

کوانٹم میکینکات

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

۳۰ نومبر ۲۰۲۱

عنوان

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	تفاسل موج
۱	۱.۱	شرو وڈنگر مساوات
۲	۱.۲	شکاریاتی مفہوم
۵	۱.۳	احتمال
۵	۱.۳.۱	غیر مسلسل متغیرات
۹	۱.۳.۲	استمراری متغیرات
۱۲	۱.۴	معمول زنی
۱۵	۱.۵	معیار حرکت
۱۸	۱.۶	اصول عدم یقینیت
۲۵	۲	غیر متابع وقت شرو وڈنگر مساوات
۲۵	۲.۱	ساکن حالات
۳۱	۲.۲	لامستثنای چپکور کنواں
۴۱	۲.۳	ہارمونی سر نقش
۴۳	۲.۳.۱	الجبرائی ترکیب
۵۲	۲.۳.۲	تحلیلی ترکیب
۵۹	۲.۴	آزاد ذرہ
۶۹	۲.۵	ڈیلٹا تفاسل محفہ
۶۹	۲.۵.۱	مقید حالات اور بکھراؤ حالات
۷۱	۲.۵.۲	ڈیلٹا تفاسل کنواں
۸۰	۲.۶	مستثنای چپکور کنواں
۹۷	۳	قواعد و ضوابط
۹۷	۳.۱	ہلیرٹ فضا
۱۰۱	۳.۲	قابل مشاہدہ
۱۰۱	۳.۲.۱	ہر مشی عاملین

۱۰۳	تعیین حال	۳.۲.۲
۱۰۵	ہر مثنیٰ عمل کے امتیازی تفاعل	۳.۲
۱۰۵	غیر مسلسل طیف	۳.۳.۱
۱۰۷	استمراری طیف	۳.۳.۲
۱۱۱	متعمم شمار پاتی مفہوم	۳.۴
۱۱۴	اصول عدم یقینیت	۳.۵
۱۱۵	اصول عدم یقینیت کا ثبوت	۳.۵.۱
۱۱۸	کم سے کم عدم یقینیت کا موجی اکٹھ	۳.۵.۲
۱۱۹	توانائی و وقت اصول عدم یقینیت	۳.۵.۳
۱۲۳	ڈیراک علامتیت	۳.۶
۱۳۷	تین البادی کو انظم میکانیات	۴
۱۳۷	کروی محدود میں مساوات شروڈنگر	۴.۱
۱۳۹	علیحدگی متغیرات	۴.۱.۱
۱۴۱	زاویائی مساوات	۴.۱.۲
۱۴۶	ردای مساوات	۴.۱.۳
۱۵۰	ہائڈروجن جوہر	۴.۲
۱۵۱	ردای تفاعل موج	۴.۲.۱
۱۶۱	ہائڈروجن کا طیف	۴.۲.۲
۱۶۳	زاویائی معیار حرکت	۴.۳
۱۶۴	امتیازی اشتداد	۴.۳.۱
۱۷۰	امتیازی تفاعلات	۴.۳.۲
۱۷۳	چکر	۴.۴
۱۸۱	مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران	۴.۴.۱
۱۸۶	زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ	۴.۴.۲
۲۰۱	متناثر ذرات	۵
۲۰۱	دو ذراتی نظام	۵.۱
۲۰۳	بوزان اور فرمیون	۵.۱.۱
۲۰۶	قوت مبادلہ	۵.۱.۲
۲۱۰	جوہر	۵.۲
۲۱۰	ہیلیم	۵.۲.۱
۲۱۲	دوری جدول	۵.۲.۲
۲۱۶	ٹھوس اجسام	۵.۳
۲۱۶	آزاد الیکٹرون گیس	۵.۳.۱
۲۲۱	پٹی دار ساخت	۵.۳.۲
۲۲۷	کو انظم شمار پاتی میکانیات	۵.۴
۲۲۸	ایک مثال	۵.۴.۱
۲۳۰	عمومی صورت	۵.۴.۲

۲۳۳	زیادہ سے زیادہ محتمل تنظیم	۵.۴.۳
۲۳۶	α اور β کے طبعی اہمیت	۵.۴.۴
۲۳۹	سیاحسی طیف	۵.۴.۵
۲۴۵	غیر تابع وقت نظریہ اضطراب	۶
۲۴۵	غیر اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۱
۲۴۵	عمومی ضابطہ بندی	۶.۱.۱
۲۴۷	اول رتبہ نظریہ	۶.۱.۲
۲۵۱	دوم رتبہ توانائیاں	۶.۱.۳
۲۵۲	اخطائی نظریہ اضطراب	۶.۲
۲۵۲	دو پڑتا اخطاط	۶.۲.۱
۲۵۶	بلند رتبہ اخطاط	۶.۲.۲
۲۶۱	ہائیڈروجن کا مہین ساخت	۶.۳
۲۶۲	اضافیتی تصحیح	۶.۳.۱
۲۶۵	چکر و مدار ربط	۶.۳.۲
۲۷۰	زیمان اثر	۶.۴
۲۷۰	کمزور میدان زیمان اثر	۶.۴.۱
۲۷۳	طاقتور میدان زیمان اثر	۶.۴.۲
۲۷۴	درمیانی طاقت میدان زیمان اثر	۶.۴.۳
۲۷۶	نہایت مہین ہوا رہ	۶.۴.۴
۲۸۷	تغیری اصول	۷
۲۸۷	نظریہ	۷.۱
۲۹۲	ہیلمیٹ کا زینینی حال	۷.۲
۲۹۷	ہائیڈروجن سال بار داریہ	۷.۳
۳۰۷	ونزل و کراسر زویرلوان تخمین	۸
۳۰۸	کلاسیکی خطہ	۸.۱
۳۱۳	سرنگرنی	۸.۲
۳۱۶	کلیات پیوند	۸.۳
۳۲۹	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹
۳۳۰	دو سطحی نظام	۹.۱
۳۳۰	مضطرب نظام	۹.۱.۱
۳۳۳	تابع وقت نظریہ اضطراب	۹.۱.۲
۳۳۵	سائنس اضطراب	۹.۱.۳
۳۳۸	اشعاعی احسراج اور انجذاب	۹.۲
۳۳۸	برق طبعی امواج	۹.۲.۱
۳۳۹	انجذاب، تحرق شدہ احسراج اور خود باخود احسراج	۹.۲.۲
۳۴۰	غیر اتالی اضطراب	۹.۲.۳

۳۳۲	۹.۳	خود با خود احسراج
۳۳۲	۹.۳.۱	آمنشائن A اور B عددی سر
۳۳۳	۹.۳.۲	ہیجان حال کا عرصہ حیات
۳۳۷	۹.۳.۳	قواعد انتخاب
۳۵۷	۱۰	حرارت ناگزیر تھمین
۳۵۷	۱۰.۱	مسئلہ حرارت ناگزیر
۳۵۷	۱۰.۱.۱	حرارت ناگزیر عمل
۳۶۰	۱۰.۱.۲	مسئلہ حرارت نہ گزر کا ثبوت
۳۶۵	۱۰.۲	ہیت بیری
۳۶۵	۱۰.۲.۱	گرگئی عمل
۳۶۷	۱۰.۲.۲	ہندی ہیت
۳۷۲	۱۰.۲.۳	اہارو نوو یوہم اثر
۳۸۱	۱۱	بھراو
۳۸۱	۱۱.۱	تعارف
۳۸۱	۱۱.۱.۱	کلاسیکی نظریہ بھراو
۳۸۵	۱۱.۱.۲	کوانٹم نظریہ بھراو
۳۸۶	۱۱.۲	جزوی موج تجزیہ
۳۸۶	۱۱.۲.۱	اصول وضوابط
۳۸۹	۱۱.۲.۲	لا یا عمل
۳۹۲	۱۱.۳	یتقلات حیط
۳۹۵	۱۱.۴	بارن تھمین
۳۹۵	۱۱.۴.۱	مسادات شروڈنگر کی عملی روپ
۳۹۹	۱۱.۴.۲	بارن تھمین اول
۴۰۴	۱۱.۴.۳	تسل بارن
۴۰۷	۱۲	پس نوشت
۴۰۸	۱۲.۱	آمنشائن پوڈلکیو وزن تضاد
۴۰۹	۱۲.۲	مسئلہ بل
۴۱۴	۱۲.۳	مسئلہ کلیہ
۴۱۵	۱۲.۴	شروڈنگر کی لمبی
۴۱۶	۱۲.۵	کوانٹم زینو تضاد
۴۱۹		جوابات
۴۲۱	۱	خطی الجبرا
۴۲۱	۱.۱	سمتیات
۴۲۱	۲.۱	اندرونی ضرب

۴۲۱	۳.۱	فتالب
۴۲۱	۴.۱	تبدیلی اساس
۴۲۱	۵.۱	امتیازی تفاسلات اور امتیازی اقتدار
۴۲۱	۶.۱	هر مشی تبادلے

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011ء

باب ۴

تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۴.۱. کروی محدود میں مساوات شرودنگر

تین ابعادی تک توسیع یا آسانی کی جا سکتی ہے۔ مساوات شرودنگر

$$(۴.۱) \quad i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$$

کہتی ہے کہ معیاری طریقہ کار کا اطلاق (x کے ساتھ ساتھ y اور z پر بھی) کرتے ہوئے:

$$(۴.۲) \quad p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

ہیملٹنی عمل H کو کلاسیکی توانائی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۴.۲ کو مختصر اور ج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۳) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۴) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

اچھا کلاسیکی متبادل مشاہدہ اور عمل میں مندرجہ کرنا دشوار ہو، وہاں میں عمل پر ”ٹوپی“ کا نشان بناتا ہوں۔ اس باب میں ایسا کوئی موقع نہیں پایا جاتا جہاں ان کی پہچان مشکل ہو لہذا ایسا سے عملیں پر ”ٹوپی“ کا نشان نہیں ڈالا جائے گا۔

جہاں

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۵)$$

کارٹیزی محدود میں لاپلاچ ہے۔

خفی تو انائی V اور تفاعل موج Ψ اب (x, y, z) اور t کے تفاعلات ہیں۔ لامتناہی چھوٹے حجم $d^3 r = dx dy dz$ میں ایک ذرہ پایا جانے کا احتمال $|\Psi(r, t)|^2 d^3 r$ ہوگا اور معمولی زنی شرط درج ذیل ہوگی

$$\int |\Psi|^2 d^3 r = 1 \quad (۴.۶)$$

جہاں مکمل کو پوری فصا پر لینا ہوگا۔ اگر خفی تو انائی وقت کی تابع نہ ہو تب ساکن حالات کا مکمل سلسلہ پایا جائے گا:

$$\Psi_n(r, t) = \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۷)$$

جہاں فصائی تفاعل موج ψ_n غیر تابع وقت شرودنگر مساوات

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \quad (۴.۸)$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ تابع وقت شرودنگر مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$\Psi(r, t) = \sum c_n \psi_n(r) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (۴.۹)$$

جہاں مستقامت c_n ہمیشہ کی طرح ابتدائی تفاعل موج $\Psi(r, 0)$ سے حاصل کیے جائیں گے۔ (اگر مخفیہ استمراریہ حالات دیتی ہو تب مساوات ۴.۹ میں مجموعہ کی بجائے مکمل ہوگا۔)

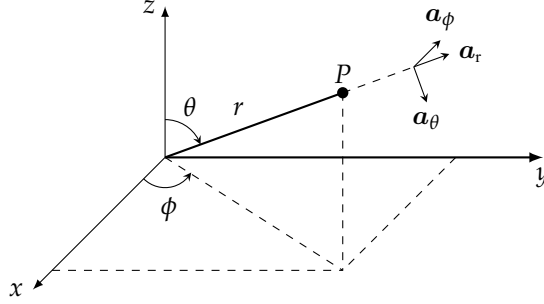
سوال ۴.۱:

۱. عاملین r اور p کے تمام باضابطہ مقلبتیہ رشتے: $[x, y]$ ، $[x, p_y]$ ، $[x, p_x]$ ، $[p_y, p_z]$ ، وغیرہ وغیرہ، حاصل کریں۔

جواب:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (۴.۱۰)$$

جہاں اشاریہ x, y اور z کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $r_x = x$ ، $r_y = y$ اور $r_z = z$ ہیں۔



شکل ۴.۱: کروئی محدود: رداس r ، قطبی زاویہ θ ، اور استی زاویہ ϕ ہیں۔

ب. تین ابعاد کے لیے مسئلہ اہر نفٹ کی تصدیق کریں:

$$(۴.۱۱) \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = \langle -\nabla V \rangle \quad \text{اور} \quad \frac{d}{dt} \langle r \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

(ان میں سے ہر ایک درحقیقت تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک مساوات ایک جسم کے لیے ہوگا۔) اشارہ: پہلے تصدیق کر لیں کہ مساوات 71.3 تین ابعاد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

ج. ہیزنبرگ عدم یقینیت کے اصول کو تین ابعاد کے لیے بیان کریں۔

جواب:

$$(۴.۱۲) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_y \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_z \sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}$$

تاہم (مثلاً) $\sigma_x \sigma_{p_y}$ پر کوئی پابندی عائد نہیں ہوتی۔

۴.۱.۱ علیحدگی متغیرات

عموماً مخفی صرف مبداءے فاصلہ کا تفاعل ہوگا۔ ایسی صورت میں کروئی محدود (r, θ, ϕ) کا استعمال بہتر ثابت ہوگا (شکل ۴.۱)۔ کروئی محدود میں لاپلاسی درج ذیل روپ اختیار کرتا ہے۔

$$(۴.۱۳) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

یوں کر وہی محدود میں تابع وقت شروڈنگر مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(۴.۱۴) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

ہم ایسے حل کی تلاش میں ہیں جن کو حاصل ضرب کی صورت میں علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہو:

$$(۴.۱۵) \quad \psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

اس کو مساوات ۴.۱۴ میں پر کر کے؛

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY$$

دونوں اطراف کو RY سے تقسیم کر کے $-2mr^2/\hbar^2$ سے ضرب دیجیے۔

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0$$

پہلی خمدار قوسین کے اندر جزو صرف r کا تابع ہے جبکہ باقی حصہ صرف θ اور ϕ کا تابع ہے؛ لہذا دونوں حصے انفرادی طور پر ایک مستقل کے برابر ہوں گے۔ اس علیحدگی مستقل کو ہم $l(l+1)$ روپ میں لکھتے ہیں جس کی وجہ کچھ دیر میں واضح ہوگی۔^۶

$$(۴.۱۶) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1)$$

$$(۴.۱۷) \quad \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1)$$

سوال ۴.۲: کارٹیزی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے لامتناہی سرحدیں (یا ڈب) میں ایک ذرہ:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x, y, z \text{ تینوں } 0 \text{ اور } a \text{ کے بیچ پائے جاتے ہوں} \\ \infty & \text{دیگر صورت} \end{cases}$$

حل کریں۔

^۶ ایسا کرنے سے ہم عموماً متنبہ نہیں کھوتے ہیں، چونکہ یہاں l کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھیں گے کہ l کو لازم عدد صحیح ہونا ہوگا۔ اسی نتیجہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے میں نے علیحدگی مستقل کو اس عجیب روپ میں لکھا ہے۔

۱. ممکن حالات اور ان کی مطابقتی توانائیاں دریافت کریں۔

ب. بڑھتی توانائی کے لحاظ سے انفرادی توانائیوں کو E_1 ، E_2 ، E_3 ، وغیرہ، وغیرہ سے ظاہر کر کے E_1 تا E_6 تلاش کریں۔ ان کی انخطاطیت (یعنی ایک ہی توانائی کے مختلف حلوں کی تعداد) معلوم کریں۔ تبصرہ: یک بعدی صورت میں انخطاطی مقید حالات نہیں پائے جاتے ہیں (سوال 45.2)، تاہم تین البادی صورت میں یہ کثرت سے پائے جاتے ہیں۔

ج. توانائی E_{14} کی انخطاطیت کیا ہے اور یہ صورت کیوں دلچسپ ہے؟

۳.۱.۲ زاویائی مساوات

مساوات ۳.۱۷ متغیرات θ اور ϕ پر ψ کی تابعیت تعین کرتی ہے۔ اس کو $Y \sin^2 \theta$ سے ضرب دے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۸) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta$$

ہو سکتا ہے آپ اس مساوات کو پہچانے ہوں۔ یہ کلاسیکی حرکتیاتی مساوات لاپلاس کے حل میں پائی جاتی ہے۔ ہمیشہ کی طرح ہم علیحدگی متغیرات:

$$(۳.۱۹) \quad Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

استعمال کر کے دیکھنا چاہیں گے۔ اس کو پر کر کے $\Theta\Phi$ سے تقسیم کر کے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

پہلا جزو صرف θ کا تعلق ہے، جبکہ دوسرا صرف ϕ کا تعلق ہے، لہذا ہر ایک جزو ایک مستقل ہوگا۔ اس مرتبہ ہم علیحدگی مستقل کو m^2 لکھتے ہیں۔

$$(۳.۲۰) \quad \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(۳.۲۱) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

متغیر ϕ کی مساوات زیادہ آسان ہے۔

$$(۳.۲۲) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \implies \Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

یہاں بھی ہم عمومیّت نہیں کھوئے ہیں، چونکہ m کوئی بھی مخلوط عدد ہو سکتا ہے؛ اگرچہ ہم جلد دیکھیں گے کہ m کو عدد صحیح ہونا ہوگا۔
انتباہ: اب صرف m دو مختلف چیزوں، کیمت اور علیحدگی مستقل، کو ظاہر کر رہا ہے۔ امید ہے کہ آپ کو درست معنی جاننے میں مشکل درپیش نہیں ہوگی۔

[درحقیقت دو حل پائے جاتے ہیں: $e^{im\phi}$ اور $e^{-im\phi}$ ، تاہم m کو منفی ہونے کی اجازت دے کر ہم موخسرا الذکر کو بھی درج بالا حل میں شامل کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ حل میں جزو ضربی مستقل بھی پایا جاسکتا ہے جسے ہم Θ میں منقسم کرتے ہیں۔ چونکہ برقی محلی توانائی لازماً حقیقی ہوگی لہذا برقی حرکیات میں اتستی تقاعسل (Φ) کوسائن اور کوسائن کی صورت میں نہ کہ قوت نسائی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ کوانٹم میکانیات میں ایسی کوئی پابندی نہیں پائی جاتی ہے اور قوت نسائی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔] اب جب بھی ϕ کی قیمت میں 2π کا اضافہ آئے، ہم فضا میں واپس اسی نقطہ پر پہنچتے ہیں (شکل 4-1 دیکھیں) لہذا درج ذیل شرط^۸ مسلط کی جا سکتی ہے۔

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (۴.۲۳)$$

دوسرے لفظوں میں $e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}$ یا $e^{2\pi im} = 1$ ہوگا جس کے تحت m لازماً عدد صحیح ہوگا۔

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴.۲۴)$$

مادات θ

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (۴.۲۵)$$

اتنی سادہ نہیں ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے

$$\Theta(\theta) = A P_l^m(\cos \theta) \quad (۴.۲۶)$$

جہاں P_l^m شریک لیونڈر تفاعل^۹ ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x) \quad (۴.۲۷)$$

اور l وین لیونڈر کشیررکشی کو $P_l(x)$ ظاہر کرتا ہے^{۱۰} جس کی تعریف کلیہ روڈریگیس^{۱۱}

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (۴.۲۸)$$

دیتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہوں گے۔

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

جدول ۴.۱ میں ابتدائی چند لیونڈر کشیررکنیاں پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ نام ہی ظاہر ہے، $P_l(x)$ متغیر x کی

^۸ یہ نظر معصوم شرط اتنی معصوم نہیں ہے۔ یاد رہے کہ m کی قیمت سے قطع نظر، احتمال شذافیت $(|\Phi|^2)$ ایک قیمتی ہے۔ ہم حصہ 3.4 میں ایک مختلف طریقہ سے، زیادہ پر زور دلیل پیش کر کے m پر مسلط شرط حاصل کریں گے۔

^۹ associated Legendre function
^{۱۰} دھیان رہے کہ $P_l^{-m} = P_l^m$ ہوگا۔
^{۱۱} Rodrigues formula

جدول ۴.۱: چند ابتدائی لیڈانڈر کثیررکنیاں $P_l(x)$ ۔ (i) تقابلی روپ، (ب) تریات۔



$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (i)$$

درج l کثیررکنی ہے، اور l کی قیمت طے کرتی ہے کہ آیا یہ جفت کا طاق ہوگی۔ تاہم $P_l^m(x)$ عموماً کثیررکنی نہیں ہوگا؛ اور طاق m کی صورت میں اس میں $\sqrt{1-x^2}$ کا جزو ضربی پایا جائے گا:

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2),$$

وغیرہ وغیرہ۔ (ب) ہمیں $P_l^m(\cos \theta)$ چاہیے اور چونکہ $\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta}$ ہوتا ہے لہذا $P_l^m(\cos \theta)$ ہر صورت $\cos \theta$ کا کثیررکنی ہوگا جسے طاق m کی صورت میں $\sin \theta$ ضرب کرے گا۔ جدول ۴.۲ میں $\cos \theta$ کے چند شریک لیڈانڈر تقابلات پیش کیے گئے ہیں۔

دھیان رہے کہ صرف غیر منفی عدد صحیح l کی صورت میں کلیہ روڈریگیس معنی خیز ہوگا؛ مزید $|m| > l$ کی صورت میں مساوات ۴.۲ کے تحت $P_l^m = 0$ ہوگا۔ یوں l کی کسی بھی مخصوص قیمت کے لئے m کی $(2l+1)$ ممکنہ قیمتیں ہوں گی:

$$(۴.۲۹) \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

ذرا کیے! مساوات ۴.۲۵ دور تہی تفسر قی مساوات ہے: l اور m کی کسی بھی قیمتوں کے لئے اس کے دو خطی غیر تابع حل ہونگے۔ باقی حل کہاں ہیں؟ جواب: یقیناً تفسر قی مساوات کے ریاضی حلوں کی صورت میں باقی حل ضرور موجود ہوں گے تاہم $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ پر ایسے حل بے فتابوڑ ہتے ہیں (سوال ۴.۴ دیکھیں) جس کی بنیہ طبعی طور پر ناقابل قبول ہوں گے۔

کروی محمد میں جمعی رکن درج ذیل ہوگا

$$(۴.۳۰) \quad d^3 r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

جدول ۴.۲: چند شریک لیٹنڈر تفسعات $P_l^m(\cos \theta)$: (۱) تفسعلی روپ، (ب) ترسیات برائے $r = P_l^m(\cos \theta)$ (ان ترسیات میں r آپ کو θ رخ تفسعل کی کل مقدار دیتا ہے؛ ان اشکال کو z محور کے گرد گھمائیے۔)



لہذا معمولی زنی شرط (مساوات ۴.۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int |\psi|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

یہاں R اور Y کو علیحدہ علیحدہ معمول پر لانا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

$$(۴.۳۱) \quad \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{اور} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

معمول شدہ زاویائی موجی تفسعات Y_l^m کو Y_l^m کے ہارمونیاں کہتے ہیں:

$$(۴.۳۲) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

جہاں $m \geq 0$ کے لئے $\epsilon = (-1)^m$ اور $m \leq 0$ کے لئے $\epsilon = 1$ ہوگا۔ جیسا کہ ہم بعد میں ثابت کریں گے، $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہوگا۔

$$(۴.۳۳) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

۴.۴ معمولی زنی مستقل کو سوال 54.4 میں حاصل کیا گیا ہے؛ نظریہ زاویائی معیار حرکت میں مستعمل علاقیت کے نتیجہ ہم آہنگی کی منظر ϵ (جس کی قیمت 1 یا -1 ہوگی) کی علامت کا انتخاب کیا گیا ہے۔ دھیان رہے کہ $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ ہوگا۔
spherical harmonics^{۱۴}

جدول ۴.۳: ابتدائی چند کروی ہارمونیات، $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
 Y_2^{\pm 2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_0^0 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \\
 Y_3^0 &= \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) & Y_1^0 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \\
 Y_3^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi} & Y_1^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
 Y_3^{\pm 2} &= \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi} & Y_2^0 &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
 Y_3^{\pm 3} &= \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} & Y_2^{\pm 1} &= \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}
 \end{aligned}$$

جدول ۴.۳ میں چند ابتدائی کروی ہارمونیات پیش کیے گئے ہیں۔ تاریخی وجوہات کی بنا پر l کو **انٹگرل** **عد** l کہتے ہیں۔ سوال ۴.۳: مساوات ۴.۲۸، ۴.۲۹ اور ۴.۳۲ استعمال کر کے Y_2^1 اور Y_0^0 تیار کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ معمول شدہ اور عمودی ہیں۔ سوال ۴.۴: دکھائیں کہ $l = m = 0$ کے لئے

$$\Theta(\theta) = A \ln[\tan(\theta/2)]$$

مساوات θ (مساوات ۴.۲۵) کو مطمئن کرتی ہے۔ یہ (دو) نامتابل مقبول دوسرا حل ہے؛ اس میں کیا حیرانی ہے؟

سوال ۴.۵: مساوات ۴.۳۲ استعمال کر کے $Y_l^l(\theta, \phi)$ اور $Y_3^2(\theta, \phi)$ تفکیک دیں۔ (آپ P_3^2 کو جو جدول ۴.۲ سے دیکھ سکتے ہیں، جبکہ P_l^l آپ کو مساوات ۴.۲۷ اور ۴.۲۸ کی مدد سے تفکیک دینا ہوگا) تصدیق کیجیے کہ l اور m کی موزوں قیمتوں کیلئے یہ زاویائی مساوات (مساوات ۴.۱۸) کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۴.۶: کلیہ روڈریگیس سے ابتدا کر کے لیوڈانڈرکٹیر رکنیوں کی معیاری عمودیت کی شرط:

$$(۴.۳۴) \quad \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left(\frac{2}{2l+1}\right) \delta_{ll'}$$

اخذ کریں۔ (اشارہ: مکمل بالخصوص استعمال کریں۔)

۴.۱.۳ رداسی مساوات

دھیان رہے کہ تمام کروئی تشابہی مخفیہ کے لئے تفاعل موج کا زاویائی حصہ، $Y(\theta, \phi)$ ، ایک دوسرے جیسا ہوگا؛ مخفیہ $V(r)$ کی شکل و صورت تفاعل موج کے صرف رداسی حصہ، $R(r)$ ، پر اثر انداز ہوگی جسے مساوات ۴.۱۶ تعین کرتی ہے۔

$$(۴.۳۵) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1)R$$

نئے متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے: درج ذیل لینے سے

$$(۴.۳۶) \quad u(r) \equiv rR(r)$$

لہذا $(d/dr)[r^2(dR/dr)] = r d^2 u / dr^2$ ، $dR/dr = [r(du/dr) - u]/r^2$ ، $R = u/r$ درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۳۷) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

اس کو رداسی مساوات^{۱۶} کہتے ہیں، اچھو شکل و صورت کے لحاظ سے ایک بعدی شرودنجر مساوات (مساوات ۲.۵) کی طرح ہے، تاہم یہاں موثر مخفیہ^{۱۸} درج ذیل ہے

$$(۴.۳۸) \quad V_{\text{مثر}} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

جس میں $(\hbar^2/2m)[l(l+1)/r^2]$ اضافی جزو پایا جاتا ہے جو مرکز گریز جزو^{۱۹} کہلاتا ہے۔ یہ کلاسیکی میکانیات کے مرکز گریز (مجازی) قوت کی طرح، ذرہ کو (مبداسے دور) باہر جانب دھکیلتا ہے۔ یہاں معمول زنی شرط (مساوات ۴.۳۱) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۳۹) \quad \int_0^\infty |u|^2 dr = 1$$

کسی مخصوص مخفیہ $V(r)$ کے بغیر ہم آگے نہیں بڑھ سکتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل لامستناہی کروئی کنواں پر غور کریں۔

$$(۴.۴۰) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

^{۱۶} radial equation

^{۱۷} یہاں m کیت کو ظاہر کرتی ہے، رداسی مساوات میں طیجرگی مستقل m نہیں پایا جاتا ہے۔

^{۱۸} effective potential

^{۱۹} centrifugal term

اس کے تفاعلات موج اور اجزائی توانائیاں تلاش کریں۔

حل: کنواں کے باہر تفاعل موج صفر ہے جب کے کنواں کے اندر رداسی مساوات درج ذیل ہے

$$(۴.۴۱) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u$$

جہاں ہمیشہ کی طرح درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۴۲) \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ہم نے اس مساوات کو، سرحدی شرط $u(a) = 0$ مطبق کر کے، حل کرنا ہے۔ سب سے آسان صورت $l = 0$ کی ہے۔

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -k^2 u \implies u(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

یاد رہے، اصل رداسی تفاعل موج $R(r) = u(r)/r$ ہے اور $r \rightarrow 0$ کی صورت میں $[\cos(kr)]/r$ بے متابو بڑھتا ہے۔ یوں ہمیں $B = 0$ منتخب کرنا ہوگا۔ اب سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ $\sin(ka) = 0$ ہو لہذا $ka = n\pi$ ہوگا جہاں n عدد صحیح ہے۔ ظاہر ہے کہ اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$(۴.۴۳) \quad E_{n0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

جو عین یک بعدی لامتناہی چکور کنواں کی توانائیاں ہیں (مساوات ۲.۲۷)۔ $u(r)$ کو معمول پر لانے سے $A = \sqrt{2/a}$ حاصل ہوگا۔ زاویائی حبز (جو $1/\sqrt{4\pi}$) $Y_0^0(\theta, \phi)$ کی بنا غیر اہم ہے (کوساتھ منسلک کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۴۴) \quad \psi_{n00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(n\pi r/a)}{r}$$

[دھیان کیجیے کہ ساکن حالات کے نام تین کو انتائی اعداد n ، l اور m استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں:

$\psi_{nml}(r, \theta, \phi)$ ؛ جبکہ توانائی، E_{nl} ، صرف n اور l پر منحصر ہوگی۔]

(ایک اختیاری عدد صحیح l کے لئے) مساوات ۴.۴۱ کا عمومی حل

$$(۴.۴۵) \quad u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr).$$

^{۲۰} درحقیقت ہم صرف اتنا چاہتے ہیں کہ تفاعل موج معمول پر لانے کے متابل ہو؛ یہ ضروری نہیں کہ یہ مستثنائی ہو: مساوات ۴.۴۱ میں r^2 کی بنیاد پر $1/r \sim R(r)$ معمول پر لانے کے متابل ہے۔
quantum numbers^{۲۱}

جدول ۴.۴: ابتدائی چند کروئی بیسل اور نیومن تفاعلات، $j_n(x)$ اور $n_l(x)$ ؛ چھوٹی x کے لئے مقترابی روپ۔

$n_0 = -\frac{\cos x}{x}$	$j_0 = \frac{\sin x}{x}$
$n_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$n_2 = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$	$j_2 = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$
$n_l \rightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1$	$j_l \rightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l$

بہت جانا پہچانا نہیں ہے جہاں $j_l(x)$ رتبہ l کا کروئی بیسل تفاعل^{۲۲} ہے اور $n_l(x)$ رتبہ l کا کروئی نیومن تفاعل^{۲۳} ہے جن کی تعریفات درج ذیل ہیں۔

$$(۴.۴۶) \quad j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$$

مشال کے طور پر درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}; \\ j_1(x) &= (-x) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= (-x)^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin x}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

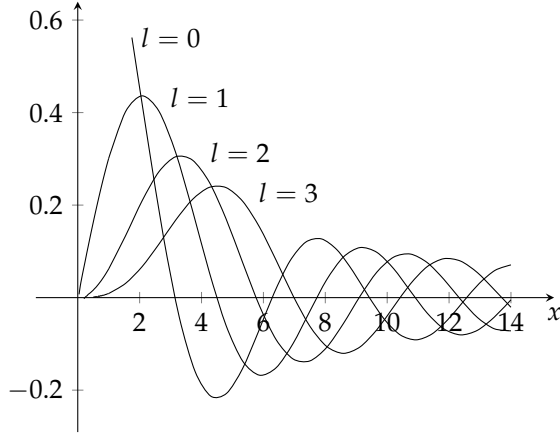
جدول ۴.۴ میں ابتدائی چند کروئی بیسل اور نیومن تفاعلات پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر x کی چھوٹی قیمت کے لئے جہاں

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{اور} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ہوں گے، درج ذیل ہوں گے، وغیرہ وغیرہ۔

$$j_0(x) \approx 1; \quad n_0(x) \approx -\frac{1}{x}; \quad j_1(x) \approx \frac{x}{3}; \quad j_2(x) \approx \frac{x^2}{15};$$

^{۲۲}spherical Bessel function
^{۲۳}spherical Neumann function



شکل ۳.۲: ابتدائی چار کروی بیسل تفاعلات۔

دھیان رہے کہ مبدأ پر بیسل تفاعلات مستثنیٰ ہیں جبکہ مبدأ پر نیومن تفاعلات بے فتابوڑھتے ہیں۔ یوں ہمیں لازماً $B_l = 0$ منتخب کرنا ہوگا لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۴۷) \quad R(r) = A j_l(kr)$$

اب سرحدی شرط $R(a) = 0$ کو مطمئن کرنا باقی ہے۔ ظاہر ہے کہ k کو درج ذیل کے تحت منتخب کرنا ہوگا

$$(۳.۴۸) \quad j_l(ka) = 0$$

یعنی l رتبی کروی بیسل تفاعل کا (ka) ایک صفر ہوگا۔ اب بیسل تفاعلات ارتعاشی ہیں (شکل ۳.۲ دیکھیں)؛ ہر ایک کے لامتناہی تعداد صفر پائے جاتے ہیں۔

تاہم (ہماری بد قسمتی سے) یہ ایک جیسے واصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں (جیسا کہ نقاط n یا نقاط $n\pi$ ، وغیرہ پر)؛ انہیں اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا ہوگا۔ بہر حال سرحدی شرط کے تحت درج ذیل ہوگا

$$(۳.۴۹) \quad k = \frac{1}{a} \beta_{nl}$$

جہاں β_{nl} رتبہ l کروی بیسل تفاعل کا n واں صفر ہوگا۔ یوں اجبازتی توانائیاں

$$(۳.۵۰) \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \beta_{nl}^2.$$

اور تفاعلات موج درج ذیل ہوں گے

$$(۳.۵۱) \quad \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = A_{nl} j_l(\beta_{nl} r/a) Y_l^m(\theta, \phi).$$

جہاں مستقل A_{n1} کا تعین معمولی ذنی سے کیا جاتا ہے۔ چونکہ l کی ہر ایک قیمت کے لئے m کی $(2l + 1)$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا توانائی کی ہر سطح $(2l + 1)$ گنا انحطاطی ہوگی (مساوات ۴.۲۹ دیکھیں)۔ □

سوال ۴.۷:

ا. کروئی نیومن تعاضلات $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کو (مساوات ۴.۴۶) میں پیش کی گئی تعریفات سے تیار کریں۔

ب. سائن اور کوسائن کو پھیلا کر $1 \ll x$ کے لئے کارآمد $n_1(x)$ اور $n_2(x)$ کے تخمینی کلیات اخذ کریں۔ تصدیق کریں کہ یہ مبداء پر بے فتاویٰ ہوتے ہیں۔

سوال ۴.۸:

ا. تصدیق کریں کہ $V(r) = 0$ اور $l = 1$ کے لئے $Arj_l(kr)$ رداسی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. لامتناہی کروئی کنواں کیلئے $l = 1$ کی صورت میں احبازاتی توانائیاں ترسیم کی مدد سے تعین کریں۔ دکھائیں کہ n کی بڑی قیمت کے لئے $E_{n1} \approx (\hbar^2 \pi^2 / 2ma^2)(n + 1/2)^2$ ہوگا۔ (اشارہ: پہلے $j_1(x) = 0 \Rightarrow \tan x = x$ دکھائیں۔ اس کے بعد x اور $\tan x$ کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے ان کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔)

سوال ۴.۹: ایک ذرہ جس کی کمیت m ہے کو مستناہی کروئی کنواں:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

میں رکھا جاتا ہے۔ اس کا زمینی حال، $l = 0$ کے لئے، رداسی مساوات کے حل سے حاصل کریں۔ دکھائیں کہ $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$ کی صورت میں کوئی مقید حال نہیں پایا جائے گا۔

۴.۲ ہائیڈروجن جوہر

ہائیڈروجن جوہر بار e کے ایک بھاری پروٹان جس کے گرد بار $-e$ کا ایک ہلکا الیکٹران طواف کرتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ پروٹان بنیادی طور پر ساکن رہتا ہے (جسے ہم مبداء پر تصور کر سکتے ہیں)۔ ان دونوں کے مخالف بار کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں اکٹھے رکھتی ہے (شکل ۴.۳ دیکھیں)۔ متانوں کو لب کے تحت مخفی توانائی درج ذیل ہوگی

$$(۴.۵۲) \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

لہذا رداسی مساوات ۴.۳ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$(۴.۵۳) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$



شکل ۴.۳: ہائیڈروجن جوہر

ہم نے اس مساوات کو $u(r)$ کے لئے حل کر کے احبازتی توانائیاں E تعین کرنی ہیں۔ ہائیڈروجن جوہر کا حل نہایت اہم ہے لہذا میں اس کو، ہارمونی سرعش کے تحلیلی حل کی ترکیب سے، قدم با قدم حل کر کے پیش کرتا ہوں۔ (جس قدم پر آپ کو دشواری پیش آئے، حصہ ۲.۳.۲ سے مدد لیں جہاں مکمل تفصیل پیش کی گئی ہے۔) کولمب محفّیہ، مساوات ۴.۵۲، $E > 0$ کے لئے) استمراریہ حالات، جو ایکٹران پروٹون بکھراؤ کو ظاہر کرتے ہیں، تسلیم کرنے کے ساتھ ساتھ غیر مسلسل مقید حالات، جو ہائیڈروجن جوہر کو ظاہر کرتے ہیں، بھی تسلیم کرتا ہے۔ ہماری دلچسپی موحصر الذکر میں ہے۔

۴.۲.۱ رداسی تفاعل موج

سب سے پہلے نئی علامتیں متعارف کرتے ہوئے مساوات کی بہتر (صاف) صورت حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل متعارف کر کے (جہاں مقید حالات کے لئے e منفی ہونے کی وجہ سے κ حقیقی ہوگا)

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (۴.۵۴)$$

مساوات ۴.۵۳ کو E سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \frac{1}{(\kappa r)} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right] u$$

حاصل ہوگا جس کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم درج ذیل علامتیں متعارف کریں

$$\rho \equiv \kappa r, \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa} \quad (۴.۵۵)$$

لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u \quad (۴.۵۶)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس کے بعد ہم حالات کی مفت رابی روپ پر غور کرتے ہیں۔ اب $\rho \rightarrow \infty$ کرنے سے قوسین کے اندر مستقل جزو غالب ہوگا لہذا (تخمیناً) درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u$$

اس کا عمومی حل درج ذیل ہے

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \quad (۴.۵۷)$$

تاہم ($\rho \rightarrow \infty$ کی صورت میں) e^{ρ} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا ہمیں $B = 0$ لینا ہوگا۔ یوں ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim Ae^{-\rho} \quad (۴.۵۸)$$

اس کے برعکس $\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں مرکز گریز جزو غالب ہوگا؛^{۲۴} لہذا تخمیناً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u$$

جس کا عمومی حل (تصدیق کیجیے) درج ذیل ہوگا

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l}$$

تاہم ($\rho \rightarrow 0$ کی صورت میں) ρ^{-l} بے فتابو بڑھتا ہے لہذا $D = 0$ ہوگا۔ یوں ρ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$u(\rho) \sim C\rho^{l+1} \quad (۴.۵۹)$$

اگلے قدم پر مفت رابی روپ کو چھپانے کی خاطر نیا قیاس عمل $v(\rho)$:

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۶۰)$$

اس امید سے متعارف کرتے ہیں کہ $u(\rho)$ سے $v(\rho)$ زیادہ سادہ ہوگا۔ ابتدائی نتائج

$$\frac{du}{d\rho} = \rho^l e^{-\rho} \left[(l+1-\rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right]$$

^{۲۴} دلیل $l = 0$ کی صورت میں کارآمد نہیں ہوگی (اگرچہ مساوات ۴.۵۹ میں پیش نتیجہ اس صورت کے لئے بھی درست ہے)۔ بہر حال، میرا مقصد نئی علاقیت (مساوات ۴.۶۰) کے استعمال کے لئے راستہ ہموار کرنا ہے۔

اور

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^l e^{-\rho} \left\{ \left[-2l - 2 + \rho + \frac{l(l+1)}{\rho} \right] v + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right\}$$

خوش آئین نظر نہیں آتے ہیں۔ اس طرح $v(\rho)$ کی صورت میں رداسی مساوات (مساوات ۴.۵۶) درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۴.۶۱) \quad \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]v = 0$$

آخر میں ہم مندرجہ کرتے ہیں کہ حل، $v(\rho)$ ، کو ρ کا متقی تسلسل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۶۲) \quad v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j$$

ہمیں عددی سر (c_0, c_1, c_2, \dots وغیرہ) تلاش کرنے ہوں گے۔ جبزودر جبزو تفریق لیتے ہیں۔

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j$$

[میں نے دوسرے مجموعے میں ”مندرجہ اشاریہ“ j کو $j+1$ کہا ہے۔ اگر آپ کو یقین نہ ہو تو اولین چند اجزاء صریحاً لکھ کر تصدیق کر لیں۔ آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ کیا مجموعہ $-1 = j$ سے کیوں شروع نہیں کیا گیا؛ تاہم جبز و ضربی $(j+1)$ اس جبزو کو ختم کرتا ہے لہذا ہم مندرجہ بھی شروع کر سکتے ہیں۔] دوبارہ تفریق لیتے ہیں۔

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^{j-1}$$

انہیں مساوات ۴.۶۱ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1) c_{j+1} \rho^j + 2(l+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} \rho^j \\ - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)] \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j = 0 \end{aligned}$$

ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو مساوی رکھتے ہوئے

$$j(j+1) c_{j+1} + 2(l+1)(j+1) c_{j+1} - 2j c_j + [\rho_0 - 2(l+1)] c_j = 0$$

یا

$$(۴.۶۳) \quad c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2l+2)} \right\} c_j$$

ہوگا۔ یہ کلیہ تواری عددی سر تعین کرتے ہوئے تفعل $v(\rho)$ تعین کرتا ہے۔ ہم c_0 سے شروع کر کے (جو مجموعی مستقل کاروپ اختیار کرتا ہے جسے آخر میں معمول زنی سے حاصل کیا جائے گا)، مساوات ۴.۶۳ سے c_1 تعین کرتے ہیں؛ جس کو واپس اسی مساوات میں پر کر کے c_2 تعین ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔^{۲۵}

آئے j کی بڑی قیمت۔ (جو ρ کی بڑی قیمت کے مطابق ہوں گے جہاں بلند طاقستیں غالب ہوں گی) کے لئے عددی سروں کی صورت دیکھیں۔ یہاں کلیہ تواری درج ذیل کہتا ہے۔^{۲۶}

$$c_{j+1} \cong \frac{2j}{j(j+1)} c_j = \frac{2}{j+1} c_j$$

ایک لمحہ کے لیے فرض کرے کہ یہ بالکل ٹھیک رشتہ ہے۔ تب

$$(۴.۶۴) \quad c_j = \frac{2^j}{j!} c_0$$

لہذا

$$v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho}$$

اور یوں درج ذیل ہوگا

$$(۴.۶۵) \quad u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho}$$

جو ρ کی بڑی قیمتوں کے لیے بے فتابو بڑھتا ہے۔ مثبت قوت مساوی غیر پسندیدہ متغیراتی روسیہ دیتا ہے جو مساوات ۴.۵۷ میں پایا گیا۔ (درحقیقت متغیراتی حل بھی رد اسی مساوات کے جائز حل ہیں البتہ ہم ان میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں کیونکہ یہ معمول پر لانے کے قابل نہیں ہیں۔) اس المیہ سے نجات کا صرف ایک ہی راستہ

^{۲۵} آپ پوچھ سکتے ہیں: طاقست تسلل کی ترکیب $u(\rho)$ پر کیوں لاگو نہیں کی گئی؟ اس ترکیب کے اطلاق سے قبل متغیراتی روسیہ کو کیوں (حبز و ضربی کی صورت میں) باہر نکالا گیا؟ درحقیقت اس کی وجہ نتائج کی خوبصورتی ہے۔ حبز و ضربی ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلل کے ابتدائی اجزاء صفر ہوں گے (پہلا غیر صفر عددی سر c_{l+1} ہوگا)؛ ρ^{l+1} باہر نہ نکالنے سے تسلل کا پہلا حبز و ρ^0 حاصل ہوگا۔ اس کے برعکس حبز و ضربی $e^{-\rho}$ باہر نکالتا زیادہ ضروری ہے؛ اسے باہر نہ نکالنے سے c_{j+2} ، c_{j+1} اور c_j پر مشتمل تین اجزائی کلیہ تواری حاصل ہوتا ہے (کر کے دیکھیں!) جس کے ساتھ کام کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔

^{۲۶} آپ پوچھ سکتے ہیں: شمار کنندہ میں $\rho_0 - 2(l+1)$ اور نسب نامہ میں $2l+2$ رد کرنے کی طرح $1+j$ میں 1 کیوں رد نہیں کیا جاتا؟ اس تخمین میں ایسا کیا جاسکتا ہے، تاہم اسے رد نہ کرنے سے دلیل زیادہ واضح ہوگا۔ آپ 1 کو رد کر کے دیکھ سکتے ہیں کہ میں کیا کہتا تھا۔

ہے؛ تسلسل کو کہیں نہ کہیں اختتام پذیر ہونا ہوگا۔ لازمی طور پر ایک ایسا زیادہ سے زیادہ عدد صحیح، j بندیز، پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو۔

$$c_{(j+1)} = 0 \quad (۴.۶۶)$$

(یوں کلیہ تواری کے تحت باقی تمام (زیادہ بلند) عددی سر صفر ہوں گے۔) مساوات ۴.۶۳ سے ظاہر ہے کہ درج ذیل ہوگا۔

$$2(j+1) - \rho_0 = 0$$

صدر کو انٹیم عدد^{۲۷}

$$n \equiv j+1 \quad (۴.۶۷)$$

متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\rho_0 = 2n \quad (۴.۶۸)$$

اب E کو ρ_0 تعین کرتا ہے (مساوات ۴.۵۴ اور ۴.۵۵)

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{me^4}{8\pi^2 \epsilon^2 \hbar^2 \rho^2} \quad (۴.۶۹)$$

بلند اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۴.۷۰)$$

یہ مشہور زمانہ کلیہ بوہر^{۲۸} ہے جو غالباً پورے کوانٹم میکانیات میں اہم ترین نتیجہ ہے۔ جناب بوہر نے 1913ء میں، ناقتیل استعمال کا اس کی طبیعیات اور نیم کوانٹم میکانیات کے ذریعہ یہ کلیہ کو اخذ کیا۔ مساوات شرودنگر 1924ء میں منظر عام ہوئی۔

مساوات ۴.۵۵ اور ۴.۶۸ کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا

$$\kappa = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (۴.۷۱)$$

جہاں

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (۴.۷۲)$$

principal quantum number^{۲۷}
Bohr formula^{۲۸}

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

رواں بولہر^{۲۹} کہلاتا ہے۔ یوں (مساوات ۴.۵۵ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے) درج ذیل ہوگا۔

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (۴.۷۳)$$

ہائیڈروجن جوہر کے فضائی تقاضات موج کے نام تین کوانٹائی اعداد (n ، l اور m) استعمال کر کے رکھے جاتے ہیں

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (۴.۷۴)$$

جہاں مساوات ۴.۳۶ اور ۴.۶۰ کو دیکھتے ہوئے

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (۴.۷۵)$$

ہوگا جبکہ $v(\rho)$ متغیر ρ میں درجہ $n - l - 1$ = بندہ j کا کشیدہ رکتی ہوگا، جس کے عددی سر درجہ ذیل کلیہ تواری دے گا (اور پورے تقاضا عمل کو معمول پر لانا باقی ہے)۔

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)} c_j \quad (۴.۷۶)$$

زمینی حال^{۳۱} (یعنی کم سے کم توانائی کے حال) کے لیے $n = 1$ ہوگا؛ طبعی مستقالات کی قیمتیں پر کرتے ہوئے درجہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$E_1 = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right] = -13.6 \text{ eV} \quad (۴.۷۷)$$

ظاہر ہوا کہ ہائیڈروجن کی بندہ توانائی^{۳۲} (زمینی حال میں الیکٹران کو درکار توانائی کی وہ معتد ار جوہر کو باردارہ بنائے) 13.6 eV ہے۔ مساوات ۴.۶ کے تحت $l = 0$ لہذا $m = 0$ ہوگا (مساوات ۴.۲۹ دیکھیے) یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) \quad (۴.۷۸)$$

کلیہ تواری پہلے جزو پر ہی اختتام پذیر ہوتا ہے (مساوات ۴.۷۶ سے $j = 0$ کے لئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے)، لہذا $v(\rho)$ ایک مستقل (c_0) ہوگا اور یوں درجہ ذیل ہوگا۔

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a} e^{-r/a} \quad (۴.۷۹)$$

اس کو مساوات ۴.۳۱ کے تحت معمول پر لانے سے

$$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2 dr = \frac{|c_0|^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = |c_0|^2 \frac{a}{4} = 1$$

^{۲۹} Bohr radius

^{۳۰} کرد اس بولہر کو رواقی طور پر زیر نوشت کے ساتھ کھساجا تا ہے: a_0 تاہم یہ غیر ضروری ہے لہذا میں اس کو صرف a لکھوں گا۔

^{۳۱} ground state

^{۳۲} binding energy

یعنی $c_0 = 2/\sqrt{a}$ حاصل ہوگا۔ مزید $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ہے لہذا ہائیڈروجن کا زمینی حال درج ذیل ہوگا۔

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (۴.۸۰)$$

اسی طرح $n = 2$ کے لئے توانائی

$$E_2 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{4} = -3.4 \text{ eV} \quad (۴.۸۱)$$

ہوگی جو پہلی ہیجان حال، یا حالات کی بندشی توانائی ہے کیونکہ $l = 0$ ہو سکتا ہے (جس میں $m = 0$ ہوگا) یا $l = 1$ ہو سکتا ہے (جس کے لئے m کی قیمت -1 ، 0 یا $+1$ ہوگی)؛ یوں چار مختلف حالات کی بھی توانائی ہوگی۔ کلیہً توانی (مساوات ۴.۷۶) کے لئے $l = 0$ استعمال کرتے ہوئے $j = 0$ اور $c_1 = -c_0$ استعمال کرتے ہوئے $c_2 = 0$ دے گا لہذا $v(\rho) = c_0(1 - \rho)$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$R_{20}(r) = \frac{c_0}{2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad (۴.۸۲)$$

[دھیان رہے کہ مختلف کوانٹم اعداد l اور n کے لئے پھیلاؤ عددی سر $\{c_j\}$ مکمل طور پر مختلف ہوں گے۔] کلیہً توانی $l = 1$ کی صورت میں پہلے جزو پر تسلسل کو اختتام پذیر کرتا ہے؛ $v(\rho)$ ایک متقل ہوگا لہذا درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$R_{21}(r) = \frac{c_0}{4a^2} r e^{-r/2a} \quad (۴.۸۳)$$

ہر منفرد صورت میں c_0 معمول زنی سے تعین ہوگا سوال 11.4 دیکھیں۔

کسی بھی اختیاری n کے لئے (مساوات ۴.۶۷ سے ہم آہنگ) l کی ممکن قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۴.۸۴)$$

جبکہ ہر l کے لئے m کی ممکن قیمتوں کی تعداد $(2l + 1)$ ہوگی (مساوات ۴.۲۹)؛ لہذا E_n سطح توانائی کی کل انحطاطیت درج ذیل ہوگی۔

$$d(n) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (۴.۸۵)$$

کشیر رکتی $v(\rho)$ (جو مساوات ۴.۷۶ کے کلیہً توانی سے حاصل ہوگی) ایک ایسا تفاعل ہے جس سے عملی ریاضی دان بخوبی واقف ہیں؛ ماسوائے معمول زنی کے، اسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (۴.۸۶)$$

جدول ۴.۵: ابتدائی چند لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_q(x)$

$L_0 = 1$
$L_1 = -x + 1$
$L_2 = x^2 - 4x + 2$
$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$L_6 = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

جدول ۴.۶: ابتدائی چند شریک لاگنچ کشیر رکنیاں، $L_{q-p}^p(x)$

$L_0^2 = 2$	$L_0^0 = 1$
$L_1^2 = -6x + 18$	$L_1^0 = -x + 1$
$L_2^2 = 12x^2 - 96x + 144$	$L_2^0 = x^2 - 4x + 2$
$L_0^3 = 6$	$L_0^1 = 1$
$L_1^3 = -24x + 96$	$L_1^1 = -2x + 4$
$L_2^3 = 60x^2 - 600x + 1200$	$L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18$

جہاں

$$(۴.۸۷) \quad L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

ایک شریک لاگنچ کشیر رکنی^{۳۳} ہے جبکہ

$$(۴.۸۸) \quad L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

q ویں لاگنچ کشیر رکنی^{۳۴} ہے۔^{۳۵} (جدول ۴.۵) میں چند ابتدائی لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کی گئی ہیں؛ جدول ۴.۶ میں چند ابتدائی شریک لاگنچ کشیر رکنیاں پیش کئے گئی ہیں؛ جدول ۴.۷ میں چند ابتدائی رداسی تقاعسل امواج پیش کئے گئے ہیں جنہیں شکل ۴.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔) ہائیدروجن کے معمول شدہ تقاعسلات موج درجہ

^{۳۳} associated Laguerre polynomial

^{۳۴} Laguerre polynomial

^{۳۵} دیگر علامتوں کی طرح ان کے لئے بھی کئی علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ میں نے سب سے زیادہ مقبول علامتیں استعمال کی ہیں۔

جدول ۷.۴: ہائیڈروجن کے ابتدائی چند رداسی تقاسمات، $R_{nl}(r)$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)e^{-r/3a}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/3a}$$

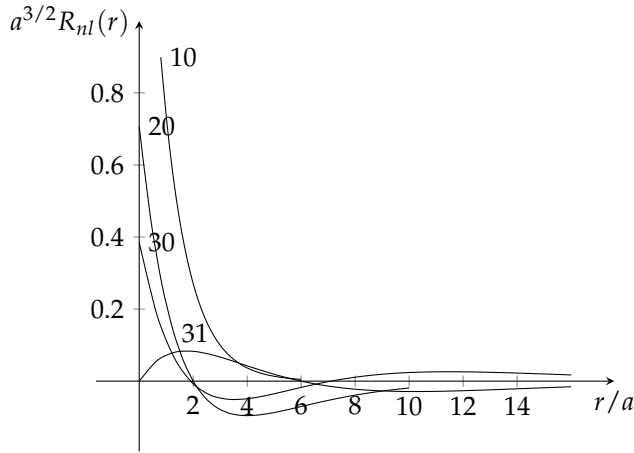
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/3a}$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)e^{-r/4a}$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2e^{-r/4a}$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3e^{-r/4a}$$



شکل ۴.۴: چند ابتدائی ہائیڈروجن رداسی تقاسمات $R_{nl}(r)$ کی تریسٹ۔

ذیل ہیں۔

$$(۴.۸۹) \quad \psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l [L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na)] Y_l^m(\theta, \phi)$$

یہ تفاعلات خوفناک نظر آتے ہیں لیکن شکوہ نہ کیجیے گا؛ یہ اُن چند حقیقی نظاموں میں سے ایک ہے جن کا بند روپ میں ٹھیک ٹھیک حل حاصل کرنا ممکن ہے۔ دھیان رہے، اگرچہ تفاعلات موج تینوں کوانٹائی اعداد کے تابع ہیں، توانائیوں (مساوات ۴.۷۰) کو صرف n تعین کرتا ہے۔ یہ کولم توانائی کی ایک مخصوص خاصیت ہے؛ آپ کو یاد ہو گا کہ کروی کنواں میں توانائیاں l پر منحصر تھیں (مساوات ۴.۵۰)۔ تفاعلات موج باہمی عمودی

$$(۴.۹۰) \quad \int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ہیں۔ یہ کروی ہارمونیاں کی عمودیت (مساوات ۴.۳۳) اور ($n \neq n'$) کی صورت میں H کی منفرد امتیازی افتدار کے امتیازی تفاعل ہونے کی بنا ہے۔

ہائیڈروجن تفاعلات موج کی تصویر کشی آسان کام نہیں ہے۔ ماہر کیمیا ان کے ایسے کثافتی اشکال بناتے ہیں جن کی چمک $|\psi|^2$ کا راست متناسب ہوتی ہے (شکل 5.4)۔ زیادہ معلومات مستقل کثافت احتمال کی سطحوں (شکل 6.4) کے اشکال دیتی ہیں (جنہیں پڑھنا نسبتاً مشکل ہو گا)۔

سوال ۴.۱۰: کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے تفاعل موج R_{30} ، R_{31} اور R_{32} حاصل کریں۔ انہیں معمول پر لانے کی ضرورت نہیں۔

سوال ۴.۱۱:

ا. مساوات ۴.۸۲ میں دیے گئے R_{20} کو معمول پر لا کر ψ_{200} تیار کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۳ میں دیے گئے R_{21} کو معمول پر لا کر ψ_{211} ، ψ_{210} اور ψ_{21-1} تیار کریں۔

سوال ۴.۱۲:

ا. مساوات ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے ابتدائی چار لاگتھ کشیر رکنیاں حاصل کریں۔

ب. مساوات ۴.۸۶، ۴.۸۷ اور ۴.۸۸ استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

ج. کلیہ توانائی (مساوات ۴.۷۶) استعمال کرتے ہوئے $l = 2$ ، $n = 5$ کی صورت میں $v(\rho)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۱۳:

ا. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اپنے جواب کو رداس بوہر کی صورت میں لکھیں۔

ب. ہائیڈروجن جوہر کے زمینی حال میں الیکٹران کے لیے $\langle x \rangle$ اور $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ اشارہ: آپ کو کوئی نیا نکل حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ دھیان رہے کہ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ہو گا، اور از مسینی حال میں تشاکلی کو بروئے کار لائیں۔

ج. حال $n = 2, l = 1, m = 1$ کے لیے $\langle x^2 \rangle$ تلاش کریں۔ انتباہ: یہ حال x, y اور z کے لحاظ سے تشکلی نہیں ہے۔ یہاں $x = r \sin \theta \cos \phi$ استعمال کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۴: ہائیڈروجن کے زمینی حال میں r کی کون سی قیمت زیادہ محتمل ہوگی۔ (اس کا جواب صفر نہیں ہے!) اشارہ: آپ کو پہلے معلوم کرنا ہوگا کہ r اور $r + dr$ کے بیچ الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا۔

سوال ۴.۱۵: ہائیڈروجن جوہر ساکن حال $n = 2, l = 1, m = 1$ اور $n = 2, l = 1, m = -1$ کے درج ذیل خطی جوڑے سے ابتداء کرتا ہے۔

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

ا. حال $\Psi(r, t)$ تیار کریں۔ اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

ب. مخفی توانائی کی توقعاتی قیمت $\langle V \rangle$ تلاش کریں۔ (کیا یہ t کی تابع ہوگی؟) اصل کلیہ اور عددی جواب کو الیکٹران وولٹ تو صورت میں پیش کریں۔

۴.۲.۲ ہائیڈروجن کا طیف

اصولی طور پر ایک ہائیڈروجن جوہر جو ساکن حال ψ_{nlm} میں پایا جاتا ہو ہمیشہ کے لیے اسی حال میں رہے گا۔ تاہم اس کو (دوسرے جوہر کے ساتھ ٹکرا کر یا اس پر روشنی ڈال کر) چھیڑنے سے الیکٹران کسی دوسرے ساکن حال میں عبور کر سکتا ہے۔ یہ توانائی جذب کر کے زیادہ توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے یا (عموماً برقی طبعی فوٹان کے اخراج سے) توانائی خارج کر کے کم توانائی حال منتقل ہو سکتا ہے۔^{۳۷} عملاً ایسی چھیڑ خانیاں ہر وقت پائی جائیں گی لہذا عبور (جنہیں ”کوئنٹم چھلانگ“ کہتے ہیں) مستقل طور پر ہوتے رہیں گے، جن کی بنا ہائیڈروجن سے ہر وقت روشنی (فوٹان) خارج ہوگی جس کی توانائی ابتدائی اور اختتامی حالات کی توانائیوں کے منفرق

$$E_{\gamma} = E_i - E_f = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (۴.۹۱)$$

کے برابر ہوگا۔

اب کلیہ پلانک^{۳۸} کے تحت فوٹان کی توانائی اس کے تعدد کے راست تناسب ہوگی:

$$E_{\gamma} = h\nu \quad (۴.۹۲)$$

^{۳۷} فطرۃً، اس میں تابع وقت باہم عمل پایا جائے گا جس کی تفصیل باب ۹ میں پیش کی جائے گی۔ یہاں اصل عمل حیات ضروری نہیں ہے۔

Planck's formula^{۳۸}

^{۳۹} فوٹان درحقیقت برقی طبعی اخراج کا ایک کوئنٹم ہے۔ یہ ایک اضافیتی چیز ہے جس پر غیر اضافی کوئنٹم میکینکس متاثر استعمال نہیں ہے۔ اگرچہ ہم چند مواقع پر فوٹان کی بات کرتے ہوئے کلیہ پلانک سے اس کی توانائی حاصل کریں گے، یاد رہے کہ اس کا اس نظر سے کوئی تعلق نہیں جس پر ہم بات کر رہے ہیں۔

جبکہ طول موج $\lambda = c/v$ ہے لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۴.۹۳)$$

جس

$$R \equiv \frac{m}{4\pi c \hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (۴.۹۴)$$

رڈبرگ مستقل^{۴۰} کہلاتا ہے۔ مساوات ۴.۹۳ ہائیڈروجن کے طیف کا کلیہ رڈبرگ^{۴۱} ہے۔ یہ کلیہ انیسویں صدی میں تجرباتی طور پر اخذ کیا گیا۔ نظریہ بوہر کی سب سے بڑی فتح اس کلیے کا حصول ہے جو تدرت کے بنیادی منتقات کی صورت میں R کی قیمت دیتا ہے۔ زمینی حال ($n_f = 1$) میں عبور، بالائے بصری خطہ میں پائے جاتے ہیں جنہیں طیف پیمائی کا **لیمائز تسلسل**^{۴۲} کہتے ہیں۔ پہلی ہجبان حال ($n_f = 2$) میں عبور، دکھائی دینے والے خطہ میں روشنی پیدا کرتے ہیں جسے **بالمر تسلسل**^{۴۳} کہتے ہیں۔ اسی طرح $n_f = 3$ میں عبور، **پاشن تسلسل**^{۴۴} دیتے ہیں جو زیر بصری شعاع ہے، وغیرہ وغیرہ (شکل ۴.۵ دیکھیں)۔ (رہائشی حرارت پر زیادہ تر ہائیڈروجن جوہر زمینی حال میں ہونگے؛ احسن راہی طیف حاصل کرنے کی خاطر آپ کو پہلے مختلف ہجبان حالات میں الیکٹران آباد کرنے ہوں گے؛ ایسا عموماً گیس میں برقی شعلاء پیدا کر کے کیا جاتا ہے۔)

سوال ۴.۱۶: ہائیڈروجن جوہر Z پروٹان کے مرکزہ کے گرد طواف کرتے ہوئے ایک الیکٹران پر مشتمل ہے۔ (از خود ہائیڈروجن میں $Z = 1$ جبکہ باردارہ ہیلیم^{۴۵} میں $Z = 2$ اور دہری باردارہ^{۴۶} تھیم میں $Z = 3$ ہوگا، وغیرہ وغیرہ)۔ ہائیڈروجن جوہر کی بوہر توانائیاں $E_n(Z)$ ، بندشی توانائی $E_1(Z)$ ، رداس بوہر $a(Z)$ ، اور رڈبرگ مستقل $R(Z)$ تعین کریں۔ (اپنے جوابات کو ہائیڈروجن کی متعلقہ قیمتوں کے لحاظ سے پیش کریں)۔ برقی طیفی طیف کے کس خطہ میں $Z = 2$ اور $Z = 3$ کی صورت میں لیمان تسلسل پائے جائیں گے؟ اشارہ: کسی نئے حساب کی ضرورت نہیں ہے؛ محفہ (مساوات ۴.۵۲) میں $e^2 \rightarrow Ze^2$ ہوگا لہذا تمام نتائج میں بھی یہی کچھ پر کرنا ہوگا۔

سوال ۴.۱۷: زمین اور سورج کو ہائیڈروجن جوہر کا متبادل تجرباتی نظام تصور کریں۔

۱. مساوات ۴.۵۲ کی جگہ مخفی توانائی تفاعل کیا ہوگا؟ (زمین کی کیت m جبکہ سورج کی کیت M لیں)۔

ب. اس نظام کا ”رداس بوہر“ a_B کیا ہوگا؟ اس کی عددی قیمت تلاش کریں۔

Rydberg constant^{۴۰}

Rydberg formula^{۴۱}

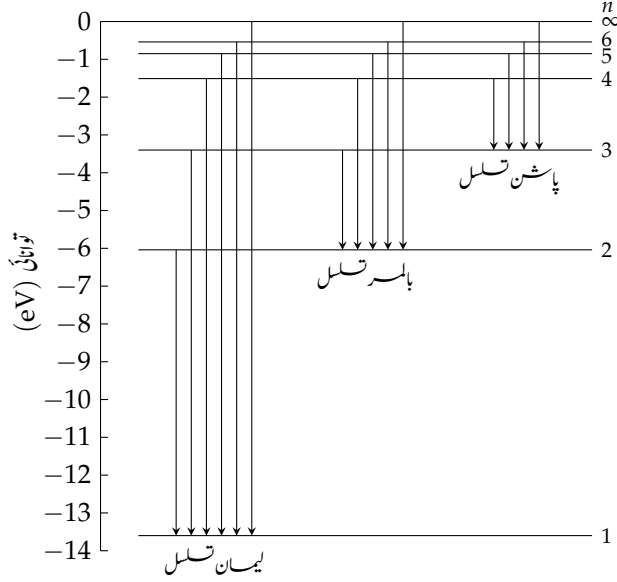
Lyman series^{۴۲}

Balmer series^{۴۳}

Paschen series^{۴۴}

Helium^{۴۵}

Lithium^{۴۶}



شکل ۴.۵: ہائیڈروجن طیف میں سطحوں توانائیاں اور تویلیات۔

ج. تجاذبی کلیہ بوہر لکھ کر r_0 کے مدار میں سیارہ کے کلاسیکی توانائی کو E_n کے برابر رکھ کر دکھائیں کہ $n = \sqrt{r_0/a_g}$ ہوگا۔ اس سے زمین کے کوانٹائی عدد n کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

د. فرض کریں زمین اگلی نچلی سطح $(n - 1)$ میں عبور کرتی ہے۔ کتنی توانائی کا احسار ہوگا؟ جواب حوالہ میں دیں۔ حصار فوٹان (یا زیادہ ممکنہ طور پر گریوٹان) کا طول موج کیا ہوگا؟ (اپنے جواب کو نوری سالوں میں پیش کریں۔ کیا حیرت انگیز نتیجہ محض ایک اتفاق ہے۔)

۴.۳ زاویائی معیار حرکت

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہائیڈروجن جوہر کے ساکن حالات کو تین کوانٹائی اعداد n ، l اور m کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ صدر کو انٹیم عدد (n) حال کی توانائی تعیین کرتا ہے (ساوات ۴.۷۰)؛ ہم دیکھیں گے کہ l اور m مداری زاویائی معیار حرکت سے تعلق رکھتے ہیں۔ کلاسیکی نظریہ میں وسطی قوتیں، توانائی اور معیار حرکت بنیادی بقائی معتداریں ہیں، اور یہ حیرت کی بات نہیں کہ کو انٹیم میکانیات میں زاویائی معیار حرکت (اس سے بھی زیادہ) اہمیت رکھتا ہے۔

کلاسیکی طور پر (مبدأ کے لحاظ سے) ایک ذرہ کی زاویائی معیار حرکت درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$(۴.۹۵) \quad L = r \times p$$

جس کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۹۶) \quad L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

ان کے متعلقہ کوانٹم عاملین معیاری نسخہ $p_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$, $p_y \rightarrow -i\hbar\partial/\partial y$, $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ سے حاصل ہوں گے۔ باب ۲ میں ہم نے ہارمونک مشین کے احبازاتی توانائیوں کو خالص الجبرائی ترکیب سے حاصل کیا۔ اگلے حصہ میں الجبرائی ترکیب استعمال کرتے ہوئے زاویائی معیار حرکت عاملین کے امتیازی امتداد حاصل کیے جائیں گے۔ یہ ترکیب، عاملین کے مقلبتی تعلقات پر مبنی ہے۔ اس کے بعد ہم امتیازی تفاعلات حاصل کریں گے جو زیادہ دشوار کام ہے۔

۴.۳.۱ امتیازی امتداد

عاملین L_x اور L_y آپس میں غیر مقلوب ہیں۔ درحقیقت درج ذیل ہوگا۔^{۴۸}

$$(۴.۹۷) \quad [L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ = [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

باضابطہ مقلبتی رشتوں (مساوات ۴.۱۰) سے ہم جانتے ہیں کہ صرف x اور p_x , y اور p_y , z اور p_z عاملین غیر مقلوب ہیں۔ یوں درمیانے دو اجزاء حذف ہوں گے اور درج ذیل رہ جائے گا۔

$$(۴.۹۸) \quad [L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

ہم $[L_y, L_z]$ یا $[L_z, L_x]$ بھی تلاش کر سکتے تھے، تاہم انہیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے؛ ہم اشاریہ کی چپکری ادل بدل ($x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$) سے فوراً درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(۴.۹۹) \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

زاویائی معیار حرکت کی بنیادی مقلبتی رشتے^{۴۹} ہیں جن سے باقی سب کچھ اخذ ہوتا ہے۔

دھیان رہے کہ L_x , L_y اور L_z غیر ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہیں۔ متعمم اصول عدم یقینیت (مساوات ۳.۶۲) کے تحت

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

^{۴۸} کوانٹم میکانیات میں تمام عاملین متوازن جبریتی تقسیم: $(B + C) = AB + AC$ پر پورا اترتے ہیں (صفحہ ۱۷۷ پر حاشیہ ۳۳ دیکھیں)۔ بالخصوص $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ ہوگا۔
fundamental commutation relations^{۴۹}

یا

$$(۳.۱۰۰) \quad \sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

ہوگا۔ یوں ایسے حالات کی تلاش جو L_x اور L_y کے ایک وقت امتیازی تفاعلات ہوں بے مقصد ہوگا۔ اس کے برعکس کل زاویائی معیار حرکت کا مربع:

$$(۳.۱۰۱) \quad L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

عامل L_x کے ساتھ مقلوب ہے۔

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

(مقابلہ کی سادہ روپ حاصل کرنے کے لیے میں نے مساوات ۳.۶۴ استعمال کیا؛ یہ بھی یاد رہے کہ ہر عامل اپنے آپ کے ساتھ مقلوب ہوگا) اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ L_y اور L_z کے ساتھ بھی L^2 مقلوب ہوگا

$$(۳.۱۰۲) \quad [L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$$

یا مختصر اور درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۰۳) \quad [L^2, \mathbf{L}] = 0$$

اس طرح \mathbf{L} کے ہر جزو کے ساتھ L^2 ہم آہنگ ہوگا اور ہم L^2 کا (مثلاً) L_z کے ساتھ ایک وقت امتیازی حالات

$$(۳.۱۰۴) \quad L^2 f = \lambda f \quad \text{اور} \quad L_z f = \mu f$$

تلاش کرنے کی امید رکھ سکتے ہیں۔ ہم نے حصہ ۲.۳.۱ میں ہارمونی مرتعش پر سیڑھی عامل کی ترکیب استعمال کی۔ اس طرح کی ترکیب یہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(۳.۱۰۵) \quad L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

L_z کے ساتھ مقاب درج ذیل ہوگا

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y)$$

الہذا

$$(۳.۱۰۶) \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

اور، ظاہر ہے کہ، درج ذیل ہوگا۔

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (۴.۱۰۷)$$

میں دعویٰ کرتا ہوں کہ اگر L^2 اور L_z کا امتیازی تفاعل f ہو تب $L_{\pm}(f)$ بھی ان کا امتیازی تفاعل ہوگا: مساوات ۴.۱۰۷ درج ذیل کہتی ہے

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f) \quad (۴.۱۰۸)$$

لہذا اسی امتیازی قدر λ کے لیے $L_{\pm}f$ بھی L^2 کا امتیازی تفاعل ہوگا، اور مساوات ۴.۱۰۶ درج ذیل کہتی ہے

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)f + L_{\pm}L_zf = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad (۴.۱۰۹)$$

لہذا نئے امتیازی قدر $\mu \pm \hbar$ کے لیے L_z کا $L_{\pm}f$ امتیازی تفاعل ہوگا۔ ہم L_+ کو **عالمی رفعت**^{۵۰} کہتے ہیں چونکہ یہ L_z کے امتیازی قدر کو \hbar بڑھاتا ہے جبکہ L_- **عالمی تقلیل**^{۵۱} کہلاتا ہے چونکہ یہ امتیازی قیمت کو \hbar کم کرتا ہے۔

یوں ہمیں λ کی کسی ایک قیمت کے لیے، حالات کی ایک سیرجی ملتی ہے، جس کا ہر پایہ مترہی پایہ سے L_z کی امتیازی قدر کے لحاظ سے \hbar کی ایک اکائی دور ہوگا (شکل ۴.۶)۔ سیرجی چڑھنے کی خاطر ہم عامل رفت کا اطلاق کرتے ہیں جبکہ سیرجی اترنے کی خاطر ہم عامل تقلیل لاگو کرتے ہیں۔ تاہم یہ عمل ہمیشہ کے لئے برقرار نہیں رہ سکتا ہے۔ ہم آخر کار ایک ایسے حال تک پہنچے گے جس کا z جزو کل سے زیادہ ہوگا جو ایک ناممکن صورت^{۵۲} ہے۔ لازماً سیرجی کا ایسا ”بالاترین پایہ“ f_t ، پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن^{۵۳} کرے گا۔

$$L_+f_t = 0 \quad (۴.۱۱۰)$$

فرض کریں اس بالاترین پایہ پر L_z کی امتیازی قیمت $\hbar l$ ہو (حرف ” l “ کی مناسبت آپ پر جلد آیا ہوں گی)۔

$$L_zf_t = \hbar lf_t; \quad L^2f_t = \lambda f_t \quad (۴.۱۱۱)$$

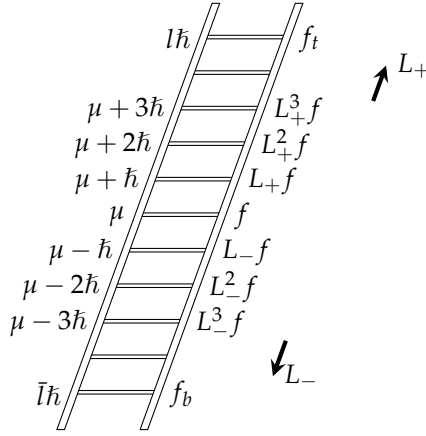
اب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z) \end{aligned}$$

raising operator^{۵۰}

lowering operator^{۵۱}

^{۵۲}بناطیل طور پر $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ ہوگا، لیکن $\langle L^2 \rangle = \langle f|L^2f \rangle = \langle L_xf|L_xf \rangle \geq 0$ ہے (اور L_y کے لئے بھی ایسا ہی ہوگا) لہذا $\lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$ ہوگا۔
^{۵۳}درحقیقت، ہم صرف اتنا اخذ کر سکتے ہیں کہ L_+f_t معمول پر لانے کے قابل نہیں ہے؛ اس کا معیار مندرجہ کی بجائے لامتناہی ہو سکتا ہے۔
سوال ۴.۱۸ میں اس پر غور کیا گیا ہے۔



شکل ۴.۶: زاویائی معیار حرکت حالات کی ”سیڑھی“۔

یاد دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۲) \quad L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

یوں

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۱۳) \quad \lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

یہ ہمیں L_z کی امتیازی متدرج کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی صورت میں L^2 کی امتیازی متدرج دیتی ہے۔
ساتھ ہی، اسی وجہ کی بنا، سیڑھی کا نچلا ترین پایہ f_b بھی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

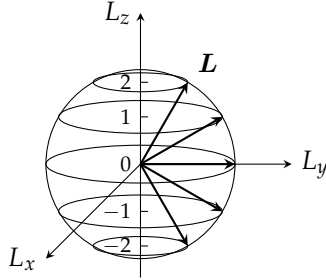
$$(۴.۱۱۴) \quad L_- f_b = 0$$

فرض کریں اس نچلے ترین پایہ پر L_z کا امتیازی متدرج $\hbar \bar{l}$ ہو:

$$(۴.۱۱۵) \quad L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b; \quad L^2 f_b = \lambda f_b$$

معادلات ۴.۱۱۲ استعمال کرتے ہوئے

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$



شکل ۷. زاویائی معیار حرکت حالات (برائے $l = 2$)۔

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad (۴.۱۱۶)$$

مسوات ۴.۱۱۳ اور مسوات ۴.۱۱۶ کا موازنہ کرنے سے $\bar{l}(\bar{l} - 1) = l(l + 1)$ ہوگا لہذا $\bar{l} = l + 1$ ہوگا (جو بے معنی ہے، چونکہ خپلا ترین پاسب، بالاترین پاسب سے بلند نہیں ہو سکتا) یا درج ذیل ہوگا۔

$$\bar{l} = -l \quad (۴.۱۱۷)$$

ظاہر ہے کہ L_z کے امتیازی امتداد $m\hbar$ ہونگے، جہاں m (اس حرف کی مناسبت آپ پر جلد عیاں ہو گی) کی قیمت N عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $-l$ تا $+l$ ہوگی۔ بالخصوص آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $l = -l + N$ یعنی $l = N/2$ ہوگا، لہذا l لازماً عدد صحیح یا نصف عدد صحیح ہوگا۔ امتیازی تفاعلات کی تصویر کشی اعداد l اور m کرتے ہیں:

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l + 1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad (۴.۱۱۸)$$

جہاں درج ذیل ہونگے۔

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad (۴.۱۱۹)$$

l کی کسی ایک قیمت کے لیے m کی $2l + 1$ مختلف قیمتیں ہوں گی (یعنی سیڑھی کے $2l + 1$ پائے ہونگے)۔

بعض اوقات اس نتیجہ کو شکل ۷.۴ کی طرز پر ظاہر کیا جاتا ہے (جو $l = 2$ کے لیے دکھایا گیا ہے)۔ یہاں تیسرے نشان ممکنہ زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؛ ان تمام کی لمبائیاں \hbar کی اکائیوں میں $\sqrt{l(l + 1)}$ ہوگی جو (یہاں $\sqrt{6} = 2.45$ ہے) جبکہ ان کے z اجزاء m کی اجبازتی قیمتیں $0, -1, -2$ ، $1, 2$ ہیں۔ دھیان رہے کہ ان سمتیات کے مقدار (یعنی کرہ کار داس)، z جزو کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے بڑا ہے! $l = 0$ کی ”حقیر“ صورت میں، عموماً $\sqrt{l(l + 1)} > l$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آپ زاویائی معیار

حرکت کو سیدھا z رخ نہیں رکھ سکتے ہیں۔ پہلی نظر میں یہ ایک نامعقول بات نظر آتی ہے۔ ”کیا میں z محدود زاویائی معیار حرکت سمتیہ کے رخ منتخب نہیں کر سکتا ہوں؟“ اب ایسا کرنے کی خاطر آپ کو تینوں اجزاء بیک وقت معلوم ہونے چاہیے ہیں جبکہ اصول عدم یقینیت (مساوات ۴.۱۰۰) کہتی ہے کہ یہ ناممکن ہے۔ چلو مان لیا لیکن کیا یہ بھی ممکن نہیں ہے کہ میں اتفاقی z محدود L_z کے رخ منتخب کر لوں؟ بالکل نہیں! آپ بنیادی نکتہ نہیں سمجھ پائے ہیں۔ ایسا نہیں ہے کہ محض آپ L_z کے تینوں اجزاء نہیں جانتے ہیں بلکہ ایک ذرے کا تعین زاویائی معیار حرکت سمتیہ ہو ہی نہیں سکتا ہے؛ جیسا کہ اس کام تمام اور معیار حرکت بیک وقت تعین نہیں ہو سکتے ہیں۔ اگر L_z کی قیمت ہمیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تب L_x اور L_y ہم نہیں جانتے سکتے ہیں شکل ۴.۷ میں سمتیہ گمراہ کن ہیں؛ بہتر ہوتا کہ خطوط عرض بلند پر ان کی اپائی کی حباتی جو یہ ظاہر کرتی کہ L_x اور L_y غیر تعین ہیں۔

میں امید کرتا ہوں کہ میں آپ کو متاثر کرنے میں کامیاب ہوا ہوں گا۔ زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتوں (مساوات ۴.۹۹) سے آغاز کرتے ہوئے ہم نے، صرف الجبرائی ترائیکب استعمال کر کے، امتیازی تفاعلات دیکھے بغیر، L^2 اور L_z کے امتیازی امتداد تعین کیے۔ آئیں اب امتیازی تفاعلات تیار کریں؛ جو آپ دیکھیں گے اتنا آسان نہیں ہوگا۔ میں کانٹے کی بات $Y_l^m = f_l^m$ سے شروع کرتا ہوں؛ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات وہی کروئی ہارمونیاں ہیں جنہیں ایک دوسری راہ پر چلتے ہوئے ہم نے حصہ ۴.۱.۲ میں حاصل کیا (یہی وجہ ہے کہ میں نے حرف l اور m استعمال کیے)۔ اب میں آپ کو بتا سکتا ہوں کہ کروئی ہارمونیاں کیوں عمودی ہیں۔ یہ الگ تھلگ امتیازی امتداد کے ہر مشی عملین (L^2 اور L_z) کے امتیازی تفاعلات ہیں (حصہ ۳.۳.۱ میں مسئلہ ۳.۲)۔

سوال ۴.۱۸: عامل رفت اور عامل تقلیل m کی قیمت ایک (1) سے تبدیل کرتے ہیں

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad (۴.۱۲۰)$$

جہاں A_l^m کوئی مستقل ہے۔ سوال: امتیازی تفاعلات کو معمول پر لانے کی خاطر A_l^m کیا ہوگا؟ اشارہ: پہلے دکھائیں کہ L_{\pm} اور L_z ایک دوسرے کے ہر مشی جوڑی دار ہیں (چونکہ L_x اور L_y قابل مشاہدہ ہیں، آپ فرض کر سکتے ہیں یہ ہر مشی ہوں گے لیکن آپ چاہیں تو اس کی ثابت کر سکتے ہیں)؛ اور اس کے بعد مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ جواب:

$$A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \quad (۴.۱۲۱)$$

دیکھیے گائے سیدھی کی بلند ترین اور ٹھپے ترین پایہ پر کیا ہوگا (جب آپ f_l^l پر L_+ یا f_l^{-l} پر L_- لاگو کرتے ہیں)۔

سوال ۴.۱۹:

۱. مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں مساوات ۴.۱۰ سے آغاز کرتے ہوئے درج ذیل مطالب حاصل کریں۔

$$[L_z, x] = i\hbar y, \quad [L_z, y] = -i\hbar x, \quad [L_z, z] = 0, \\ [L_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [L_z, p_z] = 0 \quad (۴.۱۲۲)$$

ب. ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴.۹۶ سے $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ حاصل کریں۔

ج. معتالب $[L_z, r^2]$ اور $[L_z, p^2]$ کی قیمتیں (جہاں $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$) تلاش کریں۔

د. اگر V صرف r کا تابع ہو تب دکھائیں کہ ہمیلٹنی $H = (p^2/2m) + V$ زاویائی عامل L کے تینوں اجزاء کے ساتھ مقلوبی ہوگا۔ یوں H ، L^2 اور L_z باہمی ہم آہنگ متبادل مشاہدہ ہوں گے۔

سوال ۴.۲۰:

ا. دکھائیں کہ مخفی $V(r)$ میں ایک ذرے کی مداری زاویائی معیار حرکت L کی توقعاتی قیمت کی شرح تبدیلی اس کے قوت مسروڑ کی توقعاتی قیمت کے برابر ہوگی

$$\frac{d}{dt}\langle L \rangle = \langle N \rangle$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$N = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

(یہ مسئلہ اہرنفٹ کا مشغلہ متعلق ہے۔)

ب. دکھائیں کہ کسی بھی کروی تشکلی مخفی کے لیے $d\langle L \rangle/dt = 0$ ہوگا۔ (یہ زاویائی معیار حرکت کے بقا کا کوانٹم میکانی روپ ہے۔)

۴.۳.۲ امتیازی تفاعلات

ہمیں سب سے پہلے L_x ، L_y اور L_z کو کروی محدد میں لکھنا ہوگا اب $\mathbf{L} = (\hbar/i)(\mathbf{r} \times \nabla)$ ہے جبکہ کروی محدد میں ڈھلوان درج ذیل ہوگا

$$\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۴.۱۲۳)$$

جہاں $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[r(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) \frac{\partial}{\partial r} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

اب $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r) = 0$ ، $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta) = \mathbf{a}_\phi$ ، اور $(\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi) = -\mathbf{a}_\theta$ ہوتے ہیں (شکل ۴.۱) لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۴.۱۲۴)$$

اکائی سمتیات a_θ اور a_ϕ کو ان کے کارتیسی اجزاء میں لکھتے ہیں۔

$$(۳.۱۲۵) \quad a_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i} + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{j} - (\sin \theta) \mathbf{k}$$

$$(۳.۱۲۶) \quad a_\phi = -(\sin \phi) \mathbf{i} + (\cos \phi) \mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ہوگا کلاہر ہے درج ذیل ہوں گے۔

$$(۳.۱۲۷) \quad L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۸) \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$(۳.۱۲۹) \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ہمیں عامل رزنت اور عامل تقطیل بھی درکار ہوں گے:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

تہم $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۰) \quad L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

بالخصوص (سوال ۳.۲۱-۱) درج ذیل

$$(۳.۱۳۱) \quad L_+ L_- = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

لہذا (سوال ۳.۲۱-ب) درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۳.۱۳۲) \quad L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

ہم اب $f_l^m(\theta, \phi)$ تعین کر سکتے ہیں۔ یہ L^2 کا امتیازی قف عمل ہے، جس کا امتیازی قدر $\hbar^2 l(l+1)$ ہے۔

$$L^2 f_l^m = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

یہ ٹھیک ”زاویائی مساوات“ (مساوات ۴.۱۸) ہے۔ ساتھ ہی یہ L_z کا امتیازی تفاعل بھی ہے جہاں اس کا امتیازی مقدار $m\hbar$ ہوگا:

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

جو انتہائی مساوات (مساوات ۴.۲۱) کا معادل ہے۔ ہم ان مساوات کا نظام حل کر چکے ہیں۔ ان کا معمول شدہ نتیجہ کروئی ہارمونیات $Y_l^m(\theta, \phi)$ ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L^2 اور L_z کے امتیازی تفاعلات کروئی ہارمونیات ہوں گے۔ حصہ ۴.۱ میں علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات شروڈنگر حل کرتے ہوئے ہم انہی تین مقبولی عاملین H اور L^2 کے بیک وقت امتیازی تفاعلات تیار کر رہے تھے۔

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi \quad (۴.۱۳۳)$$

ہم مساوات ۴.۱۳۲ استعمال کرتے ہوئے مساوات شروڈنگر مساوات ۴.۱۴ کو مختصر اُدرج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

یہاں ایک دلچسپ صورتحال پیدا ہوتا ہے۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے امتیازی تفاعلات کی صرف عدد صحیح l قیمتیں (مساوات ۴.۲۹) حاصل ہونیں جبکہ زاویائی معیار حرکت کا الجبرائی نظریہ، l کی (اور) لہذا m کی نصف عدد صحیح قیمتیں (مساوات ۴.۱۱۹) دیتی ہے۔ آپ کا خیال ہوگا کہ نصف عدد صحیح نتائج غیر ضروری ہیں، لیکن جیسا آپ اگلے حصوں میں دیکھیں گے، یہ انتہائی زیادہ اہمیت کا حامل نتیجہ ہے۔

سوال ۴.۲۱:

ا. مساوات ۴.۱۳۰ سے مساوات ۴.۱۳۱ اخذ کریں۔ اشارہ: پرکھی تفاعل استعمال نہ کرنے سے غلط نتائج حاصل ہو سکتے ہیں لہذا اس کو ضرور استعمال کریں۔

ب. مساوات ۴.۱۲۹ اور مساوات ۴.۱۳۱ سے مساوات ۴.۱۳۲ اخذ کریں۔ اشارہ: مساوات ۴.۱۱۲ استعمال کریں۔ سوال ۴.۲۲:

ا. حاب کیے بغیر بتائیں $L_+ Y_l^l$ کیا ہوگا؟

ب. مساوات ۴.۱۳۰ کے ساتھ جنزور-اکا نتیجہ اور یہ جانتے ہوئے کہ $\hbar l Y_l^l = L_z Y_l^l$ ہوگا، $L_z Y_l^l(\theta, \phi)$ کی قیمت معمولی مستقل تک تلاش کریں۔

ج. بلاواسطہ مکمل کے ذریعے معمولی مستقل تعین کریں۔ اپنے حتمی نتیجہ کا سوال ۴.۵ کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۲۳: آپ نے سوال ۴.۲ میں درج ذیل دکھایا۔

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

عاسل رفت کا $Y_2^2(\theta, \phi)$ پر اطلاق کریں۔ معمول زنی کے لیے مساوات ۴.۱۲۱ استعمال کریں۔

سوال ۴.۲۴: بغیر کمیت کا ایک ڈنڈا جس کی لمبائی a ہے، کے دونوں سروں پر کمیت m کے ذرات باندھے ہوئے ہیں۔ یہ نظام اپنے وسط کے گرد آزادی سے تین بُعدی حرکت کر سکتا ہے (جبکہ نظام کا وسط از خود حرکت نہیں کرتا)۔

۱. دکھائیں کہ اس بے لچکے پھرکے^{۵۵} کی اجزائی توانائیاں درج ذیل ہوں گی۔

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

اشارہ: پہلے (کلاسیکی) توانائیوں کو کل زاویائی معیار حرکت کی صورت میں لکھیں۔

ب۔ اس نظام کی معمول شدہ امتیازی تفاعلات کیا ہوں گے؟ اس نظام کی n وی توانائی سطح کی انخطاطیت کیا ہوگی؟

۴.۴ چکر

کلاسیکی میکانیات میں بے لچک جسم کے زاویائی معیار حرکت کے دو اقسام پائے جاتے ہیں: پہلی قسم، کمیت کے مرکز کی حرکت کے ساتھ وابستہ ہے جسے مدار^{۵۶} ($L = r \times p$) کہتے ہیں جبکہ دوسری قسم پھرکے^{۵۷} ($S = I\omega$) کہلاتا ہے جو مرکز کمیت کے گرد حرکت سے وابستہ ہے۔ مثال کے طور پر سورج کے گرد سالانہ مدار کی بنیاد میں کامداری زاویائی معیار حرکت ہوگا، جبکہ شمال و جنوب محور کے گرد، روزانہ چکر کی بنا اس کا چکری زاویائی معیار حرکت ہوگا۔ کلاسیکی نقطہ نظر کے لحاظ سے یہ مشرق محض ہماری آسانی کے لئے ہے، چونکہ حقیقتاً، ہر پتھر ہر پہاڑ، ہر سمندر، وغیرہ، جن پر زمین مشتمل ہے، کا زمین کے محور کے گرد انفرادی ”مداری“ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ S کے برابر ہوگا۔ کوآنٹم میکانیات میں اس کا معادل پایا جاتا ہے، تاہم یہاں ایک حتمی طور پر بنیادی مشرق پایا جاتا ہے۔ مرکزہ کے گرد (ہائیڈروجن کی صورت میں) الیکٹران کے طواف کی بنیاد میں زاویائی معیار حرکت (جسے کروئی ہارمونیات بیان کرتے ہیں) کے ساتھ ساتھ، الیکٹران زاویائی معیار حرکت کی ایک دوسری روپ بھی رکھتا ہے، جس کا نصف میں حرکت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے (اور یوں اس کو مقام کے متغیرات r ، θ اور ϕ سے بیان نہیں کیا جاسکتا ہے) تاہم یہ کلاسیکی چکر کی مانند ہے (لہذا اے ہم اسی لفظ سے پکارتے ہیں)۔ یہ مشابہت یہی پر ختم ہو جاتی ہے: الیکٹران (جہاں تک ہم جانتے ہیں) ایک بے ساخت (یعنی بغیر ٹکڑوں کے) نقطہ ذرا ہے، لہذا اس کی چکری زاویائی معیار حرکت کو الیکٹران کے ٹکڑوں کے مداری زاویائی معیار حرکت میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے (سوال ۴.۲۵ دیکھیں)۔ یہاں اتنا کہنا کافی ہوگا کہ بنیادی ذرات **بیرونی**^{۵۸} زاویائی معیار حرکت L کے ساتھ ساتھ **اندرونی**^{۵۹} زاویائی معیار حرکت S بھی رکھتے ہیں۔

rigid rotor^{۵۵}
orbital^{۵۶}
spin^{۵۷}
extrinsic^{۵۸}
intrinsic^{۵۹}

چکر کا الجبرائی نظریہ ہو بہو مداری زاویائی معیار حرکت کے نظریہ کی مانند ہے۔ ہم باضابطہ مقلبتی رشتوں^{۶۰} سے شروع کرتے ہیں۔

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (۴.۱۳۴)$$

یوں (پہلے کی طرح) S^2 اور S_z کے امتیازی تفاعلات درج ذیل تعلقات^{۶۱}

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle \quad (۴.۱۳۵)$$

اور

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle \quad (۴.۱۳۶)$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ ہے۔ تاہم یہاں امتیازی سمتیات (θ اور ϕ کے تفاعل نہیں ہیں) لہذا یہ کروہی ہارمونیات نہیں ہونگے اور ہم کوئی ایسی معلوم نہیں رکھتے جس کی بنیاد s اور m کی نصف عدد صحیح قیمتوں

$$(۴.۱۳۷)$$

کو قبول نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر بنیادی ذرے کے s کی ایک مخصوص اور ثابت تبدیلی قیمت ہوتی ہے جسے اس (مخصوص نسل کا) چکر^{۶۲} کہتے ہیں: π میزون کا چکر 0 ہے؛ الیکٹران کا چکر $1/2$ ؛ پروٹان کا چکر 1؛ ذیلتا کا چکر $3/2$ ؛ گریوٹان کا چکر 2؛ وغیرہ وغیرہ۔ اس کے برعکس، (مثلاً ہائیڈروجن جو ہر میں ایک الیکٹران کا) مداری زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد l کوئی بھی عدد صحیح قیمت کا حاصل ہو سکتا ہے، جو نظام چھیڑنے سے تبدیل ہو کر کسی ایک عدد صحیح سے کوئی دوسرا عدد صحیح ہو گا۔ تاہم کسی بھی ذرے کا s اٹل ہو گا، جس کی بنیاد نظریہ چکر نسبتاً دادہ ہے۔^{۶۳}

^{۶۰} ہم انہیں نظریہ چکر کے اصول موضوعہ لیتے ہیں؛ مداری زاویائی معیار حرکت کے مسائل کلیات (مساوات ۴.۹۹) کو عاملین کے معلوم روپ (مساوات ۴.۹۶) سے اخذ کیا گیا تھا۔ زیادہ تفصیل انداز میں ان دونوں کو تین ابعاد میں گھماؤ کے عدم تغیریت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقیناً، یہ تین بنیادی مقبولی رشتے ہر قسم کے زاویائی معیار حرکت کے لئے درست ہوں گے، چاہے وہ چکر کی، مداری، یا مرکب جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت ہو جس میں کچھ چکر اور کچھ مداری شامل ہوں گے۔
^{۶۱} چونکہ چکر کے امتیازی حالات، تفاعلات نہیں ہیں؛ میں ان کے لئے ”دایاں گوشہ“ ($| \rangle$) استعمال کروں گا۔ (میں حصہ ۴.۳ میں بھی یہی کرتے ہوئے Y_l^m کو $|lm\rangle$ لکھ سکتا تھا، تاہم سیاق و سباق کے نقطہ نظر سے وہاں تفاعلی روپ زیادہ بہتر تھی۔) مجھے حروف کی کمی کا سامنا ہے لہذا میں S_z کے امتیازی متدر کے لئے m استعمال کروں گا، جیسا میں نے L_z کے لئے بھی کیا (بعض مضغین، مکمل وضاحت کی خاطر اس مقام پر انہیں m_l اور m_s لکھتے ہیں)۔
^{۶۲} spin

^{۶۳} یقیناً، ریاضیات کے نقطہ نظر سے $1/2$ چکر، غیر حقیر سادہ ترین ممکنہ کوانٹائی نظام ہو سکتا ہے، چونکہ یہ صرف دو اساس حالات دیتا ہے۔ چھپیدگیوں اور باریکیوں سے لیس لامتناہی ابعادی بلبرٹ فضا کی بجائے، ہم سادہ دو بُدی سمتی فضا میں کام کرتے ہیں؛ غیر مانوس تفرقی مساوات اور ترنگ تفاعلات کی بجائے، ہمارا واسطہ 2×2 متالاب اور 2 رکنی سمتیات سے ہوتا ہے۔ اسی لئے بعض مضغین کوانٹم میکانیات کا آغاز چکر کے مطالعہ سے کرتے ہیں۔ ہاں، ریاضیاتی دگائی سے تصوراتی غور و فکر میں مداخلت پیدا ہوتی ہے جس کو میں پسند نہیں کرتا ہوں۔

سوال ۲۵: اگر الیکٹران ایک کلاسیکی ٹھوس کرہ ہوتا جس کا رداس

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (۴.۱۳۸)$$

(الیکٹران کے برقی میدان کی توانائی کو الیکٹران کی کمیت کا جواز لیتے ہوئے، آئنسٹائن کلیہ $E = mc^2$ سے کلاسیکی الیکٹران رداس r_c حاصل کیا جاتا ہے۔) اور زاویائی معیار حرکت $(1/2)\hbar$ ہوتا، تب ”خط استوا“ پر کسی نقطے کی رفتار (ms^{-1} میں) تلاش کریں۔ کیا حاصل جواب معنی خیز ہے؟ (درحقیقت، تجربات سے ثابت ہے کہ الیکٹران کا رداس r_c سے بہت کم ہے، جو اس نتیجہ کو مزید عنطرا ردیتا ہے۔)

1/2 چکر

سادہ مادہ (پروٹان، نیوٹران، الیکٹران) کے ساتھ ساتھ کوارک^{۲۵} اور تمام لیپٹان^{۲۶} کیلئے $\frac{1}{2} = s$ ہوگا لہذا یہی اہم ترین صورت ہے۔ مزید 1/2 چکر سمجھنے کے بعد، زیادہ چکر کے ضوابط دریافت کرنا نسبتاً آسان کام ہے۔ صرف ”دو“ امتیازی تغیرات پائے جاتے ہیں: پہلا $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ (یا غیر رسمی طور پر \uparrow) ہے جو ہم میدان چکر^{۲۷} کا راجحاتا ہے اور دوسرا $|\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ ہے جو مخالف میدان چکر^{۲۸} (\downarrow) کہلاتا ہے۔ انہیں کواس سمتیات لیتے ہوئے 1/2 چکر ذرے کے عمومی حال کو دور کئی قتالاب قطار (یا چکر کار^{۲۹}) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (۴.۱۳۹)$$

جہاں

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۰)$$

ہم میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے اور

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۴۱)$$

مخالف میدان چکر کو ظاہر کرتا ہے۔

^{۲۵} classical electron radius
^{۲۶} quarks
^{۲۷} leptons
^{۲۸} spin up
^{۲۹} spin down
^{۳۰} spinor

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکینکات

ساتھ ہی، عاملین چکر 2×2 متالاب ہوں گے، جنہیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ان کا اثر χ_+ اور χ_- پر دیکھتے ہیں۔ مساوات ۴.۱۳۵ درج ذیل کہتی ہے۔

$$(۴.۱۴۲) \quad S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \quad \text{اور} \quad S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

ہم S^2 کو (اب تک) نامعلوم ارکان کا متالاب

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

لکھ کر مساوات ۴.۱۴۲ کی بائیں مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} \hbar \\ 0 \end{pmatrix}$$

لہذا $c = \frac{3}{4} \hbar^2$ اور $e = 0$ ہوگا۔ مساوات ۴.۱۴۲ کی دائیں مساوات کے تحت

$$\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لہذا $d = 0$ اور $f = \frac{3}{4} \hbar^2$ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۳) \quad S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اسی طرح

$$(۴.۱۴۴) \quad S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۵) \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ساتھ ہی، مساوات ۴.۱۳۶ ذیل کہتی ہے

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0,$$

لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۶) \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اب چونکہ $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ ہے لہذا $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ اور $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ہوں گے اور یوں درج ذیل ہوگا۔

$$(۴.۱۴۷) \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

چونکہ S_x, S_y, S_z تینوں میں $\hbar/2$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے لہذا انہیں زیادہ صاف روپ $S = \frac{\hbar}{2}\sigma$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۸) \quad \sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یہ پالہ قالجے چکر ہیں۔ دھیان رکھیں کہ S_x, S_y, S_z اور S^2 تمام ہر مشی ہیں (جیسا کہ انہیں ہونا بھی چاہیے کیونکہ یہ متبادل مشاہدہ کو ظاہر کرتے ہیں)۔ اس کے برعکس S_+ اور S_- غیر ہر مشی ہیں؛ یہ متبادل مشاہدہ ہیں۔ یقیناً S_z کے امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۴۹) \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر}); \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی مندر})$$

عمومی حال χ (مساوات ۴.۱۳۹) میں ایک ذرہ کی S_z کی پیشانہش، $|a|^2$ احتمال کے ساتھ $\hbar/2$ یا $|b|^2$ احتمال کے ساتھ $-\hbar/2$ دے سکتی ہے۔ چونکہ صرف یہی ممکنات ہیں لہذا درج ذیل ہوگا (یعنی چکر کار لازمًا معمول شدہ ہوگا)۔^{۱۱}

$$(۴.۱۵۰) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

تاہم اس کی بجائے آپ S_x کی پیشانہش کر سکتے ہیں۔ اس کے کیانتانچ اور ان کے انفسراوی احتمالات کیا ہوں گے؟ عمومی شمار پاتی مفہوم کے تحت ہمیں S_x کے امتیازی اقدار اور امتیازی چکر کار جاننے ہوں گے۔ امتیازی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \implies \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

یہ ہرگز حیرت کی بات نہیں کہ S_x کی ممکنہ قیمتیں وہی ہیں جو S_z کی ہیں۔ امتیازی چکر کار کو ہمیشہ کی طرز پر حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

^{۱۱}Pauli spin matrices

ان لوگ عموماً کہتے ہیں کہ ہم میدان ذرہ ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہے۔ ایسا کہنا درست نہیں۔ درحقیقت انہیں کہنا چاہئے ہیں کہ اگر S_z کی پیشانہش کی جائے تب $\frac{\hbar}{2}$ نتیجہ حاصل ہونے کا احتمال $|a|^2$ ہوگا۔ (صفحہ ۱۱۲ پر حاشیہ ۳۹ دیکھیں۔)

لہذا $\beta = \pm \alpha$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S_x کے (معمول شدہ) امتیازی چکر کار درج ذیل ہوں گے۔

$$(۴.۱۵۱) \quad \chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (+\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر}); \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (-\frac{\hbar}{2} \text{ امتیازی قدر})$$

بطور ہر مشق متالاب کے امتیازی سمتیات یہ فضا کا احاطہ کرتے ہیں؛ عمومی چکر کار χ (مسادات ۴.۱۳۹) کو ان کا خطی جوڑ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۴.۱۵۲) \quad \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}$$

اگر آپ S_x کی پیمائش کریں تب $+\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a+b|^2/2$ اور $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال $|a-b|^2/2$ ہوگا۔ (تصدیق کیجیے کہ ان احتمالات کا مجموعہ 1 کے برابر ہے۔)
مثال ۴.۲: فرض کریں $\frac{1}{2}$ چکر کا ایک ذرہ درج ذیل حال میں ہے۔

$$(۴.۱۵۳) \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

بتائیں کہ S_z اور S_x کی پیمائش کرتے ہوئے $+\hbar/2$ اور $-\hbar/2$ حاصل کرنے کے احتمالات کیا ہوں گے۔

حل: یہاں $a = (1+i)\sqrt{6}$ اور $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ہے لہذا S_z کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ حاصل کرنے کا احتمال

$$\left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

ہوگا۔ اسی طرح S_x کیلئے $+\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا احتمال $5/6$ = $\left| (3+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ جبکہ $-\frac{\hbar}{2}$ کے حصول کا

احتمال $1/6$ = $\left| (-1+i)/\sqrt{6} \right|^2 (1/2)$ ہوگا۔ اتفاقی طور پر S_x کی توقعاتی قیمت درج ذیل ہے

$$\frac{5}{6} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

جس کو ہم بلا واسطہ درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}$$

□

میں آپ کو $1/2$ چکر سے متعلق ایک فرضی پیمائش تجربے سے گزارتا ہوں جو ان تصورات کی وضاحت کرتا ہے جن پر باب ۱ میں تبصرہ کیا گیا۔ فرض کریں ہم ایک ذرہ سے آغاز کرتے ہیں جو حال ψ_+ میں پایا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی سوال پوچھے، ”اس ذرے کے زاویائی چکری معیار حرکت کا z جزو کیا ہے؟“، ہم پورے یقین کے ساتھ جواب دے سکتے ہیں کہ اس کا جواب $+\hbar/2$ ہے؛ چونکہ S_z کی پیمائش لازماً یہی قیمت دے گی۔ اب اگر اس کے بجائے، پوچھنے والا سوال کرے، ”اس ذرے کے چکر زاویائی معیار حرکت کا x جزو کیا ہوگا؟“، تب ہم کہنے پر مجبور ہونگے کہ S_x کی پیمائش سے $+\hbar/2$ یا $-\hbar/2$ کے حصول کا احتمال آدھا آدھا ہے۔ اگر سوال پوچھنے والا کلاسیکی ماہر طبیعیات یا (حصہ ۱.۲ کے نقطہ نظر سے) ”حقیقت پسند“ ہو تب وہ اس جواب کو ناکافی بلکہ غیر متعلقہ سمجھے گا: ”کیا آپ کہنا چاہتے ہیں کہ آپ کو اس ذرے کا حقیقی حال معلوم نہیں ہے؟“ ہمیں میں نے ایسا نہیں کہا! مجھے ذرے کا حال ٹھیک ٹھیک معلوم ہے جو ψ_+ ہے۔ ”تب ایسا کیوں ہے کہ آپ مجھے اس کے چکر کا x جزو نہیں بتا سکتے ہیں؟“ اس لیے کہ اس کے چکر کا کوئی مخصوص x جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یقیناً، ایسا ہی ہونا چاہیے، اگر S_x اور S_z کی واضح قیمتیں ہوں تب اصول عدم یقینیت مطمئن نہیں ہوگا۔

یہ سنتے ہی سوال کرنے والا ذرے کے چکر کا x جزو خود پیمائش کرتا ہے؛ فرض کریں وہ $+\hbar/2$ قیمت حاصل کرتا ہے۔ (وہ خوشی سے چلا اٹھا ہے) ”اس ذرے کی S_x قیمت ٹھیک $+\hbar/2$ ہے۔“ جی آپ درست منہ مار رہے ہیں، اب اس کی یہی قیمت ہے؛ جس سے یہ بالکل ثابت نہیں ہوتا کہ تجربے سے قبل اس کی یہی قیمت تھی۔ ظاہر ہے، آپ بال کی کھال اتار رہے ہو۔ اور ہاں، آپ کے عدم یقینیت اصول کا کیا بنا؟ میں اب S_x اور S_z دونوں کو حبا نت ہوں۔ ”جی نہیں آپ انہیں نہیں جانتے ہیں: آپ نے پیمائش کے دوران ذرے کا حال تبدیل کر دیا ہے۔ اب وہ $\chi_+^{(x)}$ میں ہے اور آپ اس کے S_x کی قیمت جانتے ہیں جبکہ S_z کی قیمت نہیں جانتے ہیں۔“ لیکن S_x کی پیمائش کے دوران میں نے پوری کوشش کی کہ ذرے کا سکون خراب نہ ہو۔ ”اچھا اگر آپ میری بات پر یقین نہیں کرتے ہیں تو خود تصدیق کیجیے۔ آپ S_z کی پیمائش کریں اور دیکھیں نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے۔ (عین ممکن ہے کہ $\hbar/2$ حاصل ہو؛ جو میرے لیے شرمندگی کا باعث ہوگا؛ تاہم اس پورے عمل کو بار بار سرانجام دینے سے نصف مرتبہ $-\hbar/2$ حاصل ہوگا۔)

یہ کام آدمی کے لیے

ایک عام آدمی، ایک فلسفی یا ایک کلاسیکی ماہر تبیات کا یہ کہنا کہ کس ذرے کا ٹھیک ٹھیک مکان یا معیار حرکت یا چکری زاویائی معیار حرکت کا x جزو یا وغیرہ نہیں پایا جاتا، ایک گول مول جواب ہے۔ جو آپ کی نااہلی کے سوا کچھ نثر نہیں آتا۔ حقیقت میں ایسا کچھ بھی نہیں ہے لیکن اس کے اصل معنی کسی ایسے شخص کو سمجھنا جس نے کوئی کمینیا نیات کا گہرا مطالعہ نہ کیا ہو تفسرین ناممکن ہے۔ اگر آپ کی عقل دنگ رہ گئی ہے اور اگر آپ کی

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

عقل دنگ نہیں دہی تو اس کا مطلب ہوگا کہ آپ کو کوئی بات سمجھ ہی نہیں آئی یو 1/2 چکر نظام پر دوبارہ غور کی جائے گا۔ یہ کوانٹم میکانیات کی پیچیدہ تفصیلات سمجھنے کی سادہ ترین مثال ہے۔

سوال 26.4 (الف) تصدیق کی جائے گا کہ چکری کالپ مساوات 145.4 اور 147.4 زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقبلیت رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

(ب) دیکھائیں کہ پولی چکری کالپ مثال 148.4 درج ذیل زردی متاندہ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (۴.۱۵۴)$$

جہاں اشاریہ x, y, z اور z کو ظاہر کرتے ہیں۔ جبکہ ϵ_{jkl} Levi-Civita علامت ہے۔ جو 1, 2, 3 یا 1, 2, 3 یا 3, 1, 2 کی صورت میں +1 جبکہ 1, 3, 2 یا 3, 2, 1 یا 2, 1, 3 کی صورت میں -1 جبکہ باسورت دیگر 0 ہوگا۔

سوال 27.4 ایک الیکٹرون درج ذیل حبکری حال میں ہے۔ $\psi = A \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix}$ (الف) مامولزنی مستقل A تائین کریں۔

(ب) S_x, S_y, S_z کی تقواتی قیمتیں تلاش کریں۔ (ج) عدم یقینیت $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}$ اور σ_{S_z} تلاش کریں۔ دیکھان رہے کہ یہاں σ سے مراد معیار انہراف ہے۔ پولی کالپ (د) تصدیق کی جائے گا کہ آپ کے نتائج تینوں اصول عدمی کی نیت کے عین متباہ ہیں۔ مساوات 100.4 اور اس کے دوہری ترتیبی استعمال جہاں زاہر ہے۔ ا کی جگہ s ہوگا۔

سوال 28.4 سب سے زیادہ عمومی معمول spinor χ مساوات 139.4 کے لیے S_x^2, S_y^2, S_z^2 اور S_x, S_y, S_z تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$ ہوگا۔

سوال 29.4 (الف) امتیازی spinor S_y کے امتیازی عدداد تلاش لریں۔ (ب) عمومی حال χ مساوات 139.4 میں پائے جانے والا ایک ذرے کے S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا۔ تصدیق کی جائے گا کہ تمام احتمال کا مجموعہ 1 ہوگا۔ دیکھان رہے کہ a اور b غیر حقیقی بھی ہو سکتے ہیں۔ (ج) S_y کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ان کے احتمالات کیا ہوں گے۔

سوال 30.4 کسی اختیاری رکھ r کے ہم رہ چکری زاویائی معیار حرکت کے اجزاء کا کالپ S_r تیار کریں۔ کروی محدود استعمال کریں جہاں درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (۴.۱۵۵)$$

S_r کی امتیازی عدداد اور معمول spinor تلاش کریں۔

$$\chi_+^{(r)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad \chi_-^{(r)} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{bmatrix}; \quad (۴.۱۵۶)$$

چونکہ آپ اپنی مرضی کے دوہری حبز ضرب $e^{i\phi}$ سے ضرب دے سکتے ہو۔ لہذا آپ کا جواب کچھ مختلف ہو سکتا ہے۔

سوال 31.4 ایک ذرا جس کا چکر ایک ہے کے لیے چکری کالپ S_x, S_y اور S_z تیار کریں۔ اشعارہ S_z کے کتنے امتیازی حالات ہونگے ہر ایسے حال پر S_+, S_z, S_- کا عمل تائین کریں۔ نصب میں $1/2$ چکر کے لیے استعمال کی گئی ترقیب استعمال کریں

۴.۴.۱ مقناطیسی میدان میں ایک الیکٹران

ایک چکر کاٹنے ہوئے بار بار ذرا پر مقناطیسی جفت کتبہ مشتمل ہوگا۔ اس کا مقناطیسی جفت کتبہ معیار اثر μ ، ذرے کی چکری زاویائی معیار حرکت S کو راست متناسب ہوگا۔

$$\mu = \gamma S \quad (۴.۱۵۷)$$

جہاں تناسبی مستقل γ مقناطیسی نسبت کہلاتا ہے۔ مقناطیسی میدان B میں رکھے گئے مقناطیسی جفت کتبہ پر قوت $\mu \times B$ سروڈ μ عمل کرتا ہے۔ جو کمپن کی سوئے کی طرح اس کو میدان کے متوازن لانے کی کوس کرتا ہے۔ اس قوت سروڈ کے ساتھ وابستہ توانائی درج ذیل ہوگی۔

$$H = -\mu \cdot B \quad (۴.۱۵۸)$$

لہذا مقناطیسی میدان B میں ایک نقطہ پر رہتے ہوئے ایک باردار چکر کھاتے ہوئے ذرے کا ہیملٹونین درج ذیل ہوگا۔

$$H = -\gamma B \cdot S \quad (۴.۱۵۹)$$

مثال ۴.۳: تقدیم لار سرفرض کریں z رخ نیکاس مقناطیسی میدان

$$B = B_0 \hat{k} \quad (۴.۱۶۰)$$

میں $1/2$ چکر کا ساکن ذرہ پایا جاتا ہے متابلی روپ میں ہیملٹونین مساوات 158.4 درج ذیل ہوگا

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۱)$$

ہیملٹونین H کے امتیازی حالات وہی ہوں گے جو S_z کے تھے

$$\begin{cases} \chi_+, & E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases} \quad (۴.۱۶۲)$$

کلاسیکی صورت کی طرح یہاں بھی کم سے کم توانائی اس صورت ہوگی جب جفت کتبہ کا معیار اثر مقناطیسی میدان کا متوازی ہو چونکہ ہیملٹونین غیر تاج وقت ہے لہذا تاج وقت شرودنگر مساوات

$$i\hbar \frac{\partial X}{\partial t} = HX \quad (۴.۱۶۳)$$

کے عمومی حل کو کن حالات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$\chi(t) = a\chi + e^{-iE_+t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_-t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

مستقلات a اور b کو ابتدائی معلومات

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے یقیناً $1 = |a|^2 + |b|^2$ ہوگا ہم ان مستقلات کو $\cos(\alpha/2)$ اور $a = b = \sin(\alpha/2)$ لکھ سکتے ہیں جہاں α ایک مقررہ زاویہ ہوگا جس کی اہمیت جلد رونما ہوگی یوں درج ذیل ہوگا

$$\chi^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (۴.۱۶۴)$$

آئیں S کی توقعاتی قیمت بطور تفعل وقت حاصل کریں

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} & \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &\times \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \end{aligned} \quad (۴.۱۶۵)$$

اسی طرح

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger S_y \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \quad (۴.۱۶۶)$$

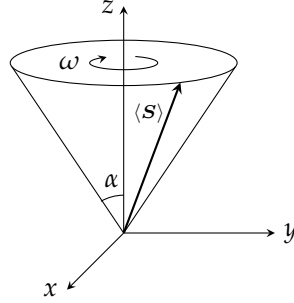
اور درج ذیل ہوگا۔

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger S_z \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (۴.۱۶۷)$$

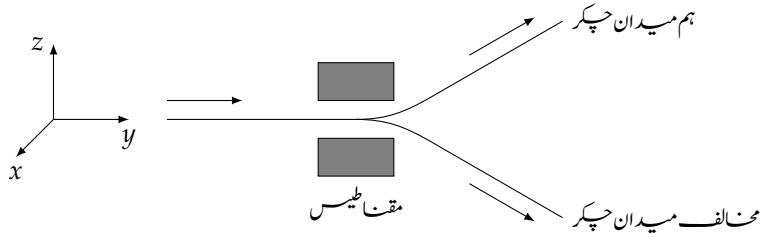
کلاسیکی صورت کی طرح شکل ۴.۸ محور z کے ساتھ s ایک مستقل زاویہ α پر رہتے ہوئے محور کے گرد لار مسرتعدد

$$\omega = \gamma B_0 \quad (۴.۱۶۸)$$

سے تقدیم کرتا ہے یہ حیرت کی بات نہیں ہے مسئلہ اہر نفٹ کی وہ صورت جس سے سوال 20.4 میں اخذ کیا گیا اس کی ضمانت دیتا ہے کہ کلاسیکی قوانین کے تحت $\langle S \rangle$ ارتقاء پائے گا بھر حال اس عمل کو ایک مخصوص سیاح کو سابق میں دیکھنا اچھا لگامثال □



شکل ۴.۸: یکاں مقناطیسی میدان میں $\langle S \rangle$ کی استقبالی حرکت۔



شکل ۴.۹: سٹرن وگرلاخ آلہ۔

مثال ۴.۴: تجربہ سٹرن وگرلاخ ایک غیر یکاں مقناطیسی میدان میں ایک مقناطیسی جفت کتب پر نہ صرف قوت سرور بلکہ ایک قوت بھی پایا جاتا ہے

$$F = \nabla(\mu \cdot B) \quad (۴.۱۶۹)$$

اس قوت کو استعمال کرتے ہوئے ایک مخصوص سمت بند چکر کے ذرہ کو درج ذیل طریقے سے علیحدہ کیا جاسکتا ہے مندرجہ ذیل ایک نسبتاً بھاری تعدیلی جوہروں کی شعاع y رخ حرکت کرتے ہوئے ایک غیر یکاں مقناطیسی میدان کے خط سے گزرتی ہے (شکل ۴.۹) یعنی

$$B(x, y, z) = -\alpha x \hat{i} + (B_0 + \alpha z) \hat{k} \quad (۴.۱۷۰)$$

جہاں B_0 ایک طاقتور یکاں میدان ہے جبکہ مستقل α میدان کی یکسانیت سے معمولی انحراف کو ظاہر کرتا ہے حقیقت میں ہمیں صرف z جزوے عرض ہے لیکن بد قسمتی سے ایسا ممکن نہیں ہے چونکہ ہر قناطیسی متانوں $\nabla \cdot B = 0$ کے تحت آپ چاہیں یا نہ چاہیں x جزو بھی پایا جائے گا ان جوہروں پر قوت درج ذیل ہوگا

$$F = \gamma \alpha (-S_x \hat{i} + S_z \hat{k})$$

کہ تاہم B_0 کے گرد تقدیم الار مسر کی بنا S_x تیزی سے ارتعاش کرتا ہے جس کے بنا اس کی اوسط قیمت صفر ہوگی لہذا z رخ کل قوت درج ذیل ہوگا

$$F_z = \gamma \alpha S_z \quad (۴.۱۷۱)$$

اور شعاع کے چکری زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی تناسب سے شعاع اوپر یا نیچے کی طرف جھکے گی کلاسیکی طور پر چونکہ S_z کوانٹا شدہ نہیں ہوگا ہم توقع کرتے کہ z محور پر شعاع کی اپائی پائی جاتی جبکہ حقیقت شعاع $2s + 1$ علیحدہ علیحدہ شعاعوں میں تقسیم ہو کر زاویائی معیار حرکت کے کوانٹا زنی کا خوبصورت مظاہرہ کرتی ہے مثال کے طور پر چاندی کہ جو ہر استعمال کرتے ہوئے چونکہ اس کے اندر جانب تمام الیکٹران چوڑیوں کی صورت میں یو پائے جاتے ہیں کہ ان کے چکر اور مداری زاویائی معیار حرکت منسوخ ہو جاتے ہیں یوں صرف بیرونی اکیلے الیکٹران کا چکر $s = 1/2$ ہی جو ہر کا چکر ہوگا لہذا شعاع دو ٹکڑوں میں تقسیم ہوگی اب بالکل آخری قدم تک یہ دلیل حالہ کا کلاسیکی محتاج ہے کہ کوانٹم میکانیات میں قوت کی کوئی جگہ نہیں پائی جاتی ہے لہذا اسی مسئلے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا زیادہ بہتر ہوگا ہم اس عمل کو اس حوالہ چوکھٹ کے حوالہ سے دیکھتے ہیں جو شعاع کے ساتھ ساتھ چلتا ہوں اس چوکھٹ میں ہیملٹنی صفر سے ابتدا کرتے ہوئے وقت T جس دوران ذرا مقناطیسی میدان سے گزرتا ہے کے لیے بیدار ہو کر واپس گہری نیند سو جاتا ہے

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_z & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (۴.۱۷۲)$$

چیسے ہم بتا چکے ہیں اس مسئلہ میں B کے x جزو کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا اس میں اس تکلیف دہ جزو کو نظر انداز کرتا ہوں فرض کریں جو ہر کا چکر $1/2$ ہے اور یہ درج ذیل حال سے ابتدا کرتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \quad t \leq 0$$

ہیملٹنی کی بیداری کے وقت $\chi(t)$ ہمیشہ کی طرح ارتقاء پاتا ہے

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} \quad 0 \leq 0t \leq T$$

جہاں مساوات 161.4 کے تحت

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2} \quad (۴.۱۷۳)$$

ہوگا لہذا $t \geq T$ کے لیے یہ درج ذیل حال اختیار کرے گا

$$\chi(t) = \left(a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha \gamma T/2)z} + \left(b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha \gamma T/2)z} \quad (۴.۱۷۴)$$

ان دونوں اجزاء کا آپ z رخ میں معیار حرکت پایا جاتا ہے مساوات 32.3 دیکھیں ہاں میدان جزو کا معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$p_z = \frac{\alpha \gamma T \hbar}{2} \quad (۴.۱۷۵)$$

اور یہ مثبت z رخ جانب حرکت کرے گا مخالف میدان جزو کا معیار حرکت غلط ہے اور یہ منفی z رخ کی جانب حرکت کرے گا یوں پہلے کی طرح شعاع دو حصوں میں تقسیم ہوگی چونکہ یہاں $S_z = \hbar/2$ اور $p_z = F_z T$ ہے لہذا مساوات 174.4 پہلی حاصل کرتا نتیجہ مساوات 170.4 کے مطابق ہے کو انٹیم میکانیات کی فلاسفی میں شٹرن و گرانز تجربہ میں کلیدی کردار ادا کیا ہے اس کے ذریعے کو انٹیم حالات تیار کیے جاتے ہیں اور یہ ایک مخصوص قسم کی کو انٹیم پیمائشوں پر روشنی ڈالنے کا ایک بہترین نمونہ ہے ہم بیٹھے بیٹھے یہ فرض کر لیتے ہیں کہ نظام کا ابتدائی حال ہم جانتے ہیں جس سے مساوات شرودنگر کے ذریعے مستقبل کا حال جانا جاسکتا ہے یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ایک نظام کو کسی مخصوص حال میں ابتدائی طور پر لاتے ہیں آپ کسی مخصوص چکر کے جوہروں کی شعاع تیار کرنے کی خاطر غیر ترتیب شدہ اشعاع کو شٹرن و گرانز مقناطیس سے گزار کر اخراجی شعاعوں میں سے وہ شعاع منتخب کرتے ہیں جو آپ کے مطلب کی ہوا سی طرح اگر آپ جوہر کے چکر کا z جزو جانب چاہیں تب آپ انہیں شٹرن و گرانز عملی سے گزار کر دیکھتے ہیں کہ یہ بطور ہم میدان یا مخالف میدان شعاع خارج ہوتے ہیں میں یہ دعویٰ نہیں کرتا کہ اس مقصد کے حصول کا یہ عمل سب سے بہتر طریقہ ہے لیکن اتنا ضرور کہنا چاہوں گا کہ حالات کی تیاری اور پیمائش کے بارے میں سوچنے کا یہ ایک سادہ مثال ہے □

سوال ۴.۲۶: مثال 3.4 میں

۱. وقت t پر چکری زاویائی معیار حرکت کے x رخ جزو کی پیمائشی نتیجہ $\hbar/2$ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا

ب. y رخ کے لیے اسی سوال کا جواب کیا ہوگا

ج. z رخ کی سوال کا جواب کیا ہوگا

سوال ۴.۲۷: ایک ارتعاشی مقناطیس میدان

$$B = B_0 \cos(\omega t) \hat{k}$$

جہاں B_0 اور ω مستقل ہیں میں ایک الیکٹرون ساکن پایا جاتا ہے

۱. اس نظام کا ہیملٹنی و تالاب تیار کریں

ب. محور x کے لحاظ سے وقت $t = 0$ پر الیکٹرون ابتدائی طور پر ہمارے میدان حال یعنی $\chi(0) = \chi_+^x$ سے ابتدا کرتا ہے مستقبل کی وقتوں کے لیے $\chi(t)$ تعین کریں دیہاں رہے کہ یہ ہیملٹنی تابع وقت ہے لہذا آپ ساکن حالات سے $\chi(t)$ حاصل نہیں کر سکتے ہیں خوش قسمتی سے آپ تابع وقت شرودنگر مساوات مساوات 162.4 کو بلا واسطہ حل کر سکتے ہیں

ج. S_x کی پیمائش میں $\hbar/2$ نتیجہ حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا جواب

$$\sin^2 \left(\frac{\gamma B_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

و. S_x کو مکمل الٹ کرنے کے لیے کم سے کم میدان B_0 کتنا

۴.۴.۲ زاویائی معیار حرکت کا مجموعہ

فرض کریں ہمارے پاس $1/2$ اسپن کے دو ذرات مثلاً ہائیڈروجن کے زمینی حالت میں ایک الیکٹران اور ایک پروٹان ہیں ان میں سے ہر ایک ہم میدان یا محنت الف میدان ہو سکتا ہے لہذا کل چار ممکنات ہوں گی

$$(۴.۱۷۶) \quad \uparrow\uparrow, \quad \uparrow\downarrow, \quad \downarrow\uparrow, \quad \downarrow\downarrow$$

جہاں پہلے تیسرے نشان یعنی پایاں تیسرے الیکٹران کو جبکہ دوسرے یعنی دایاں تیسرے پروٹان کو ظاہر کرتا ہے سوال: اس جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کیا ہوگا ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں

$$(۴.۱۷۷) \quad S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$$

ان چار مرکب حالات میں سے ہر ایک S_z کا امتیازی حال ہوگا ان کے z اجزاء سادہ جمع دیتے ہیں

$$\begin{aligned} S_z \chi_1 \chi_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \chi_1 \chi_2 = (S_z^{(1)} \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (S_z^{(2)} \chi_2) \\ &= (\hbar m_1 \chi_1) \chi_2 + \chi_1 (\hbar m_2 \chi_2) = \hbar (m_1 + m_2) \chi_1 \chi_2 \end{aligned}$$

یاد رہے کہ $S^{(1)}$ صرف χ_1 پر عمل کرتا ہے اور $S^{(2)}$ صرف χ_2 پر عمل کرتا ہے یہ علاقیت زیادہ خوبصورت نہیں ہے لیکن اپنا کام کر پاتی ہے یوں مرکب نظام کا کوانٹائی عدد m یہاں $m_1 + m_2$ ہوگا

$$\uparrow\uparrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\uparrow\downarrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\uparrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\downarrow\downarrow: \quad m = m_{s1} + m_{s2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

پہلی نظر میں یہ ٹھیک معلوم نہیں ہوتا ہے m کو چاہیے کہ $-s$ سے $+s$ تک عدد صحیح قدرتوں کے لحاظ سے بڑھے یوں اس نظر آتا ہے کہ $s = 1$ ہوگا جبکہ یہاں پر ایک اضافی حال جس کا $m = 0$ ہے بھی پایا جاتا ہے اس الجھن سے نکلنے کی خاطر ہم مساوات 146.4 استعمال کرتے ہوئے $\uparrow\uparrow$ حال پر عامل تقلیل $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ استعمال کرتے ہیں

$$\begin{aligned} S_-(\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar (\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $s = 1$ کے تین حالات $|sm\rangle$ علامتی روپ میں درج ذیل ہونگے

$$(۴.۱۷۸) \quad \left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad s = 1 \text{ (تہ ۱)}$$

تصدیق کی خاطر $|10\rangle$ پر عامل تقلیل کا اطلاق کر کے دیکھیں آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے سوال 34.4 (الف) دیکھیں اسی وجہ کی بنا اسے تین کی جوڑی کہتے ہیں ساتھ ہی وہ عمودی حال جس کا $m = 0$ ہو کہ $s = 0$ ہوگا

$$(۴.۱۷۹) \quad \{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\} \quad s = 0 \text{ (تہ ۰)}$$

اس حال پر عامل رفعت یا عامل تقلیل کی طلاق سے مندر حاصل ہوگا سوال 34.4 (ب) دیکھیں یوں میں دعویٰ کرتا ہوں کہ $1/2$ چکر کے دو ذرات کا کل چکر ایک یا منفر ہوگا جو اس پر منحصر ہوگا کہ آیا وہ تین جوڑی یا واحدانی تقسیم اختیار کرتے ہیں اس کی تصدیق کرنے کی خاطر مجھے ثابت کرنا ہوگا کہ تین جڑواں حالات S^2 کے امتیازی سمتیات ہونگے جن کے امتیازی افتدار $2\hbar^2$ ہوگا جبکہ واحدانی S^2 کا وہ امتیازی سمتیہ ہوگا جس کا امتیازی افتدار منفر ہو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۴.۱۸۰) \quad S^2 = (S^{(1)} + S^{(2)}) \cdot (S^{(1)} + S^{(2)}) = (S^{(1)})^2 + (S^{(2)})^2 + 2S^{(1)} \cdot S^{(2)}$$

ساوات 145.4 اور 147.4 سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} S^{(1)} \cdot S^{(2)}(\uparrow\downarrow) &= (S_x^{(1)} \uparrow)(S_x^{(2)} \downarrow) + (S_y^{(1)} \uparrow)(S_y^{(2)} \downarrow) + (S_z^{(1)} \uparrow)(S_z^{(2)} \downarrow) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{i\hbar}{2} \downarrow\right) \left(\frac{-i\hbar}{2} \uparrow\right) + \left(\frac{\hbar}{2} \uparrow\right) \left(\frac{-\hbar}{2} \downarrow\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہوگا

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)}(\downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}(2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

اس طرح

$$(۴.۱۸۱) \quad S^{(1)} \cdot S^{(2)}|10\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}(2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow + 2 \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{\hbar^2}{4}|10\rangle$$

اور

$$(۴.۱۸۲) \quad S^{(1)} \cdot S^{(2)}|00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}(2 \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - 2 \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = -\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ہونگے مساوات 179.4 پر دوبارہ غور کرتے ہوئے اور مساوات 142.4 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں

$$S^2|10\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\frac{\hbar^2}{4}\right)|10\rangle = 2\hbar^2|10\rangle \quad (۴.۱۸۳)$$

لہذا $|10\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر $2\hbar^2$ ہوگا اور

$$S^2|00\rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} - 2\frac{3\hbar^2}{4}\right)|00\rangle = 0 \quad (۴.۱۸۴)$$

لہذا $|00\rangle$ یقیناً S^2 کا امتیازی حال ہوگا جس کا امتیازی قدر 0 ہوگا میں آپ کے لئے سوال 34.4 (c) چھوڑتا ہوں جہاں آپ نے تصدیق کرنا ہوگا کہ $|11\rangle$ اور $|1-1\rangle$ مختص امتیازی اقدار کی S^2 کے امتیازی تفصیلات ہیں ہم نے $1/2$ چکر اور $1/2$ چکر کو ملا کر ایک چکر اور صفر چکر حاصل کیا جو کسی بڑے مسئلے کی سادہ ترین مثال ہے اگر آپ s_1 چکر اور s_2 چکر کو ملائیں تب کل چکر s کتنا حاصل ہوگا اس کا جواب یہ ہے کہ عدد صحیح قدم لیتے ہوئے $(s_1 + s_2)$ سے $s_2 > s_1$ کی صورت میں $(s_2 - s_1)$ تک اور $s_2 < s_1$ کی صورت میں $(s_1 - s_2)$ تک نیچے آتے ہوئے ہر چکر

$$s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), (s_1 + s_2 - 2), \dots, |s_1 - s_2| \quad (۴.۱۸۵)$$

حاصل ہوگا۔ اندازاً بات کرتے ہوئے سب سے زیادہ کل چکر اس صورت حاصل ہوگا جب انفرادی چکر ایک دوسرے کے متوازی ایک رخ صنف بند ہوں اور کم سے کم اس صورت ہوگا جب یہ ایک دوسرے کے مخالف رخ صنف بند ہوں مثال کے طور پر اگر آپ $3/2$ چکر کے ایک ذرہ کے ساتھ دو چکر کے ایک ذرہ کو ملائیں تب آپ کو $5/2$ اور $1/2$ کل چکر حاصل ہونگے جو تنظیم پر منحصر ہونگے دوسری مثال پیش کرتے ہیں حال ψ_{nlm} کے ایک ہائیڈروجن جوہر کے الیکٹران کا کل زاویائی معیار حرکت چکر جمع دائری $l + 1/2$ یا $l - 1/2$ ہوگا اب اگر آپ پروٹان کے چکر کو بھی شامل کریں تب جوہر کا کل زاویائی معیار حرکت کوانٹم عدد $l + 1$ یا $l - 1$ ہوگا جہاں l کو دو منفرد طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ آیا کہ الیکٹران از خود $l + 1/2$ تنظیم یا $l - 1/2$ تنظیم رکھتا ہے

چونکہ z اجزاء آپس میں جمع ہوتے ہیں لہذا صرف وہ مرکبی حالات جن کے لئے $m_1 + m_2 = m$ حصہ ڈال سکتے ہیں لہذا املائی حال $|sm\rangle$ جس کا کل چکر s اور z جزو m ہوگا مرکبی حالات $|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$ کا خطی مجموعہ:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \quad (۴.۱۸۶)$$

ہوگا۔ مساوات 177.4 اور 178.4 اس عمومی روپ کے دو مخصوص صورت ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ ہیں جہاں $s_1 = s_2 = 1/2$ میں نے یہاں غیر رسمی علامتیت $\uparrow = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ اور $\downarrow = |\frac{1}{2} (-\frac{1}{2})\rangle$ استعمال کیا ہے متقلات $C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s}$ کو کلیش و گوردن عددی سرکہتہ ہیں جدول 8.4 میں چند سادہ صورتیں پیش کی گئی ہیں مثال کے طور پر دو ذرے ایک جدول کے سایہ دار قطار میں درج ذیل پیش کیا گیا ہے

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle$$

بالخصوص اگر ایک ڈبہ میں دو چکر اور ایک چکر کے ساکن ذرات بائیں جاتے ہوں جن کا کل چکر 3 اور z جزو صفر ہو تب $S_z^{(1)}$ کی پیمائش $1/5$ احتمال کے ساتھ \hbar یا $3/5$ احتمال کے ساتھ صفر یا $1/5$ احتمال کے ساتھ $-\hbar$ قیمت دے سکتی ہے اب دیکھ سکتے ہیں کہ احتمالات کا مجموعہ ایک ہوگا کلیش و گوردن جدول کہ کسی بھی قطار کے سر بعون کا مجموعہ ایک ہوگا ان جدولوں کو الٹ طریقے سے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \sum_s C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |sm\rangle \quad (۴.۱۸۷)$$

مثال کے طور پر $1 \times 3/2$ جدول میں سایہ دار صف درج ذیل کہتی ہے

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle |10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}} |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

اگر آپ ایک ڈبے میں $3/2$ چکر اور ایک چکر کے دو ذرات رکھے اور آپ جانتے ہو کہ پہلے کے لیے $m_1 = 1/2$ اور دوسرے کے لیے $m_2 = 0$ ہے تاکہ m لازم $1/2$ ہو اور آپ کل چکر s کی پیمائش کریں تب آپ $3/5$ احتمال کے ساتھ $5/2$ یا $1/15$ احتمال کے ساتھ $3/2$ یا $1/3$ احتمال کے ساتھ $1/2$ حاصل کر سکتے ہیں اب بھی احتمالات کا مجموعہ ایک ہوگا کلیش و گوردن جدول میں ہر صف کے سر بعون کا مجموعہ ایک ہوگا یہاں آپ کا کوئی تصور نہیں ہوگا اگر آپ کو یہ سب کچھ صوفیانہ اعداد و شمار نظر آنے لگا ہوں ہم اس کتاب میں کلیش و گوردن عددی سر کو زیادہ استعمال نہیں کریں گے میں صرف چاہتا تھا کہ آپ ان سے واقف ہوں ریاضیات کے نقطہ نظر سے یہ سب کچھ اعلیٰ گروہی نظریہ کا حصہ ہے سوال ۴.۲۸:

ا. مساوات 177.4 میں دیے گئے $|10\rangle$ پر S_- کا اطلاق کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ $|1 - 1\rangle$ حاصل کرتے ہیں

ب. مساوات 178.4 میں $|00\rangle$ پر S_{\pm} کا اطلاق کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ آپ صفر حاصل کرتے ہیں

ج. دکھائی کہ مساوات 177.4 میں دیے گئے $|11\rangle$ اور $|1 - 1\rangle$ S^2 کہ موضوع امتیازی افتد ار والے امتیازی تقاضات ہیں

سوال ۴.۲۹: کوارک کا چکر $1/2$ ہے تین کوارک کے ایک دونوں کے ساتھ مل کر ایک بیرون پیدا کرتے ہیں مثلاً پروٹان یا نیوٹران دو کوارک کے بلکہ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ ایک کوارک اور ایک ضد کوارک آپس میں جوڑ کر ایک میزون پیدا کرتے ہیں مثلاً پیاپان یا کاپون فرض کریں کہ یہ کوارک کے زمینی حال میں ہیں لہذا ان کا مداری زاویائی معیار حرکت صفر ہوگا

ا. بیرون کے کیا ممکن چکر ہونگے

ب. میزان کے کیا ممکن چکر ہونگے

سوال ۴.۳۰:

ا. ایک ذرا جس کا چکر ایک اور دوسرا ذرا جس کا چکر دو ہیں ساکن حال میں اس تقسیم سے پائے جاتے ہیں کہ ان کا کل چکر 3 اور z جزو \hbar ہے اس دو چکر ذرے کے زاویائی معیار حرکت کے z جزو کی پیمائش سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ہر قیمت کا احتمال کیا ہوگا

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

ب. ہائیڈروجن جوہر کے ψ_{510} میں ایک الیکٹران مخالف میدان پایا جاتا ہے اگر آپ پروٹان کے چکر کو شامل کئے بغیر صرف الیکٹران کے کل زاویائی معیار حرکت کی مربع کی پیش کش کر سکیں تب کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور ان کی انفرادی احتمال کیا ہوگا

سوال ۴.۳۱: S^2 اور $S_z^{(1)}$ کا مقلوب تعین کریں جہاں $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$ ہوگا اپنے نتیجہ کو عمومیت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$[S^2, S^{(1)}] = 2i\hbar(S^{(1)} \times S^{(2)}) \quad (۴.۱۸۸)$$

میں یہاں بتانا چاہوں گا کہ چونکہ $S_z^{(1)}$ اور S^2 ایک دوسرے غیر مقلوب ہیں لہذا ہم ایسے حالات حاصل کرنے سے متاثر ہونگے جو دونوں کے بیک وقت امتیازی سمتیات ہو ہمیں S^2 کے امتیازی حالات تیار کرنے کی خاطر $S_z^{(1)}$ امتیازی حالات کے خطی مجموعے درکار ہونگے مساوات 185.4 میں کلیش و گورڈن عددی سر ہمارے لیے یہی کچھ کرتے ہیں ساتھ ہی مساوات 187.4 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S^2 کے ساتھ مجموعہ $S^{(1)} + S^{(2)}$ مقلوب ہوگا جو ہماری معلومات مساوات 103.4 کی ایک مخصوص صورت ہے

سوال ۴.۳۲: تین آبادی ہارمونی سرعش پر غور کریں جس کا مخفی قوہ درج ذیل ہیں

$$Vr = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (۴.۱۸۹)$$

۱. کارتیسی محدود میں علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے اس کو تین یک بودی سرعش میں تبدیل کریں
موجہ الزکر کے بارے میں اپنی معلومات استعمال کرتے ہوئے احبازی توانائیاں تعین کریں جواب

$$E_n = (n + 3/2)\hbar\omega \quad (۴.۱۹۰)$$

ب. E_n کی انحطاطیت $d(n)$ تعین کریں

سوال ۴.۳۳: چونکہ مساوات 188.4 میں دیا گیا تین آبادی ہارمونی سرعش مخفی قوہ کردی تشکلی ہے لہذا اس کی مساوات شروڈنگر کو کارتیسی محدود کے ساتھ ساتھ کردی محدود میں بھی علیحدگی متغیرات سے حل کیا جاسکتا ہے طامتی تسلسل کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے رداسی مساوات حل کریں عددی سروں کا کلیہ توانی حاصل کرتے ہوئے احبازی توانائیاں تعین کریں اپنے جواب کی تصدیق مساوات 189.4 کے ساتھ کریں
سوال ۴.۳۴:

۱. ساکن حالات کے لئے درج ذیل تین آبادی مسئلہ وریل ثابت کریں

$$2\langle T \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle \quad (۴.۱۹۱)$$

اشارہ: سوال 31.3 دیکھیے گا

ب۔ مسئلہ دریل کو ہائیڈروجن کے لیے استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T \rangle = -E_n; \quad \langle V \rangle = 2E_n \quad (۴.۱۹۲)$$

ج۔ مسئلہ دریل کو سوال 38.4 کے تین آبادی ہارمونی سرعش پر لاگو کر کے درج ذیل دکھائیں

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = E_n/2 \quad (۴.۱۹۳)$$

سوال ۴.۳۵: اس سوال کو صرف اس صورت میں حل کرنے کی کوشش کریں اگر آپ سمتی علم الاحصاء سے واقف ہے سوال 14.1 کی عمومیت سے تین آبادی رواحتال کی تعریف پیش کریں

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (۴.۱۹۴)$$

ا۔ دکھائے کہ \mathbf{J} استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \quad (۴.۱۹۵)$$

کو مطمئن کرتا ہے جو مکائی بقا احتمال کو بیان کرتی ہے یوں مسئلہ پھلاؤ کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V |\Psi|^2 d^3r \quad (۴.۱۹۶)$$

جہاں V ایک مقررہ حجم اور S اس کی سرحدی سطح ہے الفاظ میں کسی سطح سے احتمال کا احراج اس بند حجم میں ذرہ پائے جانے کے احتمال میں کمی کے برابر ہوگا

ب۔ حال $m = 1$ $l = 1$ $n = 2$ میں پائے جانے والے ہائیڈروجن کے لیے یہ تلاش کرے جواب

$$\frac{\hbar}{64\pi m a^5} r e^{-r/a} \sin \theta \phi$$

ج۔ اگر ہم کمیت کے پہنچے کو m_J سے ظاہر کریں تب زاویائی معیار حرکت درج ذیل ہوگا

$$\mathbf{L} = m \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3r$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے حال ψ_{211} کے لیے L_z کا حساب لگائے اور نتیجہ پر تبصرہ کریں

سوال ۴.۳۶: غنیر تابع وقت معیار حرکت و فضا تفاعل موج کو تین آباد میں مساوات 54.3 کی قدرتی عمومیت پیش کرتی ہے

$$\phi(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3r \quad (۴.۱۹۷)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

۱. زمینی حال میں ہائیڈروجن مساوات 80.4 کے لیے معیار حرکت و فضا تفاعل موج تلاش کریں
اشارہ: بروی محدود استعمال کرتے ہوئے قطبی محور کو p کے رخ رکھیں اور θ کا مکمل پہلے حاصل کریں جواب

$$\phi(p) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{[1 + (ap/\hbar)^2]^2} \quad (۴.۱۹۸)$$

ب. تصدیق کیجئے گا کہ $\phi(p)$ معمول شدہ ہے

ج. زمینی حال میں ہائیڈروجن جوہر کے لیے $\psi(p)$ استعمال کرتے ہوئے $\langle p^2 \rangle$ کا حساب لگائیں

د. اس حال میں حرکی توانائی کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی اپنی جواب کو E_1 کی مضرب کی صورت میں لکھ کر
تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ وریل مساوات 191.4 کے بلا تعلق ہیں

سوال ۴.۳:

۱. حال $n = 3$ اور $l = 2$ اور $m = 1$ میں ہائیڈروجن کے لیے فضائی تفاعل موج ψ تیار کریں اپنی جواب کو
صرف اور صرف r θ ϕ اور a رداس جوہر کی تفاعل میں لکھے کسی دوسرے متغیر z وغیرہ
یا تفاعل Y v وغیرہ یا مستقلات A c_0 وغیرہ یا تفرقات استعمال کرنے کی اجازت ہے ہاں π
 e اور 2 وغیرہ استعمال کر سکتے ہیں

ب. r θ اور ϕ کے لحاظ سے موضوع نکلات حل کر کے تصدیق کریں کہ تفاعل موج معمول شدہ ہے

ج. اس حال میں r^s کی توقعاتی قیمت تلاش کریں s کی کس ساتھ مثبت اور منفی کے لیے جواب مستثنیٰ ہوگا

سوال ۴.۳۸:

۱. حال $n = 4$ اور $l = 3$ اور $m = 3$ کے لیے ہائیڈروجن کا تفاعل موج تیار کریں اپنے جواب کو بروی محدود r θ
اور ϕ کا تفاعل لکھیں

ب. اس حال میں r کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی آپ کو نکلات جدول سے حاصل کرنے کی اجازت ہے

ج. اس حال میں ایک جوہر کے قابل مشاہدہ $L_y^2 + L_x^2$ کی پیمائش سے کیا قیمت یا قیمتیں متوقع ہے اور ان
کے انفرادی احتمال کیا ہوں گے

سوال ۴.۳۹: ہائیڈروجن کی زمینی حال میں مرکزہ کے اندر الیکٹران پائے جانے کا احتمال کیا ہوگا

۱. پہلے یہ فرض کرتے ہوئے کہ تفاعل موج مساوات 80.4 رداس $r = 0$ تک درست ہے اور مرکزہ کا
رداس b لیتے ہوئے بالکل ٹھیک ٹھیک جواب حاصل کریں

ب. اپنے جواب کو ایک چھوٹے عدد $2b/a \equiv \epsilon$ کی طاقتی تسلسل کی روپ میں لکھ کر دکھائیں کہ سب سے کم
رتبی جزو کا بھی ہوگا $P \approx (4/3)(b/a)^3$ P دکھائے کے $a \ll b$ کی صورت میں جو کہ درست ہے یہ تخمین
موزوں ہوگی

ج. اس کے برعکس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مرکزہ کہ بہت چھوٹی حجم میں $\psi(r)$ تقریباً مستقل ہوگا لہذا
 $P \approx (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$ لیا جاسکتا ہے تصدیق کیجئے گا کہ یوں بھی آپ وہی جواب حاصل کر سکتے ہیں

د. $a \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ اور $b \approx 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ لیتے ہوئے P کی اندازن اعدادی قیمت حاصل کریں
یہ الیکٹران کا اندازن وہ وقت ہوگا جو وہ مرکزہ کے اندر گزارتا ہے

سوال ۴.۴۰:

ا. کلیہ توانی مساوات ۱۷۶.۴ استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $l = n - 1$ کی صورت میں رداسی تقاسم عمل موج درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$R_n(n-1) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

بلاواسطہ عمل کرتے ہوئے مستقل معمول زنی N_n تعین کریں

ب. حال $\psi_n(n-1)m$ روپ کے حالات کے لیے $\langle r \rangle$ اور $\langle r^2 \rangle$ کا حساب لگائیں

ج. دکھائیں کہ ان حالات کی $r(\sigma_r)$ میں عدم یقینیت $\langle r \rangle / \sqrt{2n+1}$ ہوگی دھیان رہے کہ r میں نسبتی پھیلاؤ n بڑھانے سے گھٹتا ہے یوں n کی بڑی قیمت کے لیے نظام کلاسیکی نظر آنے شروع ہوتا ہے جس میں دائری مدار پہنچانے جاسکتے ہیں n کی کئی قیمتوں کے لیے رداسی تقاسم امواج کا حاکم بناتے ہوئے اس نقطہ کی وضاحت کریں

سوال ۴.۴۱: ہم مکان طیفی خطوط کلیہ رڈبرگ مساوات ۹۳.۴ کے تحت ابتدائی اور اختتامی حالات کے صدر کو انٹم اعداد ہائیڈروجن طیف کے کلیہ کا طول موج تعین کرتے ہیں ایسی دو منفرد جوڑیاں $\{n_i, n_f\}$ تلاش کریں جو λ کی ایک ہی قیمت دیتے ہو مثلاً $\{6851, 6409\}$ اور $\{15283, 11687\}$ آپ کو ان کے علاوہ جوڑیاں تلاش کرنی ہوگی

سوال ۴.۴۲: قابل مشاہدہ $A = x^2$ اور $B = L_z$ پر غور کریں

ا. $\sigma_A \sigma_B$ کے لیے عدم یقینیت کا اصول تیار کریں

ب. حال ψ_{nlm} میں ہائیڈروجن کے لیے σ_B کی قیمت معلوم کریں

ج. اس حال میں $\langle xy \rangle$ کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں

سوال ۴.۴۳: ایک الیکٹران درج ذیل چکری حال میں ہے

$$\chi = A \left(1 - \frac{2i}{2} \right)$$

ا. χ کو معمول پر لاتے ہوئے مستقل A تعین کریں

ب. اس الیکٹران کی S_z کی پیمائش سے کیا قیمتیں متوقع ہیں اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا S_z کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی

ج. اگر اس الیکٹران کی S_x کی پیمائش کی جائے تو کیا قیمتیں متوقع ہوں گی اور ہر قیمت کا انفرادی احتمال کیا ہوگا S_x کی توقعاتی قیمت کیا ہوگی

د. اس الیکٹران کی S_y کی پیمائش سے کیا قیمتے متوقع ہیں اور ان قیمتوں کا انحصار دی احتمال کیا ہوگا S_y کی توقعاتی قیمت کی ہوگی

سوال ۴.۴۴: فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ دو عدد $1/2$ چکر ذرات یکت تنظیم 178.4 میں پائے جاتے ہیں۔ مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_a^{(1)}$ کے رخ ذرہ 1 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز \hat{a} ہے اسی طرح مان لیں کہ اکائی سمتیا $S_b^{(2)}$ کے رخ ذرہ 2 کے چکری زاویائی معیار حرکت کا حبز \hat{b} ہے۔ درج ذیل دکھائیں جہاں \hat{a} اور \hat{b} کے بیچ زاویہ θ ہے

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta \quad (۴.۱۹۹)$$

سوال ۴.۴۵:

۱. کلیش گورڈن عددی سروں کو $s_1 = 1/2$ $s_2 = anything$ کچھ بھی لیتے ہوئے حاصل کریں۔ آپ درج ذیل میں A اور B عددی سروں کی وہ قیمت تلاش کرنا چاہتے ہیں جن کے لیے $|sm\rangle$ کا امتیازی حال ویکٹر S^2 ہوگا

$$|sm\rangle = A \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |S_2(m - \frac{1}{2})\rangle + B \left| \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right\rangle |S_2(m + \frac{1}{2})\rangle$$

مساوات 179.4 تا مساوات 182.4 کی ترکیب استعمال کریں۔ اگر آپ یہ جاننے سے متاثر ہوں کہ $S_x^{(2)}$ مثلاً ویکٹر $|s_2 m_2\rangle$ پر کیا کرتا ہے تو مساوات 136.4 سے رجوع کریں اور مساوات 147.4 سے قبل جملہ دوبارہ پڑھیں۔ جواب:

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}; B = \pm \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}$$

جہاں $s = s_2 \pm 1/2$ علامتیں تعین کرتی ہیں۔

ب. اس عمومی نتیجے کی تصدیق جدول 8.4 میں تین یا چار درجہ دیکھ کر کریں۔

سوال ۴.۴۶: ہمیشہ کی طرح S_z کی امتیازی حالات کو اساس لیتے ہوئے $3/2$ چکر کے ذرے کے لیے متالاب S_x تلاش کریں۔ امتیازی مساوات حل کرتے ہوئے S_x کی امتیازی افتدار معلوم کریں۔

سوال ۴.۴۷: مساوات 145.4 اور 147.4 میں $1/2$ چکر سوال 31.4 میں ایک چکر اور سوال 52.4 میں $3/2$ چکر کے متالابوں کی بات کی گئی۔ ان نتائج کو عمومیت دیتے ہوئے اختیاری S چکر کے لیے چکری متالاب تلاش کریں۔

جواب:

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_s & 0 & b_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & b_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & ib_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ib_s & 0 & -ib_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ib_{s-1} & 0 & -ib_{s-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib_{s-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -ib_{-s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ib_{-s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

جہاں $b_j = \sqrt{(s+j)(s+1-j)}$ ہوگا۔

سوال ۴.۴۸: کروئی ہارمونیات کے لیے،؟؟؟؟؟ ضربی جز درج ذیل طریقے سے حاصل کریں۔ ہم حصہ 2.1.4 سے درج ذیل جانتے ہیں

$$Y_l^m = B_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

آپ کو جز B_l^m تعین کرنا ہوگا (جس کی قیمت تلاش کیے بغیر میں نے ذکر مساوات 32.4 میں کیا)۔ مساوات 120.4، 121.4 اور 130.4 استعمال کرتے ہوئے B_l^{m+1} کی صورت میں B_l^m کا کلیہ تواری دریافت کریں۔ اس کو m کے ریاضی ماحول کی ترکیب سے حل کرتے ہوئے B_l^m کو مجموعی مستقل $C(l)$ تک حل کریں۔ آخر میں سوال 22.4 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اس مستقل کا بھی کچھ کریں۔ شریک لیجاندرف تعاف عمل کے تفسرک کا درج ذیل کلیہ مددگار ثابت ہو سکتا ہے:

$$(r.200) \quad (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} = \sqrt{1-x^2} P_l^{m+1} - mx P_l^m$$

سوال ۴.۹: ہائیڈروجن جوہر میں ایک الیکٹران درج ذیل چکر اور فضائی حال کے ملاپ میں پایا جاتا ہے

$$R_{21}(\sqrt{1/3}Y_1^0\chi + \sqrt{2/3}Y_1^1\chi -)$$

ا. مداری زاویائی معیار حرکت کے مربع (L^2) کی پیشانی سے کیا قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں؟ ہر قیمت کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا؟

ب. یہی کچھ معیاری z زاویائی معیار حرکت کے (L_z) حیز کے لیے معلوم کریں۔

ج. یہی کچھ چکری زاویائی معیار حرکت کے مربع سکیز (S^2) کے لیے معلوم کریں۔

د. یہی کچھ چکری زاویائی معیار z کے (S_z) حیز کے لیے کریں۔ کل زاویائی معیار حرکت $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ لیں۔

ه. آپ J^2 کی پیشانی کرتے ہیں آپ کیا قیمتیں حاصل کرتے ہیں ان کا انفسرادی احتمال کیا ہوگا

و. یہی کچھ J_z کے لیے معلوم کریں۔

ز. آپ ذرے کے مقام کی پیشانی کرتے ہیں، اس کی r, θ, ϕ پر پائے جانے کی کثافت احتمال کیا ہوگا؟

ح. آپ چکر کے z حیز اور منبع سے فاصلہ کی پیشانی کرتے ہیں (یاد رہے کہ یہ ہم آہنگ قابل مشاہدہ ہیں) ایک ذرے کا رداس r پر اور ہم میدان ہونے کا کثافت احتمال کیا ہوگا؟

سوال ۴.۵۰:

ا. دکھائیں کہ ایک تفاعل $f(\phi)$ جس کو؟؟؟؟؟ تسلسل میں پھیلا یا جاسکتا ہے، کے لیے درج ذیل ہوگا

$$f(\phi + \varphi) \equiv e^{i\frac{L_z\varphi}{\hbar}} f(\phi)$$

(جہاں φ اختیاری زاویہ ہے)۔ اسی کی بنا L_z/\hbar کو z کے گرد گھومنے کا پیداکار کہتے ہیں۔ اشارہ: مساوات 129.4 استعمال کریں اور سوال 39.3 سے مدد لیں۔ زیادہ عمومی $L.\hat{n}/\hbar$ ہوگا جو \hat{n} کے رخ گھومنے کا پیداکار ہے یعنی $e^{i(L.\hat{n}\varphi/\hbar)}$ کے گرد دائیں ہاتھ سے زاویہ φ گھومنے کا اثر پیدا کرتا ہے۔ چکر کی صورت میں گھومنے کا پیداکار $S \cdot \hat{n}/\hbar$ ہوگا بالخصوص $1/2$ چکر کے لیے

$$\chi' = e^{i(\sigma.\hat{n})\varphi/2}\chi \quad (۴.۲۰۱)$$

ہمیں چکر کاروں کے گھومنے کے بارے میں بتاتی ہے۔

ب. محور $x - axis$ کے لحاظ سے 180 ڈگری گھومنے کو ظاہر کرنے والا (2×2) متالب تیار کریں اور دکھائیں کہ یہ ہماری توقعات کے عین مطابق ہمہ میدان (χ_+) کو حائل میدان (χ_-) میں تبدیل کرتا ہے

ج. محور $y - axis$ کے لحاظ سے 90 ڈگری گھومنے والا متالب تیار کریں اور دیکھیں کہ (χ_+) پر اس کا اثر کیا ہوگا؟

د. محور $z - axis$ کے لحاظ سے 360 زاویہ گھومنے کو ظاہر کرنے والا متالب تیار کریں۔ کیا جواب آپ کی توقعات کے مطابق ہے؟ ایسا نہ ہونے کی صورت میں اس کی مضمرات پر تبصرہ کریں۔

ج۔ درج ذیل دکھائیں

$$e^{i(\sigma \cdot \hat{n})\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2) \quad (۴.۲۰۲)$$

سوال ۴.۵۱: زاویائی معیار حرکت کے بنیادی مقلبت رشتے (ساوات 99.4) امتیازی افتدار کے عدد صحیح قیمتوں کے ساتھ نصف عدد صحیح قیمتوں کی بھی اجازت دیتے ہیں۔ جبکہ مداری زاویائی معیار حرکت کی صرف عدد صحیح قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ $L = r \times p$ کے روپ میں کوئی اضافی شرط ضرور نصف عددی قیمتوں کو خارج کرتا ہوگا۔ ہم a کو کوئی ایسا مستقل لیتے ہیں جس کا پود لمبائی ہو مثلاً ہائیڈروجن پر بات کرتے ہوئے رداس بولہ درج ذیل حاملین متعارف کرتے ہیں

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + (a^2/\hbar)p_y]; p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x - (\hbar/a^2)y];$$

$$q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x - (a^2/\hbar)p_y]; p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[p_x + (\hbar/a^2)y].$$

ا۔ تصدیق کریں کہ $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0; [q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$ یوں مقام اور معیار حرکت کی باضابطہ مقلبت رشتوں کو $p's$ اور $q's$ مطمئن کرتے ہیں اور اشاریہ 1 کے حاملین اشاریہ 2 کے حاملین کے ہم آہنگ ہیں

ب۔ درج ذیل دکھائیں

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج۔ تصدیق کریں کہ ایک ایسا ہارمونی سر قش جس کی کیت $m = \hbar/a^2$ ہو اور تعدد $\omega = 1$ ہو کہ ہر ایک ہیلٹنی H کے لیے $L_z = H_1 - H_2$ گا۔

د۔ ہم جانتے ہیں کہ ہارمونی سر قش کے ہیلٹنی کی امتیازی افتدار $(n+1/2)\hbar\omega$ ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ہوگا (حصہ ۳.۱ کے الجبرائی نظریہ میں ہیلٹنی کی روپ اور باضابطہ مقلبت رشتوں سے یہ اخذ کیا گیا) اس کو استعمال کرتے ہوئے یہ اخذ کریں کہ L_z کے امتیازی افتدار لازمًا عدد ہوں گے۔

سوال ۴.۵۲: عمومی حال ساوات 139.4 می 1/2 چکر کے S_z اور S_y کی کم سے کم عدم یقینیت کا شرط معلوم کریں یعنی $| \langle S_z \rangle | \geq (\hbar/2) \sigma_{S_x} \sigma_{S_y}$ میں ساوات کی صورت میں تلاش کریں۔ جواب: عمومیت کھوئے بغیر a کو حقیقی منتخب کر سکتے ہیں تب عدم یقینیت کی کم سے کم قیمت اس صورت میں حاصل ہوگی b حالف حقیقی یا حالف خیالی ہو۔

سوال ۴.۵۳: کلاسیکی برقی حرکیات میں ایک ذرہ جس کا بار q ہو اور جو مقناطیسی میدان E اور B میں مستقر رفتار v کے ساتھ حرکت کرتا ہو، پر قوت عمل کرتا ہے جو لورینز قوت کی ساوات دیتی ہے

$$F = q(E + v \times B) \quad (۴.۲۰۳)$$

باب ۴. تین ابعادی کوانٹم میکانیات

اس قوت کو کسی بھی غیر سستی مخفی توانائی تفاعل کی ڈھلوان کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات شرودنگر اپنی اصلی روپ میں (مساوات 1.1) اس کو قبول نہیں کر سکتی ہے تاہم اس کی نفیس روپ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (۴.۲۰۴)$$

کوئی مسئلہ نہیں کھڑا کرتی ہے۔ کلاسیکی ہیملٹنی درج ذیل ہوگا

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (۴.۲۰۵)$$

جہاں \mathbf{A} سستی مخفی توانائی $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ اور φ غیر سستی مخفی توانائی $(E = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t)$ ہیں لہذا شرودنگر مساوات میں باضابطہ متبادل $(\hbar / i) \nabla \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow (\hbar / i) \nabla)$ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \psi \quad (۴.۲۰۶)$$

۱. درج ذیل دکھائیں

$$\frac{d\langle r \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \rangle \quad (۴.۲۰۷)$$

ب. ہمیشہ کی طرح مساوات 32.1 دیکھیں۔ ہم $d\langle \mathbf{r} \rangle / dt$ کو $\langle \mathbf{v} \rangle$ لیتے ہیں۔ درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{q}{2m} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}) \rangle - \frac{q^2}{m} \langle (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \rangle \quad (۴.۲۰۸)$$

ج. بالخصوص موجی اکٹھے کے حجم پر یکساں \mathbf{E} اور \mathbf{B} میدانوں کی صورت میں درج ذیل دکھائیں

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = q(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}), \quad (۴.۲۰۹)$$

اس طرح $\langle \mathbf{v} \rangle$ کی توقعاتی قیمت عین لورینتز قوت کی مساوات کے تحت حرکت کرے گی جیسا ہم مسئلہ؟؟؟؟ کے تحت کرتے ہیں۔

سوال ۴.۵۴: (پس منظر جاننے کے لیے سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) درج ذیل فرض کریں جہاں B_0 اور K مستقل ہیں

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2} (x\hat{j} - y\hat{i})$$

;

$$\varphi = Kz^2$$

۱. میدان E اور B تلاش کریں

ب. ان میدانوں میں جن کی کیت m اور بار q ہوں کے ساکن حالات کی احبازتی توانائیاں تلاش کریں۔ جواب

$$(۴.۲۱۰) \quad E(n_1, n_2) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega, (n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

جہاں $\omega_1 = qB_0/m$ اور $\omega_2 \equiv \sqrt{2qKm}$ ہوگا۔ تبصرہ: $0 = K$ کی صورت میں یہ سائیکلوٹران حرکت کا کوانٹم مشل ہوگا۔ کلاسیکی سائیکلوٹران تعدد ω_1 ہوگا اور یہ z رخ میں آزاد ذرہ ہے۔ احبازتی توانائیاں $(n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ہوں گی جنہیں لانڈاؤ سطحیں کہتے ہیں۔

سوال ۵۵: ۴. (پس منظر جاننے کی خاطر سوال 59.4 پر نظر ڈالیں) کلاسیکی برقی حرکیات میں مخفی قوت A اور φ یکساں طور پر تعین نہیں کیے جاسکتے ہیں، طبعی مقداریں میدان E اور B ہیں ۱. دکھائیں کہ مخفی قوت

$$(۴.۲۱۱) \quad \varphi' \equiv \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, A' \equiv A + \nabla \Lambda$$

(جہاں معتام اور وقت کا Λ ایک اختیاری حقیقی تفاعل ہے) بھی وہی میدان φ اور A دیتے ہیں۔ مساوات 210.4 گینج تبادلہ کہلاتی ہے جبکہ ہم کہتے ہیں کہ یہ نظریہ گینج غیر متغیر ہے۔

ب. کوانٹم میکانیات میں مخفی قوت کا کردار زیادہ براہ راست پایا جاتا ہے اور ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا یہ نظریہ گینج متغیر رہتا ہے یا نہیں؟ دکھائیں کہ

$$(۴.۲۱۲) \quad \Psi' \equiv e^{iq\Lambda/\hbar} \Psi$$

شروڈنگر مساوات (مساوات 20.4) کو گینج تبادلہ مخفی قوت φ' اور A لینے ہوئے مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ Ψ اور Ψ' میں صرف زاویائی جز کا فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ ایک ہی طبعی حال کو ظاہر کرتے ہیں اور یوں یہ نظریہ گینج غیر متغیر ہوگا۔ مزید معلومات کے لیے حصہ 3.2.10 سے رجوع کیجئے گا۔

جوابات

فهرست

- ensemble, 15
- expectation
 - value, 7
- formula
 - De Broglie, 18
- Fourier
 - inverse transform, 62
 - transform, 62
- Frobenius
 - method, 53
- function
 - Dirac delta, 71
- generalized
 - distribution, 71
 - function, 71
- generalized statistical interpretation, 111
- generating
 - function, 59
- generator
 - translation in space, 135
 - translation in time, 136
- Gram-Schmidt
 - orthogonalization process, 106
- Hamiltonian, 27
- harmonic
 - oscillator, 32
- Hermitian
 - conjugate, 48
- hermitian, 101
 - anti, 130
- adjoint, 102
- allowed
 - energies, 33
- argument, 60
- boundary conditions, 32
- bra, 127
- coherent states, 133
- collapses, 4, 111
- commutation
 - canonical relation, 44
- commutator, 43
- commute, 43
- complete, 34, 100
- continuous, 105
- Copenhagen interpretation, 4
- decomposition
 - spectral, 130
- degenerate, 89, 104
- delta
 - Kronecker, 34
- determinate state, 103
- Dirac
 - orthonormality, 108
- discrete, 105
- dispersion
 - relation, 66
- energy
 - allowed, 28
 - conservation, 38

- orthonormal, 34, 100
- oscillation
 - neutrino, 127
- particle
 - unstable, 21
- polynomial
 - Hermite, 57
- position
 - agnostic, 4
 - orthodox, 3
 - realist, 3
- potential, 14
 - reflectionless, 92
- probability
 - density, 10
- probability current, 21
- probable
 - most, 7
- recursion
 - formula, 54
- reflection
 - coefficient, 77
- revival time, 88
- Rodrigues
 - formula, 59
- scattering
 - matrix, 93
- Schrodinger
 - time-independent, 27
- Schrodinger align, 2
- Schwarz inequality, 99
- sequential measurements, 130
- series
 - Fourier, 35
 - power, 42
 - Taylor, 41
- sodium, 23
- space
 - dual, 128
 - conjugate, 102
 - skew, 130
- hidden variables, 3
- Hilbert space, 99
- idempotent, 129
- indeterminacy, 2
- inner product, 98
- ket, 127
- ladder
 - operators, 45
- law
 - Hooke, 41
- linear
 - combination, 28
- linear algebra, 97
- matrices, 98
- matrix
 - S, 93
 - transfer, 94
- matrix elements, 125
- mean, 7
- median, 7
- momentum, 16
- momentum space wave function, 113
- neutrino
 - electron, 127
 - muon, 127
- node, 34
- normalization, 13
- normalized, 100
- observables
 - incompatible, 116
- operator, 17
 - lowering, 45
 - projection, 128
 - raising, 45
- orthogonal, 34, 100

variables
 separation of, 25
 variance, 9
 vectors, 97
 velocity
 group, 64
 phase, 64
 virial theorem, 132
 wag the tail, 55
 wave
 incident, 76
 packet, 61
 reflected, 76
 transmitted, 76
 wave function, 2
 wavelength, 18

 outer, 23
 spectrum, 104
 square-integrable, 13
 square-integrable functions, 98
 standard deviation, 9
 state
 bound, 69
 excited, 33
 ground, 33
 scattering, 69
 statistical
 interpretation, 2
 step function, 79
 theorem
 Dirichlet's, 35
 Ehrenfest, 18
 Plancherel, 62
 transformations
 linear, 97
 transmission
 coefficient, 77
 tunneling, 69, 78
 turning points, 69
 uncertainty principle, 19, 116
 energy-time, 119

- اتاقی
حالات، 133
اجبازی
توانائیاں، 33
ارتعاش
نیوٹریو، 127
استمراری، 105
اصول
عدم یقینیت، 19
اصول عدم یقینیت، 116
الیکٹران نیوٹرینی، 127
انتشاری
رشتہ، 65
انخطاطی، 104، 89
اندرونی ضرب، 98
انکاس
شرح، 77
اوسط، 7
براء، 127
بقا
توانائی، 38
پیدا کار
تفاعل، 59
پیدا کار
فصل میں انتقال کا، 135
وقت میں انتقال، 136
تجدیدی عرصہ، 88
ترتیبی پیمائشیں، 130
ترسیل
شرح، 77
تسل
ٹیلر، 41
طامتی، 42
فوریسر، 35
تعیین حال، 103
تغیریت، 9
تفاعل
ڈیلٹا، 71
تفاعل موج، 2
توالی
کلیہ، 54
توانائی
اجبازی، 28
توقعات
قیمت، 7
جفت، 33
تفاعل، 30
حال
بکھراؤ، 69
زمینی، 33
مقید، 69
پہچان، 33
خطی الجبرا، 97
خطی تبدلہ، 97
خطی جوڑ، 28
خفیہ متغیرات، 3
دلیل، 60
دم بلانا، 95، 55
ڈیراک
معیاری عمودیت، 108
ڈیلٹا
کرونیگر، 34
ذره
غیر مستحکم، 21
رو
احتمال، 21
رفتار
دوری سمتی، 64
گروہی سمتی، 64
رمز اور وٹاؤنسڈ اثر، 85
ساکن
حالات، 27
سرحدی شرائط، 32

- فص
سیرونی، 23
دوہری، 128
فورسٹر
الٹ بدل، 62
بدل، 62
وٹا بل مشاہدہ
غیر ہم آہنگ، 116
وٹا بل
بھراو، 93
ترسیل، 94
وٹا بل ارکان، 125
وٹا بل
ہک، 41
قواب، 98
کٹ، 127
کشادہ
احتمال، 10
کشیر رکنی
ہرمانٹ، 57
کلیہ
ڈی پروگلی، 18
روڈریگیس، 59
کوپن، ہیگن مفہوم، 4
گرام شمد
ترکیب عودیت، 106
متعمم
تف عمل، 71
تقسیم، 71
متعمم شماریاتی مفہوم، 111
مختل
سب سے زیادہ، 7
مختفہ، 14
بلا العکاس، 92
مربع منکامل، 13
مربع منکامل تفعلات، 98
سنگ زنی، 69، 78
سگر، 15
سمتیات، 97
سوچ
انکاری، 4
تقلید پسند، 3
حقیقت پسند، 3
سوڈیم، 23
سیڑھی
عاملین، 45
سیڑھی تف عمل، 79
شروڈنگر
غیر تاج وقت، 27
شروڈنگر مساوات، 2
شروڈنگر نقطہ نظر، 136
شریک عمل، 102
شماریاتی مفہوم، 2
شوارز عدم مساوات، 99
طاق، 33
طول موج، 18
طیف، 104
طیفی تحلیل، 130
عمل، 17
تخلیل، 128
تقلیل، 45
رفعت، 45
عدم تعین، 2
عدم یقینیت
توانائی و وقت، 119
عدم یقینیت اصول، 19
عتدہ، 34
علیحدگی متغیرات، 25
عودی، 100، 34
معیاری، 34
غیر مسلسل، 105
فہرہ بنوس
ترکیب، 53

- ہارمونئی
 ہارمونئی، 32
 ہر مشی، 101
 جوڑی دار، 48، 102
 خلاف، 130
 منحرف، 130
 ہلبرٹ فنکشن، 99
 ہیزنبرگ نقطہ نظر، 136
 ہیملٹنی، 27
 یک طاقتی، 129
- مرتعش
 ہارمونئی، 32
 مسئلہ
 اجر نفٹ، 18
 پلانشرال، 62
 ڈرشلے، 35
 مسئلہ وریل، 132
 معمول زنی، 13
 معمول شدہ، 100
 معیار حرکت، 16
 معیار حرکتی فنکشن عمل موج، 113
 معیار عمودی، 34
 معیاری انحراف، 9
 معیاری عمودی، 100
 متقلب، 43
 متقلبت
 باضابطہ رشتہ، 44
 مقلوب، 43
 مکمل، 34، 100
 منہدم، 4، 111
 موج
 آمدی، 76
 ترسیلی، 76
 منعکس، 76
 موجی اکٹھ، 61
 میون نیوٹرینو، 127
 واپسی نقطہ، 69
 وسطانیہ، 7