UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

LICENCE 1 TRANSMISSION DE DONNÉES ET SÉCURITÉ DE L'INFORMATION

Série 3 : Suites Numériques

Exercice 1: En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :
$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)}{\ln(n)} = 2$ $\quad \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Exercice 2:

1. Déterminer la limite des suites numériques suivantes:

$$x_n = \frac{1+3+4+\cdots+(2n-1}{1+n}, \quad w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(xk)$$

2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1^n) + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

3. Soit (u_n) une suite de nombres réls telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in N}, (u_{2n+1})_{n\in N}, (u_{3n})_{n\in N}$ soient convergentes.
Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3: Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1. (a) Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite est monotone.
   (b) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.
   (b) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
3. (a) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.
   (c) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}$$

Exercice 4: On définit les deux suites réelles $(U_n)_{n\in N^*}$ et $(V_n)_{n\in N^*}$ par

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3}, \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = 12 \\ V_{n+1}=\frac{U_n+3V_n}{4}, \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

1. On pose $\forall n \in N^*,\ W_n = V_n - U_n$.
   Exprimer la suite $(W_n)_{n\in N^*}$ en fonction de n puis calculer sa limite.
2. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in N^*}$ et $(V_n)_{n\in N^*}$ sont adjacentes.

Exercice 5: On consid‘ere la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}, \quad \forall n \in N \end{cases}$$

1. Montrer que : $0 \leq U_n < 2, \quad \forall n \in N$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in N}$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in N}$ définie par : $V_n = 2 - U_n, \ \forall n \in N$
   (a) Quel est le signe de $(V_n)_{n\in N}$?
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a: $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$.
   (c) En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que :
   $$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in N^*.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(V_n)n \in N$, puis celle de $(U_n)_n \in N$.

Exercice 6: Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par leurs termes généraux respectifs

$$u_n = 3u_{n-1} + 2v_{n-1} \quad v_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}, \quad u_0 = 1, \quad v_0 = 1$$

1. Calculer $u_n + v_n$ puis déduire $u_n + v_n$ en fonction de n.
2. Montrer que $v_n = v_0 + 2\sum_{k=0}^{n-1} 4^k$.
3. En déduire (u_n) en fonction de n.
4. Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 7:

1. On considère la suite $(u_n)_n \geq 2$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n \geq 2$ par: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
   En utilisant Cauchy, montrer que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
2. En utilisant le critère de Cauchy montrer que la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ est convergente et que la suite $(V_n)_{n\in N, n\geq 2}$ est divergente.
   $$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \ \forall n \in N^* \quad V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \ \forall n \in N \geq 2.$$