

کوانٹم میکانیٹ

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمول زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متابیح وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۲	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۴	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۳	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۶۰	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۷۰	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفہ
۷۰	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۲	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۱	۲.۶	۶. مستثنائی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۳
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجدی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۴	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۷	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۵	متناثر ذرات	۵
۲۰۵	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۷	پوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۰	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۵	جوہر	۵.۲
۲۱۶	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۹	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۳	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۳	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۲۹	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۶	کوانٹائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۶	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۹	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۲	سب سے زیادہ مختل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۵	α اور β کی طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۴۹	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۵	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۷	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۱	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۲	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۲	دوپڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۷	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۲	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۷۳	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۶	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۲	زیمان اثر	۶.۴
۲۸۲	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۸۳	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۸۶	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۸۸	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۹۹	تغیری اصول	۷
۲۹۹	نظریہ	۷.۱
۳۰۳	ہیلمی کا زینینی حال	۷.۲
۳۰۹	ہائیڈروجن سال باردار یہ	۷.۳
۳۱۹	ونزل و کراسر زویرلوان تخمین	۸
۳۲۰	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۲۵	سرنگزنی	۸.۲
۳۲۸	کلیات پیوند	۸.۳
۳۴۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۴۲	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۴۲	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۴۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۴۷	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۵۰	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۵۰	برقن طیلی امواج	۹.۲.۱
۳۵۱	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود پا خود احسراج	۹.۲.۲
۳۵۲	غیر اتاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۵۴	خود با خود احسراج	۹.۳
۳۵۴	آمنطائن A اور B عددی سر	۹.۳.۱
۳۵۶	ہیجان حال کا عرصہ حیات	۹.۳.۲
۳۵۹	قواعد انتخاب	۹.۳.۳
۳۶۹	حرارت ناگزیر تخمین	۱۰
۳۶۹	مسئلہ حرارت ناگزیر	۱۰.۱
۳۶۹	حرارت ناگزیر عمل	۱۰.۱.۱
۳۷۲	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت	۱۰.۱.۲
۳۷۷	ہیت بیری	۱۰.۲
۳۷۷	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۷۹	ہندی ہیت	۱۰.۲.۲
۳۸۴	اہارو نوو پوہم اثر	۱۰.۲.۳
۳۹۳	بکھراؤ	۱۱
۳۹۳	تعارف	۱۱.۱
۳۹۳	کلاسیکی نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۱
۳۹۷	کوانٹم نظریہ بکھراؤ	۱۱.۱.۲
۳۹۸	حبزوی موج تجزیہ	۱۱.۲
۳۹۸	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۴۰۱	الایا عمل	۱۱.۲.۲
۴۰۴	میتقلات حیط	۱۱.۳
۴۰۷	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۰۷	مسادات شروڈنگر کی تکمیلی روپ	۱۱.۴.۱
۴۱۱	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۱۶	شسل بارن	۱۱.۴.۳
۴۱۹	پس نوشت	۱۲
۴۲۰	آمنطائن پوڈ لکیوروزن تضاد	۱۲.۱
۴۲۱	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۲۶	مسئلہ کلیہ	۱۲.۳
۴۲۷	شروڈنگر کی بلی	۱۲.۴
۴۲۸	کوانٹم زینو تضاد	۱۲.۵
۴۳۱	جوابات	
۴۳۳	خطی الجبرا	۱
۴۳۳	سمتیات	۱.۱
۴۳۳	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۳۴	قتالب	۳.۱

۴۳۴	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۳۴	امتیازی تفاعلات اور امتیازی اقتدار	۵.۱
۴۳۴	هر مشی تبادلے	۶.۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۶

غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

۶.۱ غیر انخطاطی نظریہ اضطراب

۶.۱.۱ عمومی ضابطہ بندی

فرض کریں ہم کسی مخفیہ (مثلاً ایک بعدی لامتناہی چوکور کنویں) کے لئے غیر تابع وقت مساوات شروڈنگر:

$$(۶.۱) \quad H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

حل کر کے معیاری عمودی امتیازی تفاعلات ψ_n^0 کا مکمل سلسلہ

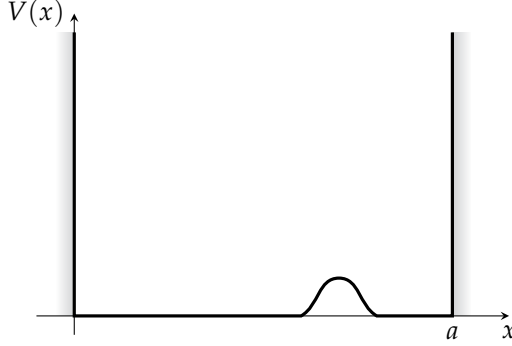
$$(۶.۲) \quad \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = \delta_{nm}$$

اور ان کی مطابقتی امتیازی افتدار E_n^0 حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم مخفیہ میں معمولی اضطراب پیدا کرتے ہیں (مثلاً کنویں کی تہہ میں ایک چھوٹا موڑ ڈال کر؛ شکل ۶.۱) ہم نئے امتیازی تفاعلات اور امتیازی افتدار جاننا چاہیں گے

$$(۶.۳) \quad H \psi_n = E_n \psi_n$$

تاہم ہماری خوش قسمتی کے علاوہ ایسی کوئی وجہ نہیں پائی جاتی کہ ہم اس پیچیدہ مخفیہ کے لیے مساوات شروڈنگر کو بالکل ٹھیک ٹھیک حل کر سکیں۔ نظریہ اضطراب، غیر مضطرب صورت کے معلوم ٹھیک ٹھیک حلوں کو لے کر، قدم بدم قدم چلتے ہوئے مضطرب مسئلے کے تخمینی حل دیتا ہے۔ ہم نئے ہیملٹنی کو دو اجزاء کا مجموعہ:

$$(۶.۴) \quad H = H^0 + \lambda H'$$



شکل ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں میں معمولی اضطراب

لکھ کر آغاز کرتے ہیں، جہاں H' اضطراب ہے (زیر بالا میں 0 ہمیشہ غیر مضطرب مقدار کو ظاہر کرتا ہے)۔ ہم وقتی طور پر λ کو ایک چھوٹا عدد تصور کرتے ہیں؛ بعد میں اس کی قیمت کو بڑھا کر ایک (1) کر دی جائے گی، اور H اصل ہیملٹنی ہوگی۔ اگلے قدم میں، ہم ψ_n اور E_n کو λ کی وقتی تسلسل کے صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(۶.۵) \quad \psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$(۶.۶) \quad E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

یہاں n ویں امتیازی مقدار کی قیمت میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو E_n^1 ظاہر کرتا ہے جبکہ n ویں امتیازی تفاعل میں **اولیٰ رتبہ** تصحیح کو ψ_n^1 ظاہر کرتا ہے؛ اسی طرح E_n^2 اور ψ_n^2 دوم رتبہ تصحیح ہوں گی، وغیرہ۔ مساوات ۶.۵ اور مساوات ۶.۶ کو مساوات ۶.۳ میں پر کر کے

$$\begin{aligned} (H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \\ = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots)[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots] \end{aligned}$$

یا λ کے ایک جیسے طاقتوں کو اکٹھا لکھ کر (درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} H^0 \psi_n^0 + \lambda (H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0) + \lambda^2 (H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1) + \dots \\ = E_n^0 \psi_n^0 + \lambda (E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0) + \lambda^2 (E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0) + \dots \end{aligned}$$

کمتر رتبہ (λ^0) کی صورت میں اس سے $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$ حاصل ہوتا ہے، جو نئی مساوات نہیں ہے (مساوات ۶.۱)۔ رتبہ اول (λ^1) تک درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۷) \quad H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

ہمیشہ کی طرح، وقتی تسلسل پھیلاؤ کی یکسانی مناسبت دیتی ہے کہ ایک جسمی طاقت کے عددی سرا ایک جیتے ہوں گے۔

رتبہ دوم (λ^2) تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸) \quad H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

وغیرہ۔ (رتبہ پر نظر رکھنے کی غرض سے ہم نے λ استعمال کیا؛ اب اس کی کوئی ضرورت نہیں لہذا اس کی قیمت ایک، 1، کر دیں۔)

۶.۱.۲ اول رتبی نظریہ

مسوات ۶.۷ کا ψ_n^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں (یعنی $(\psi_n^0)^*$ سے ضرب دے کر عمل لیتے ہیں)۔

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

تاہم H^0 ہر مشی ہے لہذا

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^1 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

ہوگا، جو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کو حذف کرے گا۔ مزید $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$ کی بنا پر درج ذیل ہوگا۔^۲

$$(۶.۹) \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یہ رتبہ اول نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے؛ بلکہ عملاً یہ پوری کوانٹائی میکانیات میں غالب سب سے اہم مساوات ہے۔ یہ کہتی ہے کہ غیر مضطرب حال میں اضطراب کی توقعاتی قیمت، توانائی کی اول رتبی تصحیح ہوگی۔

مثال ۶.۱: لامتناہی چوکور کنویں کے غیر مضطرب تفاعلات موج (مساوات ۲.۲۸) درج ذیل ہیں۔

$$\psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

فرض کریں ہم کنویں کی ”تہ“ (زمین) کو مستقل مقدار V_0 اوپر اٹھاتے ہوئے اس نظام کو مضطرب کرتے ہیں (شکل ۶.۲)۔ توانائیوں میں رتبہ اول تصحیح تلاش کریں۔

حل: یہاں $H' = V_0$ ہوگا لہذا n ویں حال کی توانائی میں رتبہ اول تصحیح درج ذیل ہوگی۔

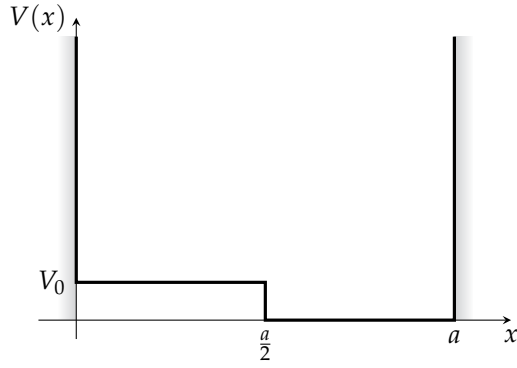
$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | V_0 | \psi_n^0 \rangle = V_0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = V_0$$

یوں تصحیح شدہ توانائیوں کی سطحیں $E_n \cong E_n^0 + V_0$ ہوں گی؛ جی ہاں، تمام V_0 مقدار اوپر اٹھتی ہیں۔ یہاں حیرانگی کی بات صرف یہ ہے کہ رتبہ اول نظریہ بالکل ٹھیک جواب دیتا ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ مستقل اضطراب کی

^۲ موجودہ سیاق و سباق میں $\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$ یا $\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$ (جس میں انتہائی لکیری شامسل کی گئی ہے) لکھنے میں کوئی مندرج نہیں، چونکہ ہم حال کو نفس عمل موج کے لحاظ سے ”نام“ دیتے ہیں۔ لیکن مومنہ الذکر علامتی اظہار زیادہ بہتر ہے، چونکہ یہ ہمیں اس روایت سے آزاد کرتا ہے۔



شکل ۶.۲: پورے کنویں میں مستقل اضطراب



شکل ۶.۳: نصف کنویں میں مستقل اضطراب

صورت میں تمام بلند رتبی تصحیح صفر ہوں گی۔ اس کے برعکس کنویں کی نصف چوڑائی تک اضطراب کی وسعت کی صورت (شکل ۶.۳) میں درج ذیل ہوگا۔

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = \frac{V_0}{2}$$

اب توانائی کی ہر سطح $\frac{V_0}{2}$ اوپر اٹھتی ہے۔ یہ غالباً بالکل ٹھیک نتیجہ نہیں، تاہم اول رتبی تخمین کے نقطہ نظر سے معقول ہے۔

□

کیساں کوئی ہی چیز لامتناہی چو کور کنویں کی خصوصیات پر منحصر نہیں ہے، لہذا اپنی کچھ کمی بھی مخفیہ کے لیے مستقل اضطراب کی صورت میں درست ہوگا۔

مساوات ۶.۹ ہمیں توانائی کی اول رتبی تصحیح دیتا ہے؛ تفاعل موج کے لئے اول رتبی تصحیح حاصل کرنے کی ضرورت ہے ہم مساوات ۶.۷ کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(H^0 - E_n^0)\psi_n^1 = -(H' - E_n^1)\psi_n^0 \quad (۶.۱۰)$$

چونکہ اس کا دایاں ہاتھ ایک معلوم تفاعل ہے، لہذا یہ ψ_n^1 کی غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب غیر مضطرب تفاعلات موج ایک مکمل سلسلہ دیتے ہیں، لہذا (کسی بھی تفاعل کی طرح) ψ_n^1 کو ان کا خطی جوڑ:

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۱)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر ψ_n^1 مساوات ۶.۱۰ کو مطمئن کرتے ہوں تب کسی بھی مستقل α کے لیے $(\psi_n^1 + \alpha \psi_n^0)$ بھی اس مساوات کو مطمئن کریں گے، لہذا ہم جزو ψ_n^0 کو منفی کر سکتے ہیں؛ ایسا ہی کرتے ہوئے مساوات ۶.۱۱ کے مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں کیا گیا۔ عددی سر $c_m^{(n)}$ تعین کر کے ہم مسئلہ حل کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۶.۱۰ میں مساوات ۶.۱۱ پر کرتے ہوئے، اور یہ جانے ہوئے کہ غیر مضطرب مساوات شرودنگر (مساوات ۶.۱) کو ψ_m^0 مطمئن کرتے ہیں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

اس کا ψ_l^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_l^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^0 | \psi_n^0 \rangle$$

اگر $l = n$ ہو تب باایاں ہاتھ صفر ہوگا اور ہمیں دوبارہ مساوات ۶.۹ ملتی ہے؛ اگر $l \neq n$ ہو تو

$$(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} = -\langle \psi_l^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

یا

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad (۶.۱۲)$$

ہوگا، لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0 \quad (۶.۱۳)$$

جب تک غیر مضطرب توانائی طیف غیر انخطاطی ہو، نسب نہ کوئی مسئلہ کھڑا نہیں کرتا (چونکہ کسی بھی عددی سر کے لئے $m = n$ نہیں ہوگا)۔ ہاں اگر دو غیر مضطرب حالات کی توانائیاں ایک جتنی ہوں (مساوات ۶.۱۲ کے نسب نہ میں صفر پایا جائے گا) تب نسب نہ ہمیں مصیبت میں ڈالتا ہے؛ ایسی صورت میں انخطاطی نظریہ اضطراب کی ضرورت پیش آئے گی، جس پر حصہ ۶.۲ میں غور کیا جائے گا۔

یوں اول رتبی نظریہ اضطراب مکمل ہوتا ہے۔ توانائی کی اول رتبی تصحیح، E_n^1 ، مساوات ۶.۹ دیتی ہے، اور تقاضا عمل موج کی اول رتبی تصحیح، ψ_n^1 ، مساوات ۶.۱۳ دیتی ہے۔ میں آپ کو یہاں یہ ضرورت ناپا ہوں گا کہ اگرچہ نظریہ اضطراب عموماً توانائیوں کی انتہائی درست قیمتیں دیتا ہے (یعنی $E_n^0 + E_n^1$ اصل قیمت E_n کے بہت قریب ہوگی)، اس سے حاصل تقاضا موج عموماً افسوس کن ہوتے ہیں۔

سوال ۶.۱: فرض کرے ہم لامتناہی چوکور کنویں کے وسط میں δ تقاضا علی موڑا:

$$H' = \alpha \delta \left(x - \frac{a}{2} \right)$$

ڈالتے ہیں، جہاں α ایک مستقل ہے۔

ا. احبازتی توانائیوں کی اول رتبی تصحیح تلاش کریں۔ بتائیں جفت n کی صورت میں توانائیاں کیوں مضطرب نہیں۔

ب. زمینی حال کی تصحیح، ψ_1^1 ، کی اتساع (مساوات ۶.۱۳) کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۶.۲: ہارمونی مرتعش $[V(x) = \frac{1}{2}kx^2]$ کی احبازتی توانائیاں درج ذیل ہیں

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

جہاں $\omega = \sqrt{k/m}$ کلاسیکی تعدد ہے۔ اب فرض کریں مقیاس پلک میں معمولی تبدیلی رونما ہوتی ہے: $k \rightarrow (1 + \epsilon)k$ (جس سے اسپرنگ کی پلک کم ہوگی)۔

ا. نئی توانائیوں کی بالکل ٹھیک ٹھیک قیمتیں حاصل کریں (جو یہاں ایک آسان کام ہے)۔ اپنے کلیہ کو دوم رتبہ تک ϵ کی طاقتیں تسلسل میں پھیلائیں۔

ب. اب مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے توانائی میں اول رتبی اضطراب کا حساب لگائیں۔ یہاں H' کیا ہوگا؟ اپنے نتیجے کا جبزو-۱ کے ساتھ موازنہ کریں۔ اشارہ: یہاں کسی نئے مکمل کی قیمت کے حصول کی ضرورت اور نہ احبازت ہے۔

سوال ۶.۳: ایک لامتناہی چوکور کنویں (مساوات ۲.۱۹) میں دو یکساں بوسن رکھے جاتے ہیں۔ یہ مخفیہ

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

(جہاں V_0 ایک مستقل جس کا بعد توانائی ہے اور a کنویں کی چوڑائی ہے) کے ذریعے ایک دوسرے پر بہت معمولی اثر انداز ہوتے ہیں۔

ا. پہلے قدم میں، ذرات کے باہمی اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے، زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کے تفاعلات موج اور مطابقتی توانائیاں تلاش کریں۔

ب. زمینی حال اور پہلے ہیجان حال کی توانائیوں پر ذرات کے باہمی اثر کا تخمینہ اول رتبہ نظریہ اضطراب سے دریافت کریں۔

۶.۱.۳ دوم رتبہ توانائیاں

اسی طرح بڑھتے ہوئے، ہم ψ_n^0 اور دور تہی مساوات (مساوات ۶.۸) کا اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

یہاں بھی ہم H^0 کے ہر مشین کو بروئے کار لاتے ہیں:

$$\langle \psi_n^0 | H^0 \psi_n^2 \rangle = \langle H^0 \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle$$

لہذا بائیں ہاتھ کا پہلا جزو دائیں ہاتھ کے پہلے جزو کے ساتھ کٹ جائے گا۔ ساتھ ہی $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$ ہے لہذا E_n^2 کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۶.۱۴) \quad E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$$

تاہم مجموعہ میں $m = n$ شامل نہیں اور باقی تمام عمودی ہیں لہذا

$$\langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 0$$

ہوگا جس کی بنا پر

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

یا

$$(۶.۱۵) \quad E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

ہوگا۔ یہ دور تہی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے۔

اگرچہ ہم اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے تفاعل عمل موج (ψ_n^2) کی دوم رتبی تصحیح، توانائی کی سوم رتبی تصحیح، وغیرہ حاصل کر سکتے ہیں، لیکن عملاً اس ترکیب کو صرف مساوات ۶.۱۵ تک استعمال کرنا سودمند ہوگا۔^۵

سوال ۶.۴:

۱. توانائیوں کی دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۱ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تبصرہ: آپ تسلسل کا مجموعہ صریحاً حاصل کر کے طاق n کیلئے $2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ حاصل کر سکتے ہیں۔

ب. زمینی حال توانائی کے لئے دوم رتبی تصحیح (E_n^2)، سوال ۶.۲ کے مخفیہ کے لیے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ آپ کا نتیجہ بالکل درست نتیجے کے مطابق ہے۔

سوال ۶.۵: ایک ایسے باردار ذرہ پر غور کریں جو ایک بعدی ہارمونی ارتعاشی مخفیہ میں پایا جاتا ہو۔ فرض کریں ہم ایک کمزور برقی میدان (E) چلا کر دیتے ہیں جس کی بنا پر مخفی توانائی میں $H' = qEx$ متغیر کی تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

۱. دکھائیں کہ توانائیوں کی دو سطحوں میں کوئی اول رتبی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دور رتبی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: سوال ۳.۳۳ دیکھیں۔

ب. تبدیلی متغیرات $x' \equiv x - (qE/m\omega^2)$ استعمال کرتے ہوئے موجودہ صورت میں مساوات شروع کر کے حل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ٹھیک ٹھیک توانائیاں تلاش کر کے دکھائیں کہ یہ نظریہ اضطراب کی تخمین کے مطابق ہیں۔

۶.۲ انحطاطی نظریہ اضطراب

اگر غیر مضطرب حالات انحطاطی ہوں؛ یعنی، دو (یا دو سے زیادہ) منفرد حالات (ψ_a^0 اور ψ_b^0) کی توانائیاں ایک جیسی ہوں، تب یہ نظریہ اضطراب غیر کارآمد ہوگا، چونکہ $c_a^{(b)}$ (مساوات ۶.۱۲) اور E_a^2 (مساوات ۶.۱۵) بے تابو بڑھتے ہیں (ماسوائے اس صورت میں جب شمار کنندہ صفر ہو: $\langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = 0$)؛ اس پوشیدہ صورت کو ہم بعد میں استعمال کریں گے۔ یوں انحطاطی صورت میں ہمیں توانائیوں کی اول رتبی تصحیح (مساوات ۶.۹) پر بھی یقین نہیں کرنا چاہیے اور ہمیں مسئلے کا کوئی دوسرا حل ڈھونڈنا ہوگا۔

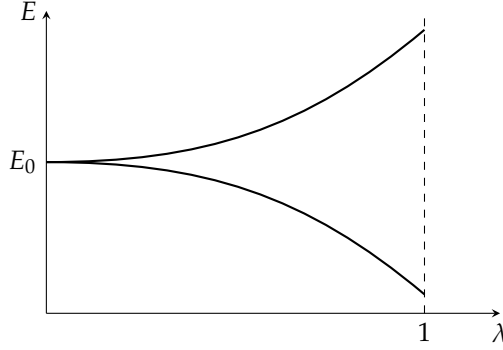
۶.۲.۱ دو پڑتا انحطاط

درج ذیل فرض کریں جہاں ψ_a^0 اور ψ_b^0 معمول شدہ ہیں۔

$$(۶.۱۶) \quad H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0, \quad H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0, \quad \langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = 0$$

^۵ مختصر انداز لکھائی میں $\Delta_{mn} \equiv E_m^0 - E_n^0$ اور n ویں توانائی کی پہلی تین تصحیح درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n^1 = V_{nn}, \quad E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}}, \quad E_n^3 = \sum_{l, m \neq n} \frac{V_{nl} V_{lm} V_{mn}}{\Delta_{nl} \Delta_{nm}} - V_{nn} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{\Delta_{nm}^2}$$



شکل ۶.۲: انخطاط کا حالت پذیرے اضطراب۔

دھیان رہے کہ ان حالات کا ہر خطی جوڑ

(۶.۱۷)

$$\psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

بھی H^0 کا امتیازی حال ہو گا اور اس کی امتیازی قدر E^0 بھی وہی ہو گی۔

(۶.۱۸)

$$H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0$$

عام طور پر اضطراب (H') انخطاط کو ”توڑے“ (یا ”منسوخ“ کرے) گا: جیسے جیسے ہم λ کی قیمت (0 سے 1 کی طرف) بڑھاتے ہیں مشترک غیر مضطرب توانائی E^0 دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی (شکل ۶.۲)۔ مخالف رخ چلتے ہوئے اگر ہم اضطراب کو بند (یعنی صفر) کر دیں تب ”بالائی“ حال کا تخفیف، ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے ایک خطی جوڑ میں جبکہ ”زیریں“ حال کا تخفیف کسی دوسرے عمودی خطی جوڑ میں ہو گا، تاہم ہم قبل از وقت نہیں جان سکتے کہ یہ ”موزوں“ خطی جوڑ کیا ہوں گے۔ چونکہ ہم غیر مضطرب حالات نہیں جانتے، لہذا ہم اول رتبی توانائیوں (مساوات ۶.۹) کا حاب نہیں کر سکتے۔

اسی لیے، ہم ان ”موزوں“ غیر مضطرب حالات کو فی الحال عمومی روپ (مساوات ۶.۱۷) میں لکھتے ہیں، جہاں α اور β متبادل تغیر ہوں گے۔ ہم مساوات شروڈنگر

(۶.۱۹)

$$H\psi = E\psi$$

کو $H = H^0 + \lambda H'$ اور

(۶.۲۰)

$$E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots, \quad \psi = \psi^0 + \lambda \psi^1 + \lambda^2 \psi^2 + \dots$$

باب ۶. غیر تانج وقت نظریہ اضطراب

کیلئے حل کرنا چاہتے ہیں۔ انہیں مساوات ۶.۱۹ میں ڈال کر (ہمیشہ کی طرح) λ کی ایک جیسی طاقتیں اکٹھی کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H^0\psi^0 + \lambda(H'\psi^0 + H^0\psi^1) + \dots = E^0\psi^0 + \lambda(E^1\psi^0 + E^0\psi^1) + \dots$$

اب $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ (مساوات ۶.۱۸) کی بنا پر اولین اجزاء ایک دوسرے کے ساتھ کٹ جائیں گے، جبکہ λ^1 رتبہ کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۲۱) \quad H^0\psi^1 + H'\psi^0 = E^0\psi^1 + E^1\psi^0$$

اس کا ψ_a^0 کے ساتھ اندرونی ضرب لیتے ہیں۔

$$\langle \psi_a^0 | H^0 \psi^1 \rangle + \langle \psi_a^0 | H' \psi^0 \rangle = E^0 \langle \psi_a^0 | \psi^1 \rangle + E^1 \langle \psi_a^0 | \psi^0 \rangle$$

چونکہ H^0 ہر مشی ہے، لہذا بائیں ہاتھ پہلا جبز و دائیں ہاتھ کے پہلے جبز کے ساتھ کٹ جائے گا۔ مساوات ۶.۱۷ کو استعمال کرتے ہوئے اور معیاری عمودیت کی شرط (مساوات ۶.۱۶) کو بروئے کار لاتے ہوئے

$$\alpha \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle + \beta \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = \alpha E^1$$

یا مختصراً

$$(۶.۲۲) \quad \alpha W_{aa} + \beta W_{ab} = \alpha E^1$$

حاصل ہوگا جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۲۳) \quad W_{ij} \equiv \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle, \quad (i, j = a, b)$$

اسی طرح ψ_b^0 کے ساتھ اندرونی ضرب درج ذیل دے گا۔

$$(۶.۲۴) \quad \alpha W_{ba} + \beta W_{bb} = \beta E^1$$

دھیان رہے کہ (اصولاً) ہمیں تمام W معلوم ہیں، چونکہ یہ غیر مضطرب تفاعلات موج ψ_a^0 اور ψ_b^0 کے لحاظ سے H' کے ارکان متال ہیں۔ مساوات ۶.۲۴ کو W_{ab} سے ضرب دے کر، مساوات ۶.۲۲ استعمال کرتے ہوئے βW_{ab} کو خارج کر کے، درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۲۵) \quad \alpha [W_{ab}W_{ba} - (E^1 - W_{aa})(E^1 - W_{bb})] = 0$$

غیر صفر α کی صورت میں مساوات ۶.۲۵ ہمیں E^1 کی مساوات دیگی۔

$$(۶.۲۶) \quad (E^1)^2 - E^1(W_{aa} + W_{bb}) + (W_{aa} + W_{bb} - W_{ab}W_{ba}) = 0$$

دو درجہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے اور (مساوات ۶.۲۳ سے) جانتے ہوئے کہ $W_{ba} = W_{ab}^*$ ہوگا، ہم درجہ ذیل اخذ کرتے ہیں۔

$$(۶.۲۷) \quad E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right]$$

یہ انخطاطی نظریہ اضطراب کا بنیادی نتیجہ ہے، جہاں دو جبزدو مضطرب توانائیاں ہیں۔

لیکن صفر α کی صورت میں کیا ہوگا؟ ایسی صورت میں $\beta = 1$ ہوگا، لہذا مساوات ۶.۲۲ کے تحت $W_{ab} = 0$ اور مساوات ۶.۲۴ کے تحت $E^1 = W_{bb}$ ہوگا۔ یہ درحقیقت عمومی نتیجہ (مساوات ۶.۲۷) میں منفی علامت کے ذریعے شامل ہے (مثبت علامت $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ کی صورت میں ہوگا)۔ اس کے علاوہ ہمارے جوابات

$$E_+^1 = W_{aa} = \langle \psi_a^0 | H' | \psi_a^0 \rangle, \quad E_-^1 = W_{bb} = \langle \psi_b^0 | H' | \psi_b^0 \rangle$$

ٹھیک وہی ہیں جو غیر انخطاطی نظریہ اضطراب سے حاصل ہوتے (مساوات ۶.۹)۔ یہ محض ہماری خوش قسمتی ہے: حالات ψ_a^0 اور ψ_b^0 پہلے سے ”موزوں“ خطی جوڑتھے۔ کیا اچھا ہوتا، اگر ہم آغاز سے ہی ”موزوں“ حالات جان پاتے؛ تب ہم غیر انخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کر پاتے۔ حقیقت میں درجہ ذیل مسئلہ کے تحت ہم عموماً ایسا کر پاتے ہیں۔

مسئلہ ۶.۱: فرض کریں A ایک ایسا ہر مشی عامل ہے، جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہے۔ اگر H^0 کے انخطاطی امتیازی تفاعلات ψ_a^0 اور ψ_b^0 عامل A کے بھی امتیازی تفاعلات ہوں، جن کے منفرد امتیازی امثدار ہوں،

$$\mu \neq \nu \quad \text{اور} \quad A\psi_a^0 = \mu\psi_a^0, \quad A\psi_b^0 = \nu\psi_b^0$$

تب $W_{ab} = 0$ ہوگا (لہذا ψ_a^0 اور ψ_b^0 نظریہ اضطراب میں متابل استعمال، ”موزوں“ حالات ہوں گے)۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے کہ $[A, H'] = 0$ ہوگا لہذا درجہ ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^0 | [A, H'] | \psi_b^0 \rangle &= 0 \\ &= \langle \psi_a^0 | AH' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' A | \psi_b^0 \rangle \\ &= \langle A\psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle - \langle \psi_a^0 | H' | \nu\psi_b^0 \rangle \\ &= (\mu - \nu) \langle \psi_a^0 | H' | \psi_b^0 \rangle = (\mu - \nu) W_{ab} \end{aligned}$$

اب $\mu \neq \nu$ ہے لہذا $W_{ab} = 0$ ہوگا۔

سلیقہ: اگر آپ کا سامنا انخطاطی حالات سے ہو، ایسا ہر مشی عامل A تلاش کرنے کی کوشش کریں جو H^0 اور H' کے ساتھ مقلوبی ہو؛ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی تفاعلات کو غیر مضطرب حالات منتخب کر کے سادہ اول رتبہ نظریہ اضطراب بروئے کار لائیں۔ ایسے عامل کی تلاش میں ناکامی کی صورت میں آپ کو مساوات ۶.۲۷ استعمال کرنا ہوگا، جس کی ضرورت عملاً کم ہی پڑتی ہے۔

□

سوال ۶.۶: دو ”موزوں“ غیر مضطرب حالات

$$\psi_{\pm}^0 = \alpha_{\pm} \psi_a^0 + \beta_{\pm} \psi_b^0$$

لیں، جہاں α_{\pm} اور β_{\pm} کو (معمول زنی تک) مساوات ۶.۲۲ (یا مساوات ۶.۲۳) تحسین کرتا ہے۔ صریحاً درج ذیل دکھائیں۔

$$1. \quad \psi_{\pm}^0 \text{ عمودی ہیں: } (\langle \psi_{+}^0 | \psi_{-}^0 \rangle = 0) ;$$

$$2. \quad \langle \psi_{+}^0 | H' | \psi_{-}^0 \rangle = 0$$

$$3. \quad \langle \psi_{\pm}^0 | H' | \psi_{\pm}^0 \rangle = E_{\pm}^1 \text{ جہاں } E_{\pm}^1 \text{ کی قیمت مساوات ۶.۲۷ دیتی ہے۔}$$

سوال ۶.۷: فرض کرے ایک ذرہ، جس کی کیت m ہے، ایک بندیک بعدی تار، جس کی لمبائی L ہے، پر آزادی سے حرکت کرتا ہے (سوال ۲.۴۶)۔

۱. دکھائیں کے ساکن حالات کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (-L/2 < x < L/2)$$

جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ اور اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{2}{m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

دھیان رہے کہ زمینی حال ($n = 0$) کے علاوہ تمام حالات دہرے انحطاطی ہیں۔

ب. فرض کریں ہم اب اضطراب

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

متعارف کرتے ہیں جہاں $L \ll a$ ہے۔ (یہ $x = 0$ پر مخفیہ میں ایک ٹوپا پیدا کرتا ہے، گویا تار کو سروڑ کر پکڑ بسایا گیا ہو۔) مساوات ۶.۲۷ استعمال کرتے ہوئے E_n کی اول رتبہ تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: چونکہ H' خطہ $-a < x < a$ کے باہر تقریباً صفر ہے اور $a \ll L$ ہے لہذا انکمل کی قیمت حاصل کرتے وقت انکمل کی حدود کو $\pm L/2$ کی بجائے $\pm \infty$ رکھیں۔

ج. اس مسئلہ کے لئے ψ_n اور ψ_{-n} کے ”موزوں“ خطی جوڑ کیا ہوں گے؟ دکھائے کہ ان حالات کو لے کر، مساوات ۶.۹ استعمال کرتے ہوئے، اول رتبہ تصحیح حاصل ہوگی۔

د. ایسا ہر مشی عامل A تلاش کریں جو مسئلہ کے شرائط پر پورا اترتا ہو، اور دکھائیں کہ H^0 اور A کے بیک وقت امتیازی حالات ٹھیک وہی ہیں جنہیں آپ نے جزو-ج میں استعمال کیا۔

۶.۲.۲. بلند رتبہ انخطاط

گزشتہ حصہ میں انخطاط کو دو پڑتا تصور کیا گیا، تاہم ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترکیب کو کس طرح عمومی بنایا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶.۲۲ اور مساوات ۶.۲۴ کو ہم متالبی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(1.28) \quad \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ظاہر ہے کہ $W E^1$ ، متالب کے امتیازی افتدار ہیں۔ مساوات ۶.۲۶ اس متالب کی امتیازی مساوات ہے، اور غیر مضطرب حالات کے ”موزوں“ خطی جوڑ W کے امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم n پڑتا انخطاط کی صورت میں $n \times n$ متالب:

$$(1.29) \quad W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

کے امتیازی افتدار تلاش کرتے ہیں۔ الجبرائی زبان میں ”موزوں“ غیر مضطرب تفاعلات موج کی تلاش سے مراد انخطاطی ذیلی فضا میں ایسی اساس تیار کرنا ہے جو متالب W کو وتری بناتی ہو۔ یہاں بھی اگر آپ ایسا عامل A تلاش کر سکیں، جو H' کا مقبولی ہو، اور A اور H' کے بیک وقت امتیازی تفاعلات استعمال کر سکیں تو متالب W خود بخود وتری ہوگا، لہذا آپ کو امتیازی مساوات حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آئی گی۔^۷ (اگر آپ کو میری دو پڑتا انخطاط کو عمومیت دیتے ہوئے n پڑتا انخطاط پر یقین نہ ہو تو سوال ۶.۱۰ حل کر کے اپنی تسلی کر لیں۔)

مشال ۶.۲: تین ابعادی لامتناہی کعبی کنوین (سوال ۴.۲):

$$(1.30) \quad V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

پر غور کریں۔ ساکن حالات درج ذیل ہیں

$$(1.31) \quad \psi_{n_x n_y n_z}^0(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$$

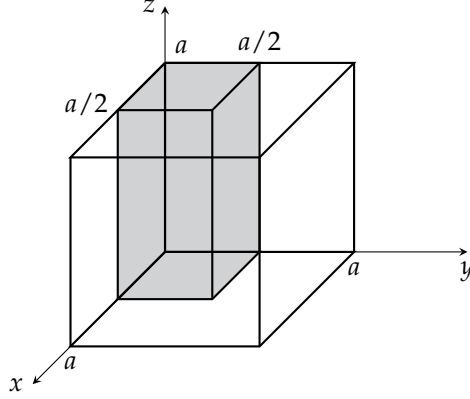
جہاں n_x ، n_y اور n_z مثبت عدد صحیح ہیں۔ ان کی مطابقتی احبازتی توانائیاں درج ذیل ہیں۔

$$(1.32) \quad E_{n_x n_y n_z}^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

دھیان رہے کہ زمینی حال (ψ_{111}) غیر انخطاطی ہے جس کی توانائی درج ذیل ہے۔

$$(1.33) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

^۷ انخطاطی نظریہ اضطراب، درحقیقت، ہیملٹنی کے انخطاطی حصہ کو وتری بنانے کے مترادف ہے۔ قواعد کا وتری بنانا (اور مقبولی قواعد کا ہیکو وقت وتری بنانا) خیمہ کے حصہ ۵ میں سکھایا گیا ہے۔



شکل ۶.۵: سایہ دار خطہ میں مخفیہ کو اضطراب مقدار V_0 بڑھاتا ہے۔

تاہم پہلا ہیجان حال (تہہ) انخطاطی ہے:

$$(۱.۳۳) \quad \psi_a \equiv \psi_{112}, \quad \psi_b \equiv \psi_{121}, \quad \psi_c \equiv \psi_{211}$$

اور ان تینوں کی توانائی:

$$(۱.۳۵) \quad E_1^0 \equiv 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$$

ایک جیسی ہے۔ آئیے اب درج ذیل اضطراب متعارف کرتے ہیں

$$(۱.۳۶) \quad H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0, & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

جو ڈبل کے ایک چوتھائی حصہ میں مخفیہ کو V_0 مقدار بڑھاتا ہے (شکل ۶.۵)۔ زمینی حال توانائی کی ایک رتبہ تصحیح مساوات ۶.۹ دیتی ہے:

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_{111} | H' | \psi_{111} \rangle \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz \\ (۱.۳۷) \quad &= \frac{1}{4} V_0 \end{aligned}$$

جو ہمارے توقعات کے عین مطابق ہے۔

اول ہیجان حال جاننے کے لیے ہمیں انخطاطی نظریہ اضطراب کی پوری صلاحیت درکار ہوگی۔ پہلے قدم میں ہم \mathbf{W} تیار کرتے ہیں۔ اس کے وتر کی ارکان وہی ہونگے جو زمینی حال کے ہیں (سوائے اس بات کے، کہ ان میں

سے ایک سائن کا دلیل دگن ہے؛ آپ درج ذیل کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$W_{aa} = W_{bb} = W_{cc} = \frac{1}{4} V_0$$

غیروتزی ارکان زیادہ دلچسپ ہیں۔

$$W_{ab} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz$$

تاہم z تکمل صفر ہوگا (جیسا W_{ac} کے لیے بھی ہوگا)، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$W_{ab} = W_{ac} = 0$$

اضرب

$$W_{bc} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 V_0 \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx \\ \times \int_0^{a/2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}z\right) dz = \frac{16}{9\pi^2} V_0$$

ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں $\kappa \equiv (8/3\pi)^2 \approx 0.7205$ ہے۔

$$(۶.۳۸) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} & W_{ac} \\ W_{ba} & W_{bb} & W_{bc} \\ W_{ca} & W_{cb} & W_{cc} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

والب \mathbf{W} بلکہ $4\mathbf{W}/V_0$ جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہے کی امتیازی مساوات (ضمیمہ ۵.۱ کے تحت):

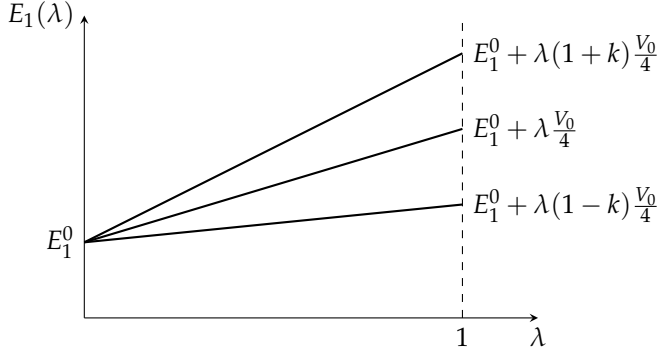
$$\begin{vmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & \kappa \\ 0 & \kappa & 1-w \end{vmatrix}$$

یعنی

$$(1-w)^3 - \kappa^2(1-w) = 0$$

ہوگی جس کی امتیازی افتد درج ذیل ہوگی۔

$$w_1 = 1; \quad w_2 = 1 + \kappa \approx 1.7205; \quad w_3 = 1 - \kappa \approx 0.2795$$



شکل ۶.۶: انحطاط کا اختتام (برائے مثال 39.6)۔

یوں λ کے اول رتبہ تک درج ذیل ہوگا

$$(۶.۳۹) \quad E_1(\lambda) = \begin{cases} E_1^0 + \lambda V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1+\kappa)V_0/4 \\ E_1^0 + \lambda(1-\kappa)V_0/4 \end{cases}$$

جہاں E_1^0 (مشترکہ) غیر مضطرب توانائی (مساوات ۶.۳۵) ہے۔ یہ اضطراب، توانائی E_1^0 کو تین منفرد توانائیوں کی سطحوں میں تقسیم کر کے انحطاط حتم کرتا ہے (شکل ۶.۶ دیکھیں)۔ اگر ہم بھول کر اس مسئلے کو غیر انحطاطی نظریہ اضطراب سے حل کرتے تب ہم اخذ کرتے کہ اول رتبہ تصحیح (مساوات ۶.۹) تینوں حالات کے لئے ایک جتنی اور $V_0/4$ کے برابر ہوتی جو درحقیقت صرف درمیانے حال کے لیے درست ہے۔

مزید ”موزوں“ غیر مضطرب حالات درج ذیل روپ کے خطی جوڑ ہو گئے

$$(۶.۴۰) \quad \psi^0 = \alpha\psi_a + \beta\psi_b + \gamma\psi_c$$

جہاں عددی سر (α, β, γ) متالب \mathbf{W} کے امتیازی سمتیات ہیں۔

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ہمیں $w = 1$ کے لیے $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ ؛ جبکہ $w = 1 \pm \kappa$ کے لیے $\alpha = 0, \beta = \pm\gamma = 1/\sqrt{2}$ ۔

حاصل ہوتے ہیں۔ (میں نے انہیں معمول شدہ کیا ہے۔) یوں ”موزوں“ حالات درج ذیل ہونگے۔^۸

$$(۶.۴۱) \quad \psi^0 = \begin{cases} \psi_a \\ (\psi_b + \psi_c) / \sqrt{2} \\ (\psi_b - \psi_c) / \sqrt{2} \end{cases}$$

□

سوال ۶.۸: لامتناہی کعبی کنویں (مسواۃ ۶.۳۰) میں نقطہ $(a/4, a/2, 3a/4)$ پر ڈیلتا تصاعلی ”موڑا“:

$$H' = a^3 V_0 \delta(x - a/4) \delta(y - a/2) \delta(z - 3a/4)$$

رکھ کر کنویں کو مضطرب کیا جاتا ہے۔ زمینی حال اور (تہرا انخطاطی) اول ہیجان حال کی توانائیوں میں اول رتبی تصحیح کتنی ہوگی؟

سوال ۶.۹: ایک ایسے کوانٹائی نظام پر غور کریں جس میں صرف ”تین“ خطی غیر تانج حالات پائے جاتے ہوں۔ فرض کریں متالبی روپ میں اس کا ہیملٹنی درج ذیل ہے

$$\mathbf{H} = V_0 \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^0} + \underbrace{\epsilon V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H'}$$

جہاں V_0 ایک مستقل ہے، اور ϵ کوئی چھوٹا عدد ($\epsilon \ll 1$) ہے۔

ا. غیر مضطرب ہیملٹنی ($\epsilon = 0$) کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار لکھیں۔

ب. متالب \mathbf{H} کے ٹھیک ٹھیک امتیازی اقدار کے لئے حل کریں۔ ہر ایک کو ϵ کی صورت میں دوم رتبہ تک طاقتی تسلسل کی روپ میں پھیلائیں۔

ج. اول رتبی اور دوم رتبی غیر انخطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے اس حال کی امتیازی قدر کی تخمینی قیمت تلاش کریں جو H^0 کے غیر انخطاطی امتیازی سمتیہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کا جزو-اکے ٹھیک ٹھیک نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

^۸ یہ جاننے ہوئے کہ H' کے ساتھ، x اور y کو آپس میں تبدیل کرنے والا عامل، P_{xy} مقلوب ہے، ہم اس نتیجے کو قیاس معلوم کر سکتے تھے۔ اس کے امتیازی اقدار (زیر تبدیلی جفت تصاعلوں کے لئے) $+1$ اور (طاق تصاعلات کے لئے) -1 ہے۔ یہاں ψ_a جبیلے سے جفت ہے، $(\psi_b + \psi_c)$ جفت اور $(\psi_b - \psi_c)$ طاق ہے۔ یہ فیصلہ کن نہیں ہے، چونکہ جفت حالات کا ہر ایک خطی جوڑ جفت ہوگا۔ لیکن، اگر ہم عامل Q بھی استعمال کریں، جو z کو $a - z$ منتقل کرتا ہو، اور یہ جاننے ہوں کہ ψ_a ایسا امتیازی تصاعلی ہے جس کی امتیازی قدر -1 ہے اور باقی دو امتیازی تصاعلات کی امتیازی قدر $+1$ ہے، اب ہم دور ہو جاتا ہے۔ یہاں عاملین P_{xy} اور Q مل کر، حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں A کا کردار ادا کرتے ہیں۔

د. دو ابتدا میں انخطائی امتیازی اقدار کی اول رتبی تصحیح کو انخطائی نظریہ اضطراب سے تلاش کریں۔ ٹھیک ٹھیک نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۶.۱۰: میں دعویٰ چکا ہوں کہ n پڑتا انخطائی توانائی کی اول رتبی تصحیح، W کی امتیازی اقدار ہوں گی۔ میں نے اس دعویٰ کی وجہ یہ پیش کی کہ یہ $n = 2$ صورت کی ”قدرتی“ عمومیت ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے، حصہ ۶.۲.۱ کے قدموں پر چل کر، درج ذیل سے آغاز کر کے

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j^0$$

(مساوات ۶.۱۷ کو عمومیت دیتے ہوئے) دکھائیں کہ مساوات ۶.۲۲ کے مسائل کا مفہوم W کی امتیازی قدر مساوات لی جاسکتی ہے۔

۶.۳ ہائیڈروجن کا مہین ساخت

ہائیڈروجن جوہر (حصہ ۴.۲) کے مطالعہ کے دوران ہم نے ہیملٹنی درج ذیل لی

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶.۴۲)$$

(جو الیکٹران کی حرکی توانائی جمع کو لمب مخفی توانائی ہے)۔ تاہم یہ مکمل کہانی نہیں ہے۔ ہم m کی بجائے تخفیف شدہ کیت (سوال ۵.۱) استعمال کر کے ہیملٹنی میں حرکت مرکزہ کا اثر شامل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ زیادہ اہم مہین ساخت^۹ ہے، جو درحقیقت دو منفرد وجوہات، اضافی تصحیح^{۱۰} اور چکرو مدار ربط^{۱۱} کی بنا پر پیدا ہوتی ہے۔ بوہر توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کے لحاظ سے مہین ساخت، α^2 حبز ضربی کم، نہایت چھوٹا اضطراب ہے، جہاں

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137.036} \quad (۶.۴۳)$$

مہین ساخت مستقل^{۱۲} کہلاتا ہے۔ اس سے بھی (مزید α حبز ضربی) چھوٹا لیمبر انتقال^{۱۳} ہے، جو برقی میدان کی کوانٹائزیشن سے وابستہ ہے، اور اس سے مزید ایک رتبہ کم، نہایت مہین ساخت^{۱۴} کہلاتی ہے، جو الیکٹران اور پروٹان کے جفت قطب معیار اثر کے بیچ مقناطیسی باہم عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس تنظیمی ڈھانچہ کو جدول ۶.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب کی مثال کے طور پر ہائیڈروجن کی مہین ساخت پر غور کریں گے۔ سوال ۶.۱۱:

fine structure^۹
relativistic correction^{۱۰}
spin-orbit coupling^{۱۱}
fine structure constant^{۱۲}
Lamb shift^{۱۳}
hyperfine structure^{۱۴}

جدول ۶.۱: ہائپر روجن کی بوہر توانائیوں میں تصحیح کی درجہ بندی۔

$\alpha^2 mc^2$	کار تب	بوہر توانائی:
$\alpha^4 mc^2$	کار تب	مہین ساخت:
$\alpha^5 mc^2$	کار تب	لیب انتتال:
$(m/m_p)\alpha^4 mc^2$	کار تب	نہایت مہین ساخت:

۱. بوہر توانائیوں کو مہین ساخت مستقل اور الیکٹران کی ساکن توانائی (mc^2) کی صورت میں لکھیں۔

ب۔ (ϵ_0, e, \hbar, c کی تجرباتی قیمتیں استعمال کیے بغیر) مہین ساخت مستقل کی قیمت بنیادی اصول استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ تبصرہ: پوری طبیعیات میں بلاشبہ مہین ساخت مستقل سب سے زیادہ حوالہ (بے بعدی) بنیادی عدد ہے۔ یہ برقیطیسیت (الیکٹران کا بار)، اضافیت (روشنی کی رفتار) اور کوانٹائی میکانیات (پلانک مستقل) کے بنیادی مستقلات کے پیچ رشتہ بیان کرتا ہے۔ اگر آپ حبزو-ب حل کر پائیں، یقیناً آپ کو نو بیل انعام سے نوازا جائے گا۔ البتہ میرا مشورہ ہوگا کہ اس پر زیادہ وقت ضائع نہ کریں؛ (اب تک) بہت سارے انتہائی قابل لوگ ایسا کر کے ناکام ہو چکے ہیں۔

۶.۳.۱ اضافیتی تصحیح

ہیملٹنی کا پہلا حبزو بظاہر حرکی توانائی کو ظاہر کرتا ہے

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (۶.۴۴)$$

جس میں باضابطہ متبادل $\nabla^2 (\hbar/i) \rightarrow p$ پر کر کے درج ذیل عامل حاصل ہوگا۔

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad (۶.۴۵)$$

تاہم مساوات ۶.۴۴ حرکی توانائی کا کلاسیکی کلیہ ہے؛ اضافیتی کلیہ درج ذیل ہے

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2 \quad (۶.۴۶)$$

جہاں پہلا حبزو کل اضافیتی توانائی ہے (جس میں مخفی توانائی شامل نہیں ہے، اور جس سے ہمیں فی الحال عنرض بھی نہیں ہے)، جبکہ دوسرا حبزو ساکن توانائی ہے؛ ان کے فرق کو حرکت سے منسوب کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں سمتی رفتار کی بجائے (اضافیتی) معیار حرکت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (۶.۴۷)$$

کی صورت میں T کو لکھنا ہوگا۔ دھیان رہے کہ

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 [1 - (v/c)^2]}{1 - (v/c)^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - (v/c)^2} = (T + mc^2)^2$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۴۸) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

غیر اضافیتی حد $mc \ll p$ کی صورت میں حرکی توانائی کی اضافیتی مساوات تخفیف کے بعد کلاسیکی نتیجہ (مساوات ۶.۴۴) دیتی ہے؛ ایک چھوٹے عدد (p/mc) کی طاقتی تسلسل میں پھیلا کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۴۹) \quad T = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right] = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc}\right)^4 \cdots - 1 \right] \\ = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \cdots$$

ظاہر ہے کہ ہیمیلٹنی کی سب سے کم رتبہ^{۱۵} اضافیتی تصحیح درج ذیل ہے۔

$$(۶.۵۰) \quad H'_r = -\frac{p^4}{8m^3 c^2}$$

غیر مضطرب حال میں H' کی توقعاتی قیمت رتبہ اول نظریہ اضطراب میں E_n کی تصحیح ہوگی (مساوات ۶.۹)۔

$$(۶.۵۱) \quad E_r^1 = \langle H'_r \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi | p^4 \psi \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle$$

اب (غیر مضطرب حالات کے لئے) مساوات شرودنجر کہتی ہے کہ

$$(۶.۵۲) \quad p^2 \psi = 2m(E - V)\psi$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔^{۱۶}

$$(۶.۵۳) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \langle (E - V)^2 \rangle = -\frac{1}{2mc^2} [E^2 - 2E\langle V \rangle + \langle V^2 \rangle]$$

^{۱۵} چونکہ ہائیڈروجن میں الیکٹران کی حرکی توانائی کا رتبہ 10 eV ہے، جو اس کی ساکن توانائی (511 000 eV) سے بہت کم ہے، لہذا ہائیڈروجن جوہر بنیادی طور پر غیر اضافیتی ہے اور یوں ہم صرف سب سے کم رتبہ تصحیح رکھ سکتے ہیں۔ مساوات ۶.۴۹ میں p اضافیتی معیار حرکت (مساوات ۶.۴۷) ہے تاکہ کلاسیکی معیار حرکت (mv) ۔ ہم مساوات ۶.۵۰ میں اب کوانشائی عامل $-i\hbar\nabla$ کے ساتھ اول الذکر منسلک کرتے ہیں۔

^{۱۶} ایسا، ہم نے p^2 اور $(E - V)$ کی ہر مشی پن استعمال کی جو درست نہیں ہے۔ درحقیقت ان حالات کے لئے جن کا $l = 0$ ہو عامل p^4 غیر ہر مشی ہوگا (سوال ۶.۱۵)، اور مساوات ۶.۵۰ پر $l = 0$ کی صورت میں (نظریہ اضطراب کا اطلاق ٹکے سے حنائی نہیں ہوگا۔ خوش قسمتی سے، ہمیں ٹھیک ٹھیک جواب معلوم ہے؛ جسے (غیر اضافیتی) مساوات شرودنجر کی بجائے (اضافیتی) مساوات ڈیراک استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے، اور جو یہاں سرسری انداز میں حاصل نتیجہ کی تصدیق کرتا ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

اب تک یہ مکمل طور پر ایک عمومی نتیجہ ہے؛ تاہم ہمیں ہائیڈروجن میں دلچسپی ہے جس کے لیے $(-1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$ لہذا درج ذیل ہوگا

$$(۶.۵۴) \quad E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]$$

جہاں E_n زیر غور حال کی بوہر توانائی توانائی ہے۔

یہ کام مکمل کرنے کی خاطر، ہمیں (غیر مضطرب) حال ψ_{nlm} (مساوات ۴.۸۹) میں $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں درکار ہوں گی۔ ان میں سے پہلا دریافت کرنا آسان ہے (سوال ۶.۱۲ دیکھیں):

$$(۶.۵۵) \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a}$$

جہاں a رداس بوہر (مساوات ۴.۷۲) ہے۔ دوسرا اتنا آسان نہیں ہے (سوال ۶.۳۳ دیکھیں)؛ تاہم اس کا جواب درج ذیل ہے۔^{۱۷}

$$(۶.۵۶) \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2}$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$E_r^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_n^2 + 2E_n \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2 a} + \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(l+1/2)n^3 a^2} \right]$$

یا (مساوات ۴.۷۲ استعمال کرتے ہوئے) a کو خارج کر کے، (مساوات ۴.۷۰ استعمال کر کے) تمام کو E_n کی صورت میں لکھ کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۶.۵۷) \quad E_r^1 = -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left[\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right]$$

ظاہر ہے کہ اضافیتی تصحیح کی مقدار E_n سے تقریباً 2×10^{-5} E_n/mc^2 جزو ضربی کم ہے۔

اگرچہ ہائیڈروجن جوہر بہت زیادہ انحطاطی ہے، میں نے حساب کے دوران غیر انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کیا (مساوات ۶.۵۱)۔ لیکن یہاں اضطراب کروئی تشاکلی ہے، لہذا یہ L^2 اور L_z کا مقلوب ہوگا۔ مزید کسی E_n کے n^2 حالات کے لئے ان (ایک ساتھ تمام) عاملین کے امتیازی تفاعلات کی منفرد امتیازی افتدار ہوں گی۔ یوں خوش قسمتی سے، تفاعلات ψ_{nlm} اس مسئلہ کے ”موزوں“ حالات ہوں گے (یا جیسا ہم کہتے ہیں l ، اور m موزوں کو اٹائی اعداد^{۱۸})، لہذا غیر انحطاطی نظریہ اضطراب کا استعمال اتنا نادرست ہوتا (حصہ ۶.۲.۱ کے آخر میں سبق دیکھیں)۔

^{۱۷} متغیر r کے کسی بھی طاقت کی توقعاتی قیمت کا عمومی گلیہ موجود ہے۔
^{۱۸} good quantum numbers

سوال ۶.۱۲: مسئلہ وریل (سوال ۴.۴۰) استعمال کرتے ہوئے مساوات ۶.۵۵ ثابت کریں۔

سوال ۶.۱۳: آپ نے سوال ۴.۴۳ میں حال ψ_{321} میں r^s کی توقعاتی قیمت حاصل کی۔ اپنے جواب کی تصدیق $s = 0$ (حقیر کام)، $s = -1$ (مساوات ۶.۵۵)، $s = -2$ (مساوات ۶.۵۶)، اور $s = -3$ (مساوات ۶.۶۴) کے لیے کریں۔ اس پر تبصرہ کریں کہ $s = -7$ کی صورت میں کیا ہوگا۔

سوال ۶.۱۴: ایک بعدی ہارمونی مرتعش کی توانائی کی سطحوں کے لیے (سب سے کم رتبہ) اضافیتی تصحیح تلاش کریں۔ اشارہ: مثال ۲.۵ میں مستعمل ترکیب بروئے کار لائیں۔

سوال ۶.۱۵: دکھائیں کہ ہائیڈروجن حالات کے لیے $l = 0$ لیتے ہوئے p^2 ہر مٹی اور p^4 غیر ہر مٹی ہے۔ ایسے حالات کے لئے ψ ، متغیرات θ اور ϕ کا غیر تاجع ہے، لہذا درج ذیل ہوگا (مساوات ۴.۱۳)۔

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

تکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\langle f | p^2 g \rangle = -4\pi\hbar^2 \left(r^2 f \frac{dg}{dr} - r^2 g \frac{df}{dr} \right) \Big|_0^\infty + \langle p^2 f | g \rangle$$

تصدیق کریں کہ ψ_{n00} کے لیے، جو مبداء کے متریب درج ذیل ہوگا، سرحدی جزو صفر ہے۔

$$\psi_{n00} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(na)^{3/2}} e^{(-r/na)}$$

اب یہی کچھ p^4 کے لئے کر کے دیکھیں، اور دکھائیں کہ سرحدی اجزاء صفر نہیں ہونگے۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔

$$\langle \psi_{n00} | p^4 \psi_{m00} \rangle = \frac{8\hbar^4}{a^4} \frac{(n-m)}{(nm)^{5/2}} + \langle p^4 \psi_{n00} | \psi_{m00} \rangle$$

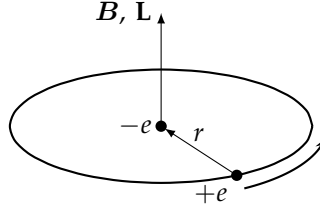
۶.۳.۲ چپکرومدار ربط

سرکڑہ کے گرد مدار میں الیکٹران کا تصور کریں؛ الیکٹران کے نقطہ نظر سے پروٹان اس کے گرد گھومتا ہے (شکل ۶.۷)۔ مدار میں مثبت بار الیکٹران کے چھوٹے میں مقناطیسی میدان B پیدا کرتا ہے، جو چپکر کھاتے ہوئے الیکٹران پر قوت سرور پیدا کر کے الیکٹران کے مقناطیسی معیار اثر (μ) کو میدان کے ہم رخ بنانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس کی ہیملٹنی (مساوات ۴.۱۵) درج ذیل ہے۔

(۶.۵۸)

$$H = -\mu \cdot B$$

ہمیں پروٹان کا مقناطیسی میدان (B) اور الیکٹران کا جفت قطب معیار اثر (μ) درکار ہوگا۔



شکل ۶.۷: الیکٹران کے نقطہ نظر سے ہائیڈروجن جوہر۔

پروٹان کا مقناطیسی میدان۔ ہم (الیکٹران کے نقطہ نظر سے) پروٹان کو استمراری دائری رو (شکل ۶.۷) تصور کر کے، اس کے مقناطیسی میدان کو باؤٹ و سیوارٹ متانوں سے حاصل کرتے ہیں:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

جس میں موثر رو $I = e/T$ ہے، جہاں e پروٹان کا بار، اور T دائرے پر ایک چکر کا دوری عرصہ ہے۔ اس کے برعکس، $L = rmv = 2\pi mr^2/T$ (مركزہ کے ساکن چھوٹے میں) الیکٹران کا مدار کی زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ مزید، B اور L دونوں کا رخ ایک جیسا ہوگا (شکل ۶.۷ میں اوپر جانب)، لہذا

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} L \quad (۶.۵۹)$$

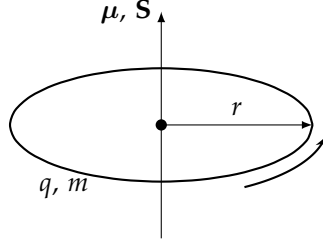
لکھا جاسکتا ہے (جہاں میں نے $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ استعمال کر کے μ_0 کی جگہ ϵ_0 استعمال کیا ہے)۔

الیکٹران کا مقناطیسی جفت قطب معیار حرکت۔ چکر کھاتے بار کا مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اس کے (چکری) زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتا ہے؛ ممکن مقناطیسی نسبت (جسے ہم حصہ ۴.۴.۱ میں دیکھ چکے ہیں)، ان کے بیچ تناسبی جزو ضربی ہوگا۔ آئیں اس مرتبہ، کلاسیکی برقی حرکیات استعمال کرتے ہوئے، اسے اخذ کرتے ہیں۔ ایک ایسا بار q جس کی لمبائی r کے چلا پر کی گئی ہو، اور جو محور کے گرد دوری عرصہ T سے گھومتا ہو، پر غور کریں (شکل ۶.۸)۔ اس چھلے کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر کی تعریف، رو (q/T) ضرب رقبہ (πr^2) ہے۔

$$\mu = \frac{q\pi r^2}{T}$$

اگر چھلے کی کیت m ہو، جمودی معیار اثر (mr^2) ضرب زاویائی سمتی رفتار $(2\pi/T)$ اس کا زاویائی معیار حرکت، S ، ہوگا۔

$$S = \frac{2\pi mr^2}{T}$$



شکل ۶.۸: بار کا چھلا جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔

اس تفکیک کے لیے ظاہر ہے کہ ممکن مقناطیسی نسبت $\mu/S = q/2m$ ہوگا۔ دھیان رہے کہ یہ r (اور T) کا تابع نہیں ہے۔ اگر میرے پاس کوئی زیادہ پیچیدہ شکل کا جسم ہوتا، مثلاً ایک کرہ (صرف اتنا ضروری ہے کہ یہ اپنے محور کے گرد گھومتا ہو) شکل طواف ہو، میں اس کو باریک چھلوں میں ٹکڑے کر کے، تمام چھلوں کی پیدا حصوں کا مجموعہ لے کر μ اور S کی قیمتیں معلوم کر پاتا۔ جب تک کیت اور بار کی تقسیم ایک جیسی ہو (تاکہ بار اور کیت کی نسبت یکساں ہو)، ہر چھلے کا اور لہذا پورے جسم کا ممکن مقناطیسی نسبت ایک جیسا ہوگا۔ مزید، μ اور S کے رخ ایک جیسے (یا اگر بار منفی ہو تو ایک دونوں کے مخالف) ہوں گے، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mu = \left(\frac{q}{2m} \right) S$$

یہ حالصاً کلاسیکی حساب ہے، درحقیقت، الیکٹران کا مقناطیسی معیار اثر اس کی کلاسیکی قیمت کا دگنا ہے۔

$$\mu_e = -\frac{e}{m} S \quad (۶.۹۰)$$

ڈیراک نے الیکٹران کی (اپنے) اضافیتی نظریہ میں ”اضافی“ حوضی 2 کی وجہ پیش کی ہے۔^{۱۹} ان تمام کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$H = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} S \cdot L$$

اس حساب میں ایک مندریب سے کام لیا گیا ہے: میں نے الیکٹران کے ساکن چھوٹے میں تجزیہ کیا، جو ایک غیر جمودی نظام ہے؛ چونکہ الیکٹران مرکزہ کے گرد گھومتا ہے، لہذا یہ چھوٹے اسراع

^{۱۹} ہم دیکھ چکے ہیں کہ الیکٹران کو محور کے گرد چکر کاہتا ہوا کرہ تصور کرنا، خطرے سے باہر نہیں ہے (سوال ۳.۲۵ دیکھیں)، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ سادہ لوح کلاسیکی نمونہ، ممکن مقناطیسی نسبت کی علاقہ قیمت دیتا ہے۔ کلاسیکی توقعات سے حاصل قیمت کو g حوضی کہتے ہیں: $\mu = g(q/2m)S$ ، لہذا نظریہ ذرا کم میں g حوضی کی قیمت ٹھیک 2 ہے۔ لیکن کوٹائی برقی حرکیات اس میں معمولی تصحیح دیتی ہے: بے ضابطہ مقناطیسی معیار اثر، g_e ، کی قیمت دراصل $2.002 \dots = 2 + (\alpha/\pi) + \dots$ ہے۔ اس کا حساب اور اس کی پیدائش (جو آپس میں شاندار حتمیت تک متفق ہیں) بیسویں صدی طبیعیات کی اہم ترین کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

پذیر ہوگا۔ اس حساب میں مجبوراً حرکت صحیح، جسے طامس استقبال حرکت^{۲۰} کہتے ہیں، شامل کر کے مقبول کیا جاسکتا ہے، جو حساب میں جبز و ضربی 1/2 شامل کرتا ہے۔^{۲۲}

$$H'_{so} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (۶.۲۱)$$

یہ چکر و مدار باہم علی^{۲۳} ہے؛ ماسوائے دو تصحیح (الیکٹران کی ترمیم شدہ ممکن مقناطیسی نسبت اور طامس استقبال حرکت جبز و ضربی جو اتنا ذاتاً ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) کے، یہ وہی نتیجہ ہے جو آپ سادہ لوح کلاسیکی نمونے سے حاصل کرتے ہیں۔ طبعی طور پر، یہ الیکٹران کے لمحاتی ساکن چھوٹے مس، چکر کاٹتے ہوئے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر پر، پروٹان کے مقناطیسی میدان کی قوت سروڑ کے بدولت ہے۔

اب کوانٹائی میکانیات کی بات کرتے ہیں۔ چکر و دائری ربط کی صورت میں \mathbf{L} اور \mathbf{S} کے ساتھ ہیمیلٹنی غیر مقلوب ہوگا، لہذا اسپکر اور مداری زاویائی معیار اثر علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے (سوال ۶.۱۶ دیکھیں)۔ البتہ، L^2 ، S^2 اور کل زاویائی معیار حرکت:

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (۶.۲۲)$$

کے ساتھ H'_{so} مقلوب ہوگا، لہذا یہ مقداریں بقائی ہوں گی (مساوات ۳.۷۷)۔ دوسرے لفظوں میں، L_z اور S_z کے امتیازی حالات نظریہ اضطراب میں استعمال کے لئے ”موزوں“ حالات نہیں ہیں، جبکہ L^2 ، S^2 ، اور J^2 کے امتیازی حالات ”موزوں“ حالات ہیں۔ اب

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

کی بنا پر

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \quad (۶.۲۳)$$

ہوگا لہذا $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ کی امتیازی اقدار درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Thomas precession^{۲۴}

^{۲۰} سوچنے کا ایک انداز یہ ہوگا کہ آپ تصور کریں کہ الیکٹران مستمر انداز میں ایک ساکن نظام سے دوسرے ساکن نظام میں قدم رکھتا ہے؛ ان اور سنز تبادلہ کے مجموعی اثر کو طامس استقبال حرکت بیان کرتا ہے۔ ہم تجزیہ گاہ کی چھوٹے مس، جہاں پروٹان ساکن ہے، رہ کر اس پوری مصیبت سے غیبت حاصل کر سکتے تھے۔ ایسی صورت میں، پروٹان کا میدان حنا لہتاً برقی ہوگا، اور آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ الیکٹران پر قوت سروڑ کیسا پیدا کرتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ حرکت پذیر مقناطیسی جفت قطب، برقی جفت قطب معیار اثر اختیار کرتا ہے، اور تجزیہ گاہ کے چھوٹے مس میں سروڑ کے برقی میدان اور الیکٹران کے برقی جفت قطب معیار اثر کے بیچ باہم عمل، چکر و مدار ربط کا باعث بنتا ہے۔ چونکہ اس تجزیہ کے لئے زیادہ پیچیدہ برقی حرکت درکار ہوگا لہذا ابستہ رہی ہے کہ ہم الیکٹران کے ساکن چھوٹے مس میں کام کریں جہاں طبعی پرسلو زیادہ واضح ہے۔

^{۲۲} بہ نسبت زیادہ درست ہوگا کہ طامس استقبال حرکت g جبز و ضربی سے 1 منفی کرتا ہے۔

spin-orbit interaction^{۲۳}

باب ۶. غیر تانج وقت نظریہ اضطراب

یہاں یقیناً $s = 1/2$ ہے۔ مزید $1/r^3$ کی توقعاتی قیمت (سوال ۶.۳۵-ج دیکھیں)

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3} \quad (۶.۶۳)$$

ہے، لہذا

$$E_{so}^1 = \langle H'_{so} \rangle = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2c^2} \frac{(\hbar^2/2)[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)n^3a^3}$$

یا، تمام کو E_n کی صورت میں لکھتے ہوئے، درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔^{۲۴}

$$E_{so}^1 = \frac{(E_n)^2}{mc^2} \left\{ \frac{n[j(j+1) - l(l+1) - 3/4]}{l(l+1/2)(l+1)} \right\} \quad (۶.۶۵)$$

یہ ایک حیرت کن بات ہے کہ، بالکل مختلف طبعی پسلوؤں کے باوجود، اضافیتی تصحیح اور چپکرومدار ربط ایک جتنا ترتیب (E_n^2/mc^2) رکھتے ہیں۔ انہیں جمع کر کے، ہمیں مکمل مہین ساخت کلیہ:

$$E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left(3 - \frac{4n}{j+1/2} \right) \quad (۶.۶۶)$$

(سوال ۶.۱۷ دیکھیں) حاصل ہوتا ہے۔ اسے کلیہ بوہر کے ساتھ ملا کر، ہم ہائیڈروجن توانائی سطحوں کا عظیم نتیجہ:

$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (۶.۶۷)$$

حاصل کرتے ہیں، جس میں مہین ساخت شامل ہے۔

مہین ساخت l میں انحطاط توڑتی ہے (یعنی کسی ایک n کیلئے، l کی مختلف اجزائی قیمتیں ایک جیسی توانائی کے حامل نہیں ہوں گی)، تاہم اب بھی یہ j میں انحطاط برقرار رکھتی ہے (شکل 9.6 دیکھیں)۔ مدارچی اور چپکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو امتیازی اعداد (m_l اور m_s) اب ”موزوں“ کوانٹائی اعداد نہیں ہونگے؛ ان متعدادوں کی مختلف قیمتوں والے حالات کے خطی جوڑ ساکن حالات ہوں گے؛ ”موزوں“ کوانٹائی اعداد n ، l ، s ، j اور m_j ہونگے۔^{۲۵}

^{۲۴} یہاں بھی، $l = 0$ کی صورت میں ہمیں مسئلہ درپیش ہوگا، چونکہ ہم بظاہر صفر سے تقسیم کرتے ہیں۔ ساتھ ہی، اس صورت میں $s = j$ کی بنا پر، شارکنندہ بھی صفر ہے، لہذا مساوات ۶.۶۵ غیر تعین ہوگا۔ طبعی بنیادوں پر $l = 0$ کی صورت میں چپکرومدار ربط ہونا ہی نہیں چاہیے۔ اس ابہام کو دور کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم j کو $j + 1/2$ متعارف کریں۔ غیر متوقع طور پر، اگرچہ اضافیتی تصحیح (مساوات ۶.۵۷) اور چپکرومدار ربط (مساوات ۶.۶۵) دونوں $l = 0$ کی صورت میں تک سے ممبر انہیں ہیں، ان کا مجموعہ (مساوات ۶.۶۶) تمام l کے لئے درست ہے (سوال ۶.۱۹ دیکھیں)۔

^{۲۵} کسی l اور s کے لئے، $|jm_j\rangle$ کو $|lm_l\rangle|sm_s\rangle$ کا خطی جوڑ لکھنے کی حن طر ہمیں مناسب کلیش و گورڈن عددی سر (مساوات ۳.۱۸۵) استعمال کرنے ہوں گے۔

سوال ۶.۱۶: درج ذیل مقاب کی قیمتیں تلاش کریں۔ (الف) $[L \cdot S, L]$ ، (ب) $[L \cdot S, S]$ ، (ج) $[L \cdot S, J]$ ، (د) $[L \cdot S, L^2]$ ، (ه) $[L \cdot S, S^2]$ ، (و) $[L \cdot S, J^2]$ ؛ اشارہ: L اور S زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقابیت رشتوں (مادات ۴.۹۹ اور مادات ۴.۱۳) کو مطمئن کرتے ہیں، لیکن یہ ایک دوسرے کے ساتھ مقلوب ہیں۔

سوال ۶.۱۷: اضافیتی تصحیح (مادات ۶.۵۷) اور چپکرو مدار ربط (مادات ۶.۶۵) سے مہین ساخت کلب (مادات ۶.۶۶) اخذ کریں۔ اشارہ: دھیان رہے کہ $j = l \pm 1/2$ (مادات ۶.۶۲) ہے؛ مثبت اور منفی علامت کو باری باری لیں، آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں ایک جیسا نتیجہ حاصل ہوگا۔

سوال ۶.۱۸: ہائیڈروجن طیف کے مرکزی خطے میں سرخ بالمر لکیر نمایاں ترین ہے، جو $n = 3$ سے $n = 2$ میں منتقلی سے پیدا ہوتی ہے۔ سب سے پہلے، اس طیفی لکیر کا طول موج اور تعدد دوہرہ نظریہ سے تعین کریں۔ مہین ساخت اس لکیر کو متفریب و متفریب کئی لکیروں میں تقسیم کرتی ہے؛ اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے: لکیروں کی تعداد کیا ہوگی اور ان کے بچ فاصلہ کتنا ہوگا؟ اشارہ: پہلے قدم میں، معلوم کریں کہ $n = 2$ سطح کتنے ذیلی سطحوں میں تقسیم ہوگا، اور ہر ایک کے لیے، eV میں، E_{fs}^1 تلاش کریں۔ یہی کچھ $n = 3$ کے لیے کریں۔ سطح توانائی کے شکل کا خاکہ بن کر $n = 3$ سے $n = 2$ تک تمام ممکنہ منتقلی دکھائیں۔ توانائی کا اخراج (نوریہ کی صورت میں) $(E_3 - E_2) + \Delta E$ ہوگا، جہاں پہلا جزو سب میں مشترک جبکہ (مہین ساخت کی پیدا) ΔE کی قیمت ہر منتقلی کے لئے بدلے گی۔ ہر منتقلی کے لئے ΔE کو (eV میں) تلاش کریں۔ تعدد نوریہ میں تبدیل کر کے، ساتھ ساتھ طیفی لکیروں کے بچ فاصلہ (Hz کی صورت میں) تعین کریں؛ یہ ہر لکیر اور غیر مضطرب لکیر کے بچ تعددی فاصلہ نہیں (جو یقیناً، قابل مشاہدہ نہیں)، بلکہ یہ ہر لکیر اور اس سے اگلی لکیر کے بچ تعددی فاصلہ ہوگا۔ آپ کا جواب درج ذیل روپ میں ہونا چاہیے: ”سرخ بالمر لکیر () لکیروں میں تقسیم ہوتا ہے۔ بڑھتے تعدد کے لحاظ سے یہ (1) $j = ???$ سے $j = ???$ ، (2) $j = ???$ سے $j = ???$ ، ... ہو گئے۔ لکیر 1 اور لکیر 2 کے بچ تعددی فاصلہ (Hz) ہے، لکیر 2 اور لکیر 3 کے بچ فاصلہ Hz ??? ہے، ...۔“

سوال ۶.۱۹: مادات ڈیراک سے (نظریہ اضافت استعمال کیے بغیر) ہائیڈروجن کے مہین ساخت کا ٹھیک ٹھیک کلب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\}$$

اس کو (یہ جاننے ہوئے کہ $1 \ll \alpha$ ہے) a^4 رتبہ تک پھیلا کر دکھائیں کہ مادات ۶.۶۷ حاصل ہوتا ہے۔

۶.۴. زیمان اثر

ایک جوہر کو یکساں بیرونی مقناطیسی میدان B میں رکھنے سے، اس کی توانائی سطحوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ اس مظہر کو **زیمان اثر**^{۲۶} کہتے ہیں۔ واحد ایک الیکٹران کے لیے اضطراب درج ذیل ہوگا

$$H'_z = -(\mu_l + \mu_s) \cdot B \quad \text{بیرونی} \quad (۶.۱۸)$$

جہاں

$$\mu_s = -\frac{e}{m} S \quad (۶.۱۹)$$

الیکٹران چکر کے ساتھ وابستہ مقناطیسی جفت قطب معیار اثر، اور

$$\mu_l = -\frac{e}{2m} L \quad (۶.۲۰)$$

مداری حرکت کے ساتھ وابستہ جفت قطب معیار اثر ہے۔^{۲۷} یوں درج ذیل ہوگا۔

$$H'_z = \frac{e}{2m} (L + 2S) \cdot B \quad \text{بیرونی} \quad (۶.۲۱)$$

زیمان تقسیم کی فطرت فیصلہ کن حد تک اندرونی میدان (ساوات ۶.۵۹)، جو چکر و مدار رابطہ پیدا کرتا ہے، کے لحاظ سے بیرونی میدان کی طاقت پر منحصر ہوگی۔ اگر اندرونی $B \ll$ بیرونی B ہو تب مہین ساخت غالب ہوگی، اور H' کو ایک چھوٹا اضطراب تصور کیا جاسکتا ہے، جبکہ $B \gg$ بیرونی B کی صورت میں زیمان اثر غالب ہوگا، اور مہین ساخت اضطراب تصور کی جائے گی۔ ان خطوں کے بیچ، جہاں دونوں میدان مد معتمیل ہوں گے، ہمیں انحطاطی نظریہ اضطراب کی پوری قوت درکار ہوگی، اور ہیملٹنی کے متعلقہ حصے کو ”ہاتھ سے“ وتری بنانا لازم ہوگا۔ درج ذیل حصوں میں ہائیڈروجن کے لئے ہم ان تینوں صورتوں پر غور کریں گے۔

سوال ۶.۲۰: ہائیڈروجن کی اندرونی میدان کی اندازاً قیمت، ساوات ۶.۵۹ استعمال کرتے ہوئے، تلاش کر کے ”طفتور“ اور ”کمزور“ زیمان میدان کی متداری تصویر کشی کریں۔

۶.۴.۱ کمزور میدان زیمان اثر

اگر اندرونی $B \ll$ بیرونی B ہو تب مہین ساخت (ساوات ۶.۶۷) غالب ہوگی، اور ”موزوں“ کوانٹائی اعداد n ، l ، j ، اور m_j ہو گئے (تاہم، چکر و مدار رابطہ کی موجودگی میں L اور S علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہو گئے، لہذا m_l اور m_s ،

^{۲۶} Zeeman effect

^{۲۷} مداری حرکت کے لئے کلاسیکی قیمت $(q/2m)$ ہی مسکن مقناطیسی نسبت ہوگی؛ صرف چکر کی صورت میں ۲ کا ”انسانی“ جبز و ضربی پلا جاسکتا ہے۔

”موزوں“ کوانٹائی اعداد نہیں ہونگے۔^{۲۸} رتبہ اول نظریہ اضطراب میں توانائی میں زمین تصحیح درج ذیل ہوگی۔

$$(۶.۷۲) \quad E_Z^1 = \langle nljm_j | H_Z' | nljm_j \rangle = \frac{e}{2m} B_{\text{بیرونی}} \cdot \langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle$$

اب $\mathbf{L} + 2\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$ ہوگا۔ بد قسمتی سے، ہمیں \mathbf{S} کی توقعاتی قیمت فوری طور پر معلوم نہیں ہے۔ لیکن ہم درج ذیل طریقے سے اسے جان سکتے ہیں: کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ایک مستقل ہے (شکل ۶.۹)؛ اس مقررہ سمتیہ کے گرد \mathbf{L} اور \mathbf{S} تیزی سے استقبالی حرکت کرتے ہیں۔ بالخصوص، \mathbf{J} پر \mathbf{S} کی متاع تقلیل، \mathbf{S} کی (وسطی) اوسط قیمت:

$$(۶.۷۳) \quad \mathbf{S}_{\text{اوسط}} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{J^2} \mathbf{J}$$

ہوگی۔ لیکن $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$ ہے، لہذا $L^2 = J^2 + S^2 - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$

$$(۶.۷۴) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]$$

ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(۶.۷۵) \quad \langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{J^2}\right) \mathbf{J} \right\rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)}\right] \langle \mathbf{J} \rangle$$

چونکہ کورسین میں بندرکن کو لنڈے g جو مضرب^{۲۹} کہتے ہیں جس کو g_J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم محور z کو بیرونی B کے ساتھ ساتھ رکھ سکتے ہیں؛ تب

$$(۶.۷۶) \quad E_Z^1 = \mu_B g_J B_{\text{بیرونی}} m_j$$

ہوگا، جہاں

$$(۶.۷۷) \quad \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

بوہر مقناطیہ^{۳۰} کہلاتا ہے۔ مہین ساخت (مساوات ۶.۷۷) اور زمین (مساوات ۶.۷۶) حصوں کا مجموعہ کل توانائی دے گا۔ مثال کے طور پر، زمینی حال ($j = 1/2$ ، $l = 0$ ، $n = 1$) لہذا $g_J = 2$) دو سطحوں:

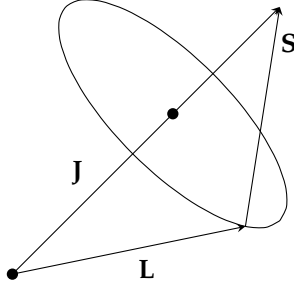
$$(۶.۷۸) \quad -13.6 \text{ eV}(1 + \alpha^2/4) \pm \mu_B B_{\text{بیرونی}}$$

میں بٹ جائے گا، جہاں $m_j = 1/2$ کے لیے مثبت علامت اور $m_j = -1/2$ کے لیے منفی علامت استعمال ہوگی۔ ان توانائیوں کو (بیرونی B کے تفاعل کے طور پر) شکل ۶.۱۰ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

^{۲۸} یہاں ایک اضطراب (زمین بخارا) کے اوپر دوسرا اضطراب (مہین ساخت) ابھار ہے۔ ”موزوں“ کوانٹائی اعداد وہ ہوں گے جو غالب اضطراب، جو موجودہ مسئلہ میں مہین ساخت ہے، کے لئے درست ہوں۔ ثانوی اضطراب (زمین بخارا) J_z میں، جو یہاں حصہ ۶.۲.۱ میں پیش کئے گئے مسئلہ میں عامل A کا کردار ادا کرتا ہے، باقی انحطاط اٹھاتا ہے۔ عامل J_z تخنیک لحاظ سے H_Z' کے ساتھ غیر متعلقہ ہے، تاہم مساوات ۶.۷۳ کی وسط نقطہ نظریہ سے یہ متعلقہ ہوں گے۔

Lande g-factor^{۲۹}

Bohr magneton^{۳۰}



شکل ۶.۹: چکر و مدار ربط کی عدم موجودگی میں L اور S علیحدہ علیحدہ بقائی نہیں ہوں گے؛ یہ اٹل کل زاویائی معیار حرکت J کے گرد استقبالی حرکت کرتے ہیں۔

سوال ۶.۲۱: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2ljm_j\rangle$ پر غور کریں۔ کمزور میدان زیران بنوارے کی صورت میں ہر ایک حال کی توانائی تلاش کر کے شکل ۶.۱۰ کی طرز کا خاکہ بنا کر دکھائیں۔ بیرونی B بڑھانے سے توانائیاں کس طرح ارتقا کرتی ہے۔ ہر خط کو نام دے کر اس کی ڈھلوان دکھائیں۔

۶.۴.۲ طاقتور میدان زیران اثر

اگر اندرونی $B \gg$ بیرونی B ہو تب زیران اثر غالب ہوگا میدان بیرونی B کو z محور پر رکھ کر موزوں کو انٹیم اعداد n ، l ، m_l ، اور m_s ہونگے جبکہ j اور m_j نہیں ہونگے چونکہ بیرونی قوت مسروڑ کی صورت میں کل ضیائی معیار حرکت بقائی نہیں ہوگا جبکہ L_z اور S_z ہونگے زیران ہیملٹن

$$H'_Z = \frac{e}{2m} B_{\text{بیرونی}} (L_z + 2S_z)$$

جبکہ غیر مضطرب توانائی درج ذیل ہوگی

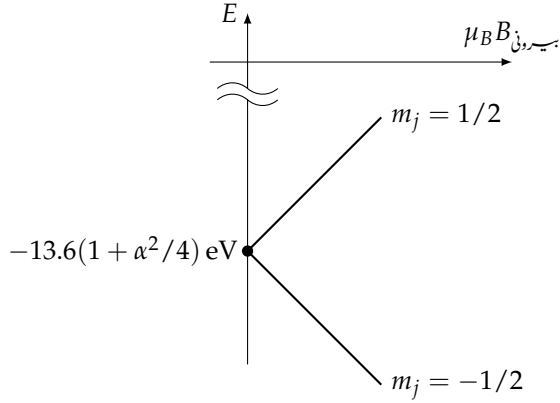
$$(۶.۷۹) \quad E_{nmlms} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} + \mu_B B_{\text{بیرونی}} (m_l + 2m_s)$$

مہین ساخت کو مکمل نظر انداز کرتے ہوئے یہی جواب ہوگا تاہم اس سے بہتر کر سکتے ہیں رتبہ اول نظریہ اضطراب میں ان سطحوں کی مہین ساخت تصحیح درج ذیل ہوگی

$$(۶.۸۰) \quad E_{fs}^1 = \langle nlm_l m_s | (H'_r + H'_s) | nlm_l m_s \rangle$$

اضافیتی قصہ وہی ہوگا جو پہلے تھا مساوات 57.6 چکر و مدار جزو مساوات 61.6 کے لیے ہمیں درج ذیل درکار ہوگا

$$(۶.۸۱) \quad \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \langle S_x \rangle \langle L_x \rangle + \langle S_y \rangle \langle L_y \rangle + \langle S_z \rangle \langle L_z \rangle = \hbar^2 m_l m_s$$



شکل ۶.۱۰: ہائیڈروجن کے زمینی حالت کی کمزور میدان زمین بخارا؛ بالائی لکیر ($m_j = 1/2$) کی ڈھلوان 1 ہے؛ نچلی لکیر ($m_j = -1/2$) کی ڈھلوان -1 ہے۔

دھیان رہے کہ S_z اور L_z کہ امتیازی تفاعلات کے لیے $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ ہوگا ان تمام کو اکٹھے کر کے سوال 22.6 ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں

$$(۶.۸۲) \quad E_{fs}^1 = \frac{13.6 \text{ eV}}{n^3} \alpha^2 \left\{ \frac{3}{4n} - \left[\frac{l(l+1) - m_l m_s}{l(l+1/2)(l+1)} \right] \right\}$$

چو کورٹوسین کا جزو $l = 0$ کے لئے غیر تعین ہوگا یہاں اس کی درست قیمت ایک ہے سوال 24.6 دیکھیں زمین حصہ مساوات 79.6 اور مہین ساخت حصہ مساوات 82.6 کا مجموعہ کل توانائی دے گا سوال ۶.۲۲: مساوات 80.6 سے آغاز کر کے مساوات 57.6، 61.6، 64.6 اور 81.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 82.6 اخذ کریں

سوال ۶.۲۳: آٹھ عدد $n = 2$ حالات $|2l m_j m_s\rangle$ پر غور کریں طافتور میدان زمین بانٹ کی صورت میں ہر حال کی توانائی تلاش کرے اپنے جواب کو پور توانائی l^2 کے راست متناسب مہین ساخت اور $\mu_B B$ کے براہ راست متناسب میدان حصہ کہ مجموعہ کی صورت میں لکھیں مہین ساخت کو مکمل طور پر نظر انداز کرتے ہوئے منفرد سطحوں کی تعداد کتنی ہوگی اور ان کے انخطاط کیا ہوں گے

سوال ۶.۲۴: اگر $l = 0$ ہو تب $m_j = m_s$ ، $j = s$ ہوگا لہذا کمزور اور طافتور میدانوں کے لیے موزوں حالات ($|nm_s\rangle$) ایک جیسے ہوں گے مساوات 72.6 سے E_Z^1 اور مساوات 67.6 سے مہین ساخت توانائیاں تعین کر کے میدان کی طاقت سے قطع نظر $l = 0$ کیلئے زمین اثر کا عمومی نتیجہ لکھیں دکھائیں کہ درمیانی چو کورٹوسین رکن کی قیمت ایک لیتے ہوئے طافتور میدان کلیہ مساوات 82.6 یہی نتیجہ دے گا

۶.۴.۳ درمیانی طاقت میدانِ زیماں اثر

درمیانی طاقت میدان کی صورت میں نہ H'_Z اور نہ ہی H'_{fs} غالب ہوگا لہذا ہمیں دونوں کو ایک نظریے دیکھ کر پورے ہیملٹنی مساوات 42.6 کے اضطراب تصور کرنا ہوگا

$$(۶.۸۳) \quad H' = H'_Z + H'_{fs}$$

میں $n = 2$ صورت پر اپنی توجہ محدود کرتے ہوئے وہ حالات جن کی وصف l ، j اور m_j بیان کرتی ہے کو اخطاطی نظریہ اضطراب کا اساس لیتا ہوں کلیش گورڈن عددی سر سوال 51.4 یا جدول 8.4 استعمال کرتے ہوئے $|jm_j\rangle$ کو $|sm_s\rangle |lm_l\rangle$ کا خطی جوڑ لکھ کر درج ذیل ہوگا

$$l = 0 \begin{cases} \psi_1 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_2 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = |00\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

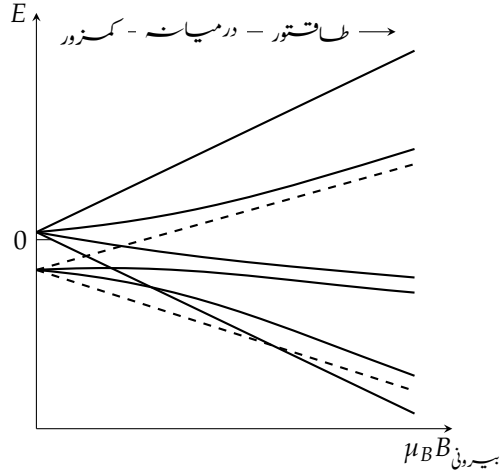
$$l = 1 \begin{cases} \psi_3 \equiv |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = |11\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ \psi_4 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-3}{2}\rangle = |1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_5 \equiv |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_6 \equiv |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|11\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_7 \equiv |\frac{3}{2} \frac{-1}{2}\rangle = \sqrt{1/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \\ \psi_8 \equiv |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{2/3}|1-1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|10\rangle |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle \end{cases}$$

اس اساس میں H'_{fs} کے تمام غیر صفرو تالیبی ارکان جنہیں مساوات 66.6 دیتی ہے و تہر پائے جاتے ہیں H'_Z کے چار غیر درتی ارکان پائے جاتے ہیں اور \mathbf{W} - کا مکمل متالب سوال 25.6 دیکھیں درج ذیل ہوگا

$5\gamma - \beta 0$	00	00	00
$05\gamma + \beta$	00	00	00
00	$\gamma - 2\beta 0$	00	00
00	$0\gamma + 2\beta$	00	00
00	00	$\gamma - \frac{2}{3}\beta \frac{\sqrt{2}}{3}\beta$	00
00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma - \frac{1}{3}\beta$	00
00	00	00	$\gamma + \frac{2}{3}\beta \frac{\sqrt{2}}{3}\beta$
00	00	00	$\frac{\sqrt{2}}{3}\beta 5\gamma + \frac{1}{3}\beta$

جہاں درج ذیل ہوں گے

$$\gamma \equiv (\alpha/8)^2 13.6 \text{ eV} \quad \text{اور} \quad \beta \equiv \mu_B B \text{ ہیرڈی}$$



شکل ۶.۱۱: کمزور، درمیانہ اور طفتور میدان میں ہائیڈروجن کے $n = 2$ حال کا زیرمان بنواری۔

ابتدائی چار امتیازی افتدار پہلے سے وترپرد کھائے گئے ہیں اب صرف دو 2×2 ڈیوں کی امتیازی افتدار تلاش کرنا باقی ہے ان میں سے پہلی کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$\lambda^2 - \lambda(6\gamma - \beta) + \left(5\gamma^2 - \frac{11}{3}\gamma\beta\right) = 0$$

جس سے دو درجی کلیب درج ذیل امتیازی افتدار دے گا

$$(۶.۸۴) \quad \lambda_{\pm} = -3\gamma + (\beta/2) \pm \sqrt{4\gamma^2 + (2/3)\gamma\beta + (\beta^2/4)}$$

دوسرے ڈیے کی امتیازی افتدار یہی مساوات دے گی لیکن اس میں β کی علامت الٹ ہوگی ان آٹھ توانائیوں کو جدول 2.6 میں پیش کیا گیا ہے اور شکل ۶.۱۱ میں بیرونی B کے لحاظ سے ترسیم کیا گیا ہے صفر میدان حد $\beta = 0$ میں یہ مہین ساخت قیمتیں دیتی ہیں کمزور میدان $\gamma \gg \beta$ کی صورت میں یہ سوال 21.6 میں حاصل نتائج دیتی ہے طفتور میدان $\gamma \ll \beta$ کی صورت میں سوال 23.6 کے نتائج حاصل ہونگے دھیان رہے جیسا سوال 23.6 میں پیشگوئی کی گئی تھی کہ بہت زیادہ طفتور میدانوں میں یہ پانچ منفرد توانائیوں کی سطحوں پر مرکوز ہوں گے۔

سوال ۶.۲۵: فتالٹی ارکان H'_Z اور H'_{fs} دریافت کر کے $n = 2$ کے لئے مستن میں دیا گیا فتالب W مرتب کریں۔

سوال ۶.۲۶: ہائیڈروجن کے $n = 3$ حالات کے لیے کمزور، طفتور اور درمیانہ میدان خطوں کے لیے زیرمان اثر کا تجزیہ کریں جدول 2.6 کی طرز پر توانائیوں کا جدول تیار کر کے انہیں بیرونی میدان کے تقاسل کے طور پر ترسیم

باب ۶. غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب

کریں جیسا شکل 12.6 میں کیا گیا تصدیق کیجئے گا کہ درمیان میدان کے نتائج دو تحدیدی صورتوں میں تخفیف ہو کر درست قیمتی دیتی ہے

۶.۴.۴ نہایت مہین بٹوارہ

پروٹان خود ایک مقناطیسی جفت قطب ہے اگرچہ نسب نما میں کمیت کی بنا پر اس کا جفت قطب معیار اثر الیکٹران کے جفت قطب معیار اثر سے بہت کم ہوگا مساوات 60.6

$$(۶.۸۵) \quad \mu_p = \frac{g_p e}{2m_p} S_p, \quad \mu_e = -\frac{e}{m_e} S_e$$

پروٹان ایک مخلوط ساخت کا ذرہ ہے جو تین کوارکوں پر مشتمل ہے لہذا اس کا مقناطیسی نسبت الیکٹران کی مقناطیسی نسبت کی طرح سادہ نہیں ہوگا جس کی بنا پر صریح g جذب ضربی g_p لکھا گیا ہے جس کی پیمائش قیمت 59.5 ہے جو الیکٹران کی قیمت دو سے مختلف ہے کلاسیکی برقی حرکیات کے تحت جفت قطب μ درج ذیل مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے

$$(۶.۸۶) \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\mu}] + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu} \delta^3(r)$$

یو پروٹان کے مقناطیسی جفت قطب معیار اثر سے پیدا مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا ہیمیلٹنی درج ذیل ہوگا مساوات 58.6

$$(۶.۸۷) \quad H'_{hf} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \delta^3(r)$$

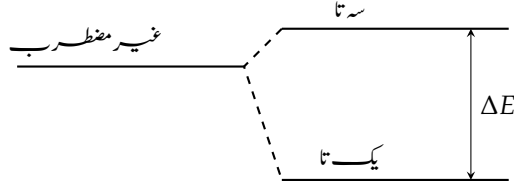
نظریہ اضطراب کے تحت توانائی کی اول رتبہ تخفیف مساوات ۹.6 اس طرح بھی ہیمیلٹنی کی توقعاتی قیمت ہوگی

$$(۶.۸۸) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e)}{r^3} \rangle + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle |\psi(0)|^2$$

زمینی ہال میں یا کسی دوسری ایسے حال میں جس میں $l = 0$ ہو توقف عمل موج کروئی تشکلی ہوگا لہذا اول توقعاتی قیمت صفر ہوگی سوال 27.6 دیکھیں ساتھ ہی مساوات 80.4 کے تحت $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ ہوگا لہذا زمینی ہال میں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۸۹) \quad E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e \rangle$$

چونکہ اس میں دو چپکروں کے بیچ ضرب نقطہ پایا جاتا ہے لہذا اس کو چپکر چپکر ربط کہتے ہیں جیسا چپکر مدار ربط میں $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ پایا جاتا ہے چپکر چپکر ربط کی موجودگی میں انفرادی چپکر زاویائی معیار اثر قبائی نہیں رہتے ہیں موزوں حالات کل



شکل ۶.۱۲: ہائیڈروجن کے زمینی حال کا نہایت مہین بنوارا۔

چپکر کے امتیازی سمتیات ہونگے

$$(۶.۹۰) \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p$$

پہلے کی طرح ہم اس کا مربع لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(۶.۹۱) \quad \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e = \frac{1}{2} (S^2 - S_e^2 - S_p^2)$$

اب الیکٹران اور پروٹون دونوں کا چپکر ایک ہٹا دو ہے لہذا $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\hbar^2$ ہوگا۔ سہ تا حال تمام چپکر متوازی ہیں کل چپکر ایک ہوگا جس کے تحت $S^2 = 2\hbar^2$ ہوگا۔ یک تا حال میں کل چپکر صفر لہذا $S^2 = 0$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۲) \quad E_{hf}^1 = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_pm_e^2c^2a^4} \begin{cases} +1/4, & \text{سہ تا} \\ -3/4, & \text{یک تا} \end{cases}$$

چپکر چپکر ربط زمینی نیچال کے چپکر انحطاط کو توڑ کر سہ تشکیل کو اٹھاتا جبکہ یک تا کو دباتا ہے (شکل ۶.۱۲)۔ یوں ان کے درمیان توانائی کا فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۳) \quad \Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_pm_e^2c^2a^4} = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

سہ تا حال سے یک تا حال انتقال کے دوران خارج نور سے کا تعدد درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۴) \quad \nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420 \text{ MHz}$$

اور اس کی مطابقتی طول موج $c/\nu = 21 \text{ cm}$ ہوگی جو خود موج خطے میں پایا جاتا ہے۔ یہ کائنات میں انحراف کی صورت میں وہ مشہور ۲۱ سینٹی میٹر تخی خط ہے جو ہر طرف پایا جاتا ہے سوال ۶.۲۷: فرض کریں a اور b دو مستقل سمتیات ہیں درج ذیل دکھائیں

$$(۶.۹۵) \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_r) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

نکمل ہمیشہ کی طرح $0 < \theta < \pi$ ، $0 < \phi < 2\pi$ کر لیا گیا ہے اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ان حالات کے لئے جن کے لیے $l = 0$ ہو درج ذیل دکھائیں

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{a}_r)(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{a}_r) - \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0$$

اشارہ: $\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$

سوال ۶.۲۸: ہائیڈروجن کلب میں موزوں تربیم کرتے ہوئے درج ذیل کے لیے زمینی حال کی مہین ساخت تعیین کریں (الف) میونی ہائیڈروجن جس میں ایکٹران کی بجائے میون ہوگا جس کا بار اور g حبزو ضرب الیکٹرون کے بار اور g حبزو ضرب کے برابر لیکن کمیت 207 گنا زیادہ ہے (ب) پازیشٹرانیم جس میں پروٹان کی جگہ پوزیشٹران ہوگا جس کی کمیت اور g حبزو ضرب اور الیکٹران کی کمیت اور g حبزو ضرب لیکن علامت الٹ ہے (ج) میونیم جس میں پروٹان کی جگہ زد میون ہوگا جس کی کمیت اور g حبزو ضرب عین میونی کے لیکن بار مخالف ہے اشارہ: یاد رہے کہ تحقیق شدہ کمیت سوال 1.5 استعمال کرتے ہوئے ان عجیب جوہروں کا رداس بوہر حاصل کیا جائے گا دیکھا گیا ہے کہ پازیشٹرونیم کے لئے حاصل جواب $4.85 \times 10^{-4} \text{ eV}$ تجرباتی حاصل قیمت $8.41 \times 10^{-4} \text{ eV}$ سے بہت مختلف ہے اس مشرق کی وجہ نابودی $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ہے جو اضافی $(3/4)\Delta E$ حصہ ڈالتی ہے اور جو سادہ ہائیڈروجن میونی ہائیڈروجن اور میونیم میں نہیں ہوتا

سوال ۶.۲۹: مرکزہ کی مستحالی جسامت کی بنا پر ہے ہائیڈروجن کے زمینی حال توانائی میں تصحیح کی انداز قیمت تلاش کریں پروٹان کو رداس b کا ایک ساں بار دار کروئی خول تصور کریں یوں خول کے اندر الیکٹران کی مخفی توانائی مستقل $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$ ہوگی یہ درحقیقت درست نہیں ہے لیکن یہ سادہ ترین نمونہ ہے جس سے ہمیں مقدار کا اندازہ ہو سکے گا اپنے جواب کو ایک چھوٹی مقدار معلوم b/a کے روپ میں طاقتی تسلسل میں پھیلا کر جہاں a رداس بوہر ہے صرف ابتدائی حبزورکھ کر آپ کا جواب درج ذیل روپ اختیار کرے گا

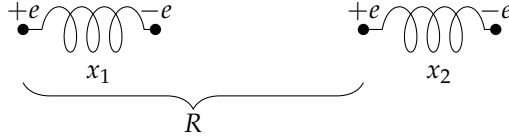
$$\frac{\Delta E}{E} = A(b/a)^n$$

آپ نے مستقل A اور طاقت n کی قیمتے تعیین کرنی ہے آخر میں $10e - 15 \text{ meter}$ b جو تقریب پروٹان کا عدد اس ہے پڑ کر کے اصل عدد تلاش کریں اس کا موازنہ مہین ساخت اور نہایت مہین ساخت کے ساتھ کریں

سوال ۶.۳۰: زیر سستی خاصیت کے تین آبادی ہارمونی مشغول سوال 38.4 پر غور کریں اضطراب

$$H' = \lambda x^2 y z$$

جہاں λ ایک مستقل ہے کا درج ذیل صورت میں رتبہ اول تک اثر پر بحث کریں
۱. زمینی حال



شکل ۶.۱۳: دو متابل تنظیم۔ مترجمی جوہر (سوال 31.6)۔

ب۔ سہتا انحطاطی پہلی حبان حال اشارہ: سوال 13.2 اور 33.3 کے جوابات استعمال کریں

سوال ۶.۳۱: وندروالز باہم عمل دو جوہر پر غور کریں جن کے بیچ فاصلہ R ہے چونکہ دونوں برقی معطل ہیں لہذا آپ فرض کر سکتے ہیں کہ ان کے بیچ کوئی قوت نہیں پائی جائے گی تاہم اگر یہ کابل تنظیم ہو تب ان کے بیچ کمزور قوت کشش پایا جائے گا اس نظام کی نمونہ کشی کرنے کی خاطر ہر ایک جوہر کو ایک الیکٹرون جس کی قیمت m اور بار $-e$ ہو ایک مرکز $+e$ کے ساتھ ایک اسپرنگ مقیاس پلک کے سے جڑا ہوا تصور کریں (شکل ۶.۱۳)۔ ہم فرض کریں گے بھاری ہونے کے بنا پر غیر متحرک یعنی ساکن ہوں گے اس غیر مضطرب نظام کا ہیملٹنی درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۹۶) \quad H^0 = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

ان جوہروں کے بیچ کولمب باہم عمل درج ذیل ہوگا

$$(۶.۹۷) \quad H' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} \right)$$

ا۔ مساوات 97.6 کی تفصیل پیش کریں فاصلہ R سے $|x_1|$ اور $|x_2|$ کی قیمتوں کو بہت کم تصور کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$(۶.۹۸) \quad H' \cong -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

ب۔ دکھائیں کہ کل ہیملٹنی مساوات 96.6 جمع مساوات 98.6 دوہار مونی سرکش ہیملٹن یوں

(۶.۹۹)

$$H = \left[\frac{1}{2m} p_+^2 + \frac{1}{2} \left(k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_+^2 \right] + \left[\frac{1}{2m} p_-^2 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_-^2 \right]$$

میں زیرے تبدیلی متغیرات

$$(۶.۱۰۰) \quad X_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 \pm x_2), \quad p_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 \pm p_2)$$

علیحدہ ہوگا

باب ۶. غیر تاجع وقت نظریہ اضطراب

ج. اس ہیملٹنی کی زمینی حال توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۶.۱۰۱) \quad E = \frac{1}{2} \hbar(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{جہاں } \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{k \mp (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)}{m}}$$

کولمب باہم عمل کے بغیر یہ $E_0 = \hbar\omega_0$ ہوتا جہاں $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ہے درج ذیل $k \gg (e^2/4\pi\epsilon_0 R^3)$ فرض کرتے ہوئے دکھائیں

$$(۶.۱۰۲) \quad \Delta V \equiv E - E_0 \cong -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^6}$$

ماخوس: دونوں جوہروں کے بچ کشتی مخفی پایا جاتا ہے جو ان کے بچ فاصلہ کے چھٹی طاقت کے تغیر معکوس ہے یہ دو معدل جوہروں کے بچ وندروال باہم عمل ہے

د. اسی حساب کو دور تہی نظریہ اضطراب کی مدد سے دوبارہ کریں اشارہ: غیر مضطرب حالات کی روپ $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ ہوگی جہاں $\psi_n(x)$ ایک ذرا مرتش تقا عمل موج ہے جہاں m کیت اور مقیاس پلک k ہوگا مساوات 98.6 میں دی گئی اضطراب کے لیے زمینی حال توانائی کی دور تہی تخفیف ΔV ہوگی دھیان رہے کہ رتبہ اول تخفیف صفر ہے

سوال ۶.۳۲: فرض کریں ایک مخصوص کوانٹم نظام کا Hamiltonian کسی مقدار معلوم λ کا تفاعل ہو. $H(\lambda)$ کے امتیازی اقدار کو اور امتیازی تفاعلات $E_n(\lambda)$ اور $\psi_n(\lambda)$ لیں۔ مسئلہ Feynman-Hellmann درج ذیل کہتا ہے

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi_n \right\rangle$$

جہاں E_n کو غیر انخطاطی تصور کریں اور اگر انخطاطی ہوں تب تمام ψ_n کو انخطاطی امتیازی تفاعلات کے موضوع خطی جوڑ تصور کریں۔

(جبروالف): مسئلہ Feynman-Hellmann ثابت کریں۔ (اشارہ: مسئلہ 9.6 استعمال کریں۔)

(جبروب): درج ذیل یقودی ہمار مونی مقدار اسکا اطلاق کریں۔

(ایک)

$\lambda = \omega$

لیں جس سے V کی توقعاتی قیمت کا کلیہ اخذ ہوگا۔

(دو)

$\lambda = \hbar$

لیں جو $\langle T \rangle$ دے گا اور

(تین)

$\lambda = m$

جو $\langle T \rangle$ اور $\langle V \rangle$ کے درمیان رشتہ دے گا۔ اپنے جوابات کا سوال 12.2 اور مسئلہ virial کی پیشگوئیوں کے ساتھ موعا زنا کریں۔

سوال ۶.۳۳: مسئلہ Feynman-Hellmann استعمال کرتے ہوئے ہالے ڈرو جسکے لئے $1/r$ اور $1/r^2$ کی توقعاتی قیمتیں تین کی حساب کتابیں ہیں راداسی تفعالات امواج کا موثر Hamiltonian مساوات 53.4 درج ذیل ہے:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

اور امتیازی افتدار جنہیں L کی صورت میں لکھا گیا ہے مساوات 70.4 درج ذیل ہونگے

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon^2\hbar^2(j_{max} + l + 1)^2}$$

(جذبہ الف):

مسئلہ Feynman-Hellmann میں $e = \lambda$ استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 55.6 کے ساتھ کریں۔

(جذبہ ب):

$\lambda = l$ کو استعمال کرتے ہوئے $\langle 1/r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے نتیجے کی تصدیق مساوات 56.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۴: رشتہ Kramers'

$$\frac{s+1}{n^2} \langle r^s \rangle - (2s+1)a \langle r^{s-1} \rangle n + \frac{s}{4} [(2l+1)^2 - s^2] a^2 \langle r^{s-2} \rangle = 0$$

صابطہ کریں جو ہالے ڈرو جسکے حال ψ_{nlm} میں الیکٹران کے لئے R کی توقعاتی قیمتوں کی تین مختلف طاقتوں $(s, s-1, s-2)$ کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اشارہ: راداسی مساوات 53.4 کو درج ذیل روپ میں لکھ کر

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2 a^2} \right] u.$$

۔ $\int (ur^s u'') dr$ کو $\langle r^s \rangle$ ، $\langle r^{s-1} \rangle$ ، $\langle r^{s-2} \rangle$ کی صورت میں لکھیں اسکے بعد تکامل bilhis کے ذریعے دہرا تفروق کو بیٹھائیں۔ دیکھائیں کے

$$\int (ur^s u') dr = -(s/2) \langle r^{s-1} \rangle$$

اور

$$\int (u' r^s u') dr = -[2/(s+1)] \int (u'' r^{s+1} u') dr$$

ہوگا اسی کو لے کر آگے چلیں

سوال ۶.۳۵: (جذبہ الف):

رشتہ Kramers' مساوات 104.6 میں $s = 0, s = 1, s = 2$ اور $s = 3$ کے ڈال کے $\langle r^{-1} \rangle$ ، $\langle r \rangle$ ، $\langle r^2 \rangle$ اور $\langle r^3 \rangle$ کے قلیات حاصل کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ اس طرح چلتے ہیں کسی بھی مثبت طاقت کے لئے قلیا دریافت کر سکتے ہیں۔

(جذبہ ب):

باب ۶. غیر تابع وقت نظریہ اضطراب

دوسرے رخ آپکو مثلاً درپیش ہوگا آپ $-1 = s$ پر کر کے دیکھیں گے آپکو صرف $\langle r^{-2} \rangle$ اور $\langle r^{-3} \rangle$ کے بیچ رشتہ حاصل ہوگا۔

حیزوج: اگر آپ کسی طریقے سے $\langle r^{-2} \rangle$ دریافت کر پائیں تب آپ رشتہ Kramers استعمال کر کے باقی تمام منفی قوتوں کے لئے کلیات دریافت کر سکتے ہیں۔

مسوات 56.6: جسے سوال 33.6 میں اخذ کیا گیا ہے اسے استعمال کرتے ہوئے $\langle r^{-3} \rangle$ تعین کریں اور اپنے نتیجہ کی تصدیق مسوات 64.6 کے ساتھ کریں۔

سوال ۶.۳۶: ایک جوہر کو یقیناً بیرونی برقی میدان E میں رکھنے سے توانائی کی سطحیں بٹتی ہیں جسے سٹارک اثر کہا جاتا ہے اور جو zemann اثر کا برقی ماسل ہے اس سوال میں ہم حالے ڈروجین کے $n = 1$ اور $n = 2$ حالات کے لئے سٹارک اثر کا تجزیہ کرتے ہیں۔ فرض کریں میدان Z رخ ہے لہذا الیکٹران کی مخفی توانائی درج ذیل ہوگی:

$$H'_S = eE \text{ بیرونی } z = eE \text{ بیرونی } r \cos \theta$$

اسکو hamiltonian bohr مسوات 42.6 میں اضطراب تصور کریں اس مسئلہ میں چکر کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کرتے ہوئے عمدہ ساخت کو رد کریں۔

(حیزوالف):

اول رتبہ میں زمینی حال توانائی اس اضطراب سے اثر انداز نہیں ہوتی۔

(حیزوب):

پہلا ہیجان حال 4 پرست، $\psi_{210}, \psi_{21-1}, \psi_{200}, \psi_{211}$ انحطاطی نظریہ اضطراب استعمال کرتے ہوئے، توانائی کی رتبہ اول کا سہی تعین کریں۔ توانائی E_2 کتنے سطحوں میں بٹے گا؟

(حیزوج):

درج بالا حیزوب میں موضوع تفاعلات موج کیا ہو گئے؟ ان میں سے ہر ایک موضوع حالات میں برقی جو عطف قطب معیار اثر $(p_e = -er)$ کی توقعاتی قیمت معلوم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ نتائج لاگو میدان کے تعابیع نہیں ہو گئے اس طرح غائب ہے کہ پہلی ہیجان حال میں حالے ڈروجین برقی جو عطف قطب معیار اثر کا حاصل ہوگا۔ اشارہ: اس سوال میں بہت سارے تاکسلات پائے جاتے ہیں تاہم تقریباً تمام کی قیمت سفر ہے لہذا حاب سے قبل غور کریں اگر ϕ مکمل سفر ہو تب r اور θ نکلات حل کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی حیزوی جواب

$$W_{13} = W_{31} = -3eaE \text{ بیرونی } z$$

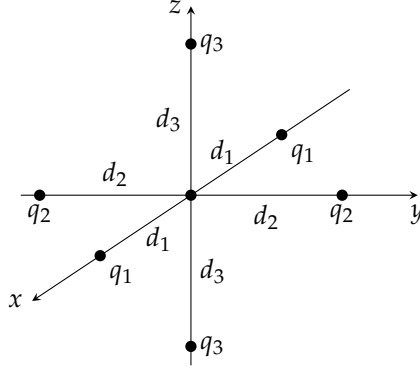
باقی تمام ارکان سفر ہیں۔)

سوال ۶.۳۷: حالے ڈروجین کی $n = 3$ حالات کے لئے سٹارک اثر سوال 36.6 پر غور کریں ابتداءً طور پر چکر کو نظر انداز کرتے ہوئے اب انحطاطی حالات ψ_{3lm} ہو گئے اور اب ہم رخ برقی میدان چالو کرتے ہیں۔

(حیزوالف):

اضطرابی hamiltonian کو غائب کرنے والا 9×9 کا کالم تیار کریں حیزوی جواب

$$\langle 300|z|310 \rangle = -3\sqrt{6}a, \langle 310|z|320 \rangle = -3\sqrt{3}a, \langle 31 \pm 1|z|32 \pm 1 \rangle = -(9/2)a.$$



شکل ۶.۱۴: ہائیڈروجن جوہر کے گرد چھ نقطی بار (متلی حبال کا ایک سادہ نمونہ)؛ سوال 39.6

(حبزوب):

امتیازی اقتدار اور انکی انحطاط دریافت کریں

سوال ۶.۳۸: ڈوٹرئم کی زمینی حال میں نہایت موحین منتقلی کے دوران خارج کردہ پھوٹان کا طول موج میں تلاش کریں۔ ڈوٹرئم در حقیقت بھاری ہائے ڈروجن ہے جس کے مرکز میں ایک اضافی نوٹران پایا جاتا ہے پروٹان اور نوٹران ساتھ حبز کر ڈوٹرئم بناتے ہیں جس کا چکر ایک مقناطیسی دارا اثر

$$\mu_d = \frac{g_d e}{2m_d} S_d$$

اور ڈوٹرئم کا g حبز 71.1 ہے۔

سوال ۶.۳۹: ایک کالم میں متریبی بارد ارا کا بجلی میدان جوہر کی توانائی کی سطحوں کو مغطرب کرتا ہے۔ ایک تازہ نمونہ کے طور پر (شکل ۶.۱۴) فرض کریں ہائیڈروجن جوہر کی پڑوس میں نقطہ باروں کی تین جوڑیاں پای جاتی ہیں۔ (چونکہ اس سوال کے ساتھ چکر کا کوئی واسطہ نہیں ہے لہذا اسے نظر انداز کریں)

(حبزوالف):

درج ذیل

$$r \ll d_1, r \ll d_2, \text{ and } r \ll d_3,$$

کی صورت میں دیکھائے

$$H' = V_0 + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) r^2,$$

جہاں درج ذیل ہیں

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{\eta_i}{d_i^3},$$

اور

$$V_0 = 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2).$$

(حبزوب):

زمینی حال توانائی کی رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔

(حبزوج):

پہلی۔ ہیجان حالات ($n = 2$) کی توانائی کے لئے رتبہ اول کی تخفیف تلاش کریں۔ درج ذیل صورتوں میں یہ چار پڑتہ اخطائی نظام کتنی سطحوں میں بنے گا۔

ایک کابی تشابہ

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3,$$

کی صورت میں۔
(دو) چوں زاویہ تشابہ

$$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3 :$$

کی صورت میں۔

تین) آر تھوہامب تشابہ کی صورت میں تینوں مختلف ہونگے۔

سوال ۶.۴۰: بازوئیں ψ_n^1 کو غیر مضطرب طفالات امواج میں پھلائے مساوات 11.6 بغیر مساوات 10.6 کو بلکہ راستہ حال کرنا ممکن ہوتا ہے اسکی دو بلخصوص خوبصورت مثالیں درج ذیل ہیں۔
(الف)

ایک) ہائے ڈروجن کی زمینی حال میں سنارک اثر ایک یکساں بیرونی برقی میدان E کی موجودگی میں ہائے ڈروجن کی زمینی حال کا رتبہ اول تخفیف تلاش کریں (سوال 36.6 stark اثر دیکھیں)۔ اشارہ: حل کی درج ذیل روپ:

$$(A + Br + Cr^2)e^{-r/n} \cos \theta;$$

استعمال کر کے دیکھیں آپ نے مستطالات A, B, C کی ایسی قیمتیں تلاش کرنی ہیں جو مساوات 10.6 کو مطمئن کرتے ہوں۔

(دو) زمینی حال توانائی کی رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 کی مدد سے تعین کریں جیسا اپنے سوال 36.6 (الف) میں دیکھا رتبہ اول تخفیف سفر ہوگی۔ جواب:

$$-m(3a^2 e E_{\text{بیرونی}} / 2\hbar)^2.$$

(حبزوب)

اگر پروٹان کا برقی جہت قطب معیار اثر p ہو تا تب ہائے ڈروجن کے الیکٹرک کی مخفی توانائی درج ذیل مقدار سے مضطرب ہوتی۔

$$H' = \frac{ep \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2}$$

ایک) زمینی حال طفعال موج کی رتبی اول تخفیف کو مساوات 10.6 حل کر کے تلاش کریں۔
 دو) دیکھیں کہ رتبہ تک جو ہر کافضل برقی جو عفت قطب معر اثر حیرت کی۔ بات ہے سفر ہوگا۔
 تین) زمینی حال توانائی کی۔ رتبہ دوم تخفیف مساوات 14.6 سے تعین کریں رتبہ اول تخفیف کیا ہوگا؟

جوابات