Université Cheikh Anta DIOP de Dakar

Faculté des Sciences et Techniques

(F. S. T.)

Département de Mathématiques et Informatique

(D. M. I.)

Laboratoire d'Algèbre de Cryptologie de G
'e'eomtrie Algébrique et Applications

(L. A. C. G. A. A.)

CHAPITRE 4 :

LIMITES ET CONTINUITE

Dr. Demba SOW, demba1.sow@ucad.edu.sn

Année académique 2022-2023

Table des matières

Chapitre 4

Limites et Continuité

Introduction : Dans ce chapitre, on étudie les notions de limites et de continuité des fonctions à une variable réelle et à valeurs réelles. On introduira aussi sommairement, les fonctions à une variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^n$. La plus part des définitions et résultats ont déjà été vus au lycée comme par exemple la convergence monotone et le théorème des valeurs intermédiaires. Dans ce chapitre, il s'agit de donner un formalisme plus rigoureux des concepts de limite et de continuité en se basant sur des notions topologiques du chapitre 2. Beaucoup de résultats de ce chapitre généralisent des concepts déjà rencontrés sur les suites dans le chapitre 3, par exemple, les propriétés algébriques des limites, la convergence monotone, les limites sup et inf. Mais, aussi quelques nouveaux concepts seront abordés sur la continuité comme la caractérisation séquentielle, la continuité uniforme, les fonctions en escaliers...

4.1 Limites des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définitions et propriétés de base

Si V_u est un voisinage de u dans $\mathbb{R}$ alors $\dot{V_u} = V_u \setminus \{u\}$ est appelé voisinage pointé en u.

Définition litérale de limite vu au lycée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (excepté peut être un point x_o), soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que "f tend vers l quand x tend vers x_o " si les valeurs de $f(x)$ peut être aussi proches que l'on veut de l à condition que les x soient assez proche de x_o (mais différents de x_o) et on note : $\lim\limits_{x \to x_o,\ x \neq x_0} f(x) = l$

Traduction en langage $\delta, \varepsilon)$

Comme sur les suites "$f(x)$ aussi proche de l que l'on veut" se traduit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad | f(x) - l |< \varepsilon$$

"x assez proche de x_o" se traduit par : $\exists \quad \delta_\varepsilon > 0 \quad :| x - x_o |< \delta_\varepsilon$

Ainsi $\lim\limits_{x \to x_o,\ x \neq x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in I\big(0 <| x - x_o |< \delta \Rightarrow| f(x) - l |< \varepsilon\big)$

<u>Traduction en langage topologique avec les voisinages</u>

Cette écriture entre parenthèses s'écrit aussi

$$x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

Autrement dit

$$f(]x_o - \delta, x_o + \delta[) \cap (I \setminus \{x_0\}) \subseteq]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

Mais, $\dot{V}=]x_o - \delta, x_o + \delta[\setminus\{x_0\}$ est un voisinage pointé de x_0 et tout voisnage W de l contient un voisinage de l de la forme $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Donc tout voisinage de l contient l'image d'un voisinage pointé de x_o d'où la définiton générale suivante.

Définition 4.1.1. *:(Limite finie en un réel)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application (où $I \subseteq \mathbb{R}, I \neq \emptyset$). Soit $x_0 \in \overline{I}$, un réel (on a pris l'adhérence de I pour tenir compte des points aux extrémités de I) et $l \in \mathbb{R}$. on dit que f tend vers l lorsque x tend vers x_o et on note $\lim\limits_{x \to x_o,\ x \neq x_0} f(x) = l$ si $\forall V_l$ voisinage de l, il existe $\dot{V}_{x_0}$ un voisinage pointé de x_o tel que

$$f(\dot{V}_{x_0} \cap I) \subseteq V_l$$

Ce qui se traduit par : $\lim\limits_{x \to x_o,\ x \neq x_o} f(x) = l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in I(0 <| x - x_o |< \delta_\varepsilon \Rightarrow| f(x) - l |\leq \varepsilon)$$

<u>*Limite finie en un réel à gauche ou à droite*</u>

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique à variable réelle.

On dit que $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ admet L pour limite à droite en x_o si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in I \quad \big(0 < x < x_o + \delta_\varepsilon \Rightarrow| f(x) - L |\leq \varepsilon\big)$$

.

On note : $\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$.

On dit que $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *admet* L *pour limite à gauche en* x_o *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in I \quad \big(x_o - \delta_\varepsilon < x < x_o \Rightarrow \mid f(x) - L \mid \leq \varepsilon\big)$$

.

On note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$.

NB1 : On a utilisé une inégalité large dans $\mid f(x) - l \mid \leq \varepsilon$ car c'est plus facile à manipuler qu'une inégalité stricte comme $\mid f(x) - l \mid < \varepsilon)$ et la définition reste toujours correcte.

NB2 : Comme avec les suites, il faut déterminer la valeur de δ_ε en fonction de ε.

Exemple 4.1.2. *Soit* $0 \neq a \in \mathbb{R}$ *et* $f(x) = ax \sin \frac{1}{x}$ *alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ *. En effet, soit* $\epsilon > 0$*, on a* $\mid f(x) - 0 \mid = \mid a \mid\mid x \mid\mid sin\frac{1}{x} \mid$*. Comme* $\mid sin\frac{1}{x} \mid \leq 1$ *alors on en déduit que* $\mid f(x) - 0 \mid \leq \mid a \mid\mid x \mid$*. Il suffit que cette dernière quantité soit inférieure à* ε *c'est-à-dire* $\mid a \mid\mid x \mid \leq \varepsilon \Leftrightarrow \mid x \mid \leq \frac{\varepsilon}{\mid a \mid}$*. D'où, si on pose* $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\mid a \mid}$*, on a bien* $\forall \varepsilon > 0, \exists \quad \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\mid a \mid}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad (\mid x - 0 \mid < \delta_\varepsilon \Rightarrow \mid f(x) - 0 \mid \leq \varepsilon)$*. Ainsi, on conclut que* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Théorème 4.1.3. *Unicité de la limite*

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe et est un réel alors elle est unique.*
2. *Si* f *admet une limite à droite (resp. à gauche) en* x_o*, elle est unique.*
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *exite (= est un réel) si et seulement si* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existe (= est un réel).*

NB3 ; Dans le calcul de la limite la valeur de f en x_o ne joue aucun rôle.

Exercice 4.1.4. *Dans cet exemple sur* $I = [0, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ si \ 0 \leq x < 3; \\ -2x + 8 \ si \ 3 < x \leq 5; \\ f(3) = 4. \end{cases}$$

donc $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ *alors que* $f(3) = 4$

Proposition 4.1.5. *Soient* I *un intervalle et* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions numériques à variable réelle.*

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ *alors, il existe* $M > m > 0$ *et un voisinage* V_{x_o} *de* x_o *tel que* $x \in I \cap \overset{\bullet}{V}_{x_o} \Rightarrow 0 < m <\mid g(x) \mid< M$

2. Si g *est bornée sur un voisinage* $\overset{\bullet}{V}_{x_o}$ *de* x_o *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Preuve :

1. Soit $\varepsilon > 0$ alors, il existe δ_ε, tel que $\forall x \in I, 0 <\mid x - x_o \mid< \delta_\varepsilon \Rightarrow\mid g(x) - L \mid< \varepsilon$.
   On a $\mid\mid g(x) \mid - \mid L \mid\mid< \varepsilon \Leftrightarrow\mid L \mid -\varepsilon <\mid g(x) \mid<\mid L \mid +\varepsilon$.
   En posant $\varepsilon = \dfrac{\mid L \mid}{2}$, on a
   $\mid L \mid - \dfrac{\mid L \mid}{2} <\mid g(x) \mid<\mid L \mid + \dfrac{\mid L \mid}{2} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{\mid L \mid}{2} <\mid g(x) \mid<\mid L \mid + \dfrac{\mid L \mid}{2}$.
   Si on prend $m = \dfrac{\mid L \mid}{2}$ et $M = 3\frac{|L|}{2}$, on a l'existence de δ_2 tel que
   $\forall x \in I,\ 0 <\mid x - x_o \mid< \delta_2 \Rightarrow 0 < m <\mid g(x) \mid< M$.
2. g est bornée, alors $\mid g \mid$ est majorée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et un voisinage V_{x_o} tel que $\forall x \in I,\ x \in V_{x_o} \Rightarrow\mid g(x) \mid< M$.
   Sur $I \cap V_{x_0}$, on a $\mid f(x)g(x) \mid\leq\mid f(x) \mid\mid g(x) \mid\leq M \mid f(x) \mid$.
   Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, si $\varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon$ tel que $\forall x \in I,\ 0 <\mid x - x_o \mid< \delta_\epsilon \Rightarrow\mid f(x) \mid< \dfrac{\varepsilon}{M}$.
   D'où $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon, /\ \forall x \in I, x \in V_{x_o} \cap]x_o - \delta_\varepsilon, x_o + \delta_\varepsilon[\Rightarrow\mid f(x)g(x) \mid< \dfrac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ alors d' après (1), il existe
   δ_1 tel que $\forall x \in I, 0 <\mid x - x_o \mid< \delta_1 \Rightarrow\mid g(x) \mid> m$.
   Sur $I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, on a $\mid \dfrac{f(x)}{g(x)} \mid= \dfrac{\mid f(x) \mid}{\mid g(x) \mid} < \dfrac{f(x)}{m}$.
   Si $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, alors, il existe δ_2 tel que
   $\forall x \in I, 0 <\mid x - x_o \mid< \delta_2 \Rightarrow\mid f(x) \mid< \varepsilon.m$.
   D'où pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a $\forall x \in I,\ 0 <\mid x - x_o \mid< \delta| \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}| < \varepsilon \dfrac{m}{m} = \varepsilon$.

$\square$

Proposition 4.1.6. ***(Opérations algébriques et limites)***

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions numériques à variables réelle. On suppose que* $\lim\limits_{x_o} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_o} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x_o}(f + g) = \lim\limits_{x_o} f(x) + \lim\limits_{x_o} g(x) = L_1 + L_2$ *;*

2. $\lim\limits_{x_o} \lambda f(x) = \lambda L_1$ *si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

3. $\lim\limits_{x_o} f(x)g(x) = \lim\limits_{x_o} f(x) \times \lim\limits_{x_o} g(x) = L_1 \times L_2$

4. Si $L_2 \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x_o} f(x)}{\lim\limits_{x_o} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Preuve : Les preuves sont similaires à celles sur les suites, mais nous allons faire la preuve du (4) en guise d'illustration.

- Si $\lim\limits_{x_o} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, d'après la proposition précédente.
- Supposons $\lim_{x_o} f(x) = L_1 \neq 0$. on a :

$$\mid \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \mid = \mid \frac{L_2 f(x) - L_1 g(x)}{L_2 g(x)} \mid = \frac{\mid L_2(f(x) - L_1) - L_1(g(x) - L_2) \mid}{\mid L_2 \mid\mid g(x) \mid}.$$

(*) Comme $L_2 \neq 0$, on sait qu'il existe δ_1 tel que

$\forall x \in I,\ 0 <\mid x - x_o \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid g(x) \mid > m.$

D'où $\mid \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{L_1}{L_2} \mid < \dfrac{\mid L_2 \mid\mid f(x) - L_1 \mid + \mid L_1 \mid\mid g(x) - L_2) \mid}{\mid L_2 \mid m}$ sur $I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$.

(**) Comme $\lim\limits_{x_o} f(x) = L_1 \neq 0$ et $\lim\limits_{x_o} g(x) = L_2 \neq 0$, pour $\varepsilon > 0$,

(-) il existe δ_2, $\forall x \in I, \quad 0 <\mid x - x_o \mid < \delta_2 \Rightarrow \mid f(x) - L_1 \mid < m\dfrac{\varepsilon}{2}$

(- -) il existe δ_3, $\forall x \in I, \quad 0 <\mid x - x_o \mid < \delta_3 \Rightarrow \mid g(x) - L_2 \mid < \dfrac{\varepsilon \mid L_2 \mid m}{2 \mid L_1 \mid}$.

Ainsi, en guise de synthèse, pour $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ $\forall x \in I, \quad 0 <\mid x - x_o \mid < \delta \Rightarrow \mid \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{L_1}{L_2} \mid < \dfrac{m\frac{\varepsilon}{2}}{m} + \dfrac{\mid L_1 \mid}{\mid L_2 \mid m} \dfrac{\varepsilon \mid L_2 \mid m}{2 \mid L_1 \mid} < \varepsilon.$

$\square$

Définition 4.1.7. *(Limite infinie en un réel) Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique à variable réelle.*

1. *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* x_o*, et on le note* $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ *si pour tout réel* M*, il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in I \quad 0 <\mid x - x_o \mid < \delta \Rightarrow f(x) \geq M$ *c'est à dire que* $\forall \quad V_{+\infty}$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), il existe* V_{x_o} *(dans* $\mathbb{R}$*) tel que* $f(\overset{\bullet}{V}_{x_o} \cap I) \subseteq V_{+\infty}$.
2. *On dit que* f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* x_o*, et on le note* $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$ *si pour tout réel* $M > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in I, \quad 0 <\mid x - x_o \mid < \delta \Rightarrow f(x) \leq -M$ *c'est à dire que* $\forall \quad V_{-\infty}$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), il existe* V_{x_o} *(dans* $\mathbb{R}$*) tel que* $f(\overset{\bullet}{V}_{x_o} \cap I) \subseteq V_{-\infty}$.

Exemple 4.1.8. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)|x-1|}$ *alors* $\lim\limits_{1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{2^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{1^-} f(x) = -\infty$.

<u>**NOTATION**</u> : On note $I_{+\infty} =]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $I_{-\infty} =]-\infty, b[$ où $b \in \mathbb{R}$.

Définition 4.1.9. *(Limite finie en l'infini)*

1. *On dit que* f *(définie sur* $I_{+\infty}$*) admet* $L \in \mathbb{R}$ *pour limite en* $+\infty$ *(et on le note* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = L$*) si pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in I_{+\infty},\ x \geq \alpha \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ *c'est à dire que* $\forall V_L, \quad \exists V_{+\infty}$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*)*$/ f(V_{+\infty} \cap I_{+\infty}) \subseteq V_L$
2. *De même* f *(définie sur* $I_{-\infty}$*) admet* $L' \in \mathbb{R}$ *pour limite en* $-\infty$ *(et on le note* $\lim\limits_{-\infty} f(x) = L'$*) si pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\beta < 0$ *tel que* $\forall x \in I_{+\infty},\ x < \beta \Rightarrow \mid f(x) - L' \mid < \varepsilon$ *c'est à dire que* $\forall V_{L'}, \quad \exists V_{-\infty}$*(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*)* $/\ f(V_{-\infty} \cap I_{-\infty}) \subseteq V_{L'}$.

Définition 4.1.10. *(Limite infinie en l'infini)*

1. *On dit que* f *(définie sur* $I_{+\infty}$*) tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$*(et on le note* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$*) si pour tout réel* M *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in I_{+\infty}, \quad x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M > 0$ *c'est-à-dire* $\forall \quad V_{+\infty}^{(1)}, \quad \exists V_{+\infty}^{(2)}\ /\ f(V_{+\infty}^{(2)} \cap I_{+\infty}) \subseteq V_{+\infty}^{(1)}$
2. *De même* f *(définie sur* $I_{+\infty}$*) tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$*(et on le note* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$*) si pour tout réel* $N < 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in I_{+\infty}, \quad x \geq \alpha \Rightarrow f(x) < N < 0$ *c'est à dire* $\forall \quad V_{-\infty}, \quad \exists V_{+\infty}/f(V_{+\infty} \cap I_{+\infty}) \subseteq V_{-\infty}$
3. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ *: analogue à 1 ;*
4. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ *: analogue à 2.*

On peut résumer les cinq définitions de limites déjà vues en une seule en utilisant la notation topologique.

Définition 4.1.11. ***Limite : cas général***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$*. Soit* $u \in \overline{I} \subseteq \overline{\mathbb{R}}, v \in \overline{\mathbb{R}}$ *(donc* u *et* v *sont des réels ou infinis), alors* $\lim\limits_{x \to u} f(x) = v$ *si* $\forall V_v,\ \exists V_u\ /\ f(\overset{\bullet}{V_u} \cap I) \subseteq V_v$*. Ainsi,* $\lim\limits_{u} f(x) = v$ *si tout voisinage de* v *contient l'image d'un voisinage pointé de* u*.*

Proposition 4.1.12. *(Définition séquentielle de la limite)*

soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une application définie sur un intervalle* I *sauf peut être en* $u \in \overline{I}$*.* $\lim\limits_{x \to u} f(x) = v \Leftrightarrow$ *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* I *convergente vers* u*, la suite* $f(x_n)_n$ *converge vers* v*.*

Preuve :

<u>1er cas :</u> $u, v \in \mathbb{R}$($\Leftrightarrow$finies)

$\Rightarrow$) supposons que $\lim\limits_{x \to u} f(x) = v$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall x,\ 0 < \mid x - u \mid < \delta_\varepsilon \Rightarrow \mid f(u) - v \mid < \varepsilon$.

Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers u, alors pour $\delta_\varepsilon > 0$, $\exists N_{\delta_\varepsilon}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow \mid x_n - u \mid < \delta_\varepsilon$ donc $\mid f(x_n) - v \mid < \varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\delta,\varepsilon}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_{\delta,\varepsilon} \Rightarrow \mid f(x_n) - v \mid < \varepsilon$. Ainsi $(f(x_n))_n$ converge vers v.

$\Leftarrow$) Pour la réciproque, raisonnons par contraposée : Supposons $\lim_{x\to u} f(x) \neq v$ donc $\exists \varepsilon_o > 0 \quad \forall \delta > 0, \mid x - u \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - v \mid \geq \varepsilon_o$.

Soit $(\delta_n)_n$ une suite de réels positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Pour tout n, on a $\exists x_n$ tel que $0 < \mid x_n - u \mid < \delta_n$. D'où $(x_n)_n$ converge vers u mais $\mid f(x_n) - v \mid \geq \varepsilon_o$ donc $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers v.

<u>2eme cas :</u> $u \in \mathbb{R},\ v = +\infty$ (à faire)

<u>3eme cas :</u> $u \in \mathbb{R},\ v = -\infty$: (à faire)

$\square$

De la proposition précédente découle la suivante.

Remarques 4.1.13. *Pour montrer qu'une fonction n'admet ni une limite finie, ni une limite infinie en u, il suffit*

1. *Soit d'exhiber une suite $(U_n)_n$ convergente vers u telle que $(f(U_n))_n$ n'a ni limite finie, ni limite infinie.*
2. *Soit d'exhiber deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergentes vers u telles que les suites. $(f(U_n))_n$ et $(f(V_n))_n$ aient des limites distinctes.*

Exemple 4.1.14. *Soit f la fonction ré elle à variable rélle donnée par*

$f(x) = cos^2(\frac{\pi}{x})$. Montrons que f n'admet pas de limite en $x = 0$.

Pour celà posons : $U_n = \frac{2}{2n+1}$ et $V_n = \frac{1}{n}$, $\lim U_n = \lim V_n = 0$ alors que $\lim f(U_n) = \lim_{n\to+\infty} cos^2((2n+1)\frac{\pi}{2}) = 0$, $\lim f(V_n) = \lim_{x\to+\infty} cos^2(n\pi) = 1$ donc $\lim_{x\to 0} f$ n'existe pas.

Extension des opérations sur les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition 4.1.15. *Soient $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$, $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$. Supposons que $\lim_{x_0} f_1$ et $\lim_{x_0} f_2$ existent en x_o et sont des réels. Alors*

1. $\lim_{x_o}(f_1 + f_2) = \lim_{x_o} f_1 + \lim_{x_o} f_2$
2. $\lim_{x_o}(\lambda f_1) = \lambda \lim_{x_o}(f_1)$
3. $\lim_{x_o}(f_1 f_2) = \lim_{x_o}(f_1) \lim_{x_o}(f_2)$
4. $\lim_{x_o} \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lim_{x_o} f_1}{\lim_{x_o} f_2}$ *si* $\lim_{x_o}(f_2) \neq 0$
5. $\lim_{x_o} \mid f_1 \mid = \mid \lim_{x_o} f_1 \mid$

Preuve : A faire dans le cas $x_o = \pm\infty$ puisque le cas x_o réel est déjà fait.

Remarques 4.1.16. *Grace aux conventions sur les opérations sur $\pm\infty$, on peut étendre les opérations précédentes sur les limites dans le cas où $\lim\limits_{x_o} f_1$ ou $\lim\limits_{x_o} f_2$ sont infinies.*

1. $\lim\limits_{x_o} f_1 = +\infty$, $\lim\limits_{x_o} f_2 = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_o}(f_1 + f_2) = +\infty + \infty = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x_o}(f_1 f_2) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x_o} f_1 = +\infty$, $\lim_{x_o} f_2 = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_o}(f_1 f_2) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$
3. *Si* $\lim\limits_{x_o} f_1 \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{x_o} f_2 = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_o}(f_1 f_2) = (\lim\limits_{x_o} f_1)(+\infty) = +\infty$.
   Si $\lim\limits_{x_o} f_1 \in \mathbb{R}_-$, $\lim_{x_o} f_2 = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_o}(f_1 f_2) = (\lim\limits_{x_o} f_1)(+\infty) = -\infty$
4. *Si* $\lim\limits_{x_o} f_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_o} f_2 = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_o} \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{\lim\limits_{x_o} f_1}{\pm\infty} = 0^{\mp}$.

Proposition 4.1.17. ***(Limite d'une fonction composée)***

Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$, tels que $g(I) \subseteq J$. Si a (resp. b et c) sont des élements de $\overline{\mathbb{R}}$, et si $\lim\limits_{a} g(x)$ existe et vaut b, $\lim\limits_{b} f(x)$ et vaut c, alors $\lim\limits_{a} f \circ g(x)$ existe et vaut c.

Exemple 4.1.18. $\lim\limits_{+\infty}(1 + \dfrac{a}{x})^x = \lim\limits_{+\infty} e^{xln(1+\frac{a}{x})} = \lim\limits_{+\infty} e^{a[\frac{ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}]} = e^a$

Formes indéterminées sur les limites

Les formes de limites suivantes sont dites indeterminées $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, +\infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Il existe plusieurs techniques pour lèver ces indéterminations vues en classe de terminale.

Dans le chapitre sur les développements limités, nous verrons un outil très éfficace (qui utilise le petit tau) pour lèver les indéterminations et calculer toutes les limites.

4.1.1 Limites et Inégalités

.

Dans cette partie on ne considère que des fonctions numériques à variable réelle.

Notation : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_o \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété "p" au voisinage de x_o si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie "p" sur $I \cap]x_o - \alpha, x_o + \alpha[$

De même f vérifie la propriété "p" au voisinage de $+\infty$(resp$-\infty$) si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$(resp $B \in \mathbb{R}$) tel que f vérifie "p" sur $I \cap]A, \infty[$ (resp.$I \cap] - \infty, B[$)

Proposition 4.1.19. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est bornée sur un voisinage pointé $\overset{\bullet}{V}_{x_o}$ de $x_o \in \overline{I}$ par $m < f < M$ où $m,\ M \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x_o} f = L \in \mathbb{R}$ alors $m \leq L \leq M$*

Preuve :

1) Pour $x_o \in \mathbb{R}$. Supposons $L > M$ et posons $\varepsilon_o = \frac{L-M}{2}$ comme $\lim_{x_o} f = L$ alors $\exists \delta_{\varepsilon_o}$ tel que $0 <\mid x - x_o \mid < \delta_\varepsilon \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon_o \Rightarrow L - \epsilon_o < f(x) < L + \varepsilon_o \Rightarrow \frac{L+M}{2} < f(x)$ d'où $\forall x \in]x_o - \delta_\varepsilon, x_o + \delta_\varepsilon[\cap V_{x_o} \cap I$, on a $f(x) > \frac{L+M}{2} > M$ ce qui est absurde, donc $L < M$.

De même on montre par l'absurde que $L < m$ est impossible.

2) Si $x_o = \pm\infty$, méthode similaire à (1).

Exemple 4.1.20. *Montrer que la reciproque de cette proposition est fausse. Prendre par exemple*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ si \ \ 1 \leq x < 3; \\ -2x + 8 \ si \ \ x < 4; \\ 4 \ si \ \ x = 3. \end{cases}$$

Proposition 4.1.21. *Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $x_o \in \mathbb{R}$*

1. *Si $\lim\limits_{x_o} f$ et $\lim\limits_{x_o} g$ existent et que $f \leq g$ sur I. Alors $\lim\limits_{x_o} f \leq \lim\limits_{x_o} g$*
2. *Si $\lim\limits_{x_o} f = +\infty$ et $f \leq g$ sur I alors $\lim\limits_{x_o} g = +\infty$*
3. *Si $\lim\limits_{x_o} f = -\infty$ et $f \geq g$ sur I alors $\lim\limits_{x_o} g = -\infty$*

Preuve Similaire au cas sur les suites.

Théorème 4.1.22. *(**Théorème des Gendarmes**) Soient f,g et h trois fonctions définies au voisinage de $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f \leq g \leq h$. Si $\lim\limits_{x_o} f = \lim\limits_{x_o} h = L \in \mathbb{R}$ on alors $\lim\limits_{x_o} g = L$*

Preuve Découle de la proposition précédente.

Exemple 4.1.23. *Soient f les fonctions données par $f_1(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 0$ et $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $x_0 = +\infty$,*

On a $-x \leq f_1(x) \leq x$ alors $\lim\limits_{0} f_1 = 0$.

On a $\mid f_2(x) \mid \leq \mid \dfrac{1}{x} \mid$ alors $\lim\limits_{+\infty} f_2 = 0$.

4.1.2 Limite d'une fonction monotone

.

Dans cette partie on ne considère que des fonctions numériques à variable réelle.

Définition 4.1.24. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

1. *f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$ (resp.$f(x)<f(y)$) c'est à dire aussi que* $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 0,\ \forall x\neq y\big($*resp.* $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>0\ \forall x\neq y\big)$.
2. *f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\geq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$ (resp.$f(x)<f(y)$) c'est à dire aussi que* $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq 0,\ \forall x\neq y$ (*resp.* $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}<0$), $\forall x\neq y$.
3. *f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante)*

NB : On note $\sup\limits_{]\alpha,\beta[} f=\sup\{f(x),\ x\in]\alpha,\beta[\}$ et $\inf\limits_{]\alpha,\beta[} f=\{f(x),\ x\in]\alpha,\beta[\}$ s'ils existent dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, selon le cas.

Proposition 4.1.25. *soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une application.*

1. *Si f est croissante sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\forall x_o\in]a,b[,\lim\limits_{x_o^+} f$ et $\lim\limits_{x_o^-} f$ existent et* $\sup\limits_{]a,x_o[} f=\lim\limits_{x_o^-} f\leq f(x_o)\leq\lim\limits_{x_o^+} f=\inf\limits_{]x_o,b[} f$.
2. *Si f est croissante et majorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{b^-} f$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[} f(x)$.*
3. *Si f est croissante et non majorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{b^-} f=+\infty$*
4. *Si f est croissante et minorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[} f$*
5. *Si f est croissante et non minorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a^+} f=-\infty$*

Proposition 4.1.26. *soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une application.*

1. *Si f est décroissante sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\forall x_o\in]a,b[,\lim\limits_{x_o^+} f$ et $\lim\limits_{x_o^-} f$ existent et* $\inf\limits_{]a,x_o[} f=\lim\limits_{x_o^+} f\leq f(x_o)\leq lim_{x_o^-} f=\sup\limits_{]x_o,b[} f$.
2. *Si f est décroissante et minorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{b^-} f$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[} f(x)$.*
3. *Si f est décroissante et non minorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{b^-} f=-\infty$.*
4. *Si f est décroissante et majorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[} f$.*
5. *Si f est décroissante et non majorée sur $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a^+} f=+\infty$.*

On résume ces deux propositions comme suit.

Proposition 4.1.27. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$ alors*

1. *f admet une limite réelle à droite et à gauche en tout point $x_o\in\mathbb{R}$.*

2. *f admet des limites aux bornes de I qui sont réelles(s'il y a majoration / minoration) ou infinies (si non)*

Preuve :

1. Supposons que f est croissante sur $]a,\ b[$ et $x_0 \in]a,\ b[$. Montrons que $\sup\limits_{]a,x_0[} f = \lim\limits_{x_o^-} f$.
Comme f est croissante, $\sup\limits_{]a,x_0[} f = \sup\{f(x),\ x \in]a, x_0[\}$ existe car majoré par $f(x_0)$.
Soit $\varepsilon >$ il existe x_ε tel que $\sup\limits_{]a,x_0[} f - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < \sup\limits_{]a,x_0[} f$. Pour tout $x \in]x_\varepsilon, x_0[$ on a $f(x) \in]f(x_\varepsilon), f(x_0)[$ donc $f(x) \in]f(x_\varepsilon), \sup\limits_{]a,x_0[} f[\subseteq]\sup\limits_{]a,x_0[} f - \varepsilon, \sup\limits_{]a,x_0[} f[$. Par suite en posant $\delta_\varepsilon = x_0 - x_\varepsilon$, on a $\forall \varepsilon >$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $x \in]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0[\Rightarrow |f(x) - \sup\limits_{]a,x_0[} f| < \varepsilon$ c'est à dire $\lim\limits_{x_o^-} f = \sup\limits_{]a,x_o[} f$
2. Supposons que f est croissante sur $]a,\ b[$ et majoré par $M > 0$. Montrons que $\sup\limits_{]a,b[} f = \lim\limits_{b^-} f$. Comme f est majoré par $M > 0$, $\sup\limits_{]a,b[} f = \sup\{f(x),\ x \in]a, b[\}$ existe.
Soit $\varepsilon >$, il existe x_ε tel que $\sup\limits_{]a,b[} f - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < \sup\limits_{]a,b[} f$. Pour tout $x \in]x_\varepsilon, b[$ on a $f(x) \in]f(x_\varepsilon), \sup\limits_{]a,b[} f[\subseteq]\sup\limits_{]a,b[} f - \varepsilon, \sup\limits_{]a,b[} f[$. Par suite en posant $\delta_\varepsilon = b - x_\varepsilon$, on a $\forall \varepsilon >$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $x \in]b - \delta_\varepsilon, b[\Rightarrow |f(x) - \sup\limits_{]a,b[} f| < \varepsilon$ c'est à dire $\lim\limits_{b^-} f = \sup\limits_{]a,b[} f$.
3. Les autres cas se font de façon similaire.

□

4.1.3 Limites et Fonctions vectorielles

On peut aisément généraliser la définition de la limite à des fonctions à variable rélle mais à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ et dans ce cas pour fixer les idées, on prend la norme euclidienne dans les calculs.

Définition 4.1.28. *:*

Soit $f : I \to E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$, une application (où $I \subseteq \mathbb{R}, I \neq \emptyset$). Soit $x_0 \in \overline{I}$ et $L \in E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f tend vers L lorsque x tend vers x_o et on note $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ si $\forall V_l$ voisinage de L dans $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$, il existe V_{x_o} un voisinage pointé de x_o dans $\mathbb{R}$ tel que $f(V_{x_o} \cap I) \subseteq V_l$ Ce qui se traduit par : $\lim\limits_{x \to x_o (x \neq x_o)} f(x) = L$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in I (0 <| x - x_o |< \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon)$.

Proposition 4.1.29. ***Continuité***

1. *Si $f : I \subseteq R :\to \mathbb{R}^n$ est une application telle que $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$ où $f_k : I \subseteq R :\to \mathbb{R}$ est bien définie, alors f admet un limite en x_0 ssi f_k admet un limite x_0 pour tout $1 \leq k \leq n$ et dans ce cas :*
   $\lim\limits_{x_0} f = \big(\lim\limits_{x_0} f_1, \lim\limits_{x_0} f_2, \dots, \lim\limits_{x_0} f_n\big).$
2. *Si $f : I \subseteq R :\to \mathbb{C}$ est une application telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où $f_k : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ est bien définie, alors f admet un limite en x_0 ssi f_k admet un limite x_0 pour tout $1 \leq k \leq 2$ dans cas $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} f_1 + i \lim\limits_{x_0} f_2$.*

Preuve

1. On utilise ici la norme euclideinne $||;||$ sur $\mathbb{R}^n$.
   $\Rightarrow$) supposons $f_k : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ admet un limite l_k en x_0 pour tout k .
   Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta_k / \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta_k \Rightarrow |f_k(x) - l_k| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.
   En prenant $\eta = min_k\{\eta_k\}$ on a $\forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_k(x) - l_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.
   D'où, $\sum\limits_k \big(|f_k(x) - l_k|\big)^2 < \sum\limits_k \big(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big)^2$.
   En prenant la racine carré, on a $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ où $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$
   $\Leftarrow$) supposons $f : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^n$ admet un limite $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ en x_0.
   Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta / \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow ||f(x) - L|| < \varepsilon$ d'où $\sqrt{\sum_k \big(|f_k(x) - l_k|\big)^2} < \varepsilon$.
   Mais $|f_k(x) - l_k| \leq \sqrt{\sum\limits_k \big(|f_k(x) - l_k|\big)^2} \quad \forall k$.
   Ainsi $|f_k(x) - l_k| < \varepsilon \quad \forall k$.
2. A faire.

$\square$

4.1.4 Limites et Comparaison de fonctions

Infiniment petit, infiniment grand

Définition 4.1.30. *Soient $\varepsilon, \alpha : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_o \in I$ un point adhérent à I.*

1. *ε est dit infiniment petit au voisinage V_{x_o} de x_o si $\lim\limits_{x \to x_o} \varepsilon(x) = 0$*
2. *α est dit infiniment grand au voisinage V_{x_o} de x_o si $\lim\limits_{x \to x_o} \alpha(x) = +\infty$*

Exemple 4.1.31. .

1. *$\lim\limits_{0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\sin x$ et $\dfrac{1}{x}$ sont des infiments petits en $x_0 = 0$ et en $x_0 = \pm\infty$ respectivement.*

2. $\lim_{0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *et* $\lim_{\pm\infty} x^2 = +\infty$ *donc* $\frac{1}{x^2}$ *et* x^2 *sont des infiniments grands en* $x_0 = 0$ *et en* $x_0 = \pm\infty$ *respectivement.*

Fonctions negligeables

Définition 4.1.32. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ *un voisinage d'un point* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *On suppose que* $a \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* a, *s'il existe* $\alpha > 0$ *et une fonction* ε *définie sur* $]a-\alpha, a+\alpha[$ *tel que* $\forall x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ *et* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
   On notera $f = \circ(g)$ *ou* $f = \circ_a(g)$ *et on dit que* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* a.
   N.B : Le " $\circ$ " a déjà été rencontré sur les suites numériques et se lit "petit tau".
2. $f = \circ_{(+\infty)}(g) \Leftrightarrow \exists \quad M > 0,\ \exists\, \varepsilon :]M, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ *avec* $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.
3. $f = \circ_{(-\infty)}(g) \Leftrightarrow \exists \quad N > 0,\ \exists\, \varepsilon :]M, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 4.1.33. $\ln(x + 4^x) = \circ_{+\infty}(x^2)$ *en effet : posons* $\varepsilon(x) = \frac{\ln(x+4^x)}{x^2}$ *alors* $\lim_{+\infty} \varepsilon(x) = \lim_{+\infty} \frac{x \ln 4}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln(1 + \frac{x}{4^x}) = \lim_{+\infty} \frac{\ln 4}{x} + \frac{1}{x^2}\ln(1 + \frac{x}{4^x}) = 0$
Donc $\ln(x + 4^x) = \circ_{+\infty}(x^2)$.

Remarques 4.1.34. *.*

1. *Dans la pratique, on utilise* $f = \circ_a(g) \Leftrightarrow \lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *(Si* g *ne s'annule pas au voisinage de* a*) c'est-à-dire* $f = \circ_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ *est un infiniment petit.*
2. $f = \circ_a(1)$ *on a* $f = \circ_a(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$ *signifie que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Exemple 4.1.35. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *montrer que* $x^n = \circ(e^x)$ *et* $\ln x = \circ(x)$

Proposition 4.1.36. *.*

1. *Si* $f = \circ(g)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *alors* $f = \circ(\lambda g)$.
2. *Transitivité : si* $f = \circ(g)$ *et* $g = \circ(h)$ *alors* $f = \circ(h)$.
3. *Si* $f = \circ(g)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *alors* $| f |^\lambda = \circ(| g |^\lambda)$.
4. *Si* f *est bornée au voisinage de* a *et si* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *alors* $f = \circ(g)$.

5. *Si* $f = \circ(g)$ *et* $u = \circ(v)$ *alors* $fu = \circ(gv)$.
6. *Si* $f = \circ(h)$ *et* $g = \circ(h)$ *alors* $f + g = \circ(h)$.
7. *Si* h *ne s'annule pas au voisinage de* a *(sauf en peut être en* a*) et que* $f = \circ(g)$ *alors* $fh = \circ(gh)$.

Preuve :Simple. $\square$

Remarques 4.1.37. *En pratique, on retiendra que :*

— *Le résultat final pour* $\circ(g)$ *fait habituellement intervenir une fonction de reférence* g *comme :* $x^n, \quad e^x, \quad lnx, ...$

— ***La notation*** $\circ(...)$ ***introduit une propriété valable localement, on ne peut rien en déduire pour l'étude globale de la fonction****.*

— *On ne peut pas dériver une telle fonction avec* $\circ(...)$.

Fonctions équivalentes

Définition 4.1.38. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un voisinage* I *de* a *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ $(I \subseteq D_f \cap D_g)$.

— *On dit que* f *est équivalente à* g *au voisinage de* a *(notée* $f \sim g$*) s'il existe* $\alpha > 0$ *et une fonction* β *définie sur un voisinage* $]a-\alpha, a+\alpha[/\forall x \in D_f \cap D_g,\ x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\Rightarrow f(x) = g(x)\beta(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 1$ *on peut aussi écrire* $f \sim_a g \Leftrightarrow \exists \varepsilon(x)$ *tel que* $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ *avec* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

— $f \sim_{+\infty} g \Leftrightarrow \exists M > 0, \quad \beta :]M, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $\lim_{x \to +\infty} \beta(x) = 1$ *et* $f(x) = g(x)\beta(x) \quad \forall x \in]M, +\infty[\cap D_f \cap D_g$.

— $f \sim_{-\infty} g \Leftrightarrow \exists N < 0, \quad \beta :]-\infty, N[\to \mathbb{R}$ *avec* $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta(x) = 1$ *et* $f(x) = \beta(x)g(x) \quad \forall x \in]-\infty, N[\cap D_f \cap D_g$.

Remarques 4.1.39.

1. $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + \circ(g)$
2. *Si* g *ne s'annule pas sur un voisinage de* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors* $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Application :"équivalence" et "petit tau"

L'$\sim$ et le $\circ$ sont utilisées pour

1. l'étude locale d'une fonction (limite, continuité)
2. l'étude des branches infinies pour la courbe d'une fonction.
3. sur les developpements limités
4. l'études des séries.

Proposition 4.1.40. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de a telles que $f \sim_a g$ alors f et g ont localement "le même comportement". Ainsi :*

- *Si f est positive au voisinage de a, alors g l'est également.*
- *Si f admet une limite $L \in \mathbb{R}$ en a, alors $\lim_a g$ existe et vaut L.*
- *Si $\lim\limits_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$,si $\lim\limits_a f = -\infty$ alors $\lim\limits_a g = -\infty$.*
- *Si $g = \circ_a(h)$ alors $f = \circ_a(h)$.*
- *Si $k = \circ_a(g)$ alors $k = \circ_a(f)$.*

Preuve :Simple. □

Remarques 4.1.41. ***(importantes)***

1. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g \neq 0 \Rightarrow f \sim_a g$
   <u>*Exemple*</u>
   $\dfrac{1}{x^2} \rightarrow_{+\infty} 0$ *et* $-\dfrac{1}{x^2} \rightarrow_{+\infty} 0$ *alors que* $\dfrac{1}{x^2} \sim -\dfrac{1}{x^2}$ *est faux.*
2. $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2 \not\Rightarrow \sim f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ ***donc n'utilisez jamais les équivalences avec l'addition ou la soustraction*** *sauf pour le cas suivant :* $f = \circ_a(g) \Rightarrow f + g \sim_a f$.
   <u>*Exemple*</u>
   $1 + x^3 + e^x \sim_{+\infty} e^x$ *et* $-1 - e^x \sim_{+\infty} -e^x$ *mais* $(1 + x^3 + e^x) + (-1 - e^x) \not\sim_{+\infty} e^x - e^x$ *car* $x^3 \not\sim_{+\infty} 0$.
3. $f \sim_a 0 \Leftrightarrow f = 0$ *au voisinage de a donc celà n'a pas d'intérêt d'écrire* $f \sim_a 0$.

<u>**Comparaisons usuelles**</u>

Les limites suivantes sont connues en classe de terminale :

1. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$ si $\alpha > 0$
2. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^\beta}{e^x} = 0$

Ainsi au voisinage de $+\infty$ on a plus généralement :

1. Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha = \circ(x^\beta)$
2. Si $0 < a < b$ alors $a^x = \circ(b^x)$
3. Si $\alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$ alors $\ln^\beta x = \circ(x^\alpha)$
4. Si $a > 1, \quad$ alors $x^\beta = \circ(a^x)$, $\beta \in \mathbb{R}$

De même, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta lnx = 0$. Ainsi, au voisinage de 0, on a plus généralement

1. Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta = \circ(x^\alpha)$
2. Si $\alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$ alors $\mid \ln x \mid^\beta = \circ(\dfrac{1}{x^\alpha})$

Fonction dominée

Définition 4.1.42. ***(Proposition)*** *Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $a \in \mathbb{R}$ $(I \subseteq D_f \cap D_g)$*

1. *On suppose que $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dominée (ou bornée) par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une constante $c > 0$ tel que $\mid f(x) \mid \leq c \mid g(x) \mid, \forall x \in V_a \cap (I - \{a\})$ et on écrit $f = \theta(g)$ (on lit "f est égale à grand tau de g") ou (f est dominée par g, θ se lit "theta").*
2. *$f = \theta_{+\infty}(g) \Leftrightarrow \exists M > 0, \quad c \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x > M, \mid f(x) \mid < c \mid g(x) \mid$*
3. *$f = \theta_{-\infty}(g) \Leftrightarrow \exists N < 0, \quad c \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x < N, \mid f(x) \mid < c \mid g(x) \mid$*
4. *e θ est reflexif et transitif.*
5. *π est une relation d'équivalence où $f = \pi(g) \Leftrightarrow f = \theta(g)$ et $g = \theta(f)$, on dit que f et g sont du même ordre.*

Exemple 4.1.43. *1. $\dfrac{1}{x} = \theta(\dfrac{1}{x^2})$ en $a = 0$, car $\mid \frac{1}{x} \mid \leq 1.\frac{1}{x^2}$ si $\mid x \mid \leq 1$*

2. $\dfrac{1}{x^2} = \theta(\dfrac{1}{x})$ en $a = \pm\infty$, car $\mid \frac{1}{x^2} \mid \leq 1.\frac{1}{|x|}$ si $\mid x \mid > 1$

3. $x = \pi\big(x(2 + \sin\dfrac{1}{x})\big)$ en $a = 0$ car on a :

- D'une part on a : $\mid \dfrac{x}{x(2+\sin\frac{1}{x})} \mid = \dfrac{1}{|2+\sin\frac{1}{x}|} \leq 1$ si $|x| \leq 1$ donc $\mid x \mid \leq 1. \mid x(1+\sin\dfrac{1}{x}) \mid$

- D'autre part on a : $\mid \dfrac{x(2+\sin\frac{1}{x})}{x} \leq \mid 2 + \sin\dfrac{1}{x} \mid \leq 3$ donc $\mid x(2+\sin\dfrac{1}{x}) \mid \leq 3 \mid x \mid$ d'où x et $x(2+\sin\dfrac{1}{x})$ sont du même ordre en 0.

Mais attention ils ne sont pas équivalents (au sens de notre définition $f \sim g$ bien que π soit une relation d'équivalence) car si $f(x) = x$ et $g(x) = x(2+\sin\dfrac{1}{x}) = 2x + x\sin\dfrac{1}{x}$. alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(2+\sin\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(2+\sin\frac{1}{x})}$ n'existe pas.

Propriétés :

1. Soient $f_1, \ f_2, \ g_1, \ g_2$ des fonctions à valeurs positives. Si $f_1 = \pi(g_1)$ et $f_2 = \pi(g_2)$ alors :
   — $f_1 + f_2 = \pi(g_1 + g_2)$

— $f_1 f_2 = \pi(g_1 g_2)$

2. Si $f > 0$,$g > 0$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = l > 0 \Leftrightarrow f = \pi(g)$

Preuve : Simple. □

4.1.5 Limite supérieure et limite inférieure

Nous avons déjà rencontré la notion de limite sup et de limite inf sur les suites. On va dans ce qui suit adapter ces définitions aux fonctions.

Définition 4.1.44. *Soit f une fonction bornée sur un intervalle de la forme $[a, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = +\infty$. On définie*

— $S_f(x, x_0) = \sup\limits_{x \le t \le x_0} f(t)$

— $I_f(x, x_0) = \inf\limits_{x \le t \le x_0} f(t)$

alors la limite supérieure de f à gauche de x_o est donnée par

$$\limsup_{x_0^-} f = \overline{\lim}_{x_0^-} f = \lim_{x \to x_0} S_f(x, x_0)$$

et la limite inférieure de f à droite de x_0 est donnée par

$$\liminf_{x_0^-} f = \underline{\lim}_{x_0^-} f = \lim_{x \to x_0} I_f(x, x_0)$$

Théorème 4.1.45. *Si f est bornée sur $[a, x_0[$, alors $\beta = \overline{\lim\limits_{x_0^-}} f$ existe et est l'unique réel avec les deux propriétés suivantes :*

(a) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_1 \in [a, x_0[$ *tel que* $f(x) < \beta + \varepsilon \ \forall x \in [a_1, x_0[$ *;*

(b) $\forall \varepsilon > 0, \quad b_1 \in [a, x_0[$ *il existe* $x_1 \in [b_1, x_0[$ *tel que* $f(x_1) > \beta - \varepsilon$*.*

Preuve :.

Montrons que (a) est vérifié.

Comme f est bornée sur $[a, x_0[$ alors $S_f(x, x_0)$ est décroissante et bornée sur $[a, x_0[$. Donc (d'après le théorème sur la limite d'une fonction monotone) β existe et est un réel.

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $a_1 \in [a, x_0[$ tel que $x \in [a_1, x_0[\Rightarrow \beta - \frac{\varepsilon}{2} < S_f(x, x_0) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ or $f(x) < S_f(x, x_0)$ pour $x \in [a, x_0[$ donc $f(x) < \beta + \varepsilon \ \forall x \in [a_1, x_0[$ d'où (a).

Montrons que b) est vérifié.

Soit $x_1' = \max\{b_1, a_1\}$ alors $x_1' \in [a_1, x_0[$ l'inégalité ci-dessus implique que $S_f(x_1', x_0) > \beta - \dfrac{\varepsilon}{2}$ or $S_f(x_1', x_0) = \sup\{f(t), x_1' < t < x_0\}$ alors il existe $x_1 \in [x_1', x_0[$ tel que $f(x_1) > S_f(x_1', x_0) - \dfrac{\varepsilon}{2} = \beta - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} = \beta - \varepsilon$ d'où le resultat.

Montrons que β est unique pour vérifier a) et b) (voir la preuve déjà faite sur les suites.)

Supposons que $\beta_1 < \beta_2$ et β_2 vérifie (b) alors il pour tout $\varepsilon > 0$ et $b_1 \in [a, x_o[$, il existe $x_1 \in [b_1, x_o[$ tel que $f(x_1) > \beta_2 - \varepsilon$. Posons $\varepsilon = \beta_2 - \beta_1 > 0$ et $b_1 = a_1$ alors on a $f(x_1) > \beta_2 - (\beta_2 - \beta_1) = \beta_1$ donc β_1 ne peut vérifier (a).

Supposons que $\beta_1 < \beta_2$ et β_1 vérifie a) on montre de façon analogue au cas ci-dessus que β_2 ne peut vérifier (b). (voir le cas déjà traité dans les suites). Par suite forcément $\beta_1 = \beta_2$ pour qu'ils puissent vérifier (a) et (b) similtanément. □

Théorème 4.1.46. *Si f est borné sur $[a, x_0[$, alors $\alpha = \liminf_{x \to x_0^-} f(x) = \underline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x)$ est l'unique réel avec les deux propriétés suivantes*

1. *$\forall \varepsilon > 0$,il existe $a_1 \in [a, x_0[$ tel que $f(x_1) > \alpha - \varepsilon$ $\forall x \in [a_1, x_0[$*
2. *$\forall \varepsilon > 0$ et $b_1 \in [a, x_0[$ alors il existe $x_1 \in [b_1, x_0[$ tel que $f(x_1) < \alpha + \varepsilon$*

Preuve : Similaire au cas précédent.

Remarques 4.1.47. *Pour les autres propriétés sur les limites supérieures et inférieures voir les cas traités sur les suites et les adaptés.*

Exercices

Exercice 4.1.48.
1. *Montrer que $sinf(x) = x$ et $1 + x^2 + (f(x))^2 = 0$ ne définissent pas des fonctions.*
2. *Déterminer D_f, $D_{f \pm g}$, D_{fg} puis $D_{\frac{f}{g}}$ où $f(x) = \sqrt{\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)}}$ et $g(x) = \frac{x^2-16}{x-7}\sqrt{x^2 - 9}$*
3. *En utilisant la définition avec ϵ et δ déterminer (si elles existent) les limites suivantes au point x_o*
   - $x^2 + 3x - 2$ *en* $x_o = 1$
   - $\frac{x^3-8}{x-2}$ *en* $x_o = 2$
   - $\sin x$ *en* $x_o \in \mathbb{R}$ *(noter que* $\sin x \leq x$*)*
   - $\frac{x^3-1}{(x-1)(x-2)} + x$ *en* $x_o = 1$
   - $\sqrt{x + 3}$ *en* $x_o = 1$
   - $xcos\frac{1}{x} + sin\frac{1}{x} - sin\frac{1}{|x|}$ *en* $x_o = 0^+$ *et* $x_o = 0^-$

Exercice 4.1.49.
1. *On suppose que f est bornée sur $[a, x_0[$. Montrer que*
   (a) $\underline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x)$
   (b) $\underline{\lim}_{x \to x_0^-} (-f)(x) = -\overline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x)$ *et* $\overline{\lim}_{x \to x_0^-} (-f)(x) = -\underline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x)$
   (c) $\underline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x) = \overline{\lim}_{x \to x_0^-} f(x)$ *si et seulement si* $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existe et dans ce cas les trois limites coïncident.*

2. *On suppose f et g sont bornées sur $[a, x_0[$. Montrer que*
   (a) $\overline{\lim}_{x\to x_0^-}(f+g)(x) \leq \overline{\lim}_{x\to x_0^-} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0^-} g(x)$
   (b) $\underline{\lim}_{x\to x_0^-}(f+g)(x) \geq \underline{\lim}_{x\to x_0^-} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0^-} g(x)$
   (c) *Etablir des inégalités similaires à (a) et(b) pour* $\underline{\lim}_{x\to x_0^-}(f-g)(x)$ *et* $\overline{\lim}_{x\to x_0^-}(f-g)(x)$

3. *Montrer que $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existe (est un réel) si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel quil existe $x_1, x_2 \in]x_0-\delta, x_0[\Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \epsilon$ (On pourra utiliser 1)c))*

Exercice 4.1.50. 1. *Supposons que f soit borné sur $]x_0, b]$. En utilisant la définition de $\limsup$ à gauche et $\liminf$ à gauche, définir $\liminf f$ à droite ($\underline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x)$) et $\limsup f$ à droite ($\overline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x)$) et montrer que ces limites existent.*

2. *Montrer que $\overline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x) = \underline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x)$ si et seulement si $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existe et dans ce cas $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \underline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x)$*

3. *On suppose que f est bornée sur $]a, b[$ avec $x_0 \in]a, b[$. Montrer que $\lim_{x\to x_o} f(x)$ existe si et seulement si $\underline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x) = \underline{\lim}_{x\to x_0^-} f(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0^+} f(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0^-} f(x)$ et dans ce cas ces valeurs coïncident avec $\lim_{x\to x_0} f(x)$*

.

4.2 Continuité

La définition de la continuité est essentiellement dûe à Cauchy.(Augustin Louis Caughy 1789-1857).

Dans ce chapitre, nous rappellerons les théorêmes fondamentaux déjà vu au lycée comme le Théorême de Valeurs Intermédiares, et nous introduisons un nouveau concept comme la continuité uniforme.

4.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

On suppose que I est un intervalle. On fixe si necessaire la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}$.

Définition 4.2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

1. *Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$(= intérieur de I), f est continue en x_0 si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de $f(x_0)$ à condition que x soit assez proche de x_0.*

   "Mathématiquement", cela donne : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I$ ($|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon$).

   Ou encore $\forall V_{f(x_0)} \exists V_{x_0}$: $f(I \cap V_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$.

2. *On peut caracrériser la continuité en x_0 par :*

   f est continue en x_0 ssi : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$, i.e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

   Si on pose $x = x_0 + h$, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

3. (a) *Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.*

   (b) *Soit $x_0 \in I$:*

   i. *f est continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$*

   ii. *f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$.*

   iii. *f est continue en x_0 ssi f est continue à gauche et à droite de x_0.*

Exercice 4.2.2. *Exprimer avec (ε et δ) le fait que f n'est pas continue en x_0.*

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + 3x + 1$ une fonction rélle.

On a :

$$f(x) - f(x_0) = x^2 + 3x + 1 - x_0^2 - 3x_0 - 1 = x^2 - x_0^2 + 3(x - x_0) = (x - x_0)(x + x_0 + 3)$$

Donc, par majoration on trouve$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|(|x| + |x_0| + 3)$.

Si $|x - x_0| < 1$ *alors* $(|x| - |x_0|) < 1$, *alors* $|x| < 1 + |x_0|$ *d'où* $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|(2|x_0| + 4)$.
Maintenant soit $\varepsilon > 0$. *On a* $\forall x \in \mathbb{R}$ / $|x - x_0| < \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 4}\}$.
Par suite, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *donc* f *est bien continue en* x_0.

Proposition 4.2.3. *(Rappel) les fonctions numériques à variables réelles suivants sont continues sur leur domaines de définitions : les fonctions pôlynomes, les fonctions trigonométriques, , les fonctions logarithmes et exponentielles et les fonctions puissances.*

Preuve A faire (s'inspirer des exemples ci dessus et des propriétés algébriques ci dessous !)

Proposition 4.2.4. *(**opérations algèbrique**).*

1. (a) *Soit* I *un intervalle,* f *et* g *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Alors* $f + g$, λf, $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f.g$ *et* $\dfrac{f}{g}$ *(si* $g \neq 0$ *sur* I*) sont continues sur* I.
   (b) *Si* $g : I \to \mathbb{R}$ *et* $f : J \to \mathbb{R}$ *sont continues avec* $g(I) \subseteq J$ *alors* $f \circ g$ *est continue sur* I.
2. (a) *Soit* I *un intervalle,* f *et* g *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}$. *Alors* $f + g$ *et* λf, $(\lambda \in \mathbb{R})$ *sont continues sur* I.
   (b) *Si* $g : I \to \mathbb{R}$ *et* $f : J \to \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}$, *sont continues avec* $g(I) \subseteq J$ *alors* $f \circ g$ *est continue sur* I.

Preuve Découle des propriétés algébriques des limites et de la définition de la continuité. □

Proposition 4.2.5. *(**caractérisation sequentielle de la continuité**)*

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est continue et* $(x_n)_n$ *converge vers* $x_0 \in I$, *alors* $(f(x_n))_n$ *converge vers* $f(x_0)$ *: on écrit :* $\lim_n f(x_n) = f(\lim x_n)$

Preuve Décole de la caractérisation sequentielle de la limite. □

Définition 4.2.6. *Soit un intervalle,* $f : I \to \mathbb{R}$ *une applicaton.*

1. f *est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur* I, *si f(I) est majoré (resp.minoré, resp.borné) sur* $\mathbb{R}$.
2. *Si f est majoré (resp. minoré) sur* I *la borne supérieure (resp. inférieure) de f sur* I *est la borne supérieure (resp. inférieure) de* $f(I)$

3. *f présente un maximum (resp. minimum) absolu en un point $a \in I$ si $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in I$*
4. *Si $x \in I$ et $x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$ on dit que $f(a)$ est un maximum strict.*
5. *Si $x \in I$ et $x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$ on dit que $f(a)$ est un minimum strict.*

Les minima et maxima (absolus ou strict) sont appelés extréma de la fonction.

Théorème 4.2.7. *Soit f, une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et y atteint ses bornes supérieure M et inférieure m.*

Preuve

— Montrons par l'absurde que f est bornée .

Donc supposons f non bornée sur $[a, b]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\exists x_n \in [a, b]/|f(x_n)| > n$ $(x_n)_n$ est une suite bornée par a et b donc on peut en extraire une sous suite convergente $(x_{nk})_{k\geq 1}$. On pose $L = \lim x_{nk}$, alors $L \in [a, b]$ car il est fermé. Comme f est continue en $L \in [a, b]$ et $(x_{nk})_{k\geq 1}$ converge vers L alors $(f(x_{nk}))_k$ converge vers $f(L)$.

Posons $\varepsilon = 1$ alors $\exists$ N tel que $k \geq N \Rightarrow |f(x_{nk}) - f(L)| \leq 1$

Mais $|f(x_{nk})| \geq n_k$ donc $|f(x_{nk}) - f(L)| \geq ||f(x_{nk})| - |f(L)|| \geq |f(x_{nk})| - |f(L)| \geq$ $|n_k| - |f(L)|$

par suite $|n_k| - |f(L)| \leq 1,\ \forall k \geq N \Rightarrow n_k \leq 1 + |f(L)|,\ \forall k \geq N$

Ce qui est absurde car la suite des entiers n_k est infinie

On conclut donc que f est bornée sur $[a, b]$

— Montrons que f atteint ses bornes

(*) Soit $\alpha = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ (existe car f est bornée)

$\forall \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, par définition de la borne supérieure, il existe $z_n \in [a, b]$ telle que $\alpha - \dfrac{1}{n} < f(z_n) \leq \alpha$. D'où $\forall n$ $|f(z_n) - \alpha| \leq \dfrac{1}{n}$ ainsi $\lim f(z_n) = \alpha$.

Comme $z_n \in [a, b], \forall n$, la suite $(z_n)_n$, est bornée donc admet une sous suite $(z_{nk})_{k\geq 1}$ convergente.

Soit $l = \lim z_{nk}$. Comme $[a, b]$ est fermé alors $l \in [a, b]$ comme f est continue en l alors $(f(z_{nk})$ converge vers $f(l)$. De l'unicité de la limite on a $\alpha = f(l)$.

(**) De façon similaire on prouve que f atteint sa borne inférieure.

$\square$

Remarques 4.2.8. *Si f est continue sur un intervalle non fermé ou non borné, le théorème ne marche pas.*

Exemples : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

$\square$

Théorème 4.2.9. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et non constant alors $f(I)$ est un intervalle.*

Preuve

- J est un intervalle ssi $\forall a < b$ dans J alors $[a, b] \subseteq J$.

- Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Soit $y_1 < y_2$ dans $f(I)$ (possible car f est non constant). Il suffit de montrer que $]y_1, y_2[\subseteq f(I)$ c'est-à-dire que si $\gamma \in]y_1, y_2[$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Soit $\gamma \in]y_1, y_2[$, comme $y_i \in f(I)$, $\exists x_i / y_i = f(x_i)$ $i = 1, 2$.

$y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ car f est une application.

- On suppose que $x_1 < x_2$

On pose $C = \{x \in [x_1, x_2] / f(x) \leq \gamma\}$

C est non vide car $x_1 \in C$. C est majoré par x_2 donc C admet une borne supérieure c et $c \in [a, b]$ donc f est continue en c.

$c = \sup C \Rightarrow \exists x_n \in C / c - \dfrac{1}{n} < x_n \leq c, \forall n$ d'où $|x_n - c| < \dfrac{1}{n}$ donc $(x_n)_n$ converge vers c.

Comme $x_n \in C$ alors $f(x_n) \leq \gamma$, d'où $\lim f(x_n) \leq \gamma$. Mais on sait que $\lim f(x_n) = f(c)$ car f est continue, donc $f(c) \leq \gamma$. Par suite $c \neq x_2$ puisque $f(x_2) = y_2 > \gamma$.

Maintenant, comme $c = \sup C, \forall x \in]c, x_2]$, $f(x) > \gamma$ alors $\lim\limits_{c^+} f = f(c) \geq \gamma$ car f est continue en c.

Ainsi $f(c) = \gamma$ i.e que $\gamma \in f(I)$. Par suite $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$.

$\square$

Corollaire 4.2.10. ***(Théorème des valeurs intermédiaires : version forte)*** *Si f est continue sur $[a, b]$ avec $M = \sup f$ et $m = \inf f$ alors f prend toute valeure comprise entre m et M, et en particulier $f([a, b]) = [m, M]$*

$\square$

Corollaire 4.2.11. ***(Théorème des valeurs intermédiaires : version faible)***

Soit f un fonction continue sur un intervalle I, si $a < b$ dans I tel que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine $x_0 \in]a, b[$.

$\square$

Exemple 4.2.12. *On considére la focntion réelle donnée par :* $f(x) = 2 + x - \sin\dfrac{\pi}{3}x$.

On a : $f(-3) = -1 < 0, f(-2) = sin2\dfrac{\Pi}{3} > 0$ *et comme* f *est continue sur* $[-3, -2]$*, donc il existe* $c \in]-3, -2[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Corollaire 4.2.13. *Si* f *est continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et ne s'annule pas alors* f *garde un signe constant.*

Exemple 4.2.14. *Signe de* $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution : f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} = x + 1$.

Comme $x^2 + 2x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$*, l'équation précédente implique* $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2$*. On en déduit que* $3 = 1$*, ce qui est impossible. Ainsi* $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Par suite, on en tire que f *garde un signe constant et comme* $f(0) = 1 - \sqrt{3} < 0$ *alors* $f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

4.2.2 Fonction continue strictement monotone sur un intervalle

Nous allons chercher à quelle condition une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est injective et nous verrons alors que sa réciproque, définie sur $f(I)$ est continue forcément.

Proposition 4.2.15. *Pour qu'une fonction numérique* f *continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *soit injective, il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.*

Peuve

1. Supposons f continue et strictement monotone : soit $x, y / f(x) = f(y)$.

   Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$ ce qui est impossible.

   de même $x > y$ est impossible, donc $x = y$. D'où f est injective.

2. Supposons f continue et injective on va montrer que les trois taux de variations suivant ont même signe :

   $\dfrac{f(x) - f(y)}{y - x}, \dfrac{f(z) - f(x}{z - x}, \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$ avec x, y et z distincts deux à deux.

   Autrement dit, on va montrer que le signe de $\dfrac{f(x) - f(y)}{y - x}$ est constant (et ne dépend pas de x, y)

   On peut supposer $x < y < z$

   On pose $I_x = \{t \in I / t > x\}$ et $I_z = \{t \in I / t < z\}$, I_x et I_z sont des intervalles .

On définit : $\varphi_x : I_x \to \mathbb{R}$ et $\varphi_z : I_z \to \mathbb{R}$ par $\varphi_x(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ et $\varphi_z(t) = \dfrac{f(z) - f(t)}{z - t}$ comme f est injective alors φ_x et φ_z ne s'annulent pas. Donc ils gardent des signe constants sur les intervalle I_x et I_z. Comme $y, z \in I_x$ et $x, y \in I_z$ alors $\varphi_x(y)\varphi_x(z) > 0$ et $\varphi_z(x)\varphi_z(y) > 0$ ce qui traduit que les taux de variations précédent ont même signe.

$\square$

Remarques 4.2.16. *Si f n'est pas continue, f peut être injective sens être strictement monotone :*

$f(x) = 3x$ si $0 \leq x \leq 1$ ou x si $1 \leq x \leq 2$

alors f est discontinue en 1, injective et non strictement monotone, car $f(0) = 0 < f(1) = 3$ et $f(1) = 3 > f(2) = 2$

Proposition 4.2.17. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour qu'une fonction de $I \to \mathbb{R}$ monotone soit continue, il faut et suffit que $f(I)$ soit un intervalle.*

Preuve.

— $\Rightarrow$) D'après un théorème précédent si f continue alors $f(I)$ intervalle.

— $\Leftarrow$) Réciproquement, supposons f monotone et montrons que si f est discontinue sur I alors $f(I)$ n'est pas un intervalle (contraposé).

Supposons f discontinue en un point $x_0 \in I$.

On peut suppose que $\lim\limits_{x_0^+} f \neq f(x_0)$ (le cas $\lim\limits_{x_0^-} \neq f(x_0)$ se fera de la facon similaire).

Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est croissante donc $\lim\limits_{x_0^+} f > f(x_0)$, si $x > x_0$ alors $f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0^+} f > f(x_0)$; et si $x < x_0$ alors $f(x) \leq f(x_0)$ car f est croissante.

Donc, $\forall x \neq x_0,\ f(x) \notin]f(x_0), \lim\limits_{x_0^+} f[$.

Par suite $]f(x_0), \lim\limits_{x_0^+} f[\subsetneq f(I)$ ainsi $f(I)$ n'est pas un intervalle.

$\square$

Théorème 4.2.18. *Si g est une bijection continue de I sur J, sa reciproque g^{-1} est continue de J sur I.*

Preuve : (Découle des 2 propositions précédentes)

En effet : supposons $g : I \longrightarrow J$ bijection continue alors f est continue et strictement monotone donc $g^{-1} : J = g(I) \longrightarrow I$ est monotone. Puisque $I = g^{-1}(J)$ est un intervalle alors g^{-1} est continue sur J. $\square$

Proposition 4.2.19. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extremité a et b ($a < b$), et soit f une fonction strictement monotone et continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et d'extrémités $\alpha = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.*

Preuve : Pour fixer les idées,on peut supposer que f est croissante, et $b > a$. Posons $\sup\limits_I f = \beta$ et $\inf\limits_I f = \alpha$ alors $f(I)$ est un intervalle d'extremités α et β.

Enfin, il est evident que : $\alpha \in f(I)$ $[resp.\beta \in f(I)]$ ssi $a \in I$ $(resp.b \in I)$. D'où I et $f(I)$ ont même nature.

$\square$

4.2.3 Continuité uniforme

Définition 4.2.20. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ alors $W(f,[a,b]) = M - m$ est appelé oscillation de f sur $[a,b]$; $W(f,[a,b]) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$*

Remarques 4.2.21. *(importante) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ Si $[c,d] \subseteq [a,b]$ alors $W(f,[c,d]) \leq W(f,[a,b])$ Ce qui est intéressant pour une fonction continue, c'est qu'on peut trouver une subdivision de $[a,b]$ en un nombre fini de sous intervalles $[c_i,d_i]$ telle que $W(f,[c_i,d_i])$ soit aussi petit que l'on veut. Cet important résultat sera utilisé pour l'integrabilité d'une fonction continue sur $[a,b]$.*

Théorème 4.2.22. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un découpage de $[a,b]$ en un nombre fini de sous intervalles tel que l'oscillation de f sur chacun de ces sous-intervalles soit inferieur à ε.*

Preuve Par l'absurde. Supposons que le resultat n'ait pas lieu alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ dans le découpage de $[a,b]$ en sous-intervalles de longueur $\leq \frac{1}{2n}$, il existe au moins un sous intervalle $[x_n,y_n]$ tel que $W(f,[x_n,y_n]) \geq \varepsilon_0$. D'où $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ |x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n} et |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. (x_n) est à valeur dans $[a,b]$ donc il existe une suite extraite (x_{nk}) de (x_n) qui converge. Notons $l = \lim\limits_{h\to+\infty} x_{nk}$, comme$[a,b]$ est fermé, $l \in [a,b]$. Mais $|x_{nk} - y_{nk}| \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall k$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty} y_{nk} = l$. Comme f est continue au point l, les suites $(f(x_{nk})_k$ et $(f(y_{nk})_k$ converge vers $f(l)$ et donc pour n assez grand $|f(y_{nk}) - f(x_{nk})| \leq \varepsilon_0, \forall n$ ce qui est impossible. $\square$

NB Ce théorème peut s'énoncer comme suit.

Théorème 4.2.23. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{N}$ continue Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ (ne dépendant que de ε) $\forall x, x' \in [a,b],\ |x - x'| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Noter que dans ce théorème $[a, b]$ est un intervalle compacte.

Dans la définition suivante on généralise à un invtervalle quelconque.

Définition 4.2.24. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dira que f est uniformément continue sur I ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, x' \in I \ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

Exemple 4.2.25. .

1. *Si f est continue sur un compacte alors f est uniformément continue d'après le théorème précédent.*
2. *Donnons des exemples où l'intervalle n'est pas compacte.*
   — *On pose $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$*
   $|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = |\dfrac{x - x'}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}|$ *si $x \neq x'$, alors*
   $\leq \dfrac{|x - x'|}{2}$
   Pour $\varepsilon > 0$ si $|x - x'| \leq \delta = 2\varepsilon$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$, donc f est uniformément continue
   — *Nota Bene : Pour montrer que f n'est pas uniformément continue, il suffit de montrer qu'il existe ε_0 et $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites telles que $|x_n - y_n| \leq \delta_n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ avec $\lim \delta_n = 0$.*
   Exemple :
   On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ n'est pas uniformément continue car $|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}| < \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $|f(\dfrac{1}{n}) - f(\dfrac{1}{n+1})| = 1$.

Définition 4.2.26. *Une application $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x, y \in I$*

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Exemple

1. Si f est lipshitzien alors f est uniformément continue.
2. Dans les exemples pr{c'dents, on a montrer que si $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$. Donc la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$ est $\frac{1}{2}$ lipschitzien.

4.2.4 Fonctions vectorielles

Définition 4.2.27. *Soit $f : I \to E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ une application à variable réelle mais à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (= intérieur de I), f est continue en x_0 si :*

$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I$ ($|x - x_0| < \eta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0|| < \varepsilon$).
Ou encore $\forall V_{f(x_0)} \subseteq E,\ \exists V_{x_0} \subseteq \mathbb{R} : f(I \cap V_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)} \subseteq E$.

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction donnée par $f(x) = \big(\sin x;\ xE(x)\big)$, alors f est une fonction vectorielle à variable réelle.
2. Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x) = \big(x^2 + 1;\ \ln x;\ 1 - e^{-x}\big)$ sur $\mathbb{R}$, alors g est une fonction vectorielle à variable réelle.

Proposition 4.2.28. .

1. *si $f : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^n$ est une application telle que*
   $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$ où $f_k : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ est bien définie.
   Alors f est continue en x_0 ssi f_k est continue pour tout $1 \leq k \leq n$.
2. *si $f : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{C}$ est une application telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où $f_i : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ est bien définie.*
   Alors f est continue en x_0 ssi f_k est continue pour tout $1 \leq k \leq 2$.

Preuve

1. $\Rightarrow$) Supposons $f_k : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ est continue en x_0 pour tout k .
   Soit $\varepsilon > 0,\ \exists\eta_k/\forall x \in I, |x - x_0| < \eta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.
   En prenant $\eta = \min\limits_k\{\eta_k\}$ on a $\forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.
   D'où, $\displaystyle\sum_k \big(|f_k(x) - f_k(x_0)|\big)^2 < \sum_k \big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big)^2$. En prenant la racine carré, on a $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Ainsi f est continue.
   $\Leftarrow$) Supposons $f : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^n$ est continue en x_0.
   Soit $\varepsilon > 0,\ \exists\eta/\forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$ d'où
   $\displaystyle\sqrt{\sum_k \big(|f_k(x) - f_k(x_0)|\big)^2} < \varepsilon$. Mais $\displaystyle|f_k(x) - f_k(x_0)| \leq \sqrt{\sum_k \big(|f_k(x) - f_k(x_0)|\big)^2}\ \ \forall k$.
   Ainsi on obtient $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon\ \ \forall k$, c'est-à-dire que f_k est continue pour tout k.
2. Découle du ca précédent.

$\square$

4.2.5 Fonctions en escalier

Définition 4.2.29. *Une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = a_0 < a_1 .... < a_{n-1} < a_n = b$ et des nombres réels c_k tel que $g(x) = c_k$ pour tout $x \in]a_{k-1}, a_k[,\ 1 \leq k \leq n$*

Exemples

1. $f(x) = E(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}E(x)\right)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \begin{cases} -1; & \text{sur}] - \infty, 2[\\ \pi; & \text{sur}[2, 3[\\ 3,4; & \text{sur } [3, 4] \end{cases}$

Théorème 4.2.30. *Toute fonction continue sur un intervalle compact [a, b] peut être approché uniformément sur cette intervalle par une fonction en escalier. Autrement dit soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $g_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telque $\forall x \in [a,b], |f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$.*

Preuve f continue sur le compact $[a,b]$ donc est uniformément continue. D'où pour $\varepsilon > 0$ (fixé) $\exists \eta / \forall x, y \in [a,b]\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

posons $n = E(\dfrac{b-a}{\eta})$ et posons $a_k = a + k\dfrac{(b-a)}{n}$ $0 \leq k \leq n$

alors $a = a_0 < a_1 .... < a_{n-1} < a_n = b$

On define la fonction en escalier $g(x)$ par $g(x) = f(a_k)$ si $x \in [a_k, a_{k+1}[$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $g(b) = f(b)$.

On a $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(a_k)| < \varepsilon$ car :

- $x \in [a_k, a_{k+1}[$ donc $|x - a_k| < \eta$, on a le résultat. □ □