

# کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متابیح وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علاقیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کوانٹائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروع و نگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اقتدار	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متنائل ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۱	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	.....	سب سے زیادہ محتمل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	.....	$\alpha$ اور $\beta$ کی طبیعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	.....	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	.....	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	.....	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	.....	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	.....	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	.....	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	.....	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	.....	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	.....	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	.....	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	.....	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	.....	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۳	.....	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۳	.....	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۵	.....	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۷	.....	درمیانہ میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۹	.....	نہایت مہین ہوا را	۶.۴.۴
۲۹۹	.....	تغیری اصول	۷
۲۹۹	.....	نظریہ	۷.۱
۳۰۵	.....	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۰	.....	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۲۱	.....	وٹزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۲	.....	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۷	.....	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۱	.....	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۵	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۶	.....	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۶	.....	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۹	.....	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۱	.....	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۳	.....	اشعاعی اخراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۳	.....	برقناطیسی امواج	۹.۲.۱
۳۵۵	.....	انجذاب، تحریق شدہ اخراج اور خود بخود اخراج	۹.۲.۲
۳۵۶	.....	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۸	خود با خود احسراج . . . . .	۹.۳
۳۵۸	آمنٹائن A اور B عددی سر . . . . .	۹.۳.۱
۳۶۰	ہیجان حال کا عرصہ حیات . . . . .	۹.۳.۲
۳۶۳	قواعد انتخاب . . . . .	۹.۳.۳
۳۷۳	حرارت ناگزیر تخمین . . . . .	۱۰
۳۷۳	مسئلہ حرارت ناگزیر . . . . .	۱۰.۱
۳۷۳	حرارت ناگزیر عمل . . . . .	۱۰.۱.۱
۳۷۶	مسئلہ حرارت ناگزیر کا ثبوت . . . . .	۱۰.۱.۲
۳۸۱	ہیٹ بیری . . . . .	۱۰.۲
۳۸۱	گرگنی عمل . . . . .	۱۰.۲.۱
۳۸۳	ہندی ہیٹ . . . . .	۱۰.۲.۲
۳۸۸	اہارو نوو پو، ہم اثر . . . . .	۱۰.۲.۳
۳۹۷	بکھراؤ . . . . .	۱۱
۳۹۷	تعارف . . . . .	۱۱.۱
۳۹۷	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۱
۴۰۱	کوانٹائی نظریہ بکھراؤ . . . . .	۱۱.۱.۲
۴۰۲	جبروی موج تجزیہ . . . . .	۱۱.۲
۴۰۲	اصول وضوابط . . . . .	۱۱.۲.۱
۴۰۵	الایا عمل . . . . .	۱۱.۲.۲
۴۰۸	میتقلات حیط . . . . .	۱۱.۳
۴۱۱	بارن تخمین . . . . .	۱۱.۴
۴۱۱	مساوات شرودنگر کی عملی روپ . . . . .	۱۱.۴.۱
۴۱۵	بارن تخمین اول . . . . .	۱۱.۴.۲
۴۱۹	تسل بارن . . . . .	۱۱.۴.۳
۴۲۳	پس نوشت . . . . .	۱۲
۴۲۴	آمنٹائن پوڈلکیو روزن تضاد . . . . .	۱۲.۱
۴۲۵	مسئلہ بل . . . . .	۱۲.۲
۴۳۰	مسئلہ کلیہ . . . . .	۱۲.۳
۴۳۱	شرودنگر کی ہلی . . . . .	۱۲.۴
۴۳۲	کوانٹائی زینو تضاد . . . . .	۱۲.۵
۴۳۵	جوابات . . . . .	
۴۳۷	خطی الجبرا . . . . .	۱
۴۳۷	سمتیات . . . . .	۱.۱
۴۳۷	اندرونی ضرب . . . . .	۲.۱
۴۳۸	فتالب . . . . .	۳.۱

۴۳۸	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۸	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۸	هر مشی تباولے	۶.۱





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

## باب ۸

# ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین

ونٹزل وکرامرس وبرلوان ترکیب سے غیر تابع وقت مساوات شرودنگر کی یک بُعدی تخمینہ حل حاصل کیے جاسکتے ہیں (اسی بنیادی تصور کا اطلاق کئی دیگر تفسیقی مساوات پر اور بالخصوص تین ابعاد میں مساوات شرودنگر کی رداسی حصے پر کیا جاسکتا ہے)۔ یہ مقید حال توانائیوں اور مخفی رکاوٹ سے گزرنے کی سرنگ زنی شرح کے حساب میں خصوصاً مفید ثابت ہوتا ہے۔

اس کا بنیادی تصور درج ذیل ہے: فرض کریں ایک ذرہ جس کی توانائی  $E$  ہو ایک ایسے خطے میں حرکت کرتا ہے جہاں مخفیہ  $V(x)$  مستقل ہو۔ تفاعل موج،  $E > V$  کی صورت میں، درج ذیل روپ کا ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

دائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے لئے مثبت علامت جبکہ بائیں رخ کے لئے منفی علامت استعمال ہوگا (یقیناً ان دونوں کا خطی جوڑ ہمیں عمومی حل دیگا)۔ یہ تفاعل موج ارتعاشی ہے، جس کا طول موج  $(\lambda = 2\pi/k)$  اٹل اور حیطہ (A) غیر تغیری ہے۔ اب فرض کریں  $V(x)$  مستقل نہیں، بلکہ  $\lambda$  کے لحاظ سے بہت آہستہ تبدیل ہوتا ہو، لہذا کئی مکمل طول موج پر مخفیہ مستقل تصور کیا جاسکتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\psi$  عملائن نہ ہوگا، تاہم اس کا طول موج اور حیطہ  $x$  کے ساتھ آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔ یہی ونٹزل وکرامرس وبرلوان تخمین کے تصور کی بنیاد ہے۔ درحقیقت، یہ  $x$  پر دو مختلف طرز کے تابعیت کی بات کرتا ہے: تیز ارتعاشات، اور ان کے طول موج اور حیطہ میں آہستہ آہستہ تبدیلی۔

اسی طرح،  $E < V$  (جہاں  $V$  مستقل ہے) کی صورت میں  $\psi$  قوت نہائی ہوگا۔

$$\psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V - E)}}{\hbar}$$

WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)<sup>1</sup>

اور اگر  $V(x)$  مستقل نہ ہو، بلکہ  $1/\kappa$  کے لحاظ سے آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہو، تب حل عملاً قوت نہائی ہوگا، البتہ  $A$  اور  $\kappa$  اب  $x$  کے قفا عمل ہوں گے جو آہستہ آہستہ تبدیل ہوں گے۔

یہ پورا قصہ کلاسیکی نقطہ والہیہ<sup>۲</sup>، جہاں  $V \approx E$  ہو، کے مترسی پڑوس میں ناکامی کا شکار ہوگا۔ چونکہ یہاں  $\lambda$  (یا  $1/\kappa$ ) لامتناہی تک بڑھتا ہے، اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ  $V(x)$  معتالے میں ”آہستہ آہستہ“ تبدیل ہوتا ہے۔ جیسا ہم دیکھیں گے، اس تخمین میں قفاط واپس سے نمٹنا دشوار ترین ہوگا، اگر چہ آخری نتائج بہت سادہ ہوں گے۔

## ۸.۱ کلاسیکی خطہ

ساوات شرڈنگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۸.۱) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

جہاں

$$(۸.۲) \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ذرے کے معیار حرکت کا کلاسیکی کلیہ ہے، جس کی کل توانائی  $E$  اور محفی توانائی  $V(x)$  ہے۔ فی الحال میں منرض کرتا ہوں کہ  $E > V(x)$  ہے، لہذا  $p(x)$  حقیقی ہوگا؛ اس خطہ کو ہم کلاسیکی خطہ کہتے ہیں چونکہ کلاسیکی طور پر یہ ذرہ سعت  $x$  پر رہنے کا پابند ہوگا (شکل ۸.۱)۔ عمومی طور پر،  $\psi$  ایک مخلوط قفا عمل ہوگا؛ اس کو جیط،  $A(x)$ ، اور ہیئت،  $\phi(x)$ ، جہاں دونوں حقیقی ہیں، کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۳) \quad \psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

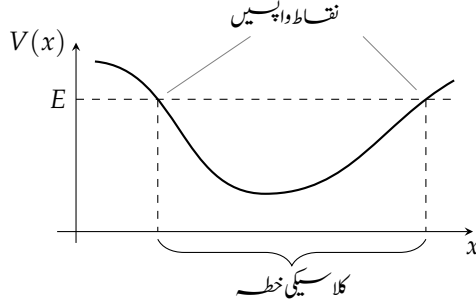
ہم  $x$  کے لحاظ سے قفرق کو قوت نہائی میں چھوٹی لکیر (') سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{d\psi}{dx} = (A' + iA\phi')e^{i\phi}$$

اور

$$(۸.۴) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}$$

turning point<sup>۳</sup>



شکل ۸.۱: کلاسیکی طور پر یہ ذرہ اس خط میں مقید ہوگا جہاں  $E \geq V(x)$  ہو۔

لکھ سکتے ہیں۔ اس کو مساوات ۸.۱ میں پُر کرتے ہیں۔

$$(۸.۵) \quad A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A$$

دونوں ہاتھ کے حقیقی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر ایک حقیقی مساوات:

$$(۸.۶) \quad A'' - A(\phi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \Rightarrow A'' = A \left[ (\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right]$$

جبکہ خیالی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر رکھ کر دوسری حقیقی مساوات:

$$(۸.۷) \quad 2A'\phi' + A\phi'' = 0 \Rightarrow (A^2\phi')' = 0$$

حاصل ہوگی۔

مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ ہر لحاظ سے اصل مساوات شرودنگر کے معادل ہیں۔ ان میں سے دوسری یا آسانی حل ہوتی ہے:

$$(۸.۸) \quad A^2\phi' = C^2 \Rightarrow A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

جہاں  $C$  (حقیقی) مستقل ہوگا۔ ان میں سے پہلی (مساوات ۸.۶) عموماً حل نہیں کی جاسکتی ہے، لہذا ہمیں تخمین کی ضرورت پیش آتی ہے: ہم فرض کرتے ہیں کہ جب  $A$  بہت آہستہ آہستہ تبدیل ہوتا ہے، لہذا اجزاء  $A''$  متابل نظر انداز ہوگا (بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ، ہم فرض کرتے ہیں کہ  $(\phi')^2$  اور  $p^2/\hbar^2$  سے  $A''/A$  بہت کم ہے)۔ ایسی صورت میں ہم مساوات ۸.۶ کے بائیں ہاتھ کو نظر انداز کر کے:

$$(\phi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

حاصل کرتے ہیں، لہذا

$$(۸.۹) \quad \phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

ہوگا۔ (میں فی الحال اس کو ایک غیر قطعی عمل لکھتا ہوں؛ کسی بھی مستقل کو  $C$  میں ضم کیا جاسکتا ہے، جس کے تحت  $C$  مخلوط ہو سکتا ہے۔) اس طرح

$$(۸.۱۰) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (\text{ونڈل وکرامرس وبرلوان کلیہ})$$

ہوگا، اور (تخمینی) عمومی حل اس طرح کے دو اجزاء کا خطی جوڑ ہوگا، جہاں ایک جزو میں مثبت اور دوسرے میں منفی علامت استعمال ہوگی۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوگا

$$(۸.۱۱) \quad |\psi(x)|^2 \cong \frac{|C|^2}{p(x)}$$

جس کے تحت، نقطہ  $x$  پر ذرہ پایا جانے کا احتمال، اس نقطہ پر ذرے کے (کلاسیکی) معیار حرکت (لہذا سمتی رفتار) کا بالکل عکس متناسب ہوگا۔ ہم یہی توقع رکھتے ہیں، چونکہ جس معتم پر ذرے کی رفتار تیز ہو، وہاں اس کے پائے جانے کا احتمال کم ہوگا۔ درحقیقت، بعض اوقات تفسیقی مساوات میں جزو  $A''$  نظر انداز کرنے کی بجائے، اس نیم کلاسیکی مشاہدے سے آغاز کرتے ہوئے ونڈل وکرامرس وبرلوان تخمین اخذ کیا جاتا ہے۔ موحصر الذکر طریقہ ریاضیاتی طور پر زیادہ صاف ہے، لیکن اول الذکر بہتر طبعی وحب پیش کرتا ہے۔

مثال ۸.۱: دو امتصالی دیواروں والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کریں ہمارے پاس ایک لامتناہی چوکور کنواں ہو جس کی تہہ موڑے دار ہو (شکل ۸.۲)۔

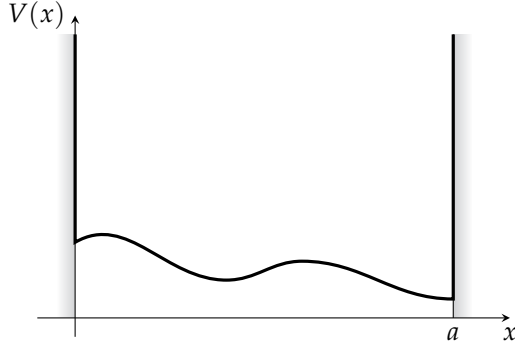
$$(۸.۱۲) \quad V(x) = \begin{cases} \text{کوئی منتخب تناسب} & 0 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

کنویں کے اندر (ہر جگہ  $E > V(x)$  مندرجہ کرتے ہوئے)

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_+ e^{i\phi(x)} + C_- e^{-i\phi(x)}]$$

ہوگا، جس کو بہتر انداز میں

$$(۸.۱۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} [C_1 \sin \phi(x) + C_2 \cos \phi(x)]$$



شکل ۸.۲: ایسا لامستثنائی چوکور کنواں جس کی تہہ موڑے دار ہے۔

لکھا جاسکتا ہے، جہاں (یہ جانتے ہوئے کہ ہم عمل کی زیریں حد اپنی مرضی سے منتخب کر سکتے ہیں) درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx' \quad (۸.۱۴)$$

اب  $x = 0$  پر  $\psi(x)$  لازماً صفر کو پہنچے گا، لہذا (چونکہ  $\psi(0) = 0$  ہے)  $C_2 = 0$  ہوگا۔ ساتھ ہی  $x = a$  پر بھی  $\psi(x)$  صفر کو پہنچے گا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (۸.۱۵)$$

ماخوذ:

$$\int_0^a p(x) dx = n\pi\hbar \quad (۸.۱۶)$$

یہ کوانٹائزیشن شرط (تخمینی) احبازی توانائیوں کا تعین کرتی ہے۔

مثلاً، اگر کنویں کی تہہ ہموار ہو ( $V(x) = 0$ )، تب  $p(x) = \sqrt{2mE}$  (ایک مستقل) ہوگا، اور مساوات ۸.۱۶ کے تحت  $p(x) = n\pi\hbar$  یا

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

ہوگا، جو لامستثنائی چوکور کنویں کی توانائیوں کا پرائما کلیہ ہے (مساوات ۲.۲۷)۔ یہاں ڈنڈل وکرام سرس ویرلوان تخمین ہمیں بالکل ٹھیک جواب فراہم کرتا ہے (اصل تفعل موج کا حیطہ مستقل ہے، لہذا  $A''$  کو نظر انداز کرنے سے کوئی اثر نہیں پڑا)۔ □

سوال ۸.۱: ونزل وکرامرسس وبرلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے ایسے لامتناہی چوکور کنویں کی احبازتی توانائیاں ( $E_n$ ) تلاش کریں جس کی نصف تہ میں  $V_0$  بلند سیز بھی پائی جاتی ہو (شکل ۶.۳)۔

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

اپنے جواب کو  $V_0$  اور  $E_n^0 \equiv (n\pi\hbar)^2/2ma^2$  (بغیر سیز بھی لامتناہی چوکور کنویں کی  $n$  ویں احبازتی توانائی) کی صورت میں لکھیں۔ فرض کریں  $E_1^0 > V_0$  ہے، تاہم یہ فرض نہ کریں کہ  $E_n \gg V_0$  ہوگا۔ اپنے جواب کا موازنہ مثال ۶.۱ میں رتبہ اول نظریہ اضطراب سے حاصل جواب کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ بہت چھوٹے  $V_0$  (جہاں نظریہ اضطراب کارآمد ہوگا) یا بہت بڑے  $n$  (جہاں ونزل وکرامرسس وبرلوان تخمین کارآمد ہوگی) کی صورت میں جوابات ایک جیسے ہوں گے۔

سوال ۸.۲: ونزل وکرامرسس وبرلوان کلیہ (مساوات ۸.۱۰) کو  $\hbar$  طاقتی توسیع سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ آزاد ذرے کے تفاعل موج  $\psi = A \exp(\pm ipx/\hbar)$  سے حوصلہ افزا ہو کر کے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\psi(x) = e^{if(x)/\hbar}$$

جہاں  $f(x)$  کوئی مخلوط تفاعل ہے۔ (دھیان رہے کہ ہم یہاں عمومیت نہیں کھوتے؛ کسی بھی غیر صفر تفاعل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔)

۱. اس کو (مساوات ۸.۱ روپ کی) مساوات شرودنگر میں پُر کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

ب. تفاعل  $f(x)$  کو  $\hbar$  کے طاقتی تسلسل کی صورت:

$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

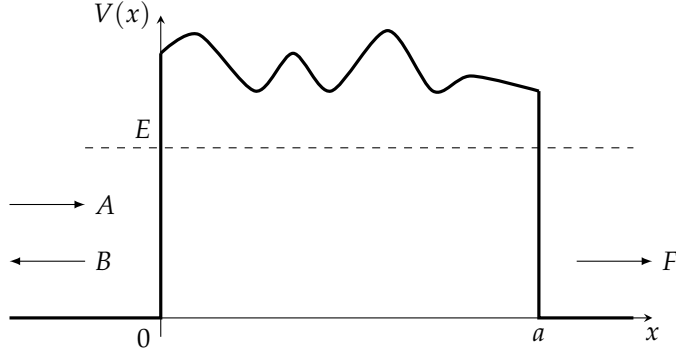
میں لکھ کر  $\hbar$  کی ایک جیسی طاقتوں کو اکٹھا کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_0')^2 = p^2, \quad if_0'' = 2f_0'f_1', \quad if_1'' = 2f_0'f_2' + (f_1')^2, \quad \text{وغیرہ}$$

ج. انہیں  $f_0(x)$  اور  $f_1(x)$  کے لئے حل کر کے دکھائیں کہ  $\hbar$  کی اول رتبہ تک آپ مساوات ۸.۱۰ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

تبصرہ: منفی عدد کے لوگار تھم کی تعریف  $\ln(-z) = \ln(z) + in\pi$  ہے، جہاں  $n$  طاق عدد صحیح ہوگا۔ اگر آپ اس کلیہ سے ناواقف ہوں، تب دونوں اطراف کو قوت نامیں منتقل کر کے دیکھیں۔





شکل ۸.۳: موڑے دار بالائی سطح کی مستطیلی رکاوٹ سے بکھراؤ۔

## ۸.۲ سرنگ زنی

اب تک  $E > V$  فرض کیا گیا، لہذا  $p(x)$  حقیقی تھا۔ ہم غیر کلاسیکی خط ( $E < V$ ) کا مطالعہ کرتے ہیں: نتیجہ باآسانی لکھ سکتے ہیں:

$$(۸.۱۷) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

یہ پہلے کی طرح ہے (مساوات ۸.۱۰)، تاہم اب  $p(x)$  تخیلی ہے۔<sup>۳</sup>

ایک مثال کے طور پر، مستطیلی رکاوٹ جس کی بالائی سطح غیر ہموار ہو (شکل ۸.۳) سے بکھراؤ کے مسئلے پر غور کریں۔ رکاوٹ کی بائیں جانب ( $x < 0$ )

$$(۸.۱۸) \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

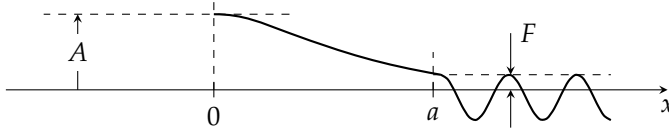
ہوگا، جہاں  $A$  آمدی جیٹ اور  $B$  منعکس جیٹ ہے، اور  $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$  ہے (حصہ ۲.۵ دیکھیں)۔ رکاوٹ کے دائیں جانب ( $x > a$ )

$$(۸.۱۹) \quad \psi(x) = Fe^{ikx}$$

ہوگا؛  $F$  ترسیلی جیٹ ہے، اور ترسیلی احتمال درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۰) \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

<sup>۳</sup> اس صورت میں تصاعلی موج حقیقی ہوگا، اور مساوات ۸.۶ اور مساوات ۸.۷ کے ممابث ضروری نہیں کہ مساوات ۸.۵ سے حاصل ہوں، اگرچہ یہ اب بھی کافی ہیں۔ اگر آپ اس سے مطمئن نہیں، سوال ۸.۲ میں پیش متبادل حصول کے طریقے پر غور کریں۔



شکل ۸.۴: اونچی اور چوڑی رکاوٹ سے بھراوے کے تعامل موج کی کیفی ساخت۔

سرنگ زنی خطہ  $(0 \leq x \leq a)$  میں ونٹرل وکرامرس ویرلوان تخمین درج ذیل دیگی۔

$$(۸.۲۱) \quad \psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

اگر رکاوٹ بہت بلند، یا بہت چوڑا یا دونوں ہو (یعنی جب سرنگ زنی کا احتمال بہت کم ہو)، تب قوت نمائی بڑھتے حبز و کا عددی سر (C) لازماً چھوٹا ہوگا (درحقیقت، لامتناہی چوڑے رکاوٹ کی صورت میں یہ صفر ہوگا)، اور تعامل موج کا نقش شکل ۸.۴ کی طرز سے ہوگا۔ غیر کلاسیکی خطہ پر قوت نمائی میں کل کی، آمدی اور ترسیلی امواج کے حیثوں کے تناسب کو تعین کرتا ہے

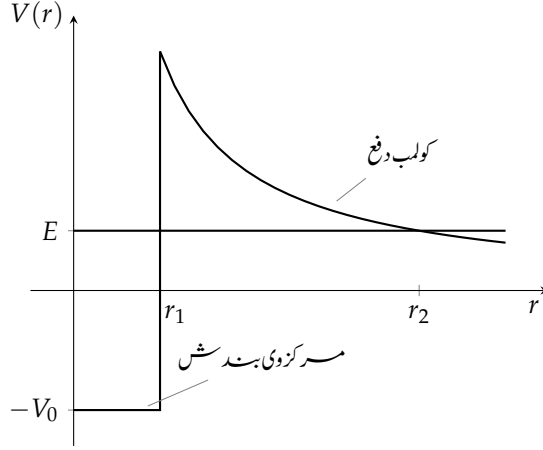
$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'}$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۲) \quad T \cong e^{-2\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx$$

مشال ۸.۴: الفا تحلیل کا نظریہ گامو۔ ۱۹۲۸ء میں جارج گامو نے مساوات ۸.۲۲ استعمال کرتے ہوئے الفا تحلیل (چند مخصوص تابکار مرکزہ سے، دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل، الفا ذرہ کے احسراج) کی وجہ پیش کی۔ چونکہ الفا ذرہ مثبت بار  $(2e)$  کا حامل ہے، لہذا ایسے ہی یہ مرکزہ بندشی قوت کی پہنچ سے باہر نکلتا ہے، باقی مرکزہ (کے بار  $(Ze)$ ) کی برقی قوت دافع اس کو دور جانے پر مجبور کرتی ہے۔ لیکن، اس کو پہلے اس مخفی رکاوٹ سے گزرنا ہوگا (جو یورینیم کی صورت میں) حارجی الفا ذرے کی توانائی سے دو گن سے بھی زیادہ ہے۔ گامو نے اس مخفی توانائی کو تخمینی طور پر (پروٹان کے رداس  $r_1$  وسعت کے چور کنواں (جو مرکزہ کی قوت کشش کو ظاہر کرتا ہے) کو کولمب قوت دافع کی دم سے جوڑ کر ظاہر کیا (شکل ۸.۵)، اور کوانٹائی سرنگ زنی کو الفا ذرہ کی مزار کی وجہ مقرر دیا (مرکزہ کی طبیعیات پر کوانٹائی میکانیات کے اطلاق کا یہ پہلا واقعہ ہے)۔

<sup>۳</sup> اس تجسّی دلیل کو زیادہ پختہ بنایا جاسکتا ہے (سوال ۸.۱۰ دیکھیں)۔  
Gamow's theory of alpha decay<sup>۵</sup>



شکل ۸.۵: تابکار مسرکزہ میں الفا ذرے کی مخفی توانائی کا گامونہ۔

اگر خارج الفا ذرے کی توانائی  $E$  ہو، بیرونی واپس نقطے ( $r_2$ ) کا تعین درج ذیل کرے گا۔

(۸.۲۳)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} = E$$

ظاہر ہے قوت نہ  $\gamma$  (مساوات ۸.۲۲) درج ذیل ہوگا۔<sup>۱</sup>

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr$$

اس نکل میں  $r \equiv r_2 \sin^2 u$  پر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

(۸.۲۴)

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right]$$

عام طور پر  $r_1 \ll r_2$  ہوگا، لہذا ہم چھوٹے زاویوں کا تخمینہ  $(\sin \epsilon \cong \epsilon)$  استعمال کر کے اس نتیجے کا سادہ روپ حاصل کرتے ہیں:

(۸.۲۵)

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ \frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right] = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_1}$$

<sup>۱</sup> یہاں رکاوٹ کی بائیں جانب مخفی عنصر نہیں ہے (مزید، حقیقتاً یہ تین بعدی مسئلہ ہے)، تاہم مساوات ۸.۲۲ میں پیش بنیادی تصور سے ہمیں دلچسپی ہے۔

جہاں

$$(۸.۲۶) \quad K_1 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1.980 \text{ MeV}^{1/2},$$

اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۷) \quad K_2 \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}.$$

(عمومی مرکزہ کی جامت تقریباً  $10^{-15} \text{ m}$  یعنی  $1 \text{ fm}$  ہوتی ہے۔)

اگر ہم مرکزہ کے اندر الفا ذرے کو محصور تصور کریں اور کہیں کہ اسکی اوسط سمتی رفتار  $v$  ہے، تب دیواروں کے ساتھ تصادم کے بیچ اوسط وقفہ تقریباً  $2r_1/v$  ہوگا، لہذا تصادم کا تعدد  $v/2r_1$  ہوگا۔ ہر تصادم پر منسار ہونے کا احتمال  $e^{-2\gamma}$  ہے، لہذا اکائی وقت میں احسراج کا احتمال  $(v/2r_1)e^{-2\gamma}$  ہوگا، اور یوں مائی مرکزہ کا عرصہ حیات تقریباً درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۲۸) \quad \tau = \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}.$$

بد قسمتی سے ہم  $v$  نہیں جانتے، لیکن اس سے زیادہ منسرق نہیں پڑتا، چونکہ ایک تابکار مرکزہ سے اور دوسرے تابکار مرکزہ کے بیچ قوت نمائی جزو ضرئی پچیں رتی تک تبدیل ہوتا ہے؛ اس کے سامنے  $v$  کی تبدیلی متابل نظر انداز ہے۔ بالخصوص، عرصہ حیات کی تجرباتی پیمائشی قیمتوں کو  $1/\sqrt{E}$  کے ساتھ تسم کرنے سے ایک خوبصورت سیدھا خط (شکل 6.8) حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ کے تحت ہوگا۔ □

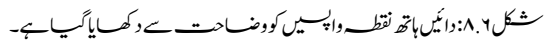
سوال ۸.۳: ایک مستثانی چوکور کاوٹ، جس کی اونچائی  $V_0 > E$  اور چوڑائی  $2a$  ہے، سے ایسے ذرے، جس کی توانائی  $E$  ہے، کی تخمینہ تسمی احتمال مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔ اپنے جواب کا موازنہ اصل نتیجے (سوال ۲.۳۳) کے ساتھ کریں، جس تک ونٹرل وکرامرس ویرلوان طریق  $T \ll 1$  میں اس کی تخفیف ہوگی۔

سوال ۸.۴: مساوات ۸.۲۵ اور مساوات ۸.۲۸ استعمال کرتے ہوئے  $^{238}\text{U}$  اور  $^{212}\text{Po}$  کے عرصہ حیات تلاش کریں۔ اشارہ: تمام مرکزہ میں مرکزوی مادہ کی کثافت تقریباً ایک جیسی ہوتی ہے، لہذا  $(r_1)^3$  (پروٹان اور نیوٹران کی تعداد کے مجموعہ)  $A$  کا راست متناسب ہوگا۔ تجرباتی طور پر درج ذیل حاصل کیا گیا ہے۔

$$(۸.۲۹) \quad r_1 \cong (1.07 \text{ fm}) A^{1/3}$$

حسراج شدہ الفا ذرے کی توانائی، کلیہ آئنشتائن ( $E = mc^2$ ) سے اخذ کی جاسکتی ہے

$$(۸.۳۰) \quad E = m_p c^2 - m_d c^2 - m_\alpha c^2$$



## ۸.۳ کلیات پیوند

اپنی آسانی کی خاطر، ہم محدودیوں منتخب کرتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا نقطہ واپس  $x = 0$  پر واقع ہو (شکل ۸.۶)۔ ونڈل و

۸ انتباہ: درج ذیل دلائل زیادہ تکنیکی ہیں جنہیں پہلی مرتبہ پڑھ کر سمجھنا ضروری نہیں۔

وکراسرس و برلوان تخمین میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۱) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ Be^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + Ce^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right], & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} De^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}, & x > 0 \end{cases}$$

(یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام  $x > 0$  کے لئے  $E$  سے  $V(x)$  بڑا ہوگا، ہم اس خطہ میں مثبت قوت نما کو خارج کر سکتے ہیں، چونکہ  $x \rightarrow \infty$  پر یہ بے فتابو بڑھتا ہے۔) ہمارا کام ان دو حل کو سرحد پر ایک دوسرے کے ساتھ جوڑنا ہے۔ لیکن یہاں ہمیں شدید مشکلات کا سامنا درپیش ہے: ونڈل وکراسرس و برلوان تخمین میں نقطہ واپس (جہاں  $p(x) \rightarrow 0$ ) ہوگا پر  $\psi$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچتی ہے۔ حقیقی تقاضا عمل موج یقیناً ایسا رویہ نہیں رکھتا؛ جیسا ہمارا گمان بھتا، ونڈل وکراسرس و برلوان تخمین نقطہ واپس کی پڑوس میں نا قابل استعمال ہے۔ لیکن اجبازتی توانائیوں کا تعین نقاط واپس پر سرحدی شرائط کرتی ہیں۔ ہم ایک ایسا ”پیوند کار“ تقاضا عمل موج لیتے ہیں جو نقطہ واپس کو ڈھانپ کر دونوں اطراف کے ونڈل وکراسرس و برلوان تخمین حل کو ایک دوسرے کے ساتھ پیوند کرتا ہو۔

چونکہ ہمیں پیوند کار تقاضا عمل موج ( $\psi_p$ ) صرف مبداء کے پڑوس میں چاہیے، لہذا ہم اس مخفیہ کو سیدھی لکیر:

$$(۸.۳۲) \quad V(x) \cong E + V'(0)x,$$

سے تخمین دے کر، اس خطہ بند  $V$  کے لئے مساوات شرودنگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + [E + V'(0)x] \psi_p = E \psi_p$$

یا

$$(۸.۳۳) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} = \alpha^3 x \psi_p$$

حل کرتے ہیں، جہاں درج ذیل ہے۔

$$(۸.۳۴) \quad \alpha \equiv \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V'(0) \right]^{1/3}$$

درج ذیل متعارف کر کے ہم ان  $\alpha$  کو غیر تابع متغیر میں ضم کر سکتے ہیں

$$(۸.۳۵) \quad z \equiv \alpha x$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۶) \quad \frac{d^2 \psi_p}{dz^2} = z \psi_p$$

یہ مساواتے ایئرے<sup>۹</sup> ہے جس کے حلوں کو تفاعلاتے ایئرے<sup>۱۰</sup> کہتے ہیں۔ "چونکہ مساوات ایئرے دور تہی تفسرئی مساوات ہے، لہذا دو خطی غیر تابع ایئرے تفاعلاتے Ai(z) اور Bi(z) پائے جاتے ہیں۔

جدول ۸.۱: ایئرے تفاعلاتے کے چند خواص۔

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = zy$$

تفسرئی مساوات:

ایئرے تفاعلاتے Ai(z) اور Bi(z) کے خطی مجموعے۔

حل:

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) ds$$

کلمی روپ:

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{s^3}{3} + sz} + \sin\left(\frac{s^3}{3} + sz\right) \right] ds$$

متعارفی روپ:

$$\left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \right\} z \ll 0 \quad \left. \begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \\ Bi(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \end{aligned} \right\} z \gg 0$$

ان کا تعلق رتبہ 1/3 کے بیل تفاعلاتے کے ساتھ ہے؛ ان کے چند خواص جدول ۸.۱ میں پیش کیے گئے ہیں جبکہ شکل 8.8 میں انہیں ترسیم کیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ پیوند کا تفاعل موج Ai(z) اور Bi(z) کا خطی جوڑ:

(۸.۳.۷)

$$\psi_p(x) = a Ai(ax) + b Bi(ax)$$

ہوگا، جہاں a اور b مناسب مستقلات ہیں۔

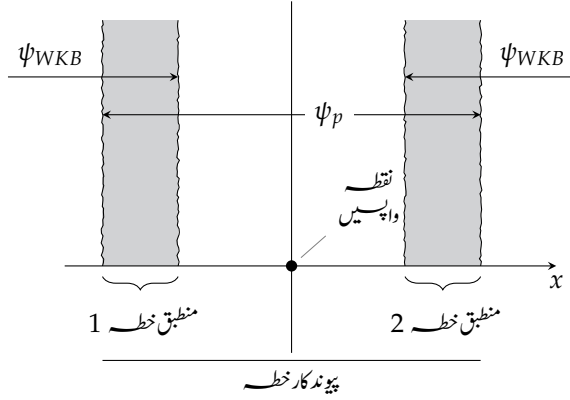
اب  $\psi_p$  مبداء کے پڑوس میں (تخمینی) تفاعل موج ہے؛ ہم نے مبداء کے دونوں اطراف منطق خطوں میں  $\psi_p$  کو ونزل و کراس و برلوان حلوں کے ساتھ ہم پلہ بنانا ہوگا (شکل ۸.۷ دیکھیں)۔ یہ منطق خطے نقطہ واپس کے اتنے متعریب ہیں کہ خط بند مخفیہ کافی درست ہوگا (لہذا  $\psi_p$  اصل تفاعل موج کا بہترین تخمینہ ہوگا)، اور ساتھ ہی نقطہ واپس سے اتنے دور ضرور ہیں کہ ونزل و کراس و برلوان تخمینہ پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے۔<sup>۱۲</sup> منطق خطوں میں

Airy's equation<sup>۹</sup>

Airy functions<sup>۱۰</sup>

اٹکلا سکی طور پر، خطی مخفیہ سے مراد مستقل قوت، لہذا مستقل اسراع ہے؛ یہ سادہ ترین حرکت ہے، جہاں سے بنیادی میکانیات کا آغاز ہوتا ہے۔ ستم ظریفی کی بات ہے کہ یہی سادہ مخفیہ، کوانٹائی میکانیات میں مادرائی تفاعلاتے کو جسم دیتا ہے، اور اس نظریہ میں کلیدی کردار ادا نہیں کرتا۔

<sup>۱۲</sup> یہ نازک دوہری مسلط شرط ہے، اور ایسے گھمبیر مخفیہ تیار کرنا ممکن ہے کہ جن میں اس طرح کا کوئی منطق خطہ نہ پایا جاتا ہو۔ البتہ، عملی استعمال میں ایسا شاذ و نادر ہی ہوتا ہے۔ سوال ۸.۸ دیکھیں۔



شکل ۸.۷: پیوندی خط اور دو منطق خط۔

ساوات ۸.۳۲ کا رآمد ہے، لہذا (ساوات ۸.۳۴ کی عسایت میں) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۳۸) \quad p(x) \cong \sqrt{2m(E - E - V'(0)x)} = \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}$$

بالخصوص منطق خط 2 میں

$$\int_0^x |p(x')| dx' \cong \hbar\alpha^{3/2} \int_0^x \sqrt{x'} dx' = \frac{2}{3} \hbar(\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، لہذا ونڈل وکراسرس ویرلوان تفاعل موج (ساوات ۸.۳۱) درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۸.۳۹) \quad \psi(x) \cong \frac{D}{\sqrt{\hbar\alpha^{3/4}x^{1/4}}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

ایسری تفاعلات کی بڑی z متقارب روی ۳ (جدول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے، منطق خط 2 میں پیوند کار تفاعل موج (ساوات ۸.۳۷) درج ذیل روی اختیار کرتی ہے۔

$$(۸.۴۰) \quad \psi_p(x) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}$$

دونوں حلوں کے موازنہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۸.۴۱) \quad a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}} D \quad \text{اور} \quad b = 0$$

۳ اپیلی نظر میں، اس خط میں، جسے  $z = 0$  پر نقطہ واپس کا تریب تصور کیا گیا ہے (لہذا انجیہ کا خط بند تھمین کا رآمد ہوگا)، بڑی z تھمین کا استعمال نامعقول نظر آتا ہے۔ لیکن یہاں تفاعل کا دلیل z نہیں  $\alpha x$  ہے، اور اگر آپ غور کریں (سوال ۸.۸ دیکھیں) تو آپ دیکھیں گے کہ (عموماً) ایسا خط ہوگا جہاں  $\alpha x$  بڑا ہوگا، اور ساتھ ہی  $V(x)$  کو خطی لکیرے تھمین دینا معقول ہوگا۔



ہم یہی کچھ منطبق خط 1 کے لئے بھی کرتے ہیں۔ اب بھی مساوات ۸.۳۸ ہمیں  $p(x)$  دیگی، تاہم اس مرتبہ  $x$  منفی ہوگا، لہذا

$$(۸.۴۲) \quad \int_x^0 p(x') dx' \cong \frac{2}{3} \hbar (-\alpha x)^{3/2}$$

ہوگا، اور ونڈل وکرامرسس ویرلوان تفاعسل موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۳) \quad \psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\hbar \alpha^{3/4} (-x)^{1/4}}} \left[ B e^{i \frac{2}{3} (-\alpha x)^{3/2}} + C e^{-i \frac{2}{3} (-\alpha x)^{3/2}} \right]$$

ساتھ ہی بہت بڑی منفی  $z$  کے لئے ایسری تفاعسل کا متقارب روپ (جداول ۸.۱) استعمال کرتے ہوئے پیوندی تفاعسل (مساوات ۸.۳۷ جس میں  $b = 0$  لیا گیا ہو) درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۴) \quad \begin{aligned} \psi_p(x) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi} (-\alpha x)^{1/4}} \sin \left[ \frac{2}{3} (-\alpha x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi} (-\alpha x)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ e^{i\pi/4} e^{i \frac{2}{3} (-\alpha x)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} e^{-i \frac{2}{3} (-\alpha x)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

منطبق خط 1 میں ونڈل وکرامرسس ویرلوان اور پیوندی تفاعسلات موج کے موازنے سے

$$\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} = \frac{B}{\sqrt{\hbar \alpha}} \quad \text{اور} \quad \frac{-a}{2i\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} = \frac{C}{\sqrt{\hbar \alpha}}.$$

حاصل ہوگا، جس میں  $a$  کی قیمت مساوات ۸.۴۱ سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

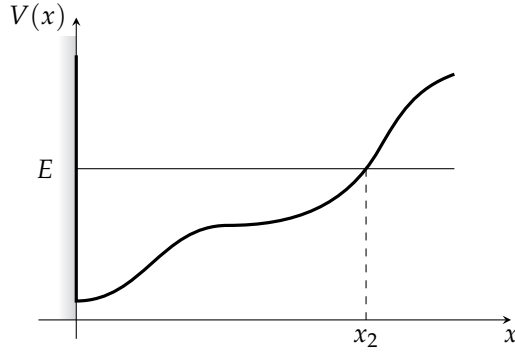
$$(۸.۴۵) \quad B = -ie^{i\pi/4} D \quad \text{اور} \quad C = ie^{-i\pi/4} D$$

انہیں کلیاتے جوڑ<sup>۱۴</sup> کہتے ہیں، جو نقطہ واپس کے دونوں اطراف ونڈل وکرامرسس ویرلوان حلوں کو آپس میں پیوند کرتے ہیں۔ پیوندی تفاعسل موج کا کام، نقطہ واپس پر پیدا درز کو ڈھانپنا تھا؛ اس کی ضرورت آگے نہیں آئے گی۔ تمام چیزوں کو معمول زنی مستقل  $D$  کی صورت میں بیان کر کے نقطہ واپس کو واپس مبداءے اختیاری نقطہ  $x_2$  منتقل کرتے ہوئے، ونڈل وکرامرسس ویرلوان تفاعسل موج (مساوات ۸.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۸.۴۶) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x < x_2 \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & x > x_2 \end{cases}$$

مثال ۸.۳: ایک انتصابی دیوار والا مخفیہ کنواں۔ مندرجہ کریں ایک مخفیہ کنویں کی  $x = 0$  پر انتصابی دیوار جبکہ دوسری دیوار ڈھلان ہے (شکل ۸.۸)۔ ایسی صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا لہذا مساوات ۸.۴۶ کے تحت

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2} p(x) dx + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$



شکل ۸.۸: ایک انتہائی دیوار والا محفظہ کنواں۔

یادرج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۴۷) \quad \int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi \hbar$$

مثلاً، ”نصف ہارمونی سر تعش“:

$$(۸.۴۸) \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & x > 0, \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ اس صورت میں

$$p(x) = \sqrt{2m[E - (1/2)m\omega^2 x^2]} = m\omega \sqrt{x_2^2 - x^2}$$

ہوگا، جہاں

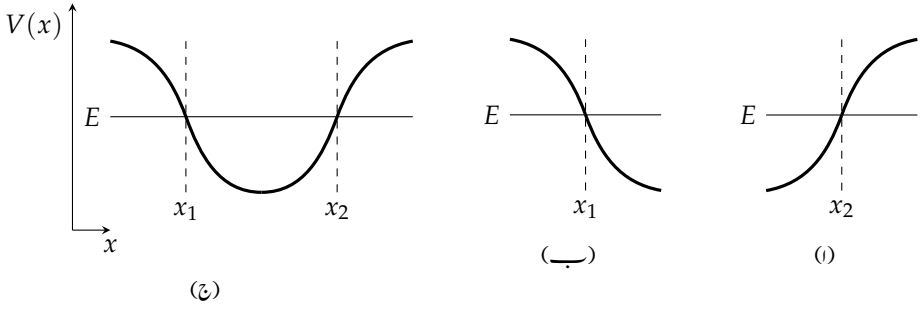
$$x_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

نقطہ واپس ہے۔ لہذا

$$\int_0^{x_2} p(x) dx = m\omega \int_0^{x_2} \sqrt{x_2^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} m\omega x_2^2 = \frac{\pi E}{2\omega}$$

ہوگا، اور کوانٹائزیشن شرط (مساوات ۸.۴۷) درج ذیل دیگا۔

$$(۸.۴۹) \quad E_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots\right) \hbar \omega$$



شکل ۸.۹: بالائی رخ ڈھلوان اور نیچے رخ ڈھلوان نقاط واپسیں۔

اس مخصوص صورت میں ونزل و کرامرس و برلوان تخمین اصل اجزائی توانائیاں دیتی ہے (جو مکمل ہارمونی سر تقش کی طاق توانائیاں ہیں؛ سوال ۲.۳۲ دیکھیں)۔

مثال ۸.۳: بغیر انتصالی دیواروں کا مخفیہ کنوائے۔ اس نقطہ واپسیں پر جہاں مخفیہ کی ڈھلوان اوپر رخ (شکل ۸.۹-۱) ہو، مساوات ۸.۳۶ ونزل و کرامرس و برلوان تفاعلات موج کو آپس میں پیوند کرتی ہے۔ نیچے ڈھلوان نقطہ واپسیں (شکل ۸.۹-ب) پر یہی دلائل درج ذیل دیئے (سوال ۸.۹)۔

$$(۸.۵۰) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D'}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_1} |p(x')| dx'}, & x < x_1 \\ \frac{2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & x > x_1 \end{cases}$$

بالخصوص، مخفیہ کنویں (شکل ۸.۹-ج) کی بات کرتے ہوئے، ”اندرونی خطہ“ ( $x_1 < x < x_2$ ) میں تفاعل موج کو

$$\psi(x) \cong \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_2(x), \quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۳۶)، یا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\psi(x) \cong \frac{-2D'}{\sqrt{p(x)}} \sin \theta_1(x), \quad \theta_1(x) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{\pi}{4}$$

(مساوات ۸.۵۰)۔ ظاہر ہے، ماسوائے مضرب  $\pi$  کے،<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل لازماً برابر ہوں گے:  $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ ، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۸.۵۱) \quad \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

<sup>۱۵</sup> سائن تفاعلات کے دلیل میں مشرق مضرب  $\pi$  کے مضرب  $2\pi$  ہو گا، چونکہ مجموعی منفی علامت کو معمول ذنی مستطالات  $D$  اور  $D'$  میں ضم کیا جاسکتا ہے۔

یہ کوانٹائی شرط، دو ڈھلوان اطراف کے ”عمومی“ مخفیہ کنویں کی احبازی توانائیوں کو تعین کرتا ہے۔ دھیان رہے کہ دو انتضائی دیواروں کے کلیہ (مساوات ۸.۱۶) یا ایک انتضائی دیوار کے کلیہ (مساوات ۸.۴) اور موجودہ کلیہ (مساوات ۸.۵) میں صرف اس عدد (0، 1/4 یا 1/2) کا منسرق ہے جو  $n$  سے منفی ہوتا ہے۔ چونکہ ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین (بڑی  $n$  کی) نیم کلاسیکی طریق میں بہترین کام کرتی ہے، لہذا یہ منسرق صرف دکھانے کی حد تک ہے۔ بہر حال یہ نتیجہ انتہائی طاقتور ہے، جس کو استعمال کر کے، مساوات شرودنگر حل کیے بغیر، ایک سادہ عمل کی قیمت حاصل کر کے تخمینی احبازی توانائیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

تفاعل موج خود کہیں نہیں نظر آتا۔ □

سوال ۸.۵: زمین پر لپکدار ٹپکیاں لیتے ہوئے (کیست  $m$  کی) گیند کے کلاسیکی مسئلے کے ماشل کوانٹائی میکانی مسئلے پر غور کریں۔<sup>۱۶</sup>

ا. مخفی توانائی کیا ہوگی اس کو زمین سے بلندی  $x$  کا تفاعل لکھیں؟ (منفی  $x$  کی صورت میں مخفیہ لامستمانی ہوگا؛ گیند کبھی وہاں نہیں جاسکتا۔)

ب. اس مخفیہ کے لئے مساوات شرودنگر حل کر کے جواب کو مناسب ایسری تفاعل کے روپ میں لکھیں (یاد رہے، بڑی  $z$  پر  $Bi(z)$  بے فتابو بڑھتا ہے، لہذا اس کو لازماً رد کرنا ہوگا۔) تفاعل  $\psi(x)$  کی معمول زنی کرنے کی ضرورت نہیں۔

ج. پہلی چار احبازی توانائیوں کو تین مخفی خیزہندوں تک  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  اور  $m = 0.1 \text{ kg}$  لے کر حاصل کریں۔

د. اس ثقلی میدان میں ایک الیکٹران کی زمینی حال توانائی، eV میں، کتنی ہوگی؟ اوسط ایہ الیکٹران زمین سے کتنی بلندی پر ہوگا؟ اشارہ: مسئلہ دریل سے  $\langle x \rangle$  کا تعین کریں۔

سوال ۸.۶: ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین استعمال کرتے ہوئے (سوال ۸.۵ کی) ٹپکیاں کھاتے ہوئے گیند کا تخبزبہ کریں۔

ا. احبازی توانائیوں  $E_n$  کو  $m$ ،  $g$  اور  $\hbar$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. سوال ۸.۵ ج میں دی گئی مخصوص قیتوں کو پڑ کر کے ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین کی ابتدائی چار توانائیوں کا ”بالکل ٹھیک“ نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

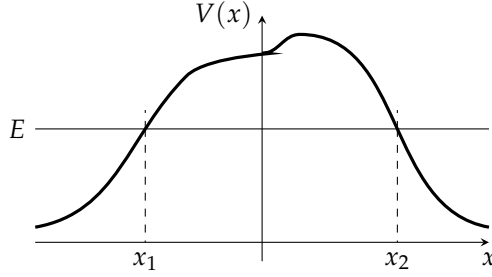
ج. کوانٹائی عدد  $n$  کو کتنا بڑا ہونا ہوگا کہ گیند اوسطاً زمین سے، مثلاً، ایک میٹر کی بلندی پر ہو۔

سوال ۸.۷: ہارمونی مرتعش کی احبازی توانائیوں کو ونڈل وکرامرس و برلوان تخمین سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۸: ہارمونی مرتعش (جس کی زاویائی تعدد  $\omega$  ہو) کی  $n$  ویں ساکن حال میں کیست  $m$  کے ایک ذرے پر غور کریں۔

ا. نقطہ واپسیں،  $x_2$ ، تلاش کریں۔

<sup>۱۶</sup>ایہ ایک معنوی مسئلہ نظر آتا ہے؛ درحقیقت، نیوٹران کے لئے یہ تخبزبہ سرانجام دیا گیا ہے۔



شکل ۸.۱۰: ڈھلوانی دیواروں والار کاوٹ۔

ب. نقطہ واپس سے کتنی بلندی ( $d$ ) پر خط بند مخفیہ (مساوات ۸.۳۲ لیکن نقطہ واپس  $x_2$  پر ہو) میں سے ۱% ہوگا؟ یعنی، اگر

$$\frac{V(x_2 + d) - V_{\mathcal{G}^*}(x_2 + d)}{V(x_2)} = 0.01$$

ہو، تب  $d$  کیا ہوگا؟

ج۔ جب تک  $z \geq 5$  ہو  $Ai(z)$  کا مقدار بے روپ 1% تک درست ہوگا۔ جزو ب میں حاصل کردہ  $d$  کے لئے  $n$  کی ایسی سب سے کم قیمت تلاش کریں کہ  $\alpha d \geq 5$  ہو۔ (اس سے بڑی  $n$  کے لئے ایسا منطبق خط موجود ہوگا جس میں خط بند مخفیہ 1% تک درست اور بڑی  $z$  روپ کا ایسری تقابل عمل 1% درست ہوگا۔)

سوال ۸.۹: نیچے دہلوان نقطہ واپس کا پیوندی کلیہ اخذ کر کے مساوات ۸.۵۰ کی تصدیق کریں۔

سوال ۸۱۰: مناسب پیوندی کلیات استعمال کر کے ڈھلوان دیواروں کی رکاوٹ (شکل ۸۱۰) سے بکھراؤ کے مسئلہ پر غور کریں۔ اشارہ درج ذیل روپ کے ونڈل وکراسرس وبلوان تقاعسل موج سے آغاز کریں۔

$$(\mathbf{A.5r}) \quad \psi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ A e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} + B e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'} \right], & (x < x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ C e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} + D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \right], & (x_1 < x < x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ F e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right], & (x > x_2) \end{cases}$$

کسی صورت  $C = 0$  مت لیں۔ سرنگ زنی احتمال  $T = |F|^2 / |A|^2$  کا حساب کریں، اور دکھائیں کہ بلند اور چوڑی راکوٹ کی صورت میں آپ کا نتیجہ مساوات ۸.۲۲ دے گا۔

اضافی سوالات برائے باب ۸  
سوال ۸.۱۱: عمومی قوت نسائی مخفیہ:

$$V(x) = \alpha |x|^v$$

جہاں  $v$  ایک مثبت عدد ہے، کی احبازتی توانائیوں کو ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین سے تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کو  $v = 2$  جابجائیں۔ جواب: ۱۷

$$(۸.۵۳) \quad E_n = \alpha \left[ (n - 1/2) \hbar \sqrt{\frac{\pi}{2m\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{v} + 1\right)} \right]^{\left(\frac{2v}{v+2}\right)}$$

سوال ۸.۱۲: ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین استعمال کر کے سوال ۲.۵۱ کے مخفیہ کے لئے مقبہ حال توانائی تلاش کریں۔  
نتیجے کا ٹھیک ٹھیک جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ جواب:  $[(9/8) - (1/\sqrt{2})] \hbar^2 a^2 / m$

سوال ۸.۱۳: کروی تشکلی مخفیہ کے لئے ہم رداسی حصے (مساوات ۴.۳۷) پر ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ مساوات ۸.۴ کی درج ذیل روپ کو  $l = 0$  کی صورت میں استعمال کرنا معقول ہوگا ۱۸

$$(۸.۵۴) \quad \int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4) \pi \hbar$$

جہاں  $r_0$  نقطہ واپس ہے، (یعنی ہم  $r = 0$  کو لامتناہی دیوار تصور کرتے ہیں)۔ اس کلیہ کو زیر استعمال لاتے ہوئے لوکار تھی مخفیہ:

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

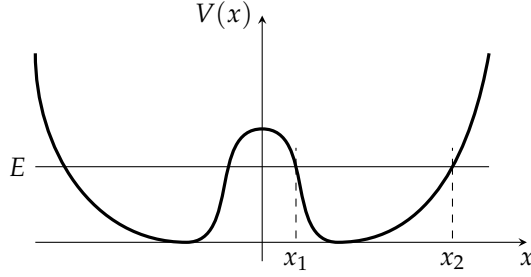
کی احبازتی توانائیوں کی انداز ا قیمت تلاش کریں (جہاں  $V_0$  اور  $a$  مستقلات ہیں)۔ صرف  $l = 0$  کی صورت پر غور کریں۔  
دکھائیں کہ سطحوں کے بیچ فاصلوں کا انحصار کیفیت پر نہیں۔ جبزوی جواب:

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \left( \frac{n + 3/4}{n - 1/4} \right)$$

سوال ۸.۱۴: ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین کا درج ذیل روپ

$$(۸.۵۵) \quad \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = (n - 1/2) \pi \hbar$$

۱۸ ہمیشہ کی طرح، ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین نیم کلاسیکی (بڑی  $n$ ) طریق میں سب سے زیادہ درست ثابت ہوتی ہے۔ بالخصوص، مساوات ۸.۵۳ زمینی حال ( $n=1$ ) کے لئے اتنی اچھی نہیں ہے۔  
۱۸ رداسی مساوات پر ونڈل وکرامرسس ویرلوان تخمین کا اطلاق چند نازک اور پیچیدہ مسائل پیدا کرتا ہے، جس پر یہاں کوئی بات نہیں کی جائے گی۔



شکل ۸.۱۱: تشابلی دوہر اکنویں؛ سوال 15.8۔

استعمال کر کے ہائیڈروجن کی مقید حال توانائیوں کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ موثر محفیہ (مساوات ۴.۳۸) میں مرکز گریز جزو شامل کر نامت بھولیں۔ درج ذیل مکمل مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

$$(۸.۵۶) \quad \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

آپ دیکھیں گے کہ  $n \gg l$  اور  $n \gg 1/2$  کی صورت میں پوہر سطحیں حاصل ہوں گی۔ جواب:

$$(۸.۵۷) \quad E_{nl} \cong \frac{-13.6 \text{ eV}}{[n - (1/2) + \sqrt{l(l+1)}]^2}$$

سوال ۸.۱۵: تشابلی دوہر اکنویں (شکل ۸.۱۱) پر غور کریں۔ ہم  $E < V(0)$  والی مقید حالات میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(الف) خط (i)  $x > x_2$ ، (ii)  $x_1 < x < x_2$  اور (iii)  $0 < x < x_1$  کے لئے ونڈل وکراسس و برلوان تفعلات موج لکھیں۔ نقطہ  $x_1$  اور  $x_2$  پر مناسب پیوندی کلیات کا اطلاق کر کے مساوات 8.46 میں  $x_2$  کے لئے ایک ایسا گیب ہے آپ کو  $x_1$  کے لئے کرنا ہوگا درج ذیل دکھائیں

$$\psi(x) \cong \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx' \right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ 2 \cos \theta e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} + \sin \theta e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} \right], & (iii) \end{cases}$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$(۸.۵۸) \quad \theta \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

(ب) چونکہ  $V(x)$  تشکیلی ہے لہذا ہمیں صرف جفت (+) اور طاق (-) تقاضات موج پر غور کرنا ہوگا۔ اول الذکر صورت میں  $\psi'(0) = 0$  ہوگا جبکہ موخر الذکر صورت میں  $\psi(0) = 0$  ہوگا۔ دکھائیں کہ اس سے درج ذیل کوانٹائی شرط حاصل ہوتی ہے

$$\tan \theta = \pm 2e^{\phi}. \quad (۸.۵۹)$$

جہاں درج ذیل ہوگا

$$\phi \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_1} |p(x')| dx'. \quad (۸.۶۰)$$

مساوات 8.59 تخمینی احبازی توانائیاں تعین کرتی ہے چونکہ  $x_1$  اور  $x_2$  میں  $E$  کی قیمت داخل ہوتی ہے لہذا  $\theta$  اور  $\phi$  دونوں  $E$  کے تقاضات ہوں گے۔

(ج) ہم بالخصوص بلندیا/ اور چوڑے درمیانے رکاوٹ میں دلچسپی رکھتے ہیں ایسی صورت میں  $\phi$  بڑا ہوگا لہذا  $e^{\phi}$  انتہائی بڑا ہوگا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.59 کے تحت  $\theta$  کی قیمتیں  $\pi$  کی نصف عدد صحیح مضرب کے بہت قریب ہوں گی اس کو ذہن میں رکھتے ہوئے  $\epsilon = (n + 1/2)\pi + \epsilon$  جہاں  $|\epsilon| \ll 1$  ہے لکھ کر دکھائیں کہ کوانٹائی شرط درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\theta \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mp \frac{1}{2} e^{-\phi}. \quad (۸.۶۱)$$

(د) مندرجہ کریں ان میں سے ہر ایک کنواں قطع مکانی ہے

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (x + a)^2, & \text{اگر } x < 0, \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - a)^2, & \text{اگر } x > 0, \end{cases} \quad (۸.۶۲)$$

اس مخفیہ کوترسیم کر کے  $\theta$  مساوات 8.58 تلاش کریں اور درج ذیل دکھائیں

$$E_n^{\pm} \cong \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \mp \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\phi}. \quad (۸.۶۳)$$

تبصرہ: اگر درمیانی رکاوٹ نا متابل گزر ہو  $\infty \rightarrow \phi$  تب ہمارے پاس دو الگ الگ ہارمونی مرتعشات ہوتے اور توانائیاں  $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$  دوہری انحطاطی ہوتیں چونکہ ذرہ بائیں کنویں میں یا دائیں کنویں میں ہو سکتا ہے۔ مستثنای رکاوٹ کی صورت میں دونوں کنویں کے بیچ رابطہ ممکن ہوگا لہذا انحطاط ختم ہوگا۔ جفت حالات  $(\psi_n^+)$  کی توانائی معمولی کم اور طاق تقاضات  $(\psi_n^-)$  کی توانائی معمولی زیادہ ہوگی۔

(د) مندرجہ کریں ذرہ دائیں کنویں سے آغاز کرتا ہے یا یہ کہن زیادہ درست ہوگا کہ ذرہ ابتدائی طور پر درج ذیل روپ میں پایا جاتا ہے

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n^+ + \psi_n^-).$$



جن میں حیطوں کی وہ قیمتیں منتخب کی جائیں گی کہ اس کا بیشتر حصہ دائیں کنویں میں پایاجابا تہو۔ دکھائیں کہ یہ ذرہ ایک کنویں سے دوسرے اور دوسرے سے واپس پہلا کنویں درج ذیل دوری عرصہ کے ساتھ ارتعاش کرتا رہے گا

$$\tau = \frac{2\pi^2}{\omega} e^{\phi}. \quad (۸.۶۴)$$

(ھ) متغیر  $\phi$  کی قیمت جزو (د) میں دی گئی مخصوص مخفیہ کے لئے تلاش کریں اور دکھائیں جب  $V(0) \gg E$  ہو تب  $\phi \sim m\omega a^2 / \hbar$  ہوگا۔

سوال ۸.۱۶: **سٹارک اثر میں سرنگ زنی**۔ بیرونی برقی میدان چالو کرنے سے اصولی طور پر ایک الیکٹران جو ہرے سرنگ زنی کے ذریعے باہر نکل کر جوہر کو بارداریہ بنا سکتا ہے۔ سوال: کیا ایک عمومی سٹارک اثر کے تجربہ میں ایسا ہوگا؟ ہم ایک سادہ ترین یہ بُندی نمونہ استعمال کر کے احتمال کی اندازہ قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ایک ذرہ ایک بہت گہری مستثنائی چوکور کنواں حصہ 2.6 میں پایاجابا تہ ہے۔

(الف) کنویں کی تہ سے زمینی حال توانائی کتنی بلند ہوگی یہاں فرض کریں  $V_0 \gg \hbar^2 / ma^2$  ہے۔ اشارہ: یہ  $2a$  چوڑائی کی لامستثنائی چوکور کنویں کی زمینی حال توانائی ہے۔

(ب) اب اضطراب  $H' = -\alpha x$  متعارف کریں بیرونی برقی میدان  $E = -E_{ext}$  میں  $\alpha = eE_{ext}$  ہوگا۔ فرض کریں یہ ایک بہت کمزور اضطراب ہے ( $\alpha a \ll \hbar^2 / ma^2$ )۔ کل مخفیہ کا حصہ کہ ترسیم کر کے دیکھیں کہ ذرہ اب مثبت  $x$  رخ سرنگ زنی کے ذریعے خارج ہو سکتا ہے۔

(ج) سرنگ زنی جزو ضربی  $\gamma$  مساوات 8.22 کا حساب کریں اور ذرے کو مندرار ہونے کے لئے درکار وقت کی اندازہ قیمت مساوات 8.28 معلوم کریں۔ جواب:  $\gamma = \sqrt{8mV_0^3 / 3\alpha\hbar}, \tau = (8ma^2 / \pi\hbar)e^{2\gamma}$ ۔

(د) منقول اعداد  $V_0 = 20 \text{ eV}$ ، بیرونی الیکٹران کی بندشی توانائی کی عمومی قیمت  $a = 10^{-10} \text{ m}$  عمومی جوہر کاردا س  $E = 7 \times 10^6 \text{ V/m}$ ، تجربہ گاہ میں مضبوط میدان  $e$  اور  $m$  الیکٹران کا بار اور کیفیت لیں۔ عرصہ  $\tau$  کا حساب کر کے اس کا موازنہ کائنات کی عمر کے ساتھ کریں۔

سوال ۸.۱۷: رہائشی درجہ حرارت پر میز پر ایک کھڑی بوتل کو انشائی سرنگ زنی کی وجہ سے کتنی دیر میں خود بخود گر سکتی ہے؟ اشارہ: بوتل کو کیفیت  $m$  ردا اس  $R$  اور قد  $h$  کا تکی تصور کریں۔ گرتی ہوئی بوتل کے وسطی نقطے کا توازنی معتام  $(h/2)$  سے بلندی کو  $x$  سے ظاہر کریں۔ مخفی توانائی  $mgx$  ہوگی اور بوتل اُس صورت گرے گی جب  $x$  کی قیمت منسل قیمت  $x_0 = \sqrt{R^2 + (h/2)^2} - h/2$  تک پہنچے۔ سرنگ زنی احتمال مساوات 8.22 کو  $E = 0$  کے لئے حاصل کریں۔ حراری توانائی  $(1/2)k_B T = (1/2)mv^2$  (لیتے ہوئے رفتار کی اندازہ قیمت مساوات 8.28 سے معلوم کریں۔ مناسب قیمتیں پُر کر کے اپنا جواب سالوں میں دیں۔

جوابات

- centrifugal term, 146
- Chandrasekhar limit, 253
- chemical potential, 247
- Clebsch-Gordon coefficients, 190
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
  - canonical relation, 45
  - canonical relations, 138
  - fundamental relations, 165
- commutator, 44
- commute, 44
- complete, 35, 100
- conductor, 235
- configuration, 237
- continuity equation, 194
- continuous, 105
- continuum, 138
- coordinates
  - spherical, 139
- Copenhagen interpretation, 4
- covalent bond, 214
- cubic symmetry, 298
  
- Darwin term, 280
- decomposition
  - spectral, 130
- degeneracy pressure, 228
- degenerate, 90, 104
- degrees of freedom, 254
- delta
  - Kronecker, 35
  
- 21-centimeter line, 291
  
- adjoint, 103
- allowed
  - values, 33
- aluminium, 220
- angular momentum
  - conservation, 170
  - extrinsic, 174
  - intrinsic, 174
- argument, 61
  
- bands, 234
- baryon, 191
- Bessel
  - spherical function, 148
- binding energy, 156
- binomial coefficient, 239
- blackbody spectrum, 250
- Bloch's theorem, 229
- Bohr
  - radius, 156
- Bohr formula, 155
- Bohr magneton, 284
- Bose condensation, 249
- Bose-Einstein distribution, 247
- bosons, 208
- boundary conditions, 32
- bra, 128
- bra-ket
  - notation, 128
- bulk modulus, 229

- fermions, 208
- Feynmann-Hellmann theorem, 294
- fine structure, 272
- fine structure constant, 272
- formula
  - De Broglie, 19
  - Euler, 30
- Fourier
  - inverse transform, 63
  - transform, 63
- Frobenius
  - method, 54
- function
  - Dirac delta, 72
  - even, 31
- g-factor, 278
- gamma function, 249
- gaps, 234
- gauge
  - invariant, 202
  - transformation, 202
- generalized
  - distribution, 72
  - function, 72
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
  - function, 60
- generator
  - translation in space, 136
  - translation in time, 136
- geometric series, 253
- good
  - linear combinations, 263
- good quantum numbers, 275
- Gram-Schmidt
  - orthogonalization process, 107
- Gram-Schmidt procedure, 437
- graviton, 163
- group theory, 191
- gyromagnetic ratio, 182
- density
  - free electron, 227
- determinant
  - Slater, 214
- determinate state, 103
- deuterium, 297
- deuteron, 297
- dipole moment
  - magnetic, 181
- Dirac
  - comb, 229
  - notation, 128
  - orthonormality, 108
- direct integral, 313
- discrete, 105
- dispersion
  - relation, 67
- dope, 235
- eigenfunction, 103
- eigenvalue, 103
- eigenvalue equation, 103
- electrodynamics
  - quantum, 278
- electron
  - classic radius, 175
- energy
  - allowed, 29
  - conservation, 39
- energy gap, 290
- ensemble, 15
- entangled states, 207
- exchange force, 213
- exchange integral, 313
- expectation
  - value, 7
- Fermi
  - energy, 227
  - temperature, 228
- Fermi surface, 227
- Fermi-Dirac distribution, 247

- polynomial, 158
- Lamb shift, 272
- Landau Levels, 202
- Lande  $g$ -factor, 284
- Laplacian, 138
- Larmor frequency, 184
- law
  - Hooke, 42
- LCAO, 311
- Legendre
  - associated, 142
- leptons, 175
- Levi-Civita symbol, 180
- linear
  - combination, 28
- linear algebra, 97
- Lithium, 162
- Lorentz force
  - law, 201
- magnetic moment
  - anomalous, 278
- mass
  - reduced, 206
- matrices, 98
- matrix
  - $S$ , 94
  - transfer, 95
- matrix elements, 125
- Maxwell-Boltzmann distribution, 247
- mean, 7
- median, 7
- meson, 191
- momentum, 17
- momentum space
  - wave function, 195
- momentum space wave function, 113
- motion
  - cyclotron, 202
- muon catalysis, 319
- muonic hydrogen, 291
- Hamiltonian, 28
- harmonic
  - oscillator, 32
- harmonic oscillator
  - three-dimensional, 193
- Helium, 162
- Hermitian
  - conjugate, 49
- hermitian, 101
  - anti, 130
  - conjugate, 103
  - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- hole, 235
- Hund's
  - first rule, 221
  - second rule, 221
  - third rule, 221
- Hund's Rules, 220
- hydrogen
  - muonic, 207
- hydrogenic atom, 162
- hyperfine structure, 272
- ideal gas, 245
- idempotent, 129
- indeterminacy, 3
- infinite spherical well, 146
- inner product, 98
- insulator, 235
- inverse beta decay, 253
- ket, 128
- kion, 191
- Kronig-Penny model, 232
- ladder
  - operators, 46
- Lagrange multiplier, 242
- Laguerre
  - associated polynomial, 158

- degenerate, 260
- pion, 191
- Planck's
  - formula, 162
- polynomial
  - Hermite, 58
- position
  - agnostic, 4
  - orthodox, 3
  - realist, 3
- positronium, 207, 291
- potential, 15
  - effective, 146
  - reflectionless, 93
- probability
  - conservation, 194
  - density, 10
- probability current, 21, 194
- probable
  - most, 7
- quantum
  - principle number, 155
- quantum dots, 319
- quantum number
  - azimuthal, 145
  - magnetic, 145
- quantum numbers, 147
- quark, 191
- radial equation, 146
- recursion
  - formula, 55
- reflection
  - coefficient, 78
- relation
  - Kramers, 295
  - Pasternack, 295
- relativistic correction, 272
- revival time, 89
- Riemann zeta function, 249
- rigid rotor, 173
- muonium, 291
- Neumann
  - spherical function, 148
- neutrino
  - electron, 127
  - muon, 127
- neutron star, 253
- node, 34
- non-normalizable, 13
- normalizable, 14
- normalization, 13
- normalization constant, 22
- normalized, 100
- observables
  - incompatible, 116
- occupation number, 237
- operator, 17
  - exchange, 209
  - lowering, 46, 166
  - projection, 129
  - raising, 46, 166
- orbital, 173
- orbitals, 219
- orthogonal, 34, 100
- orthohelium, 217
- orthonormal, 35, 100
- orthorhombic symmetry, 298
- oscillation
  - neutrino, 127
- overlap integral, 312
- pair annihilation, 292
- parahelium, 217
- particle
  - unstable, 21
- Paschen-Back effect, 285
- Pauli exclusion principle, 208
- Pauli spin matrices, 177
- periodic table, 219
- perturbation theory

- spinor, 175
- square-integrable, 13
- square-integrable functions, 98
- standard deviation, 9
- Stark effect, 296
- state
  - bound, 70
  - excited, 34
  - ground, 34, 156
  - scattering, 70
- stationary states, 27
- statistical
  - interpretation, 2
- Stefan-Boltzmann formula, 251
- step function, 80
- Stern-Gerlach experiment, 184
- Stirling's approximation, 243
- symmetrization
  - requirement, 209
- temperature, 236
- tetragonal symmetry, 298
- theorem
  - Dirichlet's, 35
  - Ehrenfest, 18
  - equipartition, 254
  - Plancherel, 63
- thermal equilibrium, 236
- Thomas precession, 279
- transformations
  - linear, 97
- transition, 161
- transmission
  - coefficient, 78
- triplet, 188
- tunneling, 72, 79
- turning points, 70
- uncertainty principle, 19, 116
  - energy-time, 119
- valence, 223
- Rodrigues
  - formula, 60
- Rodrigues formula, 142
- rotation
  - generator, 200
- Rydberg
  - constant, 162
  - formula, 162
- scattering
  - matrix, 93, 94
- Schrodinger
  - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99, 437
- screened, 219
- semiconductors, 235
- separation constant, 26
- sequential measurements, 131
- series
  - Balmer, 162
  - Fourier, 35
  - Lyman, 162
  - Paschen, 162
  - power, 43
  - Taylor, 42
- shell, 219
- sodium, 23
- space
  - dual, 128
  - outer, 23
- spectrum, 104
- spherical
  - harmonics, 144
- spin, 173, 174
- spin down, 175
- spin up, 175
- spin-orbit
  - interaction, 279
- spin-orbit coupling, 272
- spin-spin coupling, 290

- اتساق  
حالات، 133  
اجزائی  
قیمتیں، 33  
ارتعاش  
نیوٹرینو، 127  
استمراری، 105  
استمراری مساوات، 194  
استمراریہ، 138  
اصول  
عدم یقینیت، 19  
اصول تغیریت، 299  
اصول عدم یقینیت، 116  
اضافیتی تصحیح، 272  
اکیس سٹی میٹر لکیر، 291  
الیکٹران  
کلاسیکی رداس، 175  
الیکٹران نیوٹرینو، 127  
امتیازی تقابلی عمل، 103  
امتیازی فتر، 103  
امتیازی فتر مساوات، 103  
انتشاری  
رشتہ، 67  
انخطاطی، 90، 104  
انخطاطی دباؤ، 228  
اندرونی ضرب، 98  
انوکاس  
شرح، 78  
اوسط، 7
- باضابطہ معیار حرکت، 203  
برقی حرکیات  
کوانٹائی، 278  
بقا  
توانائی، 39  
بقا احتمال، 194  
بلا واسطہ مکمل، 313  
بندشی توانائی، 156  
بوس آئنسٹائن تقسیم، 247  
بوس انجماد، 249
- Van der Waals interaction, 294  
variables  
separation of, 25  
variance, 9  
variational principle, 299  
vectors, 97  
velocity  
group, 66  
phase, 66  
virial theorem, 132  
three-dimensional, 194  
wag the tail, 56  
wave  
incident, 77  
packet, 62  
reflected, 77  
transmitted, 77  
wave function, 2  
wave vector, 224  
wavelength, 18  
white dwarf, 252  
Wien displacement law, 250  
WKB, 321  
Yukawa potential, 316  
Zeeman effect, 283  
zero-crossing, 34



- بوسن، 208  
 بوہر  
 رداس، 156  
 کلیہ، 155  
 بوہر مقناطیس، 284  
 بیریان، 191  
 میل  
 کروی تقا عمل، 148  
 بے لچک پھسکی، 173  
 پازیشٹرانیم، 207، 291  
 پاشن ویک اثر، 285  
 پالی اصول مناعت، 208  
 پالی متالب چکر، 177  
 پایان، 191  
 پیال، 234  
 پس پردہ، 219  
 پلانک  
 کلیہ، 162  
 پسیداکار  
 فضا میں انتقال کا، 136  
 وقت میں انتقال، 136  
 پسیداکار  
 تقا عمل، 60  
 گھومتا، 200  
 تجدیدی عرصہ، 89  
 تجربہ  
 شرٹن و گرانج، 184  
 ترتیبی پیمائشیں، 131  
 ترسیل  
 شرح، 78  
 تسل  
 بالمر، 162  
 پاشن، 162  
 ٹیلر، 42  
 طاقتی، 43  
 فوریئر، 35  
 لیمان، 162  
 تشاکلیت  
 ضرورت، 209  
 تشکیل، 237  
 تعداد مکین، 237  
 تعیین حال، 103  
 تغیریت، 9  
 تقا عمل  
 ڈیٹا، 72  
 تقا عمل موج، 2  
 تقا علیہ، 128  
 تکمل  
 ڈھانچائی، 312  
 توانی  
 کلیہ، 55  
 توانائی  
 احبابائی، 29  
 توقعاتی  
 قیمت، 7  
 شنائی عددی سر، 239  
 حبرو ڈارون، 280  
 جسم مقیاس، 229  
 جفت، 34  
 تقا عمل، 31  
 جفت قطب معیار اثر  
 مقناطیسی، 181  
 جوہری مدار چوں  
 خطی جوڑ ترکیب، 311  
 جی حبرو ضربی، 278  
 چکر، 173، 174  
 مخالف میدان، 175  
 ہم میدان، 175  
 چکر چکر رابطہ، 290  
 چکر کار، 175  
 چکر و مدار باہم عمل، 279  
 چکر و مدار رابطہ، 272  
 چندر شیکھر حد، 253  
 چوزاویہ تشکل، 298  
 حال  
 بچھراؤ، 70

- 66، دوری سستی  
 66، گروہی سستی  
 86، رمسز اور وٹاؤسڈ اثر،  
 194، رواحتال،  
 روڈریگیس  
 142، کلیہ  
 249، ریمان زیٹا تفسا عمل،  
 زاویائی معیار حرکت  
 170، بقا،  
 174، خنقی،  
 174، غیر خنقی،  
 283، زیسان اثر،  
 ساکن  
 27، حالایت،  
 243، شملنگ  
 251، شیفتن و بولسٹمن کلیہ،  
 32، سرحدی شراط،  
 72، 79، سرنک زنی،  
 252، سفید بونا،  
 15، سگرا،  
 220، سلور،  
 128، سمتاویہ،  
 97، سمتیات،  
 224، سمتیہ موج،  
 سوچ  
 4، انکاری،  
 3، تقلید پسند،  
 3، حقیقت پسند،  
 23، سوڈیم،  
 188، سہ تا،  
 250، سیاہ جسمی طیف،  
 سیزھی  
 46، عاملین،  
 80، سیزھی تفسا عمل،  
 296، شمارک اثر،  
 27، شروڈنگر  
 136، شروڈنگر نقطہ نظر،  
 156، 34، زمینی،  
 70، مقید،  
 34، ہچچان،  
 236، حراری توازن،  
 حرکت  
 202، سائیکلوثران،  
 97، خطی الجبرا،  
 97، خطی تبدلہ،  
 28، خطی جوڑ،  
 3، خفیہ متغیرات،  
 219، 235، خول،  
 254، درجبات آزادی،  
 236، درجہ حرارت،  
 234، درز،  
 290، درز توانائی،  
 61، دلیل،  
 96، 56، دم ہلانا،  
 219، دوری جدول،  
 ڈیراک  
 128، علامتیت،  
 229، کنگھی،  
 108، معیاری عمودیت،  
 ڈیلٹا  
 35، کرونیگر،  
 297، ڈیوٹریم،  
 297، ڈیوٹیران،  
 ذرہ  
 21، غیر مستحکم،  
 رو  
 21، احتمال،  
 146، ردای مساوات،  
 162، رڈبرگ،  
 162، کلیہ،  
 رشتہ  
 295، پترنگ،  
 295، کرامرس،  
 رفتار

- شریک عامل، 103  
شریک گرفتہ بندہ، 214  
شاریائی مفہوم، 2  
شوارز  
عدم مساوات، 437  
شوارز عدم مساوات، 99  
صفر متانقطع، 34  
طاق، 34  
طامس استقبالی حرکت، 279  
طول موج، 18، 162  
طیف، 104  
طیفی تحلیل، 130  
عامل، 17  
تخلیل، 129  
تقلیل، 166، 46  
رفع، 166، 46  
مبادلہ، 209  
عبور، 161  
عدم تعین، 3  
عدم یقینیت  
توانائی و وقت، 119  
عدم یقینیت اصول، 19  
عقدہ، 34  
علائقیت  
تفعلی و ستمناویہ، 128  
علیحدگی متغیرات، 25  
علیحدگی مستقل، 26  
عمودی، 100، 34  
غیر مسل، 105  
غیر موصل، 235  
فہری  
توانائی، 227  
درجہ حرارت، 228  
سطح، 227  
فہریان، 208  
فہری و ڈیراک تقسیم، 247  
فہر و نموس  
ترکیب، 54  
فہر  
بیرونی، 23  
دوبہری، 128  
فورسٹر  
الٹ بدل، 63  
بدل، 63  
فہر مشاہدہ  
غیر ہم آہنگ، 116  
فہر  
بچہ راو، 93، 94  
ترسیل، 95  
فہر اراکان، 125  
فہر نون  
کب، 42  
فہر نمغین، 298  
قواعد بن، 220  
قوالب، 98  
قوت مبادلہ، 213  
کامل گیس، 245  
کایان، 191  
کشافت  
آزاد الیکٹران، 227  
احتمال، 10  
کشیر رکنی  
ہرمانڈ، 58  
کرائنگ و پینی نمونہ، 232  
کروی  
ہارمونیات، 144  
کعبی تشاکل، 298  
کلیہ  
ڈی پروگلی، 19  
روڈرگیس، 60  
پولر، 30  
کلیش و گورڈن عددی سر، 190  
کیٹ  
تخفیف شدہ، 206  
کوارک، 191

- کوانٹائی  
 صدر عدد، 155  
 کوانٹائی اعداد، 147  
 کوانٹائی عدد  
 اسمتی، 145  
 مقنطیسی، 145  
 کوانٹائی نقطے، 319  
 کوپن ہیگن مفہوم، 4  
 کیسادی مخفیہ، 247
- گرام شمد  
 ترکیب عمودیت، 107  
 گرام و شمد حکمت عملی، 437  
 گرافتی، 223  
 گروہی نظریہ، 191  
 گریویشن، 163  
 گیما تفاعل، 249
- لاپلائی، 138  
 لارمر تردد، 184  
 لاگنج  
 شریک کشیررکتی، 158  
 کشیررکتی، 158  
 لامتناہی کروی کنواں، 146  
 لپٹان، 175  
 لتصمیم، 162  
 لگراج مضرب، 242  
 لسنڈو سطحیں، 202  
 لسنڈو جی جزو ضربی، 284  
 لورینتز قوت  
 وٹانون، 201  
 لوی وچو بیت، 180  
 لیڈ انڈر  
 شریک، 142  
 لیب انتقال، 272
- ماپ  
 تبادلہ، 202  
 غیر متغیر، 202  
 مبادلہ مکمل، 313
- متعمم  
 تفاعل، 72  
 تقسیم، 72  
 متعمم شمار یاتی مفہوم، 111  
 مختل  
 سب سے زیادہ، 7  
 محدود  
 کردی، 139  
 مخالف بیٹا تحلیل، 253  
 مخفیہ، 15  
 بلا العکاس، 93  
 موثر، 146  
 مدار چھ، 219  
 مداری، 173  
 مربع متکا مل، 13  
 مربع متکا مل تفاعلات، 98  
 مرتعش  
 ہارمونی، 32  
 مرکز گریز جزو، 146  
 مساوات شروع، 2  
 ممکن مقنطیسی نسبت، 182  
 مسئلہ  
 اہر نفٹ، 18  
 پلانشرال، 63  
 ڈرشلے، 35  
 مساوی حسانہ بندی، 254  
 مسئلہ بلوخ، 229  
 مسئلہ وننمن ولمان، 294  
 مسئلہ ورل، 132  
 تین البعادی، 194  
 معمول زنی، 13  
 وٹائل، 14  
 متقل، 22  
 ناسٹائل، 13  
 معمول شدہ، 100  
 معیار حرکت، 17  
 معیار حرکتی فضا تفاعل موج، 113، 195  
 معیاری انحراف، 9  
 معیاری عمودی، 100، 35  
 منقطع

- واٹن فٹانون ہٹاؤ، 250  
وسطانیہ، 7  
ونڈیل وکرام سرس وبرلوان، 321  
ون در ولس باہم عمل، 292  
ہن  
کاپیلا فٹا عدہ، 221  
کاشیہ فٹا عدہ، 221  
کادوسرا فٹا عدہ، 221  
ہار مونی  
سر نقش، 32  
ہار مونی سر نقش  
تین البعدی، 193  
ہائیڈروجن  
میونی، 207  
ہائیڈروجنی جوہر، 162  
ہر مشی، 101  
جوڑی دار، 49، 103  
حسلاف، 130  
منحرف، 130  
لمبرٹ فضا، 99  
ہمبستہ حال، 207  
ہندی تسل، 253  
ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136  
ہیلیم، 162  
ہیلیم پرست، 217  
ہیملٹنی، 28  
یک طامتی، 129  
یو کا دا مخفیہ، 316
- سلیٹر، 214  
مقابلہ، 44  
مقلدیت  
باضابطہ رشتہ، 45  
باضابطہ رشتہ، 138  
بنیادی رشتہ، 165  
مقلوب، 44  
مقتطبی معیار اثر  
بے ضابطہ، 278  
مکمل، 35، 100  
ملاوٹ، 235  
منہدم، 4، 111  
موج  
آمدی، 77  
ترسیلی، 77  
متعکس، 77  
موجی اکٹھ، 62  
موزوں  
خطی جوڑ، 263  
موزوں کوانٹائی اعداد، 275  
موصول، 235  
مہین ساخت، 272  
مہین ساخت متقل، 272  
میزان، 191  
میکسویل وولٹس من تقسیم، 247  
میدن عمل انگیزی، 319  
میدن نیوٹرینو، 127  
میدنی ہائیڈروجن، 291  
میدنیسم، 291  
نالودگی جوڑا، 292  
نزد ہیلیم، 217  
نظریہ اضطراب  
انخطاطی، 260  
نہایت مہین ساخت، 272  
نیم موصول، 235  
نیوٹران ستارہ، 253  
نیومن  
کروی تق عمل، 148  
واپسی نقطہ ط، 70