

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar



Faculté des Sciences et Techniques

(F. S. T.)

Département de Mathématiques et Informatique

(D. M. I.)

Laboratoire d'Algèbre de Cryptologie de Géométrie Algébrique et Applications

(L. A. C. G. A. A.)

CHAPITRE 3 :

SUITES A VALEURS DANS \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{R}^n

Dr. Demba SOW, demba1.sow@ucad.edu.sn

Année académique 2022-2023

Table des matières

3	Suite à valeurs dans \mathbb{R}, \mathbb{C} et \mathbb{R}^n	3
3.1	Généralités : Suites numériques	3
3.2	Opérations algébriques et encadrements des suites	7
3.3	Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$	10
3.4	Suites monotones et théorèmes de Cantor \mathbb{R}	15
3.5	Suites de Cauchy dans \mathbb{R}	18
3.6	Théorème de Bolzano-Weirstrass sur les suites	21
3.7	Limite sup et Limite inf des suites numériques	23
3.8	Suite négligeables, Suites équivalentes dans \mathbb{R}	28
3.9	Suites dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C}	30

Chapitre 3

Suite à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{R}^n

Les suites sont déjà largement étudiées au lycée. Dans ce chapitre, on rappellera les principales définitions et propriétés déjà vues sur les suites. Nous donnerons un formalisme plus rigoureux de la notion de limite en utilisant les concepts topologiques déjà vues sur \mathbb{R} .

Quelques nouveaux théorèmes importants seront présentés (Critère de Cauchy, Théorème de Bolzano-Weierstrass, Théorème de Cantor) ainsi que les notions de Suites Extraites, de Limite Supérieure et Limite Inférieure. Nous terminerons ce chapitre en définissant la notion suite équivalentes dans \mathbb{R} et de convergence dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C} .

3.1 Généralités : Suites numériques

Nous commençons ce chapitre les suites à valeur dans \mathbb{R} .

Définition 3.1.1. Une suite est une application $U :]n_0, \infty[\rightarrow E = \mathbb{R}$ où n_0 est un entier ≥ 0 et $]n_0, \infty[$ est l'ensemble des entiers $n \geq n_0$.

On note en général $U_n = U(n)$. La suite U se note aussi $(U_n)_{n \geq n_0}$ ou $(U_n)_n$ (s'il y'a pas d'ambiguïté sur le domaine de définition de U).

Exemple 3.1.2. Il y'a plusieurs façons de définir une suite :

- (a) explicitement en fonction de n : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $V_n = \exp \frac{-1}{1+n^2}$, $W_n = \cos \frac{1}{n}$
- (b) en fonction de n mais non explicite à priori : $U_n =$ somme des carrés des nombres premiers inférieurs à n donc $U_2 = 2^2 = 4$, $U_3 = 2^2 + 3^2 = 13$, $U_4 = U_3$, $U_5 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$,
- (c) comme somme des termes d'une autre suite : $U_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$, $V_n = \sum_{k=0}^n a^{(k^2-1)}$

(d) par une intégrale : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t) dt$

(e) par une relation de récurrence : $U_0 = 0,7$ et $U_{n+1} = \frac{2}{1 + U_n^2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Définition 3.1.3. On dit qu'une suite V est une suite extraite d'une suite U (ou une sous-suite) lorsque $V = U \circ S$ où $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Habituellement, on note $S(1) = n_1, S_2 = n_2, \dots, S(k) = n_k$ et alors si $U = (U_n)_{n \geq 0}$ on a $V = (U_{n_k})_{k \geq 0}$.

NB : Si $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante alors pour tout k , $S(k) \geq k$.

Exemple 3.1.4. .

1. La suite $(\sin \frac{\pi}{2^n})_{n \geq 1}$ est une suite extraite de $(\sin \frac{\pi}{n})_{n \geq 1}$
2. Si $(U_n)_n$ est une suite alors $(U_{2n+1})_n, (U_{2n})_n, (U_{7n})_n, (U_{an+b})_n$ sont des suites extraites.

Définition 3.1.5 (Limite, Convergence). Soit l un nombre réel et $(U_n)_n$ une suite.

On dit que $(U_n)_n$ admet l pour limite ou que $(U_n)_n$ tend vers l ou que $(U_n)_n$ converge vers l :

"si tous les termes de la suite deviennent aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang".

C'est-à-dire que mathématiquement $(U_n)_n$ converge vers l , si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $|U_n - l| < \varepsilon$ On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

Remarques 3.1.6. Remarquer que $|U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, donc

" $(U_n)_n$ converge vers l si tout voisinage de l contient tous les termes U_n à partir d'un certain rang N ".

Attention : ε désigne n'importe quel nombre positif strictement (c'est le rayon de l'intervalle) mais, c'est le fait qu'il peut être aussi petit que l'on souhaite qui est important car on veut que les termes U_n soient aussi proche de l que l'on veut.

Attention : Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_n = n$ si $n \leq 10.000$ et $U_n = 0,00000001$ si $n \geq 10001$, on pose $l = 0,000000009$ alors $|U_n - l| = 0,000000001 = 10^{-9}$ pour tout $n \geq 10001$.

Donc U_n est très proche de l mais comme la différence ne peut être plus petite 10^{-9} , même si on augmente la valeur de n alors $\lim U_n \neq 0,000000009 = 9 \cdot 10^{-9}$. En réalité $\lim U_n = 0,000000001$ car la suite est constante à partir du rang 10001.

Notation simple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon)$$

Dans la pratique, on se donne $\varepsilon > 0$

- On détermine l intuitivement ;

- On calcule N en fonction de ε et pour cela on part de la condition $|U_n - l| < \varepsilon$ qu'on veut réaliser et on cherche le "plus petit" entier N tel que $|U_n - l| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et on le prend comme N .

Exemple 3.1.7. .

1. Avec le langage (N, ε) , montrer que (W_n) converge vers 5, si $W_n = \frac{1+5n}{3+n}$.
2. Avec le langage (N, ε) , montrer que (V_n) converge vers $-\frac{4}{3}$ si $V_n = \frac{-4n+1}{3n+7}$.
3. On pose $U_n = \frac{1+n+2n^2}{3+n^2}$, $n \geq 0$ montrer que (U_n) converge vers 2 avec le langage (N, ε) .

Solution :

1. $W_n = \frac{1+5n}{3+n}$, $n \geq 0$ alors (W_n) converge vers 5.

En effet $|W_n - 5| = \left| \frac{14}{3+n} \right|$ et $\frac{14}{3+n} \geq 0$, si $n \geq 0$. On a $\frac{14}{3+n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{14-3\varepsilon}{\varepsilon}$, donc on peut choisir $N = N_\varepsilon = \max \left(E\left(\frac{14-3\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 1; 1 \right)$.

2. $V_n = \frac{-4n+1}{3n+7}$, $n \geq 0$ alors (V_n) converge vers $-\frac{4}{3}$.

En effet $|V_n + \frac{4}{3}| = \left| \frac{31}{3n+7} \right|$ et $\frac{31}{3n+7} \geq 0$, si $n \geq 0$. On a $\frac{31}{3n+7} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{31-7\varepsilon}{3\varepsilon}$, donc on peut choisir $N = N_\varepsilon = \max \left(E\left(\frac{31-7\varepsilon}{3\varepsilon}\right) + 1; 1 \right)$.

3. $U_n = \frac{1+n+2n^2}{3+n^2}$, $n \geq 0$ alors (U_n) converge vers 2.

En effet $|U_n - 2| = \left| \frac{n-5}{3+n^2} \right|$ et $\frac{n-5}{3+n^2} \geq 0$ si $n \geq 5$.

Pour $n \geq 5$ on a $\frac{n-5}{3+n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 - n + (3\varepsilon + 5) > 0$

$\Delta_\varepsilon = 1 - 4\varepsilon(3\varepsilon + 5)$.

— Si $\Delta < 0$, alors $\varepsilon n^2 - n + (3\varepsilon + 5) > 0$, $\forall n \geq 5$ on peut prendre $N = N_\varepsilon = 5$.

— Si $\Delta > 0$, alors on a deux racines $r_1 = \frac{1 - \sqrt{\Delta_\varepsilon}}{2\varepsilon}$, $r_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta_\varepsilon}}{2\varepsilon}$ et $\varepsilon n^2 - n + (3\varepsilon + 5) > 0$, $\forall n \geq \max(E(r_2); 5)$; donc on peut prendre $N = N_\varepsilon = \max(E(r_2) + 1; 5)$.

— Si $\Delta = 0$, alors on a une racine double $r_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$ et $\varepsilon n^2 - n + (3\varepsilon + 5) > 0$, $\forall r \neq r_0$ donc on peut prendre $N = N_\varepsilon = \max(E(r_0) + 1; 5)$.

□

NB Pour simplifier le calcul des limites sans recourir à la définition, on utilise des théorèmes de convergence et de calcul de limites.

Proposition 3.1.8. *Soit $(U)_n$ une suite numérique. Si la limite de $(U)_n$ existe, alors elle est unique.*

Preuve : Soient l_1, l_2 deux limites de $(U)_n$.

On a $|l_1 - l_2| = |(U_n - l_2) - (U_n - l_1)|$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l_2$, alors il existe $N_{1,\varepsilon}$ et $N_{2,\varepsilon}$ tels que $|U_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N_{1,\varepsilon}$ et $|U_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N_{2,\varepsilon}$. En prenant $N = \max(N_{1,\varepsilon}, N_{2,\varepsilon})$, on a $|l_1 - l_2| = |(U_n - l_2) - (U_n - l_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $|l_1 - l_2| \leq \varepsilon$, par suite $|l_1 - l_2| = 0$. \square

Théorème 3.1.9. *Tout suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite réel.*

Preuve : Soit (U_n) convergente vers le réel l et V_k une suite extraite de (U_n) avec $V_k = U_{n_k}$.

- Soit $\varepsilon > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Rightarrow \exists N, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$.
- Si $k \geq N$ alors $n_k \geq k \geq N$, de sorte que $|U_{n_k} - l| \leq \varepsilon$, alors $|V_k - l| < \varepsilon$. D'où le résultat. \square

NB : On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une suite ne converge pas en exhibant deux suites extraites qui ont des limites différentes.

Exemple 3.1.10. *Soit $(U_n)_n$, la suite donnée par $U_n = (-1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour n pair, $n = 2k$, on a $U_{2k} = (-1)^{2k+1} = -1$ et pour n impair, $n = 2k + 1$, on a $U_{2k+1} = (-1)^{2k+2} = 1$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{2k} = -1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{2k+1} = 1$, d'où $(U_n)_n$ ne converge pas car admet deux suites extraites convergentes vers des limites différentes.* \square

NB : Dans certains cas, la convergence vers la même réel l de quelques suites extraites d'une suite $(U_n)_n$, permet de garantir la convergence de $(U_n)_n$ vers l .

Par exemple, si les suites extraites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(U_n)_n$ converge vers l .

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N_1, N_2$, tels que $(\forall n \in \mathbb{N})$

- $(n > N_1 \Rightarrow |U_{2n} - l| < \varepsilon)$ (1)

- et $(n > N_1 \Rightarrow |U_{2n+1} - l| < \varepsilon)$ (2).

Soit $p > \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, alors :

- si $p = 2n$ est pair alors $|U_p - l| < \varepsilon$, d'après (1) ;
- si $p = 2n + 1$ est pair alors $|U_p - l| < \varepsilon$, d'après (2).

Ans, $(\forall p \in \mathbb{N}) (p > \max\{2N_1, 2N_2 + 1\} \Rightarrow |U_p - l| < \varepsilon)$.

□

Définition 3.1.11. On dit que $(U_n)_n$ est majoré, minoré ou borné si la partie $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ a la même propriété.

Proposition 3.1.12. Soit $(U_n)_n$, une suite numérique. Si $(U_n)_n$ est convergente alors $(U_n)_n$ est bornée.

Preuve : Supposons que $(U_n)_n$ converge vers un réel l . Il suffit de montrer que $(|U_n|)_n$ est majoré.

Soit $\varepsilon = 1$ alors $\exists N/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq 1$ d'où $||U_n| - l| \leq 1$. Donc $\forall n \geq N, |U_n| \leq |l| + 1$.

Mais $\{|U_n|, n \in \mathbb{N}\} = \{|U_n|, n < N\} \cup \{|U_n|, n \geq N\}$. Ainsi pour tout n ,

$|U_n| \leq \max\{|U_0|, \dots, |U_{N-1}|, |l| + 1\}$ par suite $(|U_n|)_n$ est bornée. □

NB : La réciproque est fausse car on a vu que $U_n = (-1)^{n+1}$ donne une suite non convergente mais bornée puisque $|U_n| = 1$.

Proposition 3.1.13. Soit $(U_n)_n$ une suite numérique convergente vers une limite $l > 0$ alors les termes $(U_n)_n$ sont strictement positifs pour n assez grand.

Preuve : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l > 0$.

Pour $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, $\exists N/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon = \frac{l}{2} \Rightarrow U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[=]\frac{l}{2}, l + \frac{l}{2}[$ donc $\forall n \geq N, U_n > 0$. □

NB : Si $l = 0$ le résultat n'est plus vrai car par exemple $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ alors que les termes négatifs et positifs alternent.

3.2 Opérations algébriques et encadrements des suites

Théorème 3.2.1. Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites numériques convergentes vers des limites réelles L_1 et L_2 respectivement, alors :

1. la suite $(U_n + V_n)_n$ converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L_1 + L_2$.

2. pour tout réel λ , la suite $(\lambda U_n)_n$ converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n = \lambda L_1$.

Preuve :

1. On a $|(U_n + V_n) - (L_1 + L_2)| \leq |U_n - L_1| + |V_n - L_2|$. Soit $\varepsilon > 0$.

- $(U_n)_n$ converge vers $L_1 \Rightarrow \exists N_1/n \geq N_1 \Rightarrow |U_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$
- et $(V_n)_n$ converge vers $L_2 \Rightarrow \exists N_2/n \geq N_2 \Rightarrow |V_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour $n \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ on a :

$$|(U_n + V_n) - (L_1 + L_2)| \leq |U_n - L_1| + |V_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L_1$, donc $\exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |U_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|}$
alors pour $n \geq N$ (on peut supposer $\lambda \neq 0$) $|\lambda U_n - \lambda L_1| = |\lambda| |U_n - L_1| \leq \frac{|\lambda| \varepsilon}{1 + |\lambda|} < \varepsilon$
d'où le résultat. □

Proposition 3.2.2. Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites convergentes vérifiant $U_n \leq V_n$ pour n assez grand. Alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Preuve : Par l'absurde.

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n > \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n > 0$. Or $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent donc $\lim(U_n - V_n) > 0$. Ainsi, les termes de $U_n - V_n$ sont strictement positifs pour n assez grand.

ce qui est impossible car $U_n \leq V_n$ pour n assez grand. □

Attention : même si $U_n < V_n, \forall n$ on a toujours $\lim U_n \leq \lim V_n$.

Par exemple $U_n = 1 + \frac{1}{n} < V_n = U_n + \frac{1}{n^2} \forall n > 0$ mais $\lim_n U_n = \lim V_n = 1$ □

Théorème 3.2.3. (des gendarmes) Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ trois suites telles que $U_n \leq W_n \leq V_n$ pour n assez grand.

Si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent vers le même réel l alors $(W_n)_n$ converge vers l .

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. On sait $\exists N_0/U_n \leq W_n \leq V_n, \forall n \geq N_0$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Rightarrow \exists N_1/(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N_1 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon)$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\exists N_2/n \geq N_2 \Rightarrow |V_n - l| < \varepsilon)$.

Donc pour $n \geq N_3 = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, on a :

$$l - \varepsilon < U_n \leq W_n \leq V_n < l + \varepsilon, \text{ par suite } |W_n - l| < \varepsilon. \quad \square$$

Exemple 3.2.4. .

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$? Comme $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$?
posons $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ alors $X_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < Z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = Y_n, \forall n > 1$ et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n = 1$

Proposition 3.2.5. Si $(U_n)_n$ converge vers l alors $(|U_n|)$ converge vers $|l|$.

Preuve : Utiliser le fait que $||U_n| - |l|| \leq |U_n - l|$ □

Théorème 3.2.6. Limite du produit et du quotient.

1. Si la suite $(U_n)_n$ est bornée et $(V_n)_n$ converge vers zéro alors $(U_n V_n)_n$ converge vers 0
2. Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites convergentes vers L_1 et L_2 .
 - a) La suite $(U_n V_n)_n$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n V_n = L_1 L_2$
 - b) Si $\lim U_n = L_1 \neq 0$ (donc $U_n \neq 0$ pour n assez grand) alors la suite $(\frac{1}{U_n})_n$ converge
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{L_1}$
 - c) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L_2 \neq 0$ (donc $V_n \neq 0$ pour n assez grand) alors la suite $(\frac{U_n}{V_n})_n$
converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{L_1}{L_2}$

preuve :

1. $(U_n)_n$ bornée $\Rightarrow \exists M / |U_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$. On a aussi,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / |V_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.
Alors pour $n \geq N$, on a $|U_n V_n| \leq |U_n| \times \frac{\varepsilon}{M} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, donc $|U_n V_n| \leq \varepsilon$.
2. (a) Comme les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent, alors elles sont bornées, donc si l'une des limites est nulle, le résultat découle de 1. Donc on peut supposer que $L_1 \neq 0$ et $L_2 \neq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ $(|U_n|)_n$ est majorée $\Rightarrow \exists N_0 / n \geq N_0 \Rightarrow |U_n| \leq M$.
 $|U_n V_n - L_1 L_2| = |U_n V_n - U_n L_2 + U_n L_2 - L_1 L_2| \leq |U_n| |V_n - L_2| + |U_n - L_1| |L_2|$
 $\leq M |V_n - L_2| + |L_2| |U_n - L_1|$
On veut que cette dernière quantité soit inférieure à ε . On utilise le fait que $|V_n - L_2|$ et $|U_n - L_1|$ peuvent être aussi petit que l'on veut à condition que n soit assez grand.

Il existe

$$\exists N_1/ |V_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n \geq N_1 \text{ et}$$

$$\exists N_2/ |U_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2|L_1|}, \forall n \geq N_2$$

$$\text{Donc pour } n \geq \max\{N_0, N_1, N_2\}, \text{ on a } |U_n V_n - L_1 L_2| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|L_1|} \times |L_1| \leq \varepsilon$$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L_1 \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = |L_1| \neq 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|U_n| - \frac{|L_1|}{2}) > 0$. Ainsi,

$$\exists N_0/n \geq N_0 \Rightarrow |U_n| - \frac{|L_1|}{2} > 0. \text{ Par suite, } |U_n| > \frac{|L_1|}{2}, \forall n \geq N_0.$$

$$\text{Maintenant on a : } \left| \frac{1}{U_n} - \frac{1}{L_1} \right| = \left| \frac{U_n - L_1}{L_1 U_n} \right| \leq \frac{|U_n - L_1|}{\frac{L_1^2}{2}}, \text{ pour } n \geq N_0.$$

Comme $|U_n - L_1|$ peut être aussi petit que l'on veut, $\exists N_1 > 0$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |U_n - L_1| \leq \frac{\varepsilon L_1^2}{2}$.

$$\text{Donc pour } n \geq \max\{N_0, N_1\}, \text{ on a } \left| \frac{1}{U_n} - \frac{1}{L_1} \right| < \frac{\varepsilon L_1^2}{2} \frac{1}{\frac{L_1^2}{2}} = \varepsilon$$

(c) Découle de 2a) et 2b).

□

3.3 Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 3.3.1. la convergence vers $\pm\infty$ est similaire celle de la convergence vers un réel où on remplace : " aussi proche que l'on veut" par " aussi grand que l'on veut."

— On dit $(U_n)_n$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ou diverge vers $+\infty$ dans \mathbb{R}) si les termes U_n peuvent être aussi grand que l'on veut à condition que n soit assez grand. Ce qu'on traduit par $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ si pour tout réel M , il existe un entier N tel que on ait $U_n > M$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}/(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq N \Rightarrow U_n > M)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow$ tout intervalle $]M, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient tous les $(U_n)_n$ à partir d'un certain rang.

— De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N}/(n \geq N \Rightarrow U_n < M)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow$ tout intervalle $[-\infty, M[\subset \overline{\mathbb{R}}$ contient tous les U_n à partir d'un certain rang.

Remarques 3.3.2. .

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \mp\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = +\infty$ mais la réciproque est fausse car $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-3)^n| = +\infty$ or la suite de terme général $(-3)^n$ ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ et $U_n \leq V_n$ pour n assez grand, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$.

□

Remarques 3.3.3. . On a déjà vu que "un point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$ " est un "point adhérent à A ", mais que la réciproque est fausse. Par exemple, un point isolé de A , est un point adhérent à A mais n'est pas un point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, on va introduire un concept intermédiaire appelé "valeur d'adhérence" dans le cas d'une suite $(U_n)_n$.

Commençons par caractériser "point adhérent à A " et "un point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$ " par des suites.

Proposition 3.3.4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $x \in \overline{A}$ (adhérence de A),
2. il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x .

Preuve

1. (1) \Rightarrow (2) Par hypothèse, si $n \in \mathbb{N}$ alors $A \cap]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[\neq \emptyset$, donc il existe $x_n \in A \cap B_o(x, \frac{1}{n})$. Alors, il est clair que $(x_n)_n$ est une suite de A qui converge vers x .
2. (2) \Rightarrow (1) Par contraposé : Si $x \notin \overline{A}$, alors $x \in \overline{A}^c$ qui est un ouvert de \mathbb{R} (car \overline{A} est un fermé). Il existe donc $r > 0$ tel que $]x - r; x + r[\subset \overline{A}^c$. Ainsi aucune suite d'éléments de A ne peut converger vers x .

□

Théorème 3.3.5. Un point z_0 est un point d'accumulation d'un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_n$ de termes deux à deux distincts et vérifiant $a_n \in A \setminus \{z_0\}$, $\forall n \geq 1$, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = z_0$.

Preuve

\Rightarrow) Supposons z_0 est un point d'accumulation, alors tout intervalle centre z_0 contient un point qui n'est pas z_0 . On va appliquer cette propriété plusieurs fois pour construire la suite recherchée.

- Soit $n_1 = 1$, alors $]z_0 - \frac{1}{n_1}; a_0 + \frac{1}{n_1}[\cap A$ contient au moins un point a_1 avec $a_1 \notin \{z_0\}$.

- Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 > \max \left\{ 2, n_1, \frac{1}{|a_1 - z_0|} \right\}$ alors $]z_0 - \frac{1}{n_2}; z_0 + \frac{1}{n_2}[\cap A$ contient au moins un point a_2 avec $a_2 \notin \{z_0, a_1\}$.

- Supposons a_1, a_2, \dots, a_{k-1} construits. Soit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k > \max \left\{ k, n_{k-1}, \frac{1}{|a_{k-1} - a_0|} \right\}$ alors $]z_0 - \frac{1}{n_k}; z_0 + \frac{1}{n_k}[\cap A$ contient au moins un point a_k avec $a_k \notin \{z_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$.

Comme $|a_k - z_0| \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}, \forall k \geq 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_k = z_0$ et de plus tous les termes de la suite sont deux à deux distincts entre eux et sont aussi distincts de z_0 .

\Leftarrow) Soit V un voisinage de z_0 , alors il existe ε tel que $]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[\subset V$. Mais par hypothèse pour $\varepsilon > 0$, il existe $N/\forall n > N, a_n \in]z_0 - \varepsilon; z_0 + \varepsilon[\subset V$ avec $a_n \notin \{z_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, donc V contient une infinité de termes de la suite $(a_n)_n$. Ainsi, z_0 est un point d'accumulation de $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, donc pour A aussi en particulier.

□

Maintenant, définissons le concept "intermédiaire" appelé "valeur d'adhérence".

Définition 3.3.6. (*Valeurs d'adhérence*)

1. Dans \mathbb{R} , on dit que l est une valeur d'adhérence d'une suite $(U_n)_n$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists$ une infinité de valeurs de n vérifiant $|U_n - l| < \varepsilon$.
2. Dans $\overline{\mathbb{R}}$,
 - $+\infty$ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ si la suite $(U_n)_n$ est non majorée.
 - $-\infty$ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ si la suite $(U_n)_n$ est non minorée.

Caractérisons ce nouveau concept de "valeurs d'adhérence" avec les suites extraites.

Proposition 3.3.7. (*Valeurs d'adhérence*)

1. l est une valeur d'adhérence d'une suite $(U_n)_n$ si et seulement si l est la limite d'une suite extraite.
2. Dans $\overline{\mathbb{R}}$,
 - $+\infty$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(U_n)_n$ si et seulement si elle admet une suite extraite convergente vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
 - $-\infty$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(U_n)_n$ si et seulement si elle admet une suite extraite convergente vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve

1. (a) Supposons qu'il existe alors une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow U_{\varphi(n)} \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.
On a donc l'inclusion $\{\varphi(n)/n \geq n_0\} \subset \{n \in \mathbb{N}/U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$. Comme $\{\varphi(n)/n \geq n_0\}$ est infini (car φ est croissante par définition des suites extraites et $\varphi(n) \geq n$), alors $\{n \in \mathbb{N}/U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ est infini. Par suite l est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_n$.
- (b) Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ est infini. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{p_0} \in]l - 1, l + 1[$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $p_1 > p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{p_1} \in]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}[$. Par récurrence, pour $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$, il existe $p_k > p_{k-1} \in \mathbb{N}$ tel que $U_{p_k} \in]l - \frac{1}{k+1}, l + \frac{1}{k+1}[$. L'application $\varphi : k \in \mathbb{N} \mapsto \varphi(k) = p_k$ est croissante et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{\varphi(k)} \in]l - \frac{1}{k+1}, l + \frac{1}{k+1}[$. La suite $(U_{\varphi(k)})_k$, ainsi construite, est une suite extraite de $(U_n)_n$ qui converge vers l .
2. Dans $\overline{\mathbb{R}}$,
 - \Rightarrow) Supposons que $+\infty$ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe alors $n_k \geq k$ tel que $U_{n_k} \in]k, +\infty[$, ce qui signifie que $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{n_k} = +\infty$.
 - \Leftarrow) Supposons que (U_{n_k}) est une suite extraite convergente vers $+\infty$ dans \mathbb{R} . Alors elle n'est pas majorée et en particulier (U_n) n'est pas majorée.
 - Similaire au cas précédent.

□

Remarques 3.3.8. On va préciser dans ce qui suit la différence entre :

1. point adhérent à l'ensemble formé par les termes de la suite $(U_n)_n$,
2. valeur d'adhérence d'une suite $(U_n)_n$,
3. point d'accumulation de l'ensemble formé par les termes de la suite $(U_n)_n$.

D'après les définitions, on a les implications $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Mais la réciproque est fautive. En effet, considérons la suite de terme général $U_n = (1 - (-1)^n) \frac{3n}{n+1}$.

On a $\Gamma = \{U_n/n \in \mathbb{N}\} = \left\{ U_{2k+1} = \frac{6(2k+1)}{2k+2}, U_{2k} = 0/k \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) La suite $(U_{2k+1})_k$ est strictement croissante. On a $U_1 = 3 < U_2 = 4,5$, le terme U_1 est un point adhérent à Γ , mais n'est pas une valeur d'adhérence car il y'a un seul entier 1, tel que $U_1 \in]2, 5; 4, 5[$ (et donc n'est pas un point d'accumulation).
- (b) $U_{2k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, donc on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{2k} = 0$, par suite 0 est un point adhérent et une valeur d'adhérence car pour tous les entiers paires $2k$, on a $U_{2k+1} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, mais n'est pas un point d'accumulation puisque 0 est un point isolé.

(c) $U_{2k+1} = \frac{6(2k+1)}{2k+2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{2k+1} = 6$ et la suite $(U_{2k+1})_k$ est strictement croissante. Par suite 6 est un point d'accumulation, donc est aussi une valeur d'adhérence et un point adhérent.

Exemple 3.3.9. .

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ alors l est valeur d'adhérence de $(U_n)_n$
2. La suite de terme général $U_n = (-1)^{n+1}$ a pour valeurs d'adhérence -1 et 1.
3. La suite de terme général $V_n = 3 + (-1)^n n$ a pour valeur d'adhérence $\pm\infty$

On sait que les points adhérents ne sont pas des valeurs d'adhérence. dans la proposition suivante, on va caractériser les valeurs d'adhérence d'une suite avec des adhérences de parties appropriées de l'ensemble des termes de la suite en question.

Proposition 3.3.10. l est valeur l'adhérence de la suite $(U_n)_n$ dans \mathbb{R} si et seulement si l est adhérent à $\{U_n/n \geq k\}$ pour tout k c'est-à-dire $l \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}$.

Preuve :

\Rightarrow) Supposons que l est valeur l'adhérence de la suite $(U_n)_n$ dans \mathbb{R} . Alors, il existe une suite extraite $(U_{n_p})_p$ qui converge vers l .

Soit n un entier. Alors $\{U_{n_p}/n_p > k\} \subset \{U_n/n \geq k\}$, or la suite tronquée de U_{n_p} avec $n_p > k$, converge aussi vers l , donc $l \in \overline{\{U_{n_p}/n_p > k\}} \subset \overline{\{U_n/n \geq k\}}$. Par suite, l est adhérent à $\{U_n/n \geq k\}$ pour tout k .

\Leftarrow) Supposons que $l \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $l \in \overline{\{U_n/n \geq k\}}$, alors $\exists n_k > k$ tel que $U_{n_k} \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, par suite il existe une infinité d'entier n_k tel que $|U_{n_k} - l| < \varepsilon$, ce qui signifie que l est valeur l'adhérence de la suite $(U_n)_n$ dans \mathbb{R} . □

NB : Ce résultat se généralise à $\overline{\mathbb{R}}$ en ajoutant $\pm\infty$ au cas précédent. on a : " l est valeur l'adhérence de la suite $(U_n)_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $l \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ ".

Si on note $\bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}}$ et $\bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\overline{\mathbb{R}}}$ les adhérences dans \mathbb{R} et $\overline{\mathbb{R}}$ respectivement, alors $\bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}} = \left(\bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\overline{\mathbb{R}}} \right) \cap \mathbb{R}$. □

Caractérisons maintenant les fermés de \mathbb{R} avec les suites.

Proposition 3.3.11. Soit F une partie de \mathbb{R} , non vide. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ dans F convergente vers $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \in F$.

Preuve

\Rightarrow) Supposons que F est fermé. Soit $(x_n)_n$, une suite dans F convergente vers $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in \overline{F}$. Comme F est fermé, alors $F = \overline{F}$, apr suite $x \in F$.

\Leftarrow) Supposons que si une suite dans F converge vers $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \in F$.

Soit $y \in \overline{F}$, on sait que y est limite d'une suite d'éléments de F . Mais alors $y \in F$, par hypothèse. Ansi $\overline{F} = F$ c'est-à-dire que F est fermé.

□

Théorème 3.3.12. Soit $(U_n)_n$ une suite convergente vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- a) Pour tout $\lambda \neq 0$ la suite $(\lambda U_n)_n$ converge $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n = +\infty$ si $\lambda > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n = -\infty$ si $\lambda < 0$.
- b) Si $(V_n)_n$ est bornée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + V_n = +\infty$

Preuve : La preuve est laissée au lecteur.

□

Théorème 3.3.13. Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$ (donc les limites de U_n et V_n sont réelles ou infinies).

- a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ est fini et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = +\infty$.
- b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pm\infty$, la suite $(\frac{1}{V_n})_n$ est définie pour n assez grand et converge vers 0.
- c) S'il existe $N > 0$, tel que $V_n > 0$, $\forall n > N$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{V_n} = +\infty$.
- c) S'il existe $N > 0$, tel que $V_n < 0$, $\forall n > N$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{V_n} = -\infty$

Preuve : La preuve est laissée au lecteur.

□

3.4 Suites monotones et théorèmes de Cantor \mathbb{R}

Dans cette partie on aura des outils qui permettent d'étudier la convergence d'une suite sans connaitre ou avoir à calculer sa limite.

Définition 3.4.1. .

1. Une suite $(U_n)_n$ est croissante (resp : strictement croissante) si $U_{n+1} \geq U_n$ (resp : $U_{n+1} > U_n$) pour tout n .
2. Une suite $(U_n)_n$ est décroissante (resp : strictement décroissante) si $U_{n+1} \leq U_n$ (resp : $U_{n+1} < U_n$) pour tout n .
3. Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

NB : Pour la monotonie des suites, si on veut étudier la convergence, il est suffisant d'avoir la propriété pour n assez grand.

Théorème 3.4.2. (*Convergence monotone*)

Toute suite monotone dans $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente. En particulier :

- a) soit $(U_n)_n$ une suite croissante alors $(U_n)_n$ converge vers $\sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ est un réel si et seulement si $(U_n)_n$ est majorée.
- b) soit $(V_n)_n$ une suite décroissante alors $(V_n)_n$ converge vers $\inf\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ est un réel si et seulement si $(V_n)_n$ est minorée.

Preuve :

- a) Soit $(U_n)_n$ une suite croissante.

Premier cas : Supposons $(U_n)_n$ majorée alors $\sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ existe. Posons $l = \sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors il existe $N < 0 / U_N > l - \varepsilon$. Comme $(U_n)_n$ est croissante, alors $\forall n \geq N$, on a $U_n \geq U_N > l - \varepsilon$. Mais $(U_n)_n$ est majorée par l donc $U_n < l$, ainsi $\forall n \geq N, l - \varepsilon < U_n < l$. Par suite $|U_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.

Deuxième cas : Supposons $(U_n)_n$ non majorée dans \mathbb{R} . Donc, $\sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

Soit $M > 0$ un réel, comme $\sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$, il existe $N / U_N > M$. Comme (U_n) est croissante, alors $\forall n \geq N, U_n > M$ Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

- b) Si $(V_n)_n$ est décroissante alors $(-V_n)_n$ est croissante. Appliquer a).

□

Exemple 3.4.3. La suite de terme général $U_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ est croissante. On peut facilement montrer par recurrence que $n! \geq 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Alors, on a : $U_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - (\frac{1}{2})^n) = 3 - 2(\frac{1}{2})^n$.

Donc $U_n < 3, \forall n$. Par suite $(U_n)_n$ est croissante et majorée par 3 donc converge vers un réel. (c'est exp : !)

Définition 3.4.4. Deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers zéro. Précisément $(U_n)_n \nearrow, (V_n)_n \searrow$ et $(U_n - V_n) \rightarrow 0$.

Proposition 3.4.5. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Preuve : $(U_n)_n \nearrow$ et $(V_n)_n \searrow$ alors $(V_n - U_n)_n \searrow$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0$ donc $\inf\{V_n - U_n, n \in \mathbb{N}\} \geq 0$ d'où $V_n - U_n \geq 0, \forall n \Leftrightarrow V_n \geq U_n, \forall n$ et comme $(U_n)_n \nearrow$ et majorée par V_0

et $(V_n)_n \searrow$ et minorée par U_0 donc $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

□

Exemple 3.4.6. .

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

sont rationnelles, adjacentes et que leur limite est $\sqrt{2}$.

Preuve $u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

u_0 et v_0 sont rationnels, en supposant que u_n et v_n sont rationnels alors u_{n+1} et v_{n+1} sont rationnels alors comme somme, produit et inverse de nombres rationnels. Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont rationnelles.

$u_0 = 1 < v_0 = 2$, supposons que $u_n < v_n$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n + v_n}{2} = -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} < 0$$

donc $u_{n+1} < v_{n+1}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < v_n < 2$, la suite (u_n) est croissante et majoré par 1 donc converge vers une limite l et la suite (v_n) est décroissante et minoré par 2 donc converge vers une limite l' .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \implies \frac{l + l'}{2} = l' \implies l = l'$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n} \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_nv_n = \dots = u_0v_0 = 2 \implies ll' = 2 \implies l^2 = 2 \implies l = \sqrt{2}$

2. On considère les deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $V_n =$

$U_n + \frac{1}{n!}$. Montrer qu'elles sont adjacentes.

Preuve

$$- U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} \text{ donc } (U_n)_n \nearrow.$$

$$- V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \left(-\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \leq 0 \text{ si } n \geq 1 \text{ donc } (V_n)_n \searrow.$$

$$- V_n - U_n = \frac{1}{n!} \text{ donc } \lim V_n - U_n = 0 \text{ ainsi } (U_n)_n \text{ et } (V_n)_n \text{ sont adjacentes.}$$

Leur limite commune est exp.

Théorème 3.4.7. (Théorème de Cantor)

Soit $I_n = [x_n, y_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés tels que $y_n - x_n$ tend vers zéro.

Alors il existe un réel (unique) l tel que $\{l\} = \bigcap_{n \geq 0} I_n$

Proof : Découle de la proposition précédente.

□

3.5 Suites de Cauchy dans \mathbb{R}

Le critère de Cauchy donne un critère de convergence (très important) sans connaître la limite ou avoir à la calculer.

Définition 3.5.1. Une suite $(U_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si la différence entre deux termes quelconques peut être aussi petit que l'on veut à condition que n soit suffisamment grand.

"Mathématiquement" on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} (p \geq N, q \geq N \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$

Exemple 3.5.2. .

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ définie par $W_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \times \frac{2 + \sin n \frac{\pi}{2}}{3^n}$ est de Cauchy.

Preuve :

Pour $m > n$ on a :

$$\begin{aligned}
|W_m - W_n| &= \left| (-1)^{(n+1)} \times \frac{2 + \sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{3^{n+1}} + \dots + (-1)^{n+1} \times \frac{2 + \sin m\frac{\pi}{2}}{3^m} \right| \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \left| (-1)^{(n+1)} \times (2 + \sin(n+1)\frac{\pi}{2}) + \dots + (-1)^m \frac{2 + \sin m\frac{\pi}{2}}{3^{m-n-1}} \right| \\
&\leq \frac{3}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{m-n-1}} \right) \\
&\leq \frac{1}{3^n} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^{m-n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\
&\leq \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on veut avoir $|W_m - W_n| < \varepsilon$

On a $\frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3} + 1$

Ainsi, si on pose $N_\varepsilon = E\left(\frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3} + 1\right) + 1$, on a bien $\frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < \varepsilon$.

Par suite $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / (\forall m > n \in \mathbb{N})(m, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |W_m - W_n| < \varepsilon)$.

2. Pour tout réel x tel que $|x| < 1$, montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par $U_n = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$ est de Cauchy.

Preuve :

Pour $m \geq n$ on a :

$$\begin{aligned}
|U_m - U_n| &= \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \dots + \frac{x^m}{m} \right| = |x|^{n+1} \left| \frac{1}{n+1} + \frac{x}{n+2} + \dots + \frac{x^{m-n-1}}{m} \right| \\
&\leq |x|^{n+1} (1 + |x| + \dots + |x|^{m-n-1}) \leq |x|^{n+1} \left(\frac{1 - |x|^{m-n}}{1 - |x|} \right) \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}
\end{aligned}$$

On veut avoir $|U_m - U_n| < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$

Soit alors $\varepsilon > 0$, on a $\frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^{n+1} < \varepsilon(1 - |x|) \Leftrightarrow (n+1) \ln |x| < \ln(\varepsilon(1 - |x|))$

$\Leftrightarrow (n+1) > \frac{\ln[\varepsilon(1 - |x|)]}{\ln |x|} \Leftrightarrow n > \frac{\ln[\varepsilon(1 - |x|)]}{\ln |x|} - 1$ Ainsi, si on pose

$N_\varepsilon = E\left(\frac{\ln[\varepsilon(1 - |x|)]}{\ln |x|}\right) + 1$, on a bien $\forall n \geq N_\varepsilon, \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} < \varepsilon$.

Par suite $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / m \geq n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_m - U_n| < \varepsilon$.

Lemme 3.5.3. Une suite à valeurs dans \mathbb{Q} ou \mathbb{R} qui converge est de Cauchy.

Preuve : Supposons que $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$ (resp : $l \in \mathbb{R}$).

Soit $\varepsilon > 0$ dans \mathbb{Q} (resp : dans \mathbb{R}) alors $\exists N / \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où pour $p \geq N$ et $q \geq N$ on a $|U_p - U_q| = |(U_p - l) - (U_q - l)| \leq |U_p - l| + |U_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ d'où le résultat. \square

NB1 : D'après ce lemme (par contraposé), si une suite n'est pas de Cauchy, alors elle ne converge pas.

Ansi, si une suite est monotone et ne vérifie pas le critère de Cauchy, elle converge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Par exemple, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

a) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$, alors $(S_n)_n$ est croissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

c) Comme $(S_n)_n$ est croissante et n'est pas de Cauchy, donc ne converge pas dans \mathbb{R} , par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

NB2 : La réciproque de cette proposition est vraie dans \mathbb{R} (voir la proposition suivante), mais est fausse dans \mathbb{Q} (voir l'exemple suivant).

*Dans le problème de l'annexe sur le chapitre précédent concernant la construction de \mathbb{R} , il est énoncé que dans un corps commutatif totalement ordonné et archimédien, **la convergence des suites de Cauchy équivaut à l'existence des bornes supérieures des ensembles non vides et majorés.***

Comme on a déjà vu que dans \mathbb{Q} certaines parties majorées n'ont pas de bornes supérieures, alors il existe nécessairement une suite de Cauchy qui ne converge pas (voir l'exemple suivant).

Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , l'intervalle $]\sqrt{3} - \frac{1}{n}; \sqrt{3} + \frac{1}{n}[$ de \mathbb{R} contient au moins un rationnelle r_n . Alors $(r_n)_n$ converge vers $\sqrt{3}$ dans \mathbb{R} , donc est de Cauchy dans \mathbb{R} . Par suite $(r_n)_n$ est de Cauchy dans \mathbb{Q} mais ne converge dans \mathbb{Q} , puisque $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (grâce à l'unicité de la limite).

Proposition 3.5.4. *Toute suite de Cauchy dans \mathbb{R} , converge.*

Preuve : Supposons que $(U_n)_n$ est de Cauchy. nous allons d'abord montrer que $(U_n)_n$ est bornée puis construire deux suites adjascentes $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ telles que $V_n \leq U_n \leq W_n$.

- $(U_n)_n$ est majorée ?

Pour $\varepsilon = 1, \exists N_0/p, q \geq N_0, \Rightarrow |U_p - U_q| < 1 \Rightarrow ||U_p| - |U_q|| < 1$ et donc en particulier $||U_p| - |U_{N_0}|| < 1 \Leftrightarrow ||U_{N_0}| - 1| < |U_p| < 1 + |U_{N_0}|$

d'où $\forall p \geq N_0$, on a $|U_p| < 1 + |U_{N_0}|$ ainsi (comme déjà vu dans une preuve précédente) on a : $|U_p| \geq \max \{|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N_0}|, 1 + |U_{N_0}|\}$ donc $(U_n)_n$ est bornée.

- Suites adjascentes Comme $(U_n)_n$ est bornée dans \mathbb{R} alors toute partie de $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans \mathbb{R} donc pour tout n , $\inf_{m \geq n} \{U_m\}$ et $\sup_{m \geq n} \{U_m\}$ existe. On pose $V_n = \inf_{m \geq n} \{U_m\}$ et $W_n = \sup_{m \geq n} \{U_m\}$. Alors il est facile de voir que $V_n \leq U_n \leq W_n$ et $(V_n)_n \nearrow$ et $(W_n)_n \searrow$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N' / (\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n \geq N' \Rightarrow |U_m - U_n| < \frac{\varepsilon}{3})$.

Comme $|U_m - U_n| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow U_n - \frac{\varepsilon}{3} < U_m < U_n + \frac{\varepsilon}{3}$,
alors, on a $U_n - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_{m \geq n} \{U_m\} \leq \sup_{m \geq n} \{U_m\} \leq U_n + \frac{\varepsilon}{3}$.

D'où l'on tire $U_n - \frac{\varepsilon}{3} \leq V_n \leq W_n \leq U_n + \frac{\varepsilon}{3}$.

Par suite $0 \leq W_n - V_n \leq (U_n + \frac{\varepsilon}{3}) - (U_n - \frac{\varepsilon}{3}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

On en déduit que $0 \leq W_n - V_n < \varepsilon$; ce qui veut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n - V_n = 0$.

Par suite (W_n) et (V_n) sont adjascentes.

- Théorèmes des gendarmes

(W_n) et (V_n) sont adjascentes, donc convergent vers la même limite l .

Comme $V_n \leq U_n \leq W_n, \forall n$, alors $(U_n)_n$ converge vers l .

□

On résume les deux propositions précédentes par le théorème suivant.

Théorème 3.5.5. *Une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Proposition 3.5.6. *(Propriétés Algébriques des suites de Cauchy)*

Si les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont de Cauchy alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les suites $(U_n + V_n)_n$, $(U_n V_n)_n$ et $(\lambda U_n)_n$ sont de Cauchy.

Preuve : On va faire la preuve pour le produit $(U_n V_n)_n$. Le reste est laissé au lecteur.

On a $|U_m V_m - U_n V_n| = |U_m V_m - U_m V_n + U_m V_n - U_n V_n| = |U_m(V_m - V_n) + V_n(U_m - U_n)| \leq |U_m||V_m - V_n| + |V_n||U_m - U_n|$ (puis, on procède comme on avait fait en montrant que le produit de deux suites admet une limite si les suites convergent).

$(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont de Cauchy donc sont majorées d'où $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que $|U_m| \leq M, |V_n| \leq M, \forall m, n \geq N_0$.

Ainsi $|U_m V_m - U_n V_n| \leq M|V_m - V_n| + M|U_m - U_n|$. Comme $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont de Cauchy il $\exists N_1 / m, n \geq N_1 \Rightarrow |V_m - V_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ et $|U_m - U_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

Par suite pour $m, n \geq N_2 = \max\{N_0, N_1\}$ on a $|U_m V_m - U_n V_n| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$.

□

3.6 Théorème de Bolzano-Weirstrass sur les suites

Proposition 3.6.1. *Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs réelles.*

1. *Si $(U_n)_n$ est non majorée, alors il existe une suite extraite $(U_{n_k})_k$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_{n_k} = \infty$*
2. *Si $(V_n)_n$ est non minoré, alors il existe une suite extraite $(V_{n_l})_l$ telle que $\lim_{l \rightarrow \infty} Y_{n_l} = -\infty$.*

Preuve

1. Comme $(U_n)_n$ n'est pas majoré, $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $U_{n_k} > k$, alors la suite diverge vers $+\infty$
2. Similaire au cas ci-dessus.

□

Proposition 3.6.2. *Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs réelles. Si $(U_n)_n$ est bornée dans \mathbb{R} , alors $(U_n)_n$ admet une suite extraite qui converge dans \mathbb{R} .*

Preuve

On pose $S = \bigcup_{n \geq 1} \{U_n\}$ c'est à dire l'ensemble des valeurs distinctes des termes de $(U_n)_n$.

1. 1er cas : $\text{card}S < +\infty$

Comme la liste des U_n est infinie, si $|\text{Card}S| < \infty$ alors forcément il y a un élément x_0 qui intervient une infinité de fois parmi les U_n c'est-à-dire, il existe une suite extraite (U_{n_k}) telle que $U_{n_k} = x_0 \forall k \geq 1$ ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{n_k} = x_0$.

2. 2ème cas : $\text{card}S = \infty$.

Si S est infinie, comme S est bornée alors d'après le théorème de Bolzano-Weirstrass (vu en topologie : chap2), S admet au moins un point d'accumulation x_0 et alors d'après le théorème précédent, il existe une suite extraite $(U_{n_k})_n$ d'éléments de S qui converge vers x_0 .

□

Pour les cours d'analyse où on ne donne pas le théorème de Bolzano-Weirstrass dans le chapitre de topologie, c'est le théorème suivant qui joue le rôle du théorème de Bolzano-Weirstrass.

Théorème 3.6.3. *Théorème de Bolzano-Weirstrass sur les suites*

Toute suite infinie et bornée de nombres réels admet un point d'accumulation

Preuve Découle de la proposition précédente dans le cas où S est infinie (c'est-à-dire que la suite compte une infinité de termes).

NB On a déjà vu que l'existence du point d'accumulation implique l'existence d'une suite extraite convergente mais que la réciproque est fausse. Mais par contre l'existence d'un point d'accumulation équivaut à l'existence d'une suite extraite convergentes dont les termes sont deux à deux distincts à partir d'un certain rang.

3.7 Limite sup et Limite inf des suites numériques

On commence par un théorème de caractérisation qui va nous permettre d'introduire les notions de limites supérieures et limites inférieures.

Théorème 3.7.1. .

1. Soit (U_n) une suite majorée et non divergente vers $-\infty$, alors il existe un unique réel noté \overline{U} tel que pour tout $\varepsilon > 0$.
 - (a) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ avec $U_n < \overline{U} + \varepsilon, \forall n \geq N$.
 - (b) il existe une suite extraite $(U_{n_k})_{k \geq 1}$ avec $U_{n_k} > \overline{U} - \varepsilon, \forall k \geq 1$
2. Soit $(U_n)_n$ une suite minorée et non divergente vers $+\infty$, alors il existe un unique réel \underline{U} tel que pour tout $\varepsilon > 0$
 - (a') il existe $N \in \mathbb{N}^*$ avec $U_n > \underline{U} - \varepsilon, \forall n \geq N$;
 - (b') il existe une suite extraite $(U_{n_l})_{l \geq 1}$ avec $U_{n_l} < \underline{U} + \varepsilon, \forall l \geq 1$.

Preuve

1. Existence

- Comme $(U_n)_n$ est majorée, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $U_n < \beta, \forall n \geq 0$. Comme (U_n) ne diverge pas vers $-\infty$ alors $(U_n)_n$ admet une suite extraite minorée, c'est-à-dire il existe $(U_{n_t})_{t \geq 1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $U_{n_t} \geq \alpha, \forall t \geq 1$.

- On pose $M_k = \sup\{U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+m}, U_{k+m+1}, \dots\}$ alors $\alpha \leq M_k \leq \beta$. D'où $(M_k)_k$ est bornée. Comme $(M_k)_k \geq 1$ est décroissante, alors $(M_k)_k \geq 1$ converge. On note $\overline{U} = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k$.

- Si $\varepsilon > 0, \exists N$ tel que $(\forall k \in \mathbb{N})(k \geq N, M_k < \overline{U} + \varepsilon$ et pour $n \geq k \geq N$ on a : $U_n \leq M_k$.

Donc $U_n < \overline{U} + \varepsilon, \forall n \geq N$ ce qui donne (a).

Pour (b), raisonnons par l'absurde.

- Supposons (b) est faux, donc au plus il existe un nombre fini de terme U_m tel que $U_m > \overline{U} - \varepsilon$ alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow U_n \leq \overline{U} - \varepsilon$.

Ce qui contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \overline{U}$.

Unicité

Supposons que t ait les mêmes propriétés que \overline{U} .

- 1er cas Si $t < \overline{U}$, alors posons $\varepsilon = \frac{\overline{U} - t}{2}$.

La propriété (a) $\Rightarrow \exists N_\varepsilon / U_n < t + \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow U_n < t + \frac{\bar{U} - t}{2} = \bar{S} - \frac{\bar{U} - t}{2} = \bar{U} - \varepsilon$
donc il existe $N_\varepsilon / U_n < \bar{U} - \varepsilon, \forall n \geq N$ ce qui contredit (b).

- 2ème cas Si $t > \bar{U}$, alors posons $\varepsilon = \frac{t - \bar{U}}{2}$.

La propriété (b) $\Rightarrow \exists (U_{n_k})_k / U_{n_k} > t - \varepsilon \forall k \geq 1 \Rightarrow U_{n_k} > t + \frac{t - \bar{U}}{2} = \bar{U} + \varepsilon$ donc
 $U_{n_k} > \bar{U} + \varepsilon, \forall k \geq 1$ ce qui contredit (a).

Ainsi le seul cas possible est $t = \bar{U}$.

2. Se démontre de façon similaire à (1) (voir TD).

Définition 3.7.2. Soit $(U_n)_n$ une suite.

- On définit la limite supérieure de $(U_n)_n$ par

$$\limsup(U_n) = \bar{U} = \overline{\lim} U_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup\{U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+m}, U_{k+m+1}, \dots\}.$$

- De même la limite inférieure de $(U_n)_n$ est

$$\liminf(U_n) = \underline{U} = \underline{\lim} U_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf\{U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+m}, U_{k+m+1}, \dots\}.$$

NB1

Le théorème précédent montre l'existence et l'unicité des limites supérieure et inférieure de n'importe quelle suite réelle.

NB2

Si $M_k = \sup\{U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+m}, U_{k+m+1}, \dots\}$ alors $(M_k)_k$ est une suite décroissante donc
 $M_0 \geq M_1 \geq \dots \geq M_k \geq M_{k+1} \geq \dots$ et $\bar{U} = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k$.

Si on modifie un nombre fini de terme de $(U_n)_n$ par exemple de U_0 à U_{n_0} alors seuls les termes M_0 à M_{n_0} sont affectés, donc $\lim M_k$ ne change pas.

Ainsi s'il existe deux suites $(U_n)_n$ et $(Z_n)_n$ et un entier $N / U_n = Z_n \forall n \geq N$ alors $\bar{U} = \bar{Z}$.

On a la même remarque pour \underline{U} .

On retiendra que si on modifie un nombre finis de termes d'une suite alors ses limites supérieure et inférieure reste inchangées.

Définition 3.7.3. Extension de limite supérieure et inférieure à $\bar{\mathbb{R}}$ On définit :

- $\overline{\lim} U_n = +\infty$ si $(U_n)_n$ est non majorée
- $\overline{\lim} U_n = -\infty$ si $\lim U_n = -\infty$
- $\underline{\lim} U_n = -\infty$ si $(U_n)_n$ est non minorée
- $\underline{\lim} U_n = +\infty$ si $\lim U_n = +\infty$.

Théorème 3.7.4. Toute suite $(U_n)_n$ de réels admet une unique limite supérieure \bar{U} et une unique limite inférieure \underline{U} dans $\bar{\mathbb{R}}$ et de plus $\underline{U} \leq \bar{U}$.

Preuve

L'existence et l'unicité de \overline{U} et \underline{U} découle du théorème et de la définition précédents.

- Si \overline{U} et \underline{U} sont tous les deux finis alors le théorème précédent implique

$\underline{U} - \varepsilon < \overline{U} + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Donc, on a bien $\underline{U} \leq \overline{U}$.

Si $\underline{U} = -\infty$ ou $\overline{U} = +\infty$ alors $\underline{U} \leq \overline{U}$.

Si $\underline{U} = +\infty$ ou $\overline{U} = -\infty$ alors le résultat découle de la définition précédente.

□

Théorème 3.7.5. Propriétés

1. Soit $(U_n)_n$ une suite de réels, et soit $(U_{n_k})_{n_k}$ une suite extraite convergente alors $\underline{U} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} U_{n_m} \leq \overline{U}$.
2. $\overline{U}, \underline{U} \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}}$ (=ensemble des valeurs d'adhérences de la suite).
3. Soit $(U_n)_n$ une suite de réels, alors $\lim U_n = l$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\overline{\lim} U_n = \underline{\lim} U_n = l$.

Preuve

1. On va étudier deux cas.

- 1er cas :

\overline{U} est fini. Rappelons que si $\Omega_k = \{U_k, U_{k+1}, \dots\}$ on a $\overline{U} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \Omega_k$. Posons $\lim_{m \rightarrow +\infty} U_{n_m} = l \in \mathbb{R}$. Supposons $\overline{U} < l$ alors, il existe m_0 tels que $(\forall m)(m \geq m_0 \Rightarrow U_{n_m} \in]\overline{U}; l + 1[$, ce qui est impossible par définition de la borne supérieure. Par suite $l \leq \overline{U}$.

- On a le même résultat pour le cas \underline{U} .

2ème cas :

- Si $\overline{U} = +\infty$, alors $\lim_k U_{n_k} \leq \overline{U}$, car $\lim_m U_{n_m}$ est un réel par hypothèse.

- On a la même résultat pour le cas $\underline{U} = -\infty$.

2. On va étudier deux cas.

1er cas On suppose que \overline{U} et \underline{U} sont finis.

- Rappelons que si $\Omega_k = \{U_k, U_{k+1}, \dots\}$ alors $\overline{U} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \Omega_k$ et la suite $(\sup \Omega_k)_k$ est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists K_0$ tel que $k \geq K_0 \Rightarrow \overline{U} - \varepsilon < \sup \Omega_k < \overline{U} + \varepsilon$. Mais par définition de la borne supérieure, il existe $n_k \geq k$ tel que $\overline{U} - \varepsilon < U_{n_k} \leq \sup \Omega_k$.

Ansi, $]\overline{U} - \varepsilon; \overline{U} + \varepsilon[\cap \Omega_k \neq \emptyset$. Par suite \overline{U} est adhérent à Ω_k , $\forall k \geq K_0$. Comme la suite

$\dots \subset \Omega_k \subset \Omega_{k-1} \subset \dots \subset \Omega_{K_0} \subset \dots \subset \Omega_1$ est décroissante, alors \overline{U} est adhérent à Ω_k , $\forall k \geq 1$. Par suite, on a $\overline{U} \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\Omega_k}^{\mathbb{R}} = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}}$.

- On a le même résultat pour le cas \underline{U} .

2ème cas Si $\overline{U} = \pm\infty$ et $\underline{U} = \pm\infty$, alors par extension des définitions (voir la définition 3.7.3) de \limsup et \liminf , on voit que ces limites sont celles de suites extrêmes convergentes vers \pm . Par suite ces limites sont des valeurs d'adhérences dans \mathbb{R} .

3. On va étudier deux cas.

1er cas : On suppose que l est réel (fini).

\Rightarrow) Supposons $\lim U_n = l$. Alors les 4 critères d'existence et d'unicité de \overline{U} et \underline{U} (que le théorème d'existence implique) sont vérifiés par l . Comme \overline{U} et \underline{U} sont uniques, alors $\overline{U} = \underline{U} = l$.

\Leftarrow) Supposons que, $\overline{U} = \underline{U}$ et soit l cette valeur commune.

De 1(b) et 2(b) du théorème d'existence 3.7.1, on tire : il existe N , $\forall n \geq N$, $l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$. Par suite $\lim U_n = l$.

2ème cas : On suppose que $l = \pm\infty$ alors l'équivalence est évidente d'après les définitions précédentes.

□

Proposition 3.7.6. (*Caractérisation des \liminf et \limsup*)

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs réelles. Alors la limite supérieure (resp : limite inférieure) de $(U_n)_n$ sont la plus grande (resp : la plus petite) valeur d'adhérence $(U_n)_n$ dans \mathbb{R} , autrement dit :

$$\limsup U_n = \max_{\mathbb{R}} \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}} \text{ et } \liminf U_n = \min_{\mathbb{R}} \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_n/n \geq k\}}^{\mathbb{R}}$$

Preuve Découle de (1) et (2) du théorème 3.7.5 précédent.

NB Cette caractérisation permet d{eterminer des limites sup et inf dans certains cas pratiques.

Exemple 3.7.7. .

$$1. \overline{\lim} a^n \begin{cases} = +\infty, & \text{si } |a| > 1 \\ = 1, & \text{si } |a| = 1 \\ 0, & \text{si } |a| < 1 \end{cases}$$

.....

$$2. \underline{\lim} a^n \begin{cases} = +\infty, & \text{si } a > 1 \\ = 1, & \text{si } a = 1 \\ 0, & \text{si } |a| < 1 \\ = -1, & \text{si } a = -1 \\ -\infty, & \text{si } a < -1 \end{cases}$$

$$3. \overline{\lim}(n^4 + 1) = \underline{\lim}(n^4 + 1) = +\infty.$$

$$4. \overline{\lim}[(-1)^n(1 - \frac{1}{n})] = 1 \quad \text{et} \quad \underline{\lim}[(-1)^n(1 - \frac{1}{n})] = -1.$$

$$5. \overline{\lim}(-1)^n n = +\infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim}(-1)^n n = -\infty.$$

$$6. \overline{\lim}[1 + (-1)^n]n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim}[1 + (-1)^n]n^2 = 0.$$

3.8 Suite négligeables, Suites équivalentes dans \mathbb{R}

Définition 3.8.1. .

On dit qu'une suite $(U_n)_n$ est négligeable devant $(V_n)_n$ ssi, il existe une suite (ξ_n) convergente vers 0 telle que $U_n = \xi_n V_n$ à partir d'un certain rang.

On dit aussi que $(V_n)_n$ est préponderante devant $(U_n)_n$.

L'ensemble des suites négligeables de $(V_n)_n$ est noté $o(V_n)$ (on lit "**petit tau de** V_n "). Par abus de notation, on écrit $U_n = o(V_n)$ et on lit " U_n est négligeable devant V_n ".

Remarques 3.8.2. En général pour monter que $U_n = o(V_n)$, il suffit de monter que $\lim \frac{U_n}{V_n} = 0$ (en général $V_n \neq 0$ à partir d'un certain rang).

Exemple 3.8.3. .

- $U_n = n + 1$ et $V_n = e^n$. On pose $\xi_n = \frac{n+1}{e^n}$ alors $\lim \xi_n = 0$. On a $U_n = \xi_n \cdot V_n$ alors $U_n = o(V_n)$
- $U_n = \ln n$ et $V_n = n$. On a $U_n = \xi_n \cdot V_n$ avec $\xi_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ donc $U_n = o(V_n)$.

Proposition 3.8.4. Propriétés

- Si $U_n = o(V_n)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $U_n = o(\lambda V_n)$
- Transitivité : si $U_n = o(V_n)$ et $V_n = o(W_n)$ alors $U_n = o(W_n)$.
- Si $U_n = o(V_n)$ et $W_n = o(V_n)$ alors $\alpha U_n + \beta W_n = o(V_n)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $W_n o(V_n) = o(W_n V_n)$
- $o(U_n) o(V_n) = o(U_n V_n)$.

Exemple 3.8.5. — $o(1) = \{(U_n)_n / \exists \xi_n \rightarrow 0 : U_n = \xi_n \cdot 1\} = \{(U_n)_n / U_n \rightarrow 0\}$.

- $\lambda \in \mathbb{R}^* : o(\lambda) = \{(U_n)_n / \exists \xi_n \rightarrow 0 : U_n = \xi_n \cdot \lambda\}$ donc $o(\lambda) = o(1)$.
- $o(n) = \{(U_n)_n / \exists \xi_n \rightarrow 0 : U_n = \xi_n \cdot n\}$. Alors n^α , $\alpha < 1$ et $\ln n$ sont dans $o(n)$ car $\lim \frac{n^\alpha}{n} = 0$ si $\alpha < 1$. On aussi $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$.

Définition 3.8.6. Deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites équivalentes si $U_n = V_n + o(V_n)$.

On note $U_n \sim V_n$ ou $V_n \sim U_n$ pour dire que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont équivalentes.

Exemple 3.8.7. $V_n = e^n$, $U_n = e^n + (n^2 + 1)$ alors $U_n = V_n + o(V_n)$ car $\lim \frac{n^2 + 1}{e^n} = 0$.

Proposition 3.8.8. On considère deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont équivalentes
2. $\exists N_0 / n > N_0 \Rightarrow U_n = V_n(1 + \xi_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$

3. $V_n = U_n + o(U_n)$
4. $\exists N_1/n > N_1 \Rightarrow U_n = \beta_n V_n$ avec $\lim \beta_n = 1$.

Preuve La preuve est simple. □

Proposition 3.8.9. *la relation \sim est une relation d'équivalence*

Preuve Découle de la proposition précédente (avec le (4) par exemple).

Remarques 3.8.10. .

1. *Eviter d'écrire $U_n \sim 0$ car c'est en général faux (donc n'utiliser pas l'équivalence pour deux suites qui convergent vers 0).*
2. *L'équivalence des suites permet de déterminer des limites ou de faire des études asymptotiques. Par exemple si $U_n \sim V_n$ et $W_n = o(V_n)$ alors $U_n + W_n \sim V_n$.*
3. *L'équivalence ne fournit que des informations qu'au voisinage de l'infini.*
4. *Ne jamais utiliser l'équivalence pour la somme ou la différence donc $(U_n \sim V_n)$ et $(W_n \sim t_n)$ n'implique pas que $U_n + W_n \sim V_n + U_n$.*

Par Exemple ; $n^2 \sim n^2 + n$ et $-n^2 + 1 \sim -n^2$ mais $n^2 - n^2 + 1 = 1$ n'est pas équivalent à $n^2 + n - n^2 = n$.

Exercice 3.8.11. *Monter que si $W_n = o(U_n)$ et $U_n \sim V_n$ alors $U_n + W_n \sim V_n$. Donner un exemple.*

Proposition 3.8.12. *Propriétés*

1. *Si à partir d'un certain rang, $U_n > 0$, $V_n > 0$ et si $U_n \sim V_n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $U_n^\lambda \sim V_n^\lambda$.*
2. *Si à partir d'un certain rang, $U_n \neq 0$, $V_n \neq 0$ et $U_n \sim V_n$ alors $\frac{1}{U_n} \sim \frac{1}{V_n}$.*
3. *Si $U_n \sim V_n$ et $V_n = o(W_n)$ alors $U_n = o(W_n)$ ou encore si $U_n \sim V_n$ et $W_n = o(V_n)$ alors $W_n = o(U_n)$.*
4. *Si $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$ alors $\lim U_n = L \Leftrightarrow U_n \sim L$ (Faux si $L = 0$).*

Preuve La preuve est laissée au lecteur. □

Proposition 3.8.13. : *(Croissance comparée et suite de références)*

1. - Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$;
2. - si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors $\ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$;

3. - $n^\alpha = o(q^n)$, $q^n = o(n!)$, $q > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

4. - Si $|a| < |b|$ alors $a^n = o(b^n) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Preuve La preuve est laissée au lecteur. (voir les limites usuelles déjà rencontrées en terminale). \square

3.9 Suites dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C}

On a vu en topologie dans le chapitre 3 qu'il y'a trois (3) normes équivalentes sur \mathbb{R}^n et même que toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n . Dans cette partie, on fixe la norme euclidienne qui est aussi commune à \mathbb{C} .

Définition 3.9.1. Une suite $(X_r)_r$ dans $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} , converge vers $L \in E$ si $\lim_{r \rightarrow \infty} \|X_r - L\| = 0$ et on écrit $\lim_{r \rightarrow \infty} X_r = L$

Exemple

1) Dans \mathbb{C} , on considère la suite complexe à variable réelle (= à domaine réel) $(U_n)_n$, donnée par $U_n = \frac{(e^{ix})^n}{\sqrt{n}}$. On a :

$$\left\| \frac{(e^{ix})^n}{\sqrt{n}} \right\| = \left| \frac{\cos(nx) + i \sin(nx)}{\sqrt{n}} \right| = \sqrt{\frac{\cos^2(nx)}{n} + \frac{\sin^2(nx)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0. \text{ Donc } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(e^{ix})^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

2) Dans \mathbb{R} , on considère la suite vectorielle à variable réelle (= à domaine réel) $(V_r)_r$, donnée par $V_r = \left(r(1 - e^{-\frac{1}{r}}), \frac{\sin 2r}{r}\right)$. On a :

$$\left\| \left(r(1 - e^{-\frac{1}{r}}), \frac{\sin 2r}{r}\right) - (1, 2) \right\| = \sqrt{\left(r(1 - e^{-\frac{1}{r}}) - 1\right)^2 + \left(\frac{\sin 2r}{r} - 2\right)^2} \longrightarrow 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{r \rightarrow \infty} V_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r(1 - e^{-\frac{1}{r}}), \frac{\sin 2r}{r}\right) = (1, 2).$$

Définition 3.9.2. On dit que $(X_r)_r$ est de Cauchy dans $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / \forall (r, s) \in \mathbb{N}^2, (r \geq N_\varepsilon, s \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|X_r - X_s\| \leq \varepsilon)$$

Théorème 3.9.3. 1. Soit $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X_r = (X_{1r}, \dots, X_{nr}) \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} X_r = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} X_{ir} = \ell_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

2. Soit $\ell = a + ib$ et $X_r = U_r + iV_r$ avec $U_r, V_r \in \mathbb{R}$,

$$\text{alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} X_r = \ell \text{ dans } \mathbb{C} \text{ si, et seulement si } \lim_{r \rightarrow +\infty} U_r = a \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} V_r = b \text{ dans } \mathbb{R}$$

3. Soit $X_r = (X_{1r}, X_{2r}, \dots, X_{nr})$, alors $(X_r)_r$ est de Cauchy dans \mathbb{R}^n si, et seulement si (X_{ir}) est de Cauchy dans \mathbb{R} pour $1 \leq i \leq n$

4. Soit $X_r = U_r + iV_r$, alors $(X_r)_r$ est de Cauchy dans \mathbb{C} si, et seulement si (U_r) et (V_r) sont de Cauchy dans \mathbb{R} .

Preuve : à faire. □

Théorème 3.9.4. Critère de Cauchy

Une suite $(X_r)_r$ dans $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} est de Cauchy si, et seulement si $(X_r)_r$ converge.

Preuve Découle du théorème précédent. □

Définition 3.9.5. Soit S un ensemble non vide de $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} , on définit le diamètre de S par :

$$d(S) = \sup\{\|X - Y\|, X, Y \in S\}$$

- Si $d(S) < \infty$, on dit que S est borné et si $d(S) = +\infty$, on dit que S est non borné.

Théorème 3.9.6. Théorème de Cantor généralisé

Soit $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ des fermés non vides de $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} tels que :

$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \dots \supset U_r \supset \dots$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(U_r) = 0$, alors l'intersection $I = \bigcap_{r=1}^{+\infty} U_r$ contient un seul point de E

Preuve

Soit $(X_r)_r$ une suite telle que $X_r \in U_r$ pour tout $r \geq 1$. Comme $(U_r)_r$ est décroissante alors $X_r \in U_k$ pour tout $r \geq k$. Donc $|X_r - X_s| < d(U_k)$ si $r, s \geq k$.

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(U_k) = 0$, alors $(X_r)_r$ est de Cauchy donc converge vers une limite $X \in E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} .

X est un point d'accumulation de $(X_r)_r$ et donc de tout U_k pour $k \geq 1$.

Comme les U_k sont fermés alors $X \in U_k, \forall k \geq 1$, d'où $X \in I = \bigcap_{k=1}^{+\infty} U_r \Rightarrow I \neq \emptyset$.

Soit $Y \in I$ alors $Y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ donc $Y \in U_k, \forall k \Rightarrow \|X - Y\| \leq d(U_k) \forall k \geq 1$.

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(U_k) = 0$ alors $X = Y$ cqfd. □

Théorème 3.9.7. Heine-Borel généralisé

Soit S un fermé borné de $E = \mathbb{R}^n$ alors S est un compact.

Preuve

1. Pour $E = \mathbb{R}$, c'est fait dans le chapitre 3.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{C} . Soit \mathcal{H} un recouvrement d'ouvert de S . Comme S est borné, alors S peut être plongé dans un carré :

$$S \subset T = \{(x, y), \alpha_1 \leq x \leq \alpha_1 + L, \alpha_2 \leq y \leq \alpha_2 + L\} \text{ pour } \mathbb{R}^2;$$

ou $S \subseteq T = \{x + iy/\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1 + L, \alpha_2 \leq x \leq \alpha_2 + L\}$ pour \mathbb{C} .

On va appliquer la méthode classique connue sous le nom méthode de dichotomie.

On subdivise T en 4 carrés $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}$ et $T^{(4)}$ puis, on pose $S^{(i)} = S \cap T^{(i)}$, $1 \leq i \leq 4$, comme le compact $S = \bigcup_{i=1}^4 S^{(i)}$ ne peut être recouvert par une sous famille finie de \mathcal{H} alors il en est de même pour au moins l'un des $S^{(i)}$.

On le note U_1 et le carré qui le contient est noté T_1 . On a $d(U_1) = \frac{L\sqrt{2}}{2}$ et le coté de U_1 est de longueur $\frac{L}{2}$.

* En decoupant U_1 de la même façon que S , on trouve U_2 de coté $\frac{L}{4}$ et de diagonale $d(U_2) = \frac{L\sqrt{2}}{2^2}$ qui ne peut être recouvert par une famille finie de \mathcal{H} .

** De proche en proche, on construit une suite décroissante (U_k) telle que (U_k) ne peut être recouvert par une famille finie de \mathcal{H} et le coté de U_k est $\frac{L}{2^k}$ donc $d(U_k) = \frac{L\sqrt{2}}{2^k}$.

D'où $(U_k)_k \searrow$ et $\lim d(U_k) = 0$.

Donc d'après le théorème de Cantor généralisé, il existe un unique X tel que $\{X\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k$

*** Comme $X \in S$ alors il existe $H_X \in \mathcal{H}$ tel que $X \in H_X$ (=ouvert). Comme H_X est un ouvert alors $\exists r > 0 / \mathcal{B}_0(X, r) \leq H_X$. Comme $\lim \frac{L\sqrt{2}}{2^k} = 0$, $\exists K / \forall k \geq K, \frac{L\sqrt{2}}{2^k} < r$
Mais on sait que $X \in U_k$ donc $\forall X_k \in U_k, \|X_k - X\| \leq \frac{L\sqrt{2}}{2^k} < r$ d'où $\|X_k - X\| < r, \forall k \geq K$.

Ainsi $X_r \in \mathcal{B}_0(X, r) \leq H_X$ ce qui contredit le fait que U_k ne peut être recouvert par une sous-famille finie de \mathcal{H} .

3. Pour $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$)

La méthode par dichotomie se généralise aisément : on plonge S dans un cube qu'on décompose en des cubes de même taille.

□

Théorème 3.9.8. (Théorème de Bolzano Weirstrass généralisé)

Toute partie bornée de $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} et infinie d'éléments de E admet au moins un point d'accumulation.

Preuve : Similaire à celle du chapitre 3.

□

Remarques importantes Les différents théorèmes que nous venons de voir dans $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} , nous donnent tous les outils pour reprendre pour \mathbb{R}^n et \mathbb{C} , la plus part des résultats vus sur les suites dans R avec quelques différences mineures que nous préciserons ci dessous.

1a) Dans $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} , les notions de divergence, majoré, minoré, suite extraite, somme et différence de suites, marchent ici !

1b) Comme $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C} ne sont pas munis d'un ordre naturel prolongeant celui de \mathbb{R} , alors les notions de monotonie, limite sup, limite inf et de divergence vers $\pm\infty$ ne sont toujours pas définies.

Mais pour \mathbb{C} , on définit la divergence vers $+\infty$ (voir plus loin).

Les notions de produits et de quotient de suites ne marchent pas pour \mathbb{R}^n mais marchent pour \mathbb{C} (car \mathbb{C} est un corps alors que \mathbb{R}^n ne l'est pas).