کوانٹم میکانیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۳۰ اگست ۲۰۲۱

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱ کروی محدد میں مساوات شروڈنگر

تین ابعاد تک توسیع باآسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شروڈنگر درج ذیل کہتی ہے

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = H\Psi; \tag{۴.۱}$$

معیاری طریقہ کار کے اطلاق x کے ساتھ ساتھ y اور z پر کر کے:

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۴.۲}$$

ہیملٹنی عامل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$p \to \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{۴.۳}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{۴.۴}$$

---

[۱] جہاں کلاسیکی مشہود اور عامل میں فرق کرنا دشوار ہو، وہاں میں عامل پر "ٹوپی" کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہٰذا یہاں سے عاملین پر "ٹوپی" کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۴.۵}$$

کارتیسی محدد میں **لاپلاسی**[۲] ہے۔

مخفی توانائی V اور تفاعل موج Ψ اب $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $\mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $\left|\Psi(\boldsymbol{r}, t)\right|^2 \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}$ ہو گا اور معمول زنی شرط درج ذیل ہو گی

$$\int |\Psi|^2 \,\mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} = 1 \tag{۴.۶}$$

جہاں تکمل کو پوری فضا پر لینا ہو گا۔ اگر مخفی توانائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۷}$$

جہاں فضائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \tag{۴.۸}$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شروڈنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{۴.۹}$$

جہاں مستقلات c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(\boldsymbol{r}, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ **استمراریہ**[۳] حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے تکمل ہو گا۔)

سوال ۴.۱:

ا. عاملین $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{p}$ کے تمام **باضابطہ مقلبیت رشتے**[۴]: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{۴.۱۰}$$

جہاں اشاریے x ، y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔

[۲] Laplacian
[۳] continuum
[۴] canonical commutation relations

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفسٹ کی تصدیق کریں:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle \boldsymbol{p}\rangle \tag{۴.۱۱}$$

(ان میں سے ہر ایک در حقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ایک مساوات ایک جزو کے لیے ہو گا۔)
اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۲}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x\sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفیہ صرف مبدا سے فاصلہ کا تفاعل ہو گا۔ایسی صورت میں **کروی محدد**[۵] (r,θ,ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہو گا (شکل 4۔1)۔ کروی محدد میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big) \tag{۴.۱۳}$$

یوں کروی محدد میں تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\Big)\Big] + V\psi = E\psi \tag{۴.۱۴}$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi) \tag{۴.۱۵}$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big] + VRY = ERY$$

[۵] spherical coordinates

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کہ $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\Big\{\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\Big\}$$
$$+\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=0$$

پہلی خمدار قوسین میں جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہٰذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہو گی۔[6]

$$\frac{1}{R}\frac{d}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=l(l+1) \tag{۴.۱۶}$$

$$\frac{1}{Y}\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\Big\}=-l(l+1) \tag{۴.۱۷}$$

سوال ۴.۲: کارتیسی محدد میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی مربعی کنواں (یا ڈبہ میں ایک ذرہ):

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x\text{،}y \text{ اور } z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں}\\ \infty & \text{دیگر صورت}\end{cases}$$

حل کریں۔

ا. ساکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انحطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انحطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین ابعادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انحطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۴.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۴.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y\sin^2\theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=-l(l+1)Y\sin^2\theta \tag{۴.۱۸}$$

[6] ایسا کرنے سے ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازماً عدد صحیح ہونا ہو گا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانتے ہوں۔ یہ کلاسیکی برقی حرکیات میں مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{۴.۱۹}$$

استعمال کرکے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کرکے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کہ درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big] + l(l+1)\sin^2\theta\right\} + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا تفاعل ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تفاعل ہے، لہٰذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل[7] کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{\Theta}\Big[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big)\Big] + l(l+1)\sin^2\theta = m^2 \tag{۴.۲۰}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2 \tag{۴.۲۱}$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2\Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi} \tag{۴.۲۲}$$

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخر الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جا سکتا ہے جسے ہم Θ میں ضم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی مخفی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہٰذا برقی حرکیات میں اسمتی تفاعل (Φ) کو سائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نمائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نمائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہے ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہٰذا درج ذیل شرط[8] مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \tag{۴.۲۳}$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi i m} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{۴.۲۴}$$

---

[7] یہاں بھی ہم عمومیت نہیں کھوتے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔ انتباہ: اب حرف m دو مختلف چیزوں، کمیت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[8] یہ بظاہر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال کثافت $(|\Phi|^2)$ یک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کرکے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

جدول ۴.۱: ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں۔

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= x \\
P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5 &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}
$$

مساوات θ

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) + [l(l+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta = 0 \tag{۴.۲۵}$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = AP_l^m(\cos\theta) \tag{۴.۲۶}$$

جہاں P_l^m **شریک لیژانڈر تفاعل**[۹] ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{|m|}P_l(x) \tag{۴.۲۷}$$

اور l ویں لیژانڈر کثیر رکنی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے[۱۰] جس کی تعریف **کلیہ روڈریگیس**[۱۱]

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l (x^2-1)^l \tag{۴.۲۸}$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1) = x, \\
&P_2(x) = \frac{1}{4\cdot 2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)
\end{aligned}
$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیژانڈر کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

---

[۹] associated Legendre function

[۱۰] دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہو گا۔

[۱۱] Rodrigues formula

جدول ۴.۲: چند شریک لیژانڈر تفاعلات $P_l^m(\cos\theta)$

$P_0^0 = 1$	$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
$P_1^1 = \sin\theta$	$P_3^3 = 15\sin\theta(1-\cos^2\theta)$
$P_1^0 = \cos\theta$	$P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta$
$P_2^2 = 3\sin^2\theta$	$P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$
$P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta$	$P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

درجہ l کثیر رکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہو گی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیر رکنی نہیں ہو گا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3x\sqrt{1-x^2},$$
$$P_2^2(x) = (1-x^2)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}(3x^2-1)\Big] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (اب ہمیں $P_l^m(\cos\theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ہوتا ہے لہٰذا $P_l^m(\cos\theta)$ ہر صورت $\cos\theta$ کا کثیر رکنی ہو گا جسے طاق m کی صورت میں $\sin\theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos\theta$ کے چند شریک لیژانڈر تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔)

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہو گا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲۷ کے تحت $P_l^m = 0$ ہو گا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$l = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = -l, -l+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots l-1, l \tag{۴.۲۹}$$

ذرا رکیے! مساوات ۴.۲۵ دو رتبی تفرقی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفرقی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور (یا) $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے قابو بڑھتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنا یہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محدد میں حجمی رکن درج ذیل ہو گا

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۴.۳۰}$$

لہٰذا معمول زنی شرط (مساوات ۴.۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int |R|^2 r^2\,\mathrm{d}r \int |Y|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 1$$

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta,\phi)$

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$	$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin\theta(5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_2^{\pm 1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 \, \mathrm{d}r = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 1 \tag{۴.۳۱}$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفاعلات[۱۲] کو **کروی ہارمونیات**[۱۳] کہتے ہیں:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta \tag{۴.۳۲}$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہو گا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، کروی ہارمونیات عمودی ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta,\phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)] \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{۴.۳۳}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا l کو **اسمتی کوانٹائی عدد**[۱۴] جب کہ m کو **مقناطیسی کوانٹائی عدد**[۱۵] کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۷، ۴.۲۸ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_0^0 اور Y_2^1 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔

سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

---

[۱۲] معمول زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علامتیت کے ساتھ ہم آہنگی کی خاطر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہو گی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہو گا۔

[۱۳] spherical harmonics

[۱۴] azimuthal quantum number

[۱۵] magnetic quantum number

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (وہ) ناقابل قبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا خرابی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کرکے $Y_l^l(\theta,\phi)$ اور $Y_3^2(\theta,\phi)$ تشکیل دیں۔ (آپ P_3^2 کو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تشکیل دینا ہوگا۔) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کرکے لیژانڈر کثیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{2l+1}\right)\delta_{ll'} \tag{۴.۳۴}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: تکمل بالحصص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروی تشاکلی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta,\phi)$، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]R = l(l+1)R \tag{۴.۳۵}$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$u(r) \equiv rR(r) \tag{۴.۳۶}$$

$R = u/r$، $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r = [r(\mathrm{d}u/\mathrm{d}r)-u]/r^2$، $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[r^2(\mathrm{d}R/\mathrm{d}r)] = r\,\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2$ لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu \tag{۴.۳۷}$$

اس کو **رداسی مساوات**[۱۶] کہتے ہیں[۱۷] جو شکل و صورت کے لحاظ سے یک بعدی شروڈنگر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں **موثر مخفیہ**[۱۸] درج ذیل ہے

$$V_{\text{موثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{۴.۳۸}$$

---

[۱۶] radial equation

[۱۷] یہاں m کمیت کو ظاہر کرتی ہے؛ رداسی مساوات میں علیحدگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

[۱۸] effective potential

جس میں $[l(l+1)/r^2]$ $(\hbar^2/2m)$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو **مرکز گریز جزو**[19] کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبدا سے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_0^\infty |u|^2 \, \mathrm{d}r = 1 \tag{۴.۳۹}$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامتناہی کروی کنواں پر غور کریں۔

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \tag{۴.۴۰}$$

اس کے تفاعلات موج اور اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جبکہ کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\right] u \tag{۴.۴۱}$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{۴.۴۲}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مسلط کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = -k^2 u \implies u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \to 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے قابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب[20] کرنا ہو گا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہٰذا $ka = n\pi$ ہو گا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{n0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۴.۴۳}$$

---

[19] centrifugal term

[20] درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے قابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ متناہی ہو: مساوات ۴.۳۱ میں r^2 کی بنا مبدا پر $R(r) \sim 1/r$ معمول پر لانے کے قابل ہے۔

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہو گا۔ زاویائی جزو (جو $Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ کی بنا غیر اہم ہے) کو ساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r} \tag{۴.۴۴}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین **کوانٹائی اعداد**[۲۱] n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں: $\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$؛ جبکہ توانائی، E_{nl}، صرف n اور l پر منحصر ہو گی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr). \tag{۴.۴۵}$$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا **کروی بیسل تفاعل**[۲۲] ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا **کروی نیومن تفاعل**[۲۳] ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^l \frac{\cos x}{x} \tag{۴.۴۶}$$

مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x};\\
j_1(x) &= (-x)\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x};\\
j_2(x) &= (-x)^2\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\\
&= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2 \sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

---

[۲۱] quantum numbers
[۲۲] spherical Bessel function
[۲۳] spherical Neumann function

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$؛ چھوٹی x کے لئے متقاربی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$
$n_l \to -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \to \frac{2^l l!}{(2l+1)!}x^l$

دھیان رہے کہ مبدا پر بیسل تفاعلات متناہی ہیں جبکہ مبدا پر نیومن تفاعلات بے قابو بڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$R(r) = Aj_l(kr) \tag{۴.۴۷}$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہو گا

$$j_l(ka) = 0 \tag{۴.۴۸}$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہو گا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل 2.4 دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔ تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہو گا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہو گا

$$k = \frac{1}{a}\beta_{nl} \tag{۴.۴۹}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہو گا۔ یوں اجازتی توانائیاں

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{nl}^2. \tag{۴.۵۰}$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = A_{nl}j_l(\beta_{nl}r/a)Y_l^m(\theta,\phi). \tag{۴.۵۱}$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمول زنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا توانائی کی ہر سطح $(2l+1)$ گنا انحطاطی ہو گی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروی نیومن تفاعلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $x \gg 1$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبدا پر بے قابو بڑھتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروی کنواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں اجازتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$ ہو گا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \implies x = \tan x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو متناہی کروی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کے $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبدا پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل 3.4 دیکھیں)۔ قانون کولمب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہو گی

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{۴.۵۲}$$

لہٰذا رداسی مساوات ۴.۳۷ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u = Eu \tag{۴.۵۳}$$

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے اجازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہٰذا میں اس کو، ہارمونی مرتعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔)

کولمب مخفیہ، مساوات ۴.۵۲، ($E > 0$ کے لئے) استمراری حالات، جو الیکٹران پروٹون بکھراو کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہے، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موخر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہو گا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{۴.۵۴}$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \Big[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2}\Big]u$$

حاصل ہو گا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa} \tag{۴.۵۵}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \Big[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\Big]u \tag{۴.۵۶}$$

اس کے بعد ہم حالات کی متقاربی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \to \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہو گا لہٰذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{۴.۵۷}$$

تاہم ($\rho \to \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا ہمیں $B = 0$ لینا ہو گا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \tag{۴.۵۸}$$

اس کے برعکس $\rho \to 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛[24] لہٰذا تخمیناً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \to 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے قابو بڑھتا ہے لہٰذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \tag{۴.۵۹}$$

اگلے قدم پر متقاربی رویہ کو چھیلنے کی خاطر نیا تفاعل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \tag{۴.۶۰}$$

اس امید سے متعارف کرتے ہے کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \rho^l e^{-\rho}\Big[(l+1-\rho)v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\Big]$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} = \rho^l e^{-\rho}\Big\{\Big[-2l-2+\rho+\frac{l(l+1)}{\rho}\Big]v + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2}\Big\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں ردا سی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0 \tag{۴.۶۱}$$

آخر میں ہم فرض کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$، کو ρ کا طاقتی تسلسل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \tag{۴.۶۲}$$

---

[24] یہ دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علامتیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

ہمیں عددی سر (c_0، c_1، c_2، وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} jc_j\rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعہ میں "فرضی اشاریہ" j کو $j + 1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کے نیا مجموعہ $j = -1$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جزو ضربی $(j + 1)$ اس جزو کو ختم کرتا ہے لہٰذا ہم صفر سے بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\,v}{\mathrm{d}\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j \\ - 2\sum_{j=0}^{\infty} jc_j\rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)]\sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j = 0\end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(l+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(l+1)]c_j = 0$$

یا

$$c_{j+1} = \left\{\frac{2(j+l+1)-\rho_0}{(j+1)(j+2l+2)}\right\}c_j \tag{۴.۶۳}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ توالی عددی سر تعین کرتے ہوئے تفاعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کا روپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہے؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔[۲۵]

[۲۵] آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقتی تسلسل کی ترکیب $u(\rho)$ پر ہی کیوں لاگو نہیں کی گئی؛ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متقاربی رویہ کو کیوں (جزو ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ جزو ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلسل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہو گا)؛ ρ^{l+1} باہر نکالنے سے تسلسل کا پہلا جزو ρ^0 حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس جزو ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالنا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2}، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ توالی حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

آئے j کی بڑی قیمت (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابقتی ہوں گے جہاں بلند طاقتیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیے۔ یہاں کلیہ توالی درج ذیل کہتا ہے۔[۲۶]

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)}c_j = \frac{2}{j+1}c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$c_j = \frac{2^j}{j!}c_0 \tag{۴.۶۴}$$

لہٰذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!}\rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho} \tag{۴.۶۵}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے قابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت نما وہی غیر پسندیدہ متقاربی رویہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متقاربی حل بھی رداسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، $j_{\text{بلندتر}}$، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j_{\text{بلندتر}}+1)} = 0 \tag{۴.۶۶}$$

(یوں کلیہ توالی کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j_{\text{بلندتر}} + l + 1) - \rho_0 = 0$$

صدر کوانٹم عدد[۲۷]

$$n \equiv j_{\text{بلندتر}} + l + 1 \tag{۴.۶۷}$$

---

[۲۶] آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $2(l+1) - \rho_0$ اور نسب نما میں $2l + 2$ رد کرنے کی طرح $j + 1$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جا سکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہنا چاہتا ہوں۔

[۲۷] principal quantum number

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\rho_0 = 2n \tag{۴.۶۸}$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon^2\hbar^2\rho^2} \tag{۴.۶۹}$$

لہٰذا اجازتی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{۴.۷۰}$$

یہ مشہور زمانہ **کلیہ بوہر**[۲۸] ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913 میں، ناقابل استعمال کلاسیکی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شروڈنگر 1924 میں منظر عام ہوئی۔)

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \tag{۴.۷۱}$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} \tag{۴.۷۲}$$

رداس بوہر[۲۹] کہلاتا[۳۰] ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \tag{۴.۷۳}$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تفاعلات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \tag{۴.۷۴}$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\rho^{l+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{۴.۷۵}$$

---

[۲۸] Bohr formula

[۲۹] Bohr radius

[۳۰] رداس بوہر کو روایتی طور پر زیر نوشت کے ساتھ لکھا جاتا ہے: a_0، تاہم یہ غیر ضروری ہے لہٰذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $1 - l - n =$ بلند تر j کا کثیر رکنی ہوگا، جس کے عددی سر درج ذیل کلیہ توالی دے گا (اور پورے تفاعل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \tag{۴.۷۶}$$

زمینی حال[31] (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہوگا؛ طبعی مستقلات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = -\Big[\frac{m}{2\hbar^2}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\Big)^2\Big] = -13.6\,\text{eV} \tag{۴.۷۷}$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی **بندشی توانائی**[32] (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ مقدار جو جوہر کو باردارہ بنائے) $13.6\,\text{eV}$ ہے۔ مساوات ۴.۶۷ کے تحت $l = 0$ لہٰذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta,\phi) \tag{۴.۷۸}$$

کلیہ توالی پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہٰذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \tag{۴.۷۹}$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 \, \mathrm{d}r = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہٰذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{۴.۸۰}$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6\,\text{eV}}{4} = -3.4\,\text{eV} \tag{۴.۸۱}$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے یا m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی یہی توانائی ہوگی۔ کلیہ توالی

[31] ground state
[32] binding energy

(مساوات ۴.۷۶) $l = 0$ کے لئے $j = 0$ استعمال کرتے ہوئے $c_1 = -c_0$ اور $j = 1$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہٰذا $v(\rho) = c_0(1-\rho)$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a} \tag{۴.۸۲}$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاو عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہ توالی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2}re^{-r/2a} \tag{۴.۸۳}$$

(ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہو گا سوال 11.4 دیکھیں)۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۴.۸۴}$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکنہ قیمتوں کی تعداد $(2l+1)$ ہو گی (مساوات ۴.۲۹)، لہٰذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہو گی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2 \tag{۴.۸۵}$$

کثیر رکنی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہ توالی سے حاصل ہو گی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \tag{۴.۸۶}$$

جہاں

$$L_{q-p}^{p}(x) \equiv (-1)^p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^p L_q(x) \tag{۴.۸۷}$$

ایک **شریک لاگیغ کثیر رکنی**[۳۳] ہے جبکہ

$$L_q(x) \equiv e^x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^q\left(e^{-x}x^q\right) \tag{۴.۸۸}$$

q ویں **لاگیغ کثیر رکنی**[۳۴] ہے۔[۳۵] (جدول ۴.۵ میں چند ابتدائی لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں

---

[۳۳] associated Laguerre polynomial

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگیغ کثیر رکنیاں، $L_{q-p}^{p}(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تفاعلات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$

چند ابتدائی شریک لاگیغ کثیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تفاعل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل 4.4 میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیڈروجن کے معمول شدہ تفاعلات موج درج ذیل ہیں۔

$$\psi_{nlm}=\sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\,e^{-r/na}\left(\frac{2r}{na}\right)^l[L^{2l+1}_{n-l-1}(2r/na)]Y^m_l(\theta,\phi) \tag{۴.۸۹}$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولمب توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$\int\psi^*_{nlm}\psi_{n'l'm'}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{۴.۹۰}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیات کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور $(n \neq n')$ کی صورت میں H کی منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30}، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211}، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگیغ کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷، اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $n=5$، $l=2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توالی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $n=5$، $l=2$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

---

[۳۴] Laguerre polynomial

[۳۵] دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپکو کوئی نیا تکمل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہوگا، اور زمینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2$، $l = 1$، $m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x، y اور z کے لحاظ سے تشاکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin\theta \cos\phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپکو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + \mathrm{d}r$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2$، $l = 1$، $m = 1$ اور $n = 2$، $l = 1$، $m = -1$ کے درج ذیل خطی جوڑ سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت ی $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ کی صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۴ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں **عبور**[36] کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقناطیسی فوٹان کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔[37] عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہٰذا عبور (جنہیں "کوانٹم چھلانگ" کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے فرق

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \tag{۴.۹۱}$$

کے برابر ہوگا۔

---

[36] transition

[37] فطرتاً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل جاننا ضروری نہیں ہے۔

اب **کلیہ پلانک**[۳۸][۳۹] کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہو گی:

$$E_\gamma = h\nu \tag{۴.۹۲}$$

جبکہ **طول موج** $\lambda = c/\nu$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R\Big(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\Big) \tag{۴.۹۳}$$

جہاں

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c\hbar^3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}\Big)^2 = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \tag{۴.۹۴}$$

رڈبرگ مستقل[۴۰] کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا **کلیہ رڈبرگ**[۴۱] ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو قدرت کے بنیادی مستقلات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال $(n_f = 1)$ میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کار **لیمان تسلسل**[۴۲] کہتے ہیں۔ پہلی ہیجان حال $(n_f = 2)$ میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**[۴۳] کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، **پاشن تسلسل**[۴۴] دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل 7.4 دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ اخراجی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپکو پہلے مختلف ہیجان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلہ پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔) سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ **ہیلیم**[۴۵] میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ **لتھیم**[۴۶] میں $Z = 3$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$، بندشی توانائی $E_1(Z)$، رداس بوہر $a(Z)$، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں۔) برقناطیسی طیف کے کس خطہ میں

---

[۳۸] Planck's formula

[۳۹] فوٹان درحقیقت برقناطیسی اخراج کا ایک کوانٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوانٹم میکانیات قابل استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظریہ سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

[۴۰] Rydberg constant

[۴۱] Rydberg formula

[۴۲] Lyman series

[۴۳] Balmer series

[۴۴] Paschen series

[۴۵] Helium

[۴۶] Lithium

$Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ مخفیہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \to Ze^2$ ہو گا لہٰذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہو گا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجاذبی نظام تصور کریں۔

ا. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہو گا؟ (زمین کی کمیت m جبکہ سورج کی کمیت M لیں۔)

ب. اس نظام کا "رداس بوہر" a_g کیا ہو گا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر رداس r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہو گا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n-1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا اخراج ہو گا؟ جواب جاول میں دیں۔ خارج فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر **گریویٹان**) کا طول موج کیا ہو گا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا یہ حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کوانٹم عدد (n) حال کی توانائی تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی مقداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کوانٹم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدا کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{۴.۹۵}$$

جس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{۴.۹۶}$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x$، $p_y \to -i\hbar\partial/\partial y$، $p_z \to -i\hbar\partial/\partial z$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونی مرتعش کے اجازتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی اقدار حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبیت تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی اقدار

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]\end{aligned} \tag{۴.۹۷}$$

باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات 10.4 سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x ، y اور p_y ، z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں یوں درمیانی دو اجزاء حذف ہوں گے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \tag{۴.۹۸}$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم اشاریہ کی چکری ادل بدل $(x \to y, y \to z, z \to x)$ سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{۴.۹۹}$$

زاویائی معیار حرکت کی یہ بنیادی مقلبیت رشتے ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہو گا

دھیان رہے کہ L_x L_y اور L_z غیر ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں متعمم اصول عدم یقینیت مساوات 62.3 کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

یا

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right| \tag{۴.۱۰۰}$$

ہو گا یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے بیک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہو گا اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{۴.۱۰۱}$$

L_x کے ساتھ مقلوب ہے

$$\begin{aligned}[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\ &= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\ &= 0\end{aligned}$$

مقالب کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات 64.3 استعمال کیا ہے۔ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہوگا

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \tag{۴.۱۰۲}$$

یا مختصراً درج ذیل ہوگا

$$[L^2, \boldsymbol{L}] = 0 \tag{۴.۱۰۳}$$

اس طرح $\boldsymbol{L}$ کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہوگا اور ہم L^2 کا مثلاً L_z کے ساتھ بیک وقت امتیازی حالات تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f \tag{۴.۱۰۴}$$

ہم نے حصہ 1.3.2 میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی یہی ترکیب یہاں پر بھی استعمال کرتے ہیں

یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں

$$L\pm \equiv L_x \pm iL_y \tag{۴.۱۰۵}$$

L_z کا مقلب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

لہذا درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{۴.۱۰۶}$$

اور ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوں گے

$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{۴.۱۰۷}$$

میں دعوی کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_\pm(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا مساوات 107.4 کہتی ہے کہ

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۸}$$

لہذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_\pm f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہوگا جبکہ مساوات 106.4 کہتی ہے کہ

$$L_z(L_{\pm f}) = (L_z L_\pm) - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L \pm f + L_\pm(\mu f) = (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \tag{۴.۱۰۹}$$

لہذا انئی امتیازی قدر $\hbar \pm \mu$ کے لیے $L_{\pm}f$ L_z کا امتیازی تفاعل ہو گا ہم L_+ کو عامل رفعت کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو $\hbar$ بڑھاتا ہے جبکہ L_- عامل تقلیل کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو $\hbar$ کم کرتا ہے یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے حالات کی ایک سیڑھی ملتی ہے جس کا ہر پایہ قریبی پایہ سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے $\hbar$ کی ایک اکائی دور ہو گا شکل 8.4 سیڑھی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفعت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیڑھی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچیں گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہو گا جو ایک ناممکن صورت ہے سیڑھی کا بالائی پایہ f_t درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$L_+f_t = 0 \tag{۴.۱۱۰}$$

فرض کریں اس بالائی پایہ پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو حرف L کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی

$$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \tag{۴.۱۱۱}$$

اب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z) \end{aligned}$$

یا دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہو گا

$$L^2 = L_{\pm}L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z \tag{۴.۱۱۲}$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z)f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l)f_t = \hbar^2 l(l+1)f_t$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \tag{۴.۱۱۳}$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی قدر کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی قدر دیتی ہے ساتھ ہی اسی وجہ کی بنا سیڑھی کا سب سے نچلا پایہ f_b پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$L_- f_b = 0 \tag{۴.۱۱۴}$$

فرض کریں اس نچلے پایہ پر L_z کا امتیازی قدر $\hbar \bar{l}$ ہو

$$L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \tag{۴.۱۱۵}$$

مساوات 112.4 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا

$$L^2 f_b = (L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z)f_b = (0 + \hbar^2 l^{-2} - \hbar^2 \bar{l})f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1)f_b$$

لہذا درج ذیل ہو گا

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) \tag{۴.۱۱۶}$$

مساوات 113.4 اور 116.4 کا موازنہ کرنے سے $l(l+1) = \bar{l}(\bar{l}-1)$ ہو گا لہذا یا $\bar{l} = l+1$ ہو گا جو بے معنی ہے چونکہ نچلا پایہ سب سے اوپر (بالائی) پایہ سے بلند نہیں ہو گا یا درج ذیل ہو گا

$$\bar{l} = -l \tag{۴.۱۱۷}$$

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی اقدار $m\hbar$ ہونگے جہاں m جس کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی کی قیمت N قدموں میں $-l$ تا $+l$ ہو گی بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ لہذا $l = N/2$ ہو گا یوں l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہو گا امتیازی تفاعلات کو اعداد l اور m بیان کرتے ہیں

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \tag{۴.۱۱۸}$$

جہاں درج ذیل ہونگے

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots; \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \tag{۴.۱۱۹}$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی یعنی سیڑھی کے $2l + 1$ پایہ ہونگے بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل 9.4 کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے یہاں تیر کا نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں ان تمام کی لمبائیاں $\hbar$ کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l+1)}$ ہوں گی جو یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے جبکہ m کے z اجزاء m کی اجازتی قیمتیں $-2, -1, 0, 1, 2$ ہیں دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقادیر یعنی کرہ کا رداس z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑی ہے عموماً $\sqrt{l(l+1)} > l$ ہو گا ماسوائے $l = 0$ کی غیر اہم صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے کیا میں z محدد کو زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت مساوات 100.4 کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہو گا چلو مان لیا لیکن کیا یہ ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقاً z محدد کو $\boldsymbol{L}$ کے رخ منتخب کر لوں بالکل نہیں آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہے ایسا نہیں ہے کے آپ $\boldsymbol{L}$ کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرہ کے زاویائی معیار حرکت کی سمتیہ کے تینوں اجزاء قابل تعین نہیں ہو سکتے ہیں جیسا کہ اس کا مقام اور معیار حرکت بیک وقت قابل تعین نہیں ہونگے اگر L_z کی قیمت قابل تعین ہو تب L_x اور L_y کی قیمتیں قابل تعین نہیں ہو نگی شکل 9.4 میں سمتیات گمراہ کن ہے بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی لپائی کی جاتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y ناقابل تعین ہیں

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہونگا زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبیت رشتوں مساوات 99.4 سے ابتدا کرتے ہوئے ہم نے صرف الجبرائی تراکیب استعمال کرکے امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر L^2 اور L_z کی امتیازی اقدار تعین کیے آئے اب امتیازی تفاعلات تیار کریں جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہو گا میں کانٹے کی بات سے شروع کرتا ہوں $f_l^m = Y_l^m$ اور L^2 اور L_z کی امتیازی تفاعلات

وہی کروی ہارمونیات ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ 2.1.4 میں حاصل کیا یہی وجہ ہے کہ میں نے حروف l اور m استعمال کیے اب میں آپ کو بتاپاؤں گا کہ کروی ہارمونیات کیوں عمودی ہیں یہ الگ تھلگ امتیازی اقدار کے ہرمشی عاملین L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات ہیں

سوال ۴.۱۸: عمل رفت اور عمل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm}f_l^m = (A_l^m)f_l^{m\pm1} \tag{۴.۱۲۰}$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہوگا اشارہ پہلے دکھائیں کہ $L_{\pm}$ اور $L_{\mp}$ ایک دوسرے کے ہرمشی جوڑی دار ہے چونکہ L_x اور L_y مشہود ہیں آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہرمشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی تصدیق کر سکتے ہیں اس کے بعد مساوات 112.4 استعمال کریں جواب

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)} = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)} \tag{۴.۱۲۱}$$

دیکھیے گا کے سیڑھی کی بلند ترین اور نچلے ترین پایہ پر کیا ہوگا جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں

سوال ۴.۱۹:

ا. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبیت رشتوں مساوات 10.4 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل مقالب حاصل کریں

$$[[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \quad [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = \tag{۴.۱۲۲}$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 96.4 سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں

ج. مقالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں تلاش کریں جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ہوگا

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کے ہیملٹنی $H = (p^2/2m) + V$ $\boldsymbol{L}$ کے تمام تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا یوں H L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ مشہود ہوں گے

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں ایک مخفی توانائی $V(\boldsymbol{r})$ میں ایک ذرے کی مداری زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{L}$ کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{L}\rangle = \langle\boldsymbol{N}\rangle$$

جہاں

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times(-\nabla V)$$

یہ مسئلہ اہرنفسٹ کا مماثل گھومتا تعلق ہے

ب. دکھائیے کے کسی بھی کروی تشاکلی مخفی توانائی کے لیے $\mathrm{d}\langle \boldsymbol{L}\rangle\ \mathrm{d}t = 0$ ہوگا یہ زاویائی معیار حرکت کی بقا کا کوانٹم میکانی روپ ہے

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محددات میں لکھنا ہوگا اب $\boldsymbol{L} = (\hbar/i)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{۴.۱۲۳}$$

جہاں $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$ ہوگا یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}\Big[r(\hat{r}\times\hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r}\times\hat{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta} + (\hat{r}\times\hat{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

اب $(\hat{r}\times\hat{r}) = 0$ $(\hat{r}\times\hat{\theta}) = \hat{\phi}$ اور $(\hat{r}\times p\hat{h}i) = -th\hat{e}ta$ ہوتے ہیں شکل 1.4 لہٰذا درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}\Big(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۴}$$

اکائی سمتیات $\hat{\theta}$ اور $\hat{\phi}$ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں

$$\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi)\hat{\imath} + (\cos\theta\sin phi)\hat{\jmath} - (\sin\theta)\hat{k} \tag{۴.۱۲۵}$$

$$\hat{\phi} = -(\sin\phi)\hat{\imath} + (\cos\phi)\hat{\jmath} \tag{۴.۱۲۶}$$

یوں

$$\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{i}[(-\sin\phi\hat{\imath} + \cos\phi\hat{\jmath})\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\theta\cos\phi\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\hat{\jmath} - \sin\theta\hat{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\phi}]$$

ہوگا ظاہر ہے درج ذیل ہوں گے

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۷}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\Big(+\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۲۸}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{۴.۱۲۹}$$

ہمیں آمل رفت اور امل تقلیل بھی درکار ہوں گے

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i}\Big[(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

چونکہ $\cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$ ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۰}$$

بالخصوص سوال 21.4(a) درج ذیل ہو گا

$$L_+L_- = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \tag{۴.۱۳۱}$$

لہٰذا سوال 21.4(b) درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$L^2 = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big] \tag{۴.۱۳۲}$$

ہم اب $f_l^m(\theta,\phi)$ پائین کر سکتے ہیں یہ L^2 کا امتیازی تفاعل ہے جس کی امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]f_l^m = \hbar^2 l(l+1)f_l^m$$

یہ ٹھیک زاویائی مساوات 18.4 ہے ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی قدر $m\hbar$ ہو گا

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو ائن شمالی مساوات مساوات 21.4 کا معادل ہے ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں ان کا معمول شدا نتیجہ کروی ہارمونیات $Y_l^m(\theta,\phi)$ ہے اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروی ہارمونیات ہونگے حصہ 1.4 میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انجانے میں تین مقلوبی عاملین H L^2 اور L_z کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \tag{۴.۱۳۳}$$

ہم مساوات 132.4 استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات 14.4 کو مختصراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{2mr^2}\Big[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+L^2\Big]\psi+V\psi=E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورت حال پیدا ہوتی ہے علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں مساوات 29.4 حاصل ہوئی جبکہ زاویائی معیار حرکت کی الجبرائی نظریہ l اور لہٰذا m بھی کی نصف عدد صحیح قیمتیں مساوات 119.4 بھی دیتی ہے آپ کا خیال ہو گا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہے لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے کہ یہ انتہائی زیادہ اہمیت کے حامل ہے سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات 130.4 سے مساوات 131.4 اخذ کریں اشارہ تفاعل برق استعمال کرنا نہ بھولیں

ب. مساوات 129.4 اور 131.4 سے مساوات 132.4 اخذ کریں اشارہ مساوات 112.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۲:

ا. حساب کیے بغیر بتائیں $L_+Y_l^l$ کیا ہو گا

ب. مساوات 130.4 کے ساتھ جزو (الف) کا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $L_zY_l^l = \hbar lY_l^l$ ہو گا $Y_l^l(\theta,\phi)$ کی ایک مستقل تک معمول شدہ قیمت تلاش کریں

ج. بلاواسطہ تکمل کے ذریعے مستقل معمول زنی تعین کریں اپنی حتمی نتیجے کا سوال 5.4 کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال 3.4 میں درج ذیل دکھایا

$$Y_2^1(\theta,\phi)=-\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

عامل رفت کا $Y_2^2(\theta,\phi)$ پر اطلاق کریں معمول زنی کے لیے مساوات 121.4 استعمال کریں

سوال ۴.۲۴: بے کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات بندے ہوئے ہیں یہ نظام وسط کے گرد آزادی سے تین بعدی حرکت کر سکتا ہے جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا

ا. دکھائیں کے اس نظام کی اجازتی توانائیاں درج ذیل ہو نگی

$$E_n=\frac{\hbar^2n(n+1)}{ma^2},\qquad n=0,1,2,\dots$$

اشارہ کلاسیکی تمنائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں

ب. اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے اس نظام کی n ویں توانائی سطح کی انحطاطیت کیا ہو گی

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں پہلی قسم مرکز کمیت کے حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مداری ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$) کہتے ہیں جبکہ دوسری چکر ($\boldsymbol{S} = I\boldsymbol{\omega}$) جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنا زمین کا مداری زاویائی معیار حرکت ہوگا جبکہ روزانہ کی بنیاد پر شمال جنوبی محور کے گرد چکر کی بنا اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا کلاسیکی طور پر یہ فرق ہماری آسانی کے لئے ہے چونکہ حقیقتاً ہر پتھر ہر پہاڑ وغیرہ جن پر زمین مشتمل ہے کا زمین کے محور کے گرد انفرادی مداری زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ $\boldsymbol{S}$ کے برابر ہوگا کوانٹم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے لیکن یہاں ایک بنیادی فرق پایا جاتا ہے ہائیڈروجن کی صورت میں مرکزہ کے گرد الیکٹران کی طواف کی بنا مداری زاویائی معیار حرکت کے ساتھ ساتھ الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے جس کا فضا میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا اس کو مقام کے متغیرات r θ اور ϕ سے بیان نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ یہ کلاسیکی چکر کی طرح ہے لہٰذا اسے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں یہ مماثلت یہی پر ختم ہو جاتی ہے ایک ایکٹران جہاں تک ہم جانتے ہیں کی کوئی جسامت نہیں پائی جاتی ہے اور یہ نقطی ذرا ہے لہٰذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو مداری زاویائی معیار حرکت پر مشتمل حصوں میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے سوال 4.25 یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات بیرونی زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{L}$ کے ساتھ ساتھ اندرونی زاویائی معیار حرکت $\boldsymbol{S}$ بھی رکھتے ہیں چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کی نظریہ کی طرح ہے ہم باضابطہ تبادلی تعلقات سے شروع کرتے ہیں

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \tag{۴.۱۳۴}$$

یوں پہلے کی طرح S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \tag{۴.۱۳۵}$$

جبکہ درج ذیل ہوگا جہاں $S_\pm \equiv S_x \pm iS_y$

$$S_\pm|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\,|s(m\pm 1)\rangle \tag{۴.۱۳۶}$$

تاہم یہاں امتیازی تفاعلات θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں لہٰذا یہ کروی ہارمونیات نہیں ہونگے اور کوئی وجہ نہیں پائی جاتی ہے کہ ہم s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتیں قبول نہ کریں

$$s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s \tag{۴.۱۳۷}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص ناقابل تبدیل قیمت ہوتی ہے جسے اس مخصوص نسل کا چکر کہتے ہیں π میزون کا چکر 0 ہے الیکٹران کا چکر $1/2$ پروٹان کا چکر 1 ڈیلٹا کا چکر $3/2$ گریویٹون کا چکر 2 وغیرہ وغیرہ اس کے برعکس ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹرون کا مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت رکھ سکتا ہے جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہوگا تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہوگا جس کی بنا نظریہ چکر نسبتاً

سادہ ہے سوال ۴.۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس درج ذیل ہو

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{۴.۱۳۸}$$

ہم آئنسٹائن کلیہ $E = mc^2$ کے تحت یہ فرض کرتے ہوئے کہ الیکٹران کی کمیت اس کی برقی میدان کے توانائی کی بنا ہے الیکٹران کا کلاسیکی رداس حاصل کرتے ہیں الیکٹران کا زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ لیتے ہوئے خط استوا پر کسی نقطے کی رفتار $\mathrm{m\,s^{-1}}$ میں تلاش کریں کیا حاصل جواب معنی خیز ہے در حقیقت تجربات سے ظاہر ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے کیا یہ جانتے ہوئے نتیجہ مزید غلط محسوس ہو گا

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ **کوارک**[۴۷] اور تمام **لیپٹان**[۴۸] کیلئے $s = \frac{1}{2}$ ہو گا جو سب سے اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان ہے۔ صرف "دو" عدد امتیازی تفاعلات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ ہے جسے **ہم میدان چکر**[۴۹] (یا غیر رسمی طور پر $\uparrow$) اور دوسرا $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جس کو **مخالف میدان چکر**[۵۰] ($\downarrow$) کہتے ہیں۔ انہیں کو اساس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دو اجزائی قالب قطار (یا **چکر کار**[۵۱]) سے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \tag{۴.۱۳۹}$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۰}$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۱}$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[۴۷] quarks
[۴۸] leptons
[۴۹] spin up
[۵۰] spin down
[۵۱] spinor

ساتھ ہی عاملین چکر 2×2 قالب ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات 135.4 درج ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{اور} \quad \mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \tag{۴.۱۴۲}$$

ہم $\mathbf{S}^2$ کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا قالب

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۳}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $c = \frac{3}{4}\hbar^2$ اور $e = 0$ ہو گا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

لہٰذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4}\hbar^2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۴}$$

اسی طرح

$$\mathbf{S}_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{۴.۱۴۵}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۶}$$

ساتھ ہی مساوات 136.4 ذیل کہتی ہے۔

$$\mathbf{S}_+\chi_- = \hbar\chi_+, \quad \mathbf{S}_-\chi_+ = \hbar\chi_-, \mathbf{S}_+\chi_+ = \mathbf{S}_-\chi_- = 0,$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۷}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہٰذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۸}$$

چونکہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں زیادہ صاف روپ $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ لکھا جا سکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{۴.۱۴۹}$$

یہ **پالی قالب چکر**[۵۲] ہیں۔ دھیان رکھیں کہ $\mathbf{S}_x$ ، $\mathbf{S}_y$ ، $\mathbf{S}_z$ اور $\mathbf{S}^2$ تمام ہرمشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ قابل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس $\mathbf{S}_+$ اور $\mathbf{S}_-$ غیر ہرمشی ہیں؛ یہ ناقابل مشاہدہ ہیں۔

$\mathbf{S}_z$ کے امتیازی چکر کار (یقیناً) درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \left(+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right); \quad \chi_- = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۵۰}$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیمائش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $+\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{۴.۱۵۱}$$

(یعنی چکر کار لازماً معمول شدہ ہو گا)۔[۵۳]

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیا نتائج اور ان کے انفرادی احتمالات کیا ہونگے؟ عمومی شماریاتی مفہوم کے تحت ہمیں $\mathbf{S}_x$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix}-\lambda & \hbar/2\\ \hbar/2 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

---

[۵۲] Pauli spin matrices

[۵۳] لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت وہ کہنا چاہتے ہیں کہ اگر S_z کی پیمائش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہو گا۔ (صفحہ ۱۰۵ پر حاشیہ ۱۲ دیکھیں۔)

لہٰذا $\beta = \pm\alpha$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{S}_x$ کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(+\frac{\hbar}{2}\text{امتیازی قدر}\right); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(-\frac{\hbar}{2}\text{امتیازی قدر}\right) \tag{۴.۱۵۲}$$

بطور ہر مشی قالب کے امتیازی سمتیات سے فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مساوات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \tag{۴.۱۵۳}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a + b|^2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $\frac{1}{2}|a-b|^2$ ہو گا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)

مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۵۴}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہٰذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہو گا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6 = (1/2)\left|(3+i)/\sqrt{6}\right|^2$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $1/6 = (1/2)\left|(-1+i)/\sqrt{6}\right|^2$ ہو گا۔ اتفاقاً S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6}\left(+\frac{\hbar}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلاواسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger \mathbf{S}_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متلق ایک فرضی پیمائشی تجربا سے گزرتا ہوں۔ چونکہ یہ ان تصوراتی خیالات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرا کیا گیا۔ فرض کریں ایک زرا حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے کہ اس زرے کی زاویائی چکری میارِ حرکت کا z جز کیا ہے۔ تب ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہوگا۔ چونکہ z کی پیمائش لازمن یہی قیمت دے گی۔ اس کے بجائے اگر پوچھنے والا سوال کرے کہ اس زرے کی چکری یا زاویائی میارِ حرکت کا x جز کیا ہوگا۔ تب ہم یہ کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ گر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماحرِ تبیات یا حصہ ۱۔۲ کے نقطہِ نزر سے حقیقت پسند ہو تو وہ اس جواب کو ناکافی سمجھے گا۔ کیا آپ یہ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس زرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے۔ نہیں میں نے یہ تو نہیں کہا!۔ مجھے زرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے اور یہ ψ_+ ہے۔ یہ ب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جز نہیں بتا سکتے اس لیئے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جز نہیں پایا جاتا ہے۔ یقینن ایسا ہی ہوگا۔ اگر S_x اور S_z کی قیمتیں تائین ہوں تب اصولِ ادم یقینیت متممئن نہیں ہوگا۔ یہ سنتے ہی سوال کرنے والا زرے کی چکر کا x جز از خود پیمائش کرتا ہے۔ اب فرض کریں کہ وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ وہ خوشی سے چلا اٹھتا ہے۔ اس زرے کی S_x قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔ جی آپ درست فرماتے ہیں اب اس کی یہی قیمت ہے۔ جس سے یہ بلکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربہ سے پہلے بھی اس کی یہی قیمت تھی۔ اب ظاہر ہے آپ بال کی کھال اتار رہے ہو اور آپ کی ادم یقینیت اصول کا کیا بنا۔ میں اب S_x اور S_z دونوں کو جانتا ہوں۔ جی نہیں آپ نہیں جانتے ہیں۔ آپ نے پیمائش کے دوران زرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ ψ_+ اور اگرچہ آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں۔ آپ S_z کی قیمت اب نہیں جانتے ہیں۔ لیکن میں نے S_x کی پیمائش کے دوران ہم نے پوری کوسس کی کہ میں زرے کا سکون برباد نہ کروں۔ اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے تو خود تصدیق کریں۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں کہ کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ وہ $\hbar/2$ حاصل کرے جو میرے لیئے سرمندگی کا عصر ہوگا۔ اگر ہم اس پورے عمل کو بار بار دورائیں تو یہ سب اوقات اسے $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔ یہ کام آدمی کے لیئے

ایک عام آدمی، ایک فلفی یا ایک کلاسیکی مایرِ تبیات کا یہ کہنا کہ کس زرے کا ٹھیک ٹھیک مکام یا میعارِ حرکت یا چکری زاویائی میارِ حرکت کا x جز یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نزر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھانا جس نے کونٹم مکینیانیات کا گہرا مطلع نہ کیا ہو تقریبن ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی عقل دنگ نہیں رہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو $1/2$ چکر نظام پر دوبارا غور کی جئے گا۔ یہ ونٹم مکینیانیات کی پیچیدہ تفرقات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کیجیے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی میارِ حرکت کے بنیادی تبادلی رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مثال 148.4 درج ذیل زروی قائدہ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \tag{۴.۱۵۵}$$

جہاں اشاریا x,y اور z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ ϵ_{jkl} Levi-Civita علامت ہے۔ جو $jkl = 1,2,3$ یا $2,3,1$ یا $3,1,2$ کی سورت میں $+1$ جبکہ $jkl = 1,3,2$ یا $2,1,3$ یا $3,2,1$ کی سورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹروں درج ذیل چکری حال میں ہے۔ $\psi = A\begin{bmatrix}3i\\4\end{bmatrix}$ (الف) مامولزنی مستقل A تاین کریں۔

(ب) S_x, S_y, S_z کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ دیحان رہے کہ یہاں σ سے مراد میارِ انہراف ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جیئے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدمی کی نیت کے عین متابک ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ 1 کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول سدا spinor χ مساوات 139.4 کے لیے $S_x, S_y, S_z, S_x^2, S_y^2$ اور S_z^2. تلاش کریں۔ تدیق کریں کہ $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$ ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor S_y کے امتیازی عدداد تلاش لریں۔ (ب) عمومی حال χ مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک زرے کے S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جیئے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیہان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکیے ہیں۔ (ج) S_y کی پیمائس سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ r کے ہم رہ چکری زاویائی میارِ حرکت کے اجزاء کا کالپ S_r تیار کریں۔ کروی محدد استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \tag{۴.۱۵۶}$$

S_r کی امتیازی عدداد اور معمور سدا امتیازی spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\sin(\theta/2)\end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\\ -\cos(\theta/2)\end{bmatrix}; \tag{۴.۱۵۷}$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری جز ضرب $e^{i\phi}$ سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہازا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک زرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ S_x, S_y اور S_z تیار کریں۔ اشعارہ S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر S_z, S_+ اور S_- کا عمل تاین کریں۔ نصاب میں $1/2$ چکر کے لیے استعمال کی گئی ترقیب استعمال کریں

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹتے ہوئے باربار زرا پر مقناطیسی جفد کتب مشتمل ہوگا۔ اس کا مقناطیسی جفد کتبی معیارِ اثر μ، زرے کی چکری زاویائی معیارِ حرکت S کو راست متناسب ہوگا۔

$$\mu = \gamma S \tag{۴.۱۵۸}$$

جہاں تناسبی مستقل γ مسقن مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفد کتب پر قوتِ مروڑ $\mu \times B$ عمل کرتا ہے۔ جو کمپس کی سوئی کی طرح اس کو میدان کے متوازج لانے کی کوشش کرتا ہے۔ اس قوتِ مروٹ کے ساتھ وبستا توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu . B \tag{۴.۱۵۹}$$

لہازامقناطیسی میدان B میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے زرے کا ہیملٹونیں درج زیل ہوگا۔

$$H = -\gamma B . S \tag{۴.۱۶۰}$$

مثال ۴.۳: تقدیم لارمر فرض کریں z رخ یکساں مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \hat{k} \tag{۴.۱۶۱}$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے قالبی روپ میں ہیملٹنی مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$\boldsymbol{H} = -\gamma B_0 \boldsymbol{S}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۲}$$

ہیملٹنی $\boldsymbol{H}$ کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو $\boldsymbol{S}_z$ کے تھے

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \tag{۴.۱۶۳}$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت کتب کا معیار اثر مقناطیسی میدان کا متوازی ہو چونکہ ہیملٹنی غیر تابع وقت ہے لہذا تابع وقت شروڈنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial X}{\partial t} = \boldsymbol{H} X \tag{۴.۱۶۴}$$

کے عمومی حل کو ساکن حالات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\chi(t) = a\chi + e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات

$$\chi(0)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے یقیناً $1 = |a|^2+|b|^2$ ہو گا ہم ان مستقلات کو $a = \cos(\alpha/2)$ اور $b = \sin(\alpha/2)$ لکھ سکتے ہیں جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہو گا جس کی اہمیت جلد رونما ہو گی یوں درج ذیل ہو گا

$$\chi^t=\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2}\\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2}\end{pmatrix} \tag{۴.۱۶۵}$$

آئیں $\boldsymbol{S}$ کی توقعاتی قیمت بطور تفاعل وقت حاصل کریں

$$\begin{aligned}\langle S_x\rangle =&\chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_x\chi(t)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2}\end{pmatrix}\\ &\times\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2}\\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2}\end{pmatrix}\\ =&\frac{\hbar}{2}\sin\alpha\cos(\gamma B_0 t)\end{aligned} \tag{۴.۱۶۶}$$

اسی طرح

$$\langle S_y\rangle=\chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_y\chi(t)=-\frac{\hbar}{2}\sin\alpha\sin(\gamma B_0 t) \tag{۴.۱۶۷}$$

اور درج ذیل ہو گا

$$\langle S_z\rangle=\chi(t)^\dagger \boldsymbol{S}_z\chi(t)=\frac{\hbar}{2}\cos\alpha \tag{۴.۱۶۸}$$

کلاسیکی صورت کی طرح شکل 10.4 محور z کے ساتھ s ایک مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لارمر تعدد

$$\omega=\gamma B_0 \tag{۴.۱۶۹}$$

سے تقدیم کرتا ہے یہ حیرت کی بات نہیں ہے مسئلہ اہرنفسٹ کی وہ صورت جس سے سوال 20.4 میں اخذ کیا گیا اس کی ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ ارتقاء پائے گا بہر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاق و سباق میں دیکھنا اچھا لگا مثال □

مثال ۴.۴: تجربہ سٹرن و گرلاخ ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت کتب پر نہ صرف قوت مروڑ بلکہ ایک قوت بھی پایا جاتا ہے

$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۷۰}$$

اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے ایک مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقہ سے علیحدہ کیا جا سکتا ہے فرض کریں ایک نسبتاً بھاری تعدیلی جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکساں مقناطیسی میدان کے خطہ سے گزرتی ہے شکل 11.4 یعنی

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) = -\alpha x\hat{\imath} + (B_0 + \alpha z)\hat{k} \tag{۴.۱۷۱}$$

جہاں B_0 ایک طاقتور یکساں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے حقیقت میں ہمیں صرف z جزو سے غرض ہے لیکن بدقسمتی سے ایسا ممکن نہیں ہے چونکہ برقناطیسی قانون $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{F} = \gamma\alpha(-S_x\hat{\imath} + S_z\hat{k})$$

کہ تاہم B_0 کے گرد تقدیم لارمر کی بنا S_x تیزی سے ارتعاش کرتا ہے جس کے بنا اس کی اوسط قیمت صفر ہو گی لہٰذا z رخ کل قوت درج ذیل ہو گا

$$F_z = \gamma\alpha S_z \tag{۴.۱۷۲}$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی کلاسیکی طور پر چونکہ S_z کوانٹا شدہ نہیں ہو گا ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی لمبائی پائی جاتی جبکہ حقیقتاً شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹازنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے مثال کے طور پر چاندی کے جوہر استعمال کرتے ہوئے چونکہ اس کے اندر جانب تمام الیکٹران چوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مداری زاویائی معیار حرکت منسوخ ہو جاتے ہیں یوں صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جوہر کا چکر ہو گا لہٰذا شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہو گی اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل خالصتاً کلاسیکی تھا جبکہ کوانٹم میکانیات میں قوت کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے لہٰذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہو گا ہم اس عمل کو اس حوالہ چوکھٹ کے حوالہ سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہوں اس چوکھٹ میں ہیملٹنی صفر سے ابتدا کرتے ہوئے وقت T جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{۴.۱۷۳}$$

جیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں $\boldsymbol{B}$ کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں فرض کریں جوہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے ابتدا کرتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \qquad\qquad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے وقت $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقاء پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} \qquad\qquad 0 \leq 0t \leq T$$

جہاں مساوات 161.4 کے تحت

$$E_{\pm} = \mp\gamma(B_0 + az)\frac{\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۴}$$

ہو گا لہٰذا $t \geq T$ کے لیے یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا

$$\chi(t) = \left(ae^{i\gamma TB_0/2}\chi_{+}\right)e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(be^{-i\gamma TB_0/2}\chi_{-}\right)e^{-i(\alpha\gamma T/2)z} \tag{۴.۱۷۵}$$

ان دونوں اجزاء کا آپ z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے مساوات 32.3 دیکھیں ہم میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہو گا

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \tag{۴.۱۷۶}$$

اور یہ مثبت z رخ جانب حرکت کرے گا مخالف میدان جزو کا معیار حرکت غلط ہے اور یہ منفی z رخ کی جانب حرکت کرے گا یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہو گی چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہٰذا مساوات 174.4 پہلی حاصل کرتا نتیجہ مساوات 170.4 کے مطابق ہے کوانٹم میکانیات کی فلاسفی میں شترن گرلاخ تجربہ میں کلیدی کردار ادا کیا ہے اس کے ذریعے کوانٹم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کوانٹم پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ نظام کا ابتدائی حال ہم جانتے ہیں جس سے مساوات شروڈنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جا سکتا ہے یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر لاتے ہیں آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر ترتیب شدہ شعاع کو شترن گرلاخ مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہو اسی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z جزو جاننا چاہیں تب آپ انہیں شترن گرلاخ علی سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور حمامیدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کا یہ ایک سادہ مثال ہے □

سوال ۴.۲۶: مثال 3.4 میں

ا. وقت t پر چکر کی زاویائی معیار حرکت کے x رخ جزو کی پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہو گا

ج. z رخ اسی سوال کا جواب کیا ہو گا

سوال ۴.۲۷: ایک ارتعاشی مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B} = B_0 \cos(\omega t)\hat{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں میں ایک الیکٹران ساکن پایا جاتا ہے

ا. اس نظام کا ہیملٹنی قالب تیار کریں

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر یہ الیکٹرون ابتدائی طور پر ہم میدان حال یعنی $\chi(0) = \chi_+^x$ سے ابتدا کرتا ہے مستقبل کی وقتوں کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں دیہان رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شروڈنگر مساوات مساوات 162.4 کو بلاواسطہ حل کر سکتے ہیں

ج. S_z کی پیمائش میں $\hbar/2$ نتیجہ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا جواب

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$$

د. S_x کو مکمل الٹا کرنے کے لیے کم سے کم میدان B_0 کتنا

سوال ۴.۲۸: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد $1/2$ چکر ذرات یکتا تنظیم ?? میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_a^{(1)}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{a}$ ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_b^{(2)}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا جز $\hat{b}$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں $\hat{a}$ اور $\hat{b}$ کے بیچ زاویہ θ ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)}\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta \tag{۴.۱۷۷}$$

سوال ۴.۲۹:

ا. کلیبش گورڈن عددی سروں کو $s_1 = 1/2$ اور $s_2 = anything$ کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $|sm\rangle$ کا امتیازی حال ویکٹر S^2 ہو گا

$$|sm\rangle = A|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle|S_2(m-\frac{1}{2})\rangle + B|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle|S_2(m+\frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے قاصر ہوں کہ $S_x^{(2)}$ مثلاً ویکٹر $|s_2 m_2\rangle$ پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2+1}};\, B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2+1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتی ہیں۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجے دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۳۰: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر کے ذرے کے لیے قالب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی اقدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۳۱: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چکر کے قالبوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری s چکر کے لیے چکری قالب تلاش کریں۔
جواب:

$$\boldsymbol{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \imath b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \imath b_s & 0 & -\imath b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \imath bs-1 & 0 & -\imath bs-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\imath b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \imath b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہو گا۔

سوال ۴.۳۲: کروی ہارمونیات کے لیے، ؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{\imath m\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہو گا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ توالی دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماخول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجانڈر تفاعل کے تفرق کا

درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1} - mxP_l^m \tag{۴.۱۷۸}$$

سوال ۴.۳۳: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi-)$$

ا. مداری زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہو گا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) جز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیئر (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار z کے (S_z) جز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت کو $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ لیں۔

ھ. آپ J^2 کی پیمائش کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفرادی احتمال کیا ہو گا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیمائش کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہو گا؟

ح. آپ چکر کے z جز اور منبع سے فاصلہ کی پیمائش کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ مشہودات ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۴:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلایا جا سکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہو گا

$$f(\phi+\varphi) \equiv e^{\frac{\imath L_z\varphi}{\hbar}}f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا $L_z/\hbar$ کو z کے گرد گھومنے کا پیدا کار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $\boldsymbol{L}.\hat{n}/\hbar$ ہو گا جو $\hat{n}$ کے رخ گھومنے کا پیدا کار ہے یعنی $e^{(i\boldsymbol{L}.\hat{n}\varphi/\hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیدا کار $\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}/\hbar$ ہو گا بالخصوص 1/2 چکر کے لیے

$$\chi' = e^{\imath(\sigma.\hat{n})\varphi/2}\chi \tag{۴.۱۷۹}$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور $x - axis$ کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) قالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہم میدان (χ_+) کو خلاف میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور $y-axis$ کے لحاظ سے 90ڈگری گھومنے والا قالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہو گا؟

د. محور $z\quad-\quad axis$ کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا قالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ہ. درج ذیل دکھائیں

$$e^{\iota(\sigma.\hat{n})\varphi/2}=\cos(\varphi/2)+\iota(\hat{n}.\sigma)\sin(\varphi/2) \tag{۴.۱۸۰}$$

سوال ۴.۳۵: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی تبادلی رشتے (مساوات 99.4) امتیازی اقدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہو گا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جسکا بعد لمبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بوہر درج ذیل عاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[x+(a^2/\hbar)p_y];\,p_1\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[p_x-(\hbar/a^2)y];$$

$$q_2\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[x-(a^2/\hbar)p_y];\,p_2\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[p_x+(\hbar/a^2)y].$$

ا. تصدیق کریں کہ $[q_1,q_2]\ =\ [p_1,p_2]\ =\ 0;[q_1,p_1]\ =\ [q_2,p_2]\ =\ \iota\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ تبادلی رشتوں کو $q's$ اور $p's$ مطمئین کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے عاملین اشاریہ 2 کے عاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب. درج ذیل دکھائیں

$$L_z=\frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2-q_2^2)+\frac{a^2}{2\hbar}(q_1^2-q_2^2)$$

ج. تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی مرتعش جس کی کمیت $m\ =\ \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega\ =\ 1$ ہو کہ ہر ایک ہیملٹنی H کے لیے $L_z=H_1-H_2$ ہو گا۔

د. ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی مرتعش کے ہیملٹنی کی امتیازی اقدار $(n+1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n=0,1,2,3,\cdots$ ہو گا (حصہ ؟؟ کے الجبرائی نظریہ میں ہیملٹنی کی روپ اور باضابطہ تبادلی رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی اقدار لازماً عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۳۶: عمومی حال مساوات 139.4 میں 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $\sigma_{S_x}\sigma_{S_y}\quad\geq\quad(\hbar/2)|\langle S_z\rangle|$ میں مساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت

کھوئے بغیر a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہو گی b خالف حقیقی یا خالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۳۷: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا؟؟؟؟ q ہو اور جو مقناطیسی میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینز قوت کی مساوات دیتی ہے

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{۴.۱۸۱}$$

اس قوت کو کسی بھی غیر سمتی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات شروڈنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{۴.۱۸۲}$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہو گا

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \tag{۴.۱۸۳}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مخفی قوہ $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ اور φ غیر سمتی مخفی قوہ $(\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ ہیں لہٰذا شروڈنگر مساوات میں باضابطہ متبادل $(\boldsymbol{p} \to ((\hbar/\imath)\nabla)$ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{\imath}\nabla - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi]\psi \tag{۴.۱۸۴}$$

ا. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\rangle \tag{۴.۱۸۵}$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle \boldsymbol{r}\rangle/dt$ کو $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle v\rangle}{dt} = q\langle \boldsymbol{E}\rangle + \frac{q}{2m}\langle(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{p})\rangle - \frac{q^2}{m}\langle(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\rangle \tag{۴.۱۸۶}$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھ کے حجم پر یکساں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m\frac{d\langle \boldsymbol{v}\rangle}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \langle \boldsymbol{v}\rangle \times \boldsymbol{B}), \tag{۴.۱۸۷}$$

اس طرح $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ ؟؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۴.۳۸: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقلات ہیں

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B_0}}{2}(x_{\hat{j}} - y_{\hat{i}})$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

ا. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کمیت m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی اجازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{۴.۱۸۸}$$

جہاں $q\boldsymbol{B_0}/m = \omega_1$ اور $\sqrt{2q\boldsymbol{K}\mathrm{m}} \equiv \omega_2$ ہوگا۔ تبصرہ: $\boldsymbol{K} = 0$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مماثل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ اجازتی توانائیاں $\hbar\omega\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۴.۳۹: (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوہ $\boldsymbol{A}$ اور φ یکتا طور پر تعین نہیں کیے جا سکتے ہیں، طبعی مقداریں میدان $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں

ا. دکھائیں کہ مخفی قوہ

$$\varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \tag{۴.۱۸۹}$$

(جہاں مقام اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان φ اور $\boldsymbol{A}$ دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گیج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوہ کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ ایا یہ نظریہ گیج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$\Psi' \equiv e^{\imath q\Lambda/\hbar}\Psi \tag{۴.۱۹۰}$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گیج تبادلہ مخفی قوہ φ' اور $\boldsymbol{A}$ لیتے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ ایک ہی طبعی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گیج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

جوابات

فرہنگ