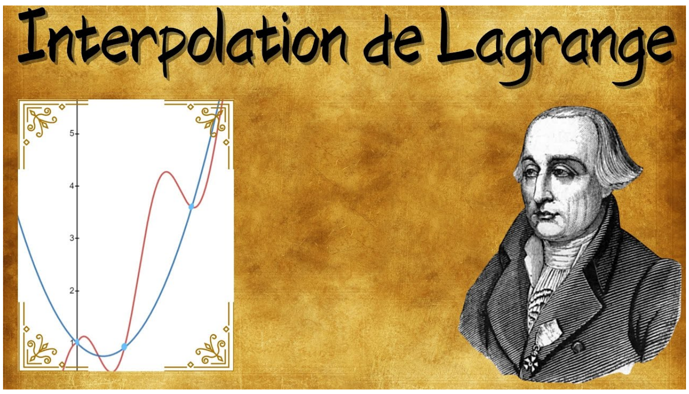
École Centrale Casablanca

Projet de Méthode Numérique pour l'Ingénieur

Interpolation Polynomiale



Membres du Projet :
Boni jean-noel
SIMBORO Rydouane
SORHO Lacina
TOURE Karim

3 juillet 2024

Table des matières

1 Résumé **3**

2 Introduction **3**

3 Contextualisation **3**

4 Problématique **3**

5 Résultat des programmes informatiques et discussions **4**

5.1 Interpolation sur des points équidistants 4

5.1.1 Calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange et application à la fonction f(x)=sin(x) 4

5.1.2 Erreur d'interpolation 5

5.2 Fonction de Runge et Points de Tchebychev 6

5.2.1 Interpolation de la fonction de Runge 6

5.3 Décomposition en Polynômes de Tchebychev 7

5.3.1 Calcul des coefficients de Tchebychev 7

5.3.2 Interpolation avec les coefficients de Tchebychev 9

5.3.3 Comparaison des Méthodes 10

6 Comparaison avec le Cas Précédent ($n = 660$) **11**

6.0.1 Augmentation du nombre de points pour la fonction de Runge au délà de n=660 11

7 Conclusion **12**

8 Annexe **12**

1 Résumé

Ce projet se concentre sur l'interpolation polynomiale en utilisant les polynômes de Lagrange et de Tchebychev. Il vise à implémenter des programmes pour calculer les polynômes d'interpolation, analyser les erreurs d'interpolation, et comparer les résultats obtenus avec des points d'interpolation équidistants et de Tchebychev. Les fonctions considérées incluent $f(x) = \sin(x)$ sur $[-,]$ et la fonction de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1, 1]$. Le projet explore également la décomposition de polynômes d'interpolation dans la base des polynômes de Tchebychev.

2 Introduction

L'interpolation polynomiale est une technique essentielle en analyse numérique et trouve des applications variées dans l'ingénierie et les sciences. Ce projet s'inscrit dans le cadre du cours de Méthodes Numériques pour l'Ingénieur, où nous mettons en pratique des concepts théoriques à travers des projets informatiques. L'objectif principal est de comprendre et d'implémenter l'interpolation polynomiale, d'analyser les erreurs associées et d'explorer différentes bases polynomiales pour l'interpolation.

3 Contextualisation

L'interpolation polynomiale est souvent utilisée pour estimer des valeurs intermédiaires entre des points de données connus. Les polynômes de Lagrange et de Tchebychev sont deux méthodes couramment utilisées pour cette tâche. Le polynôme de Lagrange est simple à comprendre et à implémenter, mais il peut souffrir du phénomène de Runge lorsqu'il est appliqué à des ensembles de points équidistants. Les polynômes de Tchebychev, en revanche, offrent une meilleure précision pour des points non équidistants.

4 Problématique

La problématique principale de ce projet est de déterminer comment les erreurs d'interpolation varient avec le nombre de points d'interpolation et de comparer l'efficacité des polynômes de Lagrange et de Tchebychev. De plus, nous voulons explorer comment la décomposition des polynômes d'interpolation dans la base des polynômes de Tchebychev peut améliorer les résultats d'interpolation.

5 Résultat des programmes informatiques et discussions

5.1 Interpolation sur des points équidistants

5.1.1 Calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange et application à la fonction f(x)=sin(x)

Écrire un programme pour calculer le polynôme de Lagrange p_n passant par n points (x_i, y_i) et l'appliquer à la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[-,]$ avec $n = 50$ points d'abscisses x_i uniformément répartis, et tracer la fonction interpolée.

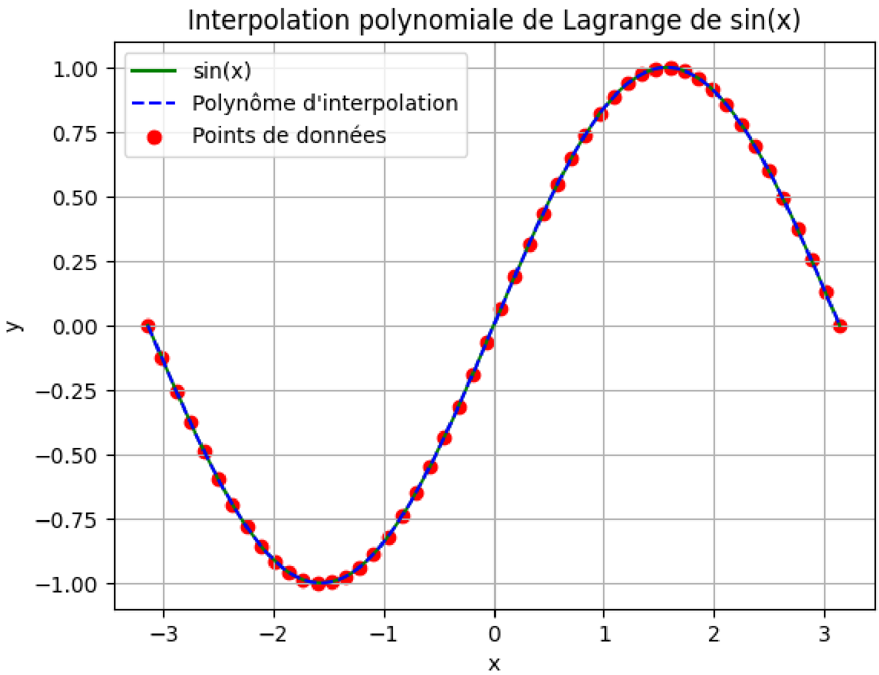


FIGURE 1 – interpolation de f(x)=sin(x)

Observation : Le polynome de Lagrange a su parfaitement interpoler la fonction sur l'intervalle considérer dans la mesure où le nombre de point n=50 defini pour l'interpolation soit assez conséquent.

5.1.2 Erreur d'interpolation

— Calculer l'erreur $\|f - p_n(f)\|_\infty$ et tracer $\max_i |f(x_i) - p_n(f)(x_i)|$ en fonction de n.

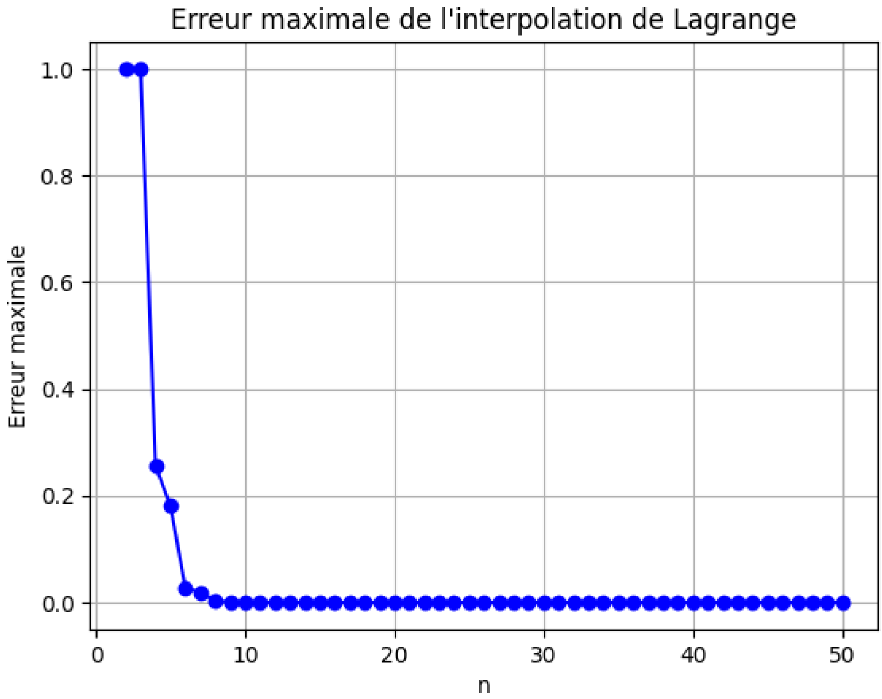


FIGURE 2 – Erreur d'interpolation en fonction de n

— Expliquer le comportement pour $n < 20$ et proposer une interprétation à partir de $n \approx 20$:

Pour $n < 10$: L'erreur est élevée pour des valeurs très faibles de n car les polynômes d'interpolation de bas degré manquent de points pour bien approximer la fonction $\sin(x)$. L'erreur diminue rapidement jusqu'à $n \approx 10$.

Pour $n \approx 10$: À partir de n environ égal à 10, les polynômes de Lagrange commencent à bien approximer $\sin(x)$. L'augmentation du nombre de points permet une meilleure correspondance avec la fonction.

Pour $n > 10$: L'erreur reste faible et stable, indiquant que l'interpolation polynomiale de Lagrange est efficace pour approximer $\sin(x)$ avec suffisamment de points.

Pour $n > 20$: Contrairement à l'effet de Runge attendu, l'erreur n'augmente pas significativement pour des n plus élevés, probablement en raison de la stabilité des calculs numériques et de la nature de $\sin(x)$.

Ainsi l'interpolation de Lagrange offre une bonne approximation de $\sin(x)$ pour n suffisamment grand. L'erreur diminue rapidement avec n croissant, puis reste faible et stable, montrant l'efficacité de l'interpolation polynomiale de Lagrange pour des fonctions comme $\sin(x)$ sur des intervalles symétriques autour de zéro.

5.2 Fonction de Runge et Points de Tchebychev

5.2.1 Interpolation de la fonction de Runge

— Tracer le polynôme d'interpolation $p_n(f)$ pour la fonction de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ avec des points équidistants et des points de Tchebychev ainsi que les différentes erreurs associées :

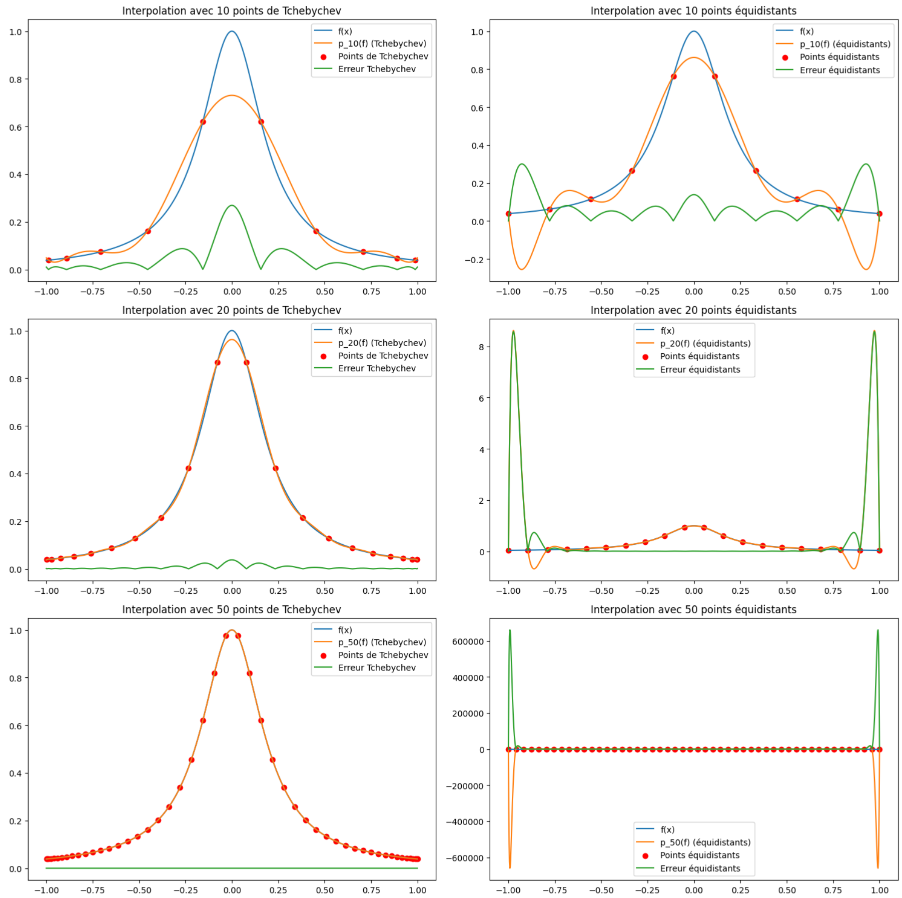


FIGURE 3 – Erreur d'interpolation en fonction de n

— **Commentaire :**

Interpolation avec 10 points

Points de Tchebychev (Graphique à gauche) : L'interpolation avec 10 points de Tchebychev suit de près la fonction de Runge, avec une erreur relativement faible. Les points de Tchebychev sont bien distribués, ce qui aide à éviter les oscillations excessives.

Points équidistants (Graphique à droite) : L'interpolation avec 10 points équidistants montre déjà des oscillations significatives (phénomène de Runge), surtout près des extrémités de l'intervalle. La fonction interpolée dévie notablement de la fonction de Runge entre les points d'interpolation.

Interpolation avec 20 points

Points de Tchebychev (Graphique à gauche) : L'interpolation avec 20 points de Tchebychev reste très précise et suit presque parfaitement la fonction de Runge. Les oscillations sont minimales grâce à la distribution des points de Tchebychev.

Points équidistants (Graphique à droite) : L'interpolation avec 20 points équidistants montre des oscillations encore plus prononcées que dans le cas de 10 points. Ces oscillations, typiques du phénomène de Runge, sont particulièrement visibles près des extrémités de l'intervalle.

Interpolation avec 50 points

Points de Tchebychev (Graphique à gauche) : L'interpolation avec 50 points de Tchebychev est extrêmement précise et presque indiscernable de la fonction de Runge. Les points de Tchebychev permettent une approximation très stable sans oscillations notables.

Points équidistants (Graphique à droite) : L'interpolation avec 50 points équidistants est complètement instable, montrant des oscillations énormes qui dominent le graphe. Cette instabilité extrême est due à l'accumulation d'erreurs numériques et au phénomène de Runge.

Explication et interprétation

Comportement pour $n < 20$: Pour un nombre de points d'interpolation relativement faible (comme 10 ou 20), les points de Tchebychev produisent une interpolation bien plus stable et précise que les points équidistants. Les points de Tchebychev sont spécialement conçus pour minimiser l'erreur d'interpolation polynomiale et éviter les oscillations excessives (phénomène de Runge).

Comportement pour $n \approx 20$ et au-delà : À mesure que n augmente (par exemple $n = 50$), l'interpolation avec des points équidistants devient de plus en plus instable, montrant des oscillations de plus en plus grandes. Cela est dû à la sensibilité croissante aux erreurs numériques et à la mauvaise distribution des points équidistants.

Les points de Tchebychev, en revanche, maintiennent une interpolation très précise et stable même pour des valeurs élevées de n. Leur distribution non uniforme permet de contrôler les oscillations et de fournir une approximation stable de la fonction.

L'utilisation des points de Tchebychev est fortement recommandée pour l'interpolation polynomiale, surtout pour un grand nombre de points. Les points équidistants, bien qu'intuitifs, conduisent à des erreurs significatives et à des oscillations instables (phénomène de Runge) lorsque le nombre de points augmente.

5.3 Décomposition en Polynômes de Tchebychev

5.3.1 Calcul des coefficients de Tchebychev

— Écrire le système linéaire pour les coefficients c_k et tester votre algorithme sur des cas.

Pour trouver les coefficients c_k du polynôme d'interpolation dans la base des polynômes de Tchebychev, nous commençons par considérer le polynôme d'interpolation $p_n(f)$ dans la base de Tchebychev :

$$p_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x)$$

Nous devons déterminer les coefficients c_k tels que $p_n(f)$ interpole les points de données donnés (x_i, y_i) pour $i = 0, 1, \ldots, n$, où x_i sont les nœuds de Tchebychev.

(a) Système linéaire pour les coefficients

La condition d'interpolation requiert que :

$$p_n(f)(x_i) = y_i \quad pourtouti = 0, 1, \ldots, n$$

En substituant l'expression de $p_n(f)$ en termes de polynômes de Tchebychev, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x_i) = y_i \quad pourtouti = 0, 1, \ldots, n$$

Cela nous donne un système de $n+1$ équations linéaires avec $n+1$ inconnues c_k :

$$\{ c_0\, T_0(x_0) + c_1 T_1(x_0) + \cdots + c_n T_n(x_0) = y_0$$

c$_0 T_0(x_1) + c_1 T_1(x_1) + \cdots + c_n T_n(x_1) = y_1$
$\vdots$

c$_0 T_0(x_n) + c_1 T_1(x_n) + \cdots + c_n T_n(x_n) = y_n$

Cela peut être écrit sous forme matricielle comme :

$$A\vec{c} = \vec{y}$$

où A est la matrice $(n+1) \times (n+1)$ avec des entrées $A_{ij} = T_j(x_i)$, $\vec{c}$ est le vecteur des coefficients $(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T$, et $\vec{y}$ est le vecteur des y_i's $(y_0, y_1, \ldots, y_n)^T$.

Utilisation de la propriété (1) pour trouver les coefficients

La propriété donnée est $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Pour trouver les coefficients c_k, nous utilisons la propriété d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev. Pour les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_k(x)$, ils sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. La condition d'orthogonalité discrète pour les nœuds de Tchebychev $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$ est :

$$\sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) T_k(x_i) = \{ 0\ , sij \neq k$$

n+1$\overline{2, sij = k = 0}$

n+1, si j = k $\neq 0$

Pour calculer les coefficients c_k, nous multiplions les deux côtés de la condition d'interpolation par $T_j(x_i)$ et nous faisons la somme sur tous les i :

$$\sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) \left(\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x_i) \right) = \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) T_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i$$

La double sommation sur le côté gauche se simplifie en utilisant l'orthogonalité :

$$c_j \sum_{i=0}^{n} T_j^2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i$$

En substituant les conditions d'orthogonalité :

$$c_j \times (n+1) = \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i \quad pour j \neq 0$$

$$c_0 \times \frac{n+1}{2} = \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i) y_i \quad pour j = 0$$

En résolvant pour c_j, nous obtenons :

$$c_j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i \quad pour j \neq 0$$

$$c_0 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i) y_i$$

Comme $T_0(x) = 1$, l'expression pour c_0 devient :

$$c_0 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i$$

Ainsi, les coefficients c_k du polynôme d'interpolation dans la base de Tchebychev sont :

$$c_0 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$c_j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_j(x_i) y_i \quad pour j = 1, 2, \ldots, n$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev et les conditions d'interpolation données.

implémenter une fonction pour les calculer **(voir code source)**.

Implémenter une fonction qui prend en entré les coefficients et des points x et renvoit des polynomes **(voir code source)**.

5.3.2 Interpolation avec les coefficients de Tchebychev

Implementer une fonction qui utilise les coefficients c_k pour interpoler les points donnés et tester l'algorithme.

Interprétation :

Les graphiques montrent que :

- Les fonctions constantes et linéaires sont bien représentées même avec un petit nombre de points d'interpolation.
- La fonction quadratique x^2 nécessite au moins un polynôme de degré 2 pour être parfaitement représentée, ce qui est atteint avec $n = 3$.
- Augmenter le nombre de points d'interpolation au-delà de ce qui est nécessaire pour capturer la forme de la fonction ne change pas significativement la qualité de l'interpolation pour les fonctions représentées ici, mais montre la stabilité et la précision de l'interpolation pour des fonctions simples sur cet intervalle.

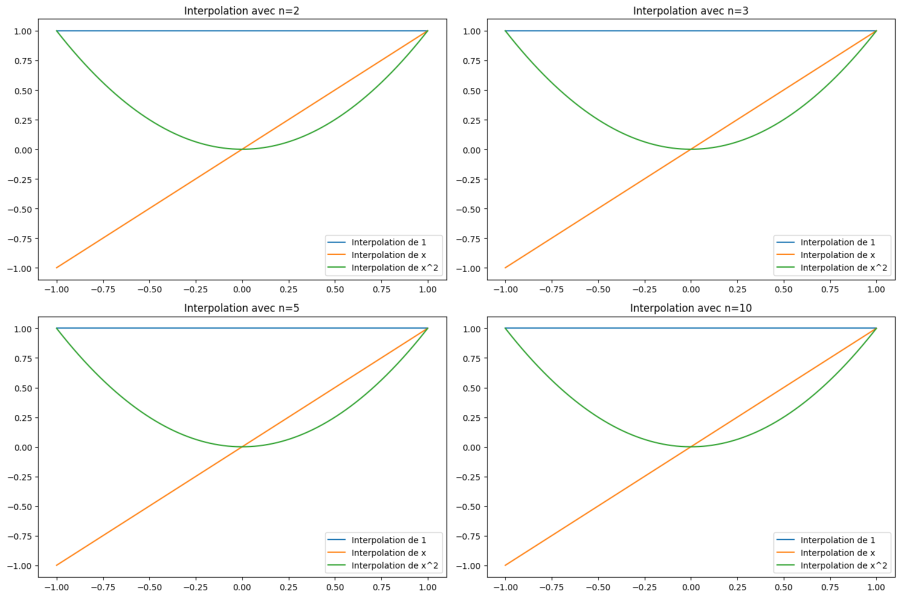


FIGURE 4 – Erreur d'interpolation en fonction de n

5.3.3 Comparaison des Méthodes

Comparer les courbes obtenues avec les polynômes de Tchebychev et ceux obtenus par la méthode de Lagrange pour la fonction de Runge.

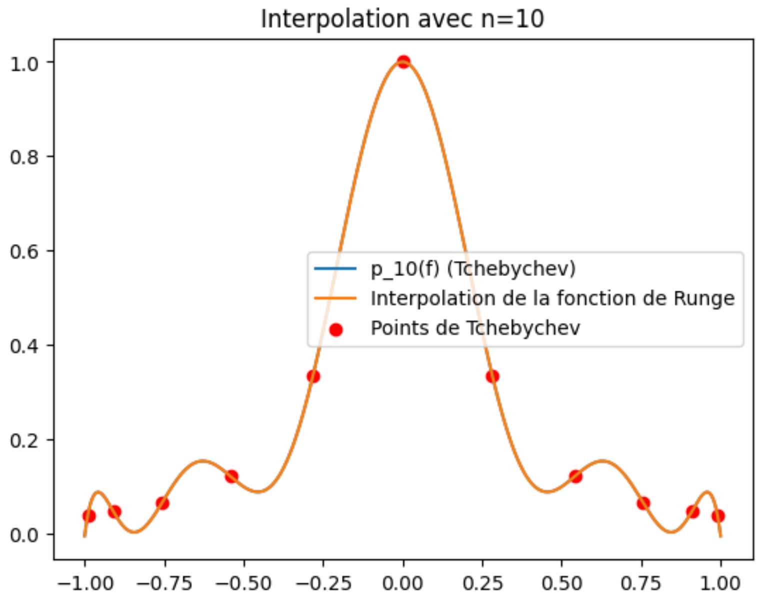


FIGURE 5 – Erreur d'interpolation en fonction de n

Commentaire : Fonction de Runge :

- La fonction de Runge est bien connue pour générer des oscillations importantes aux bords de l'intervalle d'interpolation lorsqu'on utilise des points d'interpolation également espacés.
- Ici, la courbe orange, représentant l'interpolation de la fonction de Runge, montre des oscillations caractéristiques aux bords, mais beaucoup moins prononcées que dans le cas précédent avec $n = 660$.

Points de Tchebychev :

- Les points de Tchebychev (rouges) sont stratégiquement placés pour minimiser les erreurs d'interpolation, surtout aux extrémités de l'intervalle.
- On les voit répartis de manière non uniforme avec une concentration plus élevée vers les extrémités, ce qui aide à réduire les oscillations.

Interpolation Polynômiale :

- La courbe bleue montre le polynôme d'interpolation de degré 10 construit avec les points de Tchebychev.
- Contrairement à l'interpolation classique, cette courbe est plus lisse et suit de très près la courbe orange (interpolation de la fonction de Runge).
- Cela démontre que même avec un nombre réduit de points (10), l'utilisation des points de Tchebychev permet de produire une interpolation précise et stable sans les grandes oscillations extrêmes.

6 Comparaison avec le Cas Précédent ($n = 660$)

- **Stabilité** : Avec $n = 10$, les oscillations de la fonction de Runge sont beaucoup moins prononcées que dans le cas de $n = 660$. La courbe bleue (polynôme d'interpolation) est plus proche de la courbe orange, montrant une meilleure approximation.
- **Points de Tchebychev** : Dans les deux cas, l'utilisation des points de Tchebychev aide à stabiliser l'interpolation, mais avec un nombre de points plus faible, les bénéfices sont encore plus évidents.
- **Complexité** : Travailler avec moins de points ($n = 10$) réduit la complexité et le coût computationnel, tout en maintenant une bonne précision grâce à la distribution optimisée des points de Tchebychev.

6.0.1 Augmentation du nombre de points pour la fonction de Runge au délà de n=660

Commentaire :

Fonction de Runge :

- La fonction de Runge, souvent utilisée pour démontrer les phénomènes d'interpolation polynomiale, est une fonction qui prend des valeurs extrêmement élevées près des bords de l'intervalle d'interpolation.
- On observe que l'interpolation (courbe orange) oscille de manière significative, surtout près des bords de l'intervalle, ce qui est caractéristique du phénomène de Runge.

Points de Tchebychev :

- Les points de Tchebychev sont utilisés pour minimiser les erreurs d'interpolation, surtout aux bords de l'intervalle.
- On les voit comme des points rouges sur le graphe, et ils sont répartis de manière non uniforme, avec une concentration plus élevée vers les extrémités de l'intervalle.

Interpolation Polynômiale :

- La courbe bleue montre le polynôme d'interpolation de degré 10 construit avec les points de Tchebychev.

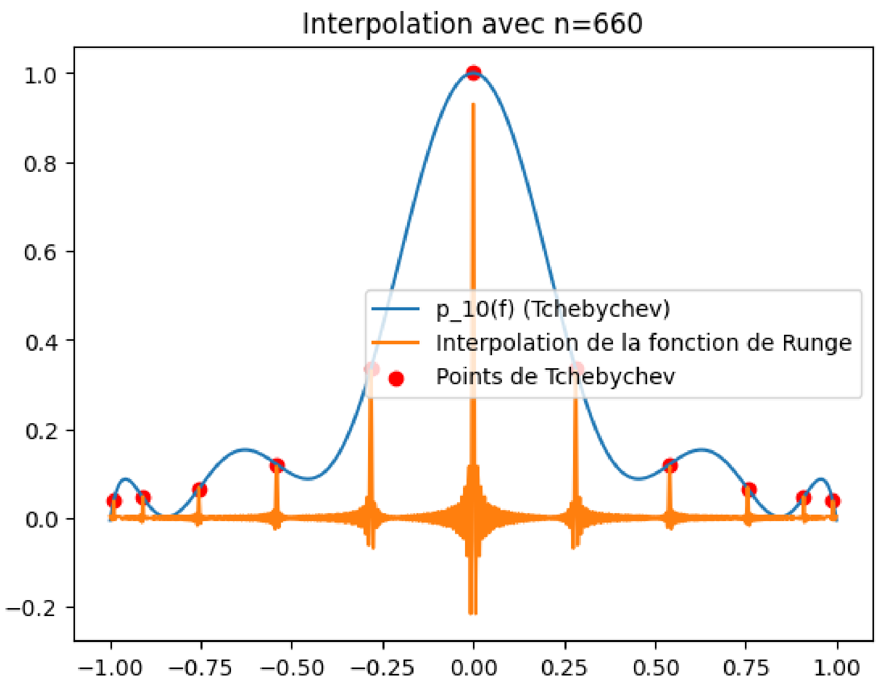


FIGURE 6 – Erreur d'interpolation en fonction de n

- Contrairement à l'interpolation de la fonction de Runge, cette courbe est beaucoup plus lisse et ne présente pas les oscillations extrêmes aux bords de l'intervalle.
- Cela démontre l'avantage d'utiliser des points de Tchebychev pour l'interpolation polynomiale afin de réduire l'effet de Runge.

Ce graphe illustre l'importance du choix des points d'interpolation. Utiliser des points de Tchebychev (courbe bleue) permet de produire une interpolation plus stable et plus précise de la fonction de Runge, contrairement à une interpolation standard qui oscille fortement aux extrémités (courbe orange). Cela met en évidence l'efficacité des points de Tchebychev pour les polynômes d'interpolation, en particulier pour des fonctions avec des comportements extrêmes comme la fonction de Runge.

7 Conclusion

Ce projet a permis d'explorer différentes méthodes d'interpolation polynomiale et d'analyser leurs performances. Les résultats montrent que l'utilisation des points de Tchebychev améliore significativement la précision de l'interpolation par rapport aux points équidistants, surtout pour des fonctions qui présentent de grandes variations. La décomposition en polynômes de Tchebychev offre une approche systématique pour obtenir des interpolations plus précises et stables. Ces outils et méthodes sont essentiels pour diverses applications en ingénierie et en sciences numériques.

8 Annexe

NB : Veullez exécuter successivement chaque cellule au niveau du google colab pour éviter les errreurs de reconnaissances.

Lien google colab vers **le code source**.