

کوانٹائی میکانیات

ایک تعارف

خالد حسان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

ix

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	۱. مساوات شروڈنگر
۲	۱.۲	۲. شماراتی مفہوم
۵	۱.۳	۳. احتمال
۵	۱.۳.۱	۱. غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	۲. استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	۴. معمولی زنی
۱۵	۱.۵	۵. معیار حرکت
۱۸	۱.۶	۶. اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	۲. غیر متایق وقت مساوات شروڈنگر
۲۵	۲.۱	۱. ساکن حالات
۳۱	۲.۲	۲. لامتناہی چوکور کنواں
۴۱	۲.۳	۳. ہارمونی سر تقش
۴۳	۲.۳.۱	۱. الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	۲. تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	۴. آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	۵. ڈیلٹا تفاسل محفیه
۶۹	۲.۵.۱	۱. مقید حالات اور بجھراو حالات
۷۱	۲.۵.۲	۲. ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	۶. مستناہی چوکور کنواں
۹۷	۳	۳. قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	۱. ہسٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	۲. قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	۱. ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاسل	۳.۲
۱۰۶	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۸	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار یاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۵	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	افضل عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علالتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انشائی میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائیڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاسل موج	۴.۲.۱
۱۶۴	ہائیڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۷	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۷	امتیازی قیمتیں	۴.۳.۱
۱۷۳	امتیازی تفاسلات	۴.۳.۲
۱۷۶	چکر	۴.۴
۱۸۴	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۹۰	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۷	متنائل ذرات	۵
۲۰۷	دو ذروی نظام	۵.۱
۲۰۹	بوسن اور فرمیان	۵.۱.۱
۲۱۳	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۷	جوہر	۵.۲
۲۱۸	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۲۱	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۲۵	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۲۵	آزاد الیکٹران گیس	۵.۳.۱
۲۳۱	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۳۸	کو انشائی شمار یاتی میکانیات	۵.۴
۲۳۸	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۴۱	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۴۴	سب سے زیادہ مختل تشکیل	۵.۴.۳
۲۴۷	α اور β کی طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۵۲	سیاہ جسی طیف	۵.۴.۵
۲۵۷	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۵۷	غیر انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۵۷	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۵۹	اول رتی نظریہ	۶.۱.۲
۲۶۳	دوم رتی توانائیاں	۶.۱.۳
۲۶۴	انخطاطی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۶۴	دو پڑتا انخطاط	۶.۲.۱
۲۶۹	بلند رتی انخطاط	۶.۲.۲
۲۷۴	ہائیڈروجن کا ہسین ساخت	۶.۳
۲۷۵	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۷۸	چپکرومدار ربط	۶.۳.۲
۲۸۵	زبان اثر	۶.۴
۲۸۵	کمزور میدان زبان اثر	۶.۴.۱
۲۸۷	طاقتور میدان زبان اثر	۶.۴.۲
۲۸۹	درمیانہ میدان زبان اثر	۶.۴.۳
۲۹۱	نہایت مہین بخوارا	۶.۵
۳۰۳	تغیری اصول	۷
۳۰۳	نظریہ	۷.۱
۳۰۹	ہیلمی کا زمینی حال	۷.۲
۳۱۴	ہائیڈروجن سال باردار	۷.۳
۳۲۵	ونزل و کرامرس و برلوان تخمین	۸
۳۲۶	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۳۱	سرنگ زنی	۸.۲
۳۳۵	کلیات پیوند	۸.۳
۳۵۱	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۵۲	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۵۲	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۵۵	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۵۷	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۶۰	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۶۰	برقن طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۶۲	انجذاب، تحرک شدہ احسراج اور از خود احسراج	۹.۲.۲
۳۶۴	غیر اتقاقی اضطراب	۹.۲.۳

۳۶۷	از خود احسراج	۹.۳
۳۶۷	آمنشائن عددی سر A اور B	۹.۳.۱
۳۶۹	بجبان حال کا عمر ص حیات	۹.۳.۲
۳۷۱	قواعد انتخاب	۹.۳.۳

۳۸۱	سرناگزرتخمین	۱۰
۳۸۱	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱
۳۸۱	سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۱
۳۸۲	مسئلہ سرناگزرتخمین	۱۰.۱.۲
۳۸۹	بیت بیری	۱۰.۲
۳۸۹	گرگی عمل	۱۰.۲.۱
۳۹۱	بندسی بیت	۱۰.۲.۲
۳۹۷	اہارونو پوہم اثر	۱۰.۲.۳

۴۰۷	بکھراو	۱۱
۴۰۷	تعارف	۱۱.۱
۴۰۷	کلاسیکی نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۱
۴۱۱	کوانٹائی نظریہ بکھراو	۱۱.۱.۲
۴۱۳	جبروی موج تجزیہ	۱۱.۲
۴۱۳	اصول وضوابط	۱۱.۲.۱
۴۱۷	لائحہ عمل	۱۱.۲.۲
۴۱۹	پیتی انتقال	۱۱.۳
۴۲۲	بارن تخمین	۱۱.۴
۴۲۲	مسوات شروڈنگر کی کملی روپ	۱۱.۴.۱
۴۲۷	بارن تخمین اول	۱۱.۴.۲
۴۳۲	شکل بارن	۱۱.۴.۳

۴۳۵	پس نوشت	۱۲
۴۳۶	آمنشائن، پوڈلکی و روزن تصناد	۱۲.۱
۴۳۸	مسئلہ بل	۱۲.۲
۴۴۳	مسئلہ قلمیہ	۱۲.۳
۴۴۴	شروڈنگر کی پتی	۱۲.۴
۴۴۶	کوانٹائی زیو تصناد	۱۲.۵

۴۴۹	ضمیمہ	۱
۴۴۹	سمتیاریت	۱.۱
۴۵۳	اندرونی ضرب	۲.۱
۴۵۵	قوالب	۳.۱
۴۶۳	تبدیلی اساس	۴.۱
۴۶۵	امتیازی سمتیاریت اور امتیازی استد	۵.۱

۶.۱ هر مشی تبادلہ ۴۷۲

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

ضمیمہ ۱

ضمیمہ

خطی الجبرا

کالج کی سطح پر پڑھائے جانے والے سادہ سمتیات کے حاب کو خطی الجبرا تصوراتی حبا مع پڑھنا اور عمومیت دیتا ہے۔
عمومیت دورخوں میں دی جاتی ہے: (1) ہم غیر سمتیات کو مخلوط اعداد ہونے کی احبازت دیتے ہیں، اور (2)
ہم اپنے آپ کو تین ابعاد میں رہنے کا پابند نہیں رکھتے۔

۱.۱ سمتیات

سمتیاے $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ ، $|\gamma\rangle$ ، ... کے سلسلہ اور غیر سمتیاتے (a, b, c, \dots) کے سلسلہ پر سمتی فضا^۲ مشتمل ہوگا جو
سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کے زیر عمل بند^۳ ہوگا۔^۴

سمتی جمع

کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ بھی سمتیہ ہوگا۔

$$(i) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$$

^۱ ہمارے مقصد کے لئے غیر سمتیات سادہ مخلوط اعداد ہوں گے۔ ریاضی دان آپ کو زیادہ پراسرار میدانوں پر سمتی فضاؤں کے بارے میں
بتا سکتے ہیں، تاہم ان کا کوانٹائی میکانیات میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ یاد رہے کہ α ، β ، γ ، ... (عموماً) اعداد نہیں ہوں گے؛ یہ نام ہوں گے،
مثلاً ”غشیدہ“ یا ”F43A-9GL“، یا، زیر غور سمتیہ کو جو بھی آپ پکارنا چاہیں۔

vector space^۲
closed^۳

^۴ یعنی یہ اعمال پوری طرح معین ہیں، اور کبھی بھی آپ کو سمتی فضا سے باہر منتقل نہیں کریں گے۔

ستی مجموعہ استبدال^۵:

$$(۲) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$$

اور تلازمی^۶:

$$(۳) \quad |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$$

ہے۔ ایک معدوم^۷ (یا صفر^۸) سمتیہ $|0\rangle$ پایا جاتا ہے جو ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کے لئے درج ذیل خاصیت رکھتا ہے

$$(۴) \quad |\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle$$

اور ہر سمتیہ $|\alpha\rangle$ کا شریک مخالف^۹ سمتیہ $|\alpha\rangle$ ("یا جاتا ہے جو درج ذیل دیتا ہے۔

$$(۵) \quad |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle$$

• غیر سمتی ضرب

کسی بھی غیر سمتیہ اور سمتیہ کا حاصل ضرب:

$$(۶) \quad a|\alpha\rangle = |\gamma\rangle$$

ایک سمتیہ ہو گا۔ غیر سمتی ضرب سمتی مجموعہ کے لحاظ سے جزئی تقسیمی^{۱۰}

$$(۷) \quad a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$$

اور غیر سمتی جمع کے لحاظ سے بھی جزئی تقسیمی ہے۔

$$(۸) \quad (a + b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$$

یہ غیر سمتیات کے سادہ ضرب کے لحاظ سے تلازمی بھی ہے۔

$$(۹) \quad a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$$

commutative^۵

associative^۶

null^۷

zero^۸

جہاں غلط فہمی کا امکان نہ ہو، وہاں روایتی طور پر معدوم سمتیہ کو سادہ منہر لکھا جاتا ہے: $|0\rangle \rightarrow 0$

inverse vector^۹

^{۱۱}ایک ایک انوکھی علامت ہے چونکہ α عدد نہیں ہیں۔ میں ایک سمتیہ جس کا نام "جھشید" ہے کے مخالف سمتیہ کو "جھشید" کا نام دے رہا ہوں۔
کچھ ہی دیر میں ہم بہتر اصطلاح دیکھ پائیں گے۔

distributive^{۱۲}

غیر سمتیات 0 اور 1 کے ساتھ ضرب آپ کی توقع کے مطابق نتائج دیں گے۔

$$(۱۰) \quad 1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle; \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle$$

ظاہر ہے $|\alpha\rangle = (-1)|\alpha\rangle$ ہوگا جس کو ہم $|\alpha\rangle$ لکھتے ہیں۔

یہاں جتنا نظر آ رہا ہے، حقیقتاً اتنا ہے نہیں؛ پس میں نے سمتیات کی جوڑ توڑ کے عام فہم قواعد کو تصوراتی روپ میں پیش کیا ہے۔ نتیجتاً دیگر نظام جو یہی باضابطہ خواص رکھتے ہوں پر ہم سادہ سمتیات کے رویے کے بارے میں معلوم علم اور وجدان بروئے کار لا سکیں گے۔

سمتیات $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, \dots$ کا خطی مجموعہ^{۱۳} درجہ ذیل روپ کا فترہ ہوگا۔

$$(۱۱) \quad a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + \dots$$

ایک سمتیہ $|\lambda\rangle$ جس کو سلسلہ $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, \dots$ کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن نہ ہو خطی غیر تابع^{۱۴} کہلاتا ہے۔ (مثلاً، تین ابعاد میں اکائی سمتیہ \hat{k} سمتیات \hat{i} اور \hat{j} کا خطی غیر تابع ہے، جبکہ xy مستوی میں ہر سمتیہ \hat{i} اور \hat{j} کا خطی تابع ہوگا۔) اسی کی توسط سے، سمتیات کا وہ ذخیرہ جس میں ہر ایک سمتیہ باقی تمام سمتیات کا خطی غیر تابع ہو ”خطی غیر تابع“ کہلاتا ہے۔ جب ہر سمتیہ کو سمتیات کے ایک ذخیرہ کے ارکان کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو، ہم کہتے ہیں کہ سمتیات کا یہ ذخیرہ فضا کا احاطہ^{۱۵} کرتے ہیں۔ فضا کا احاطہ کرنے والے خطی غیر تابع سمتیات کا سلسلہ اساس^{۱۶} کہلاتا ہے۔ اساس میں سمتیات کی تعداد فضا کا بعد^{۱۸} کہلاتا ہے۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ بعد (n) مستثنیٰ ہے۔

دیے گئے اساس

$$(۱۲) \quad |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$$

کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ

$$(۱۳) \quad |\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \dots + a_n|e_n\rangle$$

کو اس اساس کے ارکان کی (مرتب) n اجزائی سلسلہ

$$(۱۴) \quad |\alpha\rangle \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

^{۱۳} linear combination

^{۱۴} linearly independent

^{۱۵} span

^{۱۶} فضا کا احاطہ کرنے والے سمتیات کا سلسلہ مکمل (complete) بھی کہلاتا ہے، اگرچہ میں اس اصطلاح کو لامستثنائی بُعد کی صورت کے لئے رکھتا ہوں جہاں ارتکاز پر سوالات اٹھائے جاسکتے ہیں۔

^{۱۷} basis

^{۱۸} dimension

سے یکساں طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ عموماً سمتیات کی بجائے ان اجزاء کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سمتیات جمع کرنے کے لئے ان کے مطابقتی اجزاء آپس میں جمع کئے جاتے ہیں:

$$(15) \quad |\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

غیر سمتیہ سے ضرب کے لئے ہر جزو کو اس غیر سمتیہ سے ضرب کریں:

$$(16) \quad c|\alpha\rangle \leftrightarrow (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$

معدوم سمتیہ کو مضمرات کی ایک کھڑی ظاہر کرتی ہے:

$$(17) \quad |0\rangle \leftrightarrow (0, 0, \dots, 0)$$

اور مخالف سمتیہ کے ارکان کی علامتیں الٹ کی جاتی ہیں۔

$$(18) \quad |-\alpha\rangle \leftrightarrow (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

ارکان کے ساتھ کام کرنے کی واحد قباحت یہ ہے کہ آپ کو کسی ایک مخصوص اساس کے ساتھ کام کرنا ہوگا، اور یہی حسابی عمل کسی دوسری اساس میں بالکل مختلف نظر آئے گا۔

سوال ۱: مخلوط اجزاء والے تین ابعادی سادہ سمتیات $(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})$ پر غور کریں۔

۱ کیا وہ ذیلی سلسلہ جس میں تمام سمتیات کے لئے $a_z = 0$ ہو سمتی فضا قائم کرتے ہیں؟ اگر کرتا ہو تب اس کا بُعد کیا ہوگا؟ اگر نہیں کرتا تو کیوں نہیں کرتا؟

ب اس ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے جن کا z جزو 1 کے برابر ہو؟ اشارہ: کیا ایسے دو سمتیات کا مجموعہ اسی ذیلی سلسلہ میں پایا جائے گا؟ معدوم سمتیہ کے بارے میں سوچیں؟

ج ان سمتیات کے ذیلی سلسلہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جن کے تمام ارکان برابر ہوں؟

سوال ۲: ان تمام کشیر رکنیوں، (جن کے عددی سر مخلوط ہوں اور) جن کا x میں درجہ N سے کم ہو کے ذخیرہ پر غور کریں۔

۱ کیا یہ سلسلہ سمتی فضا قائم کرتا ہے (جہاں کشیر رکنیاں بطور ”سمتیات“ ہوں)؟ اگر فضا قائم کرتا ہو تو مناسب اساس تجویز کریں اور اس فضا کا بُعد بتائیں۔ اگر فضا قائم نہ کرتا ہو تو تعریفی خصوصیات میں سے کونسی اس میں نہیں پائی جاتی (جانتیں)؟

ب اگر ہم چاہیں کہ تمام کشیر رکنیاں جفت تفاعلات ہوں تب کیا ہوگا؟

ج اگر ہم چاہیں کہ پہلا عددی سر (جو x^{N-1} کو ضرب کرتا ہے) 1 ہو تب کیا ہوگا؟

د اگر ہم چاہیں کہ $x = 1$ پر کشیر رکنیوں کی قیمت 0 ہو تب کیا ہوگا؟

ه اگر ہم چاہیں کہ $x = 0$ پر کشیر رکنیوں کی قیمت 1 ہو تب کیا ہوگا؟

سوال ۱.۳: ثابت کریں کہ کسی بھی ایک اساس کے لحاظ سے سمتیہ کے ارکان یکتا ہوں گے۔

۲.۱ اندرونی ضرب

تین ابعاد میں دو اقسام کے سمتی ضرب پائے جاتے ہیں: نقطی ضرب اور صلیبی ضرب۔ موحصر الذکر کی قدرتی توسیع کسی طرح بھی n ابعاد سمتی فضاوں میں نہیں کی جاسکتی، جبکہ اول الذکر کی کی جاسکتی ہے؛ اور اس سیاق و سباق میں اسے عموماً اندرونی ضرب^{۱۹} پکارا جاتا ہے۔ دو سمتیات $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کا اندرونی ضرب ایک مخلوط عدد ہوگا جسے $\langle\alpha|\beta\rangle$ لکھا جاتا ہے اور جس کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} (19) \quad & \langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \\ (20) \quad & \langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad \text{اور} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \leftrightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle \\ (21) \quad & \langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle \end{aligned}$$

مخلوط اعداد تک عمومیت کے علاوہ یہ مسمات نقطی ضرب کے جانے پہچانے روپوں کو ریاضی کی زبان میں پیش کرتے ہیں۔ ایسی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب بھی شامل ہو اندرونی ضرب^{۲۰} فضا کہلاتی ہے۔

چونکہ سمتیہ کا اپنے ساتھ اندرونی ضرب غیر منفی عدد ہے (مساوات ۲۰) لہذا اس کا جذر حقیقی ہوگا؛ جو سمتیہ کا معیار^{۲۱} کہلاتا ہے:

$$(22) \quad \|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle} \quad \text{معیار}$$

اور جو ”لبائی“ کے تصور کو وسعت دیتا ہے۔ اکائی سمتیہ^{۲۲} (جس کا معیار 1 ہوگا) معمول شدہ^{۲۳} کہلاتا ہے۔ دو سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر ہو قائمہ^{۲۴} کہلاتے ہیں (جو ”سیدھا کھڑا“ ہونے کے تصور کو عمومیت دیتا ہے)۔ باہمی متانگ معمول شدہ سمتیات:

$$(23) \quad \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}$$

کے ذخیرہ کو معیار عمودی سلسلہ^{۲۵} کہتے ہیں۔ معیاری عمودی اساس ہر صورت منتخب کیا جاسکتا ہے (سوال ۱.۴ دیکھیں) اور ایسا کرنا عموماً بہتر بھی ثابت ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو ان کے اجزاء کے روپ میں نہایت خوبصورتی سے لکھا جاسکتا ہے:

$$(24) \quad \langle\alpha|\beta\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + \dots + a_n^*b_n$$

inner product^{۱۹}
inner product space^{۲۰}
norm^{۲۱}
unit vector^{۲۲}
normalized^{۲۳}
orthogonal^{۲۴}
orthonormal set^{۲۵}

لہذا معیار کا مربع

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 \quad (۲۵)$$

ہوگا جبکہ اجزاء از خود درج ذیل ہونگے۔

$$a_i = \langle e_i | \alpha \rangle \quad (۲۶)$$

(یہ نتائج تین ابعادی معیاری عمودی اساس \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k} کے مشہور کلیات $a_y = \hat{j} \cdot \mathbf{a}$ ، $a_x = \hat{i} \cdot \mathbf{a}$ اور $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ ، $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ، $a_z = \hat{k} \cdot \mathbf{a}$ کو عمومیت دیتے ہیں۔) یہاں سے آگے ہم صرف معیاری عمودی اساس استعمال کریں گے، ماسوائے جب صریحاً ایسا نہ کرنے کا کہا گیا ہو۔

دو سمتیہ کے بیچ زاویہ ایسی ہندسی مقدار ہے جس کو ہم عمومیت دینا چاہیں گے۔ سادہ سستی تجزیہ میں $\cos \theta = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ ہے۔ تاہم اندرونی ضرب عموماً مخلوط عدد ہوگا، لہذا (اختیاری اندرونی ضرب فضا میں) مشابہ کلیہ (حقیقی) زاویہ θ نہیں دیگا۔ بہر حال، اس مقدار کی مطلق قیمت ایسا عدد ہوگا جو 1 سے تجاوز نہیں کرتا۔

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \leq \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \quad (۲۷)$$

(اس اہم نتیجہ کو شوارز عدم مساوات^{۲۶} کہتے ہیں؛ جس کا ثبوت سوال ۱۵ میں پیش کیا گیا ہے۔) یوں، آپ چاہیں تو، $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے بیچ زاویہ کی تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{\langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle}} \quad (۲۸)$$

سوال ۱۴: فرض کریں آپ اساس $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle)$ سے آغاز کرتے ہیں جو معیاری عمودی نہیں ہے۔ اس اساس سے، گرام و شمد حکمت عملی^{۲۷} کے ذریعہ (جو ایک منظم ترکیب ہے) معیاری عمودی اساس $(|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, \dots, |e'_n\rangle)$ حاصل کی جاسکتی ہے۔ یہ ترکیب کچھ یوں ہے:

۱ اساس کے پہلے سمتیہ $|e_1\rangle$ کو (اس کے معیار سے تقسیم کر کے) معمول شدہ بنائیں۔

$$|e'_1\rangle = \frac{|e_1\rangle}{\|e_1\|}$$

ب پہلے سمتیہ پر دوسرے سمتیہ کا تقلیل دریافت کر کے اس تقلیل کو دوسرے سمتیہ سے منفی کریں۔

$$|e_2\rangle - \langle e'_1 | e_2 \rangle |e'_1\rangle$$

سمتیہ $|e_2\rangle$ کا $|e'_1\rangle$ کے رخ غیر سمتیہ تظلیل $\langle e'_1|e_2\rangle$ ہے جس کے دائیں جانب اکائی سمتیہ $|e'_1\rangle$ چسپاں کرنے سے سمتیہ تظلیل حاصل کیا گیا۔ درج بالا سمتیہ $|e'_1\rangle$ کا کائنات ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کر کے $|e'_2\rangle$ حاصل کریں۔
ج سمتیہ $|e_3\rangle$ کی $|e'_1\rangle$ پر تظلیل اور $|e'_2\rangle$ پر تظلیل کو $|e_3\rangle$ سے منفی کریں۔

$$|e_3\rangle - \langle e'_1|e_3\rangle|e'_1\rangle - \langle e'_2|e_3\rangle|e'_2\rangle$$

یہ $|e'_1\rangle$ اور $|e'_2\rangle$ کو کائنات ہوگا؛ اس کو معمول شدہ کر کے $|e'_3\rangle$ حاصل کریں؛ وغیرہ، وغیرہ۔
گرامر و شمد حکمت عملی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تین ابعاد فضا کی اساس کو معیاری عمود شدہ کریں۔

$$|e_1\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}, |e_2\rangle = (i)\hat{i} + (3)\hat{j} + (1)\hat{k}, |e_3\rangle = (0)\hat{i} + (28)\hat{j} + (0)\hat{k}$$

سوال ۵: شوارز عدم مساوات (مساوات ۲۷) ثابت کریں۔ اشارہ: $\langle\alpha|\beta\rangle / \langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ لیں اور $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ استعمال کریں۔

سوال ۶: سمتیات $|\alpha\rangle = (1+i)\hat{i} + (1)\hat{j} + (i)\hat{k}$ اور $|\beta\rangle = (4-i)\hat{i} + (0)\hat{j} + (2-2i)\hat{k}$ کے $\langle\beta|\alpha\rangle$ (مساوات ۲۸) کی معنوں میں (زاویہ تلاش کریں۔)

سوال ۷: تکنیکی عدم مساوات $\|(\alpha) + (\beta)\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ ثابت کریں۔

۳.۱. قواعد

فرض کریں آپ (تین بعدی فضا میں) ہر سمتیہ کو 17 سے ضرب دیں، یا ہر سمتیہ کو z محور کے گرد 39° گھمائیں، یا xy مستوی میں ہر سمتیہ کا عکس لیں؛ یہ تمام خطی متبادلہ \hat{T} کی مثالیں ہیں۔ خطی متبادل \hat{T} 29 مستی فضا میں ہر ایک سمتیہ کا کسی دوسرے سمتیہ $(|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle)$ میں متبادلہ کرتا ہے جہاں کسی بھی سمتیات $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ اور کسی بھی غیر سمتیات a ، b کے لئے اس عمل کا خطی ہونا:

$$\hat{T}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a(\hat{T}|\alpha\rangle) + b(\hat{T}|\beta\rangle) \quad (۲۹)$$

لازمی شرط ہے۔

یہ جانتے ہوئے کہ اسی سمتیات کے سلسلہ کے ساتھ خطی متبادل کیا کرتا ہے، آپ با آسانی جان سکتے ہیں کہ وہ کسی بھی سمتیہ کے ساتھ کیا کرے گا۔ مثلاً، اگر $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ ، \dots ، $|e_n\rangle$ اساس قائم کرتے ہوں اور خطی متبادل \hat{T} اسی سمتیہ $|e_1\rangle$ پر عمل $(\hat{T}|e_1\rangle)$ کر کے ایک نیا سمتیہ پیدا کرتا ہے؛ ظاہر ہے، کسی بھی سمتیہ کی طرح، اس نئے سمتیہ کو بھی اس اساس میں لکھا جاسکتا ہے لہذا $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \dots + T_{n1}|e_n\rangle$

^{۲۸} linear transformation

^{۲۹} اس باب میں خطی متبادل کو ٹوپی کی علامت (^) سے ظاہر کیا جائے گا؛ جیسا ہم دیکھیں گے، کوانٹائی عامل بھی خطی متبادل ہیں اور ان کو بھی ٹوپی کی نشان سے ظاہر کیا جائے گا۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں $T_{11}, T_{21}, \dots, T_{n1}$ عددی سریں۔ اسی طرح باقی اسی سمتیات کے لئے ایک جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned}\hat{T}|e_1\rangle &= T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \dots + T_{n1}|e_n\rangle \\ \hat{T}|e_2\rangle &= T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + \dots + T_{n2}|e_n\rangle \\ &\vdots \\ \hat{T}|e_n\rangle &= T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + \dots + T_{nn}|e_n\rangle\end{aligned}$$

جس کو مختصر درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(۳۰) \quad \hat{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^n T_{ij}|e_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

اگر $|\alpha\rangle$ ایک اختیاری سمتیہ ہو (جس کو ہم ان اسی سمتیات میں لکھتے ہیں):

$$(۳۱) \quad |\alpha\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_3|e_3\rangle + \dots + a_n|e_n\rangle = \sum_{j=1}^n a_j|e_j\rangle$$

تب

$$\hat{T}|\alpha\rangle = a_1\hat{T}|e_1\rangle + a_2\hat{T}|e_2\rangle + a_3\hat{T}|e_3\rangle + \dots + a_n\hat{T}|e_n\rangle$$

ہوگا جس میں $\hat{T}|e_1\rangle = T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + \dots + T_{n1}|e_n\rangle$ وغیرہ پڑ کر کے

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= a_1(T_{11}|e_1\rangle + T_{21}|e_2\rangle + T_{31}|e_3\rangle + \dots + T_{n1}|e_n\rangle) \\ &+ a_2(T_{12}|e_1\rangle + T_{22}|e_2\rangle + T_{32}|e_3\rangle + \dots + T_{n2}|e_n\rangle) \\ &+ a_3(T_{13}|e_1\rangle + T_{23}|e_2\rangle + T_{33}|e_3\rangle + \dots + T_{n3}|e_n\rangle) \\ &\vdots \\ &+ a_n(T_{1n}|e_1\rangle + T_{2n}|e_2\rangle + T_{3n}|e_3\rangle + \dots + T_{nn}|e_n\rangle)\end{aligned}$$

ترتیب نو کرتے ہوئے اکائی سمتیات کے عددی سر اکٹھے کر کے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= (a_1T_{11} + a_2T_{12} + a_3T_{13} + \dots + a_nT_{1n})|e_1\rangle \\ &+ (a_1T_{21} + a_2T_{22} + a_3T_{23} + \dots + a_nT_{2n})|e_2\rangle \\ &+ (a_1T_{31} + a_2T_{32} + a_3T_{33} + \dots + a_nT_{3n})|e_3\rangle \\ &\vdots \\ &+ (a_1T_{n1} + a_2T_{n2} + a_3T_{n3} + \dots + a_nT_{nn})|e_n\rangle\end{aligned}$$

اس مساوات میں اسی سمتیہ $|e_1\rangle$ کے عددی سر $(a_1 T_{11} + a_2 T_{12} + \dots + a_n T_{1n})$ کو $\sum_{j=1}^n a_j T_{1j}$ لکھا جاسکتا ہے، اور اسی طرح باقی اسی سمتیات کے عددی سروں کے لئے بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\hat{T}|\alpha\rangle &= \sum_{j=1}^n a_j T_{1j}|e_1\rangle + \sum_{j=1}^n a_j T_{2j}|e_2\rangle + \dots + \sum_{j=1}^n a_j T_{nj}|e_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j T_{ij}|e_i\rangle\end{aligned}$$

ہم مساوات ۳۱ سے یہاں تک کے حساب کو مختصر اور درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(۳۲) \quad \hat{T}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \left(\hat{T}|e_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j T_{ij}|e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n T_{ij} a_j \right) |e_i\rangle$$

ظاہر ہے کہ \hat{T} ایک سمتیہ کو جس کے ارکان a_1, a_2, \dots, a_n ہوں کاتبادلہ ایک نئے سمتیہ میں کرتا ہے جس کے ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$(۳۳) \quad a'_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} a_j$$

(مساوات ۳۰ اور مساوات ۳۲ میں اشاریہ آگے پیچھے کئے گئے ہیں۔ یہ لکھتے ہوئے غلطی نہیں کی گئی۔ دوسرے لفظوں میں i اور j آپس میں تبدیل کرنے $i \leftrightarrow j$ سے مراد یہ ہے کہ) اگر اجزاء کاتبادلہ T_{ij} سے ہو، تب اسی سمتیات کاتبادلہ T_{ji} سے ہوگا۔

یوں جس طرح کسی اساس کے لحاظ سے n ارکان a_i سمتیہ $|\alpha\rangle$ کو یکت طور ظاہر کرتے ہیں اسی طرح T_{ij} کے n^2 ارکان \hat{T} مبدل \hat{T} کو اسی اساس کے لحاظ سے یکت طور پر بیان کرتے ہیں۔

$$(۳۴) \quad \hat{T} \leftrightarrow (T_{11}, T_{12}, \dots, T_{nn})$$

اگر اساس معیاری عمودی ہو، مساوات ۳۰ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۳۵) \quad T_{ij} = \langle e_i | \hat{T} | e_j \rangle$$

ان مخلوط اعداد کو **قالب**^{۳۱} کے روپ^{۳۲} میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔

$$(۳۶) \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

یوں خطی مبدل کا مطالعہ محض قواعد کے نظریہ کا مطالعہ ہوگا۔ دو خطی مبدل کے مجموعہ $(\hat{S} + \hat{T})$ کی تعریف:

$$(۳۷) \quad (\hat{S} + \hat{T})|\alpha\rangle = \hat{S}|\alpha\rangle + \hat{T}|\alpha\rangle$$

ہماری توقع کے عین مطابق قواعد جمع کرنے کے مترادف ہے (جہاں آپ انکے مطابق باقی ارکان جمع کرتے ہیں)۔

$$(۳۸) \quad \mathbf{U} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$$

دو خطی تبدلہ کا حاصل ضرب $(\hat{S}\hat{T})$ ، پہلے \hat{T} اور اس کے بعد \hat{S} تبدلہ کرنے کے مترادف ہے۔

$$(۳۹) \quad |\alpha'\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle; \quad |\alpha''\rangle = \hat{S}|\alpha'\rangle = \hat{S}(\hat{T}|\alpha\rangle) = \hat{S}\hat{T}|\alpha\rangle$$

مجموعی مبدل $\hat{U} = \hat{S}\hat{T}$ کو کوفتالب \mathbf{U} ظاہر کرتا ہے؟ اسے حاصل کرنا مشکل نہیں۔

$$a_i'' = \sum_{j=1}^n S_{ij}a_j' = \sum_{j=1}^n S_{ij} \left(\sum_{k=1}^n T_{jk}a_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n S_{ij}T_{jk} \right) a_k = \sum_{k=1}^n U_{ik}a_k$$

ظاہر ہے کہ درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۴۰) \quad \mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{T} \Leftrightarrow U_{ik} = \sum_{j=1}^n S_{ij}T_{jk}$$

قواعد ضرب کرنے کا یہ رائج طریقہ ہے؛ آپ \mathbf{S} کے i ویں صف اور \mathbf{T} کے k ویں قطار کے مطابق اندراج آپس میں ضرب کر کے تمام کا مجموعہ لے کر حاصل ضرب $\mathbf{S}\mathbf{T}$ کا ik ویں رکن تلاش کرتے ہیں۔ یہی طریقہ کار بروئے کار لاتے ہوئے مستطیل قواعد ضرب کیے جاتے ہیں، بس اتنا ضروری ہے کہ پہلے قتالب میں قطاروں کی تعداد دوسرے قتالب میں صفوں کی تعداد کے برابر ہو۔ بالخصوص $|\alpha\rangle$ کے ارکان کے n اجزائی سلسلہ کو

^{۳۱}matrix
^{۳۲}میں چوکور قواعد کو موٹی لکھائی میں لاطینی بڑے حروف، مثلاً \mathbf{T} ، سے ظاہر کر دیں گے۔

$n \times 1$ قطار قوالب^{۳۳} (یا "قطار سمتیہ")^{۳۴}

$$(۳۱) \quad \mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

لکھ کر تعداد تبادله (مساوات ۳۳) کو فتالبی حاصل ضرب:

$$(۳۲) \quad \mathbf{a}' = \mathbf{T} \mathbf{a}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں اب فتالبی اصطلاحات سیکھیں:

• **فتالب کاتبدیل** ^{۳۵} (جس کو ہم لاطینی حرف پ "مد" ڈال کر لکھتے ہیں: \tilde{T}) انہی ارکان پر مشتمل ہوگا، تاہم اس میں صف اور قطار آپس میں جگہیں تبدیل کرتی ہیں۔ بالخصوص قطار فتالب کاتبدیل محل صف قوالب^{۳۶} ہوگا۔

$$(۳۳) \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

چو کور فتالب کے (بالائی بائیں سے زیریں دائیں) مرکز ^{۳۷} وتر^{۳۸} میں عکس اس کاتبدیل محل ہوگا۔

$$(۳۴) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \dots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

ایسا (چو کور) فتالب جو اپنے تبدیل محل کے برابر ہو **تشاکلی** ^{۳۸} کہلاتا ہے؛ اگر تبدیل محل کی علامت السٹ ہو تب یہ **غلط تشاکلی** ^{۳۹} ہوگا۔

$$(۳۵) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \quad \text{تشاکلی} \quad \tilde{\mathbf{T}} = -\mathbf{T} \quad \text{حلاف تشاکلی}$$

^{۳۳} column matrix

^{۳۴} میں قطار قوالب اور صف قوالب کو موٹی لکھائی میں لاطینی چھوٹے حروف، مثلاً \mathbf{a} ، سے ظاہر کروں گا۔

^{۳۵} transpose

^{۳۶} row matrix

^{۳۷} main diagonal

^{۳۸} symmetric

^{۳۹} antisymmetric

• ہر کن کا مخلوط جوڑی دار لینے سے متالاب کا (مخلوط) جوڑی دار^{۴۰} (جس کو ہم ہمیشہ کی طرح ستارہ، T^* سے ظاہر کرتے ہیں) حاصل ہوگا۔

$$(۴۶) \quad T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & \cdots & T_{1n}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & \cdots & T_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}^* & T_{n2}^* & \cdots & T_{nn}^* \end{pmatrix} \quad a^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix}$$

تمام ارکان حقیقی ہونے کی صورت میں متالاب حقیقی^{۴۱} ہوگا، جبکہ تمام ارکان خیالی ہونے کی صورت میں متالاب خیالی^{۴۲} ہوگا۔

$$(۴۷) \quad T^* = T \quad \text{حقیقی} \quad T^* = -T \quad \text{خیالی}$$

• متالاب کا تبدیل محل و جوڑی دار اس کا ہر مشی جوڑی دار^{۴۳} (یا شریکے)^{۴۴} ہوگا جسے مخبر کے نشان، T^+ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(۴۸) \quad T^+ \equiv \tilde{T}^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & \cdots & T_{n1}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* & \cdots & T_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n}^* & T_{2n}^* & \cdots & T_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad a^+ \equiv \tilde{a}^* = (a_1^* \quad a_2^* \quad \cdots \quad a_n^*)$$

ایسا چونکہ متالاب جو اپنے ہر مشی جوڑی دار کے برابر ہو ہر مشی^{۴۵} (یا خود شریکے)^{۴۶} متالاب کہلاتا ہے؛ اگر ہر مشی جوڑی دار منفی علامت متعارف کرتا ہو متالاب منحرف ہر مشی^{۴۷} (یا غلاف ہر مشی)^{۴۸} ہوگا۔

$$(۴۹) \quad T^+ = T \quad \text{ہر مشی} \quad T^+ = -T \quad \text{منحرف ہر مشی}$$

اس علاقیت میں دو سمتیات کے اندرونی ضرب کو (معیاری عمودی اساس کے لحاظ سے) نہایت خوبصورتی کے ساتھ تالبی ضرب (مادات^{۴۹}) لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۵۰) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = a^+ b$$

conjugate^{۴۰}
real^{۴۱}
imaginary^{۴۲}
hermitian conjugate^{۴۳}
adjoint^{۴۴}
hermitian^{۴۵}
adjoint^{۴۶}
skew hermitian^{۴۷}
anti-hermitian^{۴۸}

یاد رہے کہ درج بالا رکوع میں متعارف تینوں اعمال (تبدیلی محل، جوڑی دار، ہر مٹی جوڑی دار) کا دو مرتبہ اطلاق سے واپس اصل متالع حاصل ہوگا۔

عام طور پر متالی ضرب غیر مقلبی $TS \neq ST$ ہوگا؛ ضرب لکھنے کے دونوں طریقوں کے بیچ منرق کو مقلب^{۴۹} کہتے ہیں۔^{۵۰}

$$(51) \quad [S, T] \equiv ST - TS \quad \text{مقلب}$$

حاصل ضرب کا تبدیل محل الٹ ترتیب میں تبدیل محلوں کا حاصل ضرب:

$$(52) \quad (\widetilde{ST}) = \widetilde{T}\widetilde{S}$$

ہوگا (سوال ۱۱.۱ دیکھیں)، اور یہی کچھ ہر مٹی جوڑی دار کے لئے بھی درست ہوگا۔

$$(53) \quad (ST)^+ = T^+ S^+$$

اکائی قالب^{۵۱} کے مرکزی و ترپرارکان کی قیمت ایک اور باتوں کی قیمت صفر ہوگی۔

$$(54) \quad I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(اکائی متالع خطی تبدل کو ظاہر کرتا ہے جو ہر سمتیہ کا تبدل اسی سمتی میں کرتا ہے۔) دوسرے لفظوں میں درج ذیل ہوگا۔

$$(55) \quad I_{ij} = \delta_{ij}$$

چو کورتالع کے معکوس^{۵۲}، جسے T^{-1} لکھا جاتا ہے، کی تعریف بدیہی ہے۔^{۵۳}

$$(56) \quad T^{-1}T = TT^{-1} = I$$

متالع کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب اس کا مقلب^{۵۴} غیر صفر ہو؛ درحقیقت

$$(57) \quad T^{-1} = \frac{1}{|T|} \widetilde{C}$$

^{۴۹}commutator

^{۵۰}صرف چو کورتالع کے لئے متالع معنی خیز ہے۔ غیر چو کورتالع میں دونوں ضرب کی جسامت بھی ایک جیسی نہیں ہوگی۔

^{۵۱}unit matrix

^{۵۲}inverse

^{۵۳}دھیان رہے کہ بائیں معکوس، دائیں معکوس کے برابر ہے، چونکہ اگر $AT = I$ اور $TB = I$ ہوں، تب (دوسرے کو بائیں سے A سے ضرب کر کے پہلا استعمال کرنے سے) ہمیں $B = A$ حاصل ہوگا۔

^{۵۴}determinant

ضمیمہ ا۔ ضمیمہ

ہوگا، جہاں ہم ضربیوں کا مقابلہ C ہے اور |T| مقابلہ کا مقطع ہے (مقابلہ T سے i ویں صف اور j ویں قطار خارج کر کے حاصل ذیلی مقابلہ کے مقطع کو $(-1)^{i+j}$ سے ضرب دینے سے رکن T_{ij} کا ہم ضربی حاصل ہوگا۔)۔
(چونکہ) مقابلہ کے مرکزی ارکان کے مجموعہ کو مقابلہ کے آثار کہتے ہیں۔

$$(\text{آثار } T) = \sum_i^n T_{ii}$$

ایسا مقابلہ جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نامور کہلاتا ہے۔ حاصل ضرب کا معکوس (اگر موجود ہو) الٹ ترتیب میں انفرادی معکوس کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1} \quad (58)$$

ایسا مقابلہ جس کا معکوس اس کے ہر مشی جوڑی دار کے برابر ہو اکہرا کہلاتا ہے۔^{۵۹}

$$U^{\dagger} = U^{-1} \quad \text{اکہرا} \quad (59)$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اساس معیاری عمودی ہے، اکہرا مقابلہ کے قطار معیاری عمودی سلسلہ قائم کرتے ہیں، اور اس کے صف بھی ایسا کرتے ہیں (سوال ۱۲.۱ دیکھیں)۔ ایسے خطی متبادل جنہیں اکہرا مقابلہ ظاہر کرتے ہوں، مساوات ۵۰ کی بدولت، اندرونی ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

$$\langle \alpha' | \beta' \rangle = \mathbf{a}'^{\dagger} \mathbf{b}' = (\mathbf{Ua})^{\dagger} (\mathbf{Ub}) = \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{Ub} = \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{b} = \langle \alpha | \beta \rangle \quad (60)$$

سوال ۸.۱: درجہ ذیل قواعد لیتے ہوئے

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

درجہ ذیل کا حساب لگائیں: (الف) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، (ب) \mathbf{AB} ، (ج) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ، (د) $\tilde{\mathbf{A}}$ ، (ه) \mathbf{A}^* ، (و) \mathbf{A}^{\dagger} ، (ز) آثار (B) (ح) مقطع (B) اور (ط) \mathbf{B}^{-1} ۔ دکھائیں کہ $\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ ہے۔ کیا \mathbf{A} کا معکوس پایا جاتا ہے؟

سوال ۹.۱: قطار قواعد

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

cofactors^{۵۵}
trace^{۵۶}
singular^{۵۷}
unitary^{۵۸}

^{۵۹} حقیقی سمتیہ نصف (یعنی جس میں غیر سمتیہ حقیقی ہوں) میں ہر مشی جوڑی دار اور تبدیل عمل ایک ہوں گے، اور اکہرا مقابلہ قائم ہوگا۔ مثلاً، سادہ تین بُعدی نصف میں گھومنے کو قائم قواعد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $\tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{O}^{-1}$

اور سوال ۸.۱ میں مستعمل چوکور قوالب استعمال کرتے ہوئے درجہ ذیل تلاش کریں۔ (الف) Aa ، (ب) a^+b ، (ج) ab^+ ، (د) $\tilde{a}Bb$

سوال ۱۰.۱: درجہ ذیل میں صریحاً قوالب تیار کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی متالب T کو درجہ ذیل لکھاجا سکتا ہے۔

۱. تشکیلی متالب S اور خلاف تشکیلی متالب A کا مجموعہ۔

۲. حقیقی متالب R اور خیالی متالب M کا مجموعہ۔

۳. ہر مشی متالب H اور منحرف ہر مشی متالب K کا مجموعہ۔

سوال ۱۱.۱: مساوات ۵۲، مساوات ۵۳ اور مساوات ۵۸ ثابت کریں۔ دکھائیں کہ دو اکہرا قوالب کا حاصل ضرب اکہرا ہوگا۔ کن شرائط کے تحت دو ہر مشی قوالب کا حاصل ضرب بھی ہر مشی ہوگا؟ کیا دو اکہرا قوالب کا مجموعہ اکہرا ہوگا؟ کیا دو ہر مشی قوالب کا مجموعہ ہر مشی ہوگا؟

سوال ۱۲.۱: دکھائیں کہ اکہرا متالب کے صف اور قطار عمودی معیاری سلسلہ قائم کرتے ہیں۔

سوال ۱۳.۱: یہ جاننے ہوئے کہ $T = \text{مقطع } \tilde{T}$ ہے دکھائیں کہ ہر مشی متالب کا مقطع حقیقی ہوگا، اکہرا متالب کے مقطع کا معیار 1 ہوگا (جس کی بنا اس کا نام اکہرا متالب ہے) اور معیاری عمودی متالب کا مقطع 1 یا -1 ہوگا۔

۴.۱. تبدیلی اساس

خطی تبدلہ کو ظاہر کرنے والے متالب کے ارکان یا سمتیہ کے ارکان یقیناً اساس کے انتخاب پر منحصر ہوں گے۔ آئیں اس بات پر غور کرتے ہیں کہ اساس کی تبدیلی سے یہ اعداد کس طرح تبدیل ہوں گے۔

پرانے اسی سمتیات $|e_i\rangle$ ، کسی بھی سمتیہ کی طرح، ان نئے سمتیات $|f_i\rangle$ کا خطی مجموعہ ہونگے:

$$|e_1\rangle = S_{11}|f_1\rangle + S_{21}|f_2\rangle + \cdots + S_{n1}|f_n\rangle$$

$$|e_2\rangle = S_{12}|f_1\rangle + S_{22}|f_2\rangle + \cdots + S_{n2}|f_n\rangle$$

...

$$|e_n\rangle = S_{1n}|f_1\rangle + S_{2n}|f_2\rangle + \cdots + S_{nn}|f_n\rangle$$

(جہاں S_{ij} منسلط اعداد کا سلسلہ ہوگا) یا مختصر اور ج ذیل۔

$$(۲۱) \quad |e_j\rangle = \sum_{i=1}^n S_{ij}|f_i\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

یہ از خود ایک خطی تبدلہ ہے (مساوات ۳۰ سے موازنہ کریں)، n اور یوں ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا تبدلہ کس

^{۲۰} یاد رہے کہ یہاں موجودہ بحث میں ہم ایک ہی سمتیہ کا دو مکمل مختلف اساس میں بات کر رہے ہیں، جبکہ وہاں بالکل مختلف سمتیہ کی بات اسی ایک اساس میں کی جا رہی تھی۔

طرح ہوگا:

$$(۶۲) \quad a_i^f = \sum_{j=1}^n S_{ij} a_j^e$$

(جہاں زیر بالا اساس کو ظاہر کرتی ہے، یعنی a^e سے مراد اسی سمتیات $|e_i\rangle$ میں لکھے گئے ارکان ہیں)۔ متالبی روپ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۶۳) \quad \mathbf{a}^f = \mathbf{S} \mathbf{a}^e$$

خطی تبدلہ \hat{T} کو ظاہر کرنے والا متالب، اساس کی تبدیلی سے کس طرح تبدیل ہوگا؟ پرانے اساس میں ہمارے پاس (مساوات ۴۲)

$$\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{T}^e \mathbf{a}^e$$

اور مساوات ۶۳ تھے؛ مساوات ۶۳ کے دونوں اطراف کو \mathbf{S}^{-1} سے ضرب دے کر $\mathbf{a}^f = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{a}^e$ لہذا

$$\mathbf{a}^{f'} = \mathbf{S} \mathbf{a}^{e'} = \mathbf{S} (\mathbf{T}^e \mathbf{a}^e) = \mathbf{S} \mathbf{T}^e \mathbf{S}^{-1} \mathbf{a}^f$$

حاصل ۶۱ ہوگا (مساوات ۶۳ میں \mathbf{a}^f کی جگہ $\mathbf{a}^{f'}$ ، وغیرہ لکھا گیا ہے)۔ ظاہری طور پر

$$(۶۴) \quad \mathbf{T}^f = \mathbf{S} \mathbf{T}^e \mathbf{S}^{-1}$$

ہوگا۔ عمومی طور پر دو توالب (\mathbf{T}_1 اور \mathbf{T}_2) اس صورت $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S} \mathbf{T}_1 \mathbf{S}^{-1}$ میں $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S} \mathbf{T}_1 \mathbf{S}^{-1}$ ہو۔ یوں ہم دریافت کر چکے کہ، مختلف اساس لے لحاظ سے، ایک ہی خطی تبدلہ کو ظاہر کرنے والے توالب میثابہ ہونگے۔ اتفاقی طور پر، اگر پہلی اساس معیاری عمودی ہو تب دوسری اساس صرف اس صورت معیاری عمودی ہوگی جب متالب \mathbf{S} اکبر ہو (سوال ۱۶.۱ دیکھیں)۔ چونکہ ہم صرف معیاری عمودی اساس میں کام کرتے ہیں لہذا ہماری دلچسپی بنیادی طور پر اکبر امیثابہت تبدلہ میں ہے۔

اگرچہ نئی اساس میں خطی تبدلہ کے ارکان بہت مختلف نظر آتے ہیں، متالب سے وابستہ دو اعداد، مقطع اور آثار متالب، تبدیل نہیں ہوتے۔ چونکہ حاصل ضرب کا مقطع، مقطعوں کا حاصل ضرب ہوگا، لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۶۵) \quad |\mathbf{T}^f| = |\mathbf{S} \mathbf{T}^e \mathbf{S}^{-1}| = |\mathbf{S}| |\mathbf{T}^e| |\mathbf{S}^{-1}| = |\mathbf{T}^e|$$

آثار متالب (Tr) جو وتری ارکان کا مجموعہ ہے:

$$(۶۶) \quad \text{Tr}(\mathbf{T}) \equiv \sum_{i=1}^m T_{ii}$$

^{۱۱} یاد رہے کہ \mathbf{S}^{-1} لازماً موجود ہوگا؛ اگر \mathbf{S} نادر ہوتا، تب $|f_i\rangle$ فنکشن کا احاطہ نہ کرتے، لہذا اساس متاثر نہ کرتے۔
similar^{۱۲}

درجہ ذیل خاصیت رکھتا ہے (سوال ۱۷ ادیکھیں)

$$(۱۷) \quad \text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)$$

(جہاں \mathbf{T}_1 اور \mathbf{T}_2 کوئی بھی دو قوابل ہیں)، لہذا درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۱۸) \quad \text{Tr}(\mathbf{T}^f) = \text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{T}^e \mathbf{S}^{-1}) = \text{Tr}(\mathbf{T}_e \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}) = \text{Tr}(\mathbf{T}^e)$$

سوال ۱۴: تین ابعاد میں سمتیات کی لئے معیاری اساس $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ استعمال کرتے ہوئے۔

۱. (مبدأ کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھسڑی z محور کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔

ب. نقطہ $(1, 1, 1)$ سے گزرتے ہوئے محور کے گرد (محور سے مبدأ کی طرف نیچے دیکھتے ہوئے) خلاف گھسڑی 120° گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔

ج. مستوی xy میں عکس کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔

د. تصدیق کریں کہ یہ تمام قوابل معیاری عمودی ہیں اور ان کے مقطعات تلاش کریں۔

سوال ۱۵: عمومی اساس $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ میں محور x کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب \mathbf{T}_x ، اور محور y کے گرد زاویہ θ گھومنے کو ظاہر کرنے والے متالب \mathbf{T}_y تیار کریں۔ فرض کریں اب ہم اساس تبدیل کر کے $\hat{j} = \hat{i}'$ ، $\hat{i} = -\hat{j}'$ ، $\hat{k} = \hat{k}'$ لیتے ہیں۔ اساس کی اس تبدیلی کو پیدا کرنے والا متالب \mathbf{S} تیار کریں، اور تصدیق کریں کہ آیا $\mathbf{S} \mathbf{T}_x \mathbf{S}^{-1}$ اور $\mathbf{S} \mathbf{T}_y \mathbf{S}^{-1}$ آپ کے توقعات کے مطابق ہیں یا نہیں۔

سوال ۱۶: دکھائیں کہ میٹا ہرمت متالبی ضرب برقرار رکھتا ہے (یعنی $\mathbf{A}^e \mathbf{B}^e = \mathbf{C}^e$ ہونے کی صورت میں $\mathbf{C}^f = \mathbf{A}^f \mathbf{B}^f$ ہوگا)۔ میٹا ہرمت عمومی طور پر تشاکلی، حقیقت یا ہر مشی پن برقرار نہیں رکھتا؛ لیکن، دکھائیں اگر \mathbf{S} اکبر اہو، اور \mathbf{H}^e ہر مشی ہو، تب \mathbf{H}^f ہر مشی ہوگا۔ دکھائیں کہ \mathbf{S} صرف اور صرف اس صورت معیاری عمودی اساس کو دوسری معیاری عمودی اساس میں منتقل کرے گا اگر یہ اکبر اہو۔

سوال ۱۷: ثابت کریں کہ $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)$ ہوگا۔ یوں $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_1)$ ہوگا، لیکن کیا عام طور پر $\text{Tr}(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3) = \text{Tr}(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3)$ ہوگا؟ اس کو ٹھیک یا غلط ثابت کریں۔ اشارہ: غلط ثابت کرنے کا بہترین ثبوت اسکی الٹ مثال پیش کرنا ہے؛ جتنا مثال سادہ ہوتا اتنا ہی بہتر ہے۔

۵.۱ امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار

تہہ رافص میں کسی مخصوص محور کے گرد زاویہ θ گھمانے کو ظاہر کرنے والے خطی تبادلہ پر غور کریں۔ زیادہ تر سمتیات پیچیدہ انداز سے تبدیل ہوں گے (یہ اس محور کے گرد مخروط پر حرکت کریں گے)، لیکن وہ سمتیات جو ای محاور پر پائے جاتے ہوں کاروسیہ نہایت سادہ ہوگا؛ وہ بالکل تبدیل نہیں ہوں گے ($\langle \hat{T} | \alpha \rangle = |\alpha \rangle$)۔ اگر θ کی قیمت 180° ہو تب

”استوائی“ مستوی میں پائے جانے والے سمتیات کی علامت تبدیل ہوگی $(|\alpha\rangle - |\hat{T}|\alpha\rangle)$ ۔ مخلوط سمتی فنکشن^{۶۳} میں ہر خطی تبادلہ کے، اس طرح کے ”مخصوص“ سمتیات پائے جاتے ہیں جو اپنے آپ کے غیر سمتی مضرب میں تبدیل ہوتے:

$$(۶۹) \quad \hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$$

انہیں اس تبادلہ کے امتیازی سمتیات^{۶۴} کہتے ہیں، اور (مخلوط) عدد λ ان کا امتیازی قدر^{۶۵} ہے۔ (اگرچہ، معدوم سمتی مہمل معنوں میں مساوات ۶۹ کو کسی بھی \hat{T} اور λ کے لئے مطمئن کرتا ہے، اسے امتیازی سمتیات میں نہیں گنا جاتا۔ تکنیکی طور پر امتیازی سمتیہ سے مراد وہ غیر مضرب سمتیہ ہے جو مساوات ۶۹ کو مطمئن کرتا ہو۔) دھیان رہے کہ امتیازی سمتیہ کاہر (غیر مضرب) بھی امتیازی سمتیہ ہوگا، اور اس کی امتیازی قدر وہی ہوگی۔ کسی مخصوص اساس کے لحاظ سے، امتیازی سمتیہ مساوات والی روپ:

$$(۷۰) \quad \mathbf{T} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$

(جہاں \mathbf{a} غیر مضرب ہے) یا

$$(۷۱) \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

اختیار کرتی ہے۔ (یہاں $\mathbf{0}$ ایسا صفر قالب^{۶۶} ہے جس کے تمام ارکان صفر ہیں۔) اب، اگر $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$ کا معکوس پایا جاتا، ہم مساوات ۷۱ کے دونوں اطراف کو $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ سے ضرب دے کر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ اخذ کرتے۔ لیکن ہم \mathbf{a} کو غیر مضرب فرض کر چکے ہیں، لہذا $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$ حقیقتاً نا در ہوگا، جس سے مراد یہ ہے کہ اس کا مقطع صفر ہوگا۔

$$(۷۲) \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \text{مقطع} = \begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & (T_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

مقطع کھولنے سے λ کی الجبرائی مساوات:

$$(۷۳) \quad C_n \lambda^n + C_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0 \quad \text{امتیازی مساوات}$$

حاصل ہوتی ہے، جہاں عددی سر C_i کی قیمتیں T کے ارکان کی تابع ہیں (سوال ۱۸۰ دیکھیں)۔ اس کو $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$ کی امتیازی مساوات^{۶۷} کہتے ہیں؛ اور اس کے حل امتیازی اقدار کا تعین کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہ n رتبی مساوات

^{۶۳} حقیقی سمتی فنکشن میں (جہاں غیر سمتیہ کی قیمتیں حقیقی ہونے کی پابند ہوں گی) ایسا لازمی نہیں۔ سوال ۱۸۱ دیکھیں۔

^{۶۴} eigenvectors

^{۶۵} eigenvalue

^{۶۶} zero matrix

^{۶۷} characteristic equation

ہے، لہذا (الجبرا کے بنیادی مسئلہ ^{۶۸} کے تحت) اس کے n (مخلوط) جذور ہوں گے۔ ^{۶۹} تاہم، ان میں سے چند متعدد جذور ہو سکتے ہیں، لہذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $n \times n$ متالب کا کم سے کم ایک اور زیادہ سے زیادہ n منفرد امتیازی افتدار ہو سکتے ہیں۔ متالب کے تمام امتیازی افتدار کے ذخیرہ کو اس کا طیف ^{۷۰} کہتے ہیں؛ اگر دو یا دو سے زیادہ خطی غیر تابع امتیازی سمتیات کا ایک ہی امتیازی افتدار ہو، ہم کہتے ہیں طیف انحطاطی ^{۷۱} ہے۔

عام طور پر، امتیازی سمتیات تیار کرنے کا سادہ ترین طریقہ یہ ہوگا کہ مساوات λ ڈال کر a کے ارکان کے لئے قلم و کاغذ سے حل کیا جائے۔ میں یہ عمل ایک مثال حل کر کے سمجھاتا ہوں۔
مثال ۱.۱: درج ذیل متالب کے امتیازی افتدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں۔

$$(۷۲) \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

حل: اس کی امتیازی مساوات

$$(۷۳) \quad \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -2 \\ -2i & (i-\lambda) & 2i \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1+i)\lambda^2 - i\lambda = 0$$

ہے، جس کے جذور 0 ، 1 اور i ہیں۔ پہلے امتیازی سمتیہ کے جزو (a_1, a_2, a_3) لیتے ہوئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ہوگا، جو درجہ ذیل تین مساوات دیتا ہے۔

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_3 &= 0 \\ -2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

^{۶۸} fundamental theorem of algebra

^{۶۹} یہ وہ مقام ہے جہاں حقیقی سستی نفٹ کا مسئلہ مزید پیچیدہ ہوتا ہے، چونکہ ضروری نہیں امتیازی مساوات کا کوئی بھی (حقیقی) حل پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۸.۱ دیکھیں۔

^{۷۰} multiple roots

^{۷۱} spectrum

^{۷۲} degenerate

ضمیمہ ا. ضمیمہ

ان میں سے پہلی مساوات (a_1 کی صورت میں) a_3 کا تعین کرتی ہے: $a_3 = a_1$ ؛ دوسری مساوات a_2 کا تعین کرتی ہے: $a_2 = 0$ ؛ اور تیسری مساوات زائد از ضرورت مہم ہے۔ ہم $a_1 = 1$ چن سکتے ہیں (چونکہ امتیازی سمتیہ کا کوئی بھی مضرب امتیازی سمتیہ ہی ہوگا)۔

$$(۷۶) \quad \mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0 \text{ کے لئے}$$

دوسرے امتیازی سمتیہ کے لئے (جبز کو وہی علامتیں استعمال کرتے ہوئے)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ہوگا، جس سے درجہ ذیل مساوات حاصل ہوں گی:

$$2a_1 - 2a_3 = a_1$$

$$-2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 = a_2$$

$$a_1 - a_3 = a_3$$

جن کے حل $a_3 = (1/2)a_1$ ، $a_2 = [(1-i)/2]a_1$ ہیں؛ اس مرتبہ میں $a_1 = 2$ لیتا ہوں، لہذا

$$(۷۷) \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \text{ کے لئے}$$

ہوگا۔ آخر میں، تیسرا امتیازی سمتیہ کے لئے

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ia_2 \\ ia_3 \end{pmatrix}$$

درجہ ذیل مساوات دیگا

$$2a_1 - 2a_3 = ia_1$$

$$-2ia_1 + ia_2 + 2ia_3 = ia_2$$

$$a_1 - a_3 = ia_3$$

جس کے حل $a_3 = a_1 = 0$ ہیں، جہاں a_2 غیر متعین ہے۔ ہم $a_2 = 1$ چنتے ہیں، یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$(۷۸) \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = i \text{ کے لئے}$$

□

اگر امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں جیسا گزشتہ مثال میں کرتے تھے ہم انہیں اساس کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں

$$\hat{T}|f_1\rangle = \lambda_1|f_1\rangle,$$

$$\hat{T}|f_2\rangle = \lambda_2|f_2\rangle,$$

...

$$\hat{T}|f_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$$

اس اساس میں \hat{T} کو ظاہر کرنے والا متالاب انتہائی سادہ روپ اختیار کرتا ہے جس میں امتیازی اقدار مرکزی وتر پر پائے جاتے ہیں جبکہ باقی تمام ارکان صفر ہوں گے

$$(۷۹) \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

اور معمول شدہ امتیازی سمتیات درج ذیل ہوں گے

$$(۸۰) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ایسا متالاب جس کو اساس کی تبدیلی سے وتری روپ مساوات A.79 کی صورت میں لایا جاسکے وتری کہلاتا ہے ظاہر ہے کہ ایسا متالاب صرف اس صورت میں وتری ہوگا جب اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہوں۔ میٹا بہت متالاب جو وتری بناتا ہے کو پرانی اساس میں معمول شدہ امتیازی سمتیات بطور S^{-1} کے قطار لیتے ہوئے تیار کیا جاسکتا ہے

$$(۸۱) \quad (S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i$$

مثال ۲.۱: مثال A.1 میں

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (1-i) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لہذا مساوات A.57 استعمال کرتے ہوئے

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ (i-1) & 1 & (1-i) \end{pmatrix}$$

اور آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$Sa^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Sa^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Sa^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اور

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

□

ہوگا۔

تالاب کو وتری روپ میں لانے کا صاف نظر آنے والا فائدہ ہے اس کے ساتھ کام کرنا نہایت آسان ہے۔ بد قسمتی سے ہر تالاب کو وتری نہیں بنایا جاسکتا امتیازی سمتیات کو فضا کا احاطہ کرنا ہوگا۔ اگر امتیازی مساوات کے n منفرد جذر ہوں تب تالاب لفظاً و تری بنایا جاسکتا ہے لیکن مربع جذر کی صورت میں بھی ممکن ہے کہ یہ وتری بنانے کے قابل ہو۔ وتری بنانے کے غیر قابل تالاب کے لئے سوال A.19 دیکھیں۔ کیا بہتر ہوتا اگر تمام امتیازی سمتیات معلوم کرنے سے قبل ہم جان سکتے کہ آیا ایک تالاب وتری بنانے کے قابل ہے یا نہیں ایک کافی لیکن لازمی نہیں شرط درج ذیل ہے ایک تالاب جو اپنے ہر مشی جوڑی دار کے ساتھ مقلوب ہو عمودی تالاب کہلاتا ہے

$$[N^+, N] = 0, \text{ سادہ} \quad (۸۲)$$

ہر عمودی تالاب وتری بنانے کے قابل ہے اس کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں۔ بالخصوص ہر ہر مشی تالاب اور اکبر استالاب وتری بنانے کے قابل ہے۔

فرض کریں ہمارے پاس دو وتری بنانے کے قابل تالاب ہیں قونٹائی معاملات میں عموماً ایک سوال کھڑا ہوتا ہے کیا انہیں بیک وقت وتری بنایا جاسکتا ہے یعنی ایک ہی مشابہت تالاب S کے ذریعہ؟ دوسرے لفظوں میں کیا ایسی اس موجود ہے جس میں دونوں وتری بنائے جاسکتے ہیں؟ اس کا جواب ہے کہ صرف اور صرف اس صورت میں ممکن ہوگا جب دونوں تالاب مقلوبی ہوں سوال A.22 دیکھیں۔ سوال ۱۸.۱: مستوی xy میں گھومنے کو ظاہر کرنے والا 2×2 تالاب

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (۸۳)$$

دیکھائیں کہ ماسوائے مخصوص زاویوں کے بتائیں وہ کون سے زاویہ ہیں؟ اس متالب کا کوئی حقیقی امتیازی قدر نہیں پایا جاتا۔ یہ اس ہندسی حقیقت کا احسن ہے کہ مستوی میں کوئی بھی سمتیہ گھمانے کے ذریعہ اپنے آپ میں نہیں پہنچایا جاسکتا اس کا موازنہ تین ابعاد میں گھمانے سے کریں۔ البتہ اس متالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ہوں گے۔ انہیں تلاش کریں۔ متالب T کو وتری بنانے والا متالب S تیار کریں۔ میٹریکس متبادل STS^{-1} صریحاً کریں اور دکھائیں کہ یہ T کو وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ۱۹: درجہ ذیل متالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات تلاش کریں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

کیا یہ متالب وتری بنانے کے قابل ہے؟

سوال ۲۰: دکھائیں کہ امتیازی مساوات (مساوات ۷۳) کا پہلا، دوسرا اور آخری عددی سر درجہ ذیل ہیں

$$(۸۴) \quad C_n = (-1)^n, C_{n-1} = (-1)^{n-1} Tr(T), \text{ اور } C_0 = \det(T)$$

ایک 3×3 متالب جس کے ارکان T_{ij} ہوں گا C_1 کیا ہوگا؟

سوال ۲۱: صاف ظاہر ہے کہ وتری متالب کا آس متالب اس کے امتیازی اقدار کا مجموعہ اور اس کا مقطع ان کا حاصل ضرب ہوگا صرف مساوات $A.79$ کو دیکھنے کی دیر ہے یوں مساوات $A.65$ اور $A.68$ کے تحت کسی بھی وتری بنانے کے قابل متالب کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا۔ درجہ ذیل حقیقت کسی بھی متالب کے لئے ثابت کریں

$$(۸۵) \quad \det(T) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \quad Tr(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

امتیازی مساوات کے n حل یہاں λ ہیں مرکز جذر کی صورت میں حلوں سے کم خطی غیر تابع امتیازی سمتیات ہو سکتے ہیں لیکن ہم λ کو اتنی مرتبہ ہی لگتے ہیں جتنی مرتبہ یہ پایا جاتا ہو۔ اشارہ: امتیازی مساوات کو درجہ ذیل روپ میں لکھیں

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

اور سوال $A.20$ کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال ۲۲:

(الف) دکھائیں اگر دو متالب کسی ایک اساس میں مقبولی ہوں تب وہ ہر اساس میں مقبولی ہوں گے یعنی درجہ ذیل ہوگا

$$(۸۶) \quad [T_1^e, T_2^e] = 0 \Rightarrow [T_1^f, T_2^f] = 0$$

اشارہ: مساوات $A.64$ استعمال کریں۔

(ب) دکھائیں کہ اگر دو متالاب یک وقت وتری بنانے کے متالاب ہوں تو وہ مقلوبی ہوں گے۔

سوال ۲۳: درجہ ذیل متالاب لیں

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

(الف) کیا یہ عمودی متالاب ہے؟

(ب) کیا یہ وتری بنانے کے متالاب ہے؟

۶.۱ ہر مشی تبادله

میں نے مساوات A.48 میں متالاب کے تبدیل محل و جوڑی دار \tilde{T}^* کو اس کی ہر مشی جوڑی دار یا شریک متالاب کی تعریف مترا دیا۔ یہاں میں خطی تبادله کے ہر مشی جوڑی دار کا زیادہ بنیادی تعریف پیش کرتا ہوں یہ وہ تبادله \hat{T}^+ ہے جس کا اطلاق اندرونی ضرب کے پہلے رکن پر وہی نتیجہ دیتا ہے جو دوسرے سمتیہ پر خود \hat{T} کا اطلاق دیگا

$$(A.48) \quad \langle \hat{T}^+ \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | \hat{T} \beta \rangle$$

جہاں $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کوئی بھی سمتیات ہو سکتے ہیں۔ ہاشیہ اس کا متالاب اگر دو وتری بنانے کے متالاب مقلوبی ہوں تب وہ یک وقت وتری بنانے کے متالاب ہوں گے ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہاشیہ آپ پوچھ سکتے ہیں ایسا تبادله لازماً موجود ہوگا یہ ایک اچھا سوال ہے اس کا جواب ہے جی ہاں۔ میں آپ کو خبردار کرتا چلوں کہ اگر چہ ہر کوئی اسے استعمال کرتا ہے یہ مندرجہ علاقیت ہے سمتیات α اور β ہیں جبکہ $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ سمتیات نہیں بلکہ نام ہیں۔ بالخصوص ان کے کوئی ریاضیاتی خواص نہیں پائے جاتے اور $\hat{T}\beta$ کا فترہ بے معانی ہے خطی تبادله کسی سمتیہ پر ناکہ نام پر عمل کرتے ہیں۔ لیکن اس علامت کا مطلب صاف ظاہر ہے سمتیہ $\hat{T}\beta$ کا نام $\hat{T}|\beta\rangle$ ہے اور سمتیہ $\hat{T}^+|\alpha\rangle$ اور سمتیہ $|\beta\rangle$ کا اندرونی ضرب $\langle \hat{T}^+ \alpha | \beta \rangle$ ہے۔ بالخصوص

$$(A.48) \quad \langle \alpha | c \beta \rangle = c \langle \alpha | \beta \rangle$$

جہاں کسی بھی غیر سمتی c کے لئے چہرہ ذیل ہوگا

$$(A.49) \quad \langle c \alpha | \beta \rangle = c^* \langle \alpha | \beta \rangle$$

اگر آپ ہمیشہ کی طرح معیاری عمودی اساس میں کام کر رہے ہوں خطی تبادله کے ہر مشی جوڑی دار کو مطابقتی متالاب کا ہر مشی جوڑی دار ضاہر کریگا چونکہ مساوات A.50 اور A.53 استعمال کرتے ہوئے درجہ ذیل ہوگا

$$(A.50) \quad \langle \alpha | \hat{T} \beta \rangle = a^+ T b = (T^+ a)^+ b = \langle \hat{T}^+ \alpha | \beta \rangle$$

یوں یہ علاقیت صواب ہے اور ہم چاہیں تو تبادله کی زبان اور چاہیں تو قوالب کی زبان میں بات کر سکتے ہیں۔

کوانٹائی میکانیات میں ہر مشی تبادله ($\hat{T}^+ = \hat{T}$) بنیادی کردار ادا کرتے ہیں۔ ہر مشی تبادله کے امتیازی سمتیات اور امتیازی اقدار تین نہایت اہم خواص رکھتے ہیں۔

(الف) ہر مشی تبادله کے امتیازی اقدار حقیقی ہیں:

ثبوت: فرض کریں \hat{T} کی ایک امتیازی مقدار λ ہے $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ جہاں $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$ ہے۔ تب درج ذیل ہوگا

$$\langle\alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle\alpha|\lambda\alpha\rangle = \lambda\langle\alpha|\alpha\rangle$$

ساتھ ہی \hat{T} ہر مشی ہے لہذا اور جب ذیل ہوگا

$$\langle\alpha|\hat{T}\alpha\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\alpha\rangle = \langle\lambda\alpha|\alpha\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\alpha\rangle$$

لیکن $\langle\alpha|\alpha\rangle \neq 0$ ہے مساوات A.20 لہذا $\lambda = \lambda^*$ اور یوں λ حقیقی ہوگا۔

(ب) ہر مشی تبادله کے منفرد امتیازی اقدار کے امتیازی سمتیات قائم ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$ اور $\hat{T}|\beta\rangle = \mu|\beta\rangle$ ہے جہاں $\lambda \neq \mu$ ہے۔ تب

$$\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\alpha|\mu\beta\rangle = \mu\langle\alpha|\beta\rangle$$

اور اگر \hat{T} ہر مشی ہو درجب ذیل ہوگا

$$\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle = \langle\lambda\alpha|\beta\rangle = \lambda^*\langle\alpha|\beta\rangle$$

لیکن $\lambda = \lambda^*$ ہے جسز (الف) سے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ $\lambda \neq \mu$ ہے لہذا $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ ہوگا۔

(ج) ہر مشی تبادله کے امتیازی سمتیات فضا کا احاطہ کرتے ہیں جیسا ہم دیکھ چکے ہیں یہ اس فکر کے مترادف ہے کہ کسی بھی ہر مشی قوالب کو وتری بنایا جاسکتا ہے مساوات A.82 دیکھیں۔ یہ حقیقت جو حسی تکنیکی ہے وہ ریاضیاتی سہارا ہے جس پر زیادہ تر کوانٹائی میکانیات کھڑی ہے۔ چونکہ اس ثبوت کو لامتناہی ابعادی سمتی فضاؤں تک وصت نہیں دی جاسکتی لہذا یہ ایک باریک لڑی ہے جس پر کوانٹائی میکانیات منحصر ہے۔

سوال ۲۴.۱: ہر مشی خطی تبادله کو تمام سمتیات $|\alpha\rangle$ اور $|\beta\rangle$ کے لئے لازماً $\langle\alpha|\hat{T}\beta\rangle = \langle\hat{T}\alpha|\beta\rangle$ مطمئن کرنا ہوگا۔ دکھائیں کہ اتنی حیرانی کی بات ہے کہ کافی ہے کہ تمام سمتیات $|\gamma\rangle$ کے لئے $\langle\gamma|\hat{T}\gamma\rangle = \langle\hat{T}\gamma|\gamma\rangle$ ہو۔ اشارہ: پہلے $\langle\gamma| = \langle\alpha + i\beta|$ اور اس کے بعد $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + i|\beta\rangle$ لیں۔

سوال ۲۵.۱: درج ذیل لیں

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

(الف) تصدیق کریں کہ T ہر مشی ہے۔

(ب) اس کی امتیازی افتدار تلاش کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ حقیقی ہیں)۔

(ج) امتیازی سمتیات تلاش کر کے انکی معمولزنی کریں (آپ دیکھیں گے کہ یہ معیاری عمودی ہیں)۔

(د) اکہرا وتری بنانے والا افتالب S تیار کریں اور صریحاً تصدیق کریں کہ یہ T کو وتری بناتا ہے۔

(ه) تصدیق کریں کہ T اور اسکے وتری روپ کے لئے مقطع T اور آسار T ایک جیسے ہیں۔

سوال ۲۶.۱: درجہ ذیل ہر مشی افتالب لیں

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

(الف) اس افتالب کا مقطع $Tr(T)$ اور آسار $\det(T)$ تلاش کریں۔

(ب) افتالب T کی امتیازی افتدار تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ انکا مجموعہ اور حاصل ضرب مساوات $A.85$ کے معنوں میں جبزو (الف) کے عین مطابق ہے۔ افتالب T کو وتری روپ میں لکھیں۔

(ج) افتالب T کے امتیازی سمتیات تلاش کریں۔ انخطاطی حلقہ میں دو خطی غیر طابع امتیازی سمتیات تیار کریں ہر مشی افتالب کے لئے یہ قدم ہر صورت ممکن ہوگا لیکن کسی بھی اختیاری افتالب کے لئے لاظمی نہیں کہ ایسا ممکن ہو سوال $A.19$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ انہیں قائم بنائیں اور تصدیق کریں کہ تیسرے کے لحاظ سے دونوں قائم ہیں۔ تینوں امتیازی سمتیات کی معمولزنی کریں۔

(د) افتالب T کو وتری بنانے والا اکہرا افتالب S تیار کریں اور صریحاً دکھائیں کہ میٹا بہت متبادل S کو استعمال کرتے ہوئے T کو موضوع وتری روپ میں گھٹاتا ہے۔

سوال ۲۷.۱: اکہرا متبادل وہ ہے جس کے لئے $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$ ہو۔

(الف) دکھائیں کہ کسی بھی سمتیات $|\alpha\rangle$ ، $|\beta\rangle$ کے لئے $\langle \hat{U}\alpha | \hat{U}\beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$ کے معنوں میں اکہرا متبادل اندرونی حاصل ضرب برقرار رکھتے ہیں۔

(ب) دکھائیں کہ اکہرا متبادل کا امتیازی افتدار کا معیار 1 ہے۔

(ج) دکھائیں کہ منفرد امتیازی افتدار سے متعلق اکہرا افتالب کی امتیازی سمتیات قائم ہو لگے۔

سوال ۲۸.۱: قوالب کے تفصلات ٹیلر تفصلل توسیعات دیتے ہیں مثلاً

$$e^M \equiv I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \quad (91)$$

(الف) در جب ذیل کے لئے $\exp(M)$ تلاش کریں

$$(i) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (ii) M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) اگر M وتری بنانے کے متابل ہو تب در جب ذیل دکھائیں

$$(۹۲) \quad \det(e^M) = e^{Tr(M)}$$

تبصرہ: اگر M وتری بنانے کے متابل نہ ہو تب بھی یہ درست ہوگا تاہم ایسی عمومی صورت کے لئے اسکو ثابت کرنا مشکل ہے۔

(ج) دکھائیں اگر توالب M اور N مقلوبی ہوں تب در جب ذیل ہوگا

$$(۹۳) \quad e^{M+N} = e^M e^N$$

ثابت کریں کہ غیر مقلوبی متالب کے لئے مساوات A.93 درست نہیں سادہ ترین متضاد مثال دیکر ایسا کریں۔

(د) اگر H ہر مشی ہوں تب دکھائیں کہ e^{iH} اکسرا ہوگا۔

