École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

TD2 : Estimation ponctuelle et distribution d'échantillonnage

Niveau : $3^{\text{ème}}$ année A-B

Exercice 1 :

L'erreur de mesure d'un capteur de précision est une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} k(1+\theta x) & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Où k est un paramètre réel et θ est un paramètre réel inconnu.

1. a. Déterminer le réel k pour que f définie bien une densité de probabilité.
   b. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On se propose d'estimer le paramètre θ. On note $(X_1, X_2, ..., X_n)$ les résultats des observations faites pendant n semaines. On suppose que $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et de même loi que X. On considère les estimateurs de θ suivants :

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad T_2 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{X_1 - X_2}{2}$$

   a. Etudier le biais de T_1.
   b. Déterminer le réel a pour que $T_1^{'} = aT_1$ soit un estimateur sans biais de θ.
   c. Peut-on dire, sans faire le calcul, que $T_1^{'}$ est meilleur que T_1 ? justifier votre réponse.
3. Montrer que T_2 est un estimateur sans biais de θ.
4. Etudier la convergence de $T_1^{'}$ et T_2.
5. Entre $T_1^{'}$ et T_2, lequel choisierez-vous pour estimer θ ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta - 1} & si\ \ x \in [1,\theta] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une fonction de densité de probabilité d'une v.a. X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. S'agit-t-il d'une loi usuelle ? Si oui, laquelle ?
4. On suppose que le paramètre θ est inconnu. On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$.
   (a) Trouver, en utilisant la méthode des moments, un estimateur $\hat{\theta}$ pour θ.
   (b) Etudier le biais et la convergence de $\hat{\theta}$.

Exercice 3 :

On considère n variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} & si \quad x \in]0, +\infty[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

(θ est un paramètre réel > 0).

1. (a) Déterminer la valeur de λ pour laquelle f_θ est bien une fonction de densité.
   (b) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
2. (a) En déduire un estimateur T_1 du paramétre θ par la méthode des moments.
   (b) L'estimateur T_1 est-il sans biais ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n-observations de l'echantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$
   (a) Déterminer la fonction de vraisemblance $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$.
   (b) Montrer que la log-vraisemblance associée aux observations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'écrit :

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = -2n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

4. (a) Déterminer l'estimateur T_2 du maximum de vraisemblance de θ.
   (b) L'estimateur T_2 est-il convergent ?

Exercice 4 :

L'inventaire de Padoue est un questionnaire portant sur les troubles obsessionnelles du comportement. Chez les adultes dépressifs, le score obtenu à ce questionnaire a pour moyenne 84 avec un écart type de 35. Des chercheurs s'intéressent alors aux scores moyens observés dans un échantillon de taille 75.

1. Caractériser la distribution de la moyenne empirique du score à l'inventaire de Padoue sur les échantillons 75 (formes et valeurs de ces paramètres).
2. Quelle est la probabilité d'observer sur un échantillon de taille 75 un score moyen inférieur à 90.
3. En dessous de quelle valeur se trouvent 95% des scores moyens observés sur un échantillon de taille 75.