UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

LICENCE 1 TRANSMISSION DE DONNÉES ET SÉCURITÉ DE L'INFORMATION
Limite, continuité et dérivabilité

1 Continuité

Exercice 1 :

1. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 0} xE(x-\tfrac{1}{x}) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x} \qquad \lim_{\to\infty} \left(1-\tfrac{1}{x}\right)^{x}$$

2. Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto E\left(\tfrac{1}{x}\right) \qquad ; g : x \mapsto xE\left(\tfrac{1}{x}\right) \qquad h : x \mapsto x^2E\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

3. La fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

Exercice 2 : Soit f une application définie et continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ verifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1. Calculer $f(0)$, puis montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que $f(nx) = nf(x)$ pour tout entier n et tout réel x.
3. . Montrer que $f(qx) = qf(x)$ pour tout rationnel q et pour tout réel.
4. Montrer que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pour tous réels α et x.
5. En déduire la nature de f.

Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$.

Exercice 4 : Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$, en déduire que c_n est unique. contenu...

2 Dérivabilité

Exercice 1 :

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

   $a)\ f(x)=\sqrt{|x|}\quad b)\ f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\\ x\ln x-x & \text{si } x>0\end{cases}$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   $f_1(x)=\arccos\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)\qquad f_2(x)=\arcsin\left(2x-1\right)+2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$

   $f_3(x)=\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\qquad f_4(x)=\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$

Exercice 2 : Soient a et b deux réels et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ e^{bx}-x & six>0\end{cases}$$

1. À laide de la règle de L'Hospital déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$$

2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. Montrer que l'équation $e^x=1+x$ admet au plus une racine réelle.
2. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction f définie par $f(x)=|x(x+2)|$ sur $[-2,0]$.
3. Soient a et b deux reels tels que $a<b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et pour tout $x\in]a,b[$, $f''(x)\leq 0$. Montrer que f conserve un signe constant sur $[a,b]$.
4. Montrer que pour tout $x>1$ on a : $x-1<xlnx<x(x-1)$.
5. Montrer que pour tout réels x et y on a : $|sin(x)-sin(y)|\leq|x-y|$.
6. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie pour tout x dans $]0,+\infty[$ par $f(x)=xlnx$.

1. Etudier les variation de f.
2. En déduire que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e},+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ? 4. Calculer $f^{-1}(0)$. Calculer $f(e)$, $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
4. Tracer dans un même repère orthonormé le graphe de f et celui de f^{-1}.

Exercice 5 : Calculer la dérivée n^{ime} des fonctions suivantes :

1. $f(x)=(x^4-5x+10)e^x$
2. $g(x)=\frac{\sin x}{1+x}$