UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

LICENCE 1 TRANSMISSION DE DONNÉES ET SÉCURITÉ DE L'INFORMATION

Série 1: Nombres réels

Exercice 1:

1. Démontrer que si $r \in \mathbf{Q}$ et $x \notin \mathbf{Q}$ alors $r + x \notin \mathbf{Q}$ et $r \cdot x \notin \mathbf{Q}$.
2. On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que
   (a) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$
   (b) Montrer que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \notin Q$
   (c) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \notin Q$

.

Exercice 2: Pour tout réel t, on note $E(t)$ la partie entière de t.

1. Montrer que pour tous réels x et y on a : $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
2. Montrer que pour tous entiers relatifs n et m on a : $E(\frac{m+n}{2}) + E(\frac{n-m+1}{2}) = n$.
3. Montrer que pour tout $n \in N$
$$E\big((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2\big) = 4n + 1$$
4. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $E\big(\frac{E(nx)}{n}\big) = E(x)$.

Exercice 3: Soient A et B deux parties non vides et bornés de R. Par définition, nous avons: $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$, $A \times B = \{a \times b, a \in A, b \in B\}$ $-A = \{-a, a \in A\}$. Les assertions suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $A \subset B \Longrightarrow supA \leq supB$
2. $A \subset B \Longrightarrow infB \leq infA$
3. $inf(A \cup B) = min(infA, infB)$
4. $inf(A + B) = infA + supB$
5. $sup(-A) = -inf(A)$
6. $sup(A \times B) = supA \times supB$

Exercice 4:

1. Déterminer dans $\mathbf{R}$, s'ils existent les bornes supeérieures et inférieures de $A =]-1,3] \cup \{5\}$ $B = \{5\} \cup [2,4]$ et $C = \{2 - \frac{(-1)^n}{2n+1},\ n \in \mathbf{N}^*\}$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $m \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$.
   En déduire que $E = \{\frac{mn}{(m+n)^2},\ n \in \mathbf{N}^*\}$ admet une borne inférieure que l'on déterminera.

3. (a) Vérifier que, pour tous réels $x_i, x_j > 0$, on a

   $$\frac{x_1}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2$$

   (b) Soit $n \geq 1$ fixé. Déterminer

   $$\inf\left\{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\ ;\ x_1, \ldots, x_n \in R_+^*\right\}$$

Exercice 5:

1. Les calculs se font dans $\mathbf{R}$.

   (a) Résoudre $|a-1| + |a+1| = 4$

   (b) En déduire les solutions de $|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x = 1} + 1 = 4$.

   (c) Puis les solutions de $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} = 4$

2. Soient a, b, c, d, e, f des réels tels que $a + b + c + d + e + f = 0$. Montrer que l'on a:

   $$ab + bc + cd + de + ef + fa \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$

3. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 1$.
   Prouver que

   $$\sqrt{\frac{xy}{z + xy}} + \sqrt{\frac{yz}{y + xy}} + \sqrt{\frac{zx}{y + zx}} \leq \frac{3}{2}$$

   x+yz

Exercice 6:

1. Soit $\Omega = [-3, 5[\cup \{7\}$ une partie de R.

   (a) Ω est-il un voisinage de -1,5,6,7?

   (b) 7 est-il adhérent à Ω

   (c) Déterminer s'il existe, les points isolés de Ω.

2. $\sqrt{5}$ est-il un point d'accumulation de $\Gamma = \{x \in Q,\ x^2 < 5\}$?

3. Déterminer l'adhérence de Γ.