

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متایج وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۱	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۳	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه
۶۹	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۱	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. متابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع نمبر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	.....	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	.....	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۵۰	.....	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	.....	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	.....	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	.....	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	.....	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	.....	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	.....	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	.....	دوپڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	.....	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	.....	ہائیڈروجن کا ہسین ساخت	۶.۳
۲۷۳	.....	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	.....	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	.....	زبان اثر	۶.۴
۲۸۳	.....	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	.....	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	.....	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	.....	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	.....	تغیری اصول	۷
۲۹۹	.....	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	.....	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	.....	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	.....	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	.....	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	.....	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	.....	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	.....	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	.....	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	.....	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	.....	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	.....	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	.....	انجذاب، تحرک شدہ احسراج اور از خود احسراج	۹.۲.۲
۳۵۸	.....	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۱	از خود احسراج	۹.۳
۳۶۱	آمنشائن عددی سر A اور B	۹.۳.۱
۳۶۳	بجبان حال کا عمر صحت	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱
۳۷۵	سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۲
۳۸۳	بیت بیری	۱۰.۲
۳۸۳	گرگئی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۵	ہندی بیت	۱۰.۲.۲
۳۹۱	اہارونو پوہم اثر	۱۰.۲.۳
۴۰۱	بکھراو	۱۱
۴۰۱	تعارف	۱۱.۱
۴۰۱	کلاسیکی نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۱
۴۰۵	کوانٹائی نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۲
۴۰۷	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۷	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۴۱۱	لائحہ عمل	۱۱.۲.۲
۴۱۳	پیتی انتقال	۱۱.۳
۴۱۶	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۱۶	مسوات شروڈنگر کی کملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۲۱	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۲۶	شکل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۹	پس نوشت	۱۲
۴۳۰	آمنشائن، پوڈلکی و روزن تصاد	۱۲.۱
۴۳۲	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۷	مسئلہ قلمیہ	۱۲.۳
۴۳۸	شروڈنگر کی پٹی	۱۲.۴
۴۴۰	کوانٹائی زینو تصاد	۱۲.۵
۴۴۳	خطی الجبرا	۱
۴۴۳	سمتیاریت	۱.۱
۴۴۳	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۴۴	قوالب	۳.۱
۴۴۴	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۴	امتیازی تقاعلات اور امتیازی افتدار	۵.۱

۶.۱ ہر مشی تبادلے ..... ۴۴۴

فہرہنگ ۴۴۵





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۸

# ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین

ونٹزل وکرامرس وبرلوان ترکیب سے غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کی یک بُعدی تخمینہ حل حاصل کیے جاسکتے ہیں (اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفسیقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شرودنگر کی رد اسی حصے پر کیا جاسکتا ہے)۔ یہ مقید حال توانائیوں اور مخفی رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں خصوصاً مفید ثابت ہوتا ہے۔

اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ایک ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو ایک ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ  $V(x)$  مستقل ہو۔ تفاعل موج،  $E > V$  کی صورت میں، درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لئے منفی علامت استعمال ہوگا (یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دے گا)۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے، جس کا طول موج  $(\lambda = 2\pi/k)$  اٹل اور حیطہ (A) غیر تغیری ہے۔ اب فرض کریں  $V(x)$  مستقل نہیں، بلکہ  $\lambda$  کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہوگا، لہذا کئی مکمل طول موج پر مخفیہ مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\psi$  عملائن نہ ہوگا، تاہم اس کا طول موج اور حیطہ  $x$  کے ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین کے تصور کی بنیاد ہے۔ درحقیقت، یہ  $x$  پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے: تیز ارتعاشات، اور ان کے طول موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی۔

اسی طرح،  $E < V$  (جہاں  $V$  مستقل ہے) کی صورت میں  $\psi$  قوت نمائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V - E)}}{\hbar}$$

WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)<sup>1</sup>

اور اگر  $V(x)$  مستقل نہ ہو، بلکہ  $1/\kappa$  کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو، تب حل عملاً قوت نہائی ہوگا، البتہ  $A$  اور  $\kappa$  اب  $x$  کے تفاعل ہوں گے جو آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔

یہ پورا قصہ کلاسیکی نقطہ والپیڈ<sup>۲</sup>، جہاں  $V \approx E$  ہو، کے مثریتی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا۔ چونکہ یہاں  $\lambda$  (یا  $1/\kappa$ ) لامتناہی تک بڑھتا ہے، اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ  $V(x)$  معتدلے میں ”آہستہ آہستہ“ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا ہم دیکھیں گے، اس تخمین میں نقاط واپس سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا، اگرچہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

## ۸.۱ کلاسیکی خطہ

مساوات شرڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے، جس کی کل توانائی  $E$  اور محلی توانائی  $V(x)$  ہے۔ فی الحال میں فرض کرتا ہوں کہ  $E > V(x)$  ہے، لہذا  $p(x)$  حقیقی ہوگا؛ اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں چونکہ کلاسیکی طور پر یہ ذرہ سرعت  $x$  پر رہنے کا پابند ہوگا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر،  $\psi$  ایک مخلوط تفاعل ہوگا؛ اس کو جیٹ،  $A(x)$ ، اور ہیٹ،  $\phi(x)$ ، جہاں دونوں حقیقی ہیں، کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

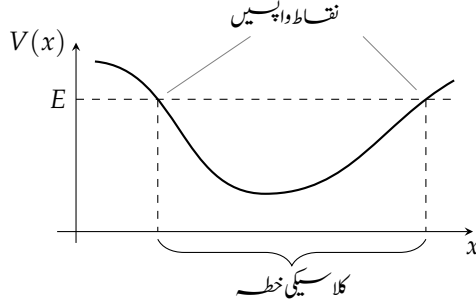
ہم  $x$  کے لحاظ سے تفرق کو قوت نہائی میں چھوٹی لکیر ( $'$ ) سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

turning point<sup>۳</sup>



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خط میں مقید ہوگا جہاں  $E \geq V(x)$  ہو۔

لکھ سکتے ہیں۔ اس کو مساوات ۸.۱ میں پُر کرتے ہیں۔

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$

دونوں ہاتھ کے حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات:

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \Rightarrow A'' = A \left[ (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

جبکہ خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسری حقیقی مساوات:

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0 \Rightarrow (A^2\phi')' = 0$$

حاصل ہوگی۔

مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ ہر لحاظ سے اصل مساوات شرودنگر کے معادل ہیں۔ ان میں سے دوسری یا آسانی حاصل ہوتی ہے:

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2 \Rightarrow A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں  $C$  (حقیقی) مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۸.۶) عموماً حل نہیں کی جاسکتی ہے، لہذا ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے: ہم فرض کرتے ہیں کہ جیلہ  $A$  بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے، لہذا اجزاء  $A''$  متابل نظر انداز ہوگا (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ہم فرض کرتے ہیں کہ  $(\phi')^2$  اور  $p^2/\hbar^2$  سے  $A''/A$  بہت کم ہے)۔ ایسی صورت میں، ہم مساوات ۸.۶ کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے:

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

حاصل کرتے ہیں، لہذا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

ہوگا۔ (میں فی الحال اس کو ایک غیر قطعی شکل لکھتا ہوں؛ کسی بھی مستقل کو  $C$  میں ضم کیا جاسکتا ہے، جس کے تحت  $C$  مخلوط ہو سکتا ہے۔) اس طرح

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (\text{ونڈل وکرامرس ویرلوان کلیہ})$$

ہوگا، اور (تخمینی) عمومی حل اس طرح کے دو اجزاء کا خطی جوڑ ہوگا، جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت، نقطہ  $x$  پر ذرہ پایا جانے کا احتمال، اس نقطہ پر ذرے کے (کلاسیکی) معیار حرکت (لہذا سمتی رفتار) کا بالکل عکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں، چونکہ جس مقام پر ذرے کی رفتار تیز ہو، وہاں اس کے پائے جانے کا احتمال کم ہوگا۔ درحقیقت، بعض اوقات تفسیقی مساوات میں جزو  $A''$  نظر انداز کرنے کی بجائے، اس نیم کلاسیکی مشاہدے سے آغاز کرتے ہوئے ونڈل وکرامرس ویرلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ موحصر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے، لیکن اول الذکر بہتر طبعی و جب پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ موڑے دار ہو (شکل ۸.۲)۔

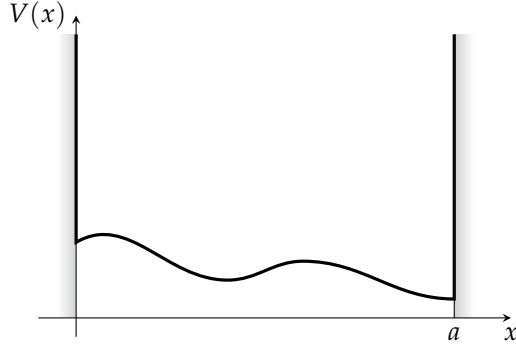
$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کوئی منتخب تناسب} & 0 < x < a \\ \infty, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

کنویں کے اندر (ہر جگہ  $E > V(x)$  مندرجہ کرتے ہوئے)

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

ہوگا، جس کو بہتر انداز میں

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$



شکل ۸.۲: ایسا لامستثنائی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

لکھا جاسکتا ہے، جہاں (یہ جانتے ہوئے کہ ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی سے منتخب کر سکتے ہیں) درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx' \quad (۸.۱۴)$$

اب  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  لازماً صفر کو پہنچے گا، لہذا (چونکہ  $\psi(0) = 0$  ہے)  $C_2 = 0$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $x = a$  پر بھی  $\psi(x)$  صفر کو پہنچے گا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (۸.۱۵)$$

ماخوذ:

$$\int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar \quad (۸.۱۶)$$

یہ کوانٹائزیشن شرط (تخمینی) احبازی توانائیوں کا تعین کرتی ہے۔

مثلاً، اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو ( $V(x) = 0$ )، تب  $p(x) = \sqrt{2mE}$  (ایک مستقل) ہوگا، اور مساوات ۸.۱۶ کے تحت  $p(x) = n\pi\hbar$  یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

ہوگا، جو لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرائما کلیہ ہے (مساوات ۲.۲۷)۔ یہاں ڈنڈل وکرام سرس ویرلوان تخمینہ ہمیں بالکل ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے (اصل تفعل موج کا حیطہ مستقل ہے، لہذا  $A''$  کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا)۔ □

سوال ۸.۱: ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی احبازتی توانائیاں ( $E_n$ ) تلاش کریں جس کی نصف تہ میں  $V_0$  بلند سیر ہی پائی جاتی ہو (شکل ۶.۳)۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

اپنے جواب کو  $V_0$  اور  $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$  (بغیر سیر ہی لامتناہی چوکور کنویں کی  $n$  ویں احبازتی توانائی) کی صورت میں لکھیں۔ فرض کریں  $E_1^0 > V_0$  ہے، تاہم یہ فرض نہ کریں کہ  $E_n \gg V_0$  ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال ۶.۱ میں رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹے  $V_0$  (جہاں نظریہ اضطراب کا آمد ہوگا) یا بہت بڑے  $n$  (جہاں ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کارآمد ہوگی) کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونڈل وکرامرسس و برلوان کلیہ (مساوات ۸.۱۰) کو  $\hbar$  طاقتی توسیع سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ آزاد ذرے کے تفاعل موج  $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$  سے حوصلہ افزا ہو کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں  $f(x)$  کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ (دھیان رہے کہ ہم یہاں عمومیت نہیں کھوتے؛ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔)

۱. اس کو (مساوات ۸.۱ روپ کی) مساوات شروڈنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

ب. تفاعل  $f(x)$  کو  $\hbar$  کے طاقتی تسلسل کی صورت:

$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

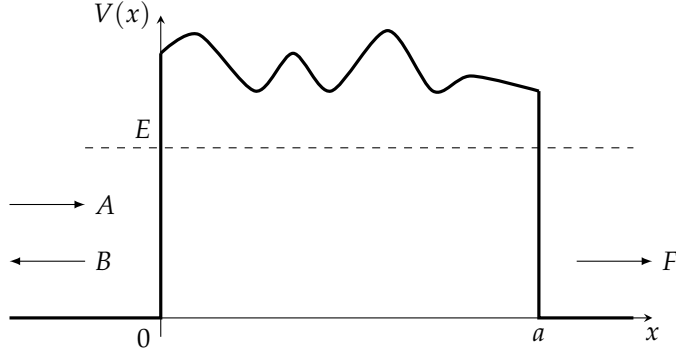
میں لکھ کر  $\hbar$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ}$$

ج. انہیں  $f_0(x)$  اور  $f_1(x)$  کے لئے حل کر کے دکھائیں کہ  $\hbar$  کی اول رتبہ تک آپ مساوات ۸.۱۰ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عدد کے لوگار تھم کی تعریف  $\ln(-z) = \ln(z) + i\pi$  ہے، جہاں  $n$  طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں، تب دونوں اطراف کو قوت نام میں منتقل کر کے دیکھیں۔





شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کی مستطیلی رکاوٹ سے بکھراؤ۔

## ۸.۲ سرنگ زنی

اب تک  $E > V$  فرض کیا گیا، لہذا  $p(x)$  حقیقی تھا۔ ہم غیر کلاسیکی خط ( $E < V$ ) کا مطالعہ کرتے ہیں: نتیجہ باآسانی لکھ سکتے ہیں:

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

یہ پہلے کی طرح ہے (مساوات ۸.۱۰)، تاہم اب  $p(x)$  تخیلی ہے۔<sup>۳</sup>

ایک مثال کے طور پر، مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہو (شکل ۸.۳) سے بکھراؤ کے مسئلے پر غور کریں۔ رکاوٹ کی بائیں جانب ( $x < 0$ )

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

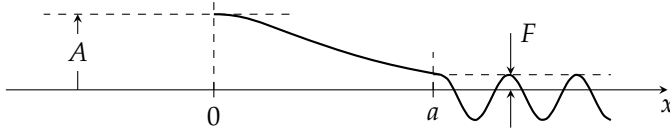
ہوگا، جہاں  $A$  آمدی جیٹ اور  $B$  منعکس جیٹ ہے، اور  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے (حصہ ۲.۵ دیکھیں)۔ رکاوٹ کے دائیں جانب ( $x > a$ )

$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

ہوگا؛  $F$  ترسیلی جیٹ ہے، اور ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

<sup>۳</sup> اس صورت میں تصاعلی موج حقیقی ہوگا، اور مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ کے ممابث ضروری نہیں کہ مساوات ۸.۵ سے حاصل ہوں، اگرچہ یہ اب بھی کافی ہیں۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں، سوال ۸.۲ میں پیش متبادل حصول کے طریقے پر غور کریں۔



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بھراؤ کے تعامل موج کی کیفی ساخت۔

سرنگ زنی خطہ  $(0 \leq x \leq a)$  میں ونٹرل وکرامرس ویرلوان تخمین درج ذیل دیگی۔

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

اگر رکاوٹ بہت بلند، یا بہت چوڑا یا دونوں ہو (یعنی جب سرنگ زنی کا احتمال بہت کم ہو)، تب قوت نمائی بڑھتے حبز و کا عددی سر (C) لازماً چھوٹا ہوگا (درحقیقت، لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا)، اور تعامل موج کا نقش شکل ۸.۴ کی طرز سے ہوگا۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوت نمائی میں کل کی، آمدی اور ترسیلی امواج کے حیثوں کے تناسب کو تعین کرتا ہے

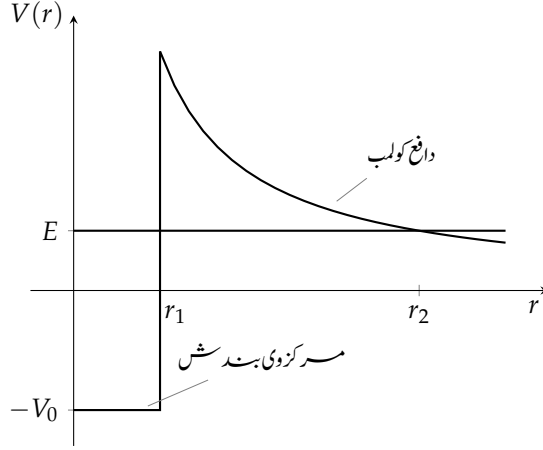
$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۲) \quad T \cong e^{-2\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx$$

مشال ۸.۲: الفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ ۱۹۲۸ء میں جارج گامو نے مساوات ۸.۲۲ استعمال کرتے ہوئے الفا تحلیل (چند مخصوص تابکار مرکزہ سے، دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل، الفا ذرہ کے احسراج) کی وجہ پیش کی۔ چونکہ الفا ذرہ مثبت بار (2e) کا حامل ہے، لہذا اچھے ہی یہ مرکزوی بندشی قوت کی پہنچ سے باہر نکلتا ہے، باقی مرکزہ (Z) کے بار (Ze) کی برقی قوت دافع اس کو دور جانے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن، اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا (جو یورینیم کی صورت میں) حنارجی الفا ذرہ کی توانائی سے دو گن سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر (پروٹان کے رداس  $r_1$  وسعت کے چور کنواں (جو مرکزوی قوت کشش کو ظاہر کرتا ہے) کو کولمب قوت دافع کی دم سے جوڑ کر ظاہر کیا (شکل ۸.۵)، اور کوانٹائی سرنگ زنی کو الفا ذرہ کی منسراج کی وجہ مترا دیا (مرکزوی طبعیات پر کوانٹائی میکانیات کے اطلاق کا یہ پہلا واقعہ ہے)۔

<sup>۳</sup> اس تجسّی دلیل کو زیادہ پختہ بنایا جاسکتا ہے (سوال ۸.۱۰ دیکھیں)۔  
Gamow's theory of alpha decay<sup>۵</sup>



شکل ۸.۵: تابکار مسرکزہ میں الفا ذرے کی مخفی توانائی کا گامونہ۔

اگر خارج الفا ذرے کی توانائی  $E$  ہو، بیرونی واپس نقطے ( $r_2$ ) کا تعین درج ذیل کرے گا۔

(۸.۲۳)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E$$

ظاہر ہے قوت نہ  $\gamma$  (مساوات ۸.۲۲) درج ذیل ہوگا۔<sup>۱</sup>

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr$$

اس نکل میں  $r \equiv r_2 \sin^2 u$  پر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

(۸.۲۴)

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right]$$

عام طور پر  $r_1 \ll r_2$  ہوگا، لہذا ہم چھوٹے زاویوں کا تخمینہ ( $\sin \epsilon \cong \epsilon$ ) استعمال کر کے اس نتیجے کا سادہ روپ حاصل کرتے ہیں:

(۸.۲۵)

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ \frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}$$

<sup>۱</sup> یہاں رکاوٹ کی بائیں جانب مخفی عنصر نہیں ہے (مزید، حقیقتاً یہ تین بعدی مسئلہ ہے)، تاہم مساوات ۸.۲۲ میں پیش بنیادی تصور سے ہمیں دلچسپی ہے۔

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

(عمومی مرکزہ کی جامت تقریباً  $10^{-15} \text{ m}$  یعنی  $1 \text{ fm}$  ہوتی ہے۔)

اگر ہم مرکزہ کے اندر الفا ذرے کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار  $v$  ہے، تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً  $2r_1/v$  ہوگا، لہذا تصادم کا تعدد  $v/2r_1$  ہوگا۔ ہر تصادم پر فضا پر ہونے کا احتمال  $e^{-2\gamma}$  ہے، لہذا اکائی وقت میں احسرا کا احتمال  $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$  ہوگا، اور یوں مائی مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم  $v$  نہیں جانتے، لیکن اس سے زیادہ مشرق نہیں پڑتا، چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوت نمائی جزو ضروری پچیں رتی تک تبدیل ہوتا ہے؛ اس کے سامنے  $v$  کی تبدیلی متبادل نظر انداز ہے۔ بالخصوص، عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو  $1/\sqrt{E}$  کے ساتھ تسم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط (شکل ۸.۶) حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ کے تحت ہوگا۔ □

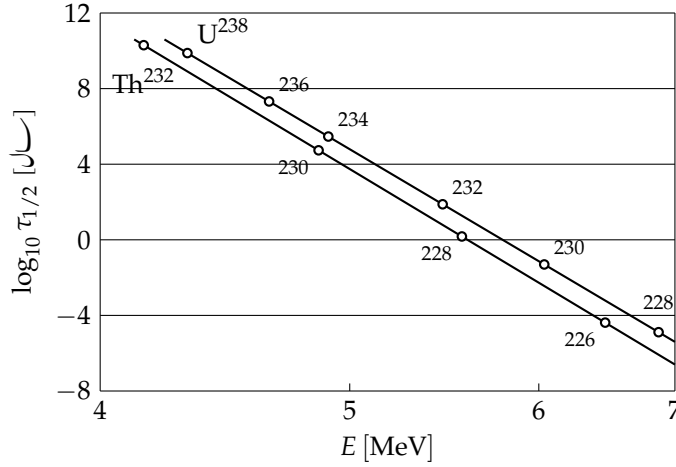
سوال ۸.۳: ایک مستثنائی چوکور کاوٹ، جس کی اونچائی  $E > V_0$  اور چوڑائی  $2a$  ہے، سے ایسے ذرے، جس کی توانائی  $E$  ہے، کی تخمینی ترسیمی احتمال مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ اصل نتیجے (سوال ۲.۳۳) کے ساتھ کریں، جس تک ونٹرل وکرامرس ویرلوان طریق  $T \ll 1$  میں اس کی تخفیف ہوگی۔

سوال ۸.۴: مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے  $^{238}\text{U}$  اور  $^{212}\text{Po}$  کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ اشارہ: تمام مرکزہ میں مرکزہ کی کثافت تقریباً ایک جیسی ہوتی ہے، لہذا  $(r_1)^3$  (پروٹان اور نیوٹران کی تعداد کے مجموعہ)  $A$  کا راست متناسب ہوگا۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے۔

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}$$

حسرا شدہ الفا ذرے کی توانائی، کلیہ آئنشتائن ( $E = mc^2$ ) سے اخذ کی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2$$



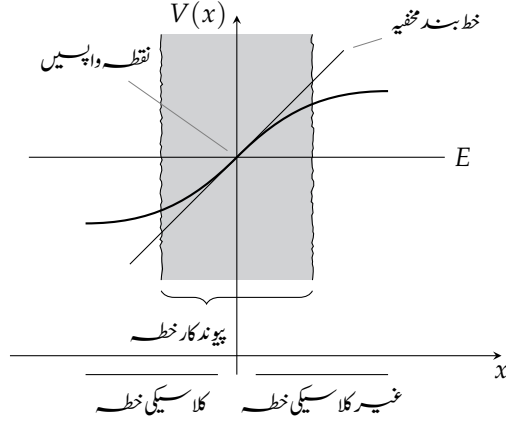
شکل ۸.۶: یورینیم اور تھوریئم کے عرصہ حیات کے لوگار تھم بالقابل  $1/\sqrt{E}$  کی ترسیمات (جہاں خارجی الفا ذرے کی توانائی  $E$  ہے)۔

جہاں  $m_p$  مائی مسرکزہ کی کمیت،  $m_d$  بیٹی مسرکزہ کی کمیت، اور  $m_\alpha$  الفا ذرے (یعنی  $\text{He}^4$  مسرکزہ) کی کمیت ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ بیٹی مسرکزہ کیا ہوگا، یاد رہے کہ الفا ذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران لے کر منسار ہوتا ہے، لہذا  $Z$  سے دو اور  $A$  سے چار منفی کریں۔ حاصل جوابات استعمال کرتے ہوئے دوری جدول سے کیمیائی عنصر کا تعین کریں۔ سستی رفتار  $v$  کی اندازاً قیمت  $E = (1/2)m_\alpha v^2$  سے حاصل کریں؛ یہ مسرکزہ کے اندر منفی مخفی توانائی کو نظر انداز کرتی ہے، لہذا  $v$  کی قیمت اصل سے زیادہ دیگی، تاہم اب تک ہم صرف اتنا ہی کر سکتے ہیں۔ اتفاقی طور پر ان کیمیائی عناصر کی تجربے سے حاصل کردہ عرصہ حیات بالترتیب  $6 \times 10^9$  سال اور  $0.5 \mu\text{s}$  ہے۔

### ۸.۳ کلیات پیوند

اب تک کے بحث و فکر میں میں فرض کرتا ہوں کہ مخفی کنویں (یا رکاؤٹ) کی ”دیواریں“ انتہائی تھیں، جس کی بنا پر بیرونی حل آسان اور سرحدی شرائط سادہ تھے۔ درحقیقت، ہمارے مرکزی نتائج (مساوات ۸.۱۶ اور ۸.۲۲) اس صورت میں بھی کافی حد تک درست ثابت ہوتے ہیں جب کناروں کی ڈھلان زیادہ سنہ ہو (یعنی نظریہ گاموس میں ایسی صورت پر ہی ان کا اطلاق کیا گیا)۔ بہر حال، نقطہ واپسین ( $E = V$ )، جہاں ”کلاسیکی“ اور ”غیر کلاسیکی“ خطے جڑتے ہیں اور ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین نافتا بل استعمال ہوگی، پر ہم تقف عمل موج کا فترتی مطالعہ کرنا چاہیں گے۔ اس حصہ میں میں مقید حال مسئلہ (شکل ۸.۱) پر غور کروں گا؛ آپ مسئلہ بھسراو (سوال ۸.۱۰) حل کریں گے۔<sup>۸</sup>

<sup>۸</sup> انتباہ: درج ذیل دلائل زیادہ تکنیکی ہیں جنہیں پہلی مرتبہ پڑھ کر سمجھنا ضروری نہیں۔



شکل ۸.۴: دائیں ہاتھ نقطہ واپس کو وضاحت سے دکھایا گیا ہے۔

اپنی آسانی کی خاطر، ہم محدود یوں منتخب کرتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپس  $x = 0$  پر واقع ہو (شکل ۸.۴)۔ ونزل و کرامرس و برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \end{cases}$$

(یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام  $x > 0$  کے لئے  $E$  سے  $V(x)$  بڑا ہوگا، ہم اس خطہ میں مثبت قوت نمائے کو خارج کر سکتے ہیں، چونکہ  $x \rightarrow \infty$  پر یہ بے فتابو بڑھتا ہے۔) ہمارا کام ان دو حل کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے۔ لیکن یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا درپیش ہے: ونزل و کرامرس و برلوان تخمین میں نقطہ واپس (جہاں  $p(x) \rightarrow 0$  ہوگا) پر  $\psi$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تقاضا عمل یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا؛ جیسا ہمارا گمان بھتا، ونزل و کرامرس و برلوان تخمین نقطہ واپس کی پڑوس میں نافتا بل استعمال ہے۔ لیکن احبازتی توانائیوں کا تعین تقاضا واپس پر سرحدی شرائط کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا ”پیوند کار“ تقاضا عمل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپس کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونزل و کرامرس و برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تقاضا عمل موج ( $\psi_p$ ) صرف مبداء کے پڑوس میں چاہیے، لہذا ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر:

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمینہ دے کر، اس خط بند  $V$  کے لئے مساوات شروڈنگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p$$

حل کرتے ہیں، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان  $\alpha$  کو غیر تابع متغیر میں ضم کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p$$

یہ مساوات <sup>۹</sup> ایئرے<sup>۱۰</sup> کے حلوں کو تفاعلاتی ایئرے<sup>۱۰</sup> کہتے ہیں۔ "چونکہ مساوات ایسری دور تہی تفرقی مساوات ہے، لہذا دو خطی غیر تابع ایسری تفاعلات  $\text{Ai}(z)$  اور  $\text{Bi}(z)$  پائے جاتے ہیں۔

ان کا تعلق رتبہ  $1/3$  کے میل تفاعلات کے ساتھ ہے؛ ان کے چند خواص جدول ۸.۱ میں پیش کیے گئے ہیں جبکہ شکل ۸.۸ میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ پیوند کار تفاعل موج  $\text{Ai}(z)$  اور  $\text{Bi}(z)$  کا خطی جوڑ:

$$(۸.۳۷) \quad \psi_p(x) = a \text{Ai}(\alpha x) + b \text{Bi}(\alpha x)$$

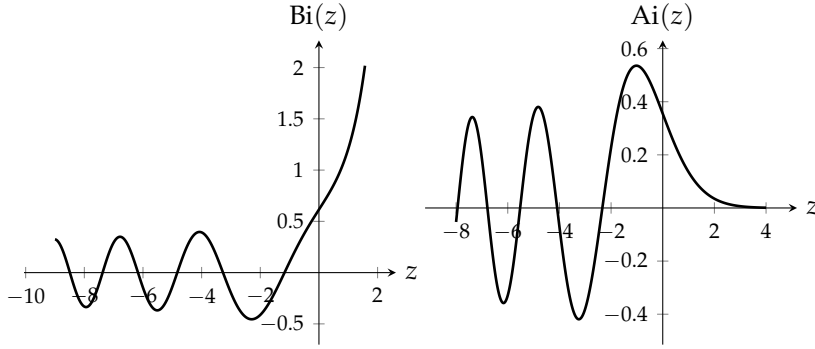
ہوگا، جہاں  $a$  اور  $b$  مناسب مستقلات ہیں۔

اب  $\psi_p$  مبداء کے پڑوس میں (تخمینی) تفاعل موج ہے؛ ہم نے مبداء کے دونوں اطراف منطق خطوں میں  $\psi_p$  کو ونڈل وکرامرس و برلوان حلوں کے ساتھ ہم پلہ بنانا ہوگا (شکل ۸.۹ دیکھیں)۔ یہ منطق خطے نقطہ واپسیں کے اتنے متضرب ہیں کہ خط بند مخفیہ کافی درست ہوگا (لہذا  $\psi_p$  اصل تفاعل موج کا بہترین تخمینہ ہوگا)، اور ساتھ ہی

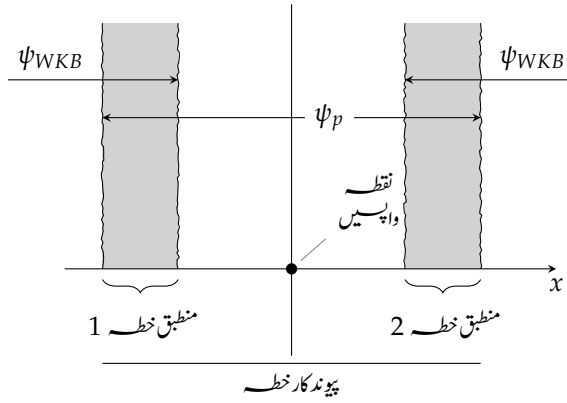
<sup>۹</sup> Airy's equation

<sup>۱۰</sup> Airy functions

اکلاسیکی طور پر، خطی مخفیہ سے مراد مستقل قوت، لہذا مستقل اسراع ہے؛ یہ سادہ ترین حسرت ہے، جہاں سے بنیادی میکانیات کا آغاز ہوتا ہے۔ ستم ظریفی کی بات ہے کہ یہی سادہ مخفیہ، کوانٹائی میکانیات میں مادرائی تفاعلات کو جنم دیتا ہے، اور اس نظریہ میں کلیدی کردار ادا نہیں کرتا۔



شکل ۸.۸: ایسری تفاعلات کی ترسیات



شکل ۸.۹: پیوندی خط اور دو منطق خط۔



جدول ۸.۱: ایسری تفاعلات کے چند خواص۔

$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$ <p>تفصیلی مساوات:</p> <p>حل:</p> $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$ $Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{s^3}{3} + sz} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$ <p>متقارب روپ:</p> $\left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \right\} z \ll 0$	$\left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \end{aligned} \right\} z \gg 0$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

نقطہ واپس سے اتنے دور ضرور ہیں کہ ونڈل وکرا مسرے ویرلوان تخمین پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔<sup>۱۲</sup> منطق خطوں میں مساوات ۸.۳۲ کارآمد ہے، لہذا (مساوات ۸.۳۴ کی علاقیت میں) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۸) \quad p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar \alpha^{3/2} \sqrt{-x}$$

بالخصوص منطق خطہ 2 میں

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar \alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar (\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، لہذا ونڈل وکرا مسرے ویرلوان تفاعلی موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۸.۳۹) \quad \psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar \alpha^{3/4} x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

ایسری تفاعلات کی بڑی  $z$  متقارب روپ<sup>۱۳</sup> (جدول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے، منطق خطہ 2 میں پیوند کار

<sup>۱۲</sup> یہ نازک دوہری مسلط شرط ہے، اور ایسے گھمبیر مچنے حیا کرنا ممکن ہے کہ جن میں اس طرے کا کوئی منطق خطہ نہ پایا جاتا ہو۔ البتہ، عملی استعمال میں ایسا شاذ و نادر ہی ہوتا ہے۔ سوال ۸.۸ دیکھیں۔

<sup>۱۳</sup> پہلی نظر میں، اس خطہ میں، جسے  $z = 0$  پر نقطہ واپس کا متعرب تصور کیا گیا ہے (لہذا محفہ کا خط بند تخمین کارآمد ہوگا)، بڑی  $z$  تخمین کا استعمال نامعقول نظر آتا ہے۔ لیکن یہاں تفاعلی عمل کا دلیل  $z$  نہیں  $\alpha x$  ہے، اور اگر آپ غور کریں (سوال ۸.۸، دیکھیں) تو آپ دیکھیں گے کہ (عموماً) ایسا خطہ ہوگا جہاں  $\alpha x$  بڑا ہوگا، اور ساتھ ہی  $V(x)$  کو خطی کسیرے تخمین دینا معقول ہوگا۔

تفاعل موج (مادات ۸.۳۷) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D \quad \text{اور} \quad b = 0$$

ہم یہی کچھ منطبق خط 1 کے لئے بھی کرتے ہیں۔ اب بھی مادات ۸.۳۸ ہمیں  $p(x)$  دیگی، تاہم اس مرتبہ  $x$  منفی ہوگا، لہذا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3} \hbar (-\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، اور ونڈل وکرامرس وبرلوان تفاعل موج (مادات ۸.۳۱) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}(-x)^{1/4}}} \left[ B e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right]$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی  $z$  کے لئے ایسری تفاعل کا متعارف روپ (جدول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعل (مادات ۸.۳۷) جس میں  $b = 0$  لیا گیا ہو) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۴) \quad \begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[ \frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

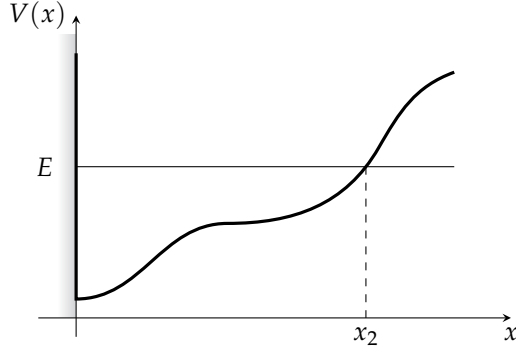
منطبق خط 1 میں ونڈل وکرامرس وبرلوان اور پیوندی تفاعل موج کے موازنہ سے

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar\alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar\alpha}}.$$

حاصل ہوگا، جس میں  $a$  کی قیمت مادات ۸.۴۱ سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۸.۴۵) \quad B = -ie^{i\pi/4} D \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4} D$$

انہیں **کلیاتے جوڑ**<sup>۱۴</sup> کہتے ہیں، جو نقطہ واپسیں کے دونوں اطراف ونڈل وکرامرس وبرلوان حلوں کو آپس میں پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعل موج کا کام، نقطہ واپسیں پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا؛ اس کی ضرورت آگے نہیں آئے



شکل ۸.۱۰: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔

گی۔ تمام چیزوں کو معمولی زنی مستقل  $D$  کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپسیں کو واپس مبداءے اختیاری نقطہ  $x_2$  منتقل کرتے ہوئے، ونڈل وکرا مسرس وپروان تفاعل موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۸.۳۶) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2 \end{cases}$$

مثال ۸.۳: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔ فرض کریں ایک مخفیہ کنویں کی  $x = 0$  پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہے (شکل ۸.۱۰)۔ ایسی صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا لہذا مساوات ۸.۳۶ کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

یاد رہے ذیل ہوگا۔

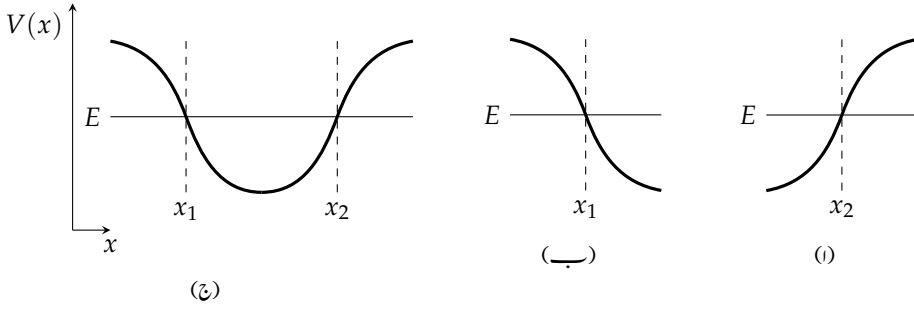
$$(۸.۴۷) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi \hbar$$

مثلاً، ”نصف ہارمونی سرعش“:

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & x > 0, \\ 0, & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}$$



شکل ۸.۱۱: بالائی رخ ڈھلوان اور نیچے رخ ڈھلوان نقطہ واپسیں۔

ہوگا، جہاں

$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

نقطہ واپسیں ہے۔ لہذا

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}$$

ہوگا، اور کوانٹائزیشن شرط (مساوات ۸.۴۷) درج ذیل دیگا۔

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar\omega$$

اس مخصوص صورت میں ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین اصل اجبازتی توانائیاں دیتی ہے (جو مکمل ہارمونی مرتعش کی طاق توانائیاں ہیں؛ سوال ۲.۴۲ دیکھیں)۔ □

مثال ۸.۴: بغیر امتضالی دیواروں کا مخفیہ کنوائے۔ اس نقطہ واپسیں پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۱۱-۱) ہو، مساوات ۸.۴۶ ونڈل وکرامرس و برلوان تقاضات موج کو آپس میں پیوند کرتی ہے۔ نیچے ڈھلوان نقطہ واپسیں (شکل ۸.۱۱-ب) پر یہی دلائل درج ذیل دیگا (سوال ۸.۹)۔

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'}, & x < x_1 \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x > x_1 \end{cases}$$

بالخصوص، مخفیہ کنویں (شکل ۸.۱۱-ج) کی بات کرتے ہوئے، ”اندرونی“ خطہ ( $x_1 < x < x_2$ ) میں تقاضا موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۴۶)، یاد رنج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۵۰)۔ ظاہر ہے، ماسوائے مضرب  $\pi$  کے،<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل لازماً برابر ہوں گے:  $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۵۱) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

یہ کوانٹائزیشن شرط، دو ڈھلوان اطراف کے ”عمومی“ مخفیہ کنویں کی احبازتی توانائیوں کو تعین کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ دو انتضائی دیواروں کے کلیہ (مساوات ۸.۱۶) یا ایک انتضائی دیوار کے کلیہ (مساوات ۸.۴۷) اور موجودہ کلیہ (مساوات ۸.۵۱) میں صرف اس عدد (0، 1/4 یا 1/2) کا منفرق ہے جو  $n$  سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونڈل و کرامرس و برلوان تخمین (بڑی  $n$  کی) نیم کلاسیکی طریق میں بہترین کام کرتی ہے، لہذا یہ منفرق صرف دکھاوے کی حد تک ہے۔ بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے، جس کو استعمال کر کے، مساوات شرودنگر حل کیے بغیر، ایک سادہ گھل کی قیمت حاصل کر کے تخمینی احبازتی توانائیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔  
□

سوال ۸.۵: زمین پر ٹپکدار ٹپکیاں لپٹے ہوئے (کمیت  $m$  کی) گیند کے کلاسیکی مسئلے کے مشابہ کوانٹائی میکانی مسئلے پر غور کریں۔<sup>۱۶</sup>

ا. مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی  $x$  کا تقاعیل لکھیں؟ (منفی  $x$  کی صورت میں مخفیہ لامتناہی ہوگا؛ گیند کبھی وہاں نہیں جاسکتا۔)

ب. اس مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر حل کر کے جواب کو مناسب ایسری تقاعیل کے روپ میں لکھیں (یاد رہے، بڑی  $z$  پر  $\text{Bi}(z)$  بے فتابو بڑھتا ہے، لہذا اس کو لازماً رد کرنا ہوگا)۔ تقاعیل  $\psi(x)$  کی معمولی زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

ج. پہلی چار احبازتی توانائیوں کو تین معنی خیز ہندسوں تک  $9.80 \text{ m/s}^2 = g$  اور  $0.1 \text{ kg} = m$  لے کر حاصل کریں۔

د. اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی، eV میں، کتنی ہوگی؟ اوسطاً الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ ورل سے  $\langle x \rangle$  کا تعین کریں۔

<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل میں منفرق مضرب  $\pi$  نہ کے مضرب  $2\pi$  ہوگا، چونکہ مجموعی منفی علامت کو معمولی زنی مستطانت  $D$  اور  $D'$  میں ضم کیا جاسکتا ہے۔  
<sup>۱۶</sup> ایک مصنوعی مسئلہ نظر آتا ہے؛ درحقیقت، نیوٹران کے لئے یہ تجربہ سراسر خراب دیا گیا ہے۔

سوال ۸.۶: ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے (سوال ۸.۵ کی) ڈیکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تجزیہ کریں۔

۱. اجزائی توانائیوں  $E_n$  کو  $m$ ،  $g$  اور  $\hbar$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. سوال ۸.۵-ج میں دی گئی مخصوص قیمتوں کو پُر کر کے ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا ”بالکل ٹھیک“ نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. کوانٹائی عدد  $n$  کو کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسط زمین سے، مثلاً، ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی اجزائی توانائیوں کو ونڈل وکراسرس ویرلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش (جس کی زاویائی تعدد  $\omega$  ہو) کی  $n$  ویں ساکن حال میں کیفیت  $m$  کے ایک ذرے پر غور کریں۔

۱. نقطہ واپس،  $x_2$ ، تلاش کریں۔

ب. نقطہ واپس سے کتنی بلندی ( $d$ ) پر خط بند مخفیہ (مادرات ۸.۳۲ لیکن نقطہ واپس  $x_2$  پر ہو) میں سہو 1% ہوگا؟ یعنی، اگر

$$\frac{V(x_2 + d) - V(x_2)}{V(x_2)} = 0.01$$

ہو، تب  $d$  کیا ہوگا؟

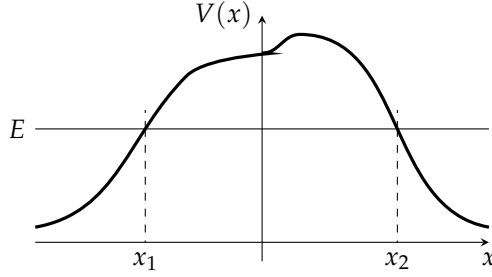
ج. جب تک  $z \geq 5$  ہو  $\text{Ai}(z)$  کا مقدرابی روپ 1% تک درست ہوگا۔ جزو-ب میں حاصل کردہ  $d$  کے لئے  $n$  کی ایسی سب سے کم قیمت تلاش کریں کہ  $5 \leq \alpha d$  ہو۔ (اس سے بڑی  $n$  کے لئے ایسا منطبق خطہ موجود ہوگا جس میں خط بند مخفیہ 1% تک درست اور بڑی  $z$  روپ کا ایسری تقابل 1% درست ہوگا۔)

سوال ۸.۹: نیچے ڈھلوان نقطہ واپس کا پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات ۸.۵۰ کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸.۱۲) سے بکھر اوکے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ: درج ذیل روپ کے ونڈل وکراسرس ویرلوان تقابل عمل موج سے آواز کریں۔

$$(۸.۵۲) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Ae^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p(x') dx'} + Be^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p(x') dx'} \right], & (x < x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ Ce^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + De^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Fe^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2) \end{cases}$$

کسی صورت  $C = 0$  مت لیں۔ سرنگ زنی احتمال  $T = |F|^2 / |A|^2$  کا حساب کریں، اور دکھائیں کہ بلند اور چوڑی رکاوٹ کی صورت میں آپ کا نتیجہ مساوات ۸.۲۲ دے گا۔



شکل ۸.۱۲: ڈھلوانی دیواروں والا رکاوٹ۔

### اضافی سوالات برائے باب ۸

سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نمائی مخفیہ:

$$V(x) = \alpha |x|^\nu$$

جہاں  $\nu$  ایک مثبت عدد ہے، کی احبازتی توانائیوں کو ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجہ کو  $\nu = 2$  جابجائیں۔ جواب: ۷<sup>۱</sup>

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[ (n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2\nu}{\nu+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین استعمال کر کے سوال ۲.۵۱ کے مخفیہ کے لئے مقید حال توانائی تلاش کریں۔ نتیجہ کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب:  $-\left[\frac{9}{8}\right] - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے ہم رداسی حصے (مساوات ۴.۳۷) پر ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات ۸.۴ کی درج ذیل روپ کو  $l = 0$  کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا<sup>۱۸</sup>

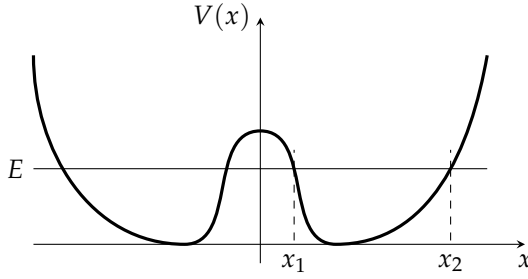
$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar$$

جہاں  $r_0$  نقطہ واپس ہے، (یعنی ہم  $r = 0$  کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں)۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوگار تخی مخفیہ:

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

<sup>۷</sup> ہمیشہ کی طرح، ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین نیم کلاسیکی (بڑی  $n$ ) طریق میں سب سے زیادہ درست ثابت ہوتی ہے۔ بالخصوص، مساوات ۸.۵۳ زمینی حال ( $n=1$ ) کے لئے اتنی اچھی نہیں ہے۔

<sup>۱۸</sup> رداسی مساوات پر ونڈل وکرامرسس و برلوان تخمین کا اطلاق چند نازک اور پیچیدہ مسائل پیدا کرتا ہے، جس پر یہاں کوئی بات نہیں کی جائے گی۔



شکل ۸.۱۳: تشکلی دوہر اکنوں؛ سوال ۸.۱۵۔

کی اجبازی توانائیوں کی انداز قیمت تلاش کریں (جہاں  $V_0$  اور  $a$  مستقل ہیں)۔ صرف  $l = 0$  کی صورت پر غور کریں۔ دکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار قیمت پر نہیں۔ جبزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left( \frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right)$$

سوال ۸.۱۴: ونزل وکرامرس وبرلوان تئمن کا درج ذیل روپ

$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$

استعمال کر کے ہائیڈروجن کی مقید حال توانائیوں کی انداز قیمت تلاش کریں۔ موثر محفہ (مساوات ۴.۳۸) میں مرکز گریز جبزوشامل کرنا مت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

آپ دیکھیں گے کہ  $l \gg n$  اور  $n \gg 1/2$  کی صورت میں پوہر سطحیں حاصل ہوں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}$$

سوال ۸.۱۵: تشکلی دوہر اکنوں (شکل ۸.۱۳) پر غور کریں۔ ہم  $E < V(0)$  والی مقید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۱. خطہ (i)  $x > x_2$ ، (ii)  $x_1 < x < x_2$  اور (iii)  $0 < x < x_1$  کے لئے ونزل وکرامرس وبرلوان تفاعلات موج لکھیں۔ نقطہ  $x_1$  اور  $x_2$  پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے



(مساوات ۸.۴۶ میں  $x_2$  کے لئے ایسا کیا گیا ہے؛ آپ کو  $x_1$  کے لئے کرنا ہوگا) درج ذیل دکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ 2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right] & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

ب۔ چونکہ  $V(x)$  تشاکی ہے، لہذا ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تفاعلات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول الذکر صورت میں  $\psi'(0) = 0$  ہوگا، جبکہ موخر الذکر صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا۔ دکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹائزیشن شرط حاصل ہوتی ہے

$$(۸.۵۹) \quad \tan \theta = \pm 2e^{\phi}$$

جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۶۰) \quad \phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'$$

مساوات ۸.۵۹ (تخمینی) احبازی توانائیوں کا تعین کرتی ہے (دھیان رہے کہ  $x_1$  اور  $x_2$  میں  $E$  کی قیمت داخل ہوتی ہے، لہذا  $\theta$  اور  $\phi$  دونوں  $E$  کے تفاعلات ہوں گے)۔

ج۔ ہم بالخصوص ایسی درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں جو بلند یا چوڑی یا دونوں ہو؛ ایسی صورت میں  $\phi$  بڑا ہوگا، لہذا  $e^{\phi}$  انتہائی بڑا ہوگا۔ مساوات ۸.۵۹ کے تحت  $\theta$  کی قیمتیں  $\pi$  کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی۔ اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے  $\theta = (n + 1/2)\pi + \epsilon$ ، جہاں  $|\epsilon| \ll 1$  ہے، لکھ کر دکھائیں کہ کوانٹائزیشن شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۸.۶۱) \quad \theta \cong \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}$$

د۔ فرض کریں دونوں کنودوں میں مخفیہ قطع مکانی ہیں۔<sup>۱۹</sup>

$$(۸.۶۲) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & x > 0 \end{cases}$$

<sup>۱۹</sup> حصہ ۲ کے شروع کے تذکرہ میں  $\omega \cong \sqrt{V''(x_0)}/m$  لیتے ہوئے جہاں  $x_0$  کم سے کم نقطے کا مقام ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ اگر دونوں کنودوں میں مخفیہ ٹیکہ قطع مکانی نہ ہوں تب بھی یہاں  $\theta$  کا سبب، لہذا نتیجہ (مساوات ۸.۶۳) تخمیناً درست ہوگا۔

اس مخفیہ کوترسیم کر کے  $\theta$  (مساوات ۸.۵۸) تلاش کریں، اور درج ذیل دکھائیں۔

$$(۸.۶۳) \quad E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi} e^{-\phi}$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نامتناہل گزر  $(\phi \rightarrow \infty)$  ہو، تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی سرعشتا ہوتے، اور توانائیاں  $E_n = (n + 1/2) \hbar\omega$  دوہری اخطاطی ہوتیں، چونکہ ذرہ بائیں کنویں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ مستثنیٰ رکاوٹ کی صورت میں (دونوں کنویں کے بیچ ”رابطہ“ ممکن ہوگا، لہذا) اخطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات  $(\psi_n^+)$  کی توانائی معمولی کم اور طاق تقاسمات  $(\psi_n^-)$  کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

فرض کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے؛ یا یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^+ + \psi_n^-)$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ ہیئت کی وہ قیمتیں منتخب کی جاتی ہیں کہ ذرے کا بیشتر حصہ دائیں کنویں میں پایا جاتا ہو۔ دکھائیں کہ یہ ذرہ دونوں کنویں کے بیچ دوری عرصہ:

$$(۸.۶۴) \quad \tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}$$

کے ساتھ ارتعاش کرتا ہے۔

و. متغیر  $\phi$  کی قیمت، جسزود کے مخصوص مخفیہ کے لئے تلاش کریں، اور دکھائیں کہ  $E \gg V(0)$  کے لئے  $\phi \sim m\omega a^2 / \hbar$  ہوگا۔

سوال ۸.۱۶: شمارکے اثر میں سرنگ زنی۔ بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولاً ایک الیکٹران جوہر سے سرنگ زنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو باردار یہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا عمومی شمارک اثر تجربے میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ یک بُعدی نمونہ استعمال کر کے اس احتمال کی اندازاً قیمت دریافت کر سکتے ہیں: فرض کریں ایک ذرہ بہت گہرے مستثنیٰ چوکور کنواں (حصہ ۲.۶) میں پایا جاتا ہے۔

ا. کنویں کی تہ سے ناپٹے ہوئے، زمینی حال توانائی کتنی ہوگی؟ یہاں  $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$  فرض کریں۔ اشارہ: یہ  $2a$  چوڑائی کے) لامتناہی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

ب. اب اضطراب  $H' = -\alpha x$  متعارف کریں (برقی میدان  $E$  بیرونی  $E = -E$  میں الیکٹران کے لئے بیرونی  $eE = \alpha$  ہوگا)۔ فرض کریں یہ نسبتاً کمزور اضطراب  $(\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2)$  ہے۔ کل مخفیہ کا حنا کہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت  $x$  رخ سرنگ زنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

ج. سرنگ زنی جسزو ضربی  $\gamma$  (مساوات ۸.۲۲) کا حساب کریں، اور ذرے کو منہر ہونے کے لئے درکار وقت (مساوات ۸.۲۸) کی اندازاً معلوم کریں۔ جواب:  $\gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}$ ,  $\tau = (8ma^2 / \pi\hbar) e^{2\gamma}$

د. معقول اعداد:  $V_0 = 20 \text{ eV}$  (بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت)،  $a = 10^{-10} \text{ m}$  (عمومی جوہری رداس)،  $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$  (تجربہ گاہ میں مضبوط میدان)، الیکٹران بار  $e$  اور الیکٹران کمیت  $m$  لیں۔ عرصہ  $\tau$  کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر سے کریں۔

سوال ۸.۱: میز پر کھڑی بوتل، رہائشی درجہ حرارت پر کوانٹائی سرنگ زنی کی وجہ سے کتنی دیر میں از خود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کمیت  $m$ ، رداس  $R$ ، اور فتد  $h$  کی یکساں ٹکلی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کی، توازنی مقام  $(h/2)$  سے، بلندی کو  $x$  سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی  $mgx$  ہوگی، اور بوتل اس صورت گرے گی جب  $x$  کی قیمت فاصل قیمت  $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$  کو پہنچے۔ سرنگ زنی احتمال (مساوات ۸.۲۲)  $E = 0$  کے لئے حاصل کریں۔ حراری توانائی  $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$  لیتے ہوئے رفتار کی اندازاً قیمت مساوات ۸.۲۸ سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Boltzmann factor, 361
- Born approximation, 422
- Born–Oppenheimer approximation, 376
- Bose condensation, 249
- Bose–Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra–ket
  - notation, 128
- bubble chamber, 441
- bulk modulus, 229
- cat paradox, 439
- Cauchy’s
  - integral formula, 419
- centrifugal term, 146
- chain reaction, 357
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch–Gordon coefficients, 190
- clones, 437
- coherent states, 133
- collapse, 429
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 44
  - canonical relations, 138
- 21–centimeter line, 291
- adiabatic, 375
  - approximation, 376
  - theorem, 376
- adiabatic series, 399
- adjoint, 103
- agnostic, 429
- Airy functions, 333
- Airy’s equation, 333
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- amplification, 357
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- approximation
  - impulse, 426
- argument, 60
- bands, 234
- baryon, 191
- Bell inequality, 434
- Berry’s phase, 386
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch’s theorem, 229

- orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 66
- dope, 235
- dynamic phase, 386
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 28
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207, 431
- EPR paradox, 430
- equation
  - Helmholtz, 417
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi's Golden rule, 360
- Fermi-Dirac distribution, 247
- fermions, 208
- Feynman
  - diagram, 427
  - formulation, 427
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- fundamental relations, 165
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- connection formulas, 335
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- Coriolis, 384
- correlated, 430
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
- Darwin term, 280
- decay modes, 363
- decoherence, 439
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 89, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 34
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- differential scattering cross-section, 403
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128

- orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 445
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- half-life, 365
- Hamiltonian, 27
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 48
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variable, 432
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- impact parameter, 401
- indeterminacy, 3
- induced, 441
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 234
- interference, 387
- flux quantization, 394
- forbidden transitions, 368
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
  - Rayleigh's, 411
- Foucault pendulum, 384
- Fourier
  - inverse transform, 62
  - transform, 62
- Frobenius
  - method, 53
- function
  - Dirac delta, 71
  - even, 31
  - Green's, 417
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- Gamow's theory, 328
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- gauge transformation, 391
- Geiger counter, 439
- generalized
  - distribution, 71
  - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 59
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric phase, 386
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt

- reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - S, 93
  - transfer, 94
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
  - $\pi$ , 430
- metastable, 368
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- momentum transfer, 423
- monochromatic, 358
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- nmr, 372
- node, 34
- non-normalizable, 13
- nonholonomic, 385
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- nuclear magnetic resonance, 372
- observables
  - incompatible, 116
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158
  - polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g-factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor formula, 364
- Larmor frequency, 184
- Larmor precession, 182
- laser, 357
- law
  - Hooke, 41
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- lifetime, 330, 363
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- locality, 431
- Lorentz force
  - law, 201
- luminosity, 404
- magnetic flux, 387, 392
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- magnetic resonance, 371
- mass

- agnostic, 4
- orthodox, 3
- realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 92
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- propagator, 427
- quantum
  - principle number, 155
  - Zeno effect, 440
- quantum dots, 319
- quantum dynamics, 345
- quantum electrodynamics, 356
- quantum jumps, 345
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quantum statics, 345
- quark, 191
- Rabi flopping frequency, 354
- radial equation, 146
- radiation zone, 408
- realist, 429
- recursion
  - formula, 54
- reflection
  - coefficient, 77
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- resonance curve, 372
- occupation number, 237
- oddness, 348
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthodox, 429
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- partial wave, 414
- partial wave amplitude, 410
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory
  - degenerate, 260
- phase shift, 414
- phenomenon
  - watched pot, 440
- photocopier, 437
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 57
- population inversion, 357
- position



- solenoid, 392
- solid angle, 383
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectral lines
  - coincident, 196
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spherical Hankel functions, 409
- spherical symmetrical potential, 424
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290
- spinor, 175
- spontaneous emission, 357
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 69
  - excited, 33
  - ground, 33, 156
  - scattering, 69
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 79
- Stern-Gerlach experiment, 184
- stimulated emission, 356
- Stirling's approximation, 243
- superconducting, 394
- symmetrization
  - requirement, 209
- revival time, 88
- Reynolds number, 385
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- Rodrigues
  - formula, 59
- Rodrigues formula, 142
- rotating wave approximation, 354
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - low energy, 423
  - low-energy soft-sphere, 423
  - matrix, 92, 93
  - Rutherford, 404, 425
  - Yukawa, 424
- scattering amplitude, 405
- scattering angle, 401
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schrodinger equation
  - integral form, 421
- Schwarz inequality, 99, 445
- screened, 219
- selection rules, 367
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
- shell, 219
- sodium, 23

- virial theorem, 132
  - three-dimensional, 194
- wag the tail, 55
- wave
  - incident, 76
  - packet, 61
  - reflected, 76
  - transmitted, 76
- wave function, 2
- wave number, 405
- wave vector, 224
- wavelength, 18
- white dwarf, 252
- Wien displacement law, 251
- WKB, 321
- Yukawa potential, 316, 424
- Zeeman effect, 283
- zero-crossing, 34
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - optical, 428
  - Plancherel, 62
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- total cross-section, 404
- trajectory, 401
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transition probability, 352
- transition rate, 359
- transitions
  - allowed electric dipole, 373
  - forbidden electric quadrupole, 373
  - forbidden magnetic dipole, 373
- transmission
  - coefficient, 77
- trigger, 357
- triplet, 188
- tunneling, 71, 78
- turning point, 322
- turning points, 69
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Van der Waals interaction, 294
- variables
  - separation of, 25
- variance, 9
- variational principle, 299
- vectors, 97
- velocity
  - group, 65
  - phase, 65

- آبادی اللہ، 357  
آلہ  
نقل گیر، 437  
آہنٹائن، پوڈلسکی و روزن تصاد، 430
- اساقی، 358  
حالات، 133  
اجبازتی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹریو، 127  
از خود احسراج، 357  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اشاعت کار، 427  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اعلیٰ موصل، 394  
افسزائش، 357  
اکیس سنی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹریو، 127  
امالی، 441  
امتیازی تفاد عمل، 103  
امتیازی فیدر، 103  
امتیازی فیدر مساوات، 103  
انتخابی قواعد، 367  
انتشاری  
رشتہ، 66  
انتہتال معیار حرکت، 423  
انخطاطی، 104، 89  
انخطاطی دباؤ، 228  
انداز تنزل، 363  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس
- شرح، 77  
انکاری، 429  
اوسط، 7  
بارن تخمین، 422  
بارن و اوپن ہائیسر تخمین، 376  
باضابطہ معیار حرکت، 203  
بانہی رشتہ، 430  
برقی جفت قطب احسراج، 355  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بھراو  
ردر فورڈ، 404، 425  
کم توانائی نرم کرہ، 423  
یوگاوا، 424  
بلاوا وسطہ مکمل، 313  
بلبل احسان، 441  
بل عدم مساوات، 434  
بندشی توانائی، 156  
یوس آہنٹائن تقسیم، 247  
یوس انجامد، 249  
یوسن، 208  
یولٹزمن جبز و ضربی، 361  
یوہر  
رداس، 156  
کلیہ، 155  
یوہر مقناطیس، 284  
بیریان، 191  
بیل  
کروی تفاد عمل، 148  
بے پلک پھسری، 173  
پازیٹر انیم، 207، 291  
پاشن و بیک اثر، 285  
پالی اصول مسامت، 208  
پالی تالب چکر، 177  
پایان، 191  
پٹیاں، 234

- پس پردہ، 219  
پلائنگ  
کلیہ، 162  
پیدا کار  
فصل میں انتقال کا، 136  
وقت میں انتقال، 136  
پیدا کار  
تفعل، 59  
گھومنا، 200  
تابندگی، 404  
تجدیدی عرصہ، 88  
تجربہ  
شٹرن و گراخ، 184  
تحرک زدہ اجسام، 356  
تحویل، 161  
تحویلات  
اجزائی برقی جفت قطبی، 373  
منوع مقناطیسی جفت قطبی، 373  
تحویلی احتمال، 352  
تحویلی شرح، 359  
تخمین  
ضرب، 426  
ترتیبی پیمائشیں، 131  
ترسیل  
شرح، 77  
تسل  
بالمر، 162  
پاشن، 162  
طامتی، 43  
فوریہ سر، 35  
لیمان، 162  
تشاکایت  
ضرورت، 209  
تشکیل، 237  
تصادفی، 439  
تعداد ممکن، 237  
تعیین حال، 103  
تغیریت، 9  
تفعل  
ذیل، 71  
گرین، 417  
تفعلات ایسری، 333  
تفعل موج، 2  
تفعل علیہ، 128  
تشریفاتی بکھراؤ عمودی تراش، 403  
تقلید پسند، 429  
تکمل  
ڈھانچائی، 312  
توالی  
کلیہ، 54  
توانائی  
اجزائی، 28  
توقعات  
قیمت، 7  
تکرار و مقدار معلوم، 401  
ٹھوس زاویہ، 383  
شنائی عددی سر، 239  
حبز و ذارون، 280  
حبزوی موج، 414  
حبزوی موج حیطہ، 410  
جیم مقیاس، 229  
جفت، 34  
تفعل، 31  
جفت قطب معیار اثر  
مقناطیسی، 181  
جوہری مدار چوں  
خطی جوڑ ترکیب، 311  
جی حبز و ضربی، 278  
حال  
بکھراؤ، 69  
زمینی، 33، 156  
مقید، 69  
ہیجان، 33  
حراری توازن، 236  
حرکت  
سائیکلوٹران، 202

- 386، حسر کی پیت  
 حسر ناگزیر، 375  
 حشر، 376  
 مسئلہ، 376  
 حسر ناگزیر قتل، 399  
 حقیقت پسند، 429  
 حیطہ بکھراؤ، 405  
 ختمیت اساق، 439  
 خط حرکت، 401  
 خطبہ اشعاعی، 408  
 خطی الجبر، 97  
 خطی تبادلہ، 97  
 خطی جوڑ، 28  
 خفیہ متغیرات، 3  
 خول، 219، 235  
 در حبات آزادی، 254  
 در جب حرارت، 236  
 درز، 234  
 درز توانائی، 290  
 دلیل، 60  
 دم ہلانہ، 55، 95  
 دوری جہدول، 219  
 ذرہ  
 غیر مستحکم، 21  
 رو  
 احتمال، 21  
 رابی پلستی تعدد، 354  
 ردائی مساوات، 146  
 رڈ برگ، 162  
 کلیہ، 162  
 رشتہ  
 پتر تنک، 295  
 کرامرس، 295  
 رفتار  
 دوری سستی، 65  
 گروہی سستی، 65  
 رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85  
 رواحتال، 194  
 روڈریگیس  
 کلیہ، 142  
 ریمان زیتا فنکشن، 249  
 ریتالڈ عدد، 385  
 زاویائی معیار حرکت  
 بقب، 170  
 خنقی، 174  
 غیر خنقی، 174  
 زاویہ بکھراؤ، 401  
 زمین اثر، 283  
 ساکن  
 حالات، 27  
 سٹرنگ تخمین، 243  
 سیٹھن ویولسٹز من کلیہ، 251  
 سرحدی شرائط، 32  
 سرنگ زنی، 71، 78  
 سفید بونا، 252  
 سلور، 220  
 سمتاویہ، 128  
 سمتیات، 97  
 سمتیہ موج، 224  
 سوچ  
 انکاری، 4  
 تقلید پسند، 3  
 حقیقت پسند، 3  
 سوڈیم، 23  
 سہ تا، 188  
 سیاہ جسمی طیف، 250  
 سیزھی  
 عاملین، 46  
 سیزھی فنکشن، 79  
 شمارک اثر، 296  
 شروڈنگر  
 غیر متابع وقت، 27  
 شروڈنگر نقطہ نظر، 136  
 شریک عامل، 103  
 شریک گرمیتی بندھ، 214  
 شماراتی مفہوم، 2  
 شوارز

- 227، سطح  
 سنہرا و تانوں، 360  
 فنرمیان، 208  
 فنرمی و ڈیراک تقسیم، 247  
 فنروینوس  
 ترکیب، 53  
 فصا  
 بیرونی، 23  
 دوہری، 128  
 فورسیر  
 الرٹ بدل، 62  
 بدل، 62  
 فوتور و تاص، 384  
 و تابل مشاہدہ  
 غیر ہم آہنگ، 116  
 و تال  
 پنچھراو، 92، 93  
 ترسیل، 94  
 و تالبی ارکان، 125  
 و تانوں  
 یک، 41  
 و تائی مین، 298  
 قلمیہ، 437  
 قواعد ہن، 220  
 قوالب، 98  
 قوت مبادلہ، 213  
 لاپلاسی، 138  
 لارمر  
 استقبالی حرکت، 182  
 لارمر تعدد، 184  
 لاگین  
 شریک کشیر رکنی، 158  
 کشیر رکنی، 158  
 لامستناہی کردی کنوال، 146  
 لپشان، 175  
 لخصیم، 162  
 لگرانج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 عدم مساوات، 445  
 شوارز عدم مساوات، 99  
 صفر مقام انقطاع، 34  
 طاق، 34  
 طاق پن، 348  
 طامس استقبالی حرکت، 279  
 طول موج، 18، 162  
 طیف، 104  
 طیفی تحلیل، 130  
 طیفی خطوط  
 ہم میدان، 196  
 عامل، 17  
 تظلیل، 129  
 تقلیل، 166، 46  
 رفعت، 166، 46  
 مبادلہ، 209  
 عدم موج، 405  
 عدم تعین، 3  
 عدم یقینیت  
 توانائی و وقت، 119  
 عدم یقینیت اصول، 19  
 عمر و حیات، 330، 363  
 عتدہ، 34  
 علالت  
 تفعلیہ و سمتاویہ، 128  
 علیحدگی متغیرات، 25  
 علیحدگی مستقل، 26  
 عمودی، 34، 100  
 غیر ملل، 105  
 غیر موصل، 234  
 فنائن من  
 اشکال، 427  
 تشریح، 427  
 فنروت، 15  
 فنری  
 توانائی، 227  
 درجہ حرارت، 228

- لنڈے جی حبز و ضربی، 284  
لورینز قوت  
وٹان، 201  
لوی وچویتا، 180  
لیزر، 357  
لیڈانڈر  
شریک، 142  
لیب امتثال، 272
- ماپ  
تبادلہ، 202  
غیر متغیر، 202  
ماپ تبادلہ، 391  
مبادلہ کھل، 313  
مختصر ک، 357  
متعم  
تفعل، 71  
تقسیم، 71  
متعم شریاتی مفہوم، 111  
مختل  
سب سے زیادہ، 7  
محد  
کروی، 139  
مخالف بیٹا تحلیل، 253  
مختفیہ، 15  
بالانکاس، 92  
موثر، 146  
مداخلت، 387  
مدارچے، 219  
مداری، 173  
مربع میکا مل، 13  
مربع میکا مل تفعلات، 98  
مربع تقش  
پارمولی، 32  
مربع کز گریز حبز و، 146  
مربع کزوی مقن طوسی گمک، 372  
مداوات  
ہلم ہولٹز، 417  
مداوات ایسری، 333  
مداوات شروڈنگر، 2
- کھلی روپ، 421  
مکن مقن طوسی نسبت، 182  
مسل تسل، 357  
مسئلہ  
اہر نفٹ، 18  
بصریات، 428  
پلانشرال، 62  
ڈرشلے، 35  
مداوی حسانہ بندی، 254  
مسئلہ بلوخ، 229  
مسئلہ ون نمن و بلن، 294  
مسئلہ ورل، 132  
تین العادی، 194  
منظبر  
نگاہ تلے برتن، 440  
معمول زنی، 13  
وٹایل، 14  
مستقل، 22  
ناوٹایل، 13  
معمول شدہ، 100  
معیار حرکت، 17  
معیار حرکت کی فص تفعل موج، 113، 195  
معیاری انحراف، 9  
معیاری عمودی، 100، 35  
مقامیت، 431  
مقطع  
سیٹر، 214  
مقلب، 43  
مقلبت  
باضابطہ رشتہ، 44  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 43  
مقن طوسی ہساو، 387، 392  
مقن طوسی گمک، 371  
مقن طوسی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
کمل، 100، 35  
ملاوٹ، 235  
ممنوعہ برقی جفت قطبی تویلات، 373

- منوعہ تجویلات، 368  
منجی ملک، 372  
منہدم، 429، 111، 4  
موج  
آمدی، 76  
ترسیلی، 76  
منعکس، 76  
موجی اکٹھ، 61  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کو انشائی اعداد، 275  
موصل، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت مستقل، 272  
میدان، 191  
میزون  
پائے، 430  
میکسویل بولٹزمن تقسیم، 247  
میون عمل انگیزی، 319  
میون نیوٹرینو، 127  
میونی ہائیڈروجن، 291  
میو نیم، 291  
ناپودگی جوڑا، 292  
نازک مستحکم، 368  
نزدہ سلیم، 217  
نصف حیات، 365  
نظریہ اضطراب  
اخطاطی، 260  
نظریہ گامو  
الفا تحلیل، 328  
نقطہ واپس، 322  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصل، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیو من  
کروی تقاعل، 148  
واپسی نقطہ، 69  
وائن فٹنول ہسٹا، 251  
وسطانیہ، 7  
ونڈل وکراسس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
پیچواں لچھا، 392  
چندر شیکھر حد، 253  
چوزاویہ تشکل، 298  
چکر، 173، 174  
مختلف میدان، 175  
ہم میدان، 175  
چکر و مدار باہم عمل، 279  
چکر و مدار ربط، 272  
چکر چکر ربط، 290  
چکر کار، 175  
ڈیراک  
علاقیت، 128  
کنگھی، 229  
معیاری عمودیت، 108  
ڈیلٹ  
کرونیکر، 34  
ڈیوٹریم، 297  
ڈیوٹیران، 297  
کامل گیس، 245  
کاپان، 191  
کشافیت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکنی  
ہرمانٹ، 57  
کرائنگ وپنی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کروی تشکلی مخفیہ، 424  
کروی مینکل تقاعلات، 409  
کعبی تشکل، 298  
کل عمودی تراش، 404  
کلیات جوڑ، 335



- کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
 کلیہ  
 ڈی پروگلی، 19  
 روڈریگیس، 59  
 ریلے، 411  
 یولر، 30  
 کلیہ لارمر، 364  
 کم توانائی، بکھراؤ، 423  
 کیفیت  
 تخفیف شدہ، 206  
 کوارک، 191  
 کوانٹائی  
 زینو اثر، 440  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی برقی حرکیات، 356  
 کوانٹائی حرکیات، 345  
 کوانٹائی سکونیات، 345  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقناطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطہ، 319  
 کوانٹائی چھلانگ، 345  
 کوانٹائی ہبسا، 394  
 کورپولس، 384  
 کوشی  
 کلیہ کھل، 419  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247  
 گاگر گننت کار، 439  
 گرام شمہ  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمہ حکمت عملی، 445  
 گرمیتی، 223  
 گروبی نظریہ، 191  
 گرگنی، 385  
 گریویشن، 163  
 گھومتی موج تھمین، 354  
 گیما انفاسل، 249
- ہائیڈروجن  
 میونی، 207  
 ہائیڈروجنی جوہر، 162  
 ہارمونی  
 سر قش، 32  
 ہارمونی سر قش  
 تین ابعادی، 193  
 ہر مشی، 101  
 جوڑی دار، 48، 103  
 حشلاف، 130  
 منحرف، 130  
 بلبرٹ فضا، 99  
 ہمبستہ حال، 207  
 ہمبستہ حالات، 431  
 ہن  
 کاپہلا فاعده، 221  
 کائیسراف فاعده، 221  
 کادوسراف فاعده، 221  
 ہندی نسل، 253  
 ہندی پیت، 386  
 ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
 ہیلیم، 162  
 ہیلیم پرست، 217  
 ہیملٹنی، 27  
 پیت سیری، 386  
 پیتی انتتال، 414  
 یوکاوا مخفیہ، 316، 424  
 یک رنگی، 358  
 یک طامتی، 129