Université Cheikh Anta DIOP de Dakar

Faculté des Sciences et Techniques

(F. S. T.)

Département de Mathématiques et Informatique

(D. M. I.)

Laboratoire d'Algèbre de Cryptologie de Géométrie Algébrique et Applications

(L. A. C. G. A. A.)

CHAPITRE 2 :

Notions de Topologie dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n$

Dr. Demba SOW, demba1.sow@ucad.edu.sn

Année académique 2022-2023

Table des matières

Chapitre 2

Notions de Topologie dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n$

Introduction : Dans cette partie du cours, nous allons aborder quelques notions de topologie qui vont nous permettre de donner des définitions rigoureuses de notions comme limite sur les suites et continuité d'une fonction dans le 3eme et 4eme chapitre. Ainsi nous aborderons des notions importantes telles que : voisinage, ouvert, fermé, point adhérent, norme, distance, point d'accumulation, et quelques théorèmes fondamentaux comme celui de Heine- Borel et de Bolzano-Weirstrass, etc,...

Pour mieux comprendre la topologie sur $\mathbb{R}$, on introduit aussi certaines notions pour $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Notions de Norme et Distance

. On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n,\ n > 1, n \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Notions de norme

Définition 2.1.1. *On appelle norme sur E, toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a les trois propriétés suivantes :*

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(y)$
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(x)$

Notation : $N(x)$ est souvent noté $\|x\|$ où $|x|$.

Exemple 2.1.2. *Montrer que :*

1. *sur $\mathbb{R}$, l'application valeur absolue est une norme.*

   $val : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto val(x) = |x|$

2. *sur $\mathbb{C}$, l' application "module" est une norme :*

   $modul : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, \ \ z \mapsto modul(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *si* $z = a + ib$

□

Normes sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$.

Opérations sur $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ □

Exemple 2.1.3. *On pose* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}$

Sur $\mathbb{R}^n$, montrer que les trois applications suivantes sont des normes.

$$\begin{array}{rcl} \|\ \ \|_1 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \mapsto & \|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i| \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \|\ \ \|_2 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}$$

$\|\ \ \|_2$ *est appellé norme euclidienne.*

$$\begin{array}{rcl} \|\ \ \|_\infty : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \max\{|x_i| 1 \leq i \leq n\} \end{array}$$

□

Définition 2.1.4. ***Normes équivalentes***

On dit que deux normes N_1 et N_2, sur $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}, ou\ \mathbb{R}^n$ sont équivalentes sur E, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x), \quad \forall x \in E$$

NB *: On verra l'intêret de l'équivalence sur les normes, plus loin.*

Exercice 2.1.5. *Montrer que les normes $\|\ \ \|_1, \|\ \ \|_2$ et $\|\ \ \|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. On pourra montrer que*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2.1.2 Notion de distance

Définition 2.1.6. *Soit X, un ensemble non vide. On appelle distance sur X, toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto d(x, y)$ telle que :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(non dégénérée).*
2. $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$ *(définie positive).*
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$ *(symétrie).*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in E$ *(Inégalité triangulaire).*

NB1 : Noter que (2) découle de (1), (3) et (4).

NB2 : Une distance est aussi appellée métrique.

Exemple 2.1.7. *Montrer que les applications suivantes sont des distances*

1. $U_1 :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |x^2 - y^2|$
2. $U_2 :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |\ln x - \ln y|$
3. $U_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |e^x - e^y|$
4. $U_4 :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$
5. $U_5 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |\tan x - \tan y|$

Exemple 2.1.8. *(Lien entre Norme et Distance) On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une norme. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur E.*

2.2 Boules ouvertes et fermés de $E = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^n, n > 1$

2.2.1 Cas de $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

NB : Dans cette sous-section, on ne considère que la norme définie par la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, celle définie par le module sur $\mathbb{C}$ et celle définie par la norme euclidenne sur $\mathbb{R}^2$.

Cas de $\mathbb{R}$

— Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle ouvert $I_o(c, r)$ de centre c et de rayon $r \quad (r > 0)$ est $]c - r, c + r[$.
$I_o(c, r) = \{x \in \mathbb{R}/d(x, c) < r\} = \{x \in \mathbb{R}/|c - x| < r\}$.

— L'intervalle fermé $I_f(c, r)$ de centre c et de rayon $r \quad (r \geq 0)$ est $[c - r, c + r]$
$I_f(c, r) = \{x \in \mathbb{R}/d(x, c) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}/|x - c| \leq r\}$

— Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert, alors $]a,b[= I_o(c,r)$ où $c = \dfrac{a+b}{2}, r = \dfrac{b-a}{2}$.

— De même $[a,b]$ est un intervalle fermé, et $[a,b] = I_f(c,r)$ où $c = \dfrac{a+b}{2}, r = \dfrac{b-a}{2}$

NB : L'invertalle $]a,b]$ n'est ni un intervalle ouvert, ni un intervalle fermé.

Cas de $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}^2$)

Dans $\mathbb{C}$, le disque ouvert de centre z_0 avec $z_0 = x_o + iy_o$ et de rayon r est

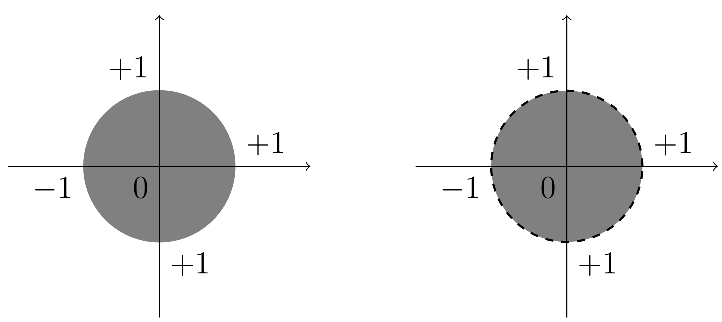
$$\begin{aligned} D_o(z_o,r) &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < r\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

Le cercle de centre $z_o = x_o + iy_o$ et de rayon r est noté $\mathcal{C}(z_o)$ et on a

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_o| = r\} = \{z = x+iy/(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = r^2\}$$

Le disque fermé de centre z_0 avec $z_0 = x_o + iy_o$ et de rayon r est

$$\begin{aligned} D_o(z_o,r) &= \{z = x+iy \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| \leq r\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} \leq r\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 \leq r^2\}. \end{aligned}$$



(a) **Dique fermé** (b) **Disque ouvert**

2.2.2 Cas général pour $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$

On a revisé comment on définie et note les intervalles, les disques et les cercles ; ici on généralise pour une norme quelconque.

Définition 2.2.1. *:*

On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$et $||.||$ une norme sur E.

1. *On appelle boule ouverte (ou* ***ouvert élémentaire****) de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_o^{||\cdot||}(a, r)$ défini par :*

$$B_o^{||\cdot||}(a, r) = \{x \in E / ||x - a|| < r\}.$$

2. *On appelle boule fermé de centre $A_o \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_f^{||\cdot||}(a, r)$ défini par :*

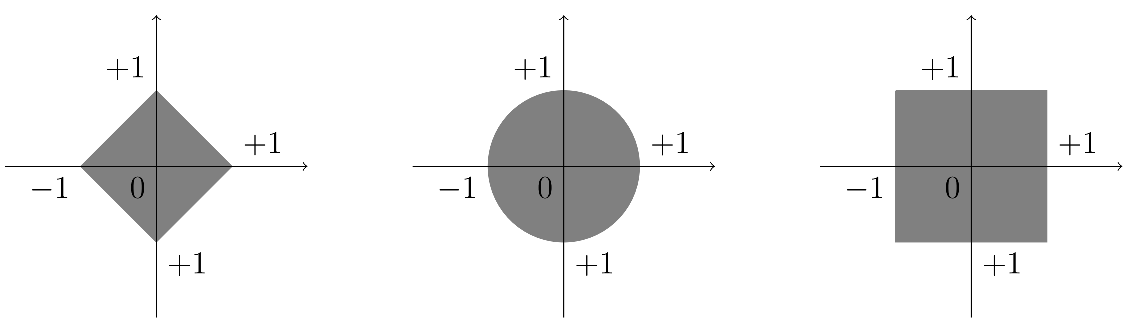
$$B_f^{||\cdot||}(a, r) = \{x \in E / ||x - a|| \leq r\}.$$

3. *On appelle sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble défini par :*

$$\mathcal{S}^{||\cdot||}(a, r) = \{x \in E / ||x - a|| = r\}.$$

Exemple 2.2.2. *En considérant les trois normes précédentes sur $\mathbb{R}^2$, on a les schemas suivants.*

FIGURE 2.1 – Boule fermée de centre O de rayon 1 ($B_f(0, 1)$)

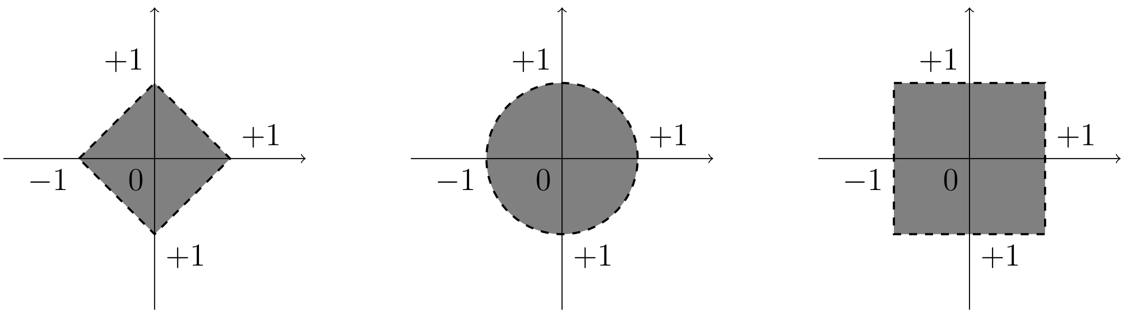


(a) $x \mapsto |x|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i|$

(b) $x \mapsto |x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$

(c) $x \mapsto |x|_\infty = \sup_{i=1,2} (|x_i|)$

FIGURE 2.2 – Boule ouverte de centre O de rayon 1 ($B_o(0,1)$)



(a) $x \mapsto |x|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i|$ (b) $x \mapsto |x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$ (c) $x \mapsto |x|_\infty = \sup_{i=1,2} (|x_i|)$

Partie bornée pour une norme

Une partie W de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$ est bornée pour la norme $||.||$ s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in W, ||x|| \leq M$

Exemple 2.2.3. .

1. *Montrer que si N, N', sont deux normes équivalentes sur E, alors W est borné sur E pour N, si et seulement si W est borné sur E pour N'.*
2. *Tout disque de $\mathbb{C}$ est borné. L'ensemble $A = \{(\dfrac{1-3i}{4})^n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$ alors que l'ensemble $B = \{(1+i)^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas borné dans $\mathbb{C}$.*
3. *Les ensembles $C_1 =]-24, 2[\cup]4, 21[\cup\{22\}$ et $D_1 =]-31, 12[$ sont bornés dans R alors que les ensembles $C_2 =]-\infty, 2[\cup]3, 17[\cup\{20\}$ et $D_2 = \{\frac{(-1)^n + n^2}{n\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}\}$ ne sont pas bornés dans $\mathbb{R}$.*

2.3 Voisinages, Parties ouvertes, Parties fermées

2.3.1 Voisinages

Définition 2.3.1. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}ou\ \mathbb{R}^n$. Soient N une norme sur E et a un point de E.*

***On appelle voisinage de** $a \in E$ **pour la norme** N**, une partie** V_a^N **de** E **contenant une boule ouverte de centre** a (c.a.d telle qu'il existe $B_o^N(a, r) \subseteq V_a^N$ avec $r > 0$).*

$V_a^N \backslash \{a\}$ est appelé voisinage pointé en a et est noté $\overset{\bullet}{V}{}_a^N$.

Exemple 2.3.2. *Quelsques exemples d'applications. (**Faire des schemas**)*

1. *Dans $\mathbb{R}$ avec la norme donné par la valeur absolue :*

(a) - $V =]-2, 3]$ *est un voisinage de* 0 *car* $]-1, 1[= B_0(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \in /|x - 0| < 1\} \subset V$.

- $V =]-2, 3]$ *est un voisinage de* 2,5 *car* $]2, 3[= B_0(2,5; 0,5) = \{x \in \mathbb{R} \in /|x - 2,5| < 0,5\} \subset V$.

- $V =]-2, 3]$ *n'est pas un voisinage de* -2, *en effet, soit* $B_0(-2; r) = \{x \in \mathbb{R} \in /|x + 2| < r\}$, *une boule ouverte quelconque. Alors,* $B_0(-2; r) \nsubseteq V$ *car* $x_0 = \frac{-2+(-2-r)}{2} = \frac{-4-r}{2} \in B_0(-2; r)$ *et* $x_0 \notin V$.

- $V =]-2, 3]$ *n'est pas un voisinage de* 3, *en effet, soit* $B_0(3; r) = \{x \in \mathbb{R} \in /|x - 3| < r\}$, *une boule ouverte quelconque. Alors,* $B_0(3; r) \nsubseteq V$ *car* $y_0 = \frac{3+(3+r)}{2} = \frac{6+r}{2} \in B_0(3; r)$ *et* $y_0 \notin V$.

- $V =]-2, 3]$ *n'est pas un voisinage de* 3,001, *car* $3,001 \notin V$.

(b) $W =]-2, 3] \cup \{4\} \cup]5, 6[$ *est un voisinage de* 2 *et* 5,0001 *mais n'est pas un voisinage de* 3, 4 *et* 5.

(c) $]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[$ *est un voisinage pointé de* x_0.

2. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme euclidienne :* $T =]-2, 1] \times]0, 3[\cup \{3\} \times]-1, 1[$ *est un voisinage de* $(-1,5;\ 1)$ *mais n'est pas un voisinage de* $(1;\ 2)$ *ni de* $(3;\ 0,5)$.

3. *Dans* $\mathbb{C}$ *muni de la norme euclidienne (donnée par le module) :* $\{z \in \mathbb{C}/0 < |z - z_0| < r\} = B_o(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ *est un voisinage pointé de* z_0.

Lemme 2.3.3. *On pose* $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$. *Soient* N *une norme sur* E, a *un point de* E *et* V *une partie de* E . *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. V *est un voisinage de* a,
2. V *contient un boule ouverte centre* a *et de rayon* $\frac{1}{n}$ *pour un entier* n *adéquat,*
3. V *contient un boule ouverte contenant* a.

Preuve (**Faire des schemas**)

— (1) $\Rightarrow$ (2) Comme V est un voisinage de a, alors, il existe $r > 0$, tel que $B_o(a, r) \subset V$. Cherchons n tel que $B_o(a, \dfrac{1}{n}) \subset B_o(a, r) \subset V$. Soit $x \in B_o(a, \frac{1}{n})$ alors $N(x - a) < \frac{1}{n}$, donc il suffit de choir n tel que $\frac{1}{n} < r$ $\big($par exemple, on peut prendre $n \geq E(\dfrac{1}{r}) + 1\big)$, pour avoir le résulat recherché).

— (2) $\Rightarrow$ (3) Trivial.

— (3) $\Rightarrow$ (1) On note d la distance induite par la norme donc $d(x, y) = N(x - y)$. Soit $B(b, r) \subset V$ une boule de centre b et de rayon $r > 0$ contenant a. Cherchons r' tel que alors $B(a,r') \subset B(b,r) \subset V$. On pose $r' = \min\{d(a,b), r - d(a,b)\}$. Si $x \in B(a,r')$ (faire un dessin), on a $d(a,x) < r'$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(b,x) \leq d(b,a) + d(a,x) &\leq d(b,a) + r' \\ &\leq d(a,b) + \min\{d(a,b), r - d(a,b)\} \\ &= \begin{cases} d(a,b) + d(a,b) = 2d(a,b) \leq r, & \text{si } d(a,b) \leq \frac{r}{2} \\ d(a,b) + r - d(a,b) = r, & \text{si } d(a,b) \geq \frac{r}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

par suite, on a bien, $B(a,r') \subset B(b,r) \subset V$.

□

Remarque 2.3.4. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$. Soient N une norme sur E, a un point de E.*

D'après le lemme précdent, toute boule ouverte de centre a est un voisinage de a et tout voisinage de a contient une boule ouverte de centre a.

*On dit que **l'ensemble des boules ouvertes de centre** a **est un système fondamental de voisinage de** a.*

□

Remarque 2.3.5. *. En considérant la norme donnée par la valeur absolue dans $E = \mathbb{R}$, le lemme précedent se décline comme suit. Dans $\mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *V_{x_o} est un voisinage de x_o*
2. *Il existe $r > 0$, tel que $B_o(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\} =]x_o - r, x_o + r[\subseteq V_{x_o}$*
3. *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_o(x_0, \dfrac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < |x - x_0| < \dfrac{1}{n}\} =]x_o - \dfrac{1}{n}, x_o + \dfrac{1}{n}[\subseteq V_{x_o}$,*
4. *Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $x_o \in]a, b[\subseteq V_{x_o}$.*

Lemme 2.3.6. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$. Soient N, N' deux normes équivalentes sur E et a un point de E. Alors, une partie V_a de E est un voisinage de a pour N si et seulement si V_a est un voisinage de a pour N'.*

Preuve Cours magistral. □

Remarque 2.3.7. ***(Important)***

1. *On montre (voir le cours de Topologie de la Licence L3 Math) que toutes les normes sur $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*
2. *En couplant cette remarque et le résultats du lemme précédent, on voit que sur $E = \mathbb{R}, \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n$, le voisinage d'un point ne dépend pas de la norme qu'on choisit.*

   Ainsi, dans le suite de ce cours, on ne précisera plus la norme choisie.

2.3.2 Parties ouvertes

Définition 2.3.8. *On pose $E = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{R}^n$. Une partie $\mathbb{O}$ de E est dite ouverte si $\mathbb{O}$ est vide ou bien est un voisinage de chacun de ses points.*

Si une partie $\mathbb{O}$ de E est ouverte, on dit que $\mathbb{O}$ est un ouvert.

Noter que toute boule ouverte est un ouvert et E est un ouvert.

Cas particulier

Si $E = \mathbb{R}$, une partie $\mathbb{O}$ est ouverte si elle est soit vide, soit pour chacun de ses points, elle contient un intervalle ouvert le contenant. Autrement $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}$ est ouverte ssi $\forall x \in \mathbb{O},\ \exists\ ]a, b[/\ x \in]a, b[\subset \mathbb{O}$.

Exemple 2.3.9. .

1. - $A_1 =]-1, 4[$ *est un ouvert dans* $\mathbb{R}$.
2. $A_2 =]-2; +\infty[$ *est un ouvert dans* $\mathbb{R}$ *car si* $x \in A_2 =]-2; +\infty[$ *alors* $x \in]-2, x+1[\subset A_2 =]-2; +\infty[$.
3. $A_3 =]-2; 3]$ *n'est pas un ouvert, en effet, pour* $x_0 = 3 \in A_3 =]-2; 3]$, *soit* $]a, b[$ *un interval qualconque contenant* $x_0 = 3$, *alors* $]3, b[\not\subseteq A_3$, *par suite* A_3 *n'est pas un voisiange de* 3. *Ainsi,* $A_3 =]-2; 3]$ *n'est pas un ouvert.*
4. $A_4 =]2, 7[\cup]8, 9[$ *et* $D = \mathbb{R}^*$ *sont des ouverts.*
5. $A_5 =]2, 7[\cup [8, 9[$ *et* $G = \{-1\} \cup]2, +\infty[$ *ne sont pas des ouverts.*

Proposition 2.3.10. *Soit $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

1. P1 : *Soient* $\mathbb{O}_1$, $\mathbb{O}_2, \ldots, \mathbb{O}_p$ *des ouverts de* E *alors* $\cap_{i=1}^{n} \mathbb{O}_i$ *est un ouvert de* E.
2. P2 : *Soit* $(\mathbb{O}_i)_{i \in I}$ *une famille quelconque d'ouverts , alors* $\cup_{i \in I} \mathbb{O}_i$ *est un ouvert.*
3. P3 : E *et* $\emptyset$ *sont des ouverts.*

Preuve : Cours magistral □

Remarques 2.3.11. .

1. *Une intersection arbitraire d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.*
   Par exemple, $\displaystyle\bigcap_{n \in N^\star}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ *n'est pas un ouvert.*
2. *Montre que* $V \subset E$ ***est un voisinage d'un point*** $a \in V$ ***si et seulement si*** V ***contient un ouvert contenant*** a.

Remarques 2.3.12. ***Important***

1. *On dit que l'ensemble des ouverts définit une topologie sur E.*
2. *De façon plus général, si F est un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{F}$ est une famille de partie de F verifiant les propriétés* P1, P2 *et* P3, *on dit que : $\mathcal{F}$ définie une structure topologique sur F ou est une topologie sur F et dans ce cas les éléments de $\mathcal{F}$ sont appélés des ouverts.*
3. *Il n'est pas nécessaire d'avoir une norme sur un ensemble F pour pouvoir y définir une topologie et ainsi parler d'ouverts et de fermés.*
4. *Par exemple :*
   (a) *Pour tout ensemble F, la famille de parties $\mathcal{F} = \{\emptyset, F\}$ définie une topologie sur F appelée la topologie grossière de F. Dans ce cas, si $x \in F$ son seul voisinage est F.*
   (b) *Pour tout ensemble non vide F, l'ensemble de toutes les parties de F (noté $\mathcal{F} = \mathcal{P}(F)$) définie une topologie sur F appelée la topologie discrète de F. Dans ce cas, si $x \in F$ n'importe quelle partie de F contenant x est un voisingage de x et en particulier $\{x\}$ est un voisinage de x*

Exemple 2.3.13. .

1. *Dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, -5[\cup]-1, 11[$ et $]1, 3[\cup]4, 13[$ sont des ouverts.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, $]-5, 2[\cup[3, 7[$ et $]2, 3[\cup\{4\}\cup]5, 6[$ ne sont pas des ouverts .*
3. *Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(u, v) \ / \ 1 < u^2 + v^2 < 4\}$ est un ouvert .*
4. *Dans $\mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| \leq 1\}$ n'est pas un ouvert.*

□

Extension de la notion de voisinage à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Définition 2.3.14. .

1. *Dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$.*
   (a) *- On dit qu'un ensemble noté $V_{+\infty}$, est un voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $V_{+\infty}$, contient un intervalle de la forme $]b, +\infty]$. Les ensembles de la forme $]b, +\infty]$, constituent un système fondamental de voisnage de $+\infty$.*
   - $\mathbb{O} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un ouvert s'il est voisnage de chacun de ses points dans $\overline{\mathbb{R}}$.
   (b) *On dit qu'un ensemble noté $V_{-\infty}$, est un voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $V_{-\infty}$, contient un intervalle de la forme $[-\infty, a[$. Les ensembles de la forme $[-\infty, a[$, constituent un système fondamental de voisnage de $-\infty$.*

2. *- Dans* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$*. On dit qu'un ensemble not{e* V_∞*, est un voisinage de* ∞ *dans* $\overline{\mathbb{C}}$ *si* V_∞*, contient le complémentaire d'une boule fermé : par exemple il existe* $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+$ *tels que* $\{z/||z - z_0|| > r\}$*. Les ensembles de la forme* $\{z/||z - z_0|| > r\}$*, constituent un système fondamental de voisnage de* $\{z/||z - z_0|| > r\}$*.*

   - - $\mathbb{O} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *est un ouvert s'il est voisnage de chacun de ses points dans* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

Exemple 2.3.15. *.*

1. *-* $B_1 =]-2; +\infty[$ *et* $B_2 =]-2; +\infty]$ *sont tous les deux des ouverts dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

   - $B_3 =]-2; 3[\cup\{+\infty\}$ *n'est pas un ouvert dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*
2. $\{z/1 < |z - z_0| < 2\}$ *est un ouvert de* $\overline{\mathbb{C}}$*.*
3. $\{z_0\} \cup \{z/|z - z_0| > 2\}$ *est un voisinage de* ∞ *dans* $\overline{\mathbb{C}}$*, mais n'est pas un ouvert de* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

2.3.3 Partie fermée

Définition 2.3.16. *On pose* $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^n$*. On dit qu'une partie* $\mathbb{F}$ *de* E *est un fermée (ou est un fermé) si son complémentaire* $\mathbb{F}^c = E \setminus \mathbb{F}$ *est un ouvert.*

ATTENTION :

1. Le contraire d'un "ouvert" n'est pas un fermé. (contraire $\neq$ complementaire)
2. Il existe des parties ni ouvertes ni fermées comme $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.17. ***(Faire des schémas)***

1. *-* $A = [-1, 4]$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$*, car* $A^c =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty$ *est un ouvert puiqu'on a une réunion de deux ouverts.*

   - $B =]-\infty, -3] \cup [-2; +\infty[$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$*, car* $B^c =]-3; -2[$ *est un ouvert.*

   - $C =]-2; 3]$ *n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$*, car* $C^c =]-\infty, -2]\cup]3; +\infty[$ *n'est pas un ouvert, en effet, soit* $]a, b[$ *un interval qualconque contenant* $x_0 = -2$*, alors* $]3, \min\{b, 3\}[\nsubseteq B$*, par suite* C *n'est pas un voisiange de* 3*. Ainsi,* $C =]-2; 3]$ *n'est pas un ouvert.*
2. *-* $D = [2, 7] \cup [8, 9]$ *et* $H = [0, +\infty[$ *sont des fermés de* $\mathbb{R}$*.*

   - $G = [2, 7[\cup]8, 9[$ *et* $K = \{-1\}\cup]2, +\infty[$ *ne sont pas des fermés de* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 2.3.18. *On pose* $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^n$*.*

1. *Soient* $\mathbb{F}_1$*,* $\mathbb{F}_2$*, ...,* $\mathbb{F}_p$ *des fermés de* E *alors* $\cup_{i=1}^n \mathbb{F}_i$ *est un fermé.*
2. *Soit* $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ *une famille de fermés alors* $\cap_{i\in I}\mathbb{F}_i$ *est fermé.*

Preuve : Utiliser la proposition précédente et les lois de MORGAN.

□

Exemple 2.3.19. .

Quelques exemples dans $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$.

1. *E est un fermé, l'ensemble vide $\emptyset$ est un fermé. Toute boule fermée est un fermé.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, -5]$ et $[1,3] \cup [4,13]$ sont des fermés.*
3. *Dans $\mathbb{R}$, $]-5,2[\cup[3,7[$ et $]2,3[\cup\{4\}\cup]5,6[$ ne sont pas des fermés .*
4. *Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(u,v)\ /\ 4 \leq u^2+v^2 < 9\}$ n'est pas un fermé.*
5. *Dans $\mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 4\}$ est un fermé.*

□

Remarques 2.3.20. *Une réunion arbitraire de fermés n'est pas forcement un fermé.*

Par exemple, $\cup_{n\geq 2}[1+\frac{1}{n}; 2-\frac{1}{n}]$ est un ouvert car $\cup_{n\geq 2}[1+\frac{1}{n}; 2-\frac{1}{n}] =]1;2[$.

En effet : $\cup_{n\geq 2}[1+\frac{1}{n}; 2-\frac{1}{n}] \subseteq]1;2[$ et si $x \in]1,2[$ trouvons n_0 tel que $1+\frac{1}{n_0} < x < 2-\frac{1}{n_0}$.
Il suffit de prendre $n_0 \geq max\big\{E(\frac{1}{2-x}), E(\frac{1}{x-1})\big\} + 1$.

2.4 Intérieur, Adhérence, Frontière

2.4.1 Intérieur

Définition 2.4.1. *Soit A une partie de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Un élément $x \in A$ est intérieur à A si A est un voisinage de x. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des éléments intérieur à A.*

Ainsi, $\overset{\circ}{A} = \{x \in E / \exists r > 0,\ B_o(x,r) \subseteq A\} = \{x \in E / \exists \mathbb{O} ouvert,\ x \in \mathbb{O} \subseteq A\}$.

Exemple 2.4.2. ***(Faire des schemas)***

1. *- Dans $\mathbb{R}$, si $A = [-1,4[$ alors $\overset{\circ}{A} =]-1,4[$ car $]-1,4[$ est un ouvert contenu dans A et que -1 n'est pas intérieur à A. En effet, si $]a,b[$ est un intervalle ouvert quelconque contenant -1, alors $]a,-1[\subset]a,b[$ et $]a,-1[\nsubseteq A$, ainsi $-1 \notin \overset{\circ}{A}$. Par suite $\overset{\circ}{A} =]-1,4[$.*
   - Dans $\mathbb{R}$, si $B =]-\infty,-3] \cup \{-2\} \cup]4;+\infty[$, alors $\overset{\circ}{B} =]-\infty,-3[\cup]4;+\infty[$, car $]-\infty,-3[\cup]4;+\infty[$ est un ouvert contenu dans B et que -3 et -2 ne sont pas intérieur à B. En effet, si $]a,b[$ est un intervalle ouvert quelconque contenant -3, alors $]-3, \min\{b;-2,5\}[\subset]a,b[$ et $]-3,\min\{b;-2,5\}[\nsubseteq B$, ainsi $-3 \notin \overset{\circ}{B}$.

De même, si $]a,b[$ *est un intervalle ouvert quelconque contenant* -2*, alors* $]\max\{a;-2,5\},-2[\subset]a,b[$ *et* $]\max\{a;-2,5\},-2[\not\subseteq B$*, ainsi* $-2\notin\overset{\circ}{B}$.

2. - *Si* $C=\{-1\}\cup[2,7]\cup[8,9[\cup\{10\}$ *alors* $\overset{\circ}{C}=]2,7[\cup]8,9[$.
   - *Si* $G=[2,7[\cup]8,9[$ *alors* $\overset{\circ}{D}=]2,7[\cup]8,9[$.

□

Proposition 2.4.3. *On pose* $E=\mathbb{R},\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^n$*. Soit* A *une partie de* E*.*

1. $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A*.*
2. A *est ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A}=A$

Preuve :

1. - Soit $x\in\overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert $\mathbb{O}$ tel que $x\in\mathbb{O}\subseteq A$ or $\mathbb{O}$ est un voisinage de x par conséquant $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
   - Soit $\mathbb{O}$ un ouvert contenu dans A, alors tout point de $\mathbb{O}$ est dans $\overset{\circ}{A}$, donc $\mathbb{O}\subseteq\overset{\circ}{A}$! Par suite $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
2. Découle de (1) et du fait que $\overset{\circ}{A}\subseteq A$.

□

Proposition 2.4.4. *On pose* $E=\mathbb{R},\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^n$*. Soient* A *et* B *des parties de* E*. Alors*

1. $A\subset B\Rightarrow\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$,
2. $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}\subseteq\overset{\circ}{\overbrace{A\cup B}}$ *et la réciproque est fausse en général.*
3. $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}=\overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}}$.

Preuve Cours magistral □

Exemple 2.4.5. *Quelques exemples dans* $E=\mathbb{R},\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}^2$*.*

1. *Dans* $\mathbb{R}$*, l'intérieur de* $\mathbb{Q}$ *est l'ensemble vide.*
2. *Dans* $\mathbb{R}$*, l'intérieur de* $]-5,3]\cup\{4\}\cup[6,8]\cup\{11\}$ *est* $]-5,3[\cup]6,8[$
3. *Dans* $\mathbb{C}$*, on pose* $H=B_o(z_0=2,1)\cup B_f(z_1=-2,1)\cup\{z=x+iy/(x,y)\in[0,1]\times\{0\}\}$ *l'intérieur de* H *est* $B_o(z_0=2,,1)\cup B_o(z_1=-2,1)$
4. *Dans* R^2*, on pose* $G=[-1,0]\times[1,2[\cup B_f\left((-3,-2),2\right)\cup\{-2\}\times[-1,2[$ *l'intérieur de* G *est* $]-1,0[\times]1,2[\}\cup B_o\left((-3,-2),2\right)$ *;*
5. *Dans* $\mathbb{C}$*, on pose* $K=\{z\in\mathbb{C}\setminus|z|=1\}$ *l'intérieur de* K *est* $\emptyset$*.*

□

2.4.2 Adhérence

Définition 2.4.6. *Soit A une partie de $E=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Un élément $x\in A$ est adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérant à A est noté $\overline{A}$.*

On l'appelle adhérence (ou fermeture) de A (ne pas confondre avec "complémentaire") et on a :

$$\overline{A}=\left\{x\in E/\forall\ V_x,\ V_x\cap A\neq\emptyset\right\}=\left\{x\in E/\forall r>0, B_o(x,r)\cap A\neq\emptyset\right\}$$

Noter que tout élément de A est adhérent à A c'est à dire $A\subseteq\overline{A}$.

Exemple 2.4.7. ***(Faire des schemas)***

1. *Dans $\mathbb{R}$, si $A=[-1,4[$ montrons que $\overline{A}=[-1,4]$. On sait que $[-1,4]$ est un fermé contenant A. Montrons que 4 est adhérent à A, puis montrons que si $x<-1$ ou $x>4$, alors x n'est adhérent pas à $A=[-1,4[$.*

   - Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert quelconque contenant 4, alors $]\max\{-1;a\};4[\subset]a;b[\cap A\neq\emptyset$ donc 4 est adhérent à A.

   - Si $x>4$ alors $]4,+\infty$ est un ouvert contenant x qui ne rencontre pas A, donc x n'est adhérent pas à $A=[-1,4[$.

   - Si $x<-1$ alors $]-\infty,-1[$ est un ouvert contenant x qui ne rencontre pas A, donc x n'est adhérent pas à $A=[-1,4[$.

2. *- Dans $\mathbb{R}$, si $B=]-\infty,-3]\cup\{-2\}\cup]4;6[$, alors $\overline{B}=]-\infty,-3]\cup\{-2\}\cup[4;6]$.*

3. *- Dans $\mathbb{R}$, si $C=\{-1\}\cup]2,7]\cup\{9\}\cup]10;+\infty[$ alors $\overline{C}=\{-1\}\cup[2,7]\cup\{9\}\cup[10;+\infty[$.*

□

Proposition 2.4.8. *Soit A une partie de $E=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

1. $\overset{\circ}{A^c}=\overline{A}^c$
2. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A* $\left(\text{donc } \overline{A}=\bigcap\limits_{A\subset F,\ \text{fermé de } E} F\right)$.
3. *De plus A est fermé si et seulement si $\overline{A}=A$.*

Preuve :

1. - Soit $T=A^c$. Soit $x\in\overline{A}^c$, alors il existe $r_0>0$ tel que $B(x,r_0)\cap A=\emptyset$, donc $B(x,r_0)\subseteq A^c=T$, d'où $x\in\overset{\circ}{T}$, c'est à dire que $\overline{A}^c\subseteq\overset{\circ}{T}$.

   - Par contraposé, $x\in\overline{A}$ alors tout voisinage de x rencontre A donc aucun voisinage de x n'est inclus dans $A^c=T$ par suite $x\notin\overset{\circ}{T}$.

   On conclue que $\overset{\circ}{T}=\overline{A}^c$, donc $\overline{A}^c$ est un ouvert d'où $\overline{A}$ est un fermé.

2. - D'après la question précédente, $\overset{\circ}{A^c} = \overline{A}^c$, alors $\overline{A}$ est fermé car son complémentaire est un ouvert.

   - Soit H un fermé contenant A, alors H^c est un ouvert et $H^c \subseteq A^c = T$ et donc $H^c \subseteq \overset{\circ}{T}$ car $\overset{\circ}{T}$ est le plus grand ouvert contenu dans $T = A^c$. Or $\overset{\circ}{T} = \overline{A}^c$, donc on a bien $\overline{A} \subseteq H$.

3. Découle de (1) et du fait que $A \subseteq \overline{A}$.

□

Proposition 2.4.9. *Soiten A, B deux partie de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Alors :*

1. *$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,*
2. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et*
3. *$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et la réciproque est fausse en général).*

Preuve : Voir la correction de l'exercice 21. □

Exemple 2.4.10. *Quelques exemples dans $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$.*

— *Dans $\mathbb{R}$, si $A] - 5, 1] \cup \{2\} \cup]3, 5[$ alors $\overline{A} = [-5, 1] \cup \{2\} \cup [3, 5]$*

— *Dans $\mathbb{R}^2$, si $A =] - 1, 3] \times [0, 1]$ alors $\overline{A} = [-1, 3] \times [0, 1]$*

— *Dans $\mathbb{C}$, si $B = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1; 0 < argz < \frac{\pi}{6}\}$ alors $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1; 0 \leq argz \leq \frac{\pi}{6}\}$*

Partie dense

Définition 2.4.11. *Une partie D de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$ est dense dans E si $\overline{D} = E$.*

Exemple 2.4.12. *On a déjà vu que $\overline{Q} = \mathbb{R}$.*

2.4.3 Frontière

Définition 2.4.13. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Soit A une partie de E, on appelle frontière de A, notée ∂A où $Fr(A)$, l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$*

Exemple 2.4.14. *Dans $\mathbb{R}$, si$A = [-5, 3[$ alors $\partial A = \{-5, 3\}$. Si $B =]2, 3[$ alors $\partial B = \{2, 3\}$.*

□

Proposition 2.4.15. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Soit A une partie de E alors $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.*

Preuve

Par définition $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. On a $x \notin \overset{\circ}{A}$ ssi aucun voisinage de x n'est inclus dans A autrement dit tout voisinage de x rencontre A^c ce qui équivaut $x \in \overline{A^c}$. Ainsi $x \notin \overset{\circ}{A} . \Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$. □

Proposition 2.4.16. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

Soient A et B deux parties de E. Alors, on a :

1. $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$
2. $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Preuve :

1. $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ car $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Comme $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, alors, on a $\partial(A \cup B) \subset \overline{A} \cup \overline{B} \setminus \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) = \partial A \cup \partial B$, car $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{B} \subset \overline{B}$.
2. $\partial(A \cap B) = \overline{A \cap B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$, car on sait que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   Comme $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, alors, on a
   $\partial(A \cap B) \subset \overline{A} \cap \overline{B} \setminus \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) = \partial A \cup \partial B$ car $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{B} \subset \overline{B}$.

□

Exemple 2.4.17. .

— *Dans $\mathbb{R}$, si $C =]2,3[\cup \{5\} \cup [6,7[$ alors $\partial C = \{2,3,5,6,7\}$.*
— *Dans $\mathbb{C}$, si $A = \{z = x + iy / (x,y) \in]-1,0] \times [2,5]\}$ alors $\partial A = \{z = x + iy / (x,y) \in \{-1\} \times [2,5] \cup \{0\} \times [2,5] \cup [-1,0] \times \{2\} \cup [-1,0] \times \{5\}\}$ = le périmetre du rectangle A*
— *Dans $\mathbb{R}^2$, si $B = B_o\big((-1,2),1\big) \cup B_f\big((7,-2),2\big) \cup \{0\} \times [0,-2]$, alors $\partial B = \mathcal{C}\big((-1,2),1\big) \cup \mathcal{C}\big((7,-2),2\big) \cup \{0\} \times [0,-2]$ où $\mathcal{C}((x,y),r)$ est un cercle de centre (x,y) et de rayon r.*

□

2.5 Points d'accumulation et Points isolés

2.5.1 Points d'accumulation

Définition 2.5.1. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. Soit A une partie de E.*

Un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x rencontre A en un autre point qui n'est pas x.

L'ensemble des points d'accumulation de A est noté A' et est appelé ensemble dérivé de A.

$x \in A' \;\Leftrightarrow\; \forall V_x,\; V_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \forall r > 0, B_o(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$

Noter que $A' \subset \overline{A}$.

Exemple 2.5.2. *1. Dans $\mathbb{R}$, on pose $A =]-5,3] \cup \{4\} \cup]5,7[$*

- *-5 est un point d'accumulation de A. En effet, soit $]a,b[$ un intervalle ouvert quelconque contenant -5 alors $]-5; \min\{3,b\}[\subset]a;b[\cap (A \setminus \{-5\}) \neq \emptyset$.*
- *6 est un point d'accumulation de A. En effet, soit $]a,b[$ un intervalle ouvert quelconque contenant -5 alors $]6; \min\{7,b\}[\subset]a;b[\cap (A \setminus \{6\}) \neq \emptyset$.*
- *4 n'est pas un point d'accumulation bien que $4 \in A \subseteq \overline{A}$. En effet $]3;5[\cap (A \setminus \{4\}) = \emptyset$.*
- *Plus généralment $A' = [-5,3] \cup [5,7] \subset \overline{A}$*

2. Dans $\mathbb{C}$, on pose $S = \{z = x+iy / -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, (x,y) \neq (0,0)\}$ alors tout element de $\overline{U} = \{z = x+iy / -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ est un point d'accumulation c'est à dire que $S' = \overline{U}$ pour cette exemple.

□

Proposition 2.5.3. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

Soit A une partie non vide de E. x_o est un point d'accumulation de A ssi tout voisinage de x_o contient une infinité d'elements de A.

Preuve

- ($\Leftarrow$ trivial
- $\Rightarrow$) (Par l'absurde) Supposons qu'l existe une boule ouverte $B_o(x_o, r)$ qui contienne uniquement un nombre fini d'elements de A qu'on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'ensemble $\{\|x_o - x_i\| 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble fini de réels positifs donc admet un plus petit element $\|x_o - x_{i_o}\| = r_o$. Alors la boule ouverte $B_o(x_o, r_o)$ ne contient aucun element de A. Ce qui contredit l'hypothèse que x_o est un point d'accumulation de A.

□

Conséquences

- Seuls les sous ensembles infinis de $E(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ peuvent avoir des points d'accumulation. Mais attention : un ensemble infini (non borné) peut ne pas avoir des points d'accumulation

Par contre un ensemble infini borné de réels admet toujours des points d'accumulations (voir le théorème de Bolzano Weirstrass plus loin)

1. Dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$ n'a pas de points d'accumulation. (comparer avec $\overline{\mathbb{R}}$ ci-dessous) .
2. Dans $\mathbb{C}$: $\{m + in/(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ n'a pas de points d'accumulation. (comparer avec $\overline{\mathbb{C}}$ ci-dessous)
3. Dans $\mathbb{C}$: $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ (avec $i^2 = -1$) n'a pas de points d'accumulation.

— $A' \subseteq A$ et $\overline{A} \setminus A' \subset A$ (voir point isolé ci-dessous).

2.5.2 Points isolés

Définition 2.5.4. *On pose $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

Soit A une partie non vide de E.

Un point $x \in A$, est dit isolé s'il existe un voisinage V_x de x qui ne rencontre A qu'au point x.

Autrement dit, $x \in A$ est isolé s'il existe V_x tel que $V_x \cap A = \{x\}$.

Donc, l'ensemble des points isolés est $A \setminus A'$ car un point de A qui n'est pas un point d'accumulation de A est forcément un point isolé de A et réciproquement.

Exemple 2.5.5. .

1. *Dans $\mathbb{R}$: - Tous les points de l'ensemble $A = \{2 - \frac{3}{n+1}/n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des points isolés. 2 est le seul poin d'accumulation de A.*

   ***Preuve** :*

   - La suite des termes $2 - \frac{3}{n+1}$ est strictement croissante donc l'intervalle ouvert $]2 + \frac{3}{n}, 2 - \frac{1}{(n+2}[$ ne contient que le seul terme $2 - \frac{3}{n+1}$ ainsi $2 - \frac{3}{n+1}$ est un point isolé pour tout $n > 0$.

   - Soit $\varepsilon > 0$, cherchons s'il existe n_0 tel que $2 + \frac{3}{n_0+1} \in]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$. Comme $2 + \varepsilon > 2 - \frac{3}{n+1} > 0, \forall n > 0$, il suffit d'avoir $2 - \varepsilon < 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, donc on peut prendre $n_0 = E\big(\frac{3}{\varepsilon} - 1\big) + 1$. Ainsi 2 est un point d'accumulation.
2. *Dans $\mathbb{C}$: soit $B =]0,1[\times] - 1, 1[\cup (-1, 1)$, alors $(-1; 1)$ est un point isolé.*
3. *Dans $\mathbb{C}$: soit $S = \{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = 2\} \cup \{z = 0\}$, alors $z = 0$ est un point isolé.*

Exemple 2.5.6. *Montrer que 3 est le seul pont d'accumulation de $A = \{3 + \frac{1}{2n+7}, n \in \mathbb{N}\}$*

Preuve *- La suite des termes* $3+\frac{1}{2n+7}$ *est strictement décroissante donc l'intervalle ouvert* $]3+\frac{1}{2(n+1)+7}, 3+\frac{1}{2(n-1)+7}[$ *ne contient que le seul terme* $3+\frac{1}{2n+7}$ *ainsi* $3+\frac{1}{2n+7}$ *est un point isolé pour tout* n*.*

- Soit $\varepsilon > 0$*, cherchons s'il existe* n *tel que* $3+\frac{1}{2n+7} \in]3-\varepsilon, 3+\varepsilon[$*. Comme* $3+\frac{1}{2n+7} > 0$ *il suffit d'avoir* $3+\frac{1}{2n+7} < 3+\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n+7} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}-7)$*. Ainsi 3 est un point d'accumulation.*

□

2.6 Complément pour $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{C}}$

Définition 2.6.1. *Ici, on étant la notion de voisinage pour* $+, -\infty$*.*

- *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, un voisinage de* ∞ *est une partie* V_∞ *de* $\overline{\mathbb{R}}$ *contenant un intervalle de la forme* $]a, \infty]$*,* $a \in \mathbb{R}$*.*
- *De même un voisinage de* $-\infty$ *est une partie* $V_{-\infty}$ *de* $\overline{\mathbb{R}}$ *contenant un intervalle de la forme* $[-\infty, b[$*,* $b \in \mathbb{R}$*.*

Exemple 2.6.2. .

- *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, on a* $A =]-2, 3] \cup [7, +\infty[$ *n'est pas un voisinage de* $+\infty$ *car* $+\infty \notin A$ *mais* $\overline{A}$ *est un voisinage de* $+\infty$*.*
- *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, on a* $B = [-\infty, 1] \cup [2, 3]$ *est pas un voisinage de* $-\infty$*.*

□

Définition 2.6.3. *Dans* $\mathbb{C}$*, on appelle voisinage du point à l'infini (noté* ∞*), l'extérieur d'un disque fermé (le complémentaire) c'est à dire* $\forall V_\infty$ *dans* $\mathbb{C}$*, il existe* $(b, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^\star$ *tel que* $\{z \in \mathbb{C} / |z-b| > r\} \subseteq V_\infty$*. On peut remplacer le disque fermé par n'importe qu'elle courbe fermé.*

Exemple 2.6.4. .

1. *L'extérieur du disque unité est un voisinage de* $+\infty$
2. *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *:* $\mathbb{N}$ *n'a que* $+\infty$ *comme point d'accumulation.*
3. *Dans* $\overline{\mathbb{C}}$ *:* $\{m+in/(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ *n'a que* ∞ *comme point d'accumulation.*
4. *Dans* $\overline{\mathbb{C}}$ *:* $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ *(avec* $i^2=-1$*) n'a que* ∞ *comme point d'accumulation.*

□

2.7 Théorèmes de base de $\mathbb{R}$

Dans cette sous section, on présente deux théorèmes sur $\mathbb{R}$, importants. Dans le chapitre suivant sur les suites, on donnera leurs versions sur $\mathbb{R}^n$.

2.7.1 Recouvrement d'ouverts

Ici $E = \mathbb{R}$

Définition 2.7.1. *Soient $\mathcal{H}$ une famille d'ouverts de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$, et S une partie de E. On dit que $\mathcal{H}$ recouvre S si $S \subseteq \cup_{H\in\mathcal{H}} H$*

Exemple 2.7.2. .

- *Dans $\mathbb{R}$, la partie $S_1 = [0,1]$ est couverte par la famille d'ouverts $\mathcal{H}_1 = \left\{]x - \frac{1}{5}, x + \frac{1}{5}[, 0 < x < 1 \right\}$ mais aussi par la famille $\mathcal{H}_1' = \left\{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{n}[\cup]\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{n}[, n \geq 2 \right\}$*
- *Dans $\mathbb{R}$, la partie $S_2 = \left\{ 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots \right\}$ est couverte par la famille d'ouverts $\mathcal{H}_2 = \left\{]n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}[, n \geq 1 \right\}$ mais aussi par la famille $\mathcal{H}_2' = \left\{]n-1, n+1[, n \geq 1 \right\}$*
- *Dans $\mathbb{R}$, la partie $S_3 =]0,1[$ est couverte par $\mathcal{H}_3 = \left\{]0, x[, 0 < x < 1 \right\}$ mais aussi par la famille $\mathcal{H}_3' = \{]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[, n \geq 2 \}$*
- *Dans $\mathbb{R}$, la partie $S_4 = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$ est couverte par $\mathcal{H}_4 = \left\{]\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n-\frac{1}{2}}[, n \geq 1 \right\}$.*
- *dans $\mathbb{C}$, la partie $S_5 = B_o(0,1)$ est couverte par $\mathcal{H}_5 = \left\{ B_o\left(0, 1 - \frac{1}{2n}\right), n \geq 1 \right\}$.*

□

2.7.2 Compactes de $E = \mathbb{R}$

Définition 2.7.3. *Une partie A de $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$ est un compacte si de tout recouvrement d'ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.*

Théorème 2.7.4. ***Heine-Borel*** *Si S est une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}$, alors S est compacte.*

Preuve : Soit $\mathcal{H}$ un recouvrement de S . S est bornée dans $\mathbb{R}$ donc $\sup S$ et $\inf S$ existent. Posons $\alpha = \sup S$ et $\beta = \inf S$. Comme S est fermée alors $\alpha, \beta \in S$. On définit : $S_x = S \cap [\alpha, x]$ pour tout $x \geq \alpha$ et $F = \left\{ x / \alpha \leq x \leq \beta \text{ et } S_x \text{ admet un sous recouvrement fini } \mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{H} \right\}$.

Comme $S_\beta = S$, pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que $\beta \in F$.

Comme $\alpha \in S$, alors $S_\alpha = \{\alpha\}$. Mais $\alpha \in S$ donc il existe $H_\alpha \in \mathcal{H}$ tel que $\alpha \in H_\alpha$ (car $S \subseteq \cup_{H\in\mathcal{H}} H$). Ainsi $\alpha \in F$ par suite $F \neq \emptyset$.

Comme $F \neq \emptyset$ et majoré par β alors F admet une borne supérieure . Soit $\gamma = \sup F$

Montrons que $\gamma = \beta$. Comme $\gamma \leq \beta$ il suffit de montrer que $\gamma < \beta$ est impossible. Pour cela , nous allons étudier deux cas : ($\gamma < \beta$ et $\gamma \in S$) et ($\gamma < \beta$ et $\gamma \notin S$).

1er cas :

Supposons $\gamma < \beta$ et $\gamma \notin S$

$\gamma \notin S$ et S fermé ce qui implique que $\gamma \notin S = \overline{U}$ donc il existe $\varepsilon > 0/ \quad \frac{\varepsilon}{2} < \beta - \gamma$ tel que $]\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon[\cap S = \emptyset$ et on a $S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] = S \cap ([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}] \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}]$ $= S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}} \cup \emptyset$

donc $S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}} = S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$. Par définition de γ, $S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini donc $S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini et comme $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \beta$ alors $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \in F$ ce qui contredit le fait que γ est la borne supérieure de F.

2ème cas : Supposons $\gamma < \beta$ et $\gamma \in S$. $\gamma \in S$ alors il existe $H_\gamma \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma \in H_\gamma$ mais H_γ est un ouvert donc, il existe $\varepsilon > 0$ et$\frac{\varepsilon}{2} < \beta - \gamma$ tel que $\gamma \in]\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon[\subseteq H_\gamma$. Par définition de γ, on a $S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini $\{H_1, H_2, ..., H_n\} \subseteq \mathcal{H}$.

On a $S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}]$

$S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] = S \cap \left([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}] \cup [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}]\right)$

$= S \cap ([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}]) \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}])$

$= S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}} \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (\cup_{i=1}^{n} H_i) \cup H_\gamma$

Donc $\alpha < \gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \beta$ et $S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini de $\mathcal{H}$ ainsi $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \in F$ ce qui contredit le fait que γ est une borne supérieure.

On vient de démontrer avec ces deux cas que nécessairement $\gamma = \beta$ et $\gamma \in S$ car $\beta \in S$. Ainsi, il existe $H_\beta \in \mathcal{H}$ tel que $\beta \in H_\beta$ et comme H_β est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta \in]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\subseteq H_\beta$. Par définition de F, $S_{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini $\{H'_1, H'_2, ..., H'_n\} \subseteq \mathcal{H}$.

$S_{\beta+\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \beta + \frac{\varepsilon}{2}]$

$= S \cap [\alpha, \beta - \frac{\varepsilon}{2}] \cup S \cap [\beta - \frac{\varepsilon}{2}, \beta + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (\cup_{i=1}^{m} H'_i) \cup H_\beta$. Donc S_β admet un recouvrement fini . Mais $S_\beta = S$ d'où le résultat. La preuve est complète. □

Exemple 2.7.5. *Quelques exemples dans* $\mathbb{R}$.

1. $S_1 = [0, 1]$ *est un compact couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_1 = \{]x - \frac{1}{5}, x + \frac{1}{5}[, 0 < x < 1\}$, *pour extraire une famille finie, il suffit de prendre* $x_k = \frac{k}{10} \quad 0 \leq k \leq 9$ *alors* $[0, 1] \subseteq \cup_{k=0}^{9}]\frac{k}{10} - \frac{1}{5}, \frac{k}{10} + \frac{1}{5}[$

2. $S_2 = \{1, 2, ..., n, n+1, ...\}$ *est couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_2 = \{]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}[, n \geq 1\}$. *Comme chaque intervalle contient un seul entier et que les intervalles sont deux à deux disjoints, on ne peut extraire une famille finie de* $\mathcal{H}_2$ *qui recouvre* S_2. *Ainsi* S_2 *n'est pas compact. Autre exemple, comme* $\{n\}$ *est un ouvert de* S_2 *pour la distance*

induite, alors $S_2 = \bigcup_{n\geq 1}\{n\}$ est un recouvrement d'ouverts de S_2 et on ne peut extraire un recouvrement fini.

□

Proposition 2.7.6. *Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{R}$ est non bornée ou non fermée dans $\mathbb{R}$ alors S n'est pas compacte.*

Preuve Voir la correction de l'exercice 25.

□

Ainsi le théorème et la proposition précédentes montrent que seuls les fermés bornés sont des compactes de $\mathbb{R}$; ce qu'on établie dans le théorème suivant..

Théorème 2.7.7. *Une partie non vide de $\mathbb{R}$ est un compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

□

Exemple 2.7.8.

1. *Dans $\mathbb{R}$, les ensembles $[a, b]$ avec $a < b$, $\{-3; -1; 0; 0,75\} \cup [2; 13]$, sont des compactes.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, $A =]1; 6]$ n'est pas compacte car n'est pas un fermé ; $B = \{1 - 2n/n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas compacte car n'est pas borné ; $C = \{1 - \frac{1}{2n}/n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas compacte car n'est pas fermé, puisque $\overline{C} = C \cup \{1\} \neq C$.*

□

Théorème 2.7.9. ***Bolzano-Weirstrass***

Tout ensemble infini et borné de nombres réels admet au moins un point d'accumulation.

Preuve : Par contraposée.

Supposons que S est non vide et bornée. On va montrer que si S n'a pas de point d'accumulation alors S est finie.

Si S n'a pas de point d'accumulation alors $S = \overline{U}$ c'est à dire que S est fermé.

Soit $x \in S$, comme x n'est pas point d'accumulation il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x \cap S = \{x\}$ (et ne contient aucun autre point de S). On pose $\mathcal{H} = \{V_x, x \in S\}$ alors $S \subseteq \cup_{x\in S} V_x$. Comme S est fermée et bornée alors S est un compact donc on peut extraire de $\mathcal{H}$ un recouvrement fini c'est à dire qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tel que $S \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_{x_i} \Rightarrow S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donc S est finie.

□