UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023-2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

ALGEBRE : L1TDSI/MCS-CI

Série 6. Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Préciser celles qui sont des endomorphismes et celles qui sont des forme linéaires.

1. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (10x + z, x + y, z)$
2. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto 12x + 4y + 20z$
3. $f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + 2z + 2\sqrt{5})$
4. $f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \quad P \mapsto \big(P(1), P(\sqrt{2}), P(5)\big)$

Exercice 2. Montrer que les données suivantes définissent une unique application linéaire que l'on déterminera :

1. $\Phi(-1, 1, 1) = (2, 0, -1)$; $\Phi(0, -1, 1) = (1, 0, -2)$; $\Phi(0, 0, -1) = (2, 1, -1)$
2. $\Psi(1, 1, 1) = 2$; $\Psi(-1, 1, 1) = 1$; $\Psi(0, 0, -1) = 5$

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad (x, y, z, t) \mapsto (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$
et $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer Ker(f), une base de Ker(f) et la dimension de Ker(f).
3. En déduire la dimension de Im(f).
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Déterminer Im(f) et montrer que Ker(f) et Im(f) sont supplémentaires.
6. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^4$. Donner une base et la dimension de E.
7. A-t-on $\mathbb{R}^4 = E \oplus ker(f)$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$. On pose

$$E_+ = \{X \in E : f(X) = X\} \text{ et } E_- = \{X \in E : f(X) = -X\}$$

1. Montrer que E_- et E_+ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Déterminer $E_- \cap E_+$.
3. Si de plus on admet que $f^2 = Id_E$ (ie f est une involution), alors montrer que $E = E_- \oplus E_+$.

Exercice 5. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les éléments φ et ψ définis par :

$$\varphi(x) = e^{-x}cos(x)\,;\, \psi(x) = e^{-x}sin(x) \text{ et } E = \{a\varphi + b\psi : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Vérifier que E est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $B = \{\varphi, \psi\}$ est une base de E.
2. Montrer que tout élément $f \in E$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' \in E$.
3. Montrer que l'application $\partial : E \to E \quad f \mapsto f'$ est un automorphisme de E.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On pose $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ fois}$

1. Vérifier que $Ker(f^n) \subseteq Ker(f^{n+1})$ et $Im(f^{n+1}) \subseteq Im(f^n)$, $\forall n \geq 1$.
2. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

   (i) $Im(f) = Im(f^2)$, (ii) $Ker(f) = Ker(f^2)$ et $Im(f) \oplus Ker(f) = E$
3. Démontrer que $Ker(f) = Im(f) \Leftrightarrow f^2 = 0$ et $dim(E) = 2rg(f)$