کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۸ اپریل ۲۰۲۱

عنوان

باب ۳

قواعد وضوابط

۳.۱ ہرمشی عامل کے امتیازی تفاعل

یوں ہم ہرمشی عاملین کے امتیازی تفاعل کی طرف متوجہ ہوتے ہیں (جو طبعی طور پر قابل مشاہدہ کے تعیین حالات ہوں گے)۔ ان کے دو اقسام ہیں: اگر طیف **غیر مسلسل**[۱] ہو (یعنی امتیازی اقدار الگ الگ ہوں) تب امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جائیں گے اور یہ طبعی طور پر قابل حصول حالات ہوں گے۔ اگر طیف **استمراری**[۲] ہو (یعنی امتیازی اقدار ایک پوری سعت کو بھرتے ہوں) تب امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے اور یہ کسی بھی ممکنہ تفاعل موج کو ظاہر نہیں کر سکتے ہیں (اگرچہ ان کے خطی جوڑ، جن میں لازماً امتیازی اقدار کی ایک وسعت موجود ہو گی، معمول پر لانے کے قابل ہو سکتے ہیں)۔ کچھ عاملین کا صرف غیر مسلسل طیف ہو گا (مثلاً ہارمونی مرتعش کی ہیملٹنی)، کچھ کا صرف استمراری طیف ہو گا (مثلاً آزاد ذرہ کی ہیملٹنی)، اور کچھ کا ایک حصہ غیر مسلسل اور دوسرا حصہ استمراری ہو گا (مثلاً متناہی چکور کنواں کی ہیملٹنی)۔ ان میں غیر مسلسل صورت نبھانا زیادہ آسان ہے چونکہ ان کے متعلقہ اندرونی ضرب لازماً موجود ہوں گے؛ در حقیقت یہ متناہی ابعادی نظریہ سے بہت مشابہت رکھتا ہے (ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات)۔ میں پہلے غیر مسلسل صورت کو اور اس کے بعد استمراری صورت کو دیکھوں گا۔

۳.۱.۱ غیر مسلسل طیف

ریاضیاتی طور پر ہرمشی عامل کے معمول پر لانے کے قابل امتیازی تفاعل کی دو اہم خصوصیات پائے جاتے ہیں:

مسئلہ ۳.۱: ان کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

---

[۱] discrete
[۲] continuous

ثبوت: فرض کریں

$$\hat{Q}f = qf$$

ہو (یعنی $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل f اور امتیازی قدر q ہو) اور [3]

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$$

ہو ($\hat{Q}$ ہرمشی ہے)۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$q\langle f\,|f\,\rangle = q^*\langle f\,|f\,\rangle$$

(چونکہ q ایک عدد ہے لہٰذا اس کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے، اور چونکہ اندرونی ضرب میں پہلا تفاعل مخلوط جوڑی دار ہے (مساوات 6.3) لہٰذا دائیں طرف q بھی جوڑی دار ہوگا)۔ تاہم $\langle f|f\rangle$ صفر نہیں ہو سکتا ہے (قوانین کے تحت $f(x) = 0$ امتیازی تفاعل نہیں ہو سکتا ہے) لہٰذا $q = q^*$ یعنی q حقیقی ہوگا۔

□

یہ باعث اطمینان ہے: تعیین حال میں ایک ذرہ کی قابل مشاہدہ کی پیمائش ایک حقیقی عدد دے گی۔

مسئلہ ۳.۲: انفرادی امتیازی اقدار کے متعلقہ امتیازی تفاعلات عمودی ہوں گے۔

ثبوت: درج ذیل کے ساتھ فرض کریں $\hat{Q}$ ہرمشی ہے۔

$$\hat{Q}f = qf \quad \text{اور} \quad \hat{Q}g = q'g$$

تب $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}f|g\rangle$ ہوگا لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$q'\langle f|g\rangle = q^*\langle f|g\rangle$$

(یہاں بھی چونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے اندرونی ضرب موجود ہوں گے۔) اب (مسئلہ ۳.۱ کے تحت) q حقیقی ہے، لہٰذا $q \neq q'$ کی صورت میں $\langle f|g\rangle = 0$ ہوگا۔

□

یہی وجہ ہے کہ لامتناہی چکور کنواں یا مثال کے طور پر ہارمونی مرتعش کے امتیازی حالات عمودی ہیں؛ یہ منفرد امتیازی اقدار والے ہیملٹنی کے امتیازی تفاعلات ہیں۔ تاہم یہ خاصیت صرف انہیں یا ہیملٹنی کے لئے مخصوص نہیں بلکہ کسی بھی قابل مشاہدہ کے تعیین حالات کی بھی ہوگی۔

[3] یہ وہ موقع ہے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ امتیازی تفاعلات ہلبرٹ فضا میں پائے جاتے ہیں۔ دیگر صورت اندرونی ضرب غیر موجود ہو سکتا ہے۔

بد قسمتی سے مسئلہ ۳.۲ ہمیں انحطاطی حالات $(q' = q)$ کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔ تاہم، اگر دو (یا دو سے زیادہ) امتیازی حالات ایک ہی (ایک دوسرے جیسا) امتیازی قدر رکھتے ہوں، تب ان کا ہر خطی جوڑ بھی اسی امتیازی قدر والا امتیازی حال ہو گا (سوال 7a.3) اور ہم **گرام شمد ترکیب عمودیت**[4] (سوال A4) استعمال کرتے ہوئے ہر ایک انحطاطی ذیلی فضا میں عمودی امتیازی تفاعلات تشکیل دے سکتے ہیں۔ اصولی طور پر ایسا کرنا ہر صورت ممکن ہو گا، تاہم (شکر اللہ کا) ہمیں عموماً ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ یوں انحطاط کی صورت میں بھی ہم عمودی امتیازی تفاعلات منتخب کر سکتے ہیں، اور کوانٹم میکانیات کے ضوابط طے کرتے ہوئے ہم فرض کریں گے کہ ہم ایسا کر چکے ہیں۔ یوں ہم فوریئر کی ترکیب استعمال کر سکتے ہیں جو اس تفاعلات کی معیاری عمودیت پر مبنی ہے۔

متناہی بعدی سمتی فضا میں ہرمشی قالب کے امتیازی سمتیات تیسری بنیادی خاصیت بھی رکھتے ہیں۔ یہ فضا کو احاطہ کرتے ہیں (یعنی ہر سمتیہ کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے)۔ بد قسمتی سے اس کے ثبوت کو لامتناہی بعدی فضاؤں تک وسعت نہیں دی جا سکتی ہے۔ تاہم یہ خاصیت کوانٹم میکانیات کی اندرونی ہم آہنگی کیلئے لازم ہے لہٰذا (ڈیراک کی طرح) ہم اسے ایک مسلمہ (بلکہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرنے والے ہرمشی عاملین پر اس کو مسلط شرط) لیتے ہیں۔

مسلمہ: قابل مشاہدہ کے امتیازی تفاعلات مکمل ہوں گے: (ہلبرٹ فضا میں) ہر تفاعل کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔[5]

سوال ۳.۱:

ا. فرض کریں کہ عامل $\hat{Q}$ کے دو امتیازی تفاعلات $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں اور ان دونوں کا امتیازی قدر q ہے۔ دکھائیں کہ f اور g کا ہر خطی جوڑ از خود $\hat{Q}$ کا امتیازی تفاعل ہو گا اور اس کا امتیازی قدر q ہو گا۔

ب. تصدیق کریں کہ $f(x) = e^{x}$ اور $g(x) = e^{-x}$ عامل $\mathrm{d}^2 / \mathrm{d}x^2$ کے امتیازی تفاعل ہیں اور ان کا امتیازی اقدار ایک دوسرے جیسا ہے۔ تفاعل f اور g کے ایسے دو خطی جوڑ تشکیل دیں جو وقفہ $(-1, 1)$ پر عمودی امتیازی تفاعلات ہوں۔

سوال ۳.۲:

ا. تصدیق کریں کہ مثال 1.3 میں ہرمشی عامل کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں۔ دکھائیں کہ (منفرد امتیازی اقدار کے) امتیازی تفاعلات عمودی ہیں۔

ب. یہی کچھ سوال 6.3 کے عامل کے لیے کریں۔

۳.۱.۲ استمراری طیف

ہرمشی عامل کا طیف استمراری ہونے کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ان کے اندرونی ضرب غیر موجود ہوں، لہٰذا مسئلہ ۳.۱ اور مسئلہ ۳.۲ کے ثبوت کارآمد نہیں ہوں گے اور امتیازی تفاعلات معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے۔

---

[4] Gram–Schmidt orthogonalization process

[5] چند مخصوص صورتوں میں مکملیت کو ثابت کیا جا سکتا ہے (مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ڈرشلے کے تحت، لامتناہی چکور کنواں کے ساکن حالات مکمل ہیں)۔ چند صورتوں میں قابل ثبوت پہلو کو مسلمہ کہنا درست نظر نہیں آتا لیکن مجھے اس سے بہتر اصطلاح نہیں ملی۔

اس کے باوجود ایک لحاظ سے تین لازم خصوصیات (حقیقی ہونا، عمودیت اور مکملیت) اب بھی کارآمد ہوں گے۔ اس پراسرار صورت کو ایک مخصوص مثال کی مدد سے سمجھنا بہتر ہو گا۔

مثال ۳.۱: معیار حرکت عامل کے امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقدار تلاش کریں۔

حل: فرض کریں کہ p امتیازی قدر اور $f_p(x)$ امتیازی تفاعل ہے۔

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x)=pf_p(x) \tag{۳.۱}$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$f_p(x)=Ae^{ipx/\hbar}$$

چونکہ p کی کسی بھی (مخلوط) قیمت کے لیے یہ قابل تکامل مربع نہیں ہے؛ معیار حرکت عامل کے ہلبرٹ فضا میں کوئی امتیازی تفاعلات نہیں پائے جاتے ہیں۔ اس کے باوجود، اگر ہم حقیقی امتیازی اقدار تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، ہمیں متبادل "معیاری عمودیت" حاصل ہوتی ہے۔ سوال ۲.۲۴-الف اور ۲.۲۶ کو دیکھ کر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_{p'}^{*}(x)f_p(x)\,\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(p-p')x/\hbar}\,\mathrm{d}x=|A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p') \tag{۳.۲}$$

اگر ہم $A=1/\sqrt{2\pi\hbar}$ لیں تب

$$f_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar} \tag{۳.۳}$$

لہٰذا

$$\langle f_{p'}|f_p\rangle=\delta(p-p') \tag{۳.۴}$$

ہو گا جو حقیقی معیاری عمودیت (مساوات 10.3) یاد دلاتی ہے؛ یہاں اشاریہ استمراری متغیرات ہیں، اور کرونیکر ڈیلٹا کی جگہ ڈیراک ڈیلٹا پایا جاتا ہے؛ تاہم ان کے علاوہ یہ ایک دوسرے جیسے نظر آتے ہیں۔ میں مساوات ۳.۴ کو **ڈیراک معیاری عمودیت**[۲] کہوں گا۔

سب سے اہم بات یہ ہے کہ یہ امتیازی تفاعلات **مکمل** ہیں اور ان کے مجموعہ (مساوات 11.3) کی جگہ اب تکمل استعمال ہوتا ہے: کسی بھی (قابل تکامل مربع) تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)f_p(x)\,\mathrm{d}p=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}c(p)e^{ipx/\hbar}\,\mathrm{d}p \tag{۳.۵}$$

---

[۲] Dirac orthonormality

پھیلاو عددی سر (جواب تفاعل $c(p)$ ہو گا) کو فوریئر ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\langle f_{p'}|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c(p)\langle f_{p'}|f\rangle \,\mathrm{d}p = \int_{\infty}^{\infty} c(p)\delta(p-p')\,\mathrm{d}p = c(p') \tag{۳.۶}$$

چونکہ یہ پھیلاو (مساوات ۳.۵) در حقیقت ایک فوریئر تبادل ہے لہٰذا انہیں مسئلہ پلانشرال (مساوات ۲.۱۰۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

معیار حرکت کے امتیازی تفاعلات (مساوات ۳.۳) سائن نما ہیں جن کی طول موج درج ذیل ہے۔

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{۳.۷}$$

یہ وہ ڈی بروگلی کلیہ (مساوات ۱.۳۹) ہے جس کا ثبوت موزوں وقت پر پیش کرنے کا وعدہ میں نے کیا تھا۔ یہ کلیہ ڈی بروگلی کے تصور سے زیادہ پر اسرار ہے، چونکہ ہم اب جانتے ہیں کہ حقیقت میں ایسا کوئی ذرہ نہیں پایا جاتا جس کا معیار حرکت تعیین ہو۔ ہاں ہم تنگ سعت کی معیار حرکت کا ایسا موجی اکٹھ تشکیل دے سکتے ہیں جو معمول پر لانے کے قابل ہو اور جس پر ڈی بروگلی کا تعلق لاگو ہو گا۔

ہم مثال ۳.۱ سے کیا مطلب لیں؟ اگرچہ $\hat{p}$ کا کوئی بھی امتیازی تفاعل ہلبرٹ فضا میں نہیں رہتا، ان کا ایک مخصوص کنبہ (جن کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے) قریبی "مضافات" میں رہتے ہیں اور یہ بظاہر معمول پر لانے کے قابل ہیں۔ یہ طبعی طور پر ممکنہ حالات کو ظاہر نہیں کرتے لیکن اس کے باوجود کارآمد ثابت ہوتے ہیں (جیسا ایک بعدی بکھراو پر غور کے دوران ہم نے دیکھا)۔[7]

مثال ۳.۲: حامل مقام کے امتیازی اقدار اور امتیازی تفاعل تلاش کریں: حل فرض کریں کہ y امتیازی قدر اور $g_y(x)$ امتیازی تفاعل ہے

$$xg_y(x) = yg_y(x) \tag{۳.۸}$$

یہاں کسی بھی ایک امتیازی تفاعل کے لیے y ایک مقررہ عدد ہے جبکہ x استمراری تغیر ہے۔ x کا کون سا ایسا تفاعل ہے کہ جس کی یہ خاصیت ہے کہ اس کو x سے ضرب دینا اس کے مترادف ہے کہ اس کو y سے ضرب دیا گیا ہو؟ ظاہر ہے کہ ماسوائے نکتہ $y = x$ کے یہ صفر ہی ہو گا در حقیقت یہ ڈیراک ڈیلٹا تفاعل ہے

$$g_y(x) = A\delta(x-y)$$

[7] غیر حقیقی امتیازی اقدار والے امتیازی تفاعلات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ یہ نا صرف معمول پر لانے کے قابل نہیں بلکہ $\pm\infty$ پر بے قابو بڑھتے ہیں۔ اس خطہ میں، جس کو میں "مضافات" کہہ چکا ہوں، اگرچہ تفاعلات کا اپنا (متناہی) اندرونی ضرب نہیں پایا جاتا، تاہم یہ ہلبرٹ فضا میں تمام ارکان کے ساتھ اندرونی ضرب دیتے ہیں۔ ایسا $\hat{p}$ کے ان امتیازی تفاعلات کے لئے درست نہیں ہو گا جن کے امتیازی اقدار غیر حقیقی ہوں۔ بالخصوص، میں دکھا چکا ہوں کہ ہلبرٹ فضا میں تفاعلات کے لئے معیار حرکت عامل ہرمشی ہو گا، اگرچہ اس کا دلیل پیش کرتے ہوئے (مساوات 9.3 میں) سرحدی جزو کو رد کیا گیا۔ (جب تک f ہلبرٹ فضا میں پایا جاتا ہو) یہ رکن تب بھی صفر ہو گا جب $\hat{p}$ کا امتیازی تفاعل g ہو جس کا امتیازی قدر حقیقی ہو، تاہم امتیازی قدر کا خیالی حصہ ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ اس نقطہ نظر سے ہر مخلوط عدد، عامل $\hat{p}$ کا امتیازی قدر ہو گا، تاہم صرف حقیقی اعداد ہرمشی عامل $\hat{p}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے؛ باقی اعداد اس خطہ سے باہر پائے جائیں گے جس میں $\hat{p}$ ہرمشی ہو۔

اس بار؟؟؟ اقدار کو لازماً حقیقی ہونا ہو گا: امتیازی تفاعل قابل تکمل مربع نہیں ہیں لیکن اب بھی یہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^* g_y(x)dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y')\delta(x-y)dx = |A|^2\delta(y-y') \tag{۳.۹}$$

اگر ہم $A = 1$ لیں تاکہ

$$g_y(x) = \delta(x-y) \tag{۳.۱۰}$$

درج ذیل ہو گا

$$\langle g_{y'}|g_y\rangle = \delta(y-y') \tag{۳.۱۱}$$

یہ آئیگنی تفاعل بھی مکمل ہیں

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)g_y(x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\delta(x-y)dy, \tag{۳.۱۲}$$

جہاں درج ذیل ہو گا

$$c(y) = f(y) \tag{۳.۱۳}$$

جس کا حصول اس مثال میں بہت سادہ تھا آپ اس کو فوریئر کی ترکیب سے بھی حاصل کر سکتے ہیں □

اگر ایک ہر مشی عامل کا طیف استمراری ہو تاکہ اس کے امتیازی اقدار کو استمراری متغیر کو یا سے نام دیا جائے جیسا کہ اس مثال میں کیا گیا تب اس کے امتیازی تفاعل معمول پر لانے کے قابل نہیں ہوں گے، یہ ہلبرٹ فضا میں نہیں پائے جائیں گے اور یہ ممکنہ کسی بھی طبعی حالت کو ظاہر نہیں کرتے ہیں ہاں جن امتیازی تفاعل کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں وہ ڈیراک معیاری عمودیت پر پورا اترتے ہیں اور مکمل ہیں جہاں مجموعہ کی جگہ اب تکمل استعمال ہو گا۔ خوش قسمتی سے ہمیں صرف اتنا ہی چاہیے تھا سوال ۳.۳:

ا. ہارمونی مرتعش کے علاوہ باب 2 سے ایک ایسا ہیملٹنی بتائیں جس کا طیف صرف غیر مسلسل ہو

ب. آزاد ذرہ کے علاوہ باب 2 سے ایسے ہیملٹنی بتائیں جس کا طیف صرف استمراری ہے

ج. متناہی چکور کنواں کے علاوہ باب 2 سے ایسا ہیملٹنی بتائیں جس کے طیف کا کچھ حصہ غیر مسلسل اور کچھ استمراری ہے

سوال ۳.۴: کیا لامتناہی چکور کنواں کا زمینی حال معیار حرکت کا امتیازی تفاعل ہے؟ اگر ایسا ہے تو اس کا معیار حرکت کیا ہو گا اور اگر ایسا نہیں ہے تو کیوں نہیں ہے؟

سوال ۳.۵: توانائی اور وقت کی عدم یقینیت کے اصول کی ایک دلچسپ روپ $\Delta t = \tau/\pi$ ہے جہاں ابتدائی حال $\Psi(x,0)$ کے عموری حال تک ارتقا کے لیے درکار وقت τ ہے۔ دو معیاری عموری ساکن حالات کے دو برابر حصوں پر مشتمل اختیاری مخفی قوہ $\Psi(x,0) = 1/\sqrt{2}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ کا تفاعل موج استعمال کرتے ہوئے اس کی جانچ پڑتال کریں۔

سوال ۳.۶: ہارمونی مرتعش کی ساکن حالات کی معیاری عموری اساس مساوات 67.2 میں $\langle n|x|n'\rangle$ اور $\langle n|p|n'\rangle$ تلاش کریں۔ آپ سوال 12.2 میں $n' = n$ تلاش کر چکے ہیں۔ وہی ترقیب موجودہ عمومی مسئلے میں استعمال کریں۔ متکانی لامتناہی X اور P تلاش کریں۔ دکھائیں کہ اس اساس میں $\mathrm{H} = (1/2m)\mathrm{P}^2 + (m\omega^2/2)\mathrm{X}^2$ وتری ہے۔ کیا اس کے وتری ارکان آپ کے توقع کے مطابق ہیں۔ جزوی جواب

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$$

سوال ۳.۷: ایک ہارمونی مرتعش ایسی حال میں ہے کہ اس کی توانائی کو پیمائش $(1/2)\hbar\omega$ یا $(3/2)\hbar\omega$ ایک دوسرے جیسے احتمال کے ساتھ دے گی۔ اس حال میں $\langle p\rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت کیا ہو گی۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس کی $\langle p\rangle$ کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت ہو تو $\Psi(x,t)$ کیا ہو گا۔

سوال ۳.۸: 35-3
ہارمونی مرتعش کے منطقی حالات۔
ہارمونی مرتعش کے ساکن حالات $|n\rangle = \psi_n(x)$ مساوات 67.2 میں صرف $n = 0$ عین عدم یقینیت کی حد $\hbar/2$ $= \sigma_x\sigma_p$ پر بیٹھتا ہے جیسا آپ سوال 12.3 میں معلوم کر چکے ہیں عمومی طور پر $\sigma_x\sigma_p = (2n + 1)\hbar/2$ ہو گا۔ تاہم چند خطی جوڑ جنہیں منطقی حالات کہتے ہیں بھی عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو کم سے کم کرتے ہیں جیسا ہم دیکھتے ہیں یہ عامل سس تکیل کے امتیازی تفاعل ہوتے ہیں۔

$$a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

جہاں امتیازی α کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔
جز الف
حال $\langle\alpha|$ میں $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ دریافت کریں۔ مثال 5.2 کی ترقیب استعمال کیں۔ اور یاد رکھیں کہ a_- منفی کا پرمش جوڑی دار a_+ ہے ساتھ ہی یہ فرض نہ کریں کہ α حقیقی ہے۔
جز (ب)
σ_x اور σ_p تلاش کریں۔ دکھائیں کہ $\sigma x\sigma p = \hbar/2$ ہو گا۔
جز (ج)
کسی بھی دوسرے تفاعل موج کی طرح منطقی حال کو توانائی امتیازی حالات کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

رکھائیں کہ پھیلاو کے عددی سر درج ذیل ہونگے۔

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

جز (د)
$|\alpha\rangle$ کو معمول پر لاتے ہوئے c_0 تعین کریں۔ جواب $\exp(-|\alpha|^2 / 2)$
جز (ح)
اس کے ساتھ وقت کی تابعیت

$$|n\rangle \to e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

منسلک کرکے دکھائیں کہ $\langle \alpha(t) |$ اب بھی $a-$ کا امتیازی حال ہوگا لیکن وقت کے ساتھ امتیازی قیمت ارتقا پزیر ہوگا

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

یوں منطقی حال ہمیشہ منطقی حال ہی رہے گا اور عدم یقینیت کے حاصل ضرب کو تم سے کم برقرار رکھا ہے۔
جز (و) کیا زمینی حال $\langle 0 = n|$ از خود منطقی حال ہے اگر ایسا ہو تب امتیازی قدر کیا ہوگا

سوال ۳.۹: 36.3
مقصود عدم یقینیت کا اصول:
عمومی عدم یقینیت کا اصول مساوات 62.3 درج ذیل کہتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C^2 \rangle$$

جہاں

$$\hat{C} \equiv i[\hat{A}, \hat{B}]$$

ہے
جز الف
دکھائے کہ اس کو زیادہ مستحکم کرتے ہوئے درج ذیل روٹ میں لکھا جا سکتا ہے

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} (\langle C \rangle^2 + \langle D \rangle^2)$$

جہاں $\hat{D} \equiv \hat{AB} + \hat{BA} + 2\langle A \rangle \langle B \rangle$ ہوگا
اشارہ: مساوات 60.3 میں $\text{Re}(z)$ اجزاہ لیں
ب)
مساوات 99.3 کو A=B کے لئے جانچیں چونکہ اس صورت میں C=0 ہے لہذا معیاری عدم یقینیت غیر اہم ہوگا

بدقسمتی سے مقصود عدم یقینیت کا اصول بھی زیادہ مدد گار ثابت نہیں ہوتا

سوال ۳.۱۰: 37.3
ایک نظام جو 3 صدی ہے کہ ہیملٹنین کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

جہاں c اور b,a حقیقی اعداد ہیں۔
ا) اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تب $\delta(t)$ کیا ہو گا؟
ب) اگر اس نظام کا ابتدائی حال درج ذیل ہو

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تب δt کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۱: 38.3
ایک نظام جو 3 صدی ہے کہ ہیملٹونین کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

دیگر دو قابل مشاہدہ B اور A کو درج ذیل کا الف ظاہر کرتی ہے

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں λ, ω اور μ حقیقی مثبت اعداد ہیں۔
AH، اور B کی امتیازی اقدار اور معمول پر لائے گئے امتیازی تفاعل تلاش کریں۔
ب) یہ نظام کسی عمومی حال

$$|\delta(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سے ابتداء کرتا ہے جہاں $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ ہے۔
لمحہ t=0 پر B اور A, کی H توقعاتی قیمت تلاش کریں۔
ج) $\delta(s)$ کیا ہوگا؟ لمحہ t پر اس نظام کی توانائی کی پیمائش کیا قیمتیں دے سکتی ہے؟ اور ہر ایک کا انفرادی احتمال کیا ہوگا؟ اسی سوال کے جوابات B اور A کے لیے بھی تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۲: 39.3: ا) ایک تفاعل $f(x)$ جس کو Taylor تسلسل کی صورت میں پھیلایا جا سکتا ہے کے لیے درج ذیل دکھائیں:

$$f(x+x_0) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} f(x)$$

جہاں x_0 کوئی بھی مستقل فاصلہ ہو سکتا ہے۔ اسی وجہ کے بنا $\hat{p}/\hbar$ کو فضا میں انتقال کا پیدا کار کہتے ہیں۔ یہاں دیہان رہے کہ ایک عامل کی قوت نمائی کی قوتی تسلسلی پھیلاؤ کی تعریف درج ذیل ہے
$$e^{\hat{Q}} = 1 + \hat{Q} + (1/2)\hat{Q}^2 + (1/3!)\hat{Q}^3 + \dots$$
ب) اگر $\Psi(x,t)$ وقت تابع schrodinger مساوات کو مطمئن کرتا ہو تب درج ذیل دکھائیں

$$\Psi(x, t+t_0) = e^{-i\hat{\mathrm{H}}t_0/\hbar}\Psi(x,t)$$

جہاں t_0 کوئی بھی مستقل وقت ہوگا۔ اسی وجہ کی بنا $\hat{\mathrm{H}}/\hbar-$ وقت میں انتقال کا پیدا کار کہتے ہے۔
ج) دکھائیں کے لمحہ $t+t_0$ پر ہر کی متغیر Q کی توقعاتی قیمت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\langle Q\rangle_{t+t_0} = \langle\Psi(x,t)|e^{i\hat{\mathrm{H}}t_0/\hbar}\hat{Q}(x,p,t+t_0 e^{-i\hat{\mathrm{H}}t_0/\hbar}|\Psi(x,t)\rangle$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 3-71 حاصل کریں۔
اشارہ: $t_0 = \mathrm{d}t$ لیتے ہوئے dt میں پہلے رتبے تک پھیلائیں۔

سوال ۳.۱۳: 3-40:
ا) ایک آزاد ذرہ کے لیے وقت تابع schrodinger مساوات کو معیار حرکت فضا میں لکھ کر حل کریں۔ جواب: $(\exp(-ip^2t/2m\hbar)\Phi(p,0$
ب) متحرک گاسی موجی اکٹھ سوال 2-43 کے لیئے $\Phi(p,0)$ تلاش کریں اور $\Phi(p,t)$ تیار کریں۔ ساتھ ہی $|\Phi(p,t)|^2$ تیار کریں۔ اب دیکھیں گے کہ یہ وقت کا تابع نہیں ہوگا۔
ج) Φ پر مبنی موضوع تکملات حل کرتے ہوئے $\langle p\rangle$ اور $\langle p^2\rangle$ تلاش کر کے سوال 2-43 کی حاصل کردہ جوابات کے

ساتھ موازنہ کریں۔

د) دکھائیں کہ $\langle H \rangle = \langle p \rangle^2/2m + \langle H \rangle_0$ ہو گا جہاں زیر نوشت میں 0 ساکن گاسی کو ظاہر کرتا ہے اور اپنے نتیجے پہ تبصرہ کریں۔

جوابات