

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمولی زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متنازع وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عامل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۱	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۶	انجذاب، تحرک شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۸	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۰	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۶۰	آمنشائن عددی سر A اور B	۹.۳.۱
۳۶۲	بیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۶۵	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۷۵	سرناگزرتھمین	۱۰
۳۷۵	مسئلہ سرناگزرتھمین	۱۰.۱
۳۷۵	سرناگزرتھمین	۱۰.۱.۱
۳۷۸	مسئلہ سرناگزرتھمین	۱۰.۱.۲
۳۸۳	ہیٹیری	۱۰.۲
۳۸۳	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۸۶	ہندی ہیٹ	۱۰.۲.۲
۳۹۲	اہارونو پوہم اثر	۱۰.۲.۳
۴۰۱	بکھراؤ	۱۱
۴۰۱	تعارف	۱۱.۱
۴۰۱	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۴۰۵	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۴۰۶	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۰۶	اصول و ضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۹	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۱۲	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۱۵	بارن تھمین	۱۱.۴
۴۱۵	مساوات شروڈنگر کی عملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۹	بارن تھمین اول	۱۱.۴.۲
۴۲۳	تسلل بارن	۱۱.۴.۳
۴۲۷	پس نوشت	۱۲
۴۲۸	آمنشائن پوڈلکیو روزن تضاد	۱۲.۱
۴۲۹	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۳۳	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۳۵	شروڈنگر کی ملی	۱۲.۴
۴۳۶	کوانٹائی زینو تضاد	۱۲.۵
۴۳۹	جوابات	
۴۴۱	خطی الجبرا	۱
۴۴۱	سمتیات	۱.۱
۴۴۱	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۴۲	فتالب	۳.۱

۴۴۲	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۴۲	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۴۲	هر مشی تباولے	۶.۱

۴۴۳ فهرنگ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۱۰

حرناگزرتخمین

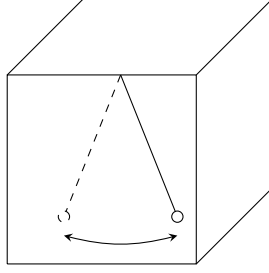
۱۰.۱ مسئلہ حرناگزرت

۱۰.۱.۱ حرناگزرت عمل

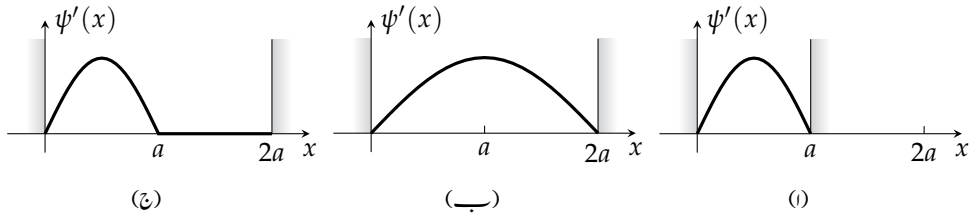
فرض کریں ایک کامل روتاص انتصابی سطح میں بغیر کسی رگڑ یا ہوائی مزاحمت کے آگے پیچھے ارتعاش کرتا ہے۔ اگر آپ اس روتاص کو جھٹکے سے ہلائیں تو یہ امنرا تفسری کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا، لیکن اگر آپ بغیر جھٹکا دیے روتاص کو آہستہ آہستہ ایک مقام سے دوسرے مقام منتقل کریں (شکل ۱۰.۱) تو یہ اسی سطح (یا اس کی متوازی سطح) میں سٹنگی اور روانی سے، اسی جیٹ کے ساتھ تھلوتار ہے گا۔ بیرونی کیفیت کی بہت آہستہ تبدیلی ہی حرناگزرت عمل کی پہچان ہے۔ دھیان رہے کہ یہاں دو مختلف وقتوں کی بات کی جارتی ہے: نظام کی اپنی حرکت (جو یہاں روتاص کے ارتعاش کا دوری عرصہ ہوگا) کو ظاہر کرنے والا ”اندرونی“ وقت T_i ، اور نظام کی معتادیر معلوم میں نمایاں تبدیلی (مثلاً، لرزتے ہوئے چپوترے پر نصب روتاص کی صورت میں چپوترے کی لرزش کا دوری عرصہ) کو ظاہر کرنے والا ”بیرونی“ وقت T_e ۔ حرناگزرت عمل میں $T_e \gg T_i$ ہوگا۔

حرناگزرت عمل کے تجزیے کی بنیادی حکمت عملی یہ ہے کہ پہلے بیرونی معتادیر معلوم کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ حل کیا جاتا ہے، اور حساب کے بالکل آخر میں انہیں (بہت آہستہ) وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کی اجازت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، مقررہ لمبائی L کے روتاص کا کلاسیکی دوری عرصہ $2\pi\sqrt{L/g}$ ہوگا؛ اب اگر لمبائی آہستہ آہستہ تبدیل ہو، تو دوری عرصہ بظاہر $2\pi\sqrt{L(t)/g}$ ہوگا۔ ہائیڈروجن سالہ (حصہ ۳.۷) پر تبصرہ کے دوران زیادہ باریک بین مثال پیش کی گئی۔ ہم نے مسراکزہ کو ساکن تصور کرتے ہوئے آغاز کیا، اور ان کے بیچ فاصلہ R کی صورت میں الیکٹران کی حرکت کے لئے حل کیا۔ نظام کی زمینی حال توانائی کو R کے تقاطع کی صورت میں دریافت کرنے کے بعد، ہم نے توازنی فاصلہ معلوم کر کے ترسیم کے انحناسے مسراکزہ کی لرزش کا تعدد حاصل کیا (سوال ۷.۱۰)۔ طبعیات سالہ میں اس ترکیب کو (جس میں ساکن

adiabatic¹



شکل ۱۰.۱: حرانگز ر حرکت: اگر ڈبلے کو نہایت آہستہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جائے تو رفتا ص اسی جیطہ کے ساتھ ابتدائی سطح کی متوازی سطح میں جھولتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: (ا) لامستناہی چو کونوں کے زمینی حال سے ایک ذرہ ابتدا کرتا ہے، (ب) اگر دیوار نہایت آہستہ حرکت کرے تو ذرہ اسی حال میں رہتا ہے، (ج) اگر دیوار تیزی سے حرکت کرے تو ذرہ لحاتی طور پر ابتدائی حال میں رہتا ہے۔

مسرا کرہ سے آغا ز کرتے ہوئے، الیکٹرونی تفاعلات موج کا حساب کر کے، ان سے نسبتاً سست رفتا ر مسرا کرہ کے مقامات اور حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کرنے کو باراض واہن ہائیم ر ققنن^۲ کہتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں، حرانگز ر ققنن^۳ کے بنیادی تصور کو ایک مسئلہ کے روپ میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں ہیملٹنی ابتدائی روپ H^i سے بہت آہستہ تبدیل ہو کر کسی اختتامی روپ H^f تک پہنچتی ہے۔ مسئلہ حرانگز ر^۴ کہتا ہے کہ اگر ذرہ ابتدائی طور پر H^i کے n وی امتیازی حال میں پایا جاتا ہو، تو (زیر مساوات شر وڈنگر) یہ H^f کے n وی امتیازی حال میں منتقل ہوگا۔ (میں یہاں فرض کرتا ہوں کہ H^i سے H^f تک تحویل کے دوران، طیف غیر مسلسل اور غیر انخطاطی ہے، لہذا حالات کی ترتیب میں کوئی شبہ نہیں پایا جائے گا؛ امتیازی تفاعلات پر نظر رکھنے کی کوئی ترکیب وضع کرنے سے ان شرائط کو نرم بنایا جاسکتا ہے، لیکن میں یہاں ایسا نہیں کروں گا۔)

مشال کے طور پر، ہم لامستثنائی چوکور کنویں میں ایک ذرے کو زمینی حال:

$$(۱۰.۱) \quad \psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

میں تیار کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲-۱)۔ اب دائیں دیوار کو بہت آہستہ مقام $2a$ پر منتقل کیا جاتا ہے؛ مسئلہ حرانگز کے تحت (ماسوائے پستی جزو ضربی کے) یہ ذرہ تو سبج شدہ کنویں کے زمینی حال:

$$(۱۰.۲) \quad \psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

میں منتقل ہوگا (شکل ۱۰.۲-ب)۔ دھیان رہے کہ ہم ہیملٹنی میں چھوٹی تبدیلی (نظریہ اضطراب کی طرح) کی بات نہیں کر رہے ہیں؛ ہاں تبدیلی بہت بڑی ہے۔ فقط اتنا ضروری ہے کہ تبدیلی آہستہ رونما ہو۔ یہاں توانائی کی بقا نہیں ہوگی؛ جو بھی دیوار کو حرکت دے رہا ہے، نظام سے توانائی حاصل کرے گا، جیسا کہ گاڑی کے انجن کے شافلر میں آہستہ آہستہ پھیلتا ہوا گیس بوکا کو توانائی فراہم کرتا ہے۔ اس کے برعکس، کنویں کی اچانک وسعت کی صورت میں حال $\psi^i(x)$ ہی رہتا ہے (شکل ۱۰.۲-ج)، جو نئی ہیملٹنی کے امتیازی حالات کا پیچیدہ خطی جوڑ ہوگا (سوال ۲.۳۸)۔ یہاں توانائی (کم از کم، اس کی توقعاتی قیمت) کی بقا ہوگی؛ جیسا اچانک رکاوٹ ہٹانے سے حلاء میں گیس کی آزادانہ پھیالنے سے کوئی کام نہیں ہوتا۔

سوال ۱۰.۱: ایک لامستثنائی چوکور کنواں، جس کی دائیں دیوار ایک مستقل سمتی رفتار v سے حرکت کرتے ہوئے کنویں کو وسیع بناتی ہے، کو ٹھیک ٹھیک حل کرنا ممکن ہے۔ اس کے حلوں کا مکمل سلسلہ درج ذیل ہوگا

$$(۱۰.۳) \quad \Phi_n(x, t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}x\right) e^{i(mvx^2 - 2E_n^i at)/2\hbar\omega}$$

جہاں $w(t) \equiv a + vt$ کنویں کی (لحقیقی) چوڑائی اور $E_n^i \equiv n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$ (چوڑائی a) کے اصل کنویں کی n ویں احبازنی توانائی ہے۔ عمومی حل ان Φ کا خطی جوڑ:

$$(۱۰.۴) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, t)$$

ہوگا، جہاں عددی سر c_n وقت t کے تابع نہیں ہوں گے۔

۱. دیکھیں آیا تابع وقت مساوات شرودنگر بمع مناسب سرحدی شرائط کو مساوات ۱۰.۳ مطمئن کرتی ہے۔

ب. فرض کریں اصل کنویں کے زمینی حال میں ایک ذرہ آغاز ($t = 0$) کرتا ہے۔

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

دکھائیں کہ توسیعی عددی سروں کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۵) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-iaz^2} \sin(nz) \sin(z) dz$$

جہاں $\alpha \equiv mva/2\pi^2\hbar$ کنویں کے پھیلنے کی رفتار کی بے بعدی پیمائش ہے۔ (بدقسمتی سے اس نکل کی قیمت بنیادی تقاضات کی صورت میں حاصل نہیں کی جاسکتی۔)

ج. فرض کریں ہم کنویں کو ابتدائی چوڑائی کے دگنی چوڑائی تک پھیلنے دیتے ہیں، یوں ”بیرونی“ وقت $w(T_e) = 2a$ ہوگا۔ (ابتدائی) زمینی حال کے تابع وقت قوت ناجز و ضربی کا دوری عرصہ، ”اندرونی“ وقت ہوگا۔ وقت T_e اور T_i کا تعین کر کے، دکھائیں کہ حرانگزرتھمین سے مراد $1 \ll \alpha$ ہوگا، لہذا نکل کے دائرہ کار پر $1 \cong e^{-i\alpha z^2}$ ہوگا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے توسیعی عددی سر c_n کا تعین کریں۔ حال $\Psi(x, t)$ تیار کر کے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ حرانگزرتھمین کے مطابق ہے۔

د. دکھائیں کہ $\Psi(x, t)$ میں یقینی جز و ضربی کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(10.6) \quad \theta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_1(t') dt'$$

جہاں لمحہ t پر لحاتی امتیازی قدر $E_n(t) \equiv n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m\omega^2$ ہوگا۔ اس نتیجہ پر تبصرہ کریں۔

۱۰.۱.۲ مسئلہ حرانگزرتھمین کا ثبوت

مسئلہ حرانگزرتھمین معقول نظر آتا ہے، اور اسے باآسانی بیان کیا جاسکتا ہے، تاہم اس کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں۔ غیر تابع وقت ہیمیلٹنی کی صورت میں، ایک ذرہ جو n وی امتیازی حال، ψ_n ، میں آغاز کرتا ہے،

$$(10.7) \quad H\psi_n = E_n\psi_n$$

یقینی جز و ضربی اپنانے کے علاوہ اسی n وی امتیازی حال:

$$(10.8) \quad \Psi_n(t) = \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

میں رہتا ہے۔ اگر ہیمیلٹنی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو، تب امتیازی تقاضات اور امتیازی اقدار بھی تابع وقت ہوں گے:

$$(10.9) \quad H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$$

لیکن اب بھی (کسی ایک مخصوص لمحہ پر) یہ معیاری عمودی سلسلہ:

$$(10.10) \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle \delta_{nm}$$

دیں گے، اور یہ مکمل ہیں، لہذا تابع وقت مساوات شرودنگر

$$(10.11) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H(t)\Psi(t)$$

دہمیں معتام (یا چکر، وغیرہ) کا ذکر نہیں کروں گا، چونکہ اس دلیل میں تاہیت وقت کی بات کی جبار ہی ہے۔

کے عمومی حل کو ان کا خطی جوڑ:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(t) e^{i\theta_n(t)} \quad (10.12)$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.13)$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے E_n کی صورت میں ”معیاری“ پستی جزو ضربی کو عمومیت دیتا ہے۔ (ہمیشہ کی طرح میں اس کو عددی سر $c_n(t)$ میں ضم کر سکتا ہوں، لیکن غیر تابع وقت ہیملٹنی کی صورت میں بھی یہ پایا جاتا ہے، لہذا تابعیت وقت کے اس حصے کو صریحاً لکھنا موزوں ہوگا۔)

مساوات ۱۰.۱۲ کو مساوات ۱۰.۱۱ میں پر کرنے سے

$$i\hbar \sum_n [\dot{c}_n \psi_n + c_n \dot{\psi}_n + i c_n \psi_n \dot{\theta}_n] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n} \quad (10.14)$$

حاصل ہوگا (جہاں وقت کے لحاظ سے تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے)۔ مساوات ۱۰.۹ اور مساوات ۱۰.۱۳ کی بنا پر آخری دو اجزاء کٹتے ہیں، لہذا درج ذیل باقی رہتا ہے۔

$$\sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \dot{\psi}_n e^{i\theta_n} \quad (10.15)$$

اس کا ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر، لحاظ امتیازی تفاسلات کی معیاری عمودیت (مساوات ۱۰.۱۰) بروئے کار لاتے ہوئے

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}$$

یاد رہے ذیل حاصل ہوگا۔

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)} \quad (10.16)$$

اب مساوات ۱۰.۹ کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\dot{H} \psi_n + H \dot{\psi}_n = \dot{E}_n \psi_n + E_n \dot{\psi}_n$$

اور یوں (دوبارہ ψ_m کے ساتھ اندرونی ضرب لے کر) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle \quad (10.17)$$

ہم H کے ہر مشی پین سے فائدہ اٹھاتے ہوئے $\langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle$ لکھتے ہیں، یوں $n \neq m$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۱۸) \quad \langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$$

(یہ جانتے ہوئے کہ توانائیاں غیر انخطاطی ہیں) مساوات ۱۰.۱۸ کو مساوات ۱۰.۱۶ میں پُر کر کے درج ذیل اخذ ہوگا۔

$$(۱۰.۱۹) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}$$

یہ ٹھیک ٹھیک نتیجہ ہے۔ اب سرناگزرتخمین کی باری آتی ہے: فرض کریں H نہایت چھوٹا ہے، اور دوسرے جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے^۶

$$(۱۰.۲۰) \quad \dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle$$

ہوگا، جس کا حل

$$(۱۰.۲۱) \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)}$$

ہے، جہاں درج ذیل ہوگا۔^۷

$$(۱۰.۲۲) \quad \gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \right. \right\rangle dt'$$

بالخصوص، اگر ذرہ n وی امتیازی حال (یعنی $n \neq m$ کیلئے $c_n(0) = 1$ اور $c_m(0) = 0$) سے آغاز کرے، تب (مساوات ۱۰.۱۲)

$$(۱۰.۲۳) \quad \Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

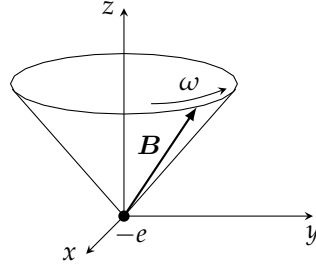
ہوگا، لہذا (چندیتی جزو ضربی حاصل کرنے کے علاوہ) یہ ذرہ (ارتقائی ہیملٹنی کے) n وی امتیازی حال میں ہی رہے گا۔

مثال ۱۰.۱: فرض کریں مقناطیسی میدان میں مبداء پر (کمیت m اور بار $-e$) کا ساکن الیکٹران پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی میدان کی مقدار (B_0) مستقل ہے، جبکہ اس کا رخ z محور کے گرد، مقررہ زاویائی سمتی رفتار ω کے ساتھ، مخروطی سطح پر رہتے ہوئے گھومتا ہے۔ محور z کے ساتھ مخروط کا اندرونی زاویہ α ہے (شکل ۱۰.۳)۔

$$(۱۰.۲۴) \quad B(t) = B_0 [\sin(\alpha) \cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}]$$

^۶ اس قدم کی پختہ وجہ تلاش کرنا اتنا آسان نہیں۔

^۷ چونکہ ψ_m کی معمولی ذنی سیں $0 = \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle = 2 \langle \dot{\psi}_m | \psi_m \rangle$ حقیقی (d/dt) $\langle \psi_m | \psi_m \rangle$ حاصل ہے لہذا γ حقیقی ہوگا۔



شکل ۱۰.۳: مقناطیسی میدان زاویائی سمتی رفتار ω سے مخروطی راہ چھڑاتا ہے (مسادات ۱۰.۲۴)۔

اس کی ہیملٹنی (مسادات ۳.۱۵۸) درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{e\hbar B_0}{2m} [\sin \alpha \cos(\omega t) \sigma_x + \sin \alpha \sin(\omega t) \sigma_y + \cos \alpha \sigma_z] \\
 (10.25) \quad &= \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

جہاں ω_1 درج ذیل ہے۔

$$(10.26) \quad \omega_1 \equiv \frac{eB_0}{m}$$

ہیملٹنی $H(t)$ کے معمول شدہ امتیازی چکرکار χ_+ اور χ_- درج ذیل ہیں

$$(10.27) \quad \chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

$$(10.28) \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

جو $B(t)$ کے لحاظی رخ کے ساتھ، بالترتیب، ہم چکر اور خلاف چکر کو نافہر کرتے ہیں (سوال ۳.۳۰ دیکھیں)۔ ان کی مطابقتی امتیازی افتدار درج ذیل ہوں گی۔

$$(10.29) \quad E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

فرض کریں $B(0)$ کی ہم راہ، الیکٹران ہم چکر:

$$(10.30) \quad \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

صورت سے آغاز کرتا ہے۔^۸ تاہم وقت مساوات شرودنگر کا ٹھیک ٹھیک حل درج ذیل ہوگا (سوال ۱۰.۲)

$$(۱۰.۳۱) \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \cos(\alpha/2) e^{-i\omega t/2} \\ [\cos(\lambda t/2) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\lambda} \sin(\lambda t/2)] \sin(\alpha/2) e^{+i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

جہاں λ درج ذیل ہے۔

$$(۱۰.۳۲) \quad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos \alpha}$$

اس حل کو χ_+ اور χ_- کا قطبی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰.۳۳) \quad \chi(t) = \left[\cos\left(\frac{\lambda t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) + i \left[\frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

ظاہر ہے کہ (B کے موجودہ رخ کے لحاظ سے) خلاف چکر تحویل کا ٹھیک ٹھیک احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۳۴) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 = \left[\frac{\omega}{\lambda} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2$$

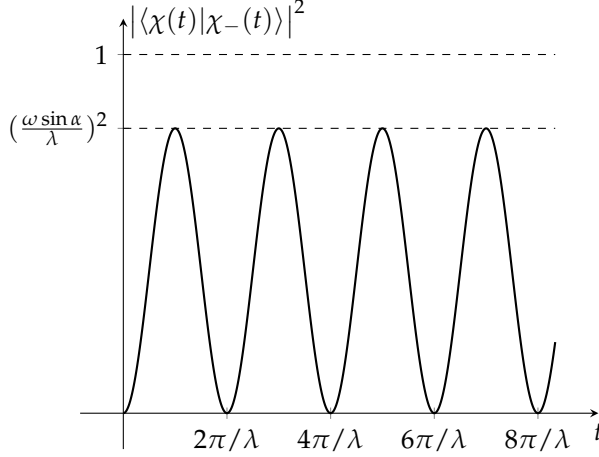
مسئلہ حرانگزرتنمین کہ $T_e \gg T_i$ کی تحدیدی صورت میں تحویلی احتمال صفر کو پہنچے گا، جہاں ہیملٹنی میں تبدیلی کو درکار امتیازی وقت T_e ہے (جو موجودہ صورت میں $1/\omega$ ہوگا)، اور تقابل عمل موج میں تبدیلی کے لیے درکار امتیازی وقت T_i ہے (جو موجودہ صورت میں $\hbar/(E_+ - E_-) = 1/\omega_1$ ہوگا)۔ یوں حرانگزرتنمین سے مراد $\omega \ll \omega_1$ ہے؛ (غیر مضطرب) تقابلات موج کی ہیئت کے لحاظ سے میدان آہستہ گھومتا ہے۔ حرانگزرتنمین میں $\lambda \cong \omega_1$ لہذا

$$(۱۰.۳۵) \quad |\langle \chi(t) | \chi_-(t) \rangle|^2 \cong \left[\frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \right]^2 \rightarrow 0$$

ہوگا، جیسا ہم پہلے سے ذکر کر چکے۔ مقناطیسی میدان الیکٹران کو ہاتھ سے پکڑ کر یوں گھساتا ہے کہ الیکٹران کا چکر ہر لمحہ B کے ہم رخ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس $\omega \gg \omega_1$ کی صورت میں $\lambda \cong \omega$ ہوگا اور نظام ہم میدان اور خلاف میدان صورتوں کے بیچ پکیاں کھائے گا (شکل ۱۰.۴)۔ □

سوال ۱۰.۲: تصدیق کریں کہ مساوات ۱۰.۲۵ کی ہیملٹنی کیلئے مساوات ۱۰.۳۱ تاہم وقت مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتی ہے۔ ساتھ ہی مساوات ۱۰.۳۳ کی تصدیق کریں اور دکھائیں کہ، معمول زنی شرط کے عین مطابق، عددی سروں کے سروں کا مجموعہ 1 ہوگا۔

^۸ یہ بنیادی طور پر سوال ۹.۲۰ ہی ہے، البتہ یہاں الیکٹران B کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے، جبکہ سوال ۹.۲۰-د میں یہ z محور کی ہم راہ، ہم چکر سے آغاز کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۲: غیر حیرناگر طریق ($\omega \gg \omega_1$) میں تحویلی احتمال (مساوات ۱۰.۳۳)۔

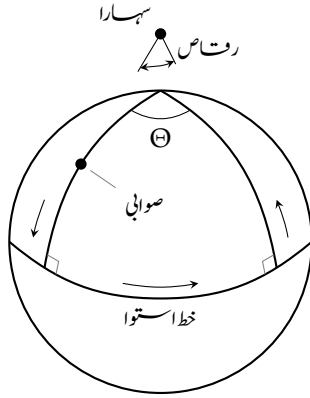
۱۰.۲ ہیئت بیری

۱۰.۲.۱ گرگنی عمل

آئیں حصہ ۱۰.۱ کے کلاسیکی نمونہ پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں جس میں ایک ایسے کامل بے رگڑ رفاص، جس کے سہارا کو ایک معتم سے دوسرے اور دوسرے سے تیسرے معتم منتقل کیا جاتا ہو، استعمال کرتے ہوئے حیرناگر عمل کا تصور اخذ کیا گیا۔ میں نے دعویٰ کیا تھا کہ جب تک سہارا کی حرکت رفاص کے دوری عرصے سے بہت آہستہ ہو (تاکہ سہارا کی نمایاں حرکت کے دوران رفاص بہت ساری ارتعاش کرتا ہو)، یہ اسی مستوی (یا اس کے متوازی مستوی) میں اسی حیطے (اور اسی تعداد) کے ساتھ جھومتا رہے گا۔

اگر میں اس کامل رفاص کو شمالی قطب پر لے جا کر، مثلاً صوابی شہر کے رخ، جھولا دوں (شکل ۱۰.۵) تو کیا ہوگا؟ فی الحال تصور کریں کہ دنیا گھوم نہیں رہی ہے۔ میں اس کو بہت آہستہ (یعنی حیرناگر طریق سے) صوابی سے گزرتے خط طول بلد پر چلتے ہوئے، خط استوا تک پہنچتا ہوں۔ یہاں پہنچ کر یہ شمال و جنوب جھولے رہا ہوگا۔ میں اس کو خط استوا پر کچھ فاصلہ دور تک لے جاتا ہوں (رفاص ابھی بھی شمال و جنوب جھولتا ہے)۔ آخر میں نئے خط طول بلند پر چلتے ہوئے، میں رفاص کو واپس شمالی قطب منتقل کرتا ہوں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رفاص اب اسی مستوی میں نہیں جھولے گا جس سے اس نے آغاز کیا تھا؛ یقیناً، نئے اور پرانے مستوی کے بیچ زاویہ Θ پایا جاتا ہے، جہاں جنوب کی طرف چلتے ہوئے اور شمال کی طرف چلتے ہوئے خط طول بلند کے بیچ زاویہ Θ ہے۔

جس راہ پر میں رفاص کو اٹھا کر چلتا رہا، وہ راہ (زمین کے مرکز پر) ٹھوس زاویہ Ω ، بناتی ہے اور Θ اسی (Ω) کے



شکل ۱۰.۵: سطح زمین پر روتاص کی حرانگزر منتقلی۔

برابر ہے۔ یہ راہ شمالی نصف کرہ کا $\Theta/2\pi$ حصہ گھیرتی ہے، لہذا اس کا رقبہ

$$A = (1/2)(\Theta/2\pi)4\pi R^2 = \Theta R^2$$

ہوگا (جہاں R زمین کا رداس ہے)؛ یوں

$$(۱۰.۳۶) \quad \Theta = A/R^2 \equiv \Omega$$

ہوگا جو اس نتیجے کو نہایت عمدہ انداز میں پیش کرتا ہے، چونکہ یہ راہ کی شکل و صورت پر منحصر نہیں (شکل ۱۰.۶)۔^{۱۰}

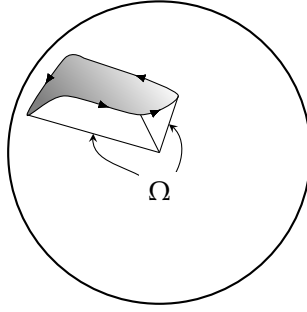
کرہ کی سطح پر بند راہ پر چلتے ہوئے حرانگزر منتقلی کی ایک مثال **فوقرقاص**'' ہے، جہاں روتاص کو اٹھ کر چیلنے کا کام مجھے نہیں بلکہ زمین کے گھومنے کو سونپا جاتا ہے۔ خط عرض بلد θ_0 درج ذیل ٹھوس زاویہ بناتا ہے (شکل ۱۰.۷)۔

$$(۱۰.۳۷) \quad \Omega = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi(-\cos \theta)|_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

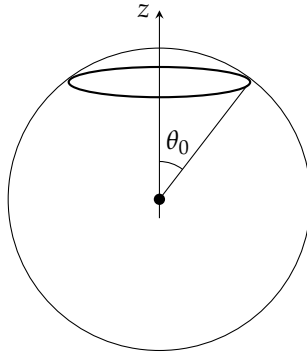
زمین کے لحاظ سے (جو اس دوران 2π زاویہ گھوم چکی ہوگی) فوقرقاص کی روزانہ استقبالی حرکت $2\pi \cos \theta_0$ ہوگی؛ اس نتیجہ کو، عموماً، گھومتی حوالہ چوکھٹ پر کوریولس^{۱۲} قوتوں کے اثر سے حاصل کیا جاتا ہے، لیکن یہاں یہ حلتا ہندی مفہوم کا حاصل ہے۔

^{۱۰} آپ چاہیں تو اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔ اس راہ کو زمین کے گرد دائری لکسیروں کے چھوٹے چھوٹے حصوں کا مجموعہ تصور کریں۔ روتاص ہر ایسی لکیر کے ساتھ مستقل زاویہ بنائے گا لہذا احتیاطاً زاویائی انحراف کا تعلق کر دی کشیر الاضلاع کے راس زاویوں کے مجموعہ کے ساتھ ہو گا۔

^{۱۱} Foucault pendulum
^{۱۲} Coriolis



شکل ۱۰.۶: کرہ پر اختیاری راہ، ٹھوس زاویہ Ω بناتی ہے۔



شکل ۱۰.۷: ایک دن کے دوران، فوقورت اس کی راہ۔

ایسا نظام جو بند راہ پر چلتے ہوئے واپس ابتدائی نقطہ پہنچ کر اپنے ابتدائی حال کو نہیں لوٹا گرگٹھ^{۱۳} کہلاتا ہے۔ (یہاں ضروری نہیں کہ راہ پر چلنے سے مراد ”حرکت دینا“ ہو؛ اس سے مراد صرف اتنا ہے کہ نظام کی مقدار معلوم قیمتوں کو یوں تبدیل کیا جاتا ہے کہ آخر کار ان کی قیمتیں وہی ہوں جو ابتدائے میں تھیں۔) گرگٹھ نظام جگہ جگہ پائے جاتے ہیں؛ ایک لحاظ سے ہر چکر دار انجن گرگٹھ ہے؛ ہر ایک پھیرے کے اختتام تک گاڑی آگے حرکت کر چکی ہوگی، یا کوئی وزن اٹھایا گیا ہوگا، وغیرہ۔ اس تصور کا اطلاق، چھوٹے ریٹائل عدد^{۱۴} پر سیال میں، حرثوں میں کی حرکت پر بھی کیا گیا ہے۔ اگلے حصے میں میں گرگٹھ حراناکر عمل کی کویشائی میکانیات پر غور کروں گا۔ ہم نے دیکھا ہوگا کہ ہیملٹنی کی مقدار معلوم مقداروں کو کسی بند راہ پر حراناکر پھیرا دینے سے اختتامی حال کس طرح ابتدائی حال سے مختلف ہوگا۔

۱۰.۲.۲ ہندسی ہیئت

میں نے حصہ ۱۰.۱.۲ میں دکھایا کہ ایک ذرہ جو $H(0)$ کے n وی امتیازی حال سے آغاز کرتا ہے، حراناکر صورت میں، تابع وقت ہیئت جزو ضربی کے علاوہ، $H(t)$ کے n وی امتیازی حال میں رہتا ہے۔ بالخصوص، اس کا تعلق عمل موج (مساوات ۱۰.۲.۳):

$$\Psi_n(t) = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} \psi_n(t) \quad (10.38)$$

ہوگا، جہاں

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (10.39)$$

حرکے ہیئت^{۱۵} ہے (جو وقت کے تعلق عمل E_n کی صورت میں، جزو ضربی $e^{(-iE_n t/\hbar)}$ کو عموماً دیتی ہے)، اور درج ذیل ہندسہ ہیئت^{۱۶} کہلاتی ہے۔

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \langle \psi_n(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle dt' \quad (10.40)$$

چونکہ ہیملٹنی میں کوئی ایسی مقدار معلوم $R(t)$ پائی جاتی ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے، لہذا $\psi_n(t)$ وقت t کا تابع ہوگا۔ (سوال ۱۰.۱ میں $R(t)$ ، پھلتے ہوئے چوکور کنویں کی، چوڑائی ہوگی۔) یوں

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt} \quad (10.41)$$

لہذا

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \rangle dR \quad (10.42)$$

^{۱۳}nonholonomic
^{۱۴}Reynolds number
^{۱۵}dynamic phase
^{۱۶}geometric phase

ہوگا، جہاں R_i اور R_f مقدار معلوم R_t کی بالترتیب ابتدائی اور اختتامی قیمتیں ہوں گی۔ بالخصوص، اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا ابتدائی روپ اختیار کرے تب $R_f = R_i$ لہذا $\gamma_n(T) = 0$ ہوگا، جو زیادہ دلچسپ صورت حال نہیں!

میں نے مساوات ۱۰.۴۱ میں فرض کیا کہ ہیملٹنی میں صرف ایک مقدار معلوم ایسا ہے جو تبدیل ہوتا ہو۔ اب فرض کریں N عدد مقدار معلوم $R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$ تبدیل ہوتے ہوں؛ تب درج ذیل ہوگا

$$(10.43) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

جہاں $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$ ہے اور ∇_R ان مقدار معلوم کے لحاظ سے ڈھلوان ہے۔ اس مرتبہ درج ذیل ہوگا

$$(10.44) \quad \gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

اور اگر وقت T کے بعد ہیملٹنی واپس اپنا اصل روپ اختیار کرتا ہو تب حوالہ ہندسی پیتی تبدیل درج ذیل ہوگی۔

$$(10.45) \quad \gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

یہ مقدار معلوم فضا میں بند راہ پر لکیری تکمیل ہے، جو عموماً غیر صفر ہوگا۔ مساوات ۱۰.۴۵ کو پہلی مرتبہ 1984ء میں ^{۱۷} میکائل بیری نے حاصل کیا اور یوں $\gamma_n(T)$ ہیٹے بیرے ^{۱۸} کہلاتی ہے۔ دھیان رہے کہ (جب تک حرکت اتنی آہستہ ہو کہ حرانگزر کے شرائط مطمئن ہوتے ہوں) $\gamma_n(T)$ کی قیمت صرف اس راہ پر منحصر ہوگی جس پر چلا جائے نہ کہ راہ پر چلنے کی رفتار پر۔ اس کے برعکس، مجموعی حرکی ہیٹ

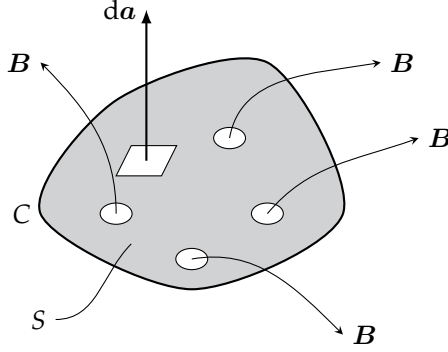
$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt'$$

گزرے ہوئے وقت کے تابع ہوگی۔

ہم اس سوچ کے عادی ہیں کہ تفاعل موج کی ہیٹ اختیاری ہے؛ طبعی مقداروں میں $|\Psi|^2$ پایا جاتا ہے، لہذا پیتی جزو ضربی کٹ جاتا ہے۔ اسی لیے عموماً لوگوں کا خیال تھا کہ ہندسی ہیٹ کی کوئی طبعی اہمیت نہیں؛ آخر $\psi_n(t)$ کی ہیٹ بھی تو اختیاری ہے۔ یہ سیری کی دوراندیشی تھی کہ انہوں نے اس حقیقت کو پہچانا کہ ہیملٹنی کو بند دائرے پر پھیرا دے کر واپس اپنے اصل روپ میں لانے سے ابتدا اور اختتام کے بیچ زائد ہیٹ غیر اختیاری ہوگی، جس کی پیمائش بھی کی جاسکتی ہے۔

مشال کے طور پر، ذرات (تمام حال Ψ میں) کی ایک شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے، صرف ایک حصے کو حرانگزر تبدیل ہوتے مخفی سے گزارا جاتا ہے۔ دونوں حصوں کو دوبارہ اکٹھا کرنے سے درج ذیل روپ کا مجموعی تفاعل

^{۱۷} اچیرت کی بات ہے کہ 60 سال تک یہ حقیقت کسی کو نظر نہیں آئی۔
Berry's phase^{۱۸}



شکل ۱۰.۸: بند مخفی C کے سطح S سے گزرتا مقناطیسی بہا۔

موج حاصل ہوگا

$$(۱۰.۴۶) \quad \Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma}$$

جہاں Ψ_0 ”سیدھی پنچتی“ شعاع کا تقاضا عمل موج اور Γ تغیر پذیر H کی بنا پر شعاع کی زائد ہیئت ہے (جس کا کچھ حصہ حرکی اور کچھ ہندسی ہوگا)۔ اس صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۰.۴۷) \quad \begin{aligned} |\Psi|^2 &= \frac{1}{4}|\Psi_0|^2 (1 + e^{i\Gamma})(1 + e^{-i\Gamma}) \\ &= \frac{1}{2}|\Psi_0|^2 (1 + \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2) \end{aligned}$$

یوں تعمیری اور تباہ کن مداخلت کے نقاط (جہاں Γ کی قیمت π کی بالترتیب جفت اور طاق مضرب ہوگی) سے Γ کی پیمائش کی جاسکتی ہے (بیری اور دیگر مصنفین کو شبہ تھتا کہ زیادہ بڑی حرکی ہیئت کی موجودگی میں ہندسی ہیئت نظر نہیں آئے گی، لیکن انہیں علیحدہ علیحدہ کرنا ممکن ثابت ہوا ہے)۔

تین ابعادی مقدار معلوم فضا، $R = (R_1, R_2, R_3)$ ، میں کلیہ بیری (مسوات ۱۰.۴۵) سستی مخفیہ A کی صورت میں مقناطیسی بہا^{۱۹} کے کلیہ کا یاد دلاتا ہے۔ سطح S جس کی سرحد مخفی C ہو سے درج ذیل بہا گزرتا ہے (شکل ۱۰.۸)۔

$$(۱۰.۴۸) \quad \Phi \equiv \int_S B \cdot da$$

مقناطیسی میدان کو سمتی مخفیہ کے روپ ($B = \nabla \times A$) میں لکھ کر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot da = \oint_C A \cdot dr \quad (10.49)$$

یوں ہیٹ بیرئری کو مقدار معلوم فضا میں بند راہ کے اندر سے ”مقناطیسی میدان“ کا ”ہیٹ“

$$“B” = i \nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \quad (10.50)$$

تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کو دوسری طرف سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے: تین ابعادی صورت میں ہیٹ بیرئری کو سطحی شکل:

$$\gamma_n(T) = i \int [\nabla_R \times \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle] \cdot da \quad (10.51)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مقناطیسی ممانٹ کو کافی دور تک لے جایا جاسکتا ہے، تاہم ہماری مقاصد کے نقطہ نظر سے مساوات ۱۰.۵۱ محض $\gamma_n(T)$ لکھنے کا دوسرا انداز ہے۔

سوال ۱۰.۳:

ا. لامتناہی چوکور کنویں کی چوڑائی w_1 سے بھڑک w_2 ہونے کی صورت میں مساوات ۱۰.۵۱ استعمال کرتے ہوئے ہندسی تبدیلی ہیٹ تلاش کریں

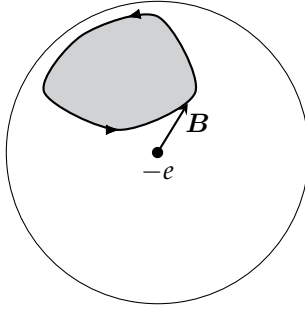
ب. اگر وسعت مستقل شرح ($dw/dt = v$) سے بڑھے تب حرکی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگی

ج. اب اگر چوڑائی کم ہو واپس w_1 ہو جاتی ہے تب اس ایک تیرے کا ہیٹ بیرئری کیا ہوگا

سوال ۱۰.۴: ڈیٹا تفاعل کنواں مساوات ۱۱۴.۲ واحد ایک مقبض حال مساوات ۱۲۹.۲ کا حاصل ہے α آہستہ آہستہ α_1 سے بڑھ کر α_2 ہوتا ہے ہندسی تبدیلی ہیٹ کا حساب لگائیں اگر تبدیلی ایک مستقل شرح $d\alpha/dt = c$ سے رونما ہو تب حرکی تبدیلی ہیٹ کیا ہوگا

سوال ۱۰.۵: دکھائی کے حقیقی $\psi_n(t)$ کی صورت میں ہندسی ہیٹ صفر ہوگا سوال ۱۰.۳ اور ۱۰.۴ اس کی مثالیں ہیں امتیازی تفاعل کے ساتھ ایک غیر ضروری لیکن وٹانونی طور پر بالکل جائز حبزو ضربی ہیٹ منسلک کریں $\psi'_n(t) \equiv e^{i\Phi_n} \psi_n(t)$ جہاں $\Phi_n(R)$ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے یقیناً آپ غیر صفر ہندسی ہیٹ حاصل کریں گے لیکن دیکھنا یہ ہے کہ اسے مساوات ۱۰.۲۳ میں پر کرنے سے کیا ہوگا اور بند راہ پر صفر حاصل ہوگا سبق غیر صفر ہیٹ بیرئری کی خاطر آپ کو ایک ہیملٹنی میں ایک سے زیادہ تابع وقت مقدار معلوم کی ضرورت ہوگی اور دو ایسا ہیملٹنی درکار ہوگا جو غیر حقیقی مخلوط امتیازی تفاعلات دیتے ہوں

مثال ۱۰.۲: ہیٹ بیرئری کی کلاسیکی مثال ایک مستقل مقدار کی مقناطیسی میدان جس کی سمت تبدیل ہوتی ہو میں مبداء پر پڑا ہوا ایک الیکٹران ہے پہلے اس خصوصی صورت کو دیکھتے ہیں جس کا تجزیہ مثال ۱۰.۱۰ میں کیا گیا اور جس میں محور z کے ساتھ ایک اٹل زاویہ α بناتے ہوئے $B(t)$ ایک مستقل زاویہ ہیستی رفتار ω



شکل ۱۰.۹: مستقل مقدار لیکن بدلتے رخ کا مقناطیسی میدان بند راہ پر چلتا ہے۔

سے استقبالی حرکت کرتا ہو میدان بھی کے ساتھ ساتھ ہم میدان الیکٹران کی صورت میں مساوات 33.10 ٹھیک ٹھیک حل دیتی ہے حرانگزر صورت $\omega \ll \omega_1$ میں

$$(۱۰.۵۲) \quad \lambda = \omega_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cong \omega_1 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \cos \alpha\right) = \omega_1 - \omega \cos \alpha$$

ہوگا لہذا مساوات 33.10 درج ذیل روپ اختیار کرے گی

$$(۱۰.۵۳) \quad \chi(t) \cong e^{-i\omega_1 t/2} e^{i(\omega \cos \alpha)t/2} e^{-i\omega t/2} \chi_+(t) \\ i \left[\frac{\omega}{\omega_1} \sin \alpha \sin \left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \right] e^{+i\omega t/2} \chi_-(t)$$

دوسرے جزو کو $0 \rightarrow \omega/\omega_1$ کی صورت میں رد کرتے ہوئے مساوات 23.10 کے مطابق نتیجہ حاصل ہوگا حرانگزر کی ہیئت درج ذیل ہے

$$(۱۰.۵۴) \quad \theta + (t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E + (t') dt' = -\frac{\omega_1 t}{2}$$

جہاں مساوات 29.10 سے $E_+ = \hbar \omega_1 / 2$ ہوگا لہذا اس ہیئت درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۵) \quad \gamma + (t) = (\cos \alpha - 1) \frac{\omega t}{2}$$

ایک مکمل پھیرا کے لیے $T = 2\pi/\omega$ ہوگا لہذا ہیئت سیری درج ذیل ہوگی

$$(۱۰.۵۶) \quad \gamma + (T) = \pi(\cos \alpha - 1)$$

اب ایک زیادہ عمومی صورت پر غور کرتے ہیں جس میں مقناطیسی میدان سمتیہ کی نوک رداس B_0 r کی کراں کہ سطح ہر ایک اختیاری بند راہ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۹)۔ میدان $B(t)$ کے ساتھ ساتھ ہم میدان کو ظاہر کرنے

والا امتیازی حال درج ذیل روپ کا ہوگا سوال 30.4 دیکھیں

$$(10.57) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

جہاں B کے دونوں کردی مہدد θ اور π وقت کے تغیرات ہیں کردی مہدد میں ڈھلواں درج ذیل ہوگا جیسے آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں

$$(10.58) \quad \nabla \chi_+ = \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$(10.59) \quad = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\phi}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.60)$$

$$\langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{2r} \left[-\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \hat{\theta} + 2i \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin \theta} \hat{\phi} \right]$$

$$(10.61) \quad = i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} p_{\hbar i}$$

ساوات 51.10 کے لیے ہمیں اس متدار کی گردش درکار ہوگی

$$(10.62) \quad \nabla \times \langle \chi_+ | \nabla \chi_+ \rangle = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{i \sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \right) \right] \hat{r} = \frac{i}{2r^2} \hat{r}$$

یوں ساوات 51.10 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(10.63) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{a}$$

تکمل فترہ کی سطح پر اس رقبے پر لیا جائے گا جس کو B کی چھوٹی ایک پھیرا میں گرتا ہوا لہذا $d\mathbf{a} = r^2 d\Omega \hat{r}$ ہوگا جس کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(10.64) \quad \gamma_+(T) = -\frac{1}{2} \int d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega$$

جہاں Ω زاویہ ہے یہ ایک انتہائی سادہ نتیجہ ہے جو ہمیں اس کلاسیکی مسئلہ کی یاد دلاتا ہے جس سے ہم نے یہ تبصرہ شروع کیا یعنی زمین کی سطح پر ایک بند راہ پر ایک بلا رگڑ روتاص کی منتقلی اس نتیجہ کے تحت کسی اختیاری بند راہ پر ایک مقناطیس کی مدد سے الیکٹران کے چکر کو حسرتا گزر طریقے سے لے جانے سے کل ہندسی تبدیلی ہیٹ مقناطیسی میدان سمتیہ کی چھوٹی سے حاصل ٹھوس زاویہ کی منفی متغی بادا ہوگا ساوات 37.10 کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ عمومی نتیجہ ساوات 56.10 کہ خصوصی نتیجہ کے مطابق ہے جیسا یقیناً ہونا بھی چاہیے □

سوال ۱۰.۶: ایک ذرہ جس کا چکر ایک ہو کے لئے مساوات 62.10 کا مائل حاصل کریں جواب $\Omega -$ ایک ذرہ جس کا چکر s ہو کے لیے منتخب $-s\Omega$

۱۰.۲.۳ ہارونو پوہم اثر

کلاسیکی برقی حرکیات میں طبیعی متداریں برقی اور مقناطیسی میدان ہیں؛ مخفیہ φ اور A بلاواسطہ نامتامل پیمائش ہیں

$$(10.65) \quad E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$

میکول مساوات اور متاعدہ لورنس قوت جیسے بنیادی قوانین مخفیہ کا کوئی ذکر نہیں کرتے ہیں جو منطقی نقطہ نظر سے ایک نظریہ مرتب کرنے کے لیے کارآمد لیکن ویسے غیر ضروری ہیں یقیناً ہم بغیر خوف و خطر ان مخفیہ کو تبدیل کر سکتے ہیں

$$(10.66) \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A + \nabla \Lambda$$

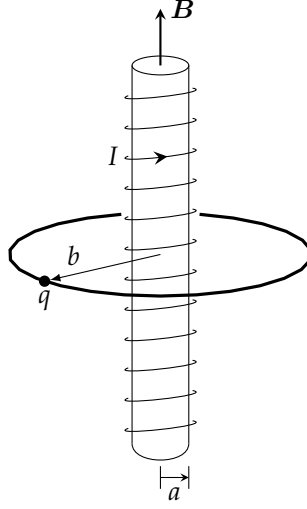
جہاں Λ مقام اور وقت کا کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے اسے ماپ تبدیلہ کہا جاتا ہے اور جیسا آپ مساوات 63.10 استعمال کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ اس کامیڈانوں پر کوئی اثر نہیں ہوگا کوانٹائی میکانیات میں مخفیہ زیادہ اہم کردار ادا کرتی ہے چونکہ ہیملٹنی کو φ اور A کی صورت میں نہ کہ E اور B کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$(10.67) \quad H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 + q\varphi$$

بہر حال زیر ماپ تبدیلہ یہ نظریہ غیر متغیر ہے سوال 61.4 دیکھیں اور بہت لمبے عرصے کے لیے مانا گیا کہ جن خطوں میں E اور B صفر ہوں وہاں کسی قسم کا برقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا بالکل اسی طرح جس طرح کلاسیکی نظریہ میں ہوتا ہے لیکن 1959 میں ہارونو اور پوہم نے دکھایا کہ اس خطہ میں بھی جہاں میدان صفر ہو سکتی مخفیہ حرکت پذیر باردار ذرہ کے کوانٹائی رویہ پر اثر انداز ہوگا میں ایک سادہ مثال پیش کرنے کے بعد ہارونو پوہم اثر پر تبصرہ کے بعد اس کا تعلق بیت بیرری کے ساتھ پیش کروں گا۔

فرض کریں ایک ذرہ کو رداس b کے دائرہ پر رہنے کا پابند بنایا جائے اس دائرے کے محور پر رداس $a < b$ کا ایک لمبا لچھا پایا جاتا ہے جس میں یک سمتی برقی رو I ہے (شکل ۱۰.۱۰) بہت لمبا لچھا کی صورت میں لچھے کے اندر مقناطیسی میدان یکساں ہوگا جبکہ بیرونی میدان صفر ہوگا تاہم لچھے کا بیرونی سمتی مخفیہ غیر صفر ہوگا یقیناً موزوں ماپ شرط $\nabla \cdot A = 0$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا

$$(10.68) \quad A = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (r > a)$$



شکل ۱۰.۱: ایک دائرہ، جس کے اندر سے ایک لمبے پچھواں برقی مقناطیس گزرتا ہو، پر ایک باردار ذرہ حرکت کرتا ہے۔

جہاں $\Phi = \pi a^2 B$ لچھے سے گزرتا ہو مقناطیسی بہا ہوگا ساتھ ہی لچھا خود غنیر باردار ہے لہذا غنیر سستی مخفیہ φ صفر ہے ایسی صورت میں ہیملٹنی مساوات 65.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$(10.19) \quad H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot \nabla]$$

اب تفاعل موج صرف زاویہ انت ($\phi(\theta) = \pi/2, r = b$) پر منحصر ہے لہذا $\nabla \rightarrow (p\hbar/b)(d/d\phi)$ ہوگا اور مساوات شرودنگر درج ذیل لکھی جائے گی

$$(10.20) \quad \frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i\frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

یہ مستقل عددی سروں والی خطی تفرقی مساوات ہے

$$(10.21) \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon \psi = 0$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$(10.22) \quad \beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2$$

اس کے حل درج ذیل روپ کے ہونگے

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi} \quad (10.43)$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (10.44)$$

نقطہ $\phi = 2\pi$ پر $\psi(\phi)$ کی استمرار کی بنا پر λ عدد صحیح

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} = n \quad (10.45)$$

ہوگا جس سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.46)$$

لچھا دائرے پر ذرہ کی دوری انحطاط ختم کرتا ہے سوال 46.2 مثبت n جو لچھا میں رو کے رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کو ظاہر کرتا ہے q مثبت لیتے ہوئے منفی n کے لحاظ سے جو مخالف رخ ذرہ کو ظاہر کرتا ہے کے لحاظ سے نسبتاً کم توانائی دیتا ہے زیادہ اہم بات یہ ہے کہ احبازی توانائیوں کا دارومدار لچھے کے اندر میدان پر ہوگا اگرچہ اس معتام پر جہاں ذرہ پایا جاتا ہے میدان منفرہ زیادہ عمومی صورت پر غور کرنے کی خاطر منفرہ کریں ایک ذرہ ایسے خطہ میں حرکت کرتا ہے جہاں B ہے لہذا $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ہوگا تاہم \mathbf{A} خود غیر منفرہ ہے اگرچہ میں منفرہ کرتا ہوں کہ \mathbf{A} ساکن ہے اس ترکیب کو تابع وقت مخفیہ کے لئے عمومیت دی جاسکتی ہے مخفی توانائی V جس میں برقی حصہ $q\psi$ شامل یا غیر شامل ہو سکتا ہے کی مساوات شروڈنگر

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10.47)$$

کی سادہ روپ درج ذیل لکھ کر حاصل کی جاسکتی ہے

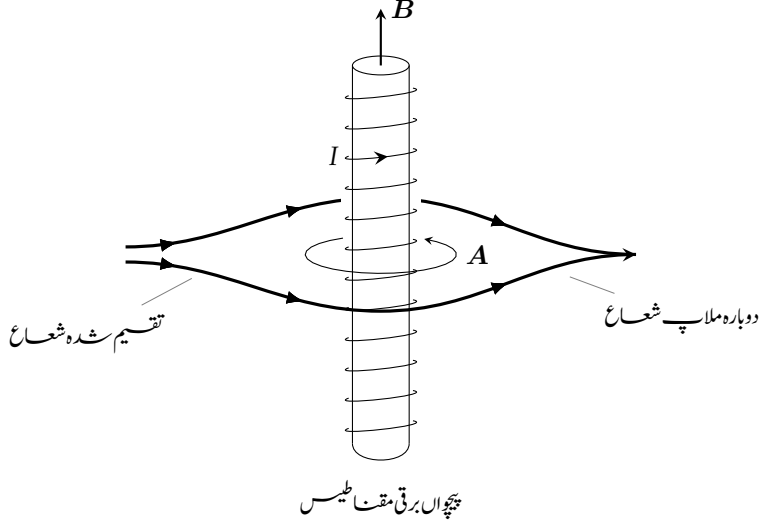
$$\Psi = e^{ig} \Psi' \quad (10.48)$$

جہاں $g(\mathbf{r})$ درج ذیل ہے

$$g(\mathbf{r}) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (10.49)$$

اور 1 کوئی بھی اختیاری نقطہ حوالہ ہے دھیان رہے کہ یہ تعریف صرف اس صورت با معنی ہوگی جب پورا خطہ میں $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ہو ورنہ لکیری تکمل 1 سے \mathbf{r} تک راہ پر منفرہ ہوگا اور یوں \mathbf{r} کا تعادل نہیں ہوگا Ψ' کی صورت میں Ψ کا ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i\nabla g) \Psi' + e^{\nabla \Psi'}$$



شکل ۱۰.۱۱: اہارانو و بوہم اثر: الیکٹران شعاع تقسیم ہو کر آدھا حصہ لمبے پتچواں برقی مقناطیس کے ایک طرف اور دوسرا حصہ دوسرے طرف سے گزرتا ہے۔

لیکن $\nabla g = (q/\hbar)A$ کے برابر ہے لہذا

$$(10.80) \quad \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - qA\right)\Psi = \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi'$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

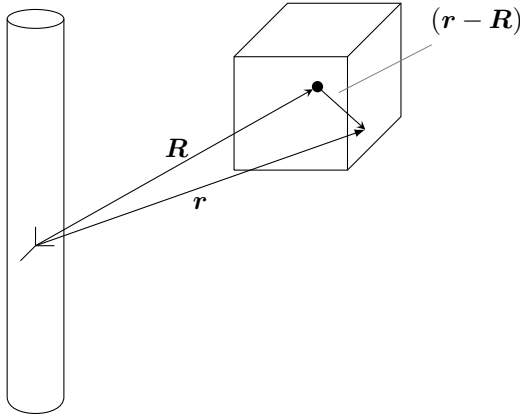
$$(10.81) \quad \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - qA\right)^2\Psi = -\hbar^2e^{ig}\nabla^2\Psi'$$

اس کو مساوات 75.10 میں پر کر کے مشترکہ جزو ضربی e^{ig} کو کاٹ کر درج ذیل ملتا ہے

$$(10.82) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}$$

بظاہر Ψ' بغیر A مساوات شرودنگر کو مطمئن کرتا ہے مساوات 80.10 کا حل تلاش کرنے کے بعد بغیر گردش سستی منقہ سے پیدا تصحیح کو شامل کرنا حقیر سا کام ہوگا: ہمیں صرف پستی جزو ضربی e^{ig} ساتھ منسلک کرنا ہوگا۔

عہرانو اور بوہم نے ایک تجربہ تجویز کیا جس میں الیکٹران کی شعاع کو دو حصوں میں تقسیم کر کے لمبے لمبے کے دونوں اطراف سے گزار کر دوبارہ اکٹھا کیا جاتا ہے (شکل ۱۰.۱۱) ان شعاعوں کو لمبے لمبے سے اتنا دور رکھا جاتا ہے



شکل ۱۰.۱۲: مخفیہ $V(r - R)$ ایک ذرہ کو ڈبہ میں مقید کیے ہوئے ہے۔

جہاں $B = 0$ ہوتا ہم A جس سے مساوات 66.10 پیش کرتی ہے غیر صفر ہوگا اور دونوں اطراف V کی قیمت ایک جیسی تصور کرتے ہوئے اختتامی نقطہ پر دونوں شعاعوں میں پتی منرق پایا جائے گا

$$(10.83) \quad g = \frac{q}{\hbar} \int A \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{r}\hat{\phi}\right) \cdot (r\hat{\phi} d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar}$$

یہاں مثبت علامت ان الیکٹران کے لیے ہوگی جو لمبے لمبے میں A کے رخ حرکت کرتے ہیں دونوں شعاعوں کے بیچ پتی منرق اس مقناطیسی بہاؤ کے راست متناسب ہوگا جس سے ان کی راہ گسرتے ہیں

$$(10.84) \quad \text{پتی منرق} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

اس پتی منتقل سے متبادل پیمائش مداخلت مساوات 48.10 پیدا ہوتی ہے جس کی تجرباتی تصدیق چیمبرز اور ساتھی کرچکے ہیں اہارنوبو ہم اثر کو ہندی پتی کی ایک مثال تصور کی جاسکتی ہے منرض کریں مخفیہ $V(r - R)$ ایک باردار ذرہ کو ایک ڈبہ میں رہنے کا پابند بناتا ہو جہاں ڈبہ کا مرکز لمبے لمبے سے باہر نقطہ R پر ہے؛ شکل ۱۰.۱۲ دیکھیں۔ ہم کچھ ہی دیر میں اس ڈبہ کو لمبے لمبے کے گرد ایک پھیرا دیں گے لہذا R وقت کا تقاب عمل ہوگا تاہم ابھی اسے ایک غیر متغیر سمتیہ تصور کریں اس ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعین کرتی ہے

$$(10.85) \quad \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - qA(\mathbf{r}) \right]^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

ہم اس طرز کی مساوات کو حل کرنا چاہتے ہیں ہم

$$(10.86) \quad \psi_n = e^{ig} \psi'_n$$

لیتے ہیں جہاں درج ذیل ہوگا

$$(10.87) \quad g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d(\mathbf{r}')$$

اور ψ' اسی امتیازی متدرجات کو صرف اس صورت میں مقرر کرے گا جب $A \rightarrow 0$ ہو

$$(10.88) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \psi' = E_n \psi'_n$$

آپ نے دیکھا کہ ψ'_n ہٹاؤ $\mathbf{r} - \mathbf{R}$ کا تناسب ہے نہ کہ ψ_n کی طرح علیحدہ علیحدہ \mathbf{r} اور \mathbf{R} کا تناسب ہے۔ آئیے اب اس ذب کو لمبے لمبے کے گرد ایک پھیلا دیتے ہیں یہاں اس عمل کا حیرانگیز ہونے کے بھی ضرورت نہیں ہے ہیئت بیری تعین کرنے کی خاطر ہمیں مقدار $\langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle$ کی قیمت درکار ہوگی درج ذیل کی بنا پر

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R [e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})] = -\frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(10.89) \quad \begin{aligned} \langle \psi_n | \nabla \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* e^{ig} \left[-i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] d^3 r \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int [\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})]^* \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 r \end{aligned}$$

بغیر زبردنوشت ∇ کے لحاظ سے ڈھلوان ظاہر کرتا ہے اور میں نے $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ کے تناسب پر عمل کے دوران $\nabla_R = -\nabla$ لیا یہاں آخری مکمل ہیملٹنی $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ کے امتیازی حال میں معیار حرکت کی توقعاتی قیمت ضرب i/\hbar ہے جو ہم حصہ 1.2 سے جانتے ہیں کہ صفر ہوگا یوں درج ذیل ہوگا

$$(10.90) \quad \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

اس کو کلیہ بیری مساوات 45.10 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل اخذ ہوگا

$$(10.91) \quad \gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

جو اہارونو بوہم نتیجہ مساوات 82.10 کی تصدیق کرتا ہے اور دکھاتا ہے کہ اہارونو بوہم اثر فنی ہیئت کی ایک خصوصی صورت ہے اہارونو بوہم اثر سے ہم کیا مطلب لیں ظاہر ہے ہماری کلاسیکی شعور درست نہیں ہے ایسے خطوں میں جہاں میدان صفر ہوں برقناطیسی اثرات پائے جاسکتے ہیں دھیان رہے کہ اس سے \mathbf{A} خود قابل پیمائش نہیں ہو جاتا آخری نتیجہ میں صرف گھیرا ہوا ہوا پایا جاتا ہے اور نظریہ اب بھی گچ غیر متغیر رہتا ہے

سوال ۱۰.۷:

۱. مساوات 65.10 سے مساوات 67.10 اخذ کریں

ب. مساوات 78.10 سے آغاز کرتے ہوئے مساوات 79.10 اخذ کریں

سوال ۱۰.۸: ایک ذرہ لامستثنائی چوکور کنویں وقفہ $0 \leq x \leq a$ کی زمینی حال سے آغاز کرتا ہے اب کنویں کے وسط کے متعرب آہستہ آہستہ ایک دیوار کھڑی کی جاتی ہے

$$V(x) = f(t)\delta(x - \frac{a}{2} - \epsilon)$$

جہاں $f(t)$ آہستہ آہستہ صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے مسئلہ حرانگزر کے تحت یہ ذرہ ارتقائی ہیملین کے زمینی حال میں ہی رہے گا

۱. وقت $t \rightarrow \infty$ پر زمینی حال کا حاکم بنائیں اشارہ: یہ اس لامستثنائی چوکور کنویں کا زمینی حال ہوگا جس میں $a/2 + \epsilon$ پر نامتابل گزر کا وٹ ہو آپ دیکھیں گے کہ ذرہ بائیں ہاتھ کے نسبتاً بڑے حصے میں رہنے کا پابند ہوگا

ب. وقت t پر ہیملٹنی کی زمینی حال کی ماورائی مساوات تلاش کریں جواب

$$z \sin z = T[\cos z - \cos(z\delta)]$$

جہاں $z \equiv ka$ $T \equiv maf(t)/\hbar^2$ $\delta \equiv 2\epsilon/a$ اور $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ ہیں

ج. اب $\delta = 0$ لیتے ہوئے z کے لیے ترمیمی طور پر حل کر کے دکھائیں کہ T کی قیمت 0 ہٹ ∞ ہونے سے z کی قیمت π ہٹ 2π ہوگی اس نتیجہ کی وضاحت پیش کریں

د. اب $\delta = 0.01$ لیتے ہوئے $T = 0, 1, 5, 20, 100$ اور 1000 کے لیے z اعدادی طریقے سے حاصل کریں

ه. کنویں کے دائیں نصف حصے میں ذراہ پائے جانے کا احتمال بطور z اور δ کا تعلق تلاش کریں جواب $P_r = [1 + (I_+/I_-)]^{-1}$ جہاں $I_{\pm} \equiv [1 \pm \delta - (1/z) \sin(z(1 \pm \delta))] \sin^2[z(1 \mp \delta)/2]$ ہوگا جبزہ (د) میں دیے گئے T کی قیمتوں کے لئے اس ریاضی جملہ کی قیمتیں تلاش کریں اپنے نتائج پر تبصرہ کریں

و. T اور δ کی انہی قیمتوں کے لئے زمینی حال تعلق موج ترمیم کریں آپ دیکھیں گے کہ رکاوٹ بلند ہونے سے کس طرح ذرہ کنویں کے بائیں نصف حصے میں رہنے کا پابند ہو جاتا ہے

سوال ۱۰.۹: فرض کریں ایک بُعدی ہارمونی مرتعش کیمت m تعدد ω پر $f(t) = m\omega^2 f(t)$ جہاں $F(t)$ کوئی مخصوص ارتعاش ہے کا جبری قوت اثر انداز ہوتا ہے میں نے $m\omega^2$ کو صریحا لکھا ہے یوں $f(t)$ کا بُعدی فاصلہ ہوگا اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x f(t) \quad (10.92)$$

فرض کریں وقت $t = 0$ پر یہ قوت پہلی مرتبہ چالو کی جاتی ہے لہذا $0 \leq t$ پر $f(t) = 0$ ہوگا اس نظام کو کلاسیکی میکانیات اور کوانٹائی میکانیات دونوں میں بالکل ٹھیک حل کیا جاسکتا ہے

۱. اگر مرتعش مبداء پر ساکن حال $x_c(0) = \dot{x}_c(0) = 0$ سے آغاز کریں تب مرتعش کا کلاسیکی مقام کیا ہوگا جواب

$$(۱۰.۹۳) \quad x_c(t) = \omega \int_0^t f(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

ب. متحرک قوت کی غیر موجودگی میں اگر مرتعش n وی حال $\Psi(x, 0) = \psi_n(x)$ جہاں $\psi_n(x)$ مساوات 61.2 دیتی ہے سے آغاز کرے تب دکھائیں کہ تابع وقت مساوات شرودنگر کے حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۰.۹۴) \quad \Psi(x, t) = \psi_n(x - x_c) e^{\frac{i}{\hbar} \left[-(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega t + m \dot{x}_c (x - \frac{x_c}{2}) + \frac{m \omega^2}{2} \int_0^t f(t') x_c(t') x_c(t') dt' \right]}$$

ج. دکھائے کہ $H(t)$ کے امتیازی تقاضات اور امتیازی افتدار درج ذیل ہوں گے

$$(۱۰.۹۵) \quad \psi_n(x, t) = \psi_n(x - f); \quad E_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 f^2$$

د. دکھائیں کہ حرانگزر تخمین کی صورت میں کلاسیکی مقام مساوات 91.10 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے $x_c(t) \cong f(t)$ سیاق و سباق کے لحاظ سے یہاں حرانگزر تقاضا عمل f کہ وقتی تفرق پر کیا پابندی عائد کرتی ہے اشارہ $\sin[\omega(t - t')]$ کو $(1/\omega)(d/dt') \cos[\omega(t - t')]$ لکھ کر مکمل بالخصوص استعمال کریں

ه. اس مثال کے لیے مسئلہ حرانگزر کی تصدیق جزو (ج) اور (د) کے نتائج سے درج ذیل دکھا کر کریں

$$(۱۰.۹۶) \quad \Psi(x, t) \cong \psi_n(x, t) e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)}$$

تصدیق کریں کہ حرکی ہیٹ کاروپ درست ہے مساوات 39.10 کیا ہندسی ہیٹ آپ کے توقعات کے مطابق ہے

سوال ۱۰.۱۰: حرانگزر تخمین کو مساوات 12.10 میں عددی سر $c_m(t)$ کے حرانگزر تسلسل کا پہلا جزو تصور کیا جاسکتا ہے مندرجہ ذیل نظام n وی حال سے آغاز کرتا ہے حرانگزر تخمین میں یہ ایک اضافی تابع وقت ہندسی ہیٹ جزو ضربی مساوات 21.10 کے علاوہ n وی حال میں ہی رہے گا

$$c_m(t) = \delta_{mn} e^{i\gamma_n(t)}$$

۱. اس کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کر کے حرانگزر کی پہلی تصحیح حاصل کریں

$$(۱۰.۹۷) \quad c_m(t) = c_m(0) - \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle e^{i\gamma_n(t')} e^{i(\theta_n(t') - \theta_m(t'))} dt'$$

اس سے ہم متزیرب حرانگزر خطوں میں تحویلی احتمالات کا حساب کر سکتے ہیں دوسری تصحیح کی خاطر ہم مساوات 95.10 کو مساوات 16.10 کے دائیں ہاتھ میں پر کریں گے وغیرہ وغیرہ

ب۔ ایک مثال کے طور پر مساوات 95.10 کا اطلاق جبری سر تعش سوال 9.10 پر کریں دکھائیں کے قریب حرانگزرتخمین کی صورت میں صرف برابر والے سطحوں جن کے لیے درج ذیل ہوگا میں تحویل ممکن ہوگی

$$c_{n+1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t \dot{f}(t')e^{i\omega t'} dt'$$

$$c_{n-1}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{n+1}\int_0^t \dot{f}(t')e^{-i\omega t'} dt'$$

یقیناً حویلی احتمالات ان کے مطلق مربع کے برابر ہوں گے

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 45
 - canonical relations, 138
 - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
 - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298

- Darwin term, 280
- decomposition
 - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
 - Kronecker, 35

- 21-centimeter line, 291

- adjoint, 103
- allowed
 - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
 - conservation, 170
 - extrinsic, 174
 - intrinsic, 174
- argument, 61

- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
 - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
 - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
 - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
 - De Broglie, 19
 - Euler, 30
- Fourier
 - inverse transform, 63
 - transform, 63
- Frobenius
 - method, 54
- function
 - Dirac delta, 72
 - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
 - invariant, 202
 - transformation, 202
- generalized
 - distribution, 72
 - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 60
- generator
 - translation in space, 136
 - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
 - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
 - free electron, 227
- determinant
 - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
 - magnetic, 181
- Dirac
 - comb, 229
 - notation, 128
 - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
 - quantum, 278
- electron
 - classic radius, 175
- energy
 - allowed, 29
 - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
 - value, 7
- Fermi
 - energy, 227
 - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande g -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
 - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
 - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
 - law, 201
- magnetic moment
 - anomalous, 278
- mass
 - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
 - S , 94
 - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
 - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
 - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
 - oscillator, 32
- harmonic oscillator
 - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
 - conjugate, 49
- hermitian, 101
 - anti, 130
 - conjugate, 103
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
 - first rule, 221
 - second rule, 221
 - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
 - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
 - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
 - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
 - formula, 162
- polynomial
 - Hermite, 58
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
 - effective, 146
 - reflectionless, 93
- probability
 - conservation, 194
 - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
 - most, 7
- quantum
 - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
 - azimuthal, 145
 - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
 - formula, 55
- reflection
 - coefficient, 78
- relation
 - Kramers, 295
 - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
 - spherical function, 148
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
 - exchange, 209
 - lowering, 46, 166
 - projection, 129
 - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
 - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
 - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
 - bound, 70
 - excited, 34
 - ground, 34, 156
 - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
 - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
 - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
 - Dirichlet's, 35
 - Ehrenfest, 18
 - equipartition, 254
 - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
 - linear, 97
- transition, 161
- transmission
 - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
 - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
 - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
 - generator, 200
- Rydberg
 - constant, 162
 - formula, 162
- scattering
 - matrix, 93, 94
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
 - Balmer, 162
 - Fourier, 35
 - Lyman, 162
 - Paschen, 162
 - power, 43
 - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
 - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
 - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق
حالات، 133
اجزائی
قیمتیں، 33
ارتعاش
نیوٹرینو، 127
استمراری، 105
استمراری مساوات، 194
استمراریہ، 138
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول تغیریت، 299
اصول عدم یقینیت، 116
اضافیتی تصحیح، 272
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291
الیکٹران
کلاسیکی رداس، 175
الیکٹران نیوٹرینو، 127
امتیازی تقابلی عمل، 103
امتیازی فتر، 103
امتیازی فتر مساوات، 103
انتشاری
رشتہ، 67
انخطاطی، 90، 104
انخطاطی دباؤ، 228
اندرونی ضرب، 98
انوکاس
شرح، 78
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203
برقی حرکیات
کوانٹائی، 278
بقا
توانائی، 39
بقا احتمال، 194
بلا واسطہ مکمل، 313
بندشی توانائی، 156
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294
variables
separation of, 25
variance, 9
variational principle, 299
vectors, 97
velocity
group, 66
phase, 66
virial theorem, 132
three-dimensional, 194
wag the tail, 56
wave
incident, 77
packet, 62
reflected, 77
transmitted, 77
wave function, 2
wave vector, 224
wavelength, 18
white dwarf, 252
Wien displacement law, 250
WKB, 321
Yukawa potential, 316
Zeeman effect, 283
zero-crossing, 34

- بوسن، 208
 بوہر
 رداس، 156
 کلیہ، 155
 بوہر مقناطیس، 284
 بیریان، 191
 میل
 کروی تقا عمل، 148
 بے لچک پھسکی، 173
 پازیشٹرانیم، 207، 291
 پاشن ویک اثر، 285
 پالی اصول مناعت، 208
 پالی متالب چکر، 177
 پایان، 191
 پیال، 234
 پس پردہ، 219
 پلانک
 کلیہ، 162
 پسیداکار
 فضا میں انتقال کا، 136
 وقت میں انتقال، 136
 پسیداکار
 تقا عمل، 60
 گھومتا، 200
 تجدیدی عرصہ، 89
 تجربہ
 شرٹن و گرانج، 184
 ترتیبی پیمائشیں، 131
 ترسیل
 شرح، 78
 تسل
 بالمر، 162
 پاشن، 162
 ٹیلر، 42
 طاقتی، 43
 فوریئر، 35
 لیمان، 162
 تشاکلیت
 ضرورت، 209
 تشکیل، 237
 تعداد مکین، 237
 تعین حال، 103
 تغیریت، 9
 تقا عمل
 ڈیٹا، 72
 تقا عمل موج، 2
 تقا علیہ، 128
 تکمل
 ڈھانچائی، 312
 توانی
 کلیہ، 55
 توانائی
 احبابتی، 29
 توقعاتی
 قیت، 7
 شنائی عددی سر، 239
 حبرو ڈارون، 280
 جسم مقیاس، 229
 جفت، 34
 تقا عمل، 31
 جفت قطب معیار اثر
 مقناطیسی، 181
 جوہری مدار چوں
 خطی جوڑ ترکیب، 311
 جی حبرو ضربی، 278
 چکر، 173، 174
 مخالف میدان، 175
 ہم میدان، 175
 چکر چکر رابطہ، 290
 چکر کار، 175
 چکر و مدار باہم عمل، 279
 چکر و مدار رابطہ، 272
 چندر شیکھر حد، 253
 چوزاویہ تشکل، 298
 حال
 بچھراؤ، 70

- 66، دوری سستی
 66، گروہی سستی
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،
 194، رواحتمال،
 روڈریگیس
 142، کلیہ
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،
 زاویائی معیار حرکت
 170، بقب
 174، خنلقی
 174، غیر خنلقی
 283، زیسان اثر،
 ساکن
 27، حالایت
 243، تخمین
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،
 32، سرحدی شراط،
 72، 79، سرنک زنی،
 252، سفید بونا،
 15، سگرا،
 220، سلور،
 128، سمتاویہ،
 97، سمتیات،
 224، سمتیہ موج،
 سوچ
 4، انکاری،
 3، تقلید پسند،
 3، حقیقت پسند،
 23، سوڈیم،
 188، سہ تا،
 250، سیاہ جسمی طیف،
 سیزھی
 46، عاملین،
 80، سیزھی تفسا عمل،
 296، شمارک اثر،
 27، غیر تابع وقت،
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،
 156، 34، زمینی،
 70، مقید،
 34، ہچکان،
 236، حرارتی توازن،
 حرکت
 202، سائیکلوثران،
 97، خطی الجبرا،
 97، خطی تبدلہ،
 28، خطی جوڑ،
 3، خفیہ متغیرات،
 219، 235، خول،
 254، درجبات آزادی،
 236، درجہ حرارت،
 234، درز،
 290، درز توانائی،
 61، دلیل،
 96، 56، دم ہلانا،
 219، دوری جدول،
 ڈیراک
 128، علامتیت،
 229، کنگھی،
 108، معیاری عمودیت،
 ڈیلٹا
 35، کرونیگر،
 297، ڈیوٹریم،
 297، ڈیوٹیران،
 ذرہ
 21، غیر مستحکم،
 رو
 21، احتمال،
 146، ردای مساوات،
 162، رڈبرگ،
 162، کلیہ،
 رشتہ
 295، پترنک،
 295، کرامرس،
 رفتار

- فـنـر و نـو س
ترکیب، 54
فـنـا
بیرونی، 23
دوہری، 128
فورسہ
الٹ بدل، 63
بدل، 63
- فـنـا بل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
فـنـا
بچھراؤ، 93، 94
ترسیل، 95
فـنـا بل ارکان، 125
فـنـا نون
کب، 42
فـنـا نعی مفعیل، 298
قواعد بن، 220
قوالب، 98
قوت مبادلہ، 213
- کامل گیس، 245
کایان، 191
کشافت
آزاد الیکٹران، 227
احتمال، 10
کشیر رکشی
ہرمانڈ، 58
کرائنگ و پینی نمونہ، 232
کروی
ہارمونیات، 144
کبھی تشاکل، 298
کلیہ
ڈی پروگلی، 19
روڈریگیس، 60
پولر، 30
کلیش و گورڈن عددی سر، 190
کیٹ
تخفیف شدہ، 206
کوارک، 191
- شریک عامل، 103
شریک گرفتہ بندہ، 214
شارپائی مفہوم، 2
شوارز
عدم مساوات، 437
شوارز عدم مساوات، 99
صفر ممتام انقطاع، 34
- طاق، 34
طامس استقبالی حرکت، 279
طول موج، 18، 162
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
- عامل، 17
تخلیل، 129
تقلیل، 166، 46
رفع، 166، 46
مبادلہ، 209
عبور، 161
عدم تعین، 3
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عقدہ، 34
علائیت
تفعلیہ و ستمناویہ، 128
علیحدگی متغیرات، 25
علیحدگی مستقل، 26
عمودی، 100، 34
- غیر مسل، 105
غیر موصل، 235
- فـنـری
توانائی، 227
درجہ حرارت، 228
سطح، 227
فـنـر میان، 208
فـنـری و ڈیراک تقسیم، 247

- کوانٹائی
 صدر عدد، 155
 کوانٹائی اعداد، 147
 کوانٹائی عدد
 اسمتی، 145
 مقنطیسی، 145
 کوانٹائی نقطے، 319
 کوپن ہیگن مفہوم، 4
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد
 ترکیب عمودیت، 107
 گرام و شمد حکمت عملی، 437
 گرفتتی، 223
 گروہی نظریہ، 191
 گروپویشن، 163
 گیہا تقاعیل، 249
- لاپلائی، 138
 لارمر تعدد، 184
 لاگت
 شریک کشیررکتی، 158
 کشیررکتی، 158
 لامتناہی کروی کنواں، 146
 لپٹان، 175
 لتصمیم، 162
 لگراج مضرب، 242
 لسنڈو سطحیں، 202
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284
 لوریننز قوت
 وٹانون، 201
 لوی وچو بیت، 180
 لیڈ انڈر
 شریک، 142
 لیب انتقال، 272
- ماپ
 تبادلہ، 202
 غیر متغیر، 202
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم
 تقاعیل، 72
 تقسیم، 72
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111
 مختل
 سب سے زیادہ، 7
 محدود
 کردی، 139
 محتلف بیٹا تحلیل، 253
 مخفیہ، 15
 بلا العکاس، 93
 موثر، 146
 مدار چھ، 219
 مداری، 173
 مربع متکا مل، 13
 مربع متکا مل تقاعلات، 98
 مرتعش
 ہارمونی، 32
 مرکز گریز جزو، 146
 مساوات شروع و ڈنگر، 2
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182
 مسئلہ
 اہر نفٹ، 18
 پلانشرال، 63
 ڈرشلے، 35
 مساوی حسانہ بندی، 254
 مسئلہ بلوخ، 229
 مسئلہ وٹنمن وٹمن، 294
 مسئلہ ورل، 132
 تین البعادی، 194
 معمول زنی، 13
 وٹائل، 14
 متقل، 22
 ناستائل، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 17
 معیار حرکتی فص تقاعیل، 195، 113
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100، 35
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250
وسطانیہ، 7
ونڈل وکرام سرس وبرلوان، 321
ون در ولس باہم عمل، 292
ہن
کاپیلا فٹا عدہ، 221
کاتیسرا فٹا عدہ، 221
کادوسرا فٹا عدہ، 221
ہار مونی
سر نقش، 32
ہار مونی سر نقش
تین البعدی، 193
ہائیڈروجن
میو، 207
ہائیڈروجنی جوہر، 162
ہر مشی، 101
جوڑی دار، 49، 103
حسلاف، 130
منحرف، 130
لمبرٹ فضا، 99
ہمبستہ حال، 207
ہندی تسل، 253
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
ہیلیم، 162
ہیلیم پرست، 217
ہیملٹنی، 28
یک طامتی، 129
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214
مقابلہ، 44
مقلبت
باضابطہ رشتہ، 45
باضابطہ رشتہ، 138
بنیادی رشتہ، 165
مقلوب، 44
مقتطبی معیار اثر
باضابطہ، 278
مکمل، 35، 100
ملاوٹ، 235
منہدم، 4، 111
موج
آمدی، 77
ترسیلی، 77
متعکس، 77
موجی اکٹھ، 62
موزوں
خطی جوڑ، 263
موزوں کوانٹائی اعداد، 275
موصول، 235
مہین ساخت، 272
مہین ساخت متقل، 272
میزان، 191
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247
میدن عمل انگیزی، 319
میدن نیوٹرینو، 127
میدنی ہائیڈروجن، 291
میدنیسم، 291
نالودگی جوڑا، 292
نزد ہیلیم، 217
نظریہ اضطراب
انخطاطی، 260
نہایت مہین ساخت، 272
نیم موصول، 235
نیوٹران ستارہ، 253
نیو من
کروی تق عمل، 148
واپسی نقطہ ط، 70