UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

LICENCE 1 TRANSMISSION DE DONNÉES ET SÉCURITÉ DE L'INFORMATION

Série 2: Topologie

Exercice 1:

1. Les applications $N : x \mapsto 5x$ et $M : x \mapsto 5|x|$ sont-elles des normes sur $\mathbf{R}$?
2. Les applications $P : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ et $T : (x, y) \mapsto 5|x| + 3|y|$ sont-elles des normes sur $\mathbf{R}^2$?
3. On définit sur R^2 les 3 applications suivantes:

$$N_1((x,y)) = |x| + |y|,\ N_2((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2},\ N_\infty((x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

   (a) Prouver que $N_1,\ N_2,\ N_\infty$ définissent 3 normes sur R^2.
   (b) Prouver que l'on a: $\forall \alpha \in R^2,\ N_\infty(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$.
   (c) Les normes $N_1,\ N_2$ et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2: Soit $X =]0, +\infty[$. Pour tout $x, y \in X$, on note

$$\delta(x,y) = |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y}|$$

1. Démontrer que est une distance sur X.
2. Déterminer $B(1, 1)$ pour cette distance.
3. La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée pour cette distance? fermée?
4. Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.

Exercice 3: Soient A, B deux parties d'un espace métrique (E, d).

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $A \bar{\cap} B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $A \bar{\cup} B$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 4: Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). On rappelle que la frontière de A est l'ensemble

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap C_E\bar{} A. \text{ Montrer que :}$$

1. $Fr(A) = \{x \in E \mid \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \ et\ B(x,\epsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $Fr(A) = Fr(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $Fr(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $Fr(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $Fr(Fr(A)) = Fr(A)$.