتی، اور اگر آپ غیر متابع نوری حالات کی تعداد میں دلچسپی رکھتے ہوں، تو جواب 2 کہ 3 ہے۔ البتہ، اگر یہاں ضروری نہیں کہ نوریہ  $z$  محور کے رخ حرکت کرتا ہو، لہذا تینوں قیمتیں ممکن ہیں۔

ہوگا، لیکن

$$[\ell'(\ell' + 1) - \ell(\ell + 1)] = (\ell' + \ell + 1)(\ell' - \ell)$$

اور

$$2[\ell(\ell + 1) + \ell'(\ell' + 1)] = (\ell' + \ell + 1)^2 + (\ell' - \ell)^2 - 1$$

لکھے جاسکتے ہیں، لہذا مساوات ۹.۷۶ میں پہلی شرط کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$[(\ell' + \ell + 1)^2 - 1][(\ell' - \ell)^2 - 1] = 0 \quad (۹.۷۷)$$

ان میں پہلا (یا یاں) جزو ضربی صفر نہیں ہو سکتا ہے (ماسوائے اس صورت جب  $\ell' = \ell = 0$  ہو؛ اس کمزوری سے سوال ۹.۱۳ میں چھٹکارا حاصل کیا گیا ہے)، لہذا یہ شرط  $\ell' = \ell \pm 1$  کی سادہ روپ اختیار کرتی ہے۔ یوں  $\ell$  کے انتخابی قواعد:

$$\Delta \ell = \pm 1 \quad \text{تحویل صرف اس صورت ہوگا جب یہ ہو:} \quad (۹.۷۸)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ اس نتیجہ کو اخذ کرنا آسان کام نہیں ہے، لیکن اس کی تشریح آسان ہے۔ نوریہ چکر 1 کا حاصل ہے، لہذا ازاد پائی معیار حرکت جمع کرنے کے قواعد  $\ell' = \ell$ ،  $\ell' = \ell + 1$  یا  $\ell' = \ell - 1$  کی اجازت دیں گے (برقی ہفت قطبی اشعاع کے لیے درمیانی صورت نہیں پائی جاتی، اگرچہ زاویائی معیار حرکت کی بقا اس کی اجازت دیتی ہے)۔

یوں ظاہر ہے کہ از خود اخراج کے ذریعہ تمام زیریں توانائی حالات تک تحویل ممکن نہیں ہوگی، ان میں سے کئی انتخابی قواعد کے تحت ممنوع ہیں۔ شکل ۹.۶ میں ہائیڈروجن کے ابتدائی چار بوہر سطحوں کے لیے اجازتی تحویلات دکھائے گئے ہیں۔ دھیان رہے کہ 2S حال ( $\psi_{200}$ ) اسی جگہ ”پھنسا“ رہے گا: چونکہ  $\ell = 0$  کا کوئی بھی زیریں توانائی حال نہیں پایا جاتا، لہذا یہ تنزل پذیر نہیں ہوگا۔ اس کو نازکے مستحکم<sup>۴</sup> حال کہتے ہیں، اور یقیناً اس کا عرصہ حیات، مثلاً، 2P حالات ( $\psi_{210}$ ،  $\psi_{211}$  اور  $\psi_{21-1}$ ) سے، کافی لمبا ہے۔ نازکے مستحکم حالات بھی آخر کار تصادم کی بنا پر، یا (جنہیں گسراہ کن نام دیا گیا ہے) ممنوعہ تحویلات<sup>۴۲</sup> کی بنا پر (سوال ۹.۲۱)، یا متعدد نوری اخراج کی بنا پر، تنزل پذیر ہوں گے۔

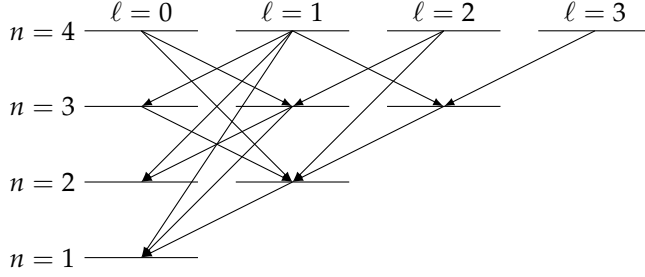
سوال ۹.۱۲: مساوات ۹.۷۴ میں دی گئی مقلوبی رشتہ ثابت کریں۔ اشارہ: پہلے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, z] = 2i\hbar(xL_y - yL_x - i\hbar z)$$

اس کے ساتھ  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$  استعمال کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$[L^2, [L^2, z]] = 2\hbar^2(zL^2 + L^2z)$$





شکل ۹.۶: ہائیڈروجن کی اولین چار سطحوں کا احباباتی تنزل۔

$z$  سے  $r$  تک عمومیت دینا ایک آسان کام ہے۔

سوال ۹.۱۳: دکھائیں کہ  $\ell' = \ell = 0$  کی صورت میں  $\langle n' \ell' m' | r | n \ell m \rangle = 0$  ہوگا۔ یوں مساوات ۹.۷۸ میں درپیش ”کنزوری“ ختم ہوتی ہے۔

سوال ۹.۱۴: ہائیڈروجن کے  $n = 3, \ell = 0, m = 0$  حال میں ایک الیکٹران زمینی حال تک (برقی جفت قطبی) تحویلی تسلسل کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

۱. اس تنزل کے لیے کونسی راہیں کھلی ہیں؟ انہیں درج ذیل صورت میں پیش کریں۔

$$|300\rangle \rightarrow |n\ell m\rangle \rightarrow |n'\ell'm'\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |100\rangle$$

ب. اگر آپ کے پاس، اس حال میں جوہروں سے بھرا ہوا ایک بوتل ہو، تب ہر راہ سے کتنا حصہ گزرے گا؟

ج. اس حال کا عرصہ حیات کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلی تحویل کے بعد یہ حال  $|300\rangle$  میں نہیں ہوگا، لہذا ہر تسلسل کا صرف پہلا قدم، عرصہ حیات کے حصول میں کام آئے گا۔ متعدد تحویلی راستوں کی صورت میں تمام تحویلی شرحوں کا مجموعہ لینا ہوگا۔

### اضافی سوالات برائے باب ۹

سوال ۹.۱۵: متعدد سطحی نظام کے لیے مساوات ۹.۱ اور مساوات ۹.۲

$$(9.79) \quad H_0 \psi_n = E_n \psi_n, \quad \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

کو عمومیت دیتے ہوئے تابع وقت نظریہ اضطراب مرتب کریں۔ لمحہ  $t$  پر ہم اضطراب  $H'(t)$  چالو کرتے ہیں؛ یوں کل ہیملٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$(9.80) \quad H = H_0 + H'(t)$$

۱. مساوات ۹.۶ کو درج ذیل تعینی روپ دیں

$$(۹.۸۱) \quad \Psi(t) = \sum c_n(t) \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

اور دکھائیں کہ

$$(۹.۸۲) \quad \dot{c}_m = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar}$$

ہوگا، جہاں  $H'_{mn}$  درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۳) \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$$

ب. اگر نظام حال  $\psi_N$  سے آغاز کرے، تو دکھائیں کہ (اول رتبی نظریہ اضطراب میں)

$$(۹.۸۴) \quad c_N(t) \cong 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{NN}(t') dt'$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۹.۸۵) \quad c_m(t) \cong -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{mN}(t') e^{i(E_m - E_N)t'/\hbar} dt' \quad (m \neq N)$$

ج. فرض کریں، (لمحہ  $t = 0$  پر) چالو اور بعد میں لمحہ  $t$  پر منقطع کرنے کے علاوہ  $H'$  مستقل ہے۔ حال  $N$  سے حال  $M$  جہاں  $M \neq N$  ہے، میں تحویل کے احتمال کو  $t$  کا تفاعل لکھیں۔ جواب:

$$(۹.۸۶) \quad 4 |H'_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M)t/2\hbar]}{(E_N - E_M)^2}$$

د. فرض کریں  $H' = V \cos(\omega t)$  ہے۔ عمومی مفروضے فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ صرف توانائی  $E_M = E_N \pm \hbar\omega$  کے حالات میں تحویل ہو سکتی ہے اور ان کا احتمال درج ذیل ہے۔

$$(۹.۸۷) \quad P_{N \rightarrow M} = |V_{MN}|^2 \frac{\sin^2[(E_N - E_M \pm \hbar\omega)t/2\hbar]}{(E_N - E_M \pm \hbar\omega)^2}$$

ه. فرض کریں کہ متعدد سطحی نظام پر غیر اتانی برقی طیفی روشنی ڈالی جاتی ہے۔ حصہ ۹.۲.۳ کو دیکھتے ہوئے دکھائیں کہ تحرک شدہ احسن راج کی تحویلی شرح وہی دو سطحی نظام کا کلیہ (مساوات ۹.۴۷) دیگا۔

سوال ۹.۱۶: عددی سر  $c_m(t)$  کو رتبہ اول تک سوال ۹.۱۵ کے حبز و سنج اور حبز و د کے لیے تلاش کریں۔ معمولی شرط:

$$\sum_m |c_m(t)|^2 = 1 \quad (9.88)$$

کی تصدیق کر کے، تضاد اگر موجود ہو، پر تبصرہ کریں۔ فرض کریں آپ ابتدائی حال  $\psi_N$  میں رہنے کا احتمال حسابنا چاہتے ہیں؛ کیا  $|c_N(t)|^2$  یا  $1 - \sum_{m \neq N} |c_m(t)|^2$  کا استعمال بہتر ثابت ہوگا؟

سوال ۹.۱۷: لامستناہی چوکور کنویں کے  $N$  ویں حال میں (وقت  $t = 0$  پر) ایک ذرہ آغاز کرتا ہے۔ وقتی طور پر کنویں کی تہ بلند ہو کر واپس اپنی جگہ نیچے پھٹتی ہے، جس کے تحت کنویں کے اندر مخفیہ یکساں ضرور لسیکن تاج وقت ہوگا:  $V_0(t)$ ، جہاں  $V_0(0) = V_0(T) = 0$  ہوگا۔

۱. مساوات ۹.۸۲ استعمال کر کے  $c_m(t)$  کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کریں، اور دکھائیں کہ تفاعل موج کی ہیئت تبدیل ہوگی لیکن کوئی تحویل نہیں ہوگی۔ تفاعل  $V_0(t)$  کی صورت میں تبدیلی ہیئت،  $\psi(T)$ ، تلاش کریں۔

ب۔ اسی مسئلے کو رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حل کر کے دونوں نتائج کا موازنہ کریں۔

تبصرہ: جب بھی مخفیے کے ساتھ اضطراب ایک مستقل  $x$  میں مستقل  $t$  کے (میں) جمع کرتا ہو، یہی نتیجہ حاصل ہوگا؛ یہ صرف لامستناہی چوکور کنویں کی حاصیت نہیں ہے۔ سوال ۹.۸ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۸: ابتدا میں (یک بُعدی لامستناہی) چوکور کنویں کے زمینی حال میں کمیت  $m$  کا ایک ذرہ پایا جاتا ہے۔ لمحہ  $t = 0$  پر ایک ”اینٹ“ اس کنویں میں گرائی جاتی ہے، جس سے مخفیہ درج ذیل ہو جاتا ہے، جہاں  $V_0 \ll E_1$  ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \\ \infty & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

کچھ وقت  $T$  کے بعد، اینٹ ہٹائی جاتی ہے، اور ذرے کی توانائی ناپی جاتی ہے۔ (رتبہ اول نظریہ اضطراب میں) نتیجہ  $E_2$  ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۹.۱۹: ہم تحرک شدہ احسراج، (تحرک شدہ) انجذاب، اور از خود احسراج دیکھ چکے ہیں۔ از خود انجذاب کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۲۰: مقناطیس  $\vec{k}$ ۔ سکن مقناطیسی میدان  $B_0 \vec{k}$  میں،  $1/2$  سپر کا ایک ذرہ جس کی سکن مقناطیسی نسبت  $\gamma$  ہو، لارمر تعدد  $\omega_0 = \gamma B_0$  (مثال ۳.۴) سے استقبالی حرکت کرتا ہے۔ اب ہم ایک کمزور عرضی ریڈیائی تعدد میدان،  $B_r [\cos(\omega t) \vec{i} - \sin(\omega t) \vec{j}]$ ، چالو کرتے ہیں جس سے کل میدان درج ذیل ہو جاتا ہے۔

$$B = B_r \cos(\omega t) \vec{i} - B_r \sin(\omega t) \vec{j} + B_0 \vec{k} \quad (9.89)$$

۱. اس نظام کے لیے  $2 \times 2$  ہیملٹنی متالب (مساوات ۳.۱۵۸) تیار کریں۔

ب. وقت  $t$  پر چکری حال  $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$  ہونے کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$(9.90) \quad \dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a); \quad \dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{-i\omega t} a - \omega_0 b)$$

جہاں  $\Omega \equiv \gamma B_1$  کا تعلق ریڈیائی تعدد میدان کے زور سے ہے۔

ج. ابتدائی قیمتوں  $a_0$  اور  $b_0$  کی صورت میں  $a(t)$  اور  $b(t)$  کا عمومی حل تلاش کریں۔ جواب:

$$a(t) = \left\{ a_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [a_0(\omega_0 - \omega) + b_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{i\omega t/2}$$

$$b(t) = \left\{ b_0 \cos(\omega' t/2) + \frac{i}{\omega'} [b_0(\omega - \omega_0) + a_0 \Omega] \sin(\omega' t/2) \right\} e^{-i\omega t/2}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(9.91) \quad \omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

د. ایک ذرہ ہم میدان چکری حال ( $b_0 = 0, a_0 = 1$ ) سے آغاز کرتا ہے۔ مخالف میدان چکر میں تھویل کے احتمال کو بطور وقت کا تناسب تلاش کریں۔

$$P(t) = \{\Omega^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2]\} \sin^2(\omega' t/2) \quad \text{جواب:}$$

۳۳. منحنی گمک، ۳۳

$$(9.92) \quad P(\omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

کو مقررہ  $\omega_0$  اور  $\Omega$  کے لئے) جبری تعدد  $\omega$  کے تناسب کے طور پر ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ  $\omega = \omega_0$  پر اس کی اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔ ”اعظم قیمت کی نصف پر پوری چوڑائی“  $\Delta\omega$  تلاش کریں۔

و. چونکہ  $\omega_0 = \gamma B_0$  ہے، لہذا ہم گمک کا تجرباتی مشاہدہ کر کے ذرے کے مقناطیسی جفت قطبی معیار اثر کا تعین کر سکتے ہیں۔ مرکزوی مقناطیسی گمک<sup>۳۵</sup> تجربہ میں نوریہ کا  $g$  جزو ضربی، ایک ٹسلا (1 T) کے ساکن میدان اور ایک مائیکرو ٹسلا (1  $\mu$ T) جیٹے کے ریڈیائی تعدد میدان کی مدد سے، ناپا جاتا ہے۔ تعدد گمک کیا ہوگا؟ (پروٹان کے مقناطیسی معیار اثر کے لیے حصہ ۶.۵ دیکھیں۔) منحنی گمک کی چوڑائی تلاش کریں۔ (اپنا جواب Hz میں دیں۔)

سوال ۹.۲۱: میں نے مساوات ۹.۳۱ میں جوہر کو (روشنی کے طول موج سے) اتنا چھوٹا تصور کیا کہ میدان کے فضائی تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا تھا۔ حقیقی برقی میدان درج ذیل ہوگا۔

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (9.93)$$

اگر جوہر کا مرکز مبداء ہو، تب متعلقہ حجم پر  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  اور  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  لہذا  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \sim r/\lambda \ll 1$  ہوگا، جس کی بنا پر ہم اس جزو کو نظر انداز کر سکتے تھے۔ مندرجہ ذیل ہم اول درجہ درستی:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 [\cos(\omega t) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\omega t)] \quad (9.94)$$

کو نظر انداز نہیں کرتے۔ اس کا پہلا جزو اجازتی (برقی جفت قطبی) <sup>۳۶</sup> تحویلات دے گا جن پر مستن میں بات کی چسکی ہے؛ دوسرا جزو ممنوعہ (مقناطیسی جفت قطبی) <sup>۳۷</sup> اور برقی چوتھی <sup>۳۸</sup> تحویلات دے گا ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  کی مزید بڑی طاقتیں، مزید ممنوعہ تحویلات دیں گی، جو زیادہ بلند متعدد قطبی معیار اثر سے وابستہ ہوں گی)۔  
۱. ممنوعہ تحویلات کی از خود انحرافی شرح حاصل کریں (تظہیر اور حرکت کے رخوں پر اوسط تلاش کرنے کی ضرورت نہیں، اگرچہ مکمل جواب کے لیے ایسا کرنا ضروری ہے)۔ جواب:

$$R_{b \rightarrow a} = \frac{q^2 \omega^5}{\pi \epsilon_0 \hbar c^5} |\langle a | (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) | b \rangle|^2 \quad (9.95)$$

ب. دکھائیں کہ یک بُعدی مرتعش کے لیے ممنوعہ تحویلات سطح  $n$  سے سطح  $n - 2$  میں ہوں گی، اور تحویلی شرح (جس کا اوسط  $\mathbf{a}_n$  اور  $\mathbf{k}$  پر حاصل کیا گیا ہو) درج ذیل ہوگی۔

$$R = \frac{\hbar q^2 \omega^3 n(n-1)}{15 \pi \epsilon_0 m^2 c^5} \quad (9.96)$$

(تبصرہ: یہاں  $\omega$  سے مراد نوریہ کا تعدد ہے نہ کہ مرتعش کا تعدد)۔ ”اجازتی“ شرح کے لحاظ سے ”ممنوعہ“ شرح کی نسبت تلاش کریں اور اس اصطلاح پر تبصرہ کریں۔

ج. دکھائیں کہ ہائیڈروجن میں ممنوعہ تحویل بھی  $1S \rightarrow 2S$  تحویل کی اجازت نہیں دیتی۔ (یہ تمام بلند متعدد قطب کے لیے بھی درست ہوگا؛ غالب تنزل، درحقیقت، دو نوریہ انحراف کی بنا پر ہوگا، جس کا عرصہ حیات تقریباً ایک سیکنڈ کا دواں حصہ ہوگا۔)

سوال ۹.۲۲: دکھائیں کہ  $\ell$  سے  $n'$ ،  $\ell'$  میں تحویل کے لیے ہائیڈروجن کی از خود انحرافی شرح (مساوات ۹.۵۶) درج ذیل ہوگی

$$\frac{e^2 \omega^3 I^2}{3 \pi \epsilon_0 \hbar c^3} \times \begin{cases} \frac{\ell+1}{2\ell+1}, & \ell' = \ell + 1 \\ \frac{\ell}{2\ell-1}, & \ell' = \ell - 1 \end{cases} \quad (9.97)$$

allowed electric dipole transitions<sup>۳۶</sup>

forbidden magnetic dipole transitions<sup>۳۷</sup>

forbidden electric quadrupole transitions<sup>۳۸</sup>

جہاں  $I$  درج ذیل ہے۔

$$(9.98) \quad I \equiv \int_0^\infty r^3 R_{n\ell}(r) R_{n'\ell'}(r) dr$$

(جوہر  $m$  کی کسی مخصوص قیمت سے آغاز کر کے کسی ایک  $m'$  حال میں، انتخابی قواعد:

$$m' = m - 1, \quad m' = m, \quad m' = m + 1$$

کے تحت، پہنچتا ہے۔ دھیان رہے کہ جواب  $m$  کا تابع نہیں۔) اشارہ: پہلے  $\ell' = \ell + 1$  صورت کے لیے  $|n\ell m\rangle$  اور  $|n'\ell'm'\rangle$  کے بیچ  $x$ ،  $y$ ، اور  $z$  کے تمام غیر صفروں والی ارکان معلوم کریں۔ ان سے درج ذیل مقدار کا تعین کریں۔

$$|\langle n', \ell + 1, m + 1 | r | n\ell m \rangle|^2 + |\langle n', \ell + 1, m | r | n\ell m \rangle|^2 + |\langle n', \ell + 1, m - 1 | r | n\ell m \rangle|^2$$

یہی کچھ  $\ell' = \ell - 1$  کے لیے بھی کریں۔

## باب ۱۰

# حرناگزرتخمین

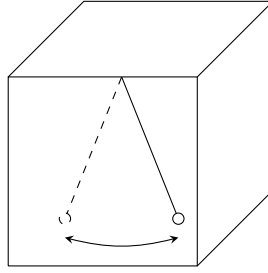
### ۱۰.۱ مسئلہ حرناگزرت

#### ۱۰.۱.۱ حرناگزرت عمل

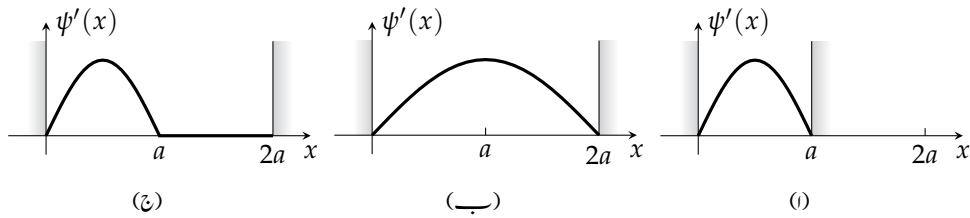
فرض کریں ایک کامل روتاص انتصابی سطح میں بغیر کسی رگڑیا ہوئی مسزاحت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے۔ اگر آپ اس روتاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ امنراتفیری کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا، لیکن اگر آپ بغیر جھٹکا دیے روتاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسرے مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تو یہ اسی سطح (یا اس کی متوازی سطح) میں سٹنگی اور روانی سے، اسی جیٹ کے ساتھ تھلوتارہے گا۔ بیرونی کیفیت کی بہت آہستہ تبدیلی ہی حرناگزرت عمل کی پہچان ہے۔ دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف وقتوں کی بات کی جارتی ہے: نظام کی اپنی حرکت (جو یہاں روتاص کے ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا) کو ظاہر کرنے والا ”اندرونی“ وقت  $T_i$ ، اور نظام کی مقتادیر معلوم میں نمایاں تبدیلی (مثلاً، لرزتے ہوئے چپوترے پر نصب روتاص کی صورت میں چپوترے کی لرزش کا دوری عرصہ) کو ظاہر کرنے والا ”بیرونی“ وقت  $T_e$ ۔ حرناگزرت عمل میں  $T_e \gg T_i$  ہوگا۔

حرناگزرت عمل کے تجزیے کی بنیادی حکمت عملی یہ ہے کہ پہلے بیرونی مقتادیر معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے، اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں (بہت آہستہ) وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، مقررہ لمبائی  $L$  کے روتاص کا کلاسیکی دوری عرصہ  $2\pi\sqrt{L/g}$  ہوگا؛ اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو، تو دوری عرصہ ہر  $2\pi\sqrt{L(t)/g}$  ہوگا۔ ہائیڈروجن سالہ (حصہ ۳.۷) پر تبصرہ کے دوران زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی۔ ہم نے مسراکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے آغاز کیا، اور ان کے بیچ فاصلہ  $R$  کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا۔ نظام کی زمینی حال توانائی کو  $R$  کے تقاعیل کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد، ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کے انحناسے مسراکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا (سوال ۷.۱۰)۔ طبعیات سالہ میں اس ترکیب کو (جس میں ساکن

adiabatic<sup>1</sup>



شکل ۱۰.۱: حرانگز رنن: اگر ڈبل کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تو رفتاں اسی جیٹہ کے ساتھ ابتدائی سطح کی متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: (۱) لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ رنن کرے تو ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے رنن کرے تو ذرہ لحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

سراکزہ سے آواز کرتے ہوئے، الیکٹران تفاعلات موج کا حساب کر کے، ان سے نسبتاً رنن رفتاں سراکزہ کے مقامات اور رنن کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو بارواں واہن ہائیر تھن<sup>۲</sup> کہتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیٹ میں، حرانگز تھن<sup>۳</sup> کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں ہیلٹنی ابتدائی روپ  $H^i$  سے بہت آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختیائی روپ  $H^f$  تک پہنچتی ہے۔ مسئلہ حرانگز<sup>۴</sup> کہتا ہے کہ اگر ذرہ ابتدائی طور پر  $H^i$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہو، تو (زیر مساوات شرڈنگر) یہ  $H^f$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا۔ (میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ  $H^f$  سے  $H^i$  تک تھیل کے دوران، طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے، لہذا حالات کی ترتیب میں کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا؛ امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے، لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔)



مشال کے طور پر، ہم لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کو زمینی حال:

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-۱)۔ اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ مقام  $2a$  پر منتقل کیا جاتا ہے؛ مسئلہ حرانگز کے تحت (ماسوائے پستی جزو ضربی کے) یہ ذرہ تو سبج شدہ کنویں کے زمینی حال:

$$(۱۰.۲) \quad \psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔ دھیان رہے کہ ہم ہیملٹنی میں چھوٹی تبدیلی (نظریہ اضطراب کی طرح) کی بات نہیں کر رہے ہیں؛ ہاں تبدیلی بہت بڑی ہے۔ فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی آہستہ رونما ہو۔ یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی؛ جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے، نظام سے توانائی حاصل کرے گا، جیسا کہ گاڑی کے انجن کے مشاندر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے۔ اس کے برعکس، کنویں کی اچانک وسعت کی صورت میں حال  $\psi^i(x)$  ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج)، جو نئی ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا (سوال ۲.۳۸)۔ یہاں توانائی (کم از کم، اس کی توقعاتی قیمت) کی بقا ہوگی؛ جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے حلاء میں گیس کی آزادانہ پھیالنے سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱۰.۱: ایک لامستثنائی چوکور کنواں، جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار  $v$  سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتی ہے، کو ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے۔ اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳) \quad \Phi_n(x, t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/2\hbar\omega}$$

جہاں  $w(t) \equiv a + vt$  کنویں کی (لحماتی) چوڑائی اور  $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$  (چوڑائی  $a$ ) کے اصل کنویں کی  $n$  ویں احبازتی توانائی ہے۔ عمومی حل ان  $\Phi$  کا خطی جوڑ:

$$(۱۰.۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t)$$

ہوگا، جہاں عددی سر  $c_n$  وقت  $t$  کے تابع نہیں ہوں گے۔

۱. دیکھیں آیا تابع وقت مساوات شرودنگر بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات ۱۰.۳ مطمئن کرتی ہے۔

ب. فرض کریں اصل کنویں کے زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ( $t = 0$ ) کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ توسیعی عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۵) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz$$

جہاں  $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$  کنویں کے پھیلنے کی رفتار کی بے بعدی پیمائش ہے۔ (بدقسمتی سے اس نکل کی قیمت بنیادی تقاضات کی صورت میں حاصل نہیں کی جاسکتی۔)

ج۔ مندرجہ کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنی چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں، یوں ”بیرونی“ وقت  $w(T_e) = 2a$  ہوگا۔ (ابتدائی) زمینی حال کے تابع وقت قوت ناجز و ضربی کا دوری عرصہ، ”اندرونی“ وقت ہوگا۔ وقت  $T_e$  اور  $T_i$  کا تعین کر کے، دکھائیں کہ حرانگزرتھمین سے مراد  $1 \ll \alpha$  ہوگا، لہذا نکل کے دائرہ کار پر  $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$  ہوگا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے توسیعی عددی سر  $c_n$  کا تعین کریں۔ حال  $\Psi(x, t)$  تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرانگزرتھمین کے مطابق ہے۔

د۔ دکھائیں کہ  $\Psi(x, t)$  میں یقینی جز و ضربی کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(10.9) \quad \theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^1 E_1(t') dt'$$

جہاں لمحہ  $t$  پر لحاتی امتیازی قیمت  $E_n(t) \equiv n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m\omega^2$  ہوگی۔ اس نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

### ۱۰.۱.۲ مسئلہ حرانگزرتھمین کا ثبوت

مسئلہ حرانگزرتھمین معقول نظر آتا ہے، اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے، تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔ غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں، ایک ذرہ جو  $n$  وی امتیازی حال،  $\psi_n$ ، میں آغاز کرتا ہے،

$$(10.4) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

یقینی جز و ضربی اپنانے کے علاوہ اسی  $n$  وی امتیازی حال:

$$(10.8) \quad \Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

میں رہتا ہے۔ اگر ہیملٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو، تب امتیازی تقاضات اور امتیازی قیمتیں بھی تابع وقت ہوں گی:

$$(10.9) \quad H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$$

لیکن اب بھی (کسی ایک مخصوص لمحہ پر) یہ معیاری عمودی سلسلہ:

$$(10.10) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

دیں گے، اور یہ مکمل ہیں، لہذا تابع وقت مساوات شرودنگر

$$(10.11) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t)\Psi(t)$$

دہمیں معتام (یا چکر، وغیرہ) کا ذکر نہیں کروں گا، چونکہ اس دلیل میں تاہیت وقت کی بات کی جباری ہے۔

کے عمومی حل کو ان کا خطی جوڑ:

$$(۱۰.۱۲) \quad \Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)}$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$(۱۰.۱۳) \quad \theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے  $E_n$  کی صورت میں ”معیاری“ پستی جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے۔ (ہمیشہ کی طرح میں اس کو عددی سر  $c_n(t)$  میں ضم کر سکتا ہوں، لیکن غیر تاج وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے، لہذا تابعیت وقت کے اس حصے کو صریحاً لکھنا موزوں ہوگا۔)

مساوات ۱۰.۱۲ کو مساوات ۱۰.۱۱ میں پر کرنے سے

$$(۱۰.۱۴) \quad i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \dot{\theta}_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n}$$

حاصل ہوگا (جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ مساوات ۱۰.۹ اور مساوات ۱۰.۱۳ کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے۔

$$(۱۰.۱۵) \quad \sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n}$$

اس کا  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر، لحاظ امتیازی تفاعلات کی معیاری عمودیت (مساوات ۱۰.۱۰) بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یادرج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۶) \quad \dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)}$$

اب مساوات ۱۰.۹ کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H} \psi_n + H \dot{\psi}_n = \dot{E}_n \psi_n + E_n \dot{\psi}_n$$

اور یوں (دوبارہ  $\psi_m$  کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۷) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

ہم  $H$  کے ہر مٹی پن سے فائدہ اٹھاتے ہوئے  $\langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle$  لکھتے ہیں، یوں  $n \neq m$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۸) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

(یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انخطاطی ہیں) مساوات ۱۰.۱۸ کو مساوات ۱۰.۱۶ میں پُر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا۔

$$(۱۰.۱۹) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$

یہ ٹھیک ٹھیک نتیجہ ہے۔ اب حرانگزر تخمین کی باری آتی ہے: فرض کریں  $H$  نہایت چھوٹا ہے، اور دوسرے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے<sup>۶</sup>

$$(۱۰.۲۰) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle$$

ہوگا، جس کا حل

$$(۱۰.۲۱) \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)}$$

ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔<sup>۷</sup>

$$(۱۰.۲۲) \quad \gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \right. \right\rangle dt'$$

بالخصوص، اگر ذرہ  $n$  وی امتیازی حال (یعنی  $n \neq m$  کیلئے  $c_n(0) = 1$  اور  $c_m(0) = 0$ ) سے آغاز کرے، تب (مساوات ۱۰.۱۲)

$$(۱۰.۲۳) \quad \Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

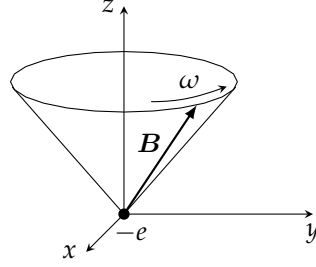
ہوگا، لہذا (چندیتی جزو ضربی حاصل کرنے کے علاوہ) یہ ذرہ (ارتقائی ہیملٹنی کے)  $n$  وی امتیازی حال میں ہی رہے گا۔

مثال ۱۰.۱: فرض کریں مقناطیسی میدان میں مبداء پر (کمیت  $m$  اور بار  $e -$ ) کا ساکن الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی میدان کی مقدار ( $B_0$ ) مستقل ہے، جبکہ اس کا رخ  $z$  محور کے گرد، مقررہ زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  کے ساتھ، مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے۔ محور  $z$  کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ  $\alpha$  ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$(۱۰.۲۴) \quad B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}]$$

<sup>۶</sup> اس قدم کی پختہ وجہ تلاش کرنا اتنا آسان نہیں۔

<sup>۷</sup> چونکہ  $\psi_m$  کی معمولی زنی سین  $= 0$  حقیقی  $\langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle = 2 \langle \dot{\psi}_m | \psi_m \rangle = (d/dt) \langle \psi_m | \psi_m \rangle$  حاصل ہے لہذا  $\gamma$  حقیقی ہوگا۔



شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے مخروطی راہ چلاتا ہے (مسادات ۱۰.۲۴)۔

اس کی ہیملٹنی (مسادات ۱۰.۱۵۸) درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar B_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z] \\
 (10.25) \quad &= \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

جہاں  $\omega_1$  درج ذیل ہے۔

$$(10.26) \quad \omega_1 \equiv \frac{eB_0}{m}$$

ہیملٹنی  $H(t)$  کے معمول شدہ امتیازی چکرکار  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  درج ذیل ہیں

$$(10.27) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(10.28) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو  $B(t)$  کے لمحاتی رخ کے ساتھ، بالترتیب، ہم چکر اور خلاف چکر کو ظاہر کرتے ہیں (سوال ۱۰.۳۰ دیکھیں)۔ ان کی مطابقتی امتیازی قیمتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$(10.29) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

فرض کریں  $B(0)$  کی ہم راہ، الیکٹران ہم چکر:

$$(10.30) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

صورت سے آغاز کرتا ہے۔<sup>۸</sup> تاہم وقت مساوات شرودنگر کا ٹھیک ٹھیک حل درج ذیل ہوگا (سوال ۱۰.۲)

$$(۱۰.۳۱) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \sin(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں  $\lambda$  درج ذیل ہے۔

$$(۱۰.۳۲) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$

اس حل کو  $\chi_+$  اور  $\chi_-$  کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰.۳۳) \quad \chi(t) = \left[ \cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) + i \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ ( $B$  کے موجودہ رخ کے لحاظ سے) خلاف چکر تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۳۴) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[ \frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

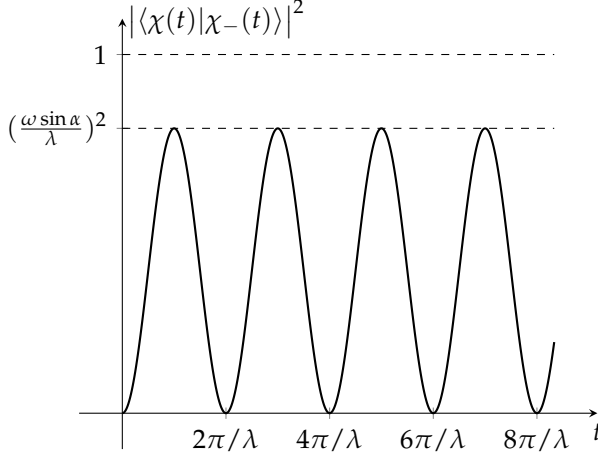
مسئلہ حرانگزرتنمین کہ  $T_e \gg T_i$  کی تحدیدی صورت میں تحویل احتمال صفر کو پہنچے گا، جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت  $T_e$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $1/\omega$  ہوگا)، اور تفعل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت  $T_i$  ہے (جو موجودہ صورت میں  $\hbar/(E_+ - E_-) = 1/\omega_1$  ہوگا)۔ یوں حرانگزرتنمین سے مراد  $\omega \ll \omega_1$  ہے؛ (غیر مضطرب) تفعلات موج کی ہیئت کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے۔ حرانگزرتنمین میں  $\lambda \cong \omega_1$  لہذا

$$(۱۰.۳۵) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

ہوگا، جیسا ہم پہلے سے ذکر کر چکے۔ مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھماتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ  $B$  کے ہم رخ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس  $\omega \gg \omega_1$  کی صورت میں  $\lambda \cong \omega$  ہوگا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ ٹپکپیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کریں کہ مساوات ۱۰.۲۵ کی ہیملٹنی کیلئے مساوات ۱۰.۳۱ تاہم وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتی ہے۔ ساتھ ہی مساوات ۱۰.۳۳ کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ، معمول زنی شرط کے عین مطابق، عددی سروں کے سرہموں کا مجموعہ 1 ہوگا۔

<sup>۸</sup> یہ بنیادی طور پر سوال ۹.۲۰ ہی ہے، البتہ یہاں الیکٹران  $B$  کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے، جبکہ سوال ۹.۲۰-د میں یہ  $z$  محور کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: غیر حسیبناگر طریق (ω ≫ ω<sub>1</sub>) میں تحویلی احتمال (مساوات ۱۰.۳۳)۔

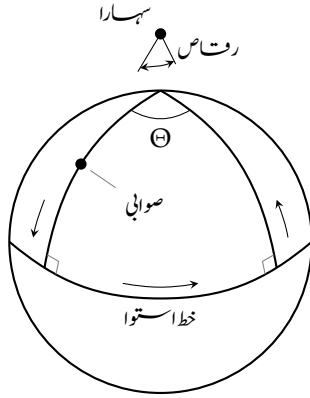
## ۱۰.۲ ہیئت بیری

### ۱۰.۲.۱ گرگنی عمل

آئیں حصہ ۱۰.۱ کے کلاسیکی نمونہ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جس میں ایک ایسے کامل بے رگڑ رفاص، جس کے سہارا کو ایک معتم سے دوسرے اور دوسرے سے تیسرے معتم منتقل کیا جاتا ہو، استعمال کرتے ہوئے حسیبناگر عمل کا تصور اخذ کیا گیا۔ میں نے دعویٰ کیا تھا کہ جب تک سہارا کی حرکت رفاص کے دوری عرصے سے بہت آہستہ ہو (تاکہ سہارا کی نمایاں حرکت کے دوران رفاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہو)، یہ اسی مستوی (یا اس کے متوازی مستوی) میں اسی حیطے (اور اسی تعداد) کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

اگر میں اس کامل رفاص کو شمالی قطب پر لے جا کر، مثلاً صوابی شہر کے رخ، جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) تو کیا ہوگا؟ فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے۔ میں اس کو بہت آہستہ (یعنی حسیبناگر طریق سے) صوابی سے گزرتے خط طول بلد پر چلتے ہوئے، خط استوا تک پہنچتا ہوں۔ یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے رہا ہوگا۔ میں اس کو خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں (رفاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے)۔ آخر میں نئے خط طول بلند پر چلتے ہوئے، میں رفاص کو واپس شمالی قطب منتقل کرتا ہوں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رفاص اب اسی مستوی میں نہیں جھولے گا جس سے اس نے آغاز کیا تھا؛ یقیناً، نئے اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ ⊕ پایا جاتا ہے، جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے خط طول بلند کے بیچ زاویہ ⊖ ہے۔

جس راہ پر میں رفاص کو اٹھا کر چلتا رہا، وہ راہ (زمین کے مرکز پر) ٹھوس زاویہ Ω<sup>۹</sup>، بناتی ہے اور ⊕ اسی (Ω) کے



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر روتص کی حرانگز رتمین

برابر ہے۔ یہ راہ شمالی نصف کرہ کا  $\Theta/2\pi$  حصہ گھیرتی ہے، لہذا اس کا رقبہ

$$A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$$

ہوگا (جہاں  $R$  زمین کا رداس ہے)؛ یوں

$$(۱۰.۳۶) \quad \Theta = A/R^2 \equiv \Omega$$

ہوگا جو اس نتیجے کو نہایت عمدہ انداز میں پیش کرتا ہے، چونکہ یہ راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں (شکل ۱۰.۶)۔<sup>۱۰</sup>

کرہ کی سطح پر بسند راہ پر چلتے ہوئے حرانگز رتمین کی ایک مثال 'فوق رتص' ہے، جہاں رتص کو اٹھا کر چلنے کا کام مجھے نہیں بلکہ زمین کے گھومنے کو سونپا جاتا ہے۔ خط عرض بلد  $\theta_0$  درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

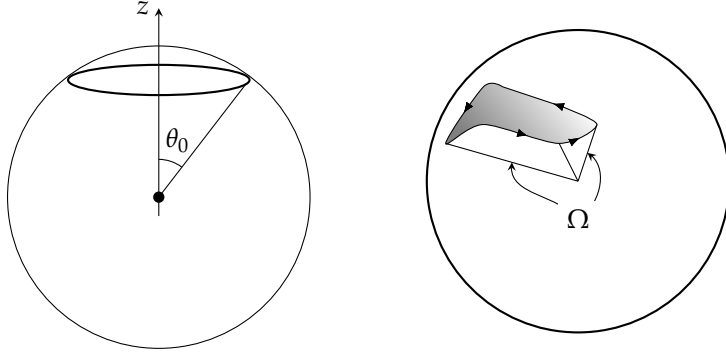
$$(۱۰.۳۷) \quad \Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos \theta)|_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

زمین کے لحاظ سے (جو اس دوران  $2\pi$  زاویہ گھوم چکی ہوگی) فوق رتص کی روزانہ استقبالی حرکت  $2\pi \cos \theta_0$  ہوگی؛ اس نتیجے کو، عموماً، گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کورولس<sup>۱۱</sup> قوتوں کے اثر سے حاصل کیا جاتا ہے، لیکن یہاں یہ حالت اہندسی مفہوم کا حاصل ہے۔

<sup>۱۰</sup> آپ چاہیں تو اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔ اس راہ کو زمین کے گرد دائری لکیریوں کے چھوٹے چھوٹے حصوں کا مجموعہ تصور کریں۔ رتص ہر ایسی لکیر کے ساتھ مستقل زاویہ بنائے گا لہذا احتیاطاً زاویائی انحراف کا تعلق کر دی کشیر الاضلاع کے راس زاویوں کے مجموعہ کے ساتھ ہو گا۔

<sup>۱۱</sup> Foucault pendulum  
<sup>۱۲</sup> Coriolis





شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ  $\Omega$  بناتی شکل ۷.۱۰: ایک دن کے دوران، فوٹو خاص کی راہ۔ ہے۔

ایسا نظام جو بند راہ پر چلتے ہوئے واپس ابتدائی نقطہ پہنچ کر اپنے ابتدائی حال کو نہیں لوٹا کر گئے<sup>۱۳</sup> کہلاتا ہے۔ (یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد ”حرکت دینا“ ہو؛ اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدا میں تھیں۔) گر گئی نظام جگہ جگہ پائے جاتے ہیں؛ ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن گر گئی ہے: ہر ایک پھیرے کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی، یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا، وغیرہ۔ اس تصور کا اطلاق، چھوٹے ریٹالڈ عدد<sup>۱۴</sup> پر سیال میں، حبر ٹوموں کی حرکت پر بھی کیا گیا ہے۔ اگلے حصے میں میں گر گئی حرانگزر عمل کی کوانٹائی میکانیات پر غور کروں گا۔ ہم نے دیکھا ہوگا کہ ہیملٹنی کی مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حرانگزر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا۔

## ۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ ۱۰.۱.۲ میں دکھایا کہ ایک ذرہ جو  $H(0)$  کے  $n$  وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہے، حرانگزر صورت میں، تابع وقت<sup>۱۵</sup> ہیئت جزو ضربی کے علاوہ،  $H(t)$  کے  $n$  وی امتیازی حال میں رہتا ہے۔ بالخصوص، اس کا تعلق عمل موج (مساوات ۱۰.۲۳):

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

ہوگا، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.39)$$

حرکے ہیئت<sup>۱۵</sup> ہے (جو وقت کے تغا عمل  $E_n$  کی صورت میں، جب ضروری  $e^{-iE_nt/\hbar}$  کو عموماً دیتی ہے)، اور درج ذیل ہندسہ ہیئت<sup>۱۶</sup> کہلاتی ہے۔

$$(۱۰.۴۰) \quad \gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt'$$

چونکہ ہیملٹنی میں کوئی ایسی مقدار معلوم  $R(t)$  پائی جاتی ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے، لہذا  $\psi_n(t)$  وقت  $t$  کا تابع ہوگا۔ (سوال ۱۰.۱ میں  $R(t)$ ، پھیلتے ہوئے چوکور کنویں کی، چوڑائی ہوگی۔) یوں

$$(۱۰.۴۱) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt}$$

لہذا

$$(۱۰.۴۲) \quad \gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle dR$$

ہوگا، جہاں  $R_i$  اور  $R_f$  مقدار معلوم  $R_t$  کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی۔ بالخصوص، اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا ابتدائی روپ اختیار کرے تب  $R_f = R_i$  لہذا  $\gamma_n(T) = 0$  ہوگا، جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں!

میں نے مساوات ۱۰.۴۱ میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو۔ اب فرض کریں  $N$  عدد مقدار معلوم  $R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$  تبدیل ہوتے ہوں، تب درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۳) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

جہاں  $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$  ہے اور  $\nabla_R$  ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے۔ اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۴۴) \quad \gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

اور اگر وقت  $T$  کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا اصل روپ اختیار کرتا ہو تب حالص ہندسی یقینی تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۴۵) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں بند راہ پر کلیری تکمل ہے، جو عموماً غیر ضرر ہوگا۔ مساوات ۱۰.۴۵ کو پہلی مرتبہ 1984 میں<sup>۱۷</sup> میکائل سیری نے حاصل کیا اور یوں  $\gamma_n(T)$  ہیئت<sup>۱۸</sup> کہلاتی ہے۔ دھیان رہے کہ

<sup>۱۵</sup> dynamic phase

<sup>۱۶</sup> geometric phase

<sup>۱۷</sup> اخیرت کی بات ہے کہ 60 سال تک یہ حقیقت کسی کو نظر نہیں آئی۔

<sup>۱۸</sup> Berry's phase

(جب تک حرکت اتنی آہستہ ہو کہ حرانگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں)  $\gamma_n(T)$  کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نہ کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر۔ اس کے برعکس، مجموعی حرکی ہیٹ

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کے تابع ہوگی۔

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کی ہیٹ اختیاری ہے؛ طبیعی مقصد اروں میں  $|\Psi|^2$  پایا جاتا ہے، لہذا ہیٹ جزو ضربی کثرت جاتا ہے۔ اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندی ہیٹ کی کوئی طبیعی اہمیت نہیں؛ آخر  $\psi_n(t)$  کی ہیٹ بھی تو اختیاری ہے۔ یہ بیری کی دوراندیشی تھی کہ انہوں نے اس حقیقت کو بچھپانا کہ ہیملٹنی کو بند دائرے پر پھیرا دے کر واپس اپنے اصل روپ میں لانے سے ابتدا اور اختتام کے بیچ زائد ہیٹ غیر اختیاری ہوگی، جس کی پیشانہ بھی کی جاسکتی ہے۔

مشال کے طور پر، ذرات (تمام حال  $\Psi$  میں) کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے، صرف ایک حصے کو حرانگزر تبدیل ہوتے مخفی سے گزارا جاتا ہے۔ دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے درج ذیل روپ کا مجموعی تفاعل موج حاصل ہوگا

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma} \quad (10.41)$$

جہاں  $\Psi_0$  ”سیدھی پہنچی“ شعاع کا تفاعل موج اور  $\Gamma$  تغیر پذیر  $H$  کی بنا پر شعاع کی زائد ہیٹ ہے (جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ ہندی ہوگا)۔ اس صورت میں درج ذیل ہوگا۔

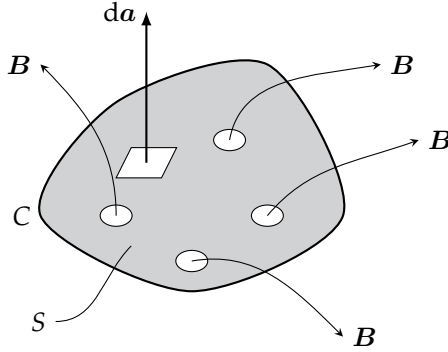
$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \frac{1}{4} |\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma}) (1 + e^{-i\Gamma}) \\ &= \frac{1}{2} |\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2) \end{aligned} \quad (10.42)$$

یوں تعبیری اور تباہ کن مداخلت<sup>۱۹</sup> کے نقاط (جہاں  $\Gamma$  کی قیمت  $\pi$  کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی) سے  $\Gamma$  کی پیشانہ کی جاسکتی ہے (بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھا کہ زیادہ بڑی حرکی ہیٹ کی موجودگی میں ہندی ہیٹ نظر نہیں آئے گی، لیکن انہیں علیحدہ علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے)۔

تین ابعادی مقدار معلوم فضا،  $R = (R_1, R_2, R_3)$ ، میں کلیہ بیری (مساوات ۱۰.۴۵) سستی مخفیہ  $A$  کی صورت میں مقناطیسی بہاؤ<sup>۲۰</sup> کے کلیہ کا یاد دلاتا ہے۔ سطح  $S$  جس کی سرحد منحنی  $C$  ہو سے درج ذیل بہاؤ گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$\Phi \equiv \int_S B \cdot da \quad (10.48)$$

<sup>۱۹</sup> interference  
<sup>۲۰</sup> magnetic flux



شکل ۱۰.۸: بند مخفی C کے سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہاؤ۔

مقناطیسی میدان کو مستقیم خفیہ کے روپ  $(B = \nabla \times A)$  میں لکھ کر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(10.49) \quad \Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr$$

یوں ہیٹ بیری کو مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے ”مقناطیسی میدان“ کا ”بہاؤ“

$$(10.50) \quad “B” = i \nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$$

تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کو دوسری طرف سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے: تین ابعادی صورت میں ہیٹ بیری کو سطحی عمل:

$$(10.51) \quad \gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مقناطیسی مماثلت کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری مقاصد کے نقطہ نظر سے مساوات ۱۰.۵۱ محض  $\gamma_n(T)$  لکھنے کا دوسرا انداز ہے۔

سوال ۱۰.۳:

۱. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی  $w_1$  سے بڑھ کر  $w_2$  ہوتی ہے؛ مساوات ۱۰.۴۲ سے کنویں کی ہندی تبدیلی ہیٹ تلاش کریں۔ نتیجے پر تبصرہ کریں۔

ب. اگر وسعت مستقل شرح  $(dw/dt = v)$  سے ہو، تب حرکی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگی؟

ج. چوڑائی کم ہو کر واپس  $w_1$  ہو جاتی ہے؛ اس پورے پھیرے کی ہیٹ بیری کیا ہوگی؟

سوال ۱۰.۴: ڈیٹا تفاعل کنواں (مساوات ۲.۱۱۴) واحد ایک مقید حال (مساوات ۲.۱۲۹) کا حاصل ہے۔  $\alpha$  آہستہ آہستہ  $\alpha_1$  سے بڑھ کر  $\alpha_2$  ہوتا ہے؛ ہندی تبدیلی ہیٹ کا حساب لگائیں۔ اگر تبدیلی مستقل شرح  $(d\alpha/dt = c)$  سے رونما ہوتا ہے تب حرکت کی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگی؟

سوال ۱۰.۵: دکھائیں کہ حقیقی  $\psi_n(t)$  کی صورت میں ہندی ہیٹ صفر ہوگی۔ (سوال ۱۰.۳ اور سوال ۱۰.۴ اس کی مثالیں ہیں۔) امتیازی تفاعلات موج کے ساتھ غیر ضروری (لیکن متاثرہ طور پر بالکل جائز) جزو ضربی ہیٹ منسلک کریں:  $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$  جہاں  $\Phi_n(R)$  اختیاری (حقیقی) تفاعل ہے۔ یقیناً، آپ غیر صفر ہندی ہیٹ حاصل کریں گے، تاہم دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات ۱۰.۲۳ میں پُر کرنے سے کیا ہوگا۔ اور ہندی راہ پر اس سے صفر حاصل ہوتا ہے۔ سبق: غیر صفر ہیٹ بیری کی خاطر (الف) آپ کو ہیملٹنی میں ایک سے زائد تابع وقت متدار معلوم کی ضرورت ہوگی، اور (ب) ایسی ہیملٹنی درکار ہوگی جو غیر مہمل مخلوط امتیازی تفاعلات دیتی ہو۔

مثال ۱۰.۲: ہیٹ بیری کی کلاسیکی مثال مستقل متدار کے مقناطیسی میدان، جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو، میں مبداء پر الیکٹران ہے۔ پہلے اس مخصوص صورت (جس کا تجزیہ مثال ۱۰.۱ میں کیا گیا) پر غور کرتے ہیں جس میں محور  $z$  کے ساتھ مقررہ زاویہ  $\alpha$  پر رہتے ہوئے، مستقل زاویائی سمتی رفتار  $\omega$  سے،  $B(t)$  استقبالی حرکت کرتا ہے۔ (میدان  $B$  کی ہم راہ ”ہم میدان“ الیکٹران کے لئے) مساوات ۱۰.۲۳ اٹھک ٹھیک حل دیتی ہے۔ حرانگزر طریق،  $\omega \ll \omega_1$ ، میں

$$(۱۰.۵۲) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا، لہذا مساوات ۱۰.۲۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۱۰.۵۳) \quad \begin{aligned} \chi(t) &\cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ &+ i \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left( \frac{\omega_1 t}{2} \right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t) \end{aligned}$$

دوسرے جزو کو  $0 \rightarrow \omega/\omega_1$  کی صورت میں رد کرتے ہوئے حرانگزر روپ کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا (مساوات ۱۰.۲۳)۔ حرکت کی ہیٹ درج ذیل ہے

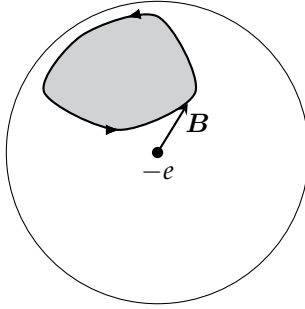
$$(۱۰.۵۴) \quad \theta_+(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_+(t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$

(جہاں مساوات ۱۰.۲۹ سے  $E_+ = \hbar \omega_1/2$  ہوگا)، لہذا ہندی ہیٹ درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۵) \quad \gamma_+(t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پھیرے کے لیے  $T = 2\pi/\omega$  ہوگا، لہذا ہیٹ بیری درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma_+(T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بسند راہ جھاڑتا ہے۔

اب زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں، جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک  $B_0$  =  $r$  کرہ کی سطح پر اختیاری بسند راہ جھاڑتی ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان  $B(t)$  کی ہم راہ ہم میدان کو ظاہر کرنے والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا (سوال ۳۰.۴ دیکھیں)

$$(۱۰.۵۷) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں  $B$  کے کردی محدد  $\theta$  اور  $\pi$  اب وقت کے تقاضاات ہیں۔ کردی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا، جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں۔

$$(۱۰.۵۸) \quad \begin{aligned} \nabla \chi_+ &= \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۵۹) \quad \begin{aligned} \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle &= \frac{1}{2r} \left[ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{a}_\theta + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

مساوات ۱۰.۵۸ کے لیے ہمیں اس مقدار کی گردش درکار ہوگی۔

$$(۱۰.۶۰) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \mathbf{a}_r = \frac{i}{2r^2} \mathbf{a}_r$$

یوں مساوات ۱۰.۵۱ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۶۱) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{a}$$

مکمل کرہ کی سطح پر اس رقبے پر لبہ جائے گا جس کو  $B$  کی نوک ایک پھیرے میں جھاڑتی ہے، لہذا  
اور  $d\mathbf{a} = r^2 d\Omega \mathbf{a}_r$

$$(۱۰.۶۲) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega$$

ہوگا، جہاں مبدا پر ٹھوس زاویہ  $\Omega$  ہے۔ یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے، جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلے کا یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا (یعنی زمین کی سطح پر بند راہ پر بلار گزرتا خاص کی منتقلی)۔ اس نتیجے کے تحت، کسی اختیاری بند راہ پر، مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حیرانگیز پھیرا دینے سے، حلال (ہندسی) تبدیلی ہیئت مقناطیسی میدان سمتیہ کے جھاڑنے کے ٹھوس زاویہ کی منفی آدھی ہوگی۔ مساوات ۱۰.۶۳ کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ مخصوص نتیجہ (مساوات ۱۰.۵۶) کے مطابق ہے، جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے تھا۔ □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر 1 ہو کے لئے مساوات ۱۰.۶۲ کا مثال حاصل کریں۔ جواب:  $\Omega$  - (ایک ذرہ جس کا چکر  $s$  ہو کے لیے نتیجہ  $-s\Omega$  ہوگا۔)

۱۰.۲.۳ اہارونو و بوم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں، مخفیہ ( $\varphi$  اور  $A$ ) بلا واسطہ نا قابل پیمائش ہیں؛ برقی اور مقناطیسی میدان:

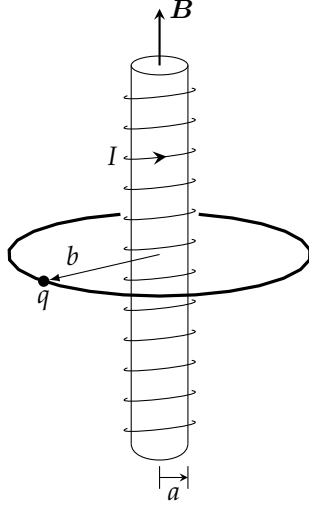
$$(۱۰.۶۳) \quad E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$

طبیعی مقناطیہ ہیں۔ بنیادی قوانین (میکسویل مساوات اور لورنز قوت و تفاعل) مخفیوں کا کوئی ذکر نہیں کرتے، جو (منطقی نقطہ نظر سے) نظریہ مرتب کرنے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں۔ یقیناً، آپ بغیر خوف و خطر ان مخفیوں کو تبدیل کر سکتے ہیں:

$$(۱۰.۶۴) \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A + \nabla \Lambda$$

جہاں  $\Lambda$  مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے؛ یہ ماچے تبادلہ<sup>۲۲</sup> کہلاتا ہے، جس کا میدانوں پر کوئی اثر نہیں) جیسا آپ مساوات ۱۰.۶۳ استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں۔

<sup>۲۱</sup> کوانٹائی مکانیات میں روایتی طور پر حرف  $V$  کو مخفی توانائی کے لئے استعمال کیا جاتا ہے، لیکن برقی حرکیات میں یہی حرف غیر مستحق مخفیہ کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ غلط فہمی سے بچنے کے لئے غیر مستحق مخفیہ کے لئے حرف  $\varphi$  استعمال کروں گا۔ اس حصے کے پس منظر کے لئے سوال ۳.۵۹، سوال ۳.۶۰ اور سوال ۳.۶۱ دیکھیں۔  
<sup>۲۲</sup> gauge transformation



شکل ۱۰.۱: ایک دائرہ، جس کے اندر سے لمبے بیچچوں ال لچھ گزرتا ہو، پر باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

کوانٹائی میکانیات میں مخفی زیادہ اہم کردار ادا کرتے ہیں، چونکہ ہیمیلٹنی کو  $\varphi$  اور  $A$  کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\varphi \quad (10.65)$$

نہ کہ  $E$  اور  $B$  کی صورت میں۔ بہر حال، زیر ماب تبادلہ کوانٹائی نظریہ غیر متغیر رہتا ہے (سوال ۳.۶۱ دیکھیں)، اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا جاتا تھا کہ جن خطوں میں  $E$  اور  $B$  صفر ہوں وہاں، بالکل کلاسیکی نظریہ کی طرح، کسی قسم کا برقیاتی اثر نہیں پایا جاتا۔ لیکن 1959ء میں اہارونو اور بوہم نے دکھایا کہ اس خطے میں بھی، جہاں میدان صفر ہو، حرکت پذیر باردار ذرہ کے کوانٹائی رویہ پر سمتی مخفیہ اثر انداز ہوگا۔ میں ایک سادہ مثال پیش کر کے اہارونو بوہم اثر پر تبصرہ کروں گا اور اس کے بعد اس کا ہیئت سیری کے ساتھ تعلق دکھا دوں گا۔

فرض کریں ایک ذرے کو رداس  $b$  کے دائرے پر رہنے کا پابند بنایا جاتا ہے۔ اس دائرے کے محور پر رداس  $a < b$  کا لمبے بیچچوں لچھا<sup>۲۳</sup> ہے جس میں یک سمتی برقی رو  $I$  ہے (شکل ۱۰.۱)۔ بہت لمبے بیچچوں لچھے کی صورت میں، بیچچوں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا، جبکہ اس کے باہر میدان صفر ہوگا۔ تاہم بیچچوں لچھے کے باہر سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا؛ یقیناً  $\nabla \cdot A = 0$  کی موزوں ماب شرط لیتے ہوئے (درج ذیل ہوگا

$$A = \frac{\Phi}{2\pi r} a_\phi \quad (r > a) \quad (10.66)$$

جہاں  $\Phi = \pi a^2 B$  بیچچوں لچھے سے گزرتا ہوا مقناطیسی بہا<sup>۲۴</sup> ہوگا۔ بیچچوں لچھا خود غیر باردار ہے، لہذا غیر سمتی مخفیہ  $\varphi$

<sup>۲۳</sup>solenoid  
<sup>۲۴</sup>magnetic flux



صفر ہوگا۔ ایسی صورت میں ہیملٹنی (مساوات ۱۰.۶۵) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۱۰.۶۷) \quad H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla]$$

تفاعل موج صرف استی زاویہ  $\phi$  ( $\theta = \pi/2, r = b$ ) کا تابع ہے، لہذا  $(a_\phi/b)(d/d\phi) \rightarrow \nabla$  ہوگا، اور مساوات شروڈنگر درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(۱۰.۶۸) \quad \frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left( \frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E \psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے:

$$(۱۰.۶۹) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon \psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں۔

$$(۱۰.۷۰) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \quad \text{اور} \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2 E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہوں گے

$$(۱۰.۷۱) \quad \psi = Ae^{i\lambda\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۷۲) \quad \lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

نقطہ  $\phi = 2\pi$  پر  $\psi(\phi)$  کے استمرار کی بنا پر  $\lambda$  عدد صحیح ہوگا:

$$(۱۰.۷۳) \quad \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n$$

جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۱۰.۷۴) \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہیٹرواں لچھ دائرے پر ذرے کا دو پشترتا انحطاط ختم کرتا ہے (سوال ۲.۴۶): مثبت  $n$ ، جو ہیٹرواں لچھے میں روکے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کو ظاہر کرتا ہے ( $q$  مثبت فرض کرتے ہوئے)، کی توانائی منفی  $n$  کے لحاظ سے، جو مخالف رخ ذرے کو

ظاہر کرتا ہے، کم ہوگی۔ زیادہ اہم بات یہ ہے کہ، احبازتی توانائیوں کا دارومدار پتچپواں لچھے کے اندر میدان پر ہوگا، اگرچہ اس مقام پر جہاں ذرہ پایا جاتا ہے میدان صفر ہے! <sup>۲۵</sup>

زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر، فرض کریں ایک ذرہ ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں  $B$  صفر ہے (لہذا  $\nabla \times A = 0$  ہوگا)، لیکن  $A$  خود غیر صفر ہوگا۔ (اگرچہ میں فرض کرتا ہوں کہ  $A$  ساکن ہے، اس ترکیب کو تابع وقت محفے کے لئے عمومیّت دی جاسکتی ہے۔) مخفی توانائی  $V$ ، جس میں برقی حصہ  $q\phi$  شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے، کی (تابع وقت) مساوات شرودنگر

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10.45)$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

$$\Psi = e^{ig} \Psi' \quad (10.46)$$

جہاں

$$g(r) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_0^r A(r') \cdot dr' \quad (10.47)$$

ہے اور  $O$  کوئی (اختیاری منتخب) نقطہ حوالہ ہے۔ دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت بامعنی ہوگی جب پورے خطے میں  $\nabla \times A = 0$  ہو؛ ورنہ لکیری مکمل  $O$  سے  $r$  تک راہ پر منحصر ہوگا، اور یوں  $r$  کا تعلق عمل نہیں ہوگا۔  $\Psi'$  کی صورت میں  $\Psi$  کی ڈھلوان

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i\nabla g) \Psi' + e^{ig} (\nabla \Psi')$$

ہوگی، لیکن  $\nabla g = (q/\hbar) A$  ہے، لہذا

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi' \quad (10.48)$$

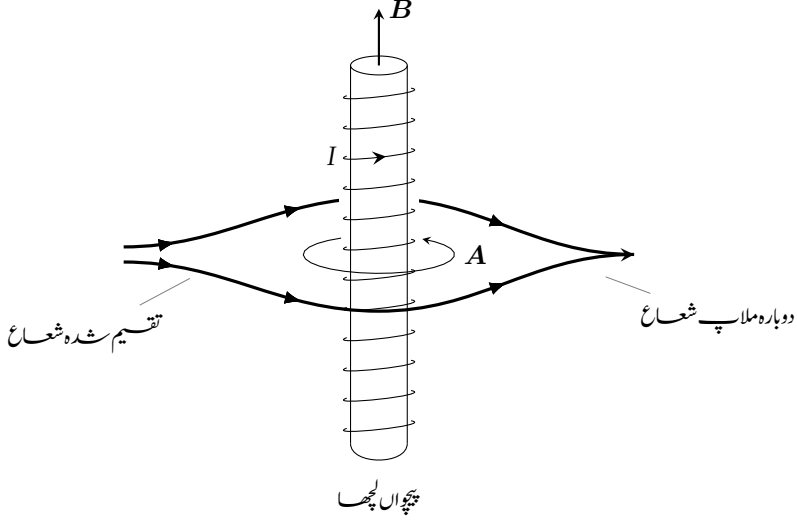
اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi' \quad (10.49)$$

اس کو مساوات ۱۰.۴۵ میں پڑ کر کے مشترک حیز و ضربی  $e^{ig}$  کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' + V \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (10.50)$$

<sup>۲۵</sup> اصل موصل (superconducting) چھلوں کی ایک مخصوص خاصیت یہ ہے کہ ان کے احاطہ میں بہاؤ کو انشائی ہوتا ہے:  $E_n = (\hbar^2/2mb^2)(n + n')^2$  جہاں  $n'$  عدد صحیح ہوگا۔ ایسی صورت میں بے اثر متابل کشف نہیں ہوگا، چونکہ  $(n + n')^2$  ہوگا اور  $(n + n')$  بھی عدد صحیح ہے۔ انشائی کی بات ہے کہ یہاں بار  $q$  الیکٹران کے بار کا دگن ہوگا؛ (اعلیٰ موصلی الیکٹران جوڑوں کی صورت میں رہتے ہیں۔) لیکن کوٹانازفہ بہاؤ (flux quantization) کو اعلیٰ موصل نامزد کرتا ہے (جو دائری برقی روکے امالہ کے ذریعہ منسحق کو مستم کرتا ہے)، نہ کہ پتچپواں لچھے یا برقی طوسی میدان، اور یہ (غیر اعلیٰ موصل) مثال میں نہیں پایا جاتا، جس پر یہاں غور کیا گیا ہے۔



شکل ۱۰.۱۱: اہارونو بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پتچواں لچھے کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

بظاہر بغیر  $A$  مساوات شرودنگر کو  $\Psi'$  مطمئن کرتا ہے۔ مساوات ۱۰.۸۰ کا حل تلاش کرنے کے بعد (بغیر گردش) سستی مخفیہ کے شعول کی تصحیح حقیر سا کام ہے: صرف پیتی جزو ضربی  $e^{i\theta}$  ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔

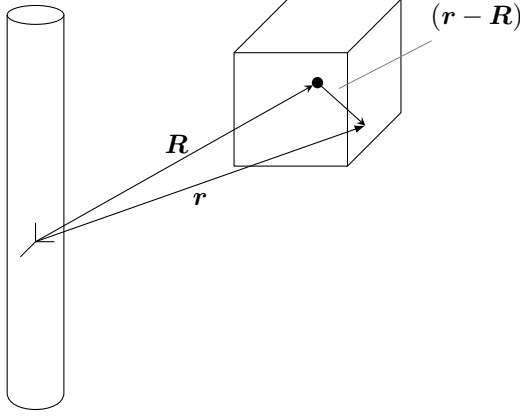
اہارونو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا، جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے پتچواں لچھے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱)۔ ان شعاعوں کو پتچواں لچھے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے کہ شعاع صرف ان معامات سے گزرتی ہے جہاں  $B = 0$  ہوتا ہے۔ تاہم  $A$ ، جسے مساوات ۱۰.۶۶ پیش کرتی ہے، غنیر صفر ہوگا، اور (دونوں اطراف  $V$  کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے) اختتامی نقطے پر دونوں شعاعوں کی پیت:

$$(10.81) \quad g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left( \frac{1}{r} a_\phi \right) \cdot (r a_\phi d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}$$

مختلف ہوگی۔ یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہے جو  $A$  کے رخ حرکت کرتے ہیں؛ یعنی پتچواں لچھے میں برقی رو کے رخ۔ دونوں شعاعوں کے پتچیتی مشرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راستہ متناسب ہوگا جسے ان کی راہ گھسرتی ہیں۔

$$(10.82) \quad \text{پیتی مشرق} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

اس پیتی انتقال سے متاثر پیمائش مداخلت (مساوات ۱۰.۴۷) پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق جیمسز اور ساتھی کر چکے ہیں۔



شکل ۱۰.۱۲: پتھری  $V(r - R)$  ایک ذرے کو ڈبلے میں مقید کیے ہوئے ہے۔

اہارونو و بوہم اثر کو ہندی پیت کی ایک مثال تصور کی جا سکتی ہے۔ فرض کریں پتھری  $V(r - R)$  باردار ذرے کو ایک ڈبلے میں رہنے کا پابند بناتا ہے (ڈبلے کا مرکز پتھریاں لچھے سے باہر نقطہ  $R$  پر ہے)؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ (ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبلے کو پتھریاں لچھے کے گرد ایک پھیلا دیں گے، لہذا  $R$  وقت کا تقاضا ہوگا، تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں۔) اس ہیملٹنی کے امتیازی تقاضات کا تعین درج ذیل کرتی ہے۔

$$(۱۰.۸۳) \quad \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - qA(r) \right]^2 + V(r - R) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں:

$$(۱۰.۸۴) \quad \psi_n = e^{ig} \psi'_n$$

لیتے ہیں جہاں <sup>۲۶</sup>

$$(۱۰.۸۵) \quad g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r A(r') \cdot dr'$$

ہے، اور  $A \rightarrow 0$  کی صورت میں  $\psi'$  اسی امتیازی قیمت مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$(۱۰.۸۶) \quad \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r - R) \right] \psi'_n = E_n \psi'_n$$

<sup>۲۶</sup> حوالہ نقطہ  $O$  کو ڈبلے کے وسط پر منتخب کرنا سودمند ثابت ہوتا ہے، چونکہ ایسا کرنا ضمانت دیتا ہے کہ پتھریاں لچھے کے گرد ایک پھیلا مکمل کرنے سے ابتدائی پتھری روایت حاصل ہوگی۔ اگر آپ، مثلاً، مقصورہ فضا میں حوالہ نقطہ منتخب کریں، تب راہ پتھریاں لچھے کے گرد لپٹی ہوگی، اور ایسے خطے کو گھیرے گی جہاں  $A$  کی گردش غیر صفر ہے، لہذا آپ کو آخری نقطے پر ”ہاتھ سے“ پیت درست کرنی ہوگی۔ اگر چہ، اب بھی وہی جواب حاصل ہوگا، تاہم جواب حاصل کرنے کا یہ بہتر طریقہ نہیں ہے۔ عموماً، مساوات ۱۰.۹ میں تقاضات موج کی پتھری روایت طے کرتے ہوئے، ہم چاہیں گے کہ  $\psi_n(x, T) = \psi_n(x, 0)$  ہو تاکہ جلی پتھری مندرجہ ذیل سے مسلسل رہے۔

آپ نے دیکھا کہ  $\psi'_n$  صرف ہٹاو  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  کا قف عمل ہے، نہ کہ  $(\psi_n)$  کی طرح  $\mathbf{r}$  اور  $\mathbf{R}$  کا علیحدہ علیحدہ قف عمل۔

آئیے اب اس ڈبل کو پیچھا لچھے کے گرد ایک پھیرا دیتے ہیں (اس عمل کو حیرناگزر ہونے کی بھی ضرورت نہیں)۔ ہیٹ بیری کا قفین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار  $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$  کی قیمت درکار ہوگی۔ چونکہ

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{i\mathbf{g}} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{g}} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{i\mathbf{g}} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle &= \int e^{-i\mathbf{g}} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{i\mathbf{g}} \left[ -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 \mathbf{r} \\ (10.87) \quad &= -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 \mathbf{r} \end{aligned}$$

بغیر زبردنوشت  $\nabla$  متغیر  $\mathbf{r}$  کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے، اور میں  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  کے قف عمل پر عمل کے دوران  $\nabla_R = -\nabla$  بروئے کار لایا۔ لیکن آخری شکل کی قیمت ہیملٹن  $-\nabla^2 / (2m) + V$  کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب  $i/\hbar$  ہے، جو ہم حصہ ۲.۱ سے جانتے ہیں کہ صفر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(10.88) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

اس کو کلیہ بیری (ساوات ۱۰.۴۵) میں پُر کرتے ہوئے درج ذیل نتیجہ اخذ ہوگا

$$(10.89) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو اہارونو و بوہم نتیجے (ساوات ۱۰.۸۲) کی تصدیق کرتا ہے، اور واضح کرتا ہے کہ اہارونو و بوہم اثر ہندی ہیٹ کی ایک خصوصی صورت ہے۔<sup>۲</sup>

اہارونو و بوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیا جائے؟ ظاہر ہے کہ ہمارا کلاسیکی شعور درست نہیں: برقیاتی اثرات ان خطوں میں پائے جاسکتے ہیں جہاں میدان صفر ہو۔ البتہ، یاد رہے کہ اس سے  $\mathbf{A}$  خود متابل پیمائش نہیں ہو جاتا؛ صرف محیط ہوا اختتامی نتیجہ میں پایا جاتا ہے، اور نظریہ ماپ غیر متغیر رہتا ہے۔

سوال ۱۰.۷:

ا. ساوات ۱۰.۶۵ سے ساوات ۱۰.۶۷ اخذ کریں۔

ب. ساوات ۱۰.۷۸ سے آغاز کرتے ہوئے ساوات ۱۰.۷۹ اخذ کریں۔

<sup>۲</sup> انتہائی موجودہ صورت میں ہیٹ بیری اور مقف طبعی ہٹاو (ساوات ۱۰.۵۰) کی تشکیل تقریباً  $\mathbf{B} = \frac{q}{\hbar} \mathbf{B}$  ہے۔

## اضافی سوالات برائے باب ۱۰

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ (وقفہ)  $0 \leq x \leq a$  پر لامتناہی چوکور کنویں کے زمینی حال سے آغاز کرتا ہے۔ اب کنویں کے وسط سے ذرا ہٹ کر ایک دیوار:

$$V(x) = f(t)\delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

آہستہ آہستہ کھڑی کی جاتی ہے، جہاں  $f(t)$  آہستہ آہستہ 0 سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے۔ مسئلہ حسرنائز کے تحت، یہ ذرہ ارتقائی ہیملٹنی کے زمینی حال میں رہے گا۔

۱. وقت  $\infty \rightarrow t$  پر زمینی حال تلاش کریں (اور اس کا خاکہ بنائیں)۔ اشارہ: یہ اس لامتناہی چوکور کنویں کا زمینی حال ہوگا جس میں  $a/2 + \epsilon$  پر نامتابل گزر رکاوٹ ہو۔ آپ دیکھیں گے کہ ذرہ بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصے میں رہنے کا پابند ہوگا۔

ب. وقت  $t$  پر ہیملٹنی کے زمینی حال کی مادیاتی مساوات تلاش کریں۔ جواب:

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

جہاں  $z \equiv ka$ ،  $T \equiv maf(t)/\hbar^2$ ،  $\delta \equiv 2\epsilon/a$ ، اور  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہیں۔

ج. اب  $\delta = 0$  لیتے ہوئے  $z$  کے لیے ترقیبی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ  $T$  کی قیمت 0 تا  $\infty$  ہونے سے  $z$  کی قیمت  $\pi$  تا  $2\pi$  ہوگی۔ اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں۔

د. اب  $\delta = 0.01$  لیتے ہوئے  $T = 0, 1, 5, 20, 100, 1000$  کے لیے اعدادی طریقے سے  $z$  حاصل کریں۔

ه. کنویں کے دائیں نصف حصہ میں ذرہ پائے جانے کا احتمال، بطور  $z$  اور  $\delta$  کا تعلق عمل، تلاش کریں۔ جواب:

$$I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2] \text{ جہاں } P_r = 1/[1 + (I_+/I_-)]$$

ہوگا۔ جزو-دوم میں دیے گئے  $T$  کے لئے اس ریاضی جملے کی قیمتیں تلاش کریں۔ اپنے نتائج پر تبصرہ کریں۔

و.  $T$  اور  $\delta$  کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تعلق عمل موج ترمیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصہ میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بُعدی ہارمونی سر تعش (کیٹ  $m$ ، تعدد  $\omega$ ) پر  $F(t) = m\omega^2 f(t)$  جہاں  $f(t)$  کوئی مخصوص تعلق عمل ہے، کی جبری قوت اثر انداز ہوتی ہے (میں نے  $m\omega^2$  کو صریحاً لکھا ہے؛  $f(t)$  کا بُعد فاصلہ ہے)۔ اس کی ہیملٹنی درج ذیل ہوگی۔

$$(۱۰.۹۰) \quad H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t)$$

فرض کریں وقت  $t = 0$  پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے؛ لہذا  $t \leq 0$  پر  $f(t) = 0$  ہوگا۔ اس نظام کو کلاسیکی اور کوانٹائی میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے۔

ا. اگر مرتعش مبداء پر ساکن حال ( $x_c(0) = \dot{x}_c(0) = 0$ ) سے آغاز کرے، تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہوگا۔ جواب:

$$(۱۰.۹۱) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب. جبیری قوت کی غیر موجودگی میں، اگر مرتعش  $n$  ویں حال ( $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$ ) جہاں  $\psi_n(x)$  مساوات ۲.۶۱ دیتی ہے) سے آغاز کرے، تو دکھائیں کہ (تابع وقت) مساوات شرودنگر کے حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰.۹۲) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} [-(n + \frac{1}{2})\hbar\omega t + m\dot{x}_c(x - \frac{x_c}{2}) + \frac{m\omega^2}{2} \int_0^t f(t')x_c(t') dt']}$$

ج. دکھائیں کہ  $H(t)$  کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی قیمتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$(۱۰.۹۳) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2 f^2$$

د. دکھائیں کہ حرانگزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام (مساوات ۱۰.۹۱) سادہ روپ:  $x_c(t) \cong f(t)$  اختیار کرتی ہے۔ موجودہ سیاق و سباق کے لحاظ سے، حرانگزر پین تفاعل  $f$  کے وقتی تقسرق پر کیا پابندی عائد کرتا ہے۔ اشارہ:  $\sin[\omega(t - t')] \cos[\omega(t - t')] (d/dt')$  لکھ کر تحمل بالخصص استعمال کریں۔

ه. اس مثال کے لیے مسئلہ حرانگزر کی تصدیق حبز و-ج اور حبز و-د کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں۔

$$(۱۰.۹۴) \quad \Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$$

تصدیق کریں کہ حر کی ہیٹ کاروپ درست ہے (مساوات ۱۰.۳۹)۔ کیا ہندی ہیٹ آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟

سوال ۱۰.۱۰: حرانگزر تخمین کو مساوات ۱۰.۱۲ میں عددی سر  $c_m(t)$  کے حرانگزر تسلسل<sup>۲۸</sup> کا پہلا حبز و تصور کیا جاسکتا ہے۔ مندرج کریں نظام  $n$  ویں حال سے آغاز کرتا ہے؛ حرانگزر تخمین میں، اضافی تابع وقت ہندی ہیٹ حبز و ضربی (مساوات ۱۰.۲۱) حاصل کرنے کے علاوہ، یہ  $n$  ویں حال میں ہی رہتا ہے۔

$$c_m(t) = \delta_{mm} e^{i\gamma_n(t)}$$

ا. اس کو مساوات ۱۰.۱۶ کے دائیں ہاتھ میں پڑ کر کے حرانگزر کی ”پہلی تصحیح“ حاصل کریں۔

$$(۱۰.۹۵) \quad c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right\rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt' \right.$$

یہ ہمیں متدریب حرانگزر طریق میں تحویلی احتمالات کا حساب کرنے کے وٹائل بناتا ہے۔ ”دوسری تصحیح“ کی خاطر ہم مساوات ۱۰.۹۵ کو مساوات ۱۰.۱۶ کے دائیں ہاتھ میں پڑ کریں گے، وغیرہ، وغیرہ۔

ب۔ ایک مثال کے طور پر، مساوات ۱۰.۹۵ کا اطلاق جبری سرعش (سوال ۱۰.۹) پر کریں۔ دکھائیں کہ (متریب حرانگزرتخمین میں) صرف متریبی دو سطحوں، جن کے لیے درج ذیل ہوگا، میں تخیل ممکن ہے۔

$$c_{n+1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n+1} \int_0^t \dot{f}(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \sqrt{n} \int_0^t \dot{f}(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

(یقیناً، تخیلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے۔)



## باب ۱۱

### بکھراؤ

#### ۱۱.۱ تعارف

##### ۱۱.۱.۱ کلاسیکی نظریہ بکھراؤ

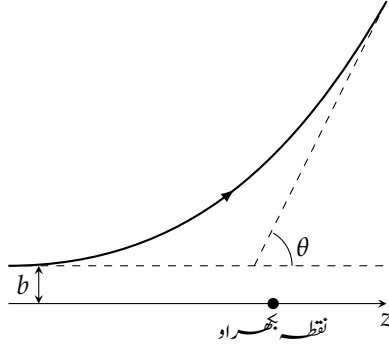
فرض کریں کسی مرکز بکھراؤ پر ایک ذرے کی آمد ہوتی ہے (مثلاً، پروٹان ایک بھاری مرکزہ پر دافعہ جاتا ہے)۔ یہ توانائی  $E$  اور ٹکراؤ مقدار معلوم  $b$  کے ساتھ آکر، زاویہ بکھراؤ  $\theta$  پر ابھرتا ہے؛ شکل ۱۱.۱ دیکھیں۔ (میں اپنی آسانی کے لئے فرض کرتا ہوں کہ ہدف استستی شکل ہے، یوں خط حرکت<sup>۳</sup> مستوی میں پایا جائے گا، اور ساتھ ہی فرض کرتا ہوں کہ نشانہ بھاری ہے، لہذا تصادم کی بنا پر اس کی اچھال نظر انداز کی جاسکتی ہے۔) کلاسیکی نظریہ بکھراؤ کا بنیادی مسئلہ یہ ہوگا: ٹکراؤ مقدار معلوم جانتے ہوئے، زاویہ بکھراؤ کا حساب کریں۔ یقیناً، عام طور پر، ٹکراؤ مقدار معلوم جتنا چھوٹا ہو، زاویہ بکھراؤ اتنا بڑا ہوگا۔

مثال ۱۱.۱: سخت کرہ بکھراؤ۔ فرض کریں رداس  $R$  کا ایک سخت بھاری گیند ہدف، جبکہ ہوائی بندوق کا چھرا (جس کو ہم نقطہ تصور کرتے ہیں) آمدی ذرہ ہے، جو لچکیلا شپکھاکر مڑتا ہے (شکل ۱۱.۲)۔ زاویہ  $\alpha$  کی صورت میں ٹکراؤ مقدار معلوم  $b = R \sin \alpha$  اور زاویہ بکھراؤ  $\theta = \pi - 2\alpha$  ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

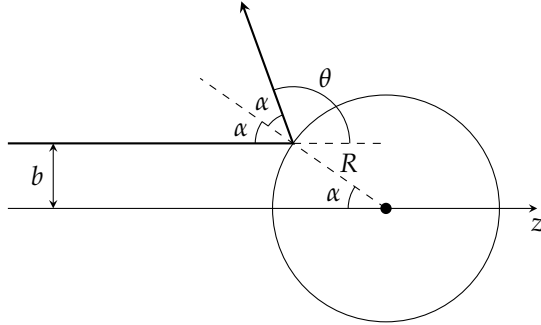
$$(11.1) \quad b = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

ظاہر اور درج ذیل ہوگا۔

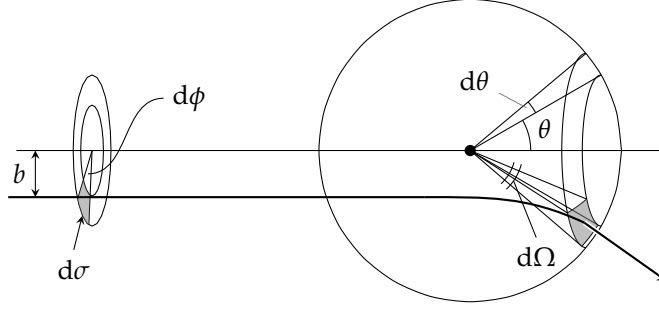
impact parameter<sup>۱</sup>  
scattering angle<sup>۲</sup>  
trajectory<sup>۳</sup>



شکل ۱۱.۱: کلاسیکی مسئلہ بکھراؤ، جس میں نکتہ اور مقدار معلوم  $b$  اور زاویہ بکھراؤ  $\theta$  کی وضاحت کی گئی ہے۔



شکل ۱۱.۲: سخت کرہ سے پسندیدہ بکھراؤ۔



شکل ۱۱.۳: رقبہ  $d\sigma$  میں آمدی ذرات ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرتے ہیں۔

$$(11.2) \quad \theta = \begin{cases} 2 \cos^{-1}(b/R), & b \leq R \\ 0, & b \geq R \end{cases}$$

□

عمومی طور پر، لامستثنائی چھوٹے قطعے، جس کا رقبہ عمودی تراش  $d\sigma$  ہو، میں آمدی ذرات، مطابقتی لامستثنائی چھوٹے ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھریں گے (شکل ۱۱.۳)۔ جتنا  $d\sigma$  بڑا ہو، اتنا  $d\Omega$  بڑا ہوگا؛ ان کے تناسبی جزو ضربی  $D(\theta) \equiv d\sigma / d\Omega$  کو تفریقی (بکھراؤ) عمودی تراش<sup>۴</sup> کہتے ہیں۔ ہیوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.3) \quad d\sigma = D(\theta) d\Omega$$

عکراؤ متدار معلوم اور استی زاویہ  $\phi$  کی صورت میں  $d\sigma = b db d\phi$  اور  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  ہیں، لہذا

$$(11.4) \quad D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

ہوگا۔ (عمومی طور پر  $\theta$  متدار معلوم  $b$  کا گھٹتا ہوا تفاعل ہوگا، لہذا یہ تفریق حقیقتاً منفی ہوگا؛ اسی لئے مطلق قیمت لی گئی ہے۔)

مثال ۱۱.۲: سخت کرہ کے بکھراؤ کے مثال بارے رکھتے ہیں۔ سخت کرہ بکھراؤ (مثال ۱۱.۱) کی صورت میں

$$(11.5) \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

<sup>۴</sup>differential (scattering) cross-section

ہیہ ناقص زبان ہے:  $D$  تفریقی نہیں ہے، اور نہ ہی یہ عمودی تراش ہے۔

لہذا

$$(11.۶) \quad D(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left( \frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

□ ہوگا۔ اس مثال میں تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کی تابع نہیں ہے، جو ایک غیر معمولی بات ہے۔

تمام ٹھوس زاویوں پر  $D(\theta)$  کا مکمل:

$$(11.۷) \quad \sigma \equiv \int D(\theta) d\Omega$$

کل عمودی تراش<sup>۱</sup> ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے، یہ آمدی شعاع کا وہ رقبہ ہے جس کو ہدف بکھیرتا ہے۔ مثال کے طور پر، سخت کرہ بکھراؤ کی صورت میں

$$(11.۸) \quad \sigma = (R^2/4) \int d\Omega = \pi R^2$$

ہوگا، جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے: یہ کرہ کا رقبہ عمودی تراش ہے: اس رقبہ کے اندر آمدی چھپرے ہدف کو مار پائیں گے، جبکہ اس سے باہر چھپرے ہدف کو خطا کریں گے۔ یہی تصورات ”نرم“ اہداف (جیسا مرکزہ کا کولم میدان) کے لئے بھی کارآمد ہے، جن میں صرف نشانے پر ”لگنا یا نہ لگنا“ کے علاوہ بھی بات کی جائے گی۔

آخر میں فرض کریں ہمارے پاس آمدی ذرات کی یکساں شدت (یا تاہم  $\mathcal{L}$ ) کی ایک شعاع ہو۔

$$(11.۹) \quad \mathcal{L} \equiv \text{اکائی رقبہ پر فی اکائی وقت آمدی ذرات کی تعداد}$$

فی اکائی وقت، رقبہ  $d\sigma$  میں داخل ہونے والے ذرات (اور یوں ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرنے والے ذرات) کی تعداد  $dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega$  ہوگی، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۱۰) \quad D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

چونکہ یہ صرف ان مقداروں کی بات کرتی ہے جنہیں تجربہ گاہ میں باآسانی ناپا جاسکتا ہے، لہذا اس کو عموماً تفسیری عمودی تراش کی تعریف لی جاتی ہے۔ اگر ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں بکھرے ذرات کا کشف تک پہنچتے ہوں، ہم اکائی وقت میں کشف کیے گئے ذرات کی گنتی کو  $dN$  سے تقسیم کر کے، آمدی شعاع کی تابندگی کے لحاظ سے معمول زنی کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱: رد فرڈ بکھراؤ<sup>۲</sup> بار  $q_1$  اور حرکی توانائی  $E$  کا ایک آمدی ذرہ بھاری ساکن ذرے سے، جس کا بار  $q_2$  ہو، بکھرتا ہے۔

<sup>۱</sup>total cross-section  
<sup>۲</sup>luminosity  
<sup>۳</sup>Rutherford scattering

۱. ٹکراؤ متدار معلوم اور زاویہ بکھراؤ کے بیچ رشتہ اخذ کریں۔

$$b = (q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 E) \cot(\theta/2)$$

ب. تفسیری بکھراؤ عمودی تراش تعیین کریں۔ جواب:

$$D(\theta) = \left[ \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (11.11)$$

ج. دکھائیں کہ رد فورڈ بکھراؤ کا کل عمودی تراش لامتناہی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ  $1/r$  مخفیہ کی "لامتناہی سعت" ہے؛ آپ کو لب قوت سے بچ نہیں سکتے ہیں۔

## ۱۱.۲ کوانٹائی نظریہ بکھراؤ

بکھراؤ کے کوانٹائی نظریے میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ  $z$  رخ حرکت کرتی ہوئی آمدی مستوی موج،  $\psi(z) = Ae^{ikz}$ ، کا مخفیہ بکھرے سامن ہوتا ہے، جس کے نتیجے میں ایک رخصتی کروئی موج پیدا ہوتی ہے (شکل ۱۱.۲)۔<sup>۹</sup> یعنی، ہم مساوات شرودنگر کے وہ حل تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کی عمومی روپ درج ذیل ہو

$$\psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad \text{بڑے } r \text{ کے لئے} \quad (11.12)$$

(احتمال کے بقا کی خاطر  $|\psi|^2$  کے اس حصے کو لازماً  $1/r^2$  سے تبدیل ہونا ہوگا، لہذا کروئی موج میں جب زو ضربی  $1/r$  پایا جاتا ہے)۔ عدد موج  $k$  کا آمدی ذرات کی توانائی کے ساتھ ہمیشہ کی طرح رشتہ:

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (11.13)$$

ہوگا۔ یہاں بھی میں فرض کرتا ہوں کہ ہدف استمقی تشاکلی ہے؛ زیادہ عمومی صورت میں، رخصتی کروئی موج کا حیظ  $f$  متغیرات  $\phi$  اور  $\theta$  کا تابع ہو سکتا ہے۔

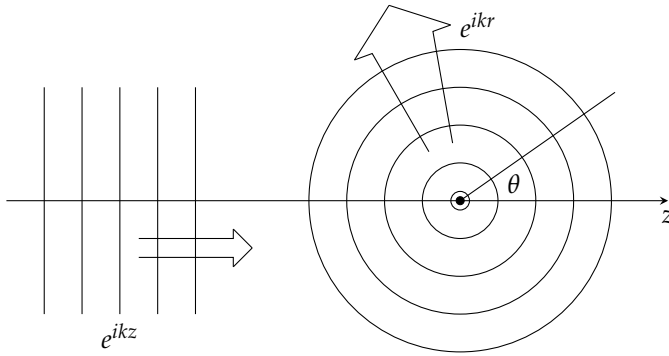
ہمیں حیظ بکھراؤ  $f(\theta)$  کا تعیین کرنا ہوگا؛ یہ رخ  $\theta$  میں بکھراؤ کا احتمال دیتا ہے، لہذا اس کا تعلق تفسیری عمودی تراش سے ہوگا۔ یقیناً، رفتار  $v$  پر چلتے ہوئے آمدی ذرے کا لامتناہی چھوٹے رقبہ  $d\sigma$  میں سے وقت  $dt$

فی الحال، یہاں کوئی خاص کوانٹائی میکانیات نہیں ہے؛ ہم درحقیقت، کلاسیکی ذرات کی بجائے امواج کے بکھراؤ کی بات کر رہے ہیں، اور آپ شکل ۱۱.۳ کو پانی کے امواج کا پتھر کے ساتھ ٹکراؤ تصور کر سکتے ہیں، یا (چونکہ، ہم تین بُندی بکھراؤ میں دلچسپی رکھتے ہیں، لہذا ابستریہ ہوگا کہ انہیں) ایک گیسندے صوتی امواج کا بکھراؤ تصور کریں۔ ایسی صورت میں ہم تفاسل موج کو حقیقی روپ:

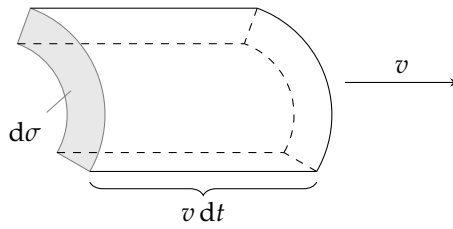
$$A[\cos(kz) + f(\theta) \cos(kr + \delta)/r]$$

میں لکھتے ہیں اور  $\theta$  رخ بکھرتے صوتی موج کے حیظ کو  $f(\theta)$  ظاہر کرتا ہے۔

wave number<sup>۱۰</sup>  
scattering amplitude<sup>۱۱</sup>



شکل ۱۱.۴: امواج کا بکھراؤ؛ آمدی مستوی موج رخصتی کرومی موج پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۱.۵: وقت dt کے دوران رقبہ dσ سے گزرتی ہوئی آمدی شعاع کا حجم  $dV = (d\sigma)(v dt)$  ہے۔

میں گزرنے کا احتمال (شکل ۱۱.۵ دیکھیں)

$$dP = |\psi_{آمدی}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

ہوگا۔ لیکن مطابقتی ٹھوس زاویہ  $d\Omega$  میں اس ذرے کے بکھراؤ کا احتمال:

$$dP = |\psi_{بکھرا}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

بھی یہی ہوگا، لہذا  $d\sigma = |f|^2 d\Omega$  اور درج ذیل ہوگا۔

$$(11.14) \quad D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

ظاہر ہے کہ، تفسیری عمودی تراش (جس میں تجربیت پسند دلچسپی رکھتا ہے) جیٹہ بکھراؤ (جو مساوات شرودنگر کے حل سے حاصل ہوگا) کے مطابق مربع کے برابر ہوگا۔ آنے والے حصوں میں ہم جیٹہ بکھراؤ کے باب کے دو تراکیب: جزوی موج تجزیہ اور بارلے تخمینہ پر غور کریں گے۔

سوال ۱۱.۲: ایک بُعدی اور دو ابعادی بکھراؤ کے لئے مساوات ۱۱.۱۲ کے مماثل تیار کریں۔

## ۱۱.۲ جزوی موج تجزیہ

### ۱۱.۲.۱ اصول و ضوابط

ہم نے باب ۴ میں دیکھا کہ کروئی تشکیلی مخفیہ  $V(r)$  کے لئے مساوات شرودنگر متبل علیحدگی حلوں:

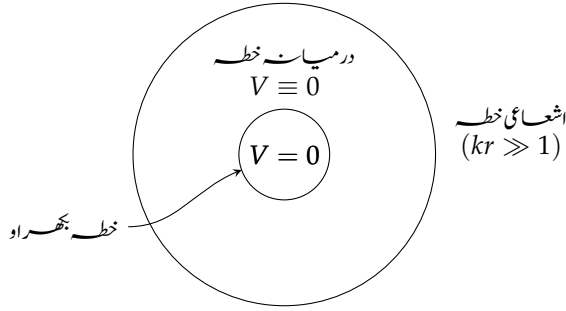
$$(11.15) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

کا حاصل ہوگا، جہاں  $Y_{\ell}^m$  کروئی ہارمونی (مساوات ۴.۳۲) ہے اور  $rR(r)$  مساوات (۴.۳۷):

$$(11.16) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ بہت بڑے  $r$  کی صورت میں مخفیہ صفر کو پہنچتا ہے، اور مرکز گریز حصہ متبل نظر انداز ہوگا، لہذا

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$$



شکل ۱۱.۶: معتمانی مخفیہ سے بکھراؤ، خط بکھراؤ، درمیانہ خط، اور اشعاعی خط۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا عمومی حل

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

ہے؛ پہلا جزو رخصتی کرومی موج کو اور دوسرا جزو آمدی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ ظاہر ہے کہ بکھرے موج کے لئے ہم  $D = 0$  چاہتے ہیں۔ یوں بہت بڑے  $r$  کی صورت میں

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$

ہوگا، جسے ہم گزشتہ حصہ میں (طبیعی بنیادوں پر) اخذ کر چکے (مساوات ۱۱.۱۲)۔

یہ بہت بڑے  $r$  کے لئے تھا (یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ  $kr \gg 1$  کے لئے تھا؛ بصریات میں اسے خط اشعاعی<sup>۱۲</sup> کہیں گے)۔ یک بُعدی نظریہ بکھراؤ کی طرح، ہم یہاں فرض کرتے ہیں کہ مخفیہ "معتمانی" ہے، جس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ کسی مستثنائی بکھراؤ خط کے باہر مخفیہ تفسیر صفر ہوگا (شکل ۱۱.۶)۔ درمیانہ خط میں (جہاں  $V$  کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے لیکن مرکز گریز جزو کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا)،<sup>۱۳</sup> ارداسی مساوات درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(11.14) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = -k^2 u$$

جس کا عمومی حل (مساوات ۴.۴۵) کرومی ہیل تنفعات کا خطی جوڑ:

$$(11.18) \quad u(r) = A r j_\ell(kr) + B r n_\ell(kr)$$

<sup>۱۲</sup> radiation zone

<sup>۱۳</sup> یہاں سے آگے تبصرہ کولمب مخفیہ کے لئے درست نہیں، چونکہ  $r \rightarrow \infty$  کرنے سے  $1/r^2$  کے لحاظ سے  $1/r$  صفر تک زیادہ آہستہ پہنچتا ہے، اور مرکز گریز جزو اس خط میں غالب نہیں ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے کولمب مخفیہ معتمانی نہیں ہے، اور جزوی موج تجزیہ متاثر اطلاق نہیں ہوگا۔



ہوگا۔ لیکن نہ ہی  $j_\ell$  (جو سائن تفاعل کی طرح ہے) اور نہ ہی  $n_\ell$  (جو مستقیم کوسائن کی طرح ہے) رخصتی (یا آمدی) موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں یہاں  $e^{ikr}$  اور  $e^{-ikr}$  کے مائل خطی جوڑ درکار ہوں گے؛ انہیں کروئی **مینکل تفاعلات**<sup>۱۴</sup>:

$$(11.19) \quad h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x); \quad h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

کہتے ہیں۔ جدول ۱۱.۱ میں چند ابتدائی کروئی مینکل تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ بڑے  $r$  کی صورت میں،

$$\text{جدول ۱۱.۱: کروئی مینکل تفاعلات } h_\ell^{(1)}(x) \text{ اور } h_\ell^{(2)}(x)$$

$h_0^{(1)} = -i \frac{e^{ix}}{x}$	$h_0^{(2)} = i \frac{e^{-ix}}{x}$
$h_1^{(1)} = \left( -\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{ix}$	$h_1^{(2)} = \left( \frac{i}{x^2} - \frac{1}{x} \right) e^{-ix}$
$h_2^{(1)} = \left( -\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{ix}$	$h_2^{(2)} = \left( \frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x} \right) e^{-ix}$
$\left. \begin{aligned} h_\ell^{(1)} &\rightarrow \frac{1}{x} (-i)^{\ell+1} e^{ix} \\ h_\ell^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{x} (i)^{\ell+1} e^{-ix} \end{aligned} \right\} x \gg 1$	

$h_\ell^{(1)}(kr)$  (جسے ”مینکل تفاعل کی پہلی قسم“ کہتے ہیں)  $e^{ikr}/r$  کی طرح سے تبدیل ہوتا ہے، جبکہ  $h_\ell^{(2)}(kr)$  (مینکل تفاعل کی دوسری قسم)  $e^{-ikr}/r$  سے تبدیل ہوگا۔ یوں، رخصتی امواج کے لئے ہمیں کروئی مینکل تفاعلات کی پہلی قسم درکار ہوگی۔

$$(11.20) \quad R(r) \sim h_\ell^{(1)}(kr)$$

اس طرح خطہ بکھراؤ کے باہر ( $V(r) = 0$  ہوگا) ٹھیک ٹھیک تفاعل موج درج ذیل ہوگا۔

$$(11.21) \quad \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_\ell^{(1)}(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi) \right\}$$

اس کا پہلا جبزو آمدی مستوی موج ہے، جبکہ مجموعہ  $(C_{\ell, m})$  (جس کے عددی سر  $C_{\ell, m}$  ہیں) موج بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ مخفیہ کروئی تشکلی ہے، لہذا تفاعل موج  $\phi$  کا تابع نہیں ہو سکتا۔<sup>۱۵</sup> یوں صرف وہ اجزاء

<sup>۱۴</sup>spherical Hankel functions

<sup>۱۵</sup>چونکہ آمدی موج  $z$  رخ کا تعین کرتی ہے جو کروئی تشاکل حصار اب کرتی ہے، لہذا تابعیت  $\theta$  کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتی۔ تاہم انتہی تشاکل بر مزار رہتا ہے؛ آمدی مستوی موج میں تابعیت  $\phi$  نہیں پائی جاتی، اور بکھراؤ کے عمل میں ایسی کوئی تابعیت نہیں جو رخصتی موج میں تابعیت  $\phi$  پیدا کرے۔

باقی رہیں گے جن میں  $m = 0$  ہو (یاد رہے،  $Y_\ell^m \sim e^{im\phi}$ )۔ اب مساوات ۱۴.۲ اور مساوات ۴.۳۲ سے درج ذیل ہوگا

$$(11.22) \quad Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta)$$

جہاں  $\ell$  ویں لیٹنڈر کنشیرر کنی کو  $P_\ell$  ظاہر کرتا ہے۔ روایتی طور پر  $a_\ell \equiv i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)}$  لکھ کر عددی سروں کی تعریف نوکی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(11.23) \quad \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_\ell h_\ell^{(1)}(kr) P_\ell(\cos \theta) \right\}$$

آپ کچھ ہی دیر میں دیکھیں گے کہ یہ مخصوص عاقبت کیوں بہتر ہے؛  $a_\ell$  کو  $\ell$  واں جزوی موج جیلہ<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں۔ اب بہت بڑے  $r$  کے لئے میٹکل تفاعل  $e^{ikr}/kr$  ( $-i$ ) <sup>$\ell+1$</sup>  صورت اختیار کرتا ہے (جدول ۱۱.۱)، لہذا

$$(11.24) \quad \psi(r, \theta) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{(ikr)}}{r} \right\}$$

ہوگا، جہاں  $f(\theta)$  درج ذیل ہے۔

$$(11.25) \quad f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

یہ مساوات ۱۱.۱۲ میں میں پیش کی گئی عمومی ساخت کے اصول موضوعہ کی زیادہ پختہ تصدیق کرتا ہے، اور ہمیں جزوی موج جیلوں ( $a_\ell$ ) کی صورت میں جیلہ بکھراؤ،  $f(\theta)$ ، حاصل کرنے کے قابل بناتا ہے۔ تشریفاتی عمودی تراش:

$$(11.26) \quad D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) a_\ell^* a_{\ell'} P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

ہوگا، اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.27) \quad \sigma = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |a_\ell|^2$$

(زاویائی عمل کو حل کرنے کے لئے میں نے لیٹنڈر کنشیرر کنیوں کی عمودیت مساوات ۴.۳۳ استعمال کی۔)

<sup>۱۶</sup> partial wave amplitude

## ۱۱.۲.۲ لائحہ عمل

زیر غور مخفیہ کے لئے حبزوی موج حیطوں،  $a_\ell$ ، کا تعین کرنا باقی ہے۔ اندرونی خطہ (جہاں  $V(r)$  واضح طور پر غیر صفر ہے) میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے اسے بیرونی حل (مساوات ۱۱.۲۳) کے ساتھ، مناسب سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے، ملانے سے ایسا کیا جاسکتا ہے۔ مسئلہ صرف اتنا ہے کہ میں نے دو مختلف محدودی نظام استعمال کیے ہیں: یکھراؤ موج کے لئے  $k$  و محدود جبکہ آمدی موج کے لئے کارتیسی محدود۔ ہمیں تقابلی عمل موج کو ایک جیسی علامتوں میں لکھنا ہوگا۔

یقیناً،  $V = 0$  کے لئے مساوات شرودنگر کو  $e^{ikz}$  مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی، میں دلائل پیش کر چکا ہوں کہ  $V = 0$  کے لئے مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\sum_{\ell, m} [A_{\ell, m} j_\ell(kr) + B_{\ell, m} n_\ell(kr)] Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

یوں بالخصوص،  $e^{ikz}$  کو اس روپ میں لکھنا ممکن ہونا چاہیے۔ لیکن مبدا پر  $e^{ikz}$  مستثنیٰ ہے، لہذا نیومن تقابلیات کی اجازت نہیں ہوگی ( $r = 0$  پر  $n_\ell(kr)$  بے متابوڑ ہوتے ہیں)، اور چونکہ  $z = r \cos \theta$  میں تابعیت  $\phi$  نہیں پائی جاتی، لہذا صرف  $m = 0$  اجزاء واقع ہوں گے۔  $k$  و امواج کی صورت میں مستوی موج کی صریحاً پھیلاؤ کلیہ ریلے<sup>۱۷</sup>:

$$(11.28) \quad e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

دیتی ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے بیرونی خطہ میں تقابلی عمل موج کو صرف  $r$  اور  $\theta$  کی صورت:

$$(11.29) \quad \psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(kr) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(kr)] P_\ell(\cos \theta)$$

میں پیش کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۱.۳: کوٹانائی تختے کرہ بکھراؤ۔ مندرجہ کریں:

$$(11.30) \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

تب، سرحدی شرط

$$(11.31) \quad \psi(a, \theta) = 0$$

ہوگا۔ یوں تمام  $\theta$  کے لئے

$$(11.32) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) [j_\ell(ka) + ika_\ell h_\ell^{(1)}(ka)] P_\ell(\cos \theta) = 0$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے (سوال ۱۱.۳)۔

$$(11.33) \quad a_\ell = i \frac{j_\ell(ka)}{kh_\ell^{(1)}(ka)}$$

بالخصوص کل عمودی تراش

$$(11.34) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left| \frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)} \right|^2$$

ہوگا۔ یہ بالکل ٹھیک جواب ہے، لیکن اس کو دیکھ کر زیادہ معلومات منراہم نہیں ہوتیں، لہذا انہیں کم توانائی بکھراؤ،  $ka \ll 1$ ، کی تحدیدی صورت پر غور کریں۔ چونکہ  $k = 2\pi/\lambda$  ہے، اس سے مراد یہ لیا جاسکتا ہے کہ کرہ کے رداس سے طول موج بہت بڑا ہے۔ جدول ۴.۴ (صفحہ ۱۳۸) سے ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے  $z$  کے لئے  $n_\ell(z)$  کی مقدار  $j_\ell(z)$  سے بہت زیادہ ہوگی، لہذا

$$(11.35) \quad \begin{aligned} \frac{j_\ell(z)}{h_\ell^{(1)}(z)} &= \frac{j_\ell(z)}{j_\ell(z) + in_\ell(z)} \approx -i \frac{j_\ell(z)}{n_\ell(z)} \\ &\approx -i \frac{2^\ell \ell! z^\ell / (2\ell+1)!}{-(2\ell)! z^{-\ell-1} / 2^\ell \ell!} = \frac{i}{2\ell+1} \left[ \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^2 z^{2\ell+1} \end{aligned}$$

اور درج ذیل ہوگا۔

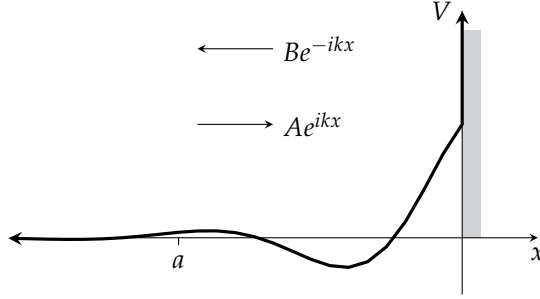
$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell)!} \right]^4 (ka)^{4\ell+2}$$

لیکن ہم  $ka \ll 1$  فرض کر رہے ہیں، لہذا ابلند طاقتیں متاثر انداز ہوں گی؛ کم توانائی تخمین میں  $\ell = 0$  جبزو، بکھراؤ میں غالب ہوگا (یوں کلاسیکی صورت کے طرح، تفسیری عمودی تراش  $\theta$  کی تابع نہیں ہوگی)۔ ظاہر ہے کہ کم توانائی سخت کرہ بکھراؤ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$(11.36) \quad \sigma \approx 4\pi a^2$$

حیرانی کی بات ہے کہ بکھراؤ عمودی تراش کی قیمت ہندسی عمودی تراش کے چار گنا ہے؛ درحقیقت،  $\sigma$  کی قیمت کرہ کا کل سطحی رقبہ ہے۔ لمبی طول موج بکھراؤ کی ایک خاصیت ”بڑی موثر جامت“ ہے (جو بصریات میں بھی درست ہوگا)؛ ایک لحاظ سے، یہ امواج کرہ کو ”چھوتے ہوئے“ اس کے اوپر سے گزرتے ہیں، نہ کہ کلاسیکی ذرات کی طرح جنہیں صرف (سیدھا دیکھتے ہوئے) عمودی تراش نظر آتا ہے۔ □

سوال ۱۱.۳: مساوات ۱۱.۳۲ سے آغاز کرتے ہوئے مساوات ۱۱.۳۳ ثابت کریں۔ اشارہ: لیڈنڈر کشیر رکنیوں کی عمودیت بروئے کار لاتے ہوئے دکھائیں کہ  $\ell$  کی مختلف قیمتوں والے عددی سرعیدہ علیحدہ لازماً صفر ہوں گے۔



شکل ۱۱.۷: معتمی مخفیہ، جس کے دائیں جانب ایک لامستثنیٰ دیوار پائی جاتی ہے، سے ایک بُدی بکھراؤ۔

سوال ۱۱.۴: کروی ڈیلٹا انتفاصل خول:

$$V(r) = \alpha \delta(r - a)$$

سے کم توانائی بکھراؤ کی صورت پر غور کریں، جہاں  $\alpha$  اور  $a$  مستقلات ہیں۔ حیظہ بکھراؤ،  $f(\theta)$ ، تفسریقی عمودی تراش،  $D(\theta)$ ، اور کل عمودی تراش،  $\sigma$ ، کا حساب کریں۔ ان میں  $ka \ll 1$  فرض کریں، لہذا صرف  $\ell = 0$  جزو حنا طر خواہ حصہ ڈالیں گے۔ (چیزوں کو آسان بنانے کی حنا طر، آغاز سے ہی  $\ell \neq 0$  والے تمام اجزاء کو نظر انداز کریں۔) یہاں  $a_0$  کا تعین کرنا اصل مسئلہ ہے۔ اپنے جواب کو بے بُدی مقدار  $2\max/\hbar^2$  کی  $\beta$  کی صورت میں پیش کریں۔

$$\sigma = 4\pi a^2 \beta^2 / (1 + \beta)^2 \quad \text{جواب:}$$

### ۱۱.۳ پیتی انتقال

نصف لکیر  $x < 0$  پر معتمی مخفیہ  $V(x)$  سے ایک بُدی بکھراؤ کے مسئلے پر، پہلے، غور کرتے ہیں (شکل ۱۱.۷)۔ میں  $x = 0$  پر ایسنٹوں کی ایک دیوار کھڑی کرتا ہوں تاکہ بائیں سے آمدی موج

$$\psi_i(x) = A e^{ikx} \quad (x < -a) \quad (11.37)$$

مکمل طور پر منعکس ہوگی۔

$$\psi_r(x) = B e^{-ikx} \quad (x < -a) \quad (11.38)$$

باہم عمل خطے  $(-a < x < 0)$  میں جو کچھ بھی ہو، احتمال کی بقا کی بنا پر، منعکس موج کا حیظہ لازماً آمدی موج کے حیظہ کے برابر ہوگا۔ تاہم ضروری نہیں کہ ان کے حیظے بھی برابر ہوں۔ اگر  $x = 0$  پر دیوار کے سوا کوئی مخفیہ نہیں ہو، تب چونکہ مبدا پر کل

تفاعل موج (آمدی جمع منعکس) صفر ہوگا:

$$(11.39) \quad \psi_0(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0)$$

لہذا  $B = -A$  ہوگا۔ غیر صفر مخفیہ کی صورت میں،  $(x < -a)$  کے لئے تفاعل موج درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(11.40) \quad \psi(x) = A(e^{ikx} - e^{i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0)$$

نظریہ بکھراؤ کی پوری کہانی، کسی مخصوص مخفیہ کے لئے ( $k$ )، لہذا توانائی  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  کی صورت میں، **انتقال**<sup>۱۸</sup>  $\delta$  کے حساب کا دو سرانام ہے۔<sup>۱۹</sup> ہم خط بکھراؤ  $(-a < x < 0)$  میں مساوات شرودنگر کو حل کر کے مناسب سرحدی شرائط عائد کر کے ایسا کرتے ہیں (سوال ۱۱.۵ دیکھیں)۔ (مخلوط حیطہ  $B$  کے بجائے) پستی انتقال کے ساتھ کام کرنے سے طبیعیات عیاں ہوتی ہے (احتمال کے بقا کے بدولت مخفیہ منعکس موج کا صرف پستی منتقل کر سکتا ہے) اور (ایک) مخلوط مقدار جو دو حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے کی بجائے ایک حقیقی مقدار کے ساتھ کام کرتے ہوئے (ریاضی آسان ہوتی ہے)۔

آئیں اب تین بُدی صورت پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ آمدی مستوی موج ( $Ae^{ikz}$ ) کا  $z$  رخ میں کوئی زاویائی معیار حرکت نہیں پایا جاتا (کلیریلے میں  $m \neq 0$  والا کوئی جسم نہ نہیں پایا جاتا)، لیکن اس میں کل زاویائی معیار حرکت ( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ) کی تمام قیمتیں شامل ہیں۔ چونکہ  $\ell$  کی تبدیلی کا تعلق زاویائی معیار حرکت کا بقا کرتا ہے، لہذا ہر ایک **جزوی موج**<sup>۲۰</sup> (جسے کسی ایک مخصوص  $\ell$  سے نام دیا جاتا ہے) انفرادی طور پر بکھرے گی اور اس کے حیطہ<sup>۲۱</sup> میں (اب بھی) کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی؛ تاہم اس کی پستی تبدیل ہوگی۔ مخفیہ نہ ہونے کی صورت میں،  $\psi_0 = Ae^{ikz}$  ہوگا، لہذا  $\ell$  ویں جسمی موج درج ذیل ہوگی (مساوات ۱۱.۲۸)۔

$$(11.41) \quad \psi_0^{(\ell)} = Ai^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

لیکن مساوات ۱۱.۱۹ اور جدول ۱۱.۱ کے تحت

$$(11.42) \quad j_\ell(x) = \frac{1}{2} [h^{(1)}(x) + h^{(2)}(x)] \approx \frac{1}{2x} [(-i)^{\ell+1} e^{ix} + i^{\ell+1} e^{-ix}] \quad (x \gg 1)$$

ہوگا۔ یوں بڑے  $r$  کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.43) \quad \psi_0^{(\ell)} \approx A \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}] P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) = 0)$$

<sup>۱۸</sup> مساوات ۱۱.۴۰ میں  $\delta$  کے آگے روایتی طور پر 2 لکھا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ آمدی موج آتے ہوئے ایک مرتبہ اور جاتے ہوئے ایک مرتبہ پستی منتقل ہوتی ہے؛ ہم ”ایک“ رخ پستی انتقال کو  $\delta$  سے ظاہر کرتے ہیں لہذا اکل 2  $\delta$  ہوگا۔

<sup>۲۰</sup> ”مضمون“ میں اس لئے بھی غلط فہمی پیدا ہوتی ہے کہ ہر دوسری چیز ”حیطہ“ پکارا جاتا ہے:  $f(\theta)$  ”بکھراؤ حیطہ“ ہے،  $a_\ell$  ”جسمی موج حیطہ“ ہے، لیکن اول الذکر  $\theta$  کا تفاعل ہے، اور دونوں مخلوط اعداد ہیں۔ میں اب ”حیطہ“ کو اس کی اصل مفہوم (سائنس موج کی بلندی) میں استعمال کر رہا ہوں۔

چو کور قوسین میں دوسرا جزو آمدی کردی موج کو ظاہر کرتا ہے؛ مخفیہ بکھر اومتعارف کرنے سے یہ جزو تبدیل نہیں ہوگا۔ پہلا جزو رخصتی موج ہے جو پیتی انتتال  $\delta_\ell$

$$(11.33) \quad \psi^{(1)} \approx A \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[ e^{i(kr+2\delta_1)} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] P_\ell(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0)$$

اٹھاتا ہے۔ آپ  $e^{ikz}$  میں  $h_\ell^{(2)}$  جزو کی بنا پر اس کو کروی مرکز موج تصور کر سکتے ہیں، جس میں  $2\delta_\ell$  پیتی انتتال (حاشیہ ۱۹ دیکھیں) پایا جاتا ہے اور جو  $e^{ikz}$  میں  $h_\ell^{(1)}$  حصہ کے ساتھ بکھری موج شامل کر کے رخصتی کردی موج کے طور پر ابھرتی ہے۔

حصہ ۱۱.۲.۱ میں پورے نظریہ کو جزوی تفاعل حیطوں  $a_\ell$  کی صورت میں پیش کیا گیا؛ یہاں اس کو پیتی انتتال  $\delta_\ell$  کی صورت میں پیش کیا جائے گا۔ ان دونوں کے بیچ ضرور کوئی تعلق ہوگا۔ یقیناً مساوات ۱۱.۲۳ کے بڑے  $r$  کی صورت میں) متقارب روپ:

$$(11.35) \quad \psi^{(1)} \approx A \left\{ \frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left[ e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr} \right] + \frac{(2\ell+1)}{r} a_\ell e^{ikr} \right\} P_\ell(\cos \theta)$$

کا  $\delta_\ell$  کی صورت میں عمومی روپ (مساوات ۱۱.۳۴) کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔<sup>۲۲</sup>

$$(11.36) \quad a_\ell = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell)$$

اس طرح بالخصوص (مساوات ۱۱.۲۵)

$$(11.37) \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \theta)$$

اور درج ذیل ہوگا (مساوات ۱۱.۲۷)۔

$$(11.38) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell)$$

اب بھی (جزوی موج حیطوں کی بجائے) پیتی انتتال کے ساتھ کام کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے، چونکہ ان سے طبعی مفہوم یا آسانی سمجھ جاسکتے ہیں، اور ریاضی آسان ہوتی ہے؛ پیتی انتتال، زاویائی معیار حرکت کے بقا کو برائے کار لاتے ہوئے، (دو حقیقی اعداد پر مشتمل) مخلوط مقدار  $a_\ell$  کی تخفیف ایک حقیقی عدد  $\delta_\ell$  میں کرتا ہے۔

<sup>۲۲</sup> اگرچہ میں نے تفاعل موج کا متقارب روپ استعمال کرتے ہوئے  $a_\ell$  اور  $\delta_\ell$  کے بیچ تعلق دریافت کیا، نتائج (مساوات ۱۱.۳۶) میں کوئی تخمین نہیں پایا جاتا۔ دونوں ( $r$  کے غیر تابع) مستقلات ہیں، اور متقارب خط (جہاں مشکل تفاعلات  $e^{\pm ikr}/kr$  روپ اختیار کر چکے ہوں گے) میں  $\delta_\ell$  سے مراد پیتی انتتال ہے۔

سوال ۱۱.۵: ایک ذرہ جس کی کمیت  $m$  اور توانائی  $E$  ہے درج ذیل مخفیہ پربائیس سے آمدی ہے۔

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < -a) \\ -V_0, & (-a \leq x \leq 0) \\ \infty, & (x > 0) \end{cases}$$

۱. آمدی موج  $Ae^{ikx}$  (جہاں  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے) لے کر منعکس موج تلاش کریں۔ جواب:

$$Ae^{-2ika} \left[ \frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx}, \quad k' = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

ب. تصدیق کریں کہ منعکس موج کا جیٹ وہی ہے جو آمدی موج کا ہے۔

ج. بہت گہرے کنویں ( $E \ll V_0$ ) کے لئے یقینی انتقال  $\delta$  (مساوات ۱۱.۴۰) تلاش کریں۔

$$\delta = -ka$$

سوال ۱۱.۶: سخت کرہ بکھراؤ کے لئے جزوی موج پیمائش انتقال ( $\delta_\ell$ ) کیا ہوں گے (مثال ۱۱.۳)؟

سوال ۱۱.۷: ڈیلٹا تفاعل خول (سوال ۱۱.۴) سے  $S$  موج ( $\ell = 0$ ) جزوی موج پیمائش انتقال  $\delta_0(k)$  تلاش کریں۔ فرض کریں کہ  $r \rightarrow \infty$  پر رداسی تفاعل موج  $u(r)$  صفر کو پہنچتا ہے۔ جواب:

$$-\cot^{-1} \left[ \cot(ka) + \frac{ka}{\beta \sin^2(ka)} \right], \quad \beta \equiv \frac{2m\alpha a}{\hbar^2}$$

## ۱۱.۴ بارن تخمین

### ۱۱.۴.۱ مساوات شرودنگر کی تکمیلی روپ

غیر تاج وقت مساوات شرودنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (11.49)$$

کو مختصراً

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \quad (11.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{اور} \quad Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi \quad (11.51)$$



اس کاروپ سرسری طور پر مساواتے ہلم ہولٹز<sup>۲۳</sup> کی طرح ہے؛ البتہ، غیر متجانس جزو (Q) خود  $\psi$  کا تابع ہے۔

فرض کریں ہم ایک تفاعل  $G(r)$  دریافت کر پائیں جو ڈیلتا تفاعل<sup>۲۴</sup> کے لئے مساوات ہلم ہولٹز کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(11.52) \quad (\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r)$$

ایسی صورت میں ہم  $\psi$  کو بطور مکمل:

$$(11.53) \quad \psi(r) = \int G(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم با آسانی دکھا سکتے ہیں کہ یہ مساوات ۱۱.۵۰ کے روپ کی مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi(r) &= \int [(\nabla^2 + k^2)G(r - r_0)]Q(r_0) d^3 r_0 \\ &= \int \delta^3(r - r_0)Q(r_0) d^3 r_0 = Q(r) \end{aligned}$$

تفاعل  $G(r)$  کو مساوات ہلم ہولٹز کا **تفاعل گرین**<sup>۲۴</sup> کہتے ہیں۔ (عمومی طور پر، خطی تفرقی مساوات کا تفاعل گرین ایک ڈیلتا تفاعل<sup>۲۵</sup> کو ”رد عمل“ ظاہر کرتا ہے۔)

ہمارا پہلا کام،  $G(r)$  کے لئے مساوات ۱۱.۵۲ کا حل تلاش کرنا ہے۔<sup>۲۵</sup> آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ ہم فورسیر بدل لیں، جو تفرقی مساوات کو الجبرائی مساوات میں تبدیل کرتا ہے۔ درج ذیل لیں۔

$$(11.54) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{is \cdot r} g(s) d^3 s$$

تب

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{is \cdot r}] g(s) d^3 s$$

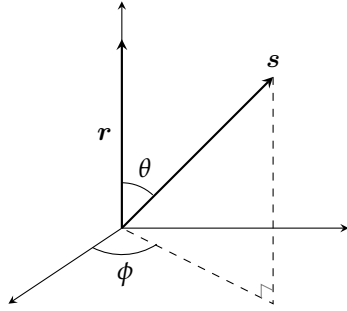
ہوگا۔ لیکن

$$(11.55) \quad \nabla^2 e^{is \cdot r} = -s^2 e^{is \cdot r}$$

<sup>۲۳</sup>Helmholtz equation

<sup>۲۴</sup>Green's function

<sup>۲۵</sup>خبردار کہتا ہوں کہ اگلے دو صفحات میں آپ کا سامنا مشکل ترین تجربے ہوگا، جس میں ارتقائی مکمل شامل ہیں۔ آپ چاہیں تو سیدھا جواب دیکھیں (مساوات ۱۱.۶۵)۔



شکل ۱۱.۸: موزوں محدود برائے مساوات ۱۱.۵۸ کا مکمل۔

اور (مساوات ۲.۱۴۴ دیکھیں)

$$(11.56) \quad \delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} d^3 s$$

ہیں، لہذا مساوات ۱۱.۵۲ درج ذیل کہے گی۔

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-s^2 + k^2) e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} g(s) d^3 s = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} d^3 s$$

یوں درج ذیل ہوگا۔<sup>۲۶</sup>

$$(11.57) \quad g(s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (k^2 - s^2)}$$

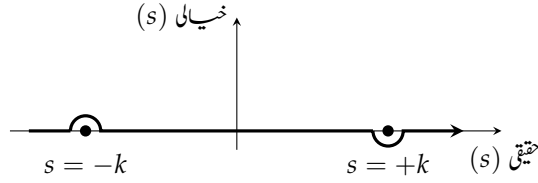
اس کو واپس مساوات ۱۱.۵۴ میں پڑ کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(11.58) \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 - s^2)} d^3 s$$

اب،  $s$  مکمل کے نقطہ نظر سے  $\mathbf{r}$  غیر متغیر ہے، لہذا ہم کر دی محدود  $(s, \theta, \phi)$  کو یوں چن سکتے ہیں کہ  $\mathbf{r}$  قطبی محور پر پایا جاتا ہو (شکل ۱۱.۸)۔ یوں  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = sr \cos \theta$  ہوگا،  $\phi$  کا مکمل  $2\pi$  جبکہ  $\theta$  مکمل

$$(11.59) \quad \int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}$$

<sup>۲۶</sup> صاف ظاہر ہے کہ یہ کافی ہے، البتہ یہ لازم بھی ہے، جیسا آپ ان دونوں اجزاء کا ایک مکمل لکھ کر مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) استعمال کر کے دیکھ سکتے ہیں۔



شکل ۱۱.۹: ارتقاعی مکمل (مساوات ۱۱.۶۱) میں ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا۔

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.۶۰) \quad G(r) = \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds$$

باقی مکمل آسان نہیں ہے۔ قوت نمائی عملیات استعمال کر کے نصب نم کو اجزاء ضربی کے روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔

$$(11.۶۱) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right\}$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2)$$

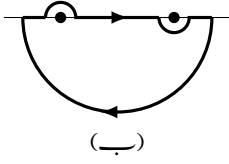
اگر  $z_0$  خط ارتقاع کے اندر پایا جاتا ہو، تب کوشش کلیہ مکمل<sup>۲۷</sup>:

$$(11.۶۲) \quad \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$

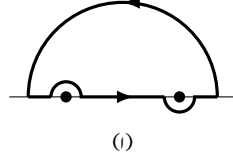
استعمال کرتے ہوئے ان تعلقات کی قیمت تلاش کی جاسکتی ہے، (بصورت دیگر مکمل صفر ہوگا)۔ یہاں حقیقی محور، جو  $\pm k$  پر قطبی نادر نقاط کے بالکل اوپر سے گزرتا ہے، کی ہم راہ مکمل لیا جاتا ہے۔ ہمیں قطبین کے اطراف سے گزرنا ہوگا؛ میں  $-k$  کے اوپر سے  $+k$  کے نیچے سے گزروں گا (شکل ۱۱.۹)۔ آپ کوئی نیا راستہ منتخب کر سکتے ہیں؛ مثلاً، آپ ہر قطب کے گرد سات مرتبہ چکر کاٹ کر راہ منتخب کر سکتے ہیں، جس سے آپ کو مختلف تقاضا عمل گرین حاصل ہوگا، لیکن جیسا میں کچھ ہی دیر میں دکھاؤں گا، یہ تمام متبادل مقبول ہوں گے۔

مساوات ۱۱.۶۱ میں ہر ایک مکمل کے لئے ہمیں اس طرح ”خط استوا کو بند“ کرنا ہوگا کہ لامتناہی پر نصف دائرہ مکمل کی قیمت میں کوئی حصہ نہ ڈالتا ہو۔ مکمل  $I_1$  کی صورت میں، جب  $s$  کا خیالی جزو بہت بڑا اور مثبت ہو تب جبزو ضربی  $e^{isr}$  صفر کو پہنچتا ہے؛ اس مکمل کے لئے ہم دائرہ اوپر سے بند کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-الف)۔ خط ارتقاع

<sup>۲۷</sup>Cauchy's integral formula



(ب)



(i)

شکل ۱۱.۱۰: مساوات ۱۱.۶۳ اور مساوات ۱۱.۶۴ کے خط ارتقاع کو بند کرنا دکھایا گیا ہے۔

صرف  $s = +k$  پر تادر نقطہ کو گھیرتا ہے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.63) \quad I_1 = \oint \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[ \frac{se^{isr}}{s+k} \right] \Big|_{s=k} = i\pi e^{ikr}$$

تکمل  $I_2$  کی صورت میں، جب  $s$  کا خیالی جزو بہت بڑا اور منفی ہو تب جزو ضربی  $e^{-isr}$  صفر کو پہنچتا ہے لہذا ہم دائرے کو نیچے سے بند کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب)۔ اس مرتبہ خط ارتقاع  $s = -k$  پر تادر نقطہ جو کو گھیرتا ہے (اور یہ گھڑی وار ہے، جس سے اضافی منفی علامت حاصل ہوگی)۔

$$(11.64) \quad I_2 = - \oint \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[ \frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \Big|_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}$$

ماخوذ:

$$(11.65) \quad G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[ \left( i\pi e^{ikr} \right) - \left( -i\pi e^{ikr} \right) \right] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

یہ مساوات ۱۱.۵۲ کا حل؛ مساوات ہولٹز کا قف عمل گرین ہے۔ (اگر آپ ریاضیاتی تجزیہ میں کہیں پھنس گئے ہوں، بلا واسطہ تفرق سے نتیجے کی تصدیق کریں؛ سوال ۱۱.۸ دیکھیں۔) بلکہ، یہ مساوات ہولٹز کا قف عمل گرین ہے، چونکہ ہم  $G(r)$  کے ساتھ ایسا کوئی بھی قف عمل  $G_0(r)$  جمع کر سکتے ہیں جو متبائن ہولٹز مساوات کو مطمئن کرتا ہو:

$$(11.66) \quad (\nabla^2 + k^2)G_0(r) = 0$$

صاف ظاہر ہے کہ مساوات ۱۱.۵۲ کو  $(G + G_0)$  بھی مطمئن کرتا ہے۔ اس ایہام کی وجہ، قطبین کے متعرب سے گزرتے ہوئے، راہ کے انتخاب میں ایہام کی بنا پر ہے؛ ایک نئی راہ منتخب کرنا، ایک نئے قف عمل  $G_0(r)$  کے انتخاب کے مترادف ہے۔

مساوات ۱۱.۵۳ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں؛ مساوات شرودنگر کا عمومی حل درج ذیل روپ کا ہوگا

$$(11.67) \quad \psi(r) = \psi_0(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

جہاں  $\psi_0$  آزاد ذروی مساوات شرودنگر کو مطمئن:

$$(11.68) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$$

کرتا ہے۔ مساوات ۱۱.۶۷ مساواتے شرودنگر کا مکمل روپ<sup>۲۸</sup> ہے، جو زیادہ معروف تفرقی روپ کے مکمل طور پر معادل ہے۔ پہلی نظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ (کسی بھی مخفیہ کے لئے) یہ مساوات شرودنگر کا صریح حل ہے؛ جو ماننے والی بات نہیں ہے۔ دھوکا مست ہوں: دائیں ہاتھ مکمل کی علامت کے اندر  $\psi$  پایا جاتا ہے، لہذا حل جانے بغیر آپ مکمل حل نہیں کر سکتے۔ تاہم، مکملی روپ انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے، اور جیسا ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے، یہ بالخصوص بکسر اور مسائل کے لئے نہایت موزوں ہے۔

سوال ۱۱.۸: مساوات ۱۱.۶۵ کو مساوات ۱۱.۵۲ میں پُر کر کے دیکھیں کہ یہ اسے مطمئن کرتا ہے۔ اشارہ:  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$

سوال ۱۱.۹: دکھائیں کہ  $V$  اور  $E$  کی مناسب قیمتوں کے لئے، مساوات شرودنگر کے مکملی روپ کو ہائیڈروجن کا زمینی حال (مساوات ۴.۸۰) مطمئن کرتا ہے (یاد رہے کہ  $E$  منفی ہے، لہذا  $i\kappa = k$  ہوگا، جہاں  $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$  ہے)۔

## ۱۱.۴.۲ بارن تخمین اول

فرض کریں  $r_0 = 0$  پر  $V(r_0)$  مقامی مخفیہ ہے (یعنی، کسی متناہی خطے کے باہر مخفیہ کی قیمت صفر ہوگی، جو مسئلہ بکسر اور میں عموماً ہوگا)، اور ہم مرکز بکسر اور سے دور نقطہ پر  $\psi(r)$  جاننا چاہتے ہیں۔ یوں مساوات ۱۱.۶۷ مکمل میں حصہ ڈالنے والے تمام نقاط کے لئے  $|r| \gg |r_0|$  ہوگا، لہذا

$$(11.69) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 \cong r^2 \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2}\right)$$

اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.70) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \cong r^2 - \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}_0$$

ہم

$$(11.71) \quad k \equiv ka_r$$

لیتے ہیں، یوں

$$(11.72) \quad e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \cong e^{ikr} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(11.43) \quad \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$$

(نصب نما میں ہم زیادہ بڑی تخمین،  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \cong r$ ، کر سکتے ہیں؛ قوت نما میں ہمیں اگلا جزو رکھنا ہوگا۔ اگر آپ کو یقین نہیں، نصب نما کے پھیلاؤ میں اگلا جزو لکھنے کی کوشش کریں۔ ہم یہاں ایک چھوٹی مقدار  $(r_0/r)$  کی طاقت میں پھیلا کر، سب سے کم رتبی جزو کے علاوہ تمام کو رد کرتے ہیں۔)

بکسراؤ کی صورت میں، ہم

$$(11.44) \quad \psi_0(\mathbf{r}) = Ae^{ikz}$$

چاہتے ہیں جو آمدی مستوی موج کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں، بڑے  $r$  کے لئے

$$(11.45) \quad \psi(\mathbf{r}) \cong Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) d^3 r_0$$

ہوگا۔ یہ معیاری روپ (مساوات ۱۱.۱۲) ہے، جس سے ہم جیٹہ بکسراؤ (درج ذیل) پڑھ سکتے ہیں۔

$$(11.46) \quad f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) d^3 r_0$$

یہاں تک، یہ ٹھیک ٹھیک ہے۔ ہم اب **بارن تخمین**<sup>۲۹</sup> بروئے کار لاتے ہیں: فرض کریں آمدی مستوی موج کو مخفیہ متابل ذکر تبدیل نہیں کرتا ہو؛ ایسی صورت میں

$$(11.47) \quad \psi(\mathbf{r}_0) \approx \psi_0(\mathbf{r}_0) = Ae^{ikz_0} = Ae^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_0}$$

استعمال کرنا معقول ہوگا، جہاں عمل کے اندر  $\mathbf{k}'$  درج ذیل ہے۔

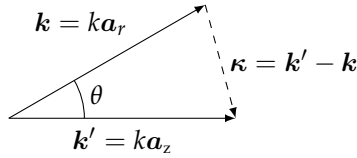
$$(11.48) \quad \mathbf{k}' \equiv k\mathbf{a}_z$$

(مخفیہ  $V$  صفر ہونے کی صورت میں، یہ بالکل ٹھیک ٹھیک تفاعل موج ہوگا؛ یہ درحقیقت کمزور مخفیہ تخمین ہے۔<sup>۳۰</sup> یوں، بارن تخمین میں

$$(11.49) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0) d^3 r_0$$

Born approximation<sup>۲۹</sup>

معمومی طور پر، جزوی موج تجزیہ کم توانائی کے آمدی ذرہ کے لئے مددگار ثابت ہوتا ہے، چونکہ ایسی صورت میں تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء معنی خیز حصہ ڈالتے ہیں؛ جہاں آمدی توانائی کے لحاظ سے مخفیہ کمزور ہو، اور یوں موج کا چھکاو کم ہو، وہاں بارن تخمین کا آمد ہوگی۔



شکل ۱۱.۱۱: بارن تخمین میں دو تف عمل موج:  $k'$  آمدی رخ جبکہ  $k$  بکھراؤ رخ ہے۔

ہوگا۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ  $k'$  اور  $k$  کی تعریفات بھول چکے ہوں؛ دونوں کی مقدار  $k$  ہے، لیکن اول الذکر کا رخ آمدی شعاع کے رخ، جبکہ موخر الذکر کا رخ کاشف کی طرف ہے؛ شکل ۱۱.۱۱ دیکھیں؛ اس عمل میں انتقال معیار حرکت  $\hbar(k - k')$  ظاہر کرتا ہے۔)

بالخصوص، خط بکھراؤ پر کم توانائی (لب طویل موج) بکھراؤ  $^{۳۲}$  کے لئے قوت نئی جزو ضربی بنیادی طور پر مستقل ہوگا، اور یوں تخمین بارن درج ذیل سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(11.۸۰) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(r) d^3 r, \quad \text{کم توانائی}$$

(میں نے یہاں  $r$  کے زیر نوشت میں کچھ نہیں لکھا، امید کی جاتی ہے کہ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوگی۔)

مثال ۱۱.۴: کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ  $^{۳۳}$  درج ذیل مخفیہ لیں۔  $^{۳۴}$

$$(11.۸۱) \quad V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

کم توانائی بکھراؤ کی صورت میں ( $\theta$  اور  $\phi$  کا غیر تابع) خط بکھراؤ

$$(11.۸۲) \quad f(\theta, \phi) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_0 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

ہے، تفریقی عمودی تراش

$$(11.۸۳) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \cong \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

momentum transfer  $^{۳۱}$

low energy scattering  $^{۳۲}$

low-energy soft-sphere scattering  $^{۳۳}$

$^{۳۴}$  آپ سخت کرہ بکھراؤ ( $V_0 = \infty$ ) پر بارن تخمین کا اطلاق نہیں کر سکتے، چونکہ عمل بے فتاویٰ بڑھتا ہے۔ آپ کو یاد رکھنا ہوگا کہ ہم مخفیہ کو کم زور تصور کرتے ہیں، جو خط بکھراؤ میں تف عمل موج کو تبدیل نہیں کرتا۔ تاہم سخت کرہ اس کو  $Ae^{ikz}$  سے صفر کرتا ہے، جو بہت بڑی تبدیل ہے۔

اور کل عمودی تراش درج ذیل ہوگا۔

$$(11.83) \quad \sigma \cong 4\pi \left( \frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

□

کروں تشاکل مخفیہ  $V(r) = V(r)^{۳۵}$  کے لئے، جو ضروری نہیں کہ کم توانائی ہو، تخمینہ بارن سادہ روپ اختیار کرتا ہے۔ درج ذیل متعارف کرتے ہوئے

$$(11.85) \quad \kappa \equiv k' - k$$

$r_0$  تکمل کے قطبی محور کو  $\kappa$  پر رکھتے ہوئے

$$(11.86) \quad (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

ہوگا۔ یوں

$$(11.87) \quad f(\theta) \cong -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

ہوگا۔ متغیر  $\phi_0$  کے لحاظ سے تکمل  $2\pi$  دیگا، اور  $\theta_0$  تکمل کو ہم پہلے دیکھ چکے ہیں (مساوات ۱۱.۵۹، دیکھیں)۔ یوں  $r$  کے زیر نوشت کوٹ لکھتے ہوئے درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$(11.88) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad (\text{کروی تشاکل})$$

$f$  کی زاویائی تابعت  $\kappa$  میں سمونی گئی ہے؛ شکل ۱۱.۱۱ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.89) \quad \kappa = 2k \sin(\theta/2)$$

مثال ۱۱.۵: یوکاوا بکھراؤ۔<sup>۳۶</sup> یوکاوا مخفیہ <sup>۳۷</sup> (جو جوہری مرکزہ کے اندر بندشی قوت کا ایک سادہ نمونہ پیش کرتا ہے) کاروپ درج ذیل ہے، جہاں  $\beta$  اور  $\mu$  مستقلات ہیں۔

$$(11.90) \quad V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

تخمینہ بارن درج ذیل دیگا۔

$$(11.91) \quad f(\theta) \cong -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 + \kappa^2)}$$

spherical symmetrical potential<sup>۳۵</sup>

Yukawa scattering<sup>۳۶</sup>

Yukawa potential<sup>۳۷</sup>



□ (آپ کو سوال ۱۱.۱۱ میں یہ مکمل حل کرنے کو کہا گیا ہے۔)

مثال ۱۱.۶: ردرفورڈ بکھراؤ۔<sup>۳۸</sup> مخفیہ یوکادامیں  $\beta = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$  اور  $\mu = 0$  پر کرنے سے مخفیہ کولمب حاصل ہوتا ہے، جو دو نقطی بار کے برقی باہم عمل کو بیان کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ حیطہ بکھراؤ

$$(11.92) \quad f(\theta) \cong -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2}$$

ہو گیا (مساوات ۱۱.۸۹ اور مساوات ۱۱.۵۱ استعمال کرتے ہوئے)

$$(11.93) \quad f(\theta) \cong -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)}$$

ہوگا۔ اس کا مربع ہمیں تفسیریاتی عمودی تراش

$$(11.94) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

دیکھا، جو ٹھیک کلیہ ردرفورڈ (مساوات ۱۱.۱۱) ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کولمب مخفیہ کے لئے کلاسیکی میکانیات، تخمین بارن، اور کوانٹائی نظریہ میدان ایک جیسا نتیجہ دیتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کلیہ ردرفورڈ نہایت ”مضبوط“ کلیہ ہے۔ □

سوال ۱۱.۱۰: اختیاری توانائی کے لئے، بارن تخمین میں، نرم کرہ بکھراؤ کا حیطہ بکھراؤ حاصل کریں۔ دکھائیں کہ کم توانائی حد میں اس کی تخفیف مساوات ۱۱.۸۲ میں ہوگی۔

سوال ۱۱.۱۱: مساوات ۱۱.۹۱ میں مکمل کی قیمت تلاش کر کے، دائیں ہاتھ کے ریاضی فترے کی تصدیق کریں۔

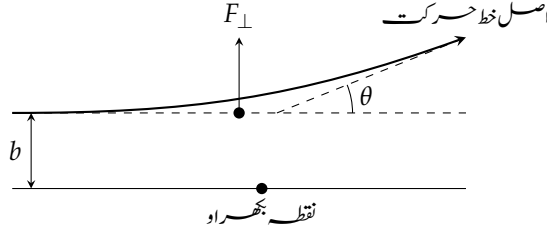
سوال ۱۱.۱۲: بارن تخمین میں، یوکادامخفیہ سے بکھراؤ کا کل عمودی تراش تلاش کریں۔ اپنے جواب کو  $E$  کا تفسیر لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۳: درج ذیل اقدام سوال ۱۱.۴ کے مخفیہ کے لئے کریں۔

ا. کم توانائی تخمین بارن میں  $f(\theta)$ ،  $D(\theta)$ ، اور  $\sigma$  کا حساب لگائیں۔

ب. تخمین بارن میں اختیاری توانائیوں کے لئے  $f(\theta)$  کا حساب لگائیں۔

ج. دکھائیں کہ آپ کے نتائج مناسب طریق میں سوال ۱۱.۴ کے جواب کے مطابق ہیں۔



شکل ۱۱.۱۲: ذرہ کے منتقل معیار حرکت کا حساب کرتے ہوئے، تخمین ضرب کی ترکیب میں مندرجہ ذیل کیا جاتا ہے کہ ذرہ بغیر مڑے سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے۔

### ۱۱.۴.۳ تسلسل بارن

تخمین بارن روح کے لحاظ سے کلاسیکی نظریہ بکھراؤ میں **تخمین ضرب** کی طرح ہے۔ ایک ذرہ کو منتقل عارضی ضرب کا حساب کرنے کے لئے ہم تخمین ضرب میں مندرجہ ذیل ہیں کہ ذرہ سیدھی لکیر پر حرکت کیے جاتا ہے (شکل ۱۱.۱۲)۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(11.95) \quad I = \int F_{\perp} dt \quad (\text{عارضی ضرب})$$

اگر ذرہ زیادہ نہیں مڑے، تب ذرہ کو منتقل معیار حرکت کی یہ ایک اچھی تخمین ہوگی، اور یوں زاویہ بکھراؤ درج ذیل ہوگا، جہاں  $p$  آمدی معیار حرکت ہے۔

$$(11.96) \quad \theta \cong \tan^{-1}(I/p)$$

اسے ہم ”رتبہ اول“ تخمین ضرب کہہ سکتے ہیں (ابتدائی، نہ مڑنے کی، صورت کو مندرجہ ذیل کہیں گے)۔ اسی طرح، مندرجہ ذیل تخمین بارن میں آمدی مستوی موج بغیر تبدیلی کے گزرے گی، اور ہم نے جو کچھ گزشتہ حصہ میں دیکھا درحقیقت اس کی اول رتبہ تصحیح ہے۔ اسی تصور کو بار بار استعمال کر کے زیادہ بلند رتبہ تصحیح کا تسلسل پیدا کیا جاسکتا ہے، اور توقع کی جاسکتی ہے کہ یہ بالکل ٹھیک جواب پر سرکوز ہوگا۔

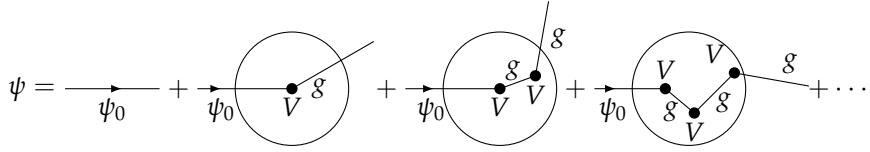
مساوات شروڈنگر کا تکلی روپ

$$(11.97) \quad \psi(r) = \psi_0(r) + \int g(r - r_0) V(r_0) \psi(r_0) d^3 r_0$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں  $\psi_0$  آمدی موج ہے،

$$(11.98) \quad g(r) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

impulse approximation<sup>۴۹</sup>



شکل ۱۱.۱۳: بارن تسلسل (مساوات ۱۱.۱۰۱) کی نظیری مفہوم۔

تفاعل گرین (جس میں میں نے اپنی آسانی کے لئے حبزو ضربی  $2m/\hbar^2$  شامل کیا ہے)، اور  $V$  مخفیہ بکھراوہ۔ درج ذیل (سادہ روپ) لکھا جاسکتا ہے۔

(۱۱.۹۹)

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

معرض کریں ہم  $\psi$  کی اس ریاضی جملے کو لیکر اکمل کی علامت کے اندر لکھیں۔

(۱۱.۱۰۰)

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi$$

اس عمل کو بار بار دہرانے سے ہمیں  $\psi$  کا تسلسل:

$$(۱۱.۱۰۱) \quad \psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots$$

حاصل ہوگا۔ ہر مشکل میں صرف آمدی تفاعل عمل موج  $\psi_0$ ، اور اس کے علاوہ  $gV$  کے مزید زیادہ طاقتیں پائی جاتی ہیں۔ بارن کی تخمین اول اس تسلسل کو دوسرے حبزو کے بعد ختم کرتی ہے، لیکن آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلند رتبہ تصحیح کس طرح پیدا کی جاتی ہیں گی۔

بارن تسلسل کا خاکہ شکل ۱۱.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ صفر رتبہ  $\psi$  پر مخفیہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا؛ اول رتبہ میں اسے ایک ”چوٹ“ پڑتی ہے، جس کے بعد یہ کسی نئے رخ چلتا ہے؛ دوم رتبہ میں اسے ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئے مقام کو پہنچتا ہے جہاں اسے دوبارہ ایک چوٹ پڑتی ہے جس کے بعد یہ ایک نئی راہ پر چل نکلتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ اسی بنا پر بعض اوقات تفاعل عمل گرین کو اشاعت کار<sup>۴۰</sup> کہا جاتا ہے؛ جو ایک باہم عمل سے دوسرے باہم عمل تک خلل کی اشاعت کے بارے میں بتاتا ہے۔ تسلسل بارن اضافیتی کوانٹائی میکانیات کی فائنہ منہ تشریح کا سبب بن جس میں اشکال<sup>۴۱</sup> فائنہ منہ<sup>۴۲</sup> میں حبزو ضربی را اس  $V$  اور اشاعت کار<sup>۴۳</sup> کو ایک ساتھ جوڑ کر سب کچھ بیان کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴: تخمین ضرب میں ردورڈ بکھراو کے لئے  $\theta$  (بطور ٹکراؤ مقدار معلوم کا تفاعل) تلاش کریں۔ دکھائیں کہ، مناسب حدود کے اندر، آپ کا نتیجہ بالکل ٹھیک ریاضی فترے (سوال ۱۱.۱-الف) کے مطابق ہے۔

<sup>۴۰</sup> propagator  
<sup>۴۱</sup> Feynman's formulation  
<sup>۴۲</sup> Feynman diagram

سوال ۱۱.۱۵: بارن کی دوسری تخمین میں کم توانائی نرم کرہ بکھراؤ کے لئے جیٹ بکھراؤ تلاش کریں۔

$$\text{جواب: } -(2mV_0a^3/3\hbar^2)[1 - (4mV_0a^2/5\hbar^2)]$$

### اضافی سوالات برائے باب ۱۱

سوال ۱۱.۱۶: ایک بُدی مساوات شرودنگر کے لئے تفاعل گرین تلاش کر کے (مساوات ۱۱.۶ کا مش) عملی روپ تیار کریں۔ جواب:

$$(11.102) \quad \psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

سوال ۱۱.۱۷: ایک بُدی بکھراؤ کے لئے سوال ۱۱.۱۶ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے (مبداء پر بغیر "اینٹوں کی دیوار" کی صورت میں وقفہ  $-\infty < x < \infty$  پر) تخمین بارن تیار کریں۔ یعنی  $\psi_0(x) = Ae^{ikx}$  منتخب کر کے، اور  $\psi(x_0) \cong \psi_0(x_0)$  تصور کرتے ہوئے، عمل کی قیمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ انعکاسی عددی سر درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(11.103) \quad R \cong \left( \frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

سوال ۱۱.۱۸: ایک ڈیلٹا تفاعل (مساوات ۲.۱۱۳) اور ایک مستطی چوکور کنواں (مساوات ۲.۱۳۵) سے بکھراؤ کے لئے ترسیلی عددی سر  $(T = 1 - R)$  کو یک بُدی تخمین بارن (سوال ۱۱.۱۷) سے حاصل کریں۔ اپنے جوابات کا موازنہ ٹھیک جوابات (مساوات ۲.۱۳۱ اور مساوات ۲.۱۶۹) کے ساتھ کریں۔

سوال ۱۱.۱۹: آگے رخ جیٹ بکھراؤ کے خیالی حبز اور کل عمودی تراش کے پیچ رشتہ پیش کرنے والا مسئلہ بصریات<sup>۴۳</sup>

$$(11.104) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

ثابت کریں۔ اشارہ: مساوات ۱۱.۴ اور مساوات ۱۱.۴۸ استعمال کریں۔

## باب ۱۲

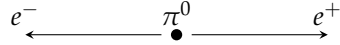
# پس نوشت

میں توقع کرتا ہوں کہ آپ کوانٹائی میکانیات کو اب سمجھتے ہوں گے لہذا حصہ ۱.۲ میں کیا گیا سوال دوبارہ اٹھاتے ہیں: کوانٹائی میکانیات کے نتائج سے کیا مطلب اخذ کرنا چاہیے؟ تفاعل موج کے ساتھ وابستہ شماراتی مفہوم کی عدم تعینیت، مسئلے کی جڑ ہے۔ تفاعل  $\Psi$  (یا کوانٹائی حال کہنا زیادہ بہتر ہوگا؛ جو مثال کے طور پر، چکر کار ہو سکتا ہے) پیمائش کا نتیجہ ایک طور پر تعین نہیں کرتا؛ بلکہ ممکنہ نتائج کی شماراتی تقسیم مہیا کرتا ہے۔ اس سے ایک اہم سوال کھڑا ہوتا ہے: کیا پیمائش سے قبل نظام یہ مخصوص حاصیت ”حقیقتاً رکھتا تھا“ (جسے حقیقتے پسند نقطہ نظر کہتے ہیں) یا پیمائش کے عمل نے اس حاصیت کو ”جنم“ دیا، جو تفاعل موج کی شماراتی پابندی کو مطمئن کرتا ہے (تقلید پسند نقطہ نظر)؛ یا ہم اس سوال کو ان بنیادوں پر رد کرتے ہیں کہ یہ ایک مندرجہ ذیل سوال ہے (انکارے نقطہ نظر)؟

حقیقت پسند کے نقطہ نظر سے کوانٹائی میکانیات نامکمل نظریہ ہے، چونکہ کوانٹائی میکانیات کی تمام مندرجہ ذیل معلومات (یعنی اس کا تفاعل موج) جاننے کے باوجود آپ اس کے خواص تعین نہیں کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے، کوانٹائی میکانیات کے دائرہ کار سے باہر، مزید معلومات ہوگی جو ( $\Psi$  کے ساتھ مل کر) طبعی حقائق مکمل طور پر بیان کرے گی۔

تقلید پسند نقطہ نظر اس سے بھی زیادہ سنگین سوالات کھڑے کرتا ہے، چونکہ اگر پیمائشی عمل نظام کو ایک ایسی حاصیت اختیار کرنے پر مجبور کرتا ہو جو اس میں پہلے نہیں پائی جاتی تھی، تب پیمائش ایک عجیب عمل ہوگا۔ ساتھ ہی یہ جاننے ہوئے کہ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش وہی نتیجہ دیتی ہے، ہمیں ماننا ہوگا کہ پیمائشی عمل تفاعل موج کو یوں مہدمم کرتا ہے، جو مساوات شرودنگر کی تجویز کردہ ارتقاع کے برعکس ہے۔

میں یہاں کہنا چاہتا ہوں کہ، مثلاً، اگر ایک الیکٹران چپکری حال  $\left(\frac{1}{0}\right)$  میں ہو؛ اس کے زاویائی معیار حرکت کے  $x$  حدود کی پیمائش  $\hbar/2$  یا (برابر احتمال کے ساتھ)  $-\hbar/2$  دے سکتی ہے، تاہم پیمائش سے قبل  $S_x$  کی پوری طرح معین قیمت نہیں ہوگی۔  
collapses<sup>2</sup>

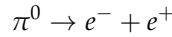


شکل ۱۲.۱: آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد کا بوجھ انداز۔ ساکن  $\pi^0$  کا تنزل الیکٹران اور ضد الیکٹران جوڑی میں ہوتا ہے۔

اس کی روشنی میں، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نسل در نسل ماہر طبیعیات انکاری سوچ کے پیچھے پناہ لینے پر کیوں مجبور ہوئے، اور اپنے شاگردوں کو نصیحت کرتے رہے کہ نظریے کی تصوراتی بنیادوں پر غور و فکر کر کے اپنا وقت ضائع نہ کریں۔

## ۱۲.۱ آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد

۱۹۳۵ء میں آئنسٹائن، پوڈولسکی اور وروزن نے مل کر آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد پیش کیا، جس کا مقصد (حالتاً نظریاتی بنیادوں پر) یہ ثابت کرنا تھا کہ صرف حقیقت پسند نقطہ نظر درست ہو سکتا ہے۔ میں آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد کا ایک سادہ روپ، جو داؤد بوجھ نے متعارف کیا، پر تبصرہ کرتا ہوں۔ تعدیلی پائے میزواں کی ایک الیکٹران اور ایک پروٹان میں تنزل:



پر غور کریں۔ ساکن پائون کی صورت میں الیکٹران اور پروٹان ایک دوسرے کے مخالف رخ جائیں گے (شکل ۱۲.۱)۔ پائون کا چکر صفر ہے، لہذا ازایائی معیار حرکت کے بقا کے تحت یہ الیکٹران اور ضد الیکٹران ایک متفکیر:

$$(12.1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + -\downarrow\uparrow)$$

میں ہوں گے۔ اگر الیکٹران ہم میدان میں پایا جائے، تو ضد الیکٹران لازماً خلاف میدان ہوگا، اور اسی طرح اگر الیکٹران خلاف میدان پایا جائے تو ضد الیکٹران ہم میدان ہوگا۔ کوانٹائی میکانیات آپ کو یہ بتانے سے متاثر ہے کہ کسی ایک پائون تجویل میں آپ کو کونسی جوڑی ملے گا، لیکن کوانٹائی میکانیات یہ ضرور بتا سکتی ہے کہ ان پیمائش کا ایک دوسرے کے ساتھ باہمیہ رشتہ ہوگا، اور (اوسطاً) نصف وقت ایک قسم اور نصف وقت دوسری قسم کی جوڑیاں پیدا ہوں گے۔ اب فرض کریں، ہم ان الیکٹران اور ضد الیکٹران کو دور جانے دیں؛ عملی تجربے میں دس میٹر دور، یا، اصولی تجربہ میں دس نوری سال دور؛ اور اس کے بعد الیکٹران کے چکر کی پیمائش کریں۔ فرض کریں آپ کو ہم میدان ملتا ہے۔ آپ فوراً حبان پائیں گے کہ بیس میٹر (یا بیس نوری سال) دور دوسرے شخص کو ضد الیکٹران خلاف میدان ملے گا، اگر وہ اس ضد الیکٹران پر پیمائش کرے۔

”حقیقت پسند“ نقطہ نظر سے اس میں کوئی حیرانی کی بات نہیں؛ پیمائش کے وقت سے ہی الیکٹران حقیقتاً ہم میدان اور ضد الیکٹران خلاف میدان تھے؛ ہاں کوانٹائی میکانیات اس بارے میں جاننے سے متاثر تھی۔

تاہم، ”تقلید پسند“ نقطہ نظر کے تحت پیمائش سے قبل دونوں ذرات نہ ہم میدان اور نہ ہی خلاف میدان تھے؛ الیکٹران پر پیمائش تفاعل موج کو منہدم کرتی ہے جو بیس میٹر (یا بیس نوری سال) دور ضد الیکٹران کو فوراً خلاف میدان ”بناتی“ ہے۔ آئنسٹائن، پوڈولسکی اور روزن اس قسم کے فاصلاتی عمل کرنے والے عوامل میں یقین نہیں رکھتے تھے۔ انہوں نے تقلید پسند نقطہ نظر کو ناقابل قبول مقرر دیا؛ چاہے کوانٹائی میکانیات جانتی ہو یا نہ جانتی ہو، الیکٹران اور ضد الیکٹران لازماً پوری طرح معین چکر کے حامل تھے۔

ان کی دلیل اس بنیادی مفروضہ پر کھڑی ہے کہ کوئی بھی اثر روشنی کی رفتار سے تیز سفر نہیں کر سکتا۔ ہم اسے اصول مقامیت<sup>۱</sup> کہتے ہیں۔ آپ کو شبہ ہو سکتا ہے کہ تفاعل موج کے انہدام کی خبر کسی مستناہی سمتی رفتار سے ”سفر“ کرتی ہے۔ تاہم ایسی صورت میں زاویائی معیار حرکت کی بقا مطمئن نہیں ہوگی، چونکہ ضد الیکٹران تک انہدام کی خبر پہنچنے سے پہلے اگر اس کے چکر کی پیمائش کی جائے تو دونوں ذرات ہم میدان پائے جانے کا احتمال پچاس پچاس فی صد ہوگا۔ آپ نظریے کے بارے میں جو بھی رائے رکھتے ہوں، تجربات سے ہمیں معلوم ہوا کہ دونوں کے چکر ہر صورت ایک دوسرے کے مخالف ہوتے ہیں؛ زاویائی معیار حرکت کی بقا ہر صورت برقرار رہتی ہے؛ ان چکر کا (خلاف) باہمی رشتہ ہر صورت برقرار رہتا ہے۔ ظاہر ہے تفاعل موج کا انہدام ایک دم ہوتا ہے۔

سوال ۱۲.۱: ہمبستہ حالات<sup>۲</sup>، ایکٹا چکر تفکیک (مساوات ۱۲.۱) ہمبستہ حال کی ایک کلاسیکی مثال ہے؛ اس دو ذروی حال کو دو یک ذروی حالات کا مجموعہ نہیں لکھا جاسکتا ہے، لہذا اس کے بارے میں بات کرتے ہوئے، کسی ایک ذرے کے ”حال“ کی بات علیحدہ سے نہیں کی جاسکتی ہے۔ آپ گمان کر سکتے ہیں کہ شاید ہماری علاقیت کی بنا پر ایسا ہے، اور عین ممکن ہے کہ یک ذروی حالات کا کوئی خطی جوڑ اس نظام کو غیر ہمبستہ بن سکے۔ درج ذیل مسئلہ کا ثبوت پیش کریں۔

دو سطحی نظام  $|\phi_a\rangle$  اور  $|\phi_b\rangle$  پر غور کریں، جہاں  $\delta_{ij} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$  ہو۔ مثلاً  $|\phi_a\rangle$  ہم میدان اور  $|\phi_b\rangle$  خلاف میدان کو ظاہر کر سکتا ہے۔ دو ذروی حال

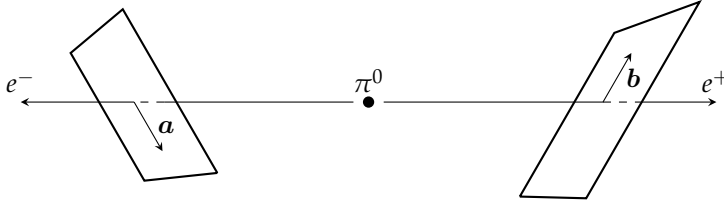
$$\alpha |\phi_a(1)\rangle |\phi_b(2)\rangle + \beta |\phi_b(1)\rangle |\phi_a(2)\rangle$$

(جہاں  $\alpha \neq 0$  اور  $\beta \neq 0$  ہیں) کو کسی بھی یک ذروی حالات  $|\psi_r\rangle$  اور  $|\psi_s\rangle$  کا حاصل ضرب

$$|\psi_r(1)\rangle |\psi_s(2)\rangle$$

نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

اشارہ:  $|\psi_r\rangle$  اور  $|\psi_s\rangle$  کو  $|\phi_a\rangle$  اور  $|\phi_b\rangle$  کے خطی جوڑ لکھیں۔



شکل ۱۲.۲: آئنشٹائن، پوڈلسکی و روزن تصادف کا مکمل اندازہ کاشف آزادانہ طور پر  $a$  اور  $b$  رخ سمت بند ہیں۔

## ۱۲.۲ مسئلہ بل

آئنشٹائن، پوڈلسکی اور روزن کو کوانٹائی میکینکس کی درستگی پر کوئی شک نہیں تھا، البتہ ان کا دعویٰ تھا کہ طبیعی حقیقت کو بیان کرنے کے لیے یہ ایک نامکمل نظریہ ہے: کسی بھی نظام کا حال پوری طرح جاننے کی خاطر  $\Psi$  کے ساتھ مزید ایک متدار،  $\lambda$ ، درکار ہوگی۔ چونکہ فی الحال ہم نہیں جانتے کہ  $\lambda$  کو کس طرح ناپا یا حساب کے ذریعہ معلوم کیا جائے، لہذا ہم اسے ”درپردہ متغیر“<sup>۹</sup> کہتے ہیں۔<sup>۹</sup> تاریخی طور پر کوانٹائی میکینکس کو سہارا دینے والے کئی درپردہ متغیر نظریات پیش کئے گئے، جو پیچیدہ ہونے کے ساتھ ساتھ نامعقول ثابت ہوئے۔ بہر حال سن 1964 تک اس پر کام کرنے کی وجہ نظر آتی تھی۔ تاہم اس سال بل نے ثابت کیا کہ درپردہ متغیر نظریہ اور کوانٹائی میکینکس ساتھ ساتھ نہیں چل سکتے ہیں۔

بل نے آئنشٹائن، پوڈلسکی، روزن اور بوہم تجربہ کو عمومی بنانے کی تجویز پیش کی: الیکٹران اور ضد الیکٹران کاشف کو ایک رخ رکھنے کی بجائے بل نے انہیں علیحدہ علیحدہ زاویوں پر رکھنے کی اجازت دی۔ پہلا کاشف اکائی سمتیہ  $a$  کے رخ الیکٹران چپکر کا حیزو ناپتا ہے، جبکہ دوسرا  $b$  رخ ضد الیکٹران کے چپکر کا حصہ ناپتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ ہم اپنی آسانی کے لیے چپکر کو  $\hbar/2$  کی اکائیوں میں ناپتے ہیں؛ یوں کاشف کے رخ ہم میدان کی قیمت  $+1$  اور خلاف میدان کی قیمت  $-1$  ناپی جائے گی۔ کئی  $\pi^0$  تنزل کے نتائج درج ذیل جدول میں پیش کئے گئے نتائج کی طرح ہو سکتے ہیں۔

الیکٹران	ضد الیکٹران	حاصل ضرب
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
⋮	⋮	⋮

<sup>۹</sup>hidden variable

درپردہ متغیر کوئی ایک عدد یا اعداد کا ذخیرہ ہو سکتا ہے؛ عین ممکن ہے کہ مستقل کے کسی نظریے سے  $\lambda$  حاصل ہوگا، یا کسی وجہ کی بنا پر اس کا حساب ناممکن ہو سکتا ہے۔ میں صرف اتنا کہتا چاہتا ہوں کہ کوئی ایسی معلومات ہوگی؛ مثلاً آپٹکس سے قبل، نظام پر ہم ممکنہ تجربہ کے نتائج کی فہرست۔



کاشف کے رخوں کی کسی ایک جوڑی کے لیے بل نے چکر کے ترجمہ حاصل ضرب کی اوسط قیمت تلاش کرنے کی تجویز پیش کی، جسے ہم  $P(a, b)$  لکھتے ہیں۔ اگر کاشف متوازی ہوں،  $a = b$ ، ہمیں اصل آہنشان، پوڈلسکی، روزن و بو ہم تشکیل حاصل ہوگا؛ ایسی صورت میں ایک ہم میدان اور دوسرا خلاف میدان ہوگا، لہذا حاصل ضرب ہر صورت  $-1$  ہوگا، اور یوں اوسط کی قیمت بھی یہی ہوگی۔

$$(12.2) \quad P(a, a) = -1$$

اسی طرح اگر کاشف ضد متوازی ہوں،  $b = -a$ ، ہر حاصل ضرب  $+1$  ہوگا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(12.3) \quad P(a, -a) = +1$$

اختیاری سمت بندی کے لیے کوانٹائی میکانیات درج ذیل پیشگوئی کرتی ہے (سوال ۵۰، ۴، دیکھیں)۔

$$(12.4) \quad P(a, b) = -a \cdot b$$

بل نے دریافت کیا کہ یہ نتیجہ کسی بھی درپردہ متغیر نظریہ کا ہم آہنگ نہیں ہو سکتا۔

اس کی دلیل حیرت کن حد تک سادہ ہے۔ فرض کریں الیکٹران و ضد الیکٹران نظام کے ”مکمل“ حال کو درپردہ متغیر (یا متغیرات)  $\lambda$  ظاہر کرتا ہے۔ (ایک پاپون تنزل سے دوسرے پاپون تنزل تک  $\lambda$  کی تبدیلی کو نہ ہم سمجھتے اور نہ ہی متاثر کر سکتے ہیں)۔ ساتھ ہی فرض کریں کہ الیکٹرونی پیمائش پر ضد الیکٹران کاشف کی سمت بندی  $b$  کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا؛ یاد رہے کہ تجربہ گر الیکٹرونی پیمائش کے بعد ضد الیکٹران کاشف کا رخ منتخب کر سکتا ہے۔ ایسی صورت میں چونکہ ضد الیکٹران کاشف کا رخ منتخب کرنے سے پہلے ہی الیکٹران کی پیمائش کی جا چکی ہوگی لہذا اس پر  $b$  کی سمت کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا۔ (یہ اصول مقامیت کا مفروضہ ہے)۔ یوں الیکٹرونی پیمائش کوئی تفاعل  $A(a, \lambda)$  اور ضد الیکٹرونی پیمائش کوئی دوسرا تفاعل  $B(b, \lambda)$  دیگا۔ ان تفاعلات کی قیمتیں صرف  $\pm 1$  ہو سکتی ہیں۔

$$(12.5) \quad A(a, \lambda) = \pm 1; \quad B(b, \lambda) = \pm 1$$

جب کاشف متوازی ہوں، تمام  $\lambda$  کے لیے نتائج مکمل طور پر (غیر) باہمی رشتہ:

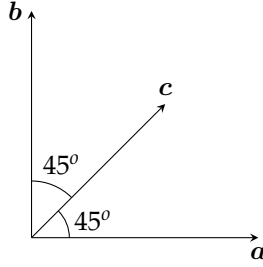
$$(12.6) \quad A(a, \lambda) = -B(a, \lambda)$$

ہوں گے۔

اب پیمائشوں کے حاصل ضرب کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی، جہاں  $\rho(\lambda)$  درپردہ متغیر کی کثافت احتمال ہے۔

$$(12.7) \quad P(a, b) = \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda$$

(کسی بھی کثافت احتمال کی طرح، یہ غیر منفی ہوگا، اور معمولی شرط  $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$  کو مطمئن کرے گا، لیکن اس کے علاوہ ہم  $\rho(\lambda)$  کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کرتے ہیں؛ درپردہ متغیر کے مختلف نظریات  $\rho$  کے لیے کافی مختلف تفاعلات پیش کر سکتے ہیں)۔ مساوات ۱۲.۶ استعمال کرتے ہوئے ہم  $B$  کو خارج کرتے ہیں۔



شکل ۱۲.۳: کاشف کو یوں سمت بند کیا گیا ہے کہ بل عدم مساوات کی کوانٹائی خلاف ورزی ظاہر ہو۔

$$(۱۲.۸) \quad P(a, b) = - \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda$$

اگر  $c$  کوئی تیسرا اکائی سمتیہ ہو تب

$$(۱۲.۹) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [A(a, \lambda) A(b, \lambda) - A(a, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

ہوگا، اور چونکہ  $[A(b, \lambda)]^2 = 1$  ہے لہذا

$$(۱۲.۱۰) \quad P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda$$

ہوگا۔ تاہم مساوات ۱۲.۵ کے تحت  $+1 \leq [A(a, \lambda) A(b, \lambda)] \leq -1$  ہے؛ مزید  
 $\rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] \geq 0$  ہے، لہذا

$$(۱۲.۱۱) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)] d\lambda$$

یا مختصراً

$$(۱۲.۱۲) \quad |P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$

ہوگا۔ یہ مشہور بل عدم مساوات ہے۔ ہم نے درپردہ متغیرات کی تعداد یا خاصیت یا تقسیم  $\rho$  کے بارے میں کچھ بھی فرض نہیں کیا، لہذا بل عدم مساوات (مساوات ۱۲.۵ اور مساوات ۱۲.۶ کو مطمئن کرنے والے) ہر مقامی درپردہ متغیر نظریہ کے لیے کارآمد ہوگا۔

لیکن ہم بہت آسانی کے ساتھ دکھا سکتے ہیں کہ کوانٹائی میکانیات کی پیشگوئی (مساوات ۱۲.۴) اور بل عدم مساوات غیر ہم آہنگ ہیں۔ مثال کے طور پر، فرض کریں تینوں سمتیے ایک مستوی میں پائے جاتے ہیں، اور  $a$ ،  $b$  کے ساتھ  $c$  کا زاویہ  $45^\circ$  ہے (شکل ۱۲.۳)۔ ایسی صورت میں کوانٹائی میکانیات کہتی ہے

$$P(a, b) = 0, \quad P(a, c) = P(b, c) = -0.707$$

ہوگا، جبکہ بل عدم مساوات کہتی ہے

$$0.707 \leq 1 - 0.707 = 0.293$$

ہوگا، جو ایک دوسرے کے غیر ہم آہنگ نتائج ہیں۔

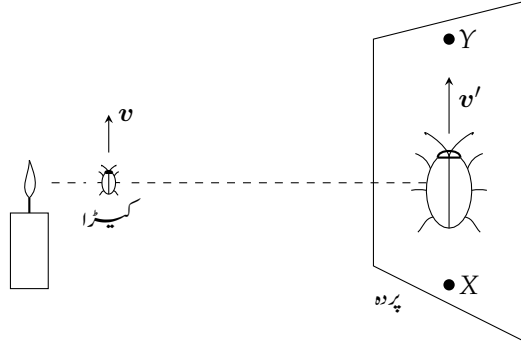
یوں ترمیم بل سے آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد ایک ایسی بات ثابت کرتا ہے جو اس کے مصنفین تصور بھی نہیں کر سکتے تھے۔ اگر وہ درست ہوں، تب کوانٹائی میکانیات صرف نامکمل نہیں بلکہ مکمل طور پر غلط بھی ہے۔ اس کے برعکس اگر کوانٹائی میکانیات درست ہو، تب کوئی درپردہ متغیر نظریہ ہمیں غیر معامتیت، جسے آئنسٹائن مضحکہ خیز سمجھتا تھا، سے نجات نہیں دلا سکتا۔ مزید، اب ہم ایک نہایت سادہ تجربے سے اس معاملے کو دفن کر سکتے ہیں۔

بل عدم مساوات کو پرکھنے کے لیے ساٹھ اور ستر کی دہائیوں میں کئی تجربے کیے گئے، جن میں اسپکٹ، گرنگیر اور روبر کا کام وٹا بل فخر ہے۔ ہمیں یہاں انکے تجربے کی تفصیل سے دلچسپی نہیں ہے (انہوں نے پاپون تنزل کی بجائے دو نوریہ جوہری تحویل استعمال کیا)۔ یہ خدشہ دور کرنے کے لیے کہ الیکٹران کاشف کی سمت بندی کو کسی طرح ضد الیکٹران کاشف ”جہان پائے“، نوریہ کی روانگی کے بعد دونوں کی نیم بلا منصوبہ سمت بندی کی گئی۔ نتائج کوانٹائی میکانیات کی پیشگوئی کی عین مطابق، اور بل عدم مساوات کے غیر ہم آہنگ تھے۔<sup>۱۱</sup>

ستم ظریفی کی بات ہے کہ کوانٹائی میکانیات کی تجرباتی تصدیق نے سائنسی برادری کو ہلا کر رکھ دیا۔ لیکن اس کی وجہ ”حقیقت پسند سوچ“ کا غلط ثابت ہونا نہیں تھا؛ عموماً سائنسدان کب کے اس حقیقت کو مان چکے تھے (اور جو ابھی بھی نہیں مانتے تھے، انکے لیے غیر معامتی درپردہ متغیر نظریات کاراستہ کھلا ہے، جن پر مسئلہ بل کا اطلاق نہیں ہوتا<sup>۱۲</sup>)۔ اصل صدمہ اس بات کا تھا کہ قدرت خود بیاد ی طور پر غیر معامتی ہے۔ تقاضا عمل موج کے یکدم انہدام کی صورت میں (اور غیر معامتیت یا متنازل ذرات کے لیے ضرورت تشاکلیت) ہمیشہ تقلید پسند نظریہ کی خاصیت رہی ہے، لیکن اسپکٹ تجربے سے قبل اُمید کی جا سکتی تھی کہ کوانٹائی غیر معامتیت کسی طرح متنازع و ضوابط کی غیر طبعی پیداوار ہے، جس کے وٹا بل کشف اثرات نہیں ہو سکتے۔ اس اُمید کو بھول جائیں، اور ہمیں فاصلہ پر یکدم عمل پر اعتراض پر نظر ثانی کرنی ہوگی۔

<sup>۱۱</sup> مسئلہ بل میں اوسط استعمال ہوتے ہیں، اور ممکن ہے کہ اسپکٹ کے آلات خفیہ طور پر جان بدار ہوں، جو غیر مناسبتہ نمونے منتخب کر کے اوسط کی غلط قیمت دیتے ہوں۔ 1989 میں مسئلہ بل کا بہتر نمونہ تجویز کیا گیا، جو صرف ایک ہیپسائٹس سے کوانٹائی پیشگوئی اور معامتی درپردہ متغیر کے بیچ تمیز کر سکتا ہے۔

<sup>۱۲</sup> قسمت کی ایک عجیب کھیل ہے کہ آئنسٹائن، پوڈولسکی وروزن تضاد، جس نے حقیقت پسند سوچ کو ثابت کرنے کے لیے معامتیت فرض کی، نے معامتیت کو غلط ثابت کیا، اور حقیقت پسند سوچ کو غیر طے شدہ چھوڑا؛ اس نتیجے کو آئنسٹائن بالکل پسند نہ کرتے۔ زیادہ تر ماہر طبیعیات کا خیال ہے کہ معامتی حقیقت پسند سوچ نہ ہونے کی صورت میں حقیقت پسند سوچ بے کار ہے، اور اسی لیے غیر معامتی درپردہ متغیر نظریات کو ابھرتے نہیں دی جاتی۔ اس کے باوجود بعض مصنفین، جن میں بل بھی شامل ہے، کہتے ہیں کہ ہیپسائٹس آلات اور اس نظام جس کی ہیپسائٹس کی جا رہی ہو، کے بیچ تصوراتی فاصلے کو اپنے نظریہ حتم کر سکتے ہیں، اور تقاضا عمل موج کے انہدام کی وٹا بل سمجھ وحب پیش کر سکتے ہیں۔



شکل ۱۲.۴: پردہ پر کیڑے کا سایہ، روشنی کی رفتار  $c$  سے زیادہ رفتار  $v'$  سے حرکت کرتا ہے بشرطیکہ پردہ کافی دور ہو۔

ماہر طبیعیات روشنی سے زیادہ تیز رفتار اثر و رسوخ کو کیوں برداشت نہیں کر سکتے؟ آخر، کئی چیزیں روشنی سے زیادہ تیز رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ ایک موم بتی کے سامنے چلتے ہوئے کیڑے کا سامنے دیوار پر سائے کی رفتار دیوار تک فاصلے کے راست متناسب ہوگی؛ اصولاً آپ اس فاصلہ کو اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ سائے کی رفتار روشنی سے زیادہ ہو (شکل ۱۲.۴)۔ تاہم، دیوار پر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک سایہ کوئی توانائی منتقل کر سکتا ہے اور نہ ہی کوئی خبر پہنچ سکتا ہے۔ نقطہ  $X$  پر ایک شخص ایسا کوئی عمل نہیں کر سکتا جو یہاں سے گزرتے ہوئے سائے کے ذریعہ نقطہ  $Y$  پر اثر انداز ہو۔

اس کے برعکس، روشنی سے زیادہ تیز حرکت کرنے والے سببی اثر و رسوخ کے ناقابل قبول مضمرات پائے جاتے ہیں۔ خصوصی نظریہ اضافت میں ایسے جمودی چوکھٹ پائے جاتے ہیں جن میں اس طرح کا اشارہ وقت میں پیچھے جا سکے گا؛ یعنی سبب سے پہلے اثر رونما ہوگا؛ جس سے ناقابل قبول منطقی مسائل کھڑے ہوتے ہیں۔ (مثلاً، آپ اپنے نوازائیدہ دادا کو قتل کر سکتے ہیں، جو ایک بری بات ہے!) اب سوال یہ کھڑا ہوتا ہے کہ آیا روشنی سے تیز اثرات جن کی پیشگوئی کوانٹائی میکانیات کرتی ہے، اور جو اسپکٹ تجربے میں کشف ہوتے ہیں ان معنوں میں سببی ہیں، یا یہ (سائے کی حرکت کی طرح) غیر حقیقی ہیں جن پر فلسفیانہ اعتراضات نہیں لگائے جا سکتے؟

آئیں تجربہ بل پر غور کرتے ہیں۔ کیا الیکٹران کی پیمائش کا ضد الیکٹران کی پیمائش پر اثر ہوگا؟ یقیناً، اس کا اثر ہوتا ہے؛ ورنہ ہم مواد کے بیچ باہم رشتے کی وضاحت پیش کرنے سائے متاثر ہوں گے۔ لیکن کیا الیکٹران کی پیمائش ضد الیکٹران کے کسی مخصوص نتیجے کا سبب ہے؟ اس لفظ کے عام مطلب کے نقطہ نظر سے ایسا نہیں ہوتا۔ الیکٹران کے کاشف پر مامور شخص اپنی پیمائش کے ذریعہ ضد الیکٹران کا کشف پر مامور شخص کو اشارہ نہیں بھیج سکتا، چونکہ وہ اپنی پیمائش کے نتیجہ کو متاثر نہیں کرتا (وہ الیکٹران کو ہم میدان ہونے پر مجبور نہیں کر سکتا، جیسے نقطہ  $X$  پر کیڑا کے سائے پر وہ شخص اثر انداز نہیں ہو سکتا)۔ ہاں الیکٹران کا کشف پر مامور شخص پیمائش کرنے یا نہ کرنے کا فیصلہ کر سکتا ہے، لیکن ضد الیکٹران کا کشف پر مامور شخص اپنی پیمائش نتائج کو دیکھ کر یہ نہیں بتا سکتا کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی یا

نہیں، چونکہ دونوں کاشف کے نتائج پر علیحدہ علیحدہ غور کرنے سے مکمل بلا واسطہ مواد دیکھنے کو ملتا ہے۔ صرف بعد میں دونوں مواد کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں ان کے بیچ باہم رشتہ نظر آتا ہے۔ کسی دوسری جودی چوکھٹ میں الیکٹران کی پیمائش سے قبل ضد الیکٹران کی پیمائش کی جائے گی، لیکن اس کے باوجود اس سے کوئی متقی تضاد پیدا نہیں ہوتا؛ دکھا گیا باہم رشتہ اس پر منحصر نہیں کہ ہم کہیں الیکٹران کی پیمائش ضد الیکٹران کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے یا ضد الیکٹران کی پیمائش الیکٹران کی پیمائش پر اثر انداز ہوتی ہے۔ یہ ایک نہایت نازک اور خوبصورت اثر ہے جو بلا واسطہ مواد کے بیچ باہم رشتہ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

یوں، ہمیں دو مختلف اقسام کے اثرات کی بات کرنی ہوگی: ”سببی“ قسم، جو وصول کنندہ کی کسی طبعی خاصیت میں حقیقی تبدیلیاں پیدا کرتا ہے، جنہیں صرف ذیلی نظام پر تجرباتی پیمائش سے کشف کیا جاسکتا ہے، اور ”غیر حقیقی“ قسم جو توانائی یا معلومات کی ترسیل نہیں کرتا، اور جس کا واحد ثبوت دو علیحدہ ذیلی نظاموں کے مواد کے بیچ باہم رشتہ ہے؛ اس باہم رشتہ کو کسی بھی طرح کسی ایک ذیلی نظام میں تجرباتی کے نتائج کو دیکھ کر کشف نہیں کیا جاسکتا ہے۔ سببی اثرات روشنی کی رفتار سے تیز حرکت نہیں کر سکتے، جبکہ غیر حقیقی اثرات پر ایسی کوئی پابندی عائد نہیں۔ تقابل موج کے انہدام سے وابستہ اثرات موخر الذکر قسم کے ہیں، جن کا روشنی سے تیز سفر کرنا حیران کن ضرور، لیکن تباہ کن نہیں۔

### ۱۲.۳ مسئلہ قلمیہ

کوانٹائی پیمائش، اس لحاظ سے عام طور پر تباہ کن ہوتی ہیں، کہ یہ نظام کے حال کو تبدیل کرتی ہیں۔ یہی تجربہ گاہ میں اصول عدم یقینیت کو یقینی بناتا ہے۔ ہم اصل حال کے کئی متماثل نقل (قلمیہ<sup>۱۳</sup>) بن کر، اصل نظام کو چھوئے بغیر، کیوں ان کی پیمائش نہیں کرتے۔ ایسا کرنا ممکن نہیں ہے۔ جس دن آپ قلمیہ بنانے والا نقل گیر آلہ<sup>۱۴</sup> بنائیں، اس دن کوانٹائی میکانیات کو خداحافظ کہنا ہوگا۔

مشال کے طور پر، یوں آئنشٹائن، پوڈولسکی، روزن اور بوہم تجربہ کے ذریعہ روشنی سے تیز رفتار پر خبر بھیجنا ممکن ہوگا۔ فرض کریں ضد الیکٹران کاشف چلانے والا شخص ”ہاں“ یا ”نہیں“ کا خبر ترسیل کرتا ہے۔ ”ہاں“ کا خبر ہونے کی صورت میں بھیجنے والا (ضد الیکٹران کا)  $S_z$  ناپتا ہے۔ یہ جاننے کی ضرورت نہیں کہ پیمائشی نتیجہ کیا ہے؛ صرف اتنا ضروری ہے کہ پیمائش کی جائے؛ یوں الیکٹران کسی غیر مبہم حال  $\uparrow$  یا  $\downarrow$  میں ہوگا (جس کا جاننا غیر اہم ہے)۔ خبر وصول کنندہ جلدی سے الیکٹران کے دس لاکھ قلمیہ تیار کر کے، ہر ایک پر  $S_z$  ناپتا ہے۔ اگر تمام کا ایک ہی جواب ہو (جواب کیا ہے؟ یہ جاننا ضروری نہیں)، ہم یقین سے کہہ سکیں گے کہ الیکٹران کی پیمائش کی گئی، لہذا خبر ”ہاں“ ہوگا۔ اگر نصف الیکٹران ہم میدان، اور نصف خلاف میدان ہوں، تب یقیناً الیکٹران کی پیمائش نہیں کی گئی، اور ”نہیں“ خبر ہوگا۔

لیکن 1982 میں ووٹرز، زورک اور ڈانگزنے ثابت کیا کہ ایسا نقل گیر آلہ نہیں بنایا جاسکتا جو کوانٹائی متماثل ذرات پیدا کرتا ہو۔ ہم چاہیں گے کہ یہ آلہ حال  $|\psi\rangle$  میں ایک ذرہ (جس کا نقل بنانا مقصود ہو) اور حال  $|X\rangle$

<sup>۱۳</sup> clones  
<sup>۱۴</sup> photocopier

میں ایک اضافی ذرہ ”صاف“ کاغذ لے کر حال  $|\psi\rangle$  میں دو ذرات (اصل اور نقل):

$$(12.13) \quad |\psi\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle$$

دیتا ہو۔ مندرجہ ذیل ہم ایسا آلہ بنانے میں کامیاب ہوتے ہیں جو حال  $|\psi_1\rangle$  کا قلیہ تیار کرتا ہو:

$$(12.14) \quad |\psi_1\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle$$

اور جو  $|\psi_2\rangle$  کے لئے بھی کارآمد ہو:

$$(12.15) \quad |\psi_2\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle$$

(مثال کے طور پر، اگر یہ ذرہ ایک الیکٹران ہو، تب  $|\psi_1\rangle$  اور  $|\psi_2\rangle$  ہم میدان اور خلاف میدان ہو سکتے ہیں۔) یہاں تک کوئی مسئلہ پیدا نہیں ہوتا۔ یہ دکھانا ہو گا کہ ان کے خطی جوڑ  $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$  کی صورت میں کیا ہو گا؟ ظاہر ہے ایسی صورت میں

$$(12.16) \quad |\psi\rangle|X\rangle \rightarrow \alpha|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle$$

ہو گا، <sup>۱۵</sup> جو ہم بالکل نہیں چاہتے۔ ہم درج ذیل چاہتے تھے۔

$$(12.17) \quad \begin{aligned} |\psi\rangle|X\rangle \rightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle &= [\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle][\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle] \\ &= \alpha^2|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + \beta^2|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle + \alpha\beta[|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle] \end{aligned}$$

آپ ہم میدان الیکٹران اور خلاف میدان الیکٹران کے قلیہ بنانے کا آلہ بنا سکتے ہیں، لیکن وہ کسی بھی غیر مہمل خطی جوڑ کی صورت میں ناکامی کا شکار ہو گا۔ یہ بالکل ایسا ہو گا جیسا نقل گیر آلہ افقی لکسروں اور انقباضی لکسروں کی نقل خوش اسلوبی سے کرتا ہو لیکن وتری لکسروں کو مکمل طور پر بگاڑتا ہو۔

## ۱۲.۴ شرودنگر کی بلی

کوانٹائی میکانیات میں پیمائش کا عمل ایک شرارتی کردار ادا کرتا ہے: یہیں پر عدم تعینیت، غیر مفاہیمیت، تفاعل موج کا انہدام، اور باقی تمام تصوراتی مشکلات رونما ہوتی ہیں۔ پیمائش کی غیر موجودگی میں، مساوات شرودنگر کے تحت، تفاعل موج اطمینان اور تعیناتی طریقے سے ارتقا کرتا ہے، اور کوانٹائی میکانیات کسی بھی سادہ نظریہ میدان کی طرح نظر آتی ہے (جو کلاسیکی برقی حرکیات سے بہت سادہ ہوگی، چونکہ دو میدان  $E$  اور  $B$ ) کے بجائے اس میں ایک میدان  $(\psi)$  پایا جاتا ہے، اور جو غیر مستقیم ہے۔ یہ پیمائش کا عجیب و غریب کردار عمل ہی ہے، جو کوانٹائی میکانیات کو سمجھنے سے باہر خواص سے نوازتا ہے۔ پیمائش درحقیقت ہے کیا؟ اسے کیا دیگر طبیعی عوامل سے منفرد بناتا ہے؟ <sup>۱۶</sup> اور ہم کس طرح جان سکتے ہیں کہ پیمائش کی گئی؟

<sup>۱۵</sup> ہم مندرجہ ذیل کر رہے ہیں کہ حال  $|\psi\rangle$  پر آلہ خطی عمل کرتا ہے؛ ہونا بھی ایسا ہی چاہیے، چونکہ تابع وقت مساوات شرودنگر (جس کے تحت یہ عمل ہوگا) خطی ہے۔

<sup>۱۶</sup> یہ طبقہ سوچ اس امتیاز کو رد کرتا ہے، اور کہتا ہے کہ پیمائش آلہ اور نظام کو ایک ہی بڑا تفاعل موج ظاہر کرے، جو مساوات شرودنگر کے تحت ارتقا کرتا ہو۔ ایسے نظریات میں تفاعل موج منہدم نہیں ہوتا، تاہم ہم انفرادی وقوع کو بیان کرنے سے قاصر ہوں گے؛ اس (نظریہ نظر میں) کوانٹائی میکانیات صرف یکاں تیار کردہ مندرجہ کے نظموں پر متاثر ہوا ہوگا۔

شرودنگر نے یہ بنیادی سوال (اپنے مشہور) تضاد بلی<sup>۱۷</sup> کے مفروضے کی صورت میں پوچھا:

ایک بلی کو فولاد کے ایک بند ڈبے میں بند کیا جاتا ہے؛ اس ڈبے میں ایک گانگر گنتے کار<sup>۱۸</sup> اور کسی تابکار مادے کی اتنی چھوٹی مقدار رکھی جاتی ہے جس میں ایک گھنٹہ میں صرف ایک جوہر کے تنزل کا امکان ہو، تاہم یہ بھی ممکن ہے کہ کوئی جوہر تنزل نہ ہو۔ تنزل کی صورت میں گنتے کار اس ڈبے میں زیر بلی گیس چھوڑتا ہے۔ ایک گھنٹہ گزرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ تنزل نہ ہونے کی صورت میں یہ بلی زندہ ہوگی۔ پہلا تنزل اس کو زہر سے مار دیتا۔ اس مکمل نظام کا تفسیر عمل موج، اس حقیقت کو ظاہر کرنے کے لیے، زندہ اور مردہ بلی کے برابر حصوں پر مشتمل ہوگا۔

ایک گھنٹہ بعد، بلی کا تفسیر عمل موج درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{زندہ}} + \psi_{\text{مردہ}}) \quad (12.18)$$

یہ بلی نہ تو زندہ اور نہ ہی مردہ ہے، بلکہ پیمائش سے پہلے یہ ان دونوں کا ایک خطی جوڑ ہوگا۔ کھڑکی سے اندر دیکھ کر بلی کا حال جاننے کو پیمائش تصور کیا جائے گا۔ آپ کا دیکھنے کا عمل بلی کو زندہ یا مردہ ہونے پر مجبور کرتا ہے۔ ایسی صورت میں اگر بلی مردہ پائی جائے، تو یقیناً اس کے ذمہ دار آپ ہی ہیں، چونکہ آپ نے کھڑکی سے دیکھ کر اسے قتل کیا۔

شرودنگر اس تمام کو ایک بکواس سے زیادہ نہیں سمجھتا تھا، اور میرے خیال ہے زیادہ تر ماہر طبیعیات ان کے ساتھ متفق ہیں۔ کلاں بین اجسام کا دو (واضح طور پر) مختلف حالات کے ایک خطی جوڑ کی صورت میں ہونے کا تصور بے معنی ہے۔ ایک الیکٹران ہم میدان اور خلاف میدان کا خطی جوڑ ہو سکتا ہے، لیکن ایک بلی زندہ اور مردہ کی خطی جوڑ نہیں ہو سکتی۔ اس کو کوانٹائی میکانیات کی تقلید پسند تشریح کے ساتھ کس طرح ہم آہنگ بنا یا جا سکتا ہے؟

شماریاتی منہجوم کے لحاظ سے مقبول ترین جواب یہ ہے کہ گنتے کار کے غسقی کا عمل ”پیمائش“ ہوگا، نہ کہ کھڑکی میں سے انسانی مشاہدہ۔ پیمائش وہ عمل ہے جو ”کلاں بین“ نظام (جو یہاں گنتے کار ہے) پر اثر انداز ہوتا ہے۔ پیمائش کا عمل اس لمحہ پر رونما ہوگا جب خوردبین نظام (جسے کوانٹائی میکانیات کے قوانین بیان کرتا ہے) کلاں بین نظام (جسے کلاسیکی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں) کے ساتھ اس طرح باہم عمل کرے کہ دائمی تبدیلی رونما ہو۔ کلاں بین نظام خود منفرد حالات کے خطی جوڑ کا مکین نہیں ہو سکتا۔<sup>۱۹</sup>

<sup>۱۷</sup> cat paradox

<sup>۱۸</sup> Geiger counter

<sup>۱۹</sup> ایفینا، کلاں بین نظام کو بھی حستاکوانٹائی میکانیات کے قواعد بیان کرتے ہیں۔ پوسٹلی مشال میں تفسیر عمل موج (فرضیادی بنیادی ذرات کو بیان کرتے ہیں؛ کلاں بین نظام کا تفسیر عمل موج ان 10<sup>23</sup> فرضیادی ذرات کے تفسیر عمل موج سے بنے گا جو مسل کر نظام بناتے ہیں۔ میرا خیال ہے کہ بڑے اعداد کی شماریات میں کہیں ذکر کیا گیا ہے کہ کلاں بین خطی جوڑ کا ہونا انتہائی غیر محتمل ہے۔ اگر آپ کسی طرح مقصود سادہ رمثص کو (مثلاً) کلاں بین منفرد کوانٹائی حالات کے خطی جوڑ میں لائیں، وہ، قصیری وقت سے بہت کم وقت میں ایک سادہ کلاسیکی حال میں واپس آجائے گا۔ اس مظہر کو ختمیتے آسانہ (decoherence) کہتے ہیں۔

## ۱۲.۵ کوانٹائی زینو تضاد

اس عجیب قسے کی خاص بات تفاعل موج کا انہدام ہے۔ ایک پیمائش کے فوراً بعد دوسری پیمائش سے اسی نتیجے کے حصول کی خاطر، حنا لہٹا نظریاتی بنیادوں پر، اسے متعارف کیا گیا تھا۔ یقیناً اس دور رس اصول موضوعہ کے متاثر مشاہدہ اثرات بھی ہوں گے۔ ۱۹۷۷ء میں مسرا اور سدرشان نے تفاعل موج کے انہدام کا ایک ڈرامائی تجرباتی مظاہرہ تجویز کیا جسے انہوں نے **کوانٹائی زینو اثر** کا نام دیا۔ ان کا تصور یہ تھا کہ ایک غیر مستحکم نظام (مثلاً، ہیجان حال میں ایک جوہر) کو بار بار پیمائشی عمل سے گزارا جائے۔ ہر ایک مشاہدہ تفاعل موج کو منہدم کر کے گھڑی کو دوبارہ صفر سے چالو کرے گا، اور یوں زیریں حال میں متوقع تحویل کو غیر معینہ مدت تک روکا جاسکتا ہے۔<sup>۲۱</sup>

فرض کریں ایک نظام ہیجان حال  $\psi_2$  سے آغاز کرتا ہے، اور زمینی حال  $\psi_1$  میں تحویل کے لیے اس کا قدرتی عرصہ حیات  $\tau$  ہے۔ عام طور پر  $\tau$  سے کافی کم وقتوں کے لیے، تحویل کا احتمال وقت  $t$  کا راست متناسب ہوگا (مادات ۹.۴۲، دیکھیں)؛ حقیقت میں چونکہ تحویلی شرح  $1/\tau$  ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{t}{\tau} \quad (۱۲.۱۹)$$

وقت  $t$  پر پیمائش کرنے کی صورت میں، نظام کا بالائی حال میں ہونے کا احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau} \quad (۱۲.۲۰)$$

فرض کریں ہم نظام کو بالائی حال میں ہی پاتے ہیں۔ ایسی صورت میں تفاعل موج واپس  $\psi_2$  کو منہدم ہوگا، اور پورا عمل دوبارہ نئے سرے سے شروع ہوگا۔ اگر ہم وقت  $2t$  پر دوسری پیمائش کریں، نظام کا بالائی حال میں اب بھی ہونے کا احتمال

$$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \approx 1 - \frac{2t}{\tau} \quad (۱۲.۲۱)$$

ہوگا، جو  $t$  پر پہلی پیمائش نہ کرنے کی صورت میں بھی ہوتا۔ سادہ سوچ رکھنے والے یہی توقع کرتے؛ اگر ایسا ہی ہوتا، نظام کا بار بار مشاہدہ کرنے سے کوئی فائدہ نہیں ہوتا، اور کوانٹائی زینو اثر نہیں ہوتا۔

تاہم انتہائی کم وقت کی صورت میں تحویلی احتمال وقت  $t$  کے بجائے  $t^2$  کا راست متناسب ہوگا (مادات ۹.۳۹، دیکھیں)۔<sup>۲۲</sup>

$$P_{2 \rightarrow 1} = \alpha t^2 \quad (۱۲.۲۲)$$

quantum Zeno effect\*

<sup>۲۱</sup> اس اثر کا زینو کے ساتھ کوئی تعلق نہیں، تاہم یہ اس پرانی کہاوت کی یاد دلاتی ہے کہ ”دودھ اس لمحے ابھل کر گرتا ہے جس لمحے آپ اسے دیکھنا بند کرتے ہیں“۔ لہذا اسے بعض اوقات **نگاہ تلے برتن** مظہر pot phenomenon پکارا جاتا ہے۔

<sup>۲۲</sup> خطی تابیت وقت کی بحث میں ہم نے مادات ۹.۳۹ میں تفاعل  $\sin^2(\Omega t/2)/\Omega^2$  کو نوکیلی سوزن تصور کیا۔ تاہم، اس ”سوزن“ کے عرش کا رتبہ  $\Delta\omega = 4\pi/t$  ہے، اور انتہائی کم  $t$  کے لیے یہ تخمینہ ناکارہ ہوگی، اور عمل  $\int \rho(\omega) d\omega$  ( $t^2/4$ ) ہو جائے گا۔



ایسی صورت میں دو پیمائشوں کے بعد بھی نظام کا بالائی حال میں ہونے کا احتمال

$$(12.23) \quad (1 - \alpha t^2)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2$$

ہوگا، جبکہ پہلی پیمائش نہ کرنے کی صورت میں اب احتمال درج ذیل ہوتا۔

$$(12.24) \quad 1 - \alpha(2t)^2 \approx 1 - 4\alpha t^2$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقت  $t$  گزرنے کے بعد نظام کے مشاہدہ کی بنا پر زیریں حال میں تحویل کا احتمال کم ہوا ہے!

یقیناً،  $t = 0$  سے لیکر  $t = T$  تک  $n$  برابر وقفوں  $(T/n, 2T/n, 3T/n, \dots, T)$  پر نظام کا مشاہدہ کرنے کی وجہ سے، اس دورانیہ کے آخر میں نظام کا (اب بھی) بالائی حال میں پائے جانے کا احتمال

$$(12.25) \quad \left(1 - \alpha(T/n)^2\right)^n \approx 1 - \frac{\alpha}{n} T^2$$

ہوگا، جو  $n \rightarrow \infty$  کی حد میں 1 تک پہنچتا ہے: ایک غیر مستحکم نظام جس کا مسلسل مشاہدہ کیا جائے کبھی بھی تحویل نہیں ہوگا! بعض مصنفین اس ماحوذ سے اتفاق نہیں کرتے، اور ان کے نزدیک یہ تفاعل موج کے انہدام کا غیر درست ہونے کا ثبوت ہے۔ تاہم، ان کے دلائل ”مشاہدہ“ کے مفہوم کی غلط تشریح پر مبنی ہے۔ اگر بلہلا غانہ<sup>۲۳</sup> میں ایک ذرے کی راہ کو ”مسلسل مشاہدہ“ قرار دے دیا جائے، تب یہ بالکل درست ہوں گے، چونکہ ایسے ذرات یقیناً تحویل ہوتے ہیں (درحقیقت، ان کے عرصہ حیات پر کاشف کا تابل پیمائش اثر نہیں پایا جاتا)۔ لیکن ایسا ذرہ حسانے کے اندر جوہروں کے ساتھ خدوخال باہم عمل کرتا ہے، جبکہ کوانٹائی زینو اثر پیدا ہونے کے لیے ضروری ہے کہ یک بعد دیگر پیمائشوں کے بیچ وقفہ اتنا کم ہو کہ نظام  $t^2$  طریق میں ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ، از خود تحویل کے لئے یہ تجربہ عملاً ممکن نہیں، تاہم <sup>۲۴</sup> تحویل کے لئے ممکن ہے، اور نتائج کا نظریاتی پیچیدگی کے ساتھ مکمل اتفاق پایا جاتا ہے۔ بد قسمتی سے یہ تجربہ تفاعل موج کے انہدام کا حتمی ثبوت پیش نہیں کرتا؛ اس مشاہدہ کیے اثر کے دیگر وجوہات بھی دئے جاسکتے ہیں۔

میں نے اس کتاب میں ایک ہم آہنگ اور بلا تفساد کہانی پیش کرنے کی کوشش کی: تفاعل موج  $(\Psi)$  کسی ذرے (یا نظام) کا حال ظاہر کرتا ہے؛ عمومی طور پر ذرات، اس وقت تک، کسی مخصوص حرکی خاصیت (معتام، معیار حرکت، توانائی، زاویائی معیار حرکت، وغیرہ) کے حامل نہیں ہوتے، جب تک پیمائشی عمل مداخلت نہ کرے؛ کسی ایک تجربہ میں حاصل مخصوص قیمت کا احتمال  $\Psi$  کی شرابیاتی مفہوم تعین کرتا ہے؛ پیمائشی عمل سے تفاعل موج منہدم ہوتا ہے، جس کی بنا پر فوراً دوسری پیمائش لازماً وہی نتیجہ دیگی۔ دیگر تشریحات، مثلاً، غیر معتمدی درپردہ متغیر نظریات، ”متعدد کائنات“ کا تصور، ”بلا تفساد تاریکیں“، فرت نمونے، وغیرہ بھی پائے جاتے ہیں، لیکن میں یقین کرتا ہوں کہ یہ سب سے سادہ ہے، جس سے عموماً ماہر طبیعیات اتفاق کرتے ہیں۔ یہ ہر تجربہ سے کامیابی سے ابھرا ہے۔ لیکن مجھے یقین ہے کہ یہ کہانی کا اختتام

نہیں ہو سکتا؛ پیما نئی عمل اور انہدام کے طریقہ کار کے بارے میں ابھی بہت کچھ جاننا باقی ہے۔ عین ممکن ہے کہ آنے والی نسلیں، جو زیادہ پیچیدہ نظریہ جاننے ہوں، سوچتے ہوں کہ ہم اتنا سادہ کیوں تھے۔

# ضمیمہ ۱

## خطی الجبر ۱

کالج کی سطح پر پڑھائے جانے والے سادہ سمتیات کے حساب کو خطی الجبر تصوراتی حبا مع پہناتا اور عمومیت دیتا ہے۔  
عمومیت دوروں میں دی جاتی ہے: (1) ہم غیر سمتیات کو مخلوط اعداد ہونے کی اجازت دیتے ہیں، اور (2) ہم اپنے آپ کو تین ابعاد میں رہنے کا پابند نہیں رکھتے۔

### A-۱ سمتیات

سمتیت  $|\alpha\rangle$ ،  $|\beta\rangle$ ،  $|\gamma\rangle$ ، ... کے سلسلہ اور غیر سمتیت  $(a, b, c, \dots)$  کے سلسلہ پر سمتی فضا<sup>۲</sup> مشتمل ہوگا جو  
سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کے زیر عمل بند<sup>۳</sup> ہوگا۔<sup>۴</sup>

• سمتی جمع

کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ بھی سمتیہ ہوگا۔

$$(A-1) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$$

سمتی مجموعہ استبدالی<sup>۵</sup>:

$$(A-2) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$$

<sup>۱</sup> ہمارے مقصد کے لئے غیر سمتیات سادہ مخلوط اعداد ہوں گے۔ ریاضی دان آپ کو زیادہ پر اسرار میدانوں پر سمتی فضاؤں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، تاہم ان کا کوانٹائی میکانیات میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ یاد رہے کہ  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ، ... (عموماً) اعداد نہیں ہوں گے؛ یہ نام ہوں گے، مثلاً ”جمشید“ یا ”در-73م“، یا، زیر غور سمتیہ کو جو بھی آپ پکارنا چاہیں۔

vector space<sup>۲</sup>

closed<sup>۳</sup>

<sup>۴</sup> یعنی یہ اعمال پوری طرح معین ہیں، اور کبھی بھی آپ کو سمتی فضا سے باہر منتقل نہیں کریں گے۔  
commutative<sup>۵</sup>

اور تلازمی<sup>۶</sup>:

$$(A-۳) \quad |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$$

ہے۔ ایک معدوم<sup>۷</sup> (یا صفر<sup>۸</sup>) سمتیہ  $|0\rangle$  پایا جاتا ہے جو ہر سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کے لئے درجہ ذیل خاصیت رکھتا ہے

$$(A-۴) \quad |\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle$$

اور ہر سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کا شریک مخالف<sup>۹</sup> سمتیہ  $|\alpha^{-}\rangle$  پایا جاتا ہے جو درجہ ذیل دیتا ہے۔

$$(A-۵) \quad |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle$$

• غیر سمتی ضرب

کسی بھی غیر سمتیہ اور سمتیہ کا حاصل ضرب:

$$(A-۶) \quad a|\alpha\rangle = |\gamma\rangle$$

ایک سمتیہ ہو گا۔ غیر سمتی ضرب سمتیہ مجموعہ کے لحاظ سے جزئیاتی<sup>۱۰</sup>

$$(A-۷) \quad a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$$

اور غیر سمتی جمع کے لحاظ سے بھی جزئیاتی<sup>۱۱</sup> ہے۔

$$(A-۸) \quad (a + b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$$

یہ غیر سمتیات کے سادہ ضرب کے لحاظ سے تلازمی<sup>۱۲</sup> بھی ہے۔

$$(A-۹) \quad a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$$

غیر سمتیات 0 اور 1 کے ساتھ ضرب آپ کی توقع کے مطابق نتائج دیں گے۔

$$(A-۱۰) \quad 1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle; \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle$$

<sup>۶</sup> associative

<sup>۷</sup> null

<sup>۸</sup> zero

<sup>۹</sup> جہاں غلط فہمی کا امکان نہ ہو، وہاں روایتی طور پر معدوم سمتیہ کو سادہ منفر کھاجاتا ہے:  $|0\rangle \rightarrow 0$

<sup>۱۰</sup> inverse vector

<sup>۱۱</sup> ای ایک انوکھی علامت ہے چونکہ  $\alpha$  عدد نہیں ہیں۔ میں ایک سمتیہ جس کا نام ”جھشید“ ہے کے مخالف سمتیہ کو ”جھشید-“ کا نام دے رہا ہوں۔  
کچھ ہی دیر میں ہم بہتر اصطلاح دیکھ پائیں گے۔

<sup>۱۲</sup> distributive

ظاہر ہے  $|\alpha\rangle = (-1)|\alpha\rangle$  ہوگا جس کو ہم  $|\alpha\rangle -$  لکھتے ہیں۔

یہاں جتنا نظر آ رہا ہے، حقیقتاً اتنا ہے نہیں؛ پس میں نے سمتیات کی جوڑ توڑ کے عام فہم قواعد کو تصوراتی روپ میں پیش کیا ہے۔ نتیجتاً دیگر نظام جو یہی باضابطہ خواص رکھتے ہوں پر ہم سادہ سمتیات کے رویہ کے بارے میں معلوم علم اور وجد ان بروئے کار لا سکیں گے۔

سمتیات  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, \dots$  کا خطی مجموعہ<sup>۱۳</sup> درج ذیل روپ کا فترہ ہوگا۔

$$(A-11) \quad a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + \dots$$

ایک سمتیہ  $|\lambda\rangle$  جس کو سلسلہ  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, \dots$  کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن نہ ہو خطی غیر تابع<sup>۱۴</sup> کہلاتا ہے۔ (مثلاً، تین ابعاد میں اکائی سمتیہ  $\hat{k}$  سمتیات  $\hat{i}$  اور  $\hat{j}$  کا خطی غیر تابع ہے، جبکہ  $xy$  مستوی میں ہر سمتیہ  $\hat{i}$  اور  $\hat{j}$  کا خطی تابع ہوگا۔) اسی کی توسط سے، سمتیات کا وہ ذخیرہ جس میں ہر ایک سمتیہ باقی تمام سمتیات کا خطی غیر تابع ہو ”خطی غیر تابع“ کہلاتا ہے۔ جب ہر سمتیہ کو سمتیات کے ایک ذخیرہ کے ارکان کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو، ہم کہتے ہیں کہ سمتیات کا یہ ذخیرہ فضا کا احاطہ<sup>۱۵</sup> کرتے ہیں۔ فضا کا احاطہ کرنے والے خطی غیر تابع سمتیات کا سلسلہ اساس<sup>۱۶</sup> کہلاتا ہے۔ اساس میں سمتیات کی تعداد فضا کا بُعد<sup>۱۸</sup> کہلاتا ہے۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ بُعد  $(n)$  مستثنیٰ ہے۔

دیے گئے اساس

$$(A-12) \quad |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$$

کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ

$$(A-13) \quad |\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \dots + a_n|e_n\rangle$$

کو اس اساس کے ارکان<sup>۱۷</sup> کی (مرتب)  $n$  اجزائی سلسلہ

$$(A-14) \quad |\alpha\rangle \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

سے یکساں طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ عموماً سمتیات کی بجائے ان اجزاء کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سمتیات جمع کرنے کے لئے ان کے مطابقتی اجزاء آپس میں جمع کئے جاتے ہیں:

$$(A-15) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

linear combination<sup>۱۳</sup>  
linearly independent<sup>۱۴</sup>  
span<sup>۱۵</sup>

<sup>۱۶</sup> فضا کا احاطہ کرنے والے سمتیات کا سلسلہ مکمل (complete) بھی کہلاتا ہے، اگرچہ میں اس اصطلاح کو لامستثنائی بُعد کی صورت کے لئے رکھتا ہوں جہاں ارکان پر سوالات اٹھائے جاسکتے ہیں۔

basis<sup>۱۷</sup>  
dimension<sup>۱۸</sup>

غیر سمتیہ سے ضرب کے لئے ہر جزو کو اس غیر سمتیہ سے ضرب کریں:

$$(A-1۶) \quad c|\alpha\rangle \leftrightarrow (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$

معدوم سمتیہ کو حضروں کی ایک کھڑی ظاہر کرتی ہے:

$$(A-1۷) \quad |0\rangle \leftrightarrow (0, 0, \dots, 0)$$

اور مخالف سمتیہ کے ارکان کی علامتیں الٹ کی جاتی ہیں۔

$$(A-1۸) \quad |-\alpha\rangle \leftrightarrow (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

ارکان کے ساتھ کام کرنے کی واحد قباحت یہ ہے کہ آپ کو کسی ایک مخصوص اساس کے ساتھ کام کرنا ہوگا، اور یہی حسابی عمل کسی دوسری اساس میں بالکل مختلف نظر آئے گا۔

سوال: A-1 مخلوط اجزاء والے تین ابعادی سادہ سمتیات  $(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})$  پر غور کریں۔

ا کیا وہ ذیلی سلسلہ جس میں تمام سمتیات کے لئے  $a_z = 0$  ہو سمتی فضا قائم کرتے ہیں؟ اگر کرتا ہو تب اس کا بُعد کیا ہوگا؛ اگر نہیں کرتا تو کیوں نہیں کرتا؟

ب اس ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے جن کا  $z$  جزو 1 کے برابر ہو؟ اشارہ: کیا ایسے دو سمتیات کا مجموعہ اسی ذیلی سلسلہ میں پایا جائے گا؟ معدوم سمتیہ کے بارے میں سوچیں؟

ج ان سمتیات کے ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جن کے تمام ارکان برابر ہوں؟

سوال: A-2 ان تمام کشیر رکنیوں، (جن کے عددی سر مخلوط ہوں اور) جن کا  $x$  میں درجہ  $N$  سے کم ہو کے ذخیرہ پر غور کریں۔

ا کیا یہ سلسلہ سمتی فضا قائم کرتا ہے (جہاں کشیر رکنیاں بطور ”سمتیات“ ہوں)؟ اگر فضا قائم کرتا ہو تو مناسب اساس تجویز کریں اور اس فضا کا بُعد بتائیں۔ اگر فضا قائم نہ کرتا ہو تو تعریفی خصوصیات میں سے کونسی اس میں نہیں پائی جاتی (جباتیں)؟

ب اگر ہم چاہیں کہ تمام کشیر رکنیاں جفت تفاعلات ہوں تب کیا ہوگا؟

ج اگر ہم چاہیں کہ پہلا عددی سر  $(x^{N-1})$  کو ضرب کرتا ہے 1 ہو تب کیا ہوگا؟

د اگر ہم چاہیں کہ  $x = 1$  پر کشیر رکنیوں کی قیمت 0 ہو تب کیا ہوگا؟

ه اگر ہم چاہیں کہ  $x = 0$  پر کشیر رکنیوں کی قیمت 1 ہو تب کیا ہوگا؟

سوال: A-3 ثابت کریں کہ کسی بھی ایک اساس کے لحاظ سے سمتیہ کے ارکان یکتا ہوں گے۔

## A-۲ اندرونی ضرب

تین ابعاد میں دو اقسام کے سمتی ضرب پائے جاتے ہیں: نقطی ضرب اور صلیبی ضرب۔ موخر الذکر کی قدرتی توسیع کسی طرح بھی  $n$  ابعاد سمتی فضاوں میں نہیں کی جاسکتی، جبکہ اول الذکر کی کی جاسکتی ہے؛ اور اس سیاق و سباق میں اسے عموماً اندرونی ضرب<sup>۱۹</sup> پکارا جاتا ہے۔ دو سمتیات  $\langle \alpha |$  اور  $\langle \beta |$  کا اندرونی ضرب ایک مخلوط عدد ہوگا جسے  $\langle \alpha | \beta \rangle$  لکھا جاتا ہے اور جس کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$(A-۱۹) \quad \langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*$$

$$(A-۲۰) \quad \langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0, \quad \text{اور} \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 0 \leftrightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle$$

$$(A-۲۱) \quad \langle \alpha | (b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle \alpha | \beta \rangle + c\langle \alpha | \gamma \rangle$$

مخلوط اعداد تک عمومیت کے علاوہ یہ مسلمات نقطی ضرب کے جانے پہچانے روپوں کو ریاضی کی زبان میں پیش کرتے ہیں۔ ایسی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب بھی شامل ہو اندرونی ضرب<sup>۲۰</sup> فضا کہلاتی ہے۔

چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ اندرونی ضرب غیر منفی عدد ہے (مساوات A-۲۰) لہذا اس کا جذر حقیقی ہوگا؛ جو سمتیہ کا معیار<sup>۲۱</sup> کہلاتا ہے:

$$(A-۲۲) \quad \|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle} \quad \text{معیار}$$

اور جو ”لبائی“ کے تصور کو وسعت دیتا ہے۔ اکائی سمتیہ<sup>۲۲</sup> (جس کا معیار 1 ہوگا) معمول شدہ<sup>۲۳</sup> کہلاتا ہے۔ دو سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر ہو قائمہ<sup>۲۴</sup> کہلاتے ہیں (جو ”سیدھا کھڑا“ ہونے کے تصور کو عمومیت دیتا ہے)۔ باہمی قائمہ معمول شدہ سمتیات:

$$(A-۲۳) \quad \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$

کے ذخیرہ کو معیاری عمودی سلسلہ<sup>۲۵</sup> کہتے ہیں۔ معیاری عمودی اساس ہر صورت منتخب کیا جاسکتا ہے (سوال A-۴ دیکھیں) اور ایسا کرنا عموماً بہتر بھی ثابت ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو ان کے اجزاء کے روپ میں نہایت خوبصورتی سے لکھا جاسکتا ہے:

$$(A-۲۴) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_n^* b_n$$

لہذا معیار کا مربع

$$(A-۲۵) \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2$$

inner product<sup>۱۹</sup>  
inner product space<sup>۲۰</sup>  
norm<sup>۲۱</sup>  
unit vector<sup>۲۲</sup>  
normalized<sup>۲۳</sup>  
orthogonal<sup>۲۴</sup>  
orthonormal set<sup>۲۵</sup>

ہوگا جبکہ اجزاء از خود درجہ ذیل ہوں گے۔

$$(A-۲۶) \quad a_i = \langle e_i | \alpha \rangle$$

(یہ نتائج تین ابعادی معیاری عمودی اساس  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  کے مشہور کلیات  $a_y = \hat{j} \cdot \mathbf{a}, a_x = \hat{i} \cdot \mathbf{a}$  اور  $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ،  $a_z = \hat{k} \cdot \mathbf{a}$  کو عمومیت دیتے ہیں۔) یہاں سے آگے ہم صرف معیاری عمودی اساس استعمال کریں گے، مساوائے جب صریحاً ایسا نہ کرنے کا کہا گیا ہو۔

دوستیات کے بیچ زاویہ ایسی ہندسی مقدار ہے جس کو ہم عمومیت دینا چاہیں گے۔ سادہ سستی تجزیہ میں  $\cos \theta = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$  ہے۔ تاہم اندرونی ضرب عموماً مخلوط عدد ہوگا، لہذا (اختیاری اندرونی ضرب فضا میں) مثال کلیہ (حقیقی) زاویہ  $\theta$  نہیں دیگا۔ بہر حال، اس مقدار کی مطلق قیمت ایسا عدد ہوگا جو 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔

$$(A-۲۷) \quad |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \leq \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle$$

(اس اہم نتیجہ کو شوارز عدم مساوات<sup>۲۶</sup> کہتے ہیں؛ جس کا ثبوت سوال A-۵ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں، آپ چاہیں تو،  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  کے بیچ زاویہ کی تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$(A-۲۸) \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{\langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle}}$$

سوال A-۴: فرض کریں آپ اساس  $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle)$  سے آغاز کرتے ہیں جو معیاری عمودی نہیں ہے۔ اس اساس سے، گرام و شمد حکمت عملی<sup>۲۷</sup> کے ذریعہ (جو ایک منظم ترکیب ہے) معیاری عمودی اساس  $(|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, \dots, |e'_n\rangle)$  حاصل کی جاسکتی ہے۔ یہ ترکیب کچھ یوں ہے:

اساس کے پہلے سمتیہ  $|e_1\rangle$  کو (اس کے معیار سے تقسیم کر کے) معمول شدہ بنا لیں۔

$$|e'_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

ب۔ پہلے سمتیہ پر دوسرے سمتیہ کا تظلیل دریافت کر کے اس تظلیل کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e'_1 | e_2 \rangle |e'_1\rangle$$

(سمتیہ  $|e_2\rangle$  کا  $|e'_1\rangle$  کے رخ غیر سمتیہ تظلیل  $\langle e'_1 | e_2 \rangle$  ہے جس کے دائیں جانب اکائی سمتیہ  $|e'_1\rangle$  چسپاں کرنے سے سمتیہ تظلیل حاصل کیا گیا۔) درج بالا سمتیہ  $|e'_1\rangle$  کا تاہم ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کر کے  $|e'_2\rangle$  حاصل کریں۔

<sup>۲۶</sup> Schwarz inequality  
<sup>۲۷</sup> Gram-Schmidt procedure



ج سمتیہ  $|e_3\rangle$  کی  $|e'_1\rangle$  پر تحلیل اور  $|e'_2\rangle$  پر تحلیل کو  $|e_3\rangle$  سے منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e'_1|e_3\rangle|e'_1\rangle - \langle e'_2|e_3\rangle|e'_2\rangle$$

یہ  $|e'_1\rangle$  اور  $|e'_2\rangle$  کو قائم ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کر کے  $|e'_3\rangle$  حاصل کریں؛ وغیرہ، وغیرہ۔  
گرام و شمد حکمت عملی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تین ابعاد فضا کی اساس کو معیاری عمود شدہ کریں۔

$$|e_1\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}, |e_2\rangle = (i)\hat{i} + (3)\hat{j} + (1)\hat{k}, |e_3\rangle = (0)\hat{i} + (28)\hat{j} + (0)\hat{k}$$

سوال A-۵: شوارز عدم مساوات (مساوات A-۲۷) ثابت کریں۔ اشارہ:  
 $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$  لیں اور  $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - (\langle\alpha|\beta\rangle/\langle\alpha|\alpha\rangle)|\alpha\rangle$  استعمال کریں۔

سوال A-۶: سمتیات  $|\alpha\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}$  اور  $|\beta\rangle = (4-i)\hat{i} + (0)\hat{j} + (2-2i)\hat{k}$  کی معنوں میں (زاویہ تلاش کریں۔  
پچ (مساوات A-۲۸) کی معنوں میں) تلاش کریں۔

سوال A-۷: ٹکونی عدم مساوات  $\|(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$  ثابت کریں۔

### A-۳ قوالب

فرض کریں آپ (تین بعدی فضا میں) ہر سمتیہ کو 17 سے ضرب دیں، یا ہر سمتیہ کو z محور کے گرد  $39^\circ$  گھمائیں، یا xy  
مستوی میں ہر سمتیہ کا عکس لیں؛ یہ تمام فضا میں ہر ایک  
سمتیہ کا کسی دوسرے سمتیہ  $(|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle)$  میں تبدیل کرتا ہے جہاں کسی بھی سمتیات  $|\alpha\rangle$ ،  $|\beta\rangle$  اور  
کسی بھی غیر سمتیات  $a$ ،  $b$  کے لئے اس عمل کا خطی ہونا:

$$\hat{T}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a(\hat{T}|\alpha\rangle) + b(\hat{T}|\beta\rangle) \quad (A-۲۹)$$

لازمی شرط ہے۔

یہ جاننے ہونے کہ اسی سمتیات کے سلسلہ کے ساتھ خطی تبدیل کیا کرتا ہے، آپ با آسانی جان سکتے ہیں کہ  
وہ کسی بھی سمتیہ کے ساتھ کیا کرے گا۔ مثلاً، اگر  $|e_1\rangle$ ،  $|e_2\rangle$ ،  $\dots$ ،  $|e_n\rangle$  اساس قائم کرتے ہوں اور خطی تبدیل  $\hat{T}$   
اسی سمتیہ  $|e_1\rangle$  پر عمل  $(\hat{T}|e_1\rangle)$  کر کے ایک نیا سمتیہ پیدا کرتا ہے؛ ظاہر ہے، کسی بھی سمتیہ کی طرح، اس نئے  
سمتیہ کو بھی اس اساس میں لکھا جاسکتا ہے لہذا  $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \dots + T_{n1}|e_n\rangle$  جہاں  $T_{11}$ ،  $T_{21}$ ،  $\dots$ ،  $T_{n1}$  عددی سر ہیں۔ اسی طرح باقی اسی سمتیات کے لئے ایک  
لکھا جاسکتا ہے جہاں  $T_{11}$ ،  $T_{21}$ ،  $\dots$ ،  $T_{n1}$  عددی سر ہیں۔ اسی طرح باقی اسی سمتیات کے لئے ایک

<sup>۲۸</sup>linear transformation

<sup>۲۹</sup>اس باب میں خطی تبدیل کو ٹوپی کی علامت (^) سے ظاہر کیا جائے گا؛ جیسا ہم دیکھیں گے، کو انسانی عامل بھی خطی تبدیل ہیں اور ان  
کو بھی ٹوپی کی نشان سے ظاہر کیا جائے گا۔

جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned}\hat{T}|e_1\rangle &= T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle \\ \hat{T}|e_2\rangle &= T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle \\ &\vdots \\ \hat{T}|e_n\rangle &= T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle\end{aligned}$$

جس کو مختصر اُدرج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(A-۳۰) \quad \hat{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^n T_{ij}|e_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

اگر  $|\alpha\rangle$  ایک اختیاری سمتیہ ہو (جس کو ہم ان اسی سمتیات میں لکھتے ہیں):

$$(A-۳۱) \quad |\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_3|e_3\rangle + \cdots + a_n|e_n\rangle = \sum_{j=1}^n a_j|e_j\rangle$$

تب

$$\hat{T}|\alpha\rangle = a_1\hat{T}|e_1\rangle + a_2\hat{T}|e_2\rangle + a_3\hat{T}|e_3\rangle + \cdots + a_n\hat{T}|e_n\rangle$$

ہوگا جس میں  $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle$  وغیرہ پڑ کر کے

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= a_1(T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + T_{31}|e_3\rangle + \cdots + T_{n1}|e_n\rangle) \\ &+ a_2(T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + T_{32}|e_3\rangle + \cdots + T_{n2}|e_n\rangle) \\ &+ a_3(T_{13}|e_1\rangle + T_{23}|e_2\rangle + T_{33}|e_3\rangle + \cdots + T_{n3}|e_n\rangle) \\ &\vdots \\ &+ a_n(T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + T_{3n}|e_3\rangle + \cdots + T_{nn}|e_n\rangle)\end{aligned}$$

ترتیب نو کرتے ہوئے اکائی سمتیات کے عددی سرانچے کر کے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= (a_1T_{11} + a_2T_{12} + a_3T_{13} + \cdots + a_nT_{1n})|e_1\rangle \\ &+ (a_1T_{21} + a_2T_{22} + a_3T_{23} + \cdots + a_nT_{2n})|e_2\rangle \\ &+ (a_1T_{31} + a_2T_{32} + a_3T_{33} + \cdots + a_nT_{3n})|e_3\rangle \\ &\vdots \\ &+ (a_1T_{n1} + a_2T_{n2} + a_3T_{n3} + \cdots + a_nT_{nn})|e_n\rangle\end{aligned}$$

اس مساوات میں اسی سمتیہ  $|e_1\rangle$  کے عددی سر  $(a_1 T_{11} + a_2 T_{12} + \dots + a_n T_{1n})$  کو  $\sum_{j=1}^n a_j T_{1j}$  لکھا جاسکتا ہے، اور اسی طرح باقی اسی سمتیات کے عددی سروں کے لئے بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= \sum_{j=1}^n a_j T_{1j}|e_1\rangle + \sum_{j=1}^n a_j T_{2j}|e_2\rangle + \dots + \sum_{j=1}^n a_j T_{nj}|e_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j T_{ij}|e_i\rangle\end{aligned}$$

ہم مساوات A-۳۱ سے یہاں تک کے حساب کو مختصر اور درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(A-۳۲) \quad \hat{T}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \left( \hat{T}|e_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j T_{ij}|e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T_{ij} a_j \right) |e_i\rangle$$

ظاہر ہے کہ  $\hat{T}$  ایک سمتیہ کو جس کے ارکان  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ہوں کا تبادلہ ایک نئے سمتیہ میں کرتا ہے جس کے ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$(A-۳۳) \quad a'_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} a_j$$

(مساوات A-۳۰ اور مساوات A-۳۲ میں اشاریہ آگے پیچھے کئے گئے ہیں۔ یہ لکھتے ہوئے غلطی نہیں کی گئی۔ دوسرے لفظوں میں (i اور j آپس میں تبدیل کرنے  $i \leftrightarrow j$  سے مراد یہ ہے کہ) اگر اجزاء کا تبادلہ  $T_{ij}$  سے ہو، تب اسی سمتیات کا تبادلہ  $T_{ji}$  سے ہوگا۔)

یوں جس طرح کسی اساس کے لحاظ سے n ارکان  $a_i$  سمتیہ  $|\alpha\rangle$  کو یکساں طور ظاہر کرتے ہیں اسی طرح  $T_{ij}$  کے  $n^2$  ارکان  $\hat{T}$  مبدل  $\hat{T}$  کو اسی اساس کے لحاظ سے یکساں طور پر بیان کرتے ہیں۔

$$(A-۳۴) \quad \hat{T} \leftrightarrow (T_{11}, T_{12}, \dots, T_{nn})$$

اگر اساس معیاری عمودی ہو، مساوات A-۳۰ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(A-۳۵) \quad T_{ij} = \langle e_i | \hat{T} | e_j \rangle$$

ان مخلوط اعداد کو **قالب**<sup>۳۱</sup> کے روپ<sup>۳۲</sup> میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔

$$(A-۳۶) \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

یوں خطی مبدل کا مطالعہ محض قواعد کے نظریہ کا مطالعہ ہوگا۔ دو خطی مبدل کے مجموعہ  $(\hat{S} + \hat{T})$  کی تعریف:

$$(A-۳۷) \quad (\hat{S} + \hat{T})|\alpha\rangle = \hat{S}|\alpha\rangle + \hat{T}|\alpha\rangle$$

ہماری توقع کے عین مطابق قواعد جمع کرنے کے مترادف ہے (جہاں آپ انکے مطابق باقی ارکان جمع کرتے ہیں)۔

$$(A-۳۸) \quad \mathbf{U} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$$

دو خطی تبدلہ کا حاصل ضرب  $(\hat{S}\hat{T})$ ، پہلے  $\hat{T}$  اور اس کے بعد  $\hat{S}$  تبدلہ کرنے کے مترادف ہے۔

$$(A-۳۹) \quad |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle; \quad |\alpha''\rangle = \hat{S}|\alpha'\rangle = \hat{S}(\hat{T}|\alpha\rangle) = \hat{S}\hat{T}|\alpha\rangle$$

مجموعی مبدل  $\hat{U} = \hat{S}\hat{T}$  کو کونسا  $\mathbf{U}$  ظاہر کرتا ہے؟ اسے حاصل کرنا مشکل نہیں۔

$$a_i'' = \sum_{j=1}^n S_{ij}a_j' = \sum_{j=1}^n S_{ij} \left( \sum_{k=1}^n T_{jk}a_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n S_{ij}T_{jk} \right) a_k = \sum_{k=1}^n U_{ik}a_k$$

ظاہر ہے کہ درجہ ذیل ہوگا۔

$$(A-۴۰) \quad \mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ik} = \sum_{j=1}^n S_{ij}T_{jk}$$

قواعد ضرب کرنے کا یہ رائج طریقہ ہے؛ آپ  $\mathbf{S}$  کے  $i$  ویں صف اور  $\mathbf{T}$  کے  $k$  ویں قطار کے مطابق اندراج آپس میں ضرب کر کے تمام کا مجموعہ لے کر حاصل ضرب  $\mathbf{S}\mathbf{T}$  کا  $ik$  ویں رکن تلاش کرتے ہیں۔ یہی طریقہ کار بروئے کار لاتے ہوئے مستطیل قواعد ضرب کیے جاتے ہیں، بس اتنا ضروری ہے کہ پہلے قواعد میں قطاروں کی تعداد دوسرے قواعد میں صفوں کی تعداد کے برابر ہو۔ بالخصوص  $|\alpha\rangle$  کے ارکان کے  $n$  اجزائی سلسلہ کو

<sup>۳۱</sup> matrix  
<sup>۳۲</sup> میں چوکور قواعد کو موٹی لکھائی میں لاطینی بڑے حروف، مثلاً  $\mathbf{T}$ ، سے ظاہر کر دیں گے۔

$n \times 1$  قطار قالب<sup>۳۳</sup> (یا "قطار سمتیہ")<sup>۳۴</sup>

$$(A-۴۱) \quad \mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

لکھ کر تاعدہ تبادله (مساوات ۳۳-A) کو تالبی حاصل ضرب:

$$(A-۴۲) \quad \mathbf{a}' = \mathbf{T} \mathbf{a}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں اب تالبی اصطلاحات سیکھیں:

• **تالاب کا تبدیل** <sup>۳۵</sup> محلی (جس کو ہم لاطینی حرف پ "مد" ڈال کر لکھتے ہیں:  $\tilde{T}$ ) انہی ارکان پر مشتمل ہوگا، تاہم اس میں صف اور قطار آپس میں جگہیں تبدیل کرتی ہیں۔ بالخصوص قطار تالاب کا تبدیل محل صف قالب<sup>۳۶</sup> ہوگا۔

$$(A-۴۳) \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

چو کور تالاب کے (بالائی بائیں سے زیریں دائیں) مرکز<sup>۳۷</sup> و تر<sup>۳۸</sup> میں عکس اس کا تبدیل محل ہوگا۔

$$(A-۴۴) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \dots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

ایسا (چو کور) تالاب جو اپنے تبدیل محل کے برابر ہو **تشاکلی**<sup>۳۸</sup> کہلاتا ہے؛ اگر تبدیل محل کی علامت السٹ ہو تب یہ **غلط تشاکلی**<sup>۳۹</sup> ہوگا۔

$$(A-۴۵) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \quad \text{تشاکلی} \quad \tilde{\mathbf{T}} = -\mathbf{T} \quad \text{مضاد تشاکلی}$$

<sup>۳۳</sup> column matrix

<sup>۳۴</sup> میں قطار توالب اور صف توالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی چھوٹے حروف، مثلاً  $\mathbf{a}$ ، سے ظاہر کروں گا۔

<sup>۳۵</sup> transpose

<sup>۳۶</sup> row matrix

<sup>۳۷</sup> main diagonal

<sup>۳۸</sup> symmetric

<sup>۳۹</sup> antisymmetric

• ہر رکن کا مخلوط جوڑی دار لینے سے متاسب کا (مخلوط) جوڑی دار<sup>۴۰</sup> (جس کو ہم ہمیشہ کی طرح ستارہ،  $T^*$  سے ظاہر کرتے ہیں) حاصل ہوگا۔

$$(A-۴۶) \quad T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & \cdots & T_{1n}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \cdots & T_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}^* & T_{n2}^* & \cdots & T_{nn}^* \end{pmatrix} \quad a^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix}$$

تمام ارکان حقیقی ہونے کی صورت میں متاسب حقیقی<sup>۴۱</sup> ہوگا، جبکہ تمام ارکان خیالی ہونے کی صورت میں متاسب خیالی<sup>۴۲</sup> ہوگا۔

$$(A-۴۷) \quad T^* = T \quad \text{حقیقی} \quad T^* = -T \quad \text{خیالی}$$

• متاسب کا تبدیل محل و جوڑی دار اس کا ہر مشی جوڑی دار<sup>۴۳</sup> (یا شریک<sup>۴۴</sup>) ہوگا جسے مخنبر کے نشان،  $T^\dagger$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(A-۴۸)

$$T^\dagger \equiv \tilde{T}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & \cdots & T_{n1}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* & \cdots & T_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n}^* & T_{2n}^* & \cdots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad a^\dagger \equiv \tilde{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \cdots & a_n^* \end{pmatrix}$$

ایسا چونکہ متاسب جو اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر ہو ہر مشی<sup>۴۵</sup> (یا خود شریک<sup>۴۶</sup>) متاسب کہلاتا ہے؛ اگر ہر مشی جوڑی دار منفی علامت متعارف کرتا ہو متاسب مخنبر ہر مشی<sup>۴۷</sup> (یا غلاف ہر مشی<sup>۴۸</sup>) ہوگا۔

$$(A-۴۹) \quad T^\dagger = T \quad \text{ہر مشی} \quad T^\dagger = -T \quad \text{مخنبر ہر مشی}$$

اس علاقیت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو (معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے) نہایت خوبصورتی کے ساتھ متالبی ضرب (مساوات A-۴۴) لکھا جاسکتا ہے۔

$$(A-۵۰) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = a^\dagger b$$

conjugate<sup>۴۰</sup>  
real<sup>۴۱</sup>  
imaginary<sup>۴۲</sup>  
hermitian conjugate<sup>۴۳</sup>  
adjoint<sup>۴۴</sup>  
hermitian<sup>۴۵</sup>  
adjoint<sup>۴۶</sup>  
skew hermitian<sup>۴۷</sup>  
anti-hermitian<sup>۴۸</sup>

یاد رہے کہ درج بالا رکوع میں متعارف تینوں اعمال (تبدیلی محل، جوڑی دار، ہر مشی جوڑی دار) کا دو مرتبہ اطلاق سے واپس اصل متالاب حاصل ہوگا۔

عام طور پر متالابی ضرب غیر مقلبی  $TS \neq ST$  ہوگا؛ ضرب لکھنے کے دونوں طریقوں کے بیچ منرق کو مقلب<sup>۴۹</sup> کہتے ہیں۔<sup>۵۰</sup>

$$(A-۵۱) \quad [S, T] \equiv ST - TS \quad \text{مقلب}$$

حاصل ضرب کا تبدیل محل الٹ ترتیب میں تبدیل محلوں کا حاصل ضرب:

$$(A-۵۲) \quad (\widetilde{ST}) = \widetilde{T} \widetilde{S}$$

ہوگا (سوال A-۱۱ دیکھیں)، اور یہی کچھ ہر مشی جوڑی دار کے لئے بھی درست ہوگا۔

$$(A-۵۳) \quad (ST)^+ = T^+ S^+$$

اکائی قالج<sup>۵۱</sup> کے مرکزی و ترپرارکان کی قیمت ایک اور باتوں کی قیمت صفر ہوگی۔

$$(A-۵۴) \quad I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(اکائی متالاب خطی تبدل کو ظاہر کرتا ہے جو ہر سمتیہ کا تبدل اسی سمتی میں کرتا ہے۔) دوسرے لفظوں میں درج ذیل ہوگا۔

$$(A-۵۵) \quad I_{ij} = \delta_{ij}$$

چو کورتالاب کے معکوس<sup>۵۲</sup>، جسے  $T^{-1}$  لکھا جاتا ہے، کی تعریف بدیہی ہے۔<sup>۵۳</sup>

$$(A-۵۶) \quad T^{-1} T = T T^{-1} = I$$

متالاب کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب اس کا مقلب<sup>۵۴</sup> غیر صفر ہو؛ درحقیقت

$$(A-۵۷) \quad T^{-1} = \frac{1}{|T|} \widetilde{C} \quad \text{متالاب کا معکوس}$$

commutator<sup>۴۹</sup>

صرف چو کورتالاب کے لئے متالاب معنی خیز ہے۔ غیر چو کورتالاب میں دونوں ضرب کی جسامت بھی ایک جیسی نہیں ہوگی۔

unit matrix<sup>۵۱</sup>

inverse<sup>۵۲</sup>

دھیان رہے کہ بالیاں معکوس، دائیں معکوس کے برابر ہے، چونکہ اگر  $AT = I$  اور  $TB = I$  ہوں، تب (دوسرے کو بائیں سے  $A$  سے ضرب کر کے پہلا استعمال کرنے سے) ہمیں  $B = A$  حاصل ہوگا۔

determinant<sup>۵۳</sup>

ہوگا، جہاں ہم ضربیوں کا مقابلہ  $C$  ہے اور  $|T|$  مقابلہ کا مقطع ہے (مقابلہ  $T$  سے  $i$  ویں صف اور  $j$  ویں قطار خارج کر کے حاصل ذیلی مقابلہ کے مقطع کو  $(-1)^{i+j}$  سے ضرب دینے سے رکن  $T_{ij}$  کا ہم ضربی حاصل ہوگا۔)۔  
(چونکہ) مقابلہ کے مرکزی ارکان کے مجموعہ کو مقابلہ کے آثار کہتے ہیں۔

$$(T) \text{ آثار} = \sum_i^n T_{ii}$$

ایسا مقابلہ جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نامور کہلاتا ہے۔ حاصل ضرب کا معکوس (اگر موجود ہو) الٹ ترتیب میں انفرادی معکوس کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$(A-58) \quad (ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$$

ایسا مقابلہ جس کا معکوس اس کے ہر مشی جوڑی دار کے برابر ہو اکہرا کہلاتا ہے۔<sup>۵۹</sup>

$$(A-59) \quad U^{\dagger} = U^{-1} \quad \text{اکہرا}$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اساس معیاری عمودی ہے، اکہرا مقابلہ کے قطار معیاری عمودی سلسلہ قائم کرتے ہیں، اور اس کے صف بھی ایسا کرتے ہیں (سوال A-۱۲ دیکھیں)۔ ایسے خطی تبادلہ جنہیں اکہرا اقوالب ظاہر کرتے ہوں، مساوات A-۵۰ کی بدولت، اندرونی ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

$$(A-60) \quad \langle \alpha' | \beta' \rangle = \mathbf{a}'^{\dagger} \mathbf{b}' = (\mathbf{Ua})^{\dagger} (\mathbf{Ub}) = \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{Ub} = \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{b} = \langle \alpha | \beta \rangle$$

سوال A-۸: درجہ ذیل اقوالب لیتے ہوئے

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

درجہ ذیل کا حساب لگائیں: (الف)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، (ب)  $\mathbf{AB}$ ، (ج)  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ، (د)  $\tilde{\mathbf{A}}$ ، (ه)  $\mathbf{A}^*$ ، (و)  $\mathbf{A}^{\dagger}$ ، (ز) آثار ( $\mathbf{B}$ )، (ح) مقطع ( $\mathbf{B}$ )، اور (ط)  $\mathbf{B}^{-1}$ ۔ دکھائیں کہ  $\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$  ہے۔ کیا  $\mathbf{A}$  کا معکوس پایا جاتا ہے؟

سوال A-۹: قطار اقوالب

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>۵۵</sup> cofactors

<sup>۵۶</sup> trace

<sup>۵۷</sup> singular

<sup>۵۸</sup> unitary

<sup>۵۹</sup> حقیقی سمتیہ نصف (یعنی جس میں غیر سمتیہ حقیقی ہوں) میں ہر مشی جوڑی دار اور تبدیل عمل ایک ہوں گے، اور اکہرا مقابلہ قائم ہوگا۔ مثلاً، سادہ تین بُعدی نصف میں گھومنے کو قائم اقوالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔  $\tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{O}^{-1}$



اور سوال A-۸ میں مستعمل چوکور قوالب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔ (الف)  $Aa$ ، (ب)  $a^+b$ ، (ج)  $\bar{a}Bb$ ، (د)  $ab^+$

سوال A-۱۰: درج ذیل میں صریحاً قوالب تیار کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی قوالب  $T$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

۱. تشاکلی قوالب  $S$  اور خلاف تشاکلی قوالب  $A$  کا مجموعہ۔

۲. حقیقی قوالب  $R$  اور خیالی قوالب  $M$  کا مجموعہ۔

۳. ہر مشی قوالب  $H$  اور منحرف ہر مشی قوالب  $K$  کا مجموعہ۔

سوال A-۱۱: مساوات A-۵۲، مساوات A-۵۳ اور مساوات A-۵۸ ثابت کریں۔ دکھائیں کہ دو اکہرا قوالب کا حاصل ضرب اکہرا ہوگا۔ کن شرائط کے تحت دو ہر مشی قوالب کا حاصل ضرب بھی ہر مشی ہوگا؟ کیا دو اکہرا قوالب کا مجموعہ اکہرا ہوگا؟ کیا دو ہر مشی قوالب کا مجموعہ ہر مشی ہوگا؟

سوال A-۱۲: دکھائیں کہ اکہرا قوالب کے صف اور قطار عمودی معیاری سلسلہ قائم کرتے ہیں۔

سوال A-۱۳: یہ جاننے کے لئے کہ  $T = \bar{T}$  ہے دکھائیں کہ ہر مشی قوالب کا مقطع حقیقی ہوگا، اکہرا قوالب کے مقطع کا معیار 1 ہوگا (جس کی بنا اس کا نام اکہرا قوالب ہے) اور معیاری عمودی قوالب کا مقطع 1 یا -1 ہوگا۔

## A-۴ تبدیلی اساس

خطی تبدلہ کو ظاہر کرنے والے قوالب کے ارکان یا سمتیہ کے ارکان یقیناً اساس کے انتخاب پر منحصر ہوں گے۔ انیس اس بات پر غور کرتے ہیں کہ اساس کی تبدیلی سے یہ اعداد کس طرح تبدیل ہوں گے۔

پرانے اسی سمتیات  $|e_i\rangle$ ، کسی بھی سمتیہ کی طرح، ان نئے سمتیات  $|f_i\rangle$  کا خطی مجموعہ ہونگے:

$$|e_1\rangle = S_{11}|f_1\rangle + S_{21}|f_2\rangle + \cdots + S_{n1}|f_n\rangle$$

$$|e_2\rangle = S_{12}|f_1\rangle + S_{22}|f_2\rangle + \cdots + S_{n2}|f_n\rangle$$

...

$$|e_n\rangle = S_{1n}|f_1\rangle + S_{2n}|f_2\rangle + \cdots + S_{nn}|f_n\rangle$$

(جہاں  $S_{ij}$  مخلوط اعداد کا سلسلہ ہوگا) یا مختصر اور ج ذیل۔

$$(A-۶) \quad |e_j\rangle = \sum_{i=1}^n S_{ij}|f_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

یہ از خود ایک خطی تبدلہ ہے (مساوات A-۳۰ سے موازنہ کریں)، <sup>۱۰</sup> اور یوں ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا تبدلہ کس طرح ہوگا:

$$a_i^f = \sum_{j=1}^n S_{ij} a_j^e \quad (A-۲۲)$$

(جہاں زیر بالا اساس کو ظاہر کرتی ہے، یعنی  $a^e$  سے مراد اسی سمتیات  $|e_i\rangle$  میں لکھے گئے ارکان ہیں)۔ متالبی روپ میں درجہ ذیل ہوگا۔

$$a^f = S a^e \quad (A-۲۳)$$

خطی تبدلہ  $\hat{T}$  کو ظاہر کرنے والا متالب، اساس کی تبدیلی سے کس طرح تبدیل ہوگا؟ پرانے اساس میں ہمارے پاس (مساوات A-۴۲)

$$a^{e'} = T^e a^e$$

اور مساوات A-۲۳ تھے؛ مساوات A-۲۳ کے دونوں اطراف کو  $S^{-1}$  سے ضرب دے کر  $a^e = S^{-1} a^f$ ، لہذا

$$a^f = S a^{e'} = S(T^e a^e) = S T^e S^{-1} a^f$$

حاصل <sup>۱۱</sup> ہوگا (مساوات A-۲۳ میں  $a^f$  کی جگہ  $a^{f'}$ ، وغیرہ لکھا گیا ہے)۔ ظاہری طور پر

$$T^f = S T^e S^{-1} \quad (A-۲۴)$$

ہوگا۔ عمومی طور پر دو قوابل ( $T_1$  اور  $T_2$ ) اس صورت <sup>۱۲</sup> متشابہ ہو گئے جب کسی (غیر ناظر) متالب  $S$  کے لئے  $T_2 = S T_1 S^{-1}$  ہو۔ یوں ہم دریافت کر چکے کہ، مختلف اساس لے لحاظ سے، ایک ہی خطی تبدلہ کو ظاہر کرنے والے قوابل میثاب ہو گئے۔ اتفاقی طور پر، اگر پہلی اساس معیاری عمودی ہو تب دوسری اساس صرف اس صورت معیاری عمودی ہوگی جب متالب  $S$  اکہرا ہو (سوال A-۱۶ دیکھیں)۔ چونکہ ہم صرف معیاری عمودی اساس میں کام کرتے ہیں لہذا ہماری دلچسپی بنیادی طور پر اکہرا میثابہت تبدلہ میں ہے۔

اگرچہ نئی اساس میں خطی تبدلہ کے ارکان بہت مختلف نظر آتے ہیں، متالب سے وابستہ دو اعداد، مقطع اور آثار <sup>۱۳</sup> متالب، تبدیل نہیں ہوتے۔ چونکہ حاصل ضرب کا مقطع، مقطعوں کا حاصل ضرب ہوگا، لہذا درجہ ذیل ہوگا۔

$$|T^f| = |S T^e S^{-1}| = |S| |T^e| |S^{-1}| = |T^e| \quad (A-۲۵)$$

<sup>۱۰</sup> یاد رہے کہ یہاں موجود بحث میں ہم ایک ہی سمتیہ کا دو مکمل مختلف اساس میں بات کر رہے ہیں، جبکہ وہاں بالکل مختلف سمتیہ کی بات اسی ایک اساس میں کی جا رہی تھی۔

<sup>۱۱</sup> یاد رہے کہ  $S^{-1}$  لازماً موجود ہوگا؛ اگر  $S$  ناظر ہوتا، تب  $\langle f_i |$  فضا کا احاطہ نہ کرتے، لہذا اساس متاخم نہ کرتے۔

<sup>۱۲</sup> similar  
<sup>۱۳</sup> trace

آمارتالب (Tr) جو وتری ارکان کا مجموعہ ہے:

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) \equiv \sum_{i=1}^m T_{ii} \quad (\text{A-۲۶})$$

درجہ ذیل خاصیت رکھتا ہے (سوال ۱۷-۸ دیکھیں)

$$\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) \quad (\text{A-۲۷})$$

(جہاں  $\mathbf{T}_1$  اور  $\mathbf{T}_2$  کوئی بھی دو تالاب ہیں)، لہذا درجہ ذیل ہوگا۔

$$\text{Tr}(\mathbf{T}^f) = \text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{T}^e \mathbf{S}^{-1}) = \text{Tr}(\mathbf{T}_e \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}) = \text{Tr}(\mathbf{T}^e) \quad (\text{A-۲۸})$$

سوال ۱۴-۸ تین ابعاد میں سمتیات کی لئے معیاری اساس  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  استعمال کرتے ہوئے۔

ا. (مبدأ کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھڑی z محور کے گرد زاویہ  $\theta$  گھومنے کو ظاہر کرنے والا تالاب تیار کریں۔

ب. نقطہ  $(1, 1, 1)$  سے گزرتے ہوئے محور کے گرد (محور سے مبدأ کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھڑی  $120^\circ$  گھومنے کو ظاہر کرنے والا تالاب تیار کریں۔

ج. مستوی  $xy$  میں عکس کو ظاہر کرنے والا تالاب تیار کریں۔

د. تصدیق کریں کہ یہ تمام تالاب معیاری عمودی ہیں اور ان کے مقاطعات تلاش کریں۔

سوال ۱۵-۸ عمومی اساس  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  میں محور  $x$  کے گرد زاویہ  $\theta$  گھومنے کو ظاہر کرنے والا تالاب  $\mathbf{T}_x$ ، اور محور  $y$  کے گرد زاویہ  $\theta$  گھومنے کو ظاہر کرنے والے تالاب  $\mathbf{T}_y$  تیار کریں۔ فرض کریں اب ہم اساس تبدیل کر کے  $\hat{i}' = -\hat{i}$ ،  $\hat{j}' = \hat{j}$ ،  $\hat{k}' = \hat{k}$  لیتے ہیں۔ اساس کی اس تبدیلی کو پیدا کرنے والا تالاب  $\mathbf{S}$  تیار کریں، اور تصدیق کریں کہ آیا  $\mathbf{S} \mathbf{T}_x \mathbf{S}^{-1}$  اور  $\mathbf{S} \mathbf{T}_y \mathbf{S}^{-1}$  آپ کے توقعات کے مطابق ہیں یا نہیں۔

سوال ۱۶-۸ دکھائیں کہ میٹا ہرمت متالابی ضرب برقرار رکھتا ہے (یعنی  $\mathbf{A}^e \mathbf{B}^e = \mathbf{C}^e$  ہونے کی صورت میں  $\mathbf{A}^f \mathbf{B}^f = \mathbf{C}^f$  ہوگا)۔ میٹا ہرمت عمومی طور پر تشاکلی، حقیقت یا ہر متی پن برقرار نہیں رکھتا؛ لیکن، دکھائیں اگر  $\mathbf{S}$  اکہرا ہو، اور  $\mathbf{H}^e$  ہر متی ہو، تب  $\mathbf{H}^f$  ہر متی ہوگا۔ دکھائیں کہ  $\mathbf{S}$  صرف اور صرف اس صورت میں معیاری عمودی اساس کو دوسری معیاری عمودی اساس میں منتقل کرے گا اگر یہ اکہرا ہو۔

سوال ۱۷-۸ ثابت کریں کہ  $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)$  ہوگا۔ یوں  $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_1)$  ہوگا، لیکن کیا عام طور پر  $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3)$  ہوگا؟ اس کو ٹھیک یا غلط ثابت کریں۔ اشارہ: غلط ثابت کرنے کا بہترین ثبوت اسکی اُلٹ مثال پیش کرنا ہے؛ جتنا مثال سادہ ہو اتنا ہی بہتر ہے۔

### A-۵ امتیازی سمتیات اور امتیازی افتدار

تہہرافصفا میں کسی مخصوص محور کے گرد زاویہ  $\theta$  گھمانے کو ظاہر کرنے والے خطی تبدلہ پر غور کریں۔ زیادہ تر سمتیات پیچیدہ انداز سے تبدیل ہوں گے (یہ اس محور کے گرد مخروط پر حرکت کریں گے)، لیکن وہ سمتیات جو اسی محور پر پائے جاتے ہوں کارویہ نہایت سادہ ہوگا: وہ بالکل تبدیل نہیں ہوں گے ( $\hat{T}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ )۔ اگر  $\theta$  کی قیمت  $180^\circ$  ہو تب ”استوائی“ مستوی میں پائے جانے والے سمتیات کی علامت تبدیل ہوگی ( $\hat{T}|\alpha\rangle = -|\alpha\rangle$ )۔ مخلوط سمتی فضا<sup>۶۳</sup> میں ہر خطی تبدلہ کے، اس طرح کے ”مخصوص“ سمتیات پائے جاتے ہیں جو اپنے آپ کے غیر سمتی مضرب میں تبدیل ہوتے:

$$\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle \quad (A-۶۹)$$

انہیں اس تبدلہ کے امتیازی سمتیات<sup>۶۵</sup> کہتے ہیں، اور (مخلوط) عدد  $\lambda$  ان کا امتیازی قدر<sup>۶۶</sup> ہے۔ (اگرچہ، معدوم سمتیہ مہمل معنوں میں مساوات A-۶۹ کو کسی بھی  $\hat{T}$  اور  $\lambda$  کے لئے مطمئن کرتا ہے، اسے امتیازی سمتیات میں نہیں گنا جاتا۔ تکنیکی طور پر امتیازی سمتیہ سے مراد وہ غیر مضرب سمتیہ ہے جو مساوات A-۶۹ کو مطمئن کرتا ہو۔) دھیان رہے کہ امتیازی سمتیہ کاہر (غیر مضرب) مضرب بھی امتیازی سمتیہ ہوگا، اور اس کی امتیازی قدر وہی ہوگی۔ کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے، امتیازی سمتیہ مساوات فالتالیی روپ:

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (A-۷۰)$$

(جہاں  $\mathbf{a}$  غیر مضرب ہے) یا

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (A-۷۱)$$

اختیار کرتی ہے۔ (یہاں  $\mathbf{0}$  ایسا صفر قالب<sup>۶۷</sup> ہے جس کے تمام ارکان صفر ہیں۔) اب، اگر فالتالب  $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$  کا معکوس پایا جاتا، ہم مساوات A-۷۱ کے دونوں اطراف کو  $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$  سے ضرب دے کر  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  اخذ کرتے۔ لیکن ہم  $\mathbf{a}$  کو غیر مضرب فرض کر چکے ہیں، لہذا  $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$  حقیقتاً ناادر ہوگا، جس سے مراد یہ ہے کہ اس کا مقطع صفر ہوگا۔

$$(A-۷۲) \quad \text{مقطع}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & (T_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

مقطع کھولنے سے  $\lambda$  کی الجبرائی مساوات:

$$(A-۷۳) \quad C_n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad \text{امتیازی مساوات}$$

<sup>۶۴</sup> حقیقی سمتی فضا میں (جہاں غیر سمتیہ کی قیمتیں حقیقی ہونے کی پابند ہوں گی) ایسا لازمی نہیں۔ سوال A-۱۸ دیکھیں۔

<sup>۶۵</sup> eigenvectors

<sup>۶۶</sup> eigenvalue

<sup>۶۷</sup> zero matrix

حاصل ہوتی ہے، جہاں عددی سر  $C_i$  کی قیمتیں  $T$  کے ارکان کی تابع ہیں (سوال ۲۰-A دیکھیں)۔ اس کو غالب کی امتیازی مساوات<sup>۶۸</sup> کہتے ہیں؛ اور اس کے حل امتیازی افتدار کا تعین کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہ  $n$  رتبی مساوات ہے، لہذا (الجبرا کے بنیادی مسئلہ<sup>۶۹</sup> کے تحت) اس کے  $n$  (مختلط) جذر ہوں گے۔ تاہم، ان میں سے چند متعدد جذر<sup>۷۰</sup> ہو سکتے ہیں، لہذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ  $n \times n$  غالب کا کم سے کم ایک اور زیادہ سے زیادہ  $n$  منفرد امتیازی افتدار ہو سکتے ہیں۔ غالب کے تمام امتیازی افتدار کے ذخیرہ کو اس کا طیف<sup>۷۱</sup> کہتے ہیں؛ اگر دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کا ایک ہی امتیازی افتدار ہو، ہم کہتے ہیں طیف انحطاطی<sup>۷۲</sup> ہے۔

عام طور پر، امتیازی سمتیات تیار کرنے کا سادہ ترین طریقہ یہ ہوگا کہ مساوات A-۷۰ میں ہر ایک  $\lambda$  ڈال کر  $a$  کے ارکان کے لئے قلم و کاغذ سے حل کیا جائے۔ میں یہ عمل ایک مثال حل کر کے سمجھاتا ہوں۔

مثال: A-۱ درج ذیل غالب کے امتیازی افتدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

$$(A-۷۴) \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

حل: اس کی امتیازی مساوات

$$(A-۷۵) \quad \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -2 \\ -2i & (i-\lambda) & 2i \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1+i)\lambda^2 - i\lambda = 0$$

ہے، جس کے جذر  $0$ ،  $1$  اور  $i$  ہیں۔ پہلے امتیازی سمتیہ کے جزو  $(a_1, a_2, a_3)$  لیتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہوگا، جو درج ذیل تین مساوات دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= 0 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

<sup>۶۸</sup>characteristic equation

<sup>۶۹</sup>fundamental theorem of algebra

<sup>۷۰</sup>یہ وہ مقام ہے جہاں حقیقی سمتیہ کا مسئلہ مزید پیچیدہ ہوتا ہے، چونکہ ضروری نہیں امتیازی مساوات کا کوئی بھی (حقیقی) حل پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۸-A دیکھیں۔

<sup>۷۱</sup>multiple roots

<sup>۷۲</sup>spectrum

<sup>۷۳</sup>degenerate

ان میں سے پہلی مساوات ( $a_1$  کی صورت میں) کا تعین کرتی ہے:  $a_3 = a_1$ ؛ دوسری مساوات  $a_2$  کا تعین کرتی ہے:  $a_2 = 0$ ؛ اور تیسری مساوات زائد از ضرورت مہم ہے۔ ہم  $a_1 = 1$  چن سکتے ہیں (چونکہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی مضرب امتیازی سمتیہ ہی ہوگا)۔

$$(A-46) \quad \mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0 \text{ کے لئے}$$

دوسرے امتیازی سمتیہ کے لئے (جبزوں کی وہی علامتیں استعمال کرتے ہوئے)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ہوگا، جس سے درجہ ذیل مساوات حاصل ہوں گی:

$$2a_1 - 2a_3 = a_1$$

$$-2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 = a_2$$

$$a_1 - a_3 = a_3$$

جن کے حل  $a_3 = (1/2)a_1$ ،  $a_2 = [(1-i)/2]a_1$  ہیں؛ اس مرتبہ میں  $a_1 = 2$  لیتا ہوں، لہذا

$$(A-47) \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \text{ کے لئے}$$

ہوگا۔ آخر میں، تیسرا امتیازی سمتیہ کے لئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ia_2 \\ ia_3 \end{pmatrix}$$

درجہ ذیل مساوات دیگا

$$2a_1 - 2a_3 = ia_1$$

$$-2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 = ia_2$$

$$a_1 - a_3 = ia_3$$

جس کے حل  $a_3 = a_1 = 0$  ہیں، جہاں  $a_2$  غیر متعین ہے۔ ہم  $a_2 = 1$  چنتے ہیں، یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$(A-48) \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = i \text{ کے لئے}$$

□

اگر امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں (جیسا گزشتہ مثال میں کرتے تھے)، ہم انہیں اساس کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

$$\hat{T}|f_1\rangle = \lambda_1|f_1\rangle,$$

$$\hat{T}|f_2\rangle = \lambda_2|f_2\rangle,$$

...

$$\hat{T}|f_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$$

اس اساس میں  $\hat{T}$  کو ظاہر کرنے والا متالب انتہائی سادہ روپ اختیار کرتا ہے، جس میں امتیازی اقدار مرکزی وتر پر پائے جاتے ہیں، جبکہ باقی تمام ارکان صفر ہوں گے:

$$(A-۷۹) \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

اور (معمول شدہ) امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$(A-۸۰) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ایسا متالب جس کو اساس کی تبدیلی سے وتر  $\hat{T}$  روپے  $\hat{T}$  (مساوات A-۷۹) میں لایا جاسکے وتر پذیر  $\hat{T}$  کہلاتا ہے (ظاہر ہے کہ ایک متالب صرف اور صرف اس صورت وتر پذیر ہوگا جب اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں)۔ (پرانی اساس میں) معمول شدہ امتیازی سمتیات کو  $S^{-1}$  کے قطار لیتے ہوئے، میٹا بہت متالب جو وتر  $\hat{T}$  سازی کرتا ہے، تیار کیا جاسکتا ہے۔

$$(A-۸۱) \quad (S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i$$

diagonal form<sup>۷۴</sup>  
diagonalizable<sup>۷۵</sup>  
diagonalization<sup>۷۶</sup>

مثال ۲:  $A^{-1}$  ہم مثال ۱ میں حاصل  $a^1$  (مساوات ۷-۸)،  $a^2$  (مساوات ۷-۹) اور  $a^3$  (مساوات ۷-۱۰) کو  $S^{-1}$  کے قطار لکھتے ہیں:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (1-i) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لہذا (مساوات ۷-۱۱) استعمال کرتے ہوئے

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ (i-1) & 1 & (1-i) \end{pmatrix}$$

اور آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$Sa^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Sa^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Sa^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اور

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

□

ہوں گے۔

تالاب کو ورتزی روپ میں لانے کا فائدہ صاف ظاہر ہے: اس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے۔ بد قسمتی سے، ہر تالاب کو ورتزی نہیں بنایا جاسکتا؛ امتیازی سمتیات کو فضا کا احاطہ کرنا ہوگا۔ اگر امتیازی مساوات کے  $n$  منفرد جذور ہوں، تب تالاب لازماً ورتزی ہوگا، لیکن بعض اوقات متعدد جذور کی صورت میں بھی یہ ورتزی ہوگا۔ (غیر ورتزی تالاب کی مثال کے لئے سوال ۱۹-۸ دیکھیں)۔ کیا بہتر ہوتا (اگر تمام امتیازی سمتیات معلوم کرنے سے قبل) ہم جان سکتے کہ آیا تالاب ورتزی ہے یا نہیں۔ ایک کارآمد کافی (تاہم غیر لازمی) شرط درج ذیل ہے: ایک تالاب جو اپنے ہر مشی جوڑی دار کے ساتھ مقلوب ہو عمودی تالاب کہلاتا ہے۔

$$(A-۸۲) \quad [N^{\dagger}, N] = 0, \quad \text{عمودی}$$

ہر عمودی تالاب ورتزی ہوگا (اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں)۔ بالخصوص، ہر ہر مشی تالاب، اور اکسرات تالاب، ورتزی ہوگا۔

normal



معرض کریں ہمارے پاس دو وتر پذیر توالب ہوں؛ کوانٹائی معاملات میں عموماً ایک سوال کھٹرا ہوتا ہے: کیا انہیں (ایک ہی میٹا بہت وتالب S کے ذریعہ) یکے وقتے وتر پذیر بنایا جاسکتا ہے؟ دوسرے لفظوں میں، کیا ایسی اسس موجود ہے جس میں دونوں وتری ہوں؟ اس کا جواب ہے کہ صرف اور صرف اس صورت ایسا ممکن ہوگا جب دونوں وتالب آپس میں مقلوبی ہوں (سوال A-۲۲ دیکھیں)۔

سوال: A-۱۸ درج ذیل وتالب مستوی  $xy$  میں گھومنے کو ظاہر کرنے والا  $2 \times 2$  وتالب ہے۔

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (A-۸۳)$$

دکھائیں کہ (ماسوائے مخصوص زاویوں کے؛ بتائیں وہ کون سے زاویہ ہیں؟) اس وتالب کے کوئی حقیقی امتیازی اقتدار نہیں پائے جاتے۔ (یہ اس ہندسی حقیقت کی عکاسی کرتا ہے کہ مستوی میں کسی بھی سمتیہ کو ایسا گھما کر اپنے آپ میں نہیں پہنچایا جاسکتا؛ اس کا موازنہ تین ابعاد میں گھمانے سے کریں۔) اس وتالب کے، البتہ، مخلوط امتیازی اقتدار اور امتیازی سمتیات پائے جاتے ہیں۔ انہیں تلاش کریں۔ وتالب T کا وتری ساز وتالب S تیار کریں۔ میٹا بہت تبادله  $STS^{-1}$  صریح کریں، اور دکھائیں کہ یہ T کو وتری روپ میں گھلاتا ہے۔

سوال: A-۱۹ درج ذیل وتالب کے امتیازی اقتدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کیا یہ وتالب وتر پذیر ہے؟

سوال: A-۲۰ دکھائیں کہ امتیازی مساوات (مساوات A-۷۳) کا پہلا، دوسرا اور آخری عددی سر درجہ ذیل ہے۔

$$C_n = (-1)^n, \quad C_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(T), \quad \text{اور} \quad C_0 = |T| \quad (A-۸۴)$$

ایک  $3 \times 3$  وتالب جس کے ارکان  $T_{ij}$  ہوں کا  $C_1$  کیا ہوگا؟

سوال: A-۲۱ صاف ظاہر ہے کہ وتری وتالب کا آثار، اس وتالب کے امتیازی اقتدار کا مجموعہ، اور اس کا مقطع ان کا حاصل ضرب ہوگا (صرف مساوات A-۷۹ کو دیکھنے کی دیر ہے)۔ یوں (مساوات A-۶۵ اور مساوات A-۶۸ کے تحت) کسی بھی وتر پذیر وتالب کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا۔ ہر وتالب کے لئے درج ذیل ہوگا: اسے ثابت کریں۔

$$|T| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \text{Tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad (A-۸۵)$$

(یہاں کے  $\lambda$ ، امتیازی مساوات کے  $n$  حل ہیں؛ متعدد جذر کی صورت میں، خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کی تعداد، حلوں کی تعداد سے کم ہو سکتی ہے، لیکن ہم  $\lambda$  کو اتنی مرتبہ ہی لگتے ہیں جتنی مرتبہ یہ پایا جاتا ہے۔) اشارہ: امتیازی مساوات کو درجہ ذیل روپ میں لکھیں

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

اور سوال ۲۰-A کا نتیجہ زیر استعمال لائیں۔

سوال: ۲۲-A

۱ دکھائیں اگر دو متالَب کسی ایک اساس میں مقلوبی ہوں تب وہ ہر اساس میں مقلوبی ہوں گے۔ یعنی درجہ ذیل ہوگا۔

$$[\mathbf{T}_1^e, \mathbf{T}_2^e] = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathbf{T}_1^f, \mathbf{T}_2^f] = \mathbf{0} \quad (\text{A-۸۶})$$

اشارہ: مساوات A-۶۳ استعمال کریں۔

ب دکھائیں کہ اگر دو متالَب بیک وقت ورت پذیر ہوں، وہ مقلوبی ہوں گے۔<sup>۷۹</sup>

سوال: ۲۳-A درجہ ذیل متالَب لیں۔

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

۱ کیا یہ عمودی ہے؟

ب کیا یہ ورت پذیر ہے؟

## A-۶ ہر مشی تبادله

میں نے مساوات A-۴۸ میں متالَب کے تبدیل محصل و جوڑی دار  $\hat{\mathbf{T}}^* = \mathbf{T}^+$  کو اس کے ہر مشی جوڑی دار (یا شریک متالَب) کی تعریف مترا دیا۔ میں اب خطی تبادله کے ہر مشی جوڑی دار کی زیادہ بنیادی تعریف پیش کرتا ہوں۔ یہ وہ تبادله  $\hat{\mathbf{T}}^+$  ہے جس کا اطلاق ہر  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  سمتیات کے (اندرونی ضرب کے پہلے رکن پر وہی نتیجہ دیتا ہے جو دوسرے سمتیہ پر  $\hat{\mathbf{T}}$  کا اطلاق دیگا۔<sup>۸۰</sup>

$$\langle \hat{\mathbf{T}}^+ \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{T}} \beta \rangle \quad (\text{A-۸۷})$$

میں آپ کو خبردار کرتا چلوں کہ اگرچہ ہر کوئی اسے استعمال کرتا ہے یہ منسودہ علامتیت ہے۔ سمتیات  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  ہیں تاکہ  $\alpha$  اور  $\beta$  جو درحقیقت محض نام ہیں۔ بالخصوص، ان کے کوئی ریاضیاتی خواص نہیں پائے جاتے، اور  $\hat{\mathbf{T}}\beta$  ”کافترہ بے معنی ہے۔ خطی تبادله سمتیہ پر تاکہ نام پر عمل کرتے ہیں۔ تاہم، اس علامت کا مطلب صاف ظاہر ہے: سمتیہ  $\hat{\mathbf{T}}|\beta\rangle$  کا نام  $\hat{\mathbf{T}}\beta$  ہے اور سمتیہ  $\hat{\mathbf{T}}^+|\alpha\rangle$  اور سمتیہ  $|\beta\rangle$  کا اندرونی ضرب  $\langle \hat{\mathbf{T}}^+ \alpha | \beta \rangle$  ہے۔ بالخصوص

$$\langle \alpha | c \beta \rangle = c \langle \alpha | \beta \rangle \quad (\text{A-۸۸})$$

<sup>۷۹</sup> اس کا الٹ (یعنی اگر دو ورت پذیر متالَب مقلوبی ہوں تب وہ بیک وقت ورت پذیر ہوں گے) ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔  
<sup>۸۰</sup> آپ پوچھ سکتے ہیں، کیا ایسا تبادله لازمًا موجود ہوگا؟ یہ ایک اچھا سوال ہے۔ اس کا جواب ہے ”جی ہاں“۔

ہوگا، جبکہ جہاں کسی بھی غیر سمتیہ  $c$  کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\langle c\alpha|\beta\rangle = c^* \langle \alpha|\beta\rangle \quad (A-۸۹)$$

اگر آپ ہمیشہ کی طرح معیاری عمودی اساس میں کام کر رہے ہوں، خطی تبادلہ کے ہر مشی جوڑی دار کو مطابقتی متالاب کا ہر مشی جوڑی دار ظاہر کریگا؛ چونکہ (مساوات ۵۰-A اور مساوات ۵۳-A استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہے۔

$$\langle \alpha|\hat{T}\beta\rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{T} \mathbf{b} = (\mathbf{T}^\dagger \mathbf{a})^\dagger \mathbf{b} = \langle \hat{T}^\dagger \alpha|\beta\rangle \quad (A-۹۰)$$

یوں یہ علاقیت شبانہ ہے، اور ہم چاہیں تو تبادلہ کی زبان اور چاہیں تو قالب کی زبان میں بات کر سکتے ہیں۔ کوانٹائی میکانیات میں، ہر مشی تبادلہ  $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$  بنیادی کردار ادا کرتے ہیں۔ ہر مشی تبادلہ کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تین نہایت اہم خواص رکھتے ہیں۔

۱ ہر مشی تبادلہ کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

ثبوت: مندرجہ  $\hat{T}$  کی ایک امتیازی قدر  $\lambda$  ہے:  $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ ، جہاں  $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$  ہے۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$\langle \alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle \alpha|\lambda\alpha\rangle = \lambda \langle \alpha|\alpha\rangle$$

ساتھ ہی  $\hat{T}$  ہر مشی ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\langle \alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle \hat{T}\alpha|\alpha\rangle = \langle \lambda\alpha|\alpha\rangle = \lambda^* \langle \alpha|\alpha\rangle$$

لیکن  $\langle \alpha|\alpha\rangle \neq 0$  ہے (مساوات ۲۰-A) لہذا  $\lambda = \lambda^*$  اور یوں  $\lambda$  حقیقی ہوگا۔

۲ ہر مشی تبادلہ کے منفرد امتیازی اقدار والے امتیازی سمتیہ قائم ہوں گے۔

ثبوت: مندرجہ کریں  $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$  اور  $\hat{T}|\beta\rangle = \mu|\beta\rangle$  ہیں، جہاں  $\lambda \neq \mu$  ہے۔ تب

$$\langle \alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle \alpha|\mu\beta\rangle = \mu \langle \alpha|\beta\rangle$$

اور اگر  $\hat{T}$  ہر مشی ہو درج ذیل ہوگا۔

$$\langle \alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle \hat{T}\alpha|\beta\rangle = \langle \lambda\alpha|\beta\rangle = \lambda^* \langle \alpha|\beta\rangle$$

لیکن (حبزو-الف کے تحت)  $\lambda = \lambda^*$  ہے، اور ہم مندرجہ کر چکے ہیں کہ  $\lambda \neq \mu$  ہے، لہذا  $\langle \alpha|\beta\rangle = 0$  ہوگا۔

ج ہر مشی تبادلہ کے امتیازی سمتیاتے فضا کا احاطہ کرتے ہیں۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں، یہ اس فقرہ کے مسترد ہونے سے کہ ہر مشی متالاب کو وتری بنایا جاسکتا ہے (مساوات A-۸۲ دیکھیں)۔ یہ حقیقت جو خاص تکنیکی ہے، وہ ریاضیاتی سہارا ہے جس پر، ایک لحاظ سے، زیادہ تر کوانٹائی میکانیات کھڑی ہے۔ چونکہ اس ثبوت کو لامتناہی ابعادی سمتی فضاوں تک وسعت نہیں دی جاسکتی، لہذا یہ ایک نہایت نازک اور باریک لڑی ہے جس پر کوانٹائی میکانیات منحصر ہے۔

سوال: A-۲۴ ہر مشی خطی تبادلہ کو تمام سمتیات  $|\alpha\rangle$  اور  $|\beta\rangle$  کے لئے لازماً  $\langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle = \langle \hat{T} \alpha | \beta \rangle$  مطمئن کرنا ہوگا۔ دکھائیں کہ اتنا کافی ہوگا (جو ایک حیرانی بات ہے) کہ تمام سمتیات  $|\gamma\rangle$  کے لئے  $\langle \gamma | \hat{T} | \gamma \rangle = \langle \hat{T} \gamma | \gamma \rangle$  ہو۔ اشارہ: پہلے  $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$  اور اس کے بعد  $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + i|\beta\rangle$  لیں۔

سوال: A-۲۵ درجہ ذیل لیں۔

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

۱ تصدیق کریں کہ  $T$  ہر مشی ہے۔

ب اس کی امتیازی امتداد تلاش کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ حقیقی ہیں)۔

ج امتیازی سمتیات تلاش کر کے ان کی معمول زنی کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ معیاری عمودی ہیں)۔

د اکبر اور ترساز متالاب  $S$  تیار کریں، اور صریح تصدیق کریں کہ یہ  $T$  کو وتری بناتا ہے۔

ه تصدیق کریں کہ  $T$  کے لئے مقطع  $T$  اور  $\text{Tr } T$  جو ہیں، وہی اس کے وتری روپ کے لئے بھی ہیں۔

سوال: A-۲۶ درجہ ذیل ہر مشی متالاب لیں۔

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

۱ اس متالاب کا مقطع،  $|T|$  اور  $\text{Tr}(T)$  تلاش کریں۔

ب متالاب  $T$  کی امتیازی امتداد تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ ان کا مجموعہ اور حاصل ضرب (مساوات A-۸۵ کے معنوں میں) حبز و (الف) کے عین مطابق ہے۔ متالاب  $T$  کا وتری روپ لکھیں۔

ج متالاب  $T$  کے امتیازی سمتیات تلاش کریں۔ ان خطاطی حلقہ کے اندر، دو خطی غیر تابع امتیازی سمتیات تیار کریں (ہر مشی متالاب کے لئے یہ قدم ہر صورت ممکن ہوگا، لیکن کسی بھی اختیاری متالاب کے لئے لازمی نہیں کہ ایسا ممکن ہو؛ سوال A-۱۹ کے ساتھ موازنہ کریں)۔ انہیں متائے بنائیں، اور تصدیق کریں کہ تیسرے کے لحاظ سے دونوں متائے ہیں۔ تینوں امتیازی سمتیات کی معمول زنی کریں۔

د ۱۱ اکسپریٹس  $S$  تیار کریں جو  $T$  کی وترتی سازی کرتا ہے، اور صریحاً دکھائیں کہ،  $S$  کو استعمال کرتے ہوئے، میٹابہت متبادلہ  $T$  کو موزوں وترتی روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال: A-۲۷ اکسپریٹس متبادلہ وہ ہے جس کے لئے  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$  ہو۔

۱ دکھائیں کہ کسی بھی سمتیات  $|\alpha\rangle$ ،  $|\beta\rangle$  کے لئے  $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \hat{U} \alpha | \hat{U} \beta \rangle$  کے معنوں میں اکسپریٹس متبادلہ اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

ب دکھائیں کہ اکسپریٹس متبادلہ کے امتیازی افتداری کا معیار 1 ہوگا۔

ج دکھائیں کہ منفرد امتیازی افتداری متعلق اکسپریٹس متبادلہ کے امتیازی سمتیات متائے ہوں گے۔

سوال: A-۲۸ قوالب کے تفاسلات ان کے ٹیلر تسلسل اتاع دیتے ہیں؛ مثلاً درج ذیل۔

$$e^M \equiv I + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots \quad (A-91)$$

۱ درج ذیل کے لئے  $\exp(M)$  تلاش کریں۔

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (ب) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (الف)$$

ب اگر  $M$  وترتی پذیر ہو، تب درج ذیل دکھائیں۔

$$|e^M| = e^{\text{Tr}(M)} \quad (A-92)$$

تبصرہ: اگر  $M$  غیر وترتی پذیر ہو تب بھی یہ درست ہوگا، تاہم ایسی عمومی صورت کے لئے اس کو ثابت کرنا زیادہ مشکل ہے۔

ج دکھائیں اگر قوالب  $M$  اور  $N$  مقلوبی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$e^{M+N} = e^M e^N \quad (A-93)$$

ثابت کریں (سادہ ترین متضاد مثال دے کر) کہ غیر مقلوبی متبادلہ کے لئے مساوات A-93، عام طور، درست نہیں۔

د دکھائیں اگر  $H$  ہر مثنیٰ ہو تب  $e^{iH}$  اکسپریٹس ہوگا۔



- binomial coefficient, 241
- blackbody spectrum, 252
- Bloch's theorem, 231
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 286
- Boltzmann factor, 367
- Born approximation, 428
- Born-Oppenheimer approximation, 382
- Bose condensation, 251
- Bose-Einstein distribution, 249
- bosons, 210
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bubble chamber, 447
- bulk modulus, 231
- cat paradox, 445
- Cauchy's
  - integral formula, 425
- centrifugal term, 146
- chain reaction, 363
- Chandrasekhar limit, 255
- characteristic
  - equation, 467
- chemical potential, 249
- Clebsch-Gordon coefficients, 193
- clones, 443
- closed, 449
- 21-centimeter line, 293
- adiabatic, 381
  - approximation, 382
  - theorem, 382
- adiabatic series, 405
- adjoint, 103, 460
- agnostic, 435
- Airy functions, 337
- Airy's equation, 337
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 222
- amplification, 363
- angular momentum
  - conservation, 173
  - extrinsic, 177
  - intrinsic, 177
- antisymmetric, 459
- approximation
  - impulse, 432
- argument, 60
- associative, 450
- bands, 236
- baryon, 194
- basis, 451
- Bell inequality, 440
- Berry's phase, 392
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156

- Slater, 216
- determinate state, 103
- deuterium, 299
- deuteron, 299
- diagonal
  - form, 469
  - main, 459
- diagonalizable, 469
- diagonalization, 469
- diagonalized
  - simultaneously, 471
- differential scattering cross-section, 409
- dimension, 451
- dipole moment
  - magnetic, 184
- Dirac
  - comb, 231
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 317
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 66
- distributive, 450
- dope, 237
- dynamic phase, 392
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103, 466
- eigenvalue equation, 103
- eigenvectors, 466
- electrodynamics
  - quantum, 280
- electron
  - classic radius, 178
- elements, 457
- energy
  - allowed, 28
  - conservation, 39
- energy gap, 292
- ensemble, 15
- cofactor, 462
- coherent states, 133
- collapse, 435
- collapses, 4, 111
- column matrix, 459
- commutation
  - canonical relation, 44
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 168
- commutative, 449
- commutator, 43, 461
- commute, 43
- complete, 35, 100, 451
- conductor, 237
- configuration, 239
- conjugate, 460
- connection formulas, 340
- continuity equation, 197
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- Coriolis, 390
- correlated, 436
- covalent bond, 216
- cubic symmetry, 300
- Darwin term, 282
- decay modes, 369
- decoherence, 445
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 230
- degenerate, 89, 104, 467
- degrees of freedom, 256
- delta
  - Kronecker, 34
- density
  - free electron, 229
- determinant, 461



- Gamow's theory, 332
- gaps, 236
- gauge
  - invariant, 205
  - transformation, 205
- gauge transformation, 397
- Geiger counter, 445
- generalized
  - distribution, 71
  - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 59
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric phase, 392
- geometric series, 255
- good
  - linear combinations, 265
- good quantum numbers, 277
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 454
- graviton, 166
- group theory, 194
- gyromagnetic ratio, 185
- half-life, 371
- Hamiltonian, 27
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 196
- Helium, 165
- Hermitian
  - conjugate, 48
- hermitian, 101, 460
  - anti, 130, 460
  - conjugate, 103
  - skew, 130, 460
- entangled states, 209, 437
- EPR paradox, 436
- equation
  - Helmholtz, 423
- exchange force, 215
- exchange integral, 317
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 229
  - temperature, 230
- Fermi surface, 229
- Fermi's Golden rule, 366
- Fermi-Dirac distribution, 249
- fermions, 210
- Feynman
  - diagram, 433
  - formulation, 433
- Feynmann-Hellmann theorem, 296
- fine structure, 274
- fine structure constant, 274
- flux quantization, 400
- forbidden transitions, 374
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
  - Rayleigh's, 417
- Foucault pendulum, 390
- Fourier
  - inverse transform, 62
  - transform, 62
- Frobenius
  - method, 53
- function
  - Dirac delta, 71
  - even, 31
  - Green's, 423
- fundamental theorem of algebra, 467
- g-factor, 280
- gamma function, 251

- Lamb shift, 274
- Landau Levels, 205
- Lande g-factor, 286
- Laplacian, 138
- Larmor formula, 370
- Larmor frequency, 187
- Larmor precession, 185
- laser, 363
- law
  - Hooke, 41
- LCAO, 315
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 178
- Levi-Civita symbol, 183
- lifetime, 334, 369
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- linear combination, 451
- linearly independent, 451
- Lithium, 165
- locality, 437
- Lorentz force
  - law, 204
- luminosity, 410
- magnetic flux, 393, 398
- magnetic moment
  - anomalous, 280
- magnetic resonance, 377
- mass
  - reduced, 208
- matrices, 98
- matrix, 458
  - S, 93
  - transfer, 94
  - unit, 461
  - zero, 466
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 249
  - transformation, 473
- hermitian conjugate, 460
- hidden variable, 438
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 237
- Hund's
  - first rule, 223
  - second rule, 223
  - third rule, 223
- Hund's Rules, 222
- hydrogen
  - muonic, 209
- hydrogenic atom, 165
- hyperfine structure, 274
- ideal gas, 247
- idempotent, 129
- imaginary, 460
- impact parameter, 407
- indeterminacy, 3
- induced, 447
- infinite spherical well, 146
- inner
  - product space, 453
- inner product, 98
- insulator, 236
- interference, 393
- inverse, 461
- inverse beta decay, 255
- inverse vector, 450
- ket, 128
- kion, 194
- Kronig-Penny model, 234
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 244
- Laguerre
  - associated polynomial, 158
  - polynomial, 158

- exchange, 211
  - lowering, 46, 169
  - projection, 129
  - raising, 46, 169
- orbital, 176
- orbitals, 221
- orthodox, 435
- orthogonal, 34, 100, 453
- orthohelium, 219
- orthonormal, 35, 100
- orthonormal set, 453
- orthorhombic symmetry, 300
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 316
- pair annihilation, 294
- parahelium, 219
- partial wave, 420
- partial wave amplitude, 416
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 287
- Pauli exclusion principle, 210
- Pauli spin matrices, 180
- periodic table, 221
- perturbation theory
  - degenerate, 262
- phase shift, 420
- phenomenon
  - watched pot, 446
- photocopier, 443
- pion, 194
- Planck's
  - formula, 165
- polynomial
  - Hermite, 57
- population inversion, 363
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
- mean, 7
- median, 7
- meson, 194
  - pi, 436
- metastable, 374
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 198
- momentum space wave function, 113
- momentum transfer, 429
- monochromatic, 364
- motion
  - cyclotron, 205
- multiple roots, 467
- muon catalysis, 323
- muonic hydrogen, 293
- muonium, 293
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 255
- nmr, 378
- node, 34
- non-normalizable, 13
- nonholonomic, 391
- norm, 453
- normal, 470
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100, 453
- nuclear magnetic resonance, 378
- null, 450
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 239
- oddness, 354
- operator, 17

- resonance curve, 378
- revival time, 88
- Reynolds number, 391
- Riemann zeta function, 251
- rigid rotor, 176
- Rodrigues
  - formula, 59
- Rodrigues formula, 142
- rotating wave approximation, 360
- rotation
  - generator, 203
- row matrix, 459
- Rydberg
  - constant, 165
  - formula, 165
- scattering
  - low energy, 429
  - low-energy soft-sphere, 429
  - matrix, 92, 93
  - Rutherford, 410, 431
  - Yukawa, 430
- scattering amplitude, 411
- scattering angle, 407
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schrodinger equation
  - integral form, 427
- Schwarz inequality, 99, 454
- screened, 221
- selection rules, 373
- semiconductors, 237
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 165
  - Fourier, 35
  - Lyman, 165
  - Paschen, 165
  - power, 43
  - realist, 3
- positronium, 209, 293
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 92
- probability
  - conservation, 197
  - density, 10
- probability current, 21, 197
- probable
  - most, 7
- product
  - inner, 453
- propagator, 433
- quantum
  - principle number, 155
  - Zeno effect, 446
- quantum dots, 323
- quantum dynamics, 351
- quantum electrodynamics, 362
- quantum jumps, 351
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quantum statics, 351
- quark, 194
- Rabi flopping frequency, 360
- radial equation, 146
- radiation zone, 414
- real, 460
- realist, 435
- recursion
  - formula, 54
- reflection
  - coefficient, 77
- relation
  - Kramers, 297
  - Pasternack, 297
- relativistic correction, 274

- stimulated emission, 362
- Stirling's approximation, 245
- superconducting, 400
- symmetric, 459
- symmetrization
  - requirement, 211
- temperature, 238
- tetragonal symmetry, 300
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 256
  - optical, 434
  - Plancherel, 62
- thermal equilibrium, 238
- Thomas precession, 281
- total cross-section, 410
- trace, 462, 464
- trajectory, 407
- transformation
  - linear, 455
- transformations
  - linear, 97
- transition, 164
- transition probability, 358
- transition rate, 365
- transitions
  - allowed electric dipole, 379
  - forbidden electric quadrupole, 379
  - forbidden magnetic dipole, 379
- transmission
  - coefficient, 77
- transpose, 459
- trigger, 363
- triplet, 191
- tunneling, 71, 78
- turning point, 326
- turning points, 69
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- shell, 221
- similar, 464
- singular, 462
- sodium, 23
- solenoid, 398
- solid angle, 389
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- span, 451
- spectral lines
  - coincident, 199
- spectrum, 104, 467
- spherical
  - harmonics, 144
- spherical Hankel functions, 415
- spherical symmetrical potential, 430
- spin, 176, 177
- spin down, 178
- spin up, 178
- spin-orbit
  - interaction, 281
- spin-orbit coupling, 274
- spin-spin coupling, 292
- spinor, 178
- spontaneous emission, 363
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 298
- state
  - bound, 69
  - excited, 33
  - ground, 33, 156
  - scattering, 69
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 253
- step function, 79
- Stern-Gerlach experiment, 187

wave function, 2  
 wave number, 411  
 wave vector, 226  
 wavelength, 18  
 white dwarf, 254  
 Wien displacement law, 253  
 WKB, 325  
  
 Yukawa potential, 320, 430  
  
 Zeeman effect, 285  
 zero, 450  
 zero-crossing, 34

unit  
     vector, 453  
 unitary, 462  
  
 valence, 225  
 Van der Waals interaction, 296  
 variables  
     separation of, 25  
 variance, 9  
 variational principle, 303  
 vector space, 449  
 vectors, 97  
 velocity  
     group, 65  
     phase, 65  
 virial theorem, 132  
     three-dimensional, 197  
  
 wag the tail, 55  
 wave  
     incident, 76  
     packet, 61  
     reflected, 76  
     transmitted, 76

- آبادی النساء، 363  
آثار، 462، 464  
آشناسان، پویشی و روزن تصاد، 436
- اتاقی، 364  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
احاطہ، 451  
ارتعاش  
نیوٹونیو، 127  
ارکان، 457  
از خود احسراج، 363  
اساس، 451  
استدالی، 449  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 197  
استمراریہ، 138  
اشاعت کار، 433  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغییریت، 303  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 274  
اعلیٰ موصلی، 400  
افسزائش، 363  
اکائی  
سمتیہ، 453  
اکبر، 462  
اکیس منی میز لکیر، 293  
الجبر اکائیادی مسئلہ، 467  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 178  
الیکٹران نیوٹونیو، 127  
امالی، 447  
امتیازی  
سمتیات، 466  
مقدر، 466  
مساوات، 467  
امتیازی تقاسم، 103
- امتیازی قیمت، 103  
امتیازی قیمت مساوات، 103  
انتخابی قواعد، 373  
انتشاری  
رشته، 66  
انتقال معیار حرکت، 429  
انخطاطی، 467، 104، 89  
انخطاطی دباؤ، 230  
انداز تنزل، 369  
اندرونی  
ضرب، 453  
ضرب نصف، 453  
اندرونی ضرب، 98  
انعکاس  
شرح، 77  
انکاری، 435  
اوسط، 7  
بارن تخمین، 428  
بارن و اوپن ہائیمبر تخمین، 382  
باضابطہ معیار حرکت، 206  
باضابطہ رشتہ، 436  
برقی جفت قطب احسراج، 361  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 280  
بُعد، 451  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 197  
بجھراو  
ردر فورڈ، 431، 410  
کم توانائی نرم کرہ، 429  
یوگاوا، 430  
بلا واسطہ مکمل، 317  
بلبل احسان، 447  
بل عدم مساوات، 440  
بند، 449  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنشتائن تقسیم، 249  
بوس انجماد، 251  
بوسن، 210

- بولسزمن حبزو ضربی، 367  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقناطیس، 286  
 سیریان، 194  
 میل  
 کردی قناصل، 148  
 بیک وقت وتری، 471  
 پلچک پھسری، 176  
 تابندگی، 410  
 تبدیل محل، 459  
 تجدیدی عرصہ، 88  
 تجربہ  
 شرٹن و گراخ، 187  
 تحرک زدہ احسراج، 362  
 تحویل، 164  
 تحویلات  
 احبازتی برقی جفت قطبی، 379  
 ممنوعہ مقناطیسی جفت قطبی، 379  
 تحویلی احتمال، 358  
 تحویلی شرح، 365  
 تخمین  
 ضرب، 432  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 77  
 تسلسل  
 بالمر، 165  
 پاشن، 165  
 طامتی، 43  
 فوریسر، 35  
 لیمان، 165  
 تشاکلی، 459  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 211  
 تفکیک، 239  
 تصادفی، 445  
 تعداد ممکن، 239  
 تعین حال، 103  
 تغیریت، 9  
 قناصل  
 ذیلیا، 71  
 گرین، 423  
 قناصلات ایسری، 337  
 قناصل موج، 2  
 قناصل، 128  
 تفسیری بھسراو عمودی تراش، 409  
 تقلید پسند، 435  
 تکمیل  
 ڈھانچائی، 316  
 ملازمی، 450  
 توانی  
 کلیہ، 54  
 توانائی  
 احبازتی، 28  
 توقعاتی  
 قیمت، 7  
 شنائی عددی سر، 241  
 حذر  
 متعدد، 467  
 حبزو ڈارون، 282  
 حبزوی موج، 420  
 حبزوی موج حیطہ، 416  
 حبزیتی تقسیمی، 450  
 جیم مقیاس، 231  
 جفت، 34  
 قناصل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقناطیسی، 184  
 جوڑی دار، 460  
 جوہری مدار چول  
 خطی جوڑ ترکیب، 315  
 جی حبزو ضربی، 280  
 حال  
 بھسراو، 69  
 زمینی، 33، 156



- مقید، 69  
ہجیان، 33  
حراری توازن، 238  
حرکت  
سائیکلوٹران، 205  
حرکی بیت، 392  
حرناگز، 381  
خمین، 382  
مسئلہ، 382  
حرناگز رقتل، 405  
حقیقت پسند، 435  
حقیقی، 460  
حیطہ بھراو، 411  
ختیت اساق، 445  
خط حرکت، 407  
خط اشعاعی، 414  
خطی الجبر، 97  
خطی تبادلہ، 97، 455  
خطی جوڑ، 28  
خطی غیر تابع، 451  
خطی مجموعہ، 451  
خفیہ متغیرات، 3  
حادث تشکیلی، 459  
خود شریک، 460  
خول، 221، 237  
خیالی، 460  
درجات آزادی، 256  
درجہ حرارت، 238  
درز، 236  
درز توانائی، 292  
دلیل، 60  
دم ہلانا، 55، 95  
دوری جدول، 221  
ذره  
غیر مستحکم، 21  
رو  
احتمال، 21  
رابی پاستی تعدد، 360  
ردای مساوات، 146  
رڈ برگ، 165  
کلیہ، 165  
رشتہ  
پتربک، 297  
کرامرس، 297  
رفتار  
دوری سمتی، 65  
گروہی سمتی، 65  
رمزاور وٹاؤنسڈ اثر، 85  
رواحتمال، 197  
روڈریگیس  
کلیہ، 142  
ریمان زیرتاق عمل، 251  
رینالڈ عدد، 391  
زاویائی معیار حرکت  
بقا، 173  
خلفی، 177  
غیر حلقی، 177  
زاویہ بھراو، 407  
زیمان اثر، 285  
ساکن  
حالیبت، 27  
سٹرنگ تخمین، 245  
سٹیفن بولٹزمن کلیہ، 253  
سرحدی شرائط، 32  
سرنگ زنی، 71، 78  
سفید بونا، 254  
سلور، 222  
سمتاویہ، 128  
سمتیات، 97  
سمتی فضا، 449  
سمتی موج، 226  
سوچ  
انکاری، 4  
تقلید پسند، 3  
حقیقت پسند، 3  
سوڈیم، 23  
سہ تا، 191

- سیاہ جسی طیف، 252  
سیڑھی  
عاملین، 46  
سیڑھی تنفس عمل، 79  
شمارک اثر، 298  
شرو وڈنگر  
غیر تابع وقت، 27  
شرو وڈنگر نقطہ نظر، 136  
شریک، 460  
شریک عامل، 103  
شریک گرفتہ، 216  
شاریائی مفہوم، 2  
شوارز عدم مساوات، 454، 99  
ضرر، 450  
ضرر مقام انقطاع، 34  
ضرر طالب، 459  
طاق، 34  
طاق پن، 354  
طامس استقبالی حرکت، 281  
طول موج، 18، 165  
طیف، 104، 467  
طیفی تحلیل، 130  
طیفی خطوط  
ہم میدان، 199  
عامل، 17  
تقلیل، 129  
تقلیل، 169، 46  
رفعت، 169، 46  
مبادلہ، 211  
عدد موج، 411  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عمر حیات، 334، 369  
عقدہ، 34  
علاقیت  
تفعلیہ و سہتاویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی متقل، 26  
عمودی، 34، 100، 470  
غیر مسلسل، 105  
غیر موصل، 236  
فنائن من  
اشکال، 433  
تشریح، 433  
ضرر، 15  
ضرری  
توانائی، 229  
درج حرارت، 230  
سطح، 229  
سہراستانون، 366  
ضرر میان، 210  
ضرری وڈیراک تقسیم، 249  
ضرر وینوس  
ترکیب، 53  
فضا  
بیرونی، 23  
دوہری، 128  
فورسہ  
الٹ بدل، 62  
بدل، 62  
فوق ورتاص، 390  
قابل مشاہدہ  
غیر ہم آہنگ، 116  
طالب، 458  
اکائی، 461  
بکھراؤ، 92، 93  
ترسیل، 94  
ضرر، 466  
تالیی ارکان، 125  
وتانون  
ہک، 41  
وتائب، 453  
وتائی مقین، 300  
قطار و طالب، 459  
قلبیہ، 443

- تواحد بن، 222  
توالرب، 98  
توت مبادلہ، 215
- لاپلاسی، 138  
لارمر  
استقبالی حرکت، 185  
لارمر تعدد، 187  
لاگنج  
شریک کشیر رکنی، 158  
کشیر رکنی، 158  
لامتناہی کروی کنواں، 146  
لیٹان، 178  
لتصیم، 165  
لگرانج مضرب، 244  
لسٹو سطحیں، 205  
لسٹے جی جبر و ضربی، 286  
لورینز قوت  
فانون، 204  
لوی و پچویت، 183  
لسیزر، 363  
لیژانڈر  
شریک، 142  
لیب انتقال، 274
- ماپ  
تبادلہ، 205  
غیر متغیر، 205  
ماپ تبادلہ، 397  
مبادلہ کھل، 317  
مقصرک، 363  
میثاب، 464  
متعمم  
تفاضل، 71  
تقسیم، 71  
متعمم شریاتی مفہوم، 111  
مختل  
سب سے زیادہ، 7  
محدود
- کروی، 139  
محالف بیٹا تحلیل، 255  
محالف سمتیہ، 450  
مختفیہ، 15  
بلال العکاس، 92  
موثر، 146  
مداخلت، 393  
مدار چے، 221  
مداری، 176  
مربع حکامیل، 13  
مربع حکامیل تفاعلات، 98  
مربع نقش  
ہارمونی، 32  
مربع کرکیر جبر و، 146  
مربع کروی مقناطیسی گمک، 378  
مساوات  
ہلم ہولڈر، 423  
مساوات ایسری، 337  
مساوات شروڈنگر، 2  
معمولی روپ، 427  
مسکن مقناطیسی نسبت، 185  
مسلسل تعامل، 363  
مسئلہ  
اہر نفٹ، 18  
بصریات، 434  
پلانشرال، 62  
ڈرٹلے، 35  
مساوی خانہ بندی، 256  
مسئلہ بلوچ، 231  
مسئلہ وناخن و بلن، 296  
مسئلہ وریل، 132  
تین البعادی، 197  
مظہر  
نگاہ تلے برتن، 446  
معدوم، 450  
معکوس، 461  
معمول زنی، 13  
فتایل، 14  
مستقل، 22  
ناقابل، 13

- معیول شدہ، 100، 453  
 معیار، 453  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکت کی فضا تقاسم موج، 113، 198  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 معیاری عمودی سلسلہ، 453  
 مقامیت، 437  
 مقطع، 461  
 سلیٹر، 216  
 مقابل، 43، 461  
 مقبلیت  
 باضابطہ رشتہ، 44  
 باضابطہ رشتہ، 138  
 بنیادی رشتہ، 168  
 مقلوب، 43  
 مقناطیسی ہوا، 393، 398  
 مقناطیسی گمک، 377  
 مقناطیسی معیار اثر  
 بے ضابطہ، 280  
 مکمل، 35، 100، 451  
 ملاوٹ، 237  
 ممنوعہ برقی جفت قطبی تجویلات، 379  
 ممنوعہ تجویلات، 374  
 منحنی گمک، 378  
 منہدم، 4، 111، 435  
 موج  
 آمدی، 76  
 ترسیلی، 76  
 منعکس، 76  
 موجی اکٹھ، 61  
 موزوں  
 خطی جوڑ، 265  
 موزوں کو انشائی اعداد، 277  
 موصل، 237  
 مہین ساخت، 274  
 مہین ساخت مستقل، 274  
 میدان، 194  
 میزنون  
 پائے، 436  
 میون عمل انگیزی، 323  
 میون نیوٹرینو، 127  
 میوٹنی ہائیڈروجن، 293  
 میوٹنیم، 293  
 میکسویل ویولیشنز من تقسیم، 249  
 نابودگی جوڑ، 294  
 نادر، 462  
 نازک مستحکم، 374  
 نزد، ہیلم، 219  
 نصف حیات، 371  
 نظریہ اضطراب  
 انحطاطی، 262  
 نظریہ گامو  
 الفا تحلیل، 332  
 نقطہ واپس، 326  
 نقل گیر آلہ، 443  
 نہایت مہین ساخت، 274  
 نیم موصل، 237  
 نیومن  
 کروی تقاسم، 148  
 نیوٹران ستارہ، 255  
 وائن وٹان ہوا، 253  
 واپسی نقطہ، 69  
 وتر  
 پذیر، 469  
 مرکز، 459  
 وتری  
 روپ، 469  
 وتری سازی، 469  
 وسطانیہ، 7  
 ون در وائس باہم عمل، 294  
 ونڈل وکراسرس وبرلوان، 325  
 ٹکراؤ مقدار معلوم، 407  
 ٹھوس زاویہ، 389  
 پازیترونیم، 293، 209  
 پاشن ویک اثر، 287  
 پالی اصول مناعت، 210

- پالی متالب چکر، 180  
پایان، 194  
پس پردہ، 221  
پلائنک  
کلیب، 165  
پشیاں، 236  
پیدا کار  
فصت میں انتقال کا، 136  
وقت میں انتقال، 136  
پیدا کار  
تفعل، 59  
گھومنا، 203  
چچوال لچھا، 398  
چندر شیکھر حد، 255  
چوزاویہ تشاکل، 300  
چکر، 177، 176  
مخالف میدان، 178  
ہم میدان، 178  
چکر و مدار باہم عمل، 281  
چکر و مدار ربط، 274  
چکر چکر ربط، 292  
چکر کار، 178  
ڈیراک  
علامت، 128  
کنگھی، 231  
معیاری عمودیت، 108  
ڈیلٹا  
کرونیٹر، 34  
ڈیوٹریم، 299  
ڈیوٹیران، 299  
کامل گیس، 247  
کایان، 194  
کنٹانت  
آزاد الیکٹران، 229  
احستال، 10  
کشیر رکنی  
ہرمانٹ، 57  
کرائنگ و پینی نمونہ، 234  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کروی تشاکلی مخفیہ، 430  
کروی بینکل تفاعلات، 415  
کعبی تشاکل، 300  
کل عمودی تراش، 410  
کلیات جوڑ، 340  
کلیدش و گورڈن عددی سر، 193  
کلیب  
ڈی پروگلی، 19  
روڈریگیس، 59  
ریلے، 417  
یولر، 30  
کلیب لارمر، 370  
کم توانائی بکھراؤ، 429  
کیٹ  
تخفیف شدہ، 208  
کوارک، 194  
کوانٹائی  
زینو اثر، 446  
صدر عدد، 155  
کوانٹائی اعداد، 147  
کوانٹائی برقی حرکیات، 362  
کوانٹائی حرکیات، 351  
کوانٹائی سکونیات، 351  
کوانٹائی عدد  
اسمعی، 145  
مقتناطیسی، 145  
کوانٹائی نقطہ، 323  
کوانٹائی پھیلاؤ، 351  
کوانٹائی ہبساؤ، 400  
کور یولس، 390  
کوشی  
کلیب عمل، 425  
کوپن ہیگن مفہوم، 4  
کیمیادی مخفیہ، 249  
گانگرگنت کار، 445  
گرام شم

- ہن
- کاپہلا فتاعده، 223
- کاتیرا فتاعده، 223
- کادوسرا فتاعده، 223
- ہندی تسلسل، 255
- ہندی بیت، 392
- ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
- ہیلیم، 165
- ہیلیم پرست، 219
- ہیملٹنی، 27
- ہیئت سیری، 392
- ہیئت انتہا، 420
- یو کاوا مخفیہ، 430، 320
- یک رنگی، 364
- یک طاقتی، 129
- ترکیب عمودیت، 107
- گرام و شمد حکمت عملی، 454
- گرفتگی، 225
- گروہی نظریہ، 194
- گرگنی، 391
- گریویشن، 166
- گھومتی موج تخمین، 360
- گیما تقاسم، 251
- ہائیڈروجن
- میوٹی، 209
- ہائیڈروجنی جوہر، 165
- ہارمونی
- مشرقی، 32
- ہارمونی مشرقی
- تین ابعادی، 196
- ہر مشی، 460، 101
- تبادلہ، 473
- جوڑی دار، 103، 48
- حیلاف، 460، 130
- منحرف، 460، 130
- ہر مشی جوڑی دار، 460
- ہلبرٹ فضا، 99
- ہم ضربی، 462
- ہمبستہ حال، 209
- ہمبستہ حالات، 437