Chapitre 2

Espaces Vectoriels

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

I Définitions et Exemples.

Définition I.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on définit deux lois de comparaison :*

1. *Une loi interne dite addition, notée $+$, et vérifiant :*
   a) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall\ x, y, z \in E$;
   b) $x+y = y+x, \forall\ x, y \in E$;
   c) Il existe un élément de E noté 0_E dit neutre, tel que $\forall\ x \in E, x + 0_E = x$;
   d) Pour tout $x \in E$, il existe un élément de E noté $(-x)$ dit opposé de x, tel que $x + (-x) = 0_E$.

2. *Une loi externe, c'est-à-dire une application :* $\begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda x \end{array}$ *qui vérifie :*
   i) $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\ x \in E$;
   ii) $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y, \forall\ \alpha \in \mathbb{K}, \forall\ x, y \in E$;
   iii) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\ x \in E$;
   iv) $1.x = x, \forall\ x \in E$.

Remarque I.1. *Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires.*

Propriété I.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$, on a :*

1. $0.x = 0_E$
2. $\lambda.0_E = 0_E$
3. $\lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$
4. $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$

Preuve.

1. $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$, ainsi $0.x = 0_E$

2. $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$, donc $\lambda.0_E = 0_E$
3. • 1) et 2) donnent ($\lambda = 0$ *ou* $x = 0_E \Longrightarrow \lambda.x = 0_E$)
   • Supposons que $\lambda.x = 0_E$
   Si $\lambda = 0$, c'est terminé.

$$\begin{aligned} Si\ \lambda \neq 0,\ \lambda.x = 0_E &\Longrightarrow \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0_E \\ &\Longrightarrow (\frac{1}{\lambda}\lambda).x = 0_E \\ &\Longrightarrow 1.x = 0_E \\ &\Longrightarrow x = 0_E \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \lambda.x + (-\lambda).x &= (\lambda + (-\lambda)).x \\ &= 0.x \\ &= 0_E \end{aligned}$$

   Ce qui implique $-(\lambda.x) = (-\lambda).x$
   De même,

$$\begin{aligned} \lambda.x + \lambda.(-x) &= \lambda.(x + (-x)) \\ &= \lambda.0_E \\ &= 0_E \end{aligned}$$

   donc $\lambda.(-x) = -(\lambda.x)$
   Par conséquent, $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

Exemple I.1. .

1. *Tout corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* ($\mathbb{K} - e.v$)
   • $(\mathbb{K}, +)$ *est un groupe abélien*
   • $(\mathbb{K}, +, .)$ *est un* $\mathbb{K} - e.v$
2. *En particulier*
   • $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{Q} - e.v$
   • $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{R} - e.v$
   • $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{C} - e.v.$
3. *Ce pendant*
   • $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *n'est pas un* $\mathbb{R} - e.v$, *car* $1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *et* $\sqrt{2}.1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   • $(\mathbb{R}, +, \times)$ *n'est pas un* $\mathbb{C} - e.v$, *car* $1 \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}$ *et* $i.1 = i \notin \mathbb{R}$.

Exemple I.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
• *Addition*

Soient $X = (x, y)$ *et* $Y = (x', y')$ *deux éléments de* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} X + Y &= (x, y) + (x', y') \\ &= (x + x', y + y') \end{aligned}$$

• *Multiplication externe*
Soient $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.X &= \alpha(x, y) \\ &= (\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ *est un* $\mathbb{R} - e.v.$

Exemple I.3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

• *Addition*
Soient $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *deux éléments de* $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \end{aligned}$$

• *Multiplication externe*
Soient $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.X &= \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ *est un* $\mathbb{R} - e.v.$

Exemple I.4. *L'ensemble* $\mathbb{R}_n[x]$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré* $\leq n$:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

• *Addition*
Soient $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *et* $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

• *Multiplication externe*
Soient $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.P(x) &= \alpha.(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}_n[x], +, .)$ *est un* $\mathbb{R} - e.v.$

II Sous-espace vectoriel.

II.1 Définition et Exemples.

Définition II.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel (s.e.v) si :*

1. $0_E \in F$
2. $u + v \in F$, *pour tous* u *et* $v \in F$
3. $\lambda.u \in F$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et pour tout* $u \in F$

Proposition II.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si seulement si :*

1. $F \neq 0$
2. $x, y \in F; \lambda, u \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda x + u.y \in F.$

Exemples II.1.1. .

1. *Vérifier que* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 7z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
2. *Vérifier que* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 7\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Vérifier que* $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xy = 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Proposition II.1.2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. $F \cup G$ *n'est pas en général un sous-espace vectoriel de* E.
3. *Le complémentaire* $E \setminus F$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E.

Preuve.

1. On a $\begin{cases} 0_E \in F \\ 0_E \in G \end{cases} \Longrightarrow 0_E \in F \cap G.$
   Soit $x, y \in F \cap G$.
   On a $x, y \in F$, donc $x + y \in F$. De même $x, y \in G$, ainsi $x + y =\in G$.
   Ainsi $x + y \in F \cap G$.
   Soient $x \in F \cap G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
   $$\begin{aligned} x \in F \cap G &\Longrightarrow \begin{cases} x \in F \\ x \in G \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha.x \in F \\ \alpha.x \in G \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha.x \in F \cap G \end{aligned}$$
   par conséquent, $F \cap G$ est un $s.e.v$ de E.

2. Par exemple, soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{\lambda.u \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}, u = (1,0,0)$;
   $G = \{\lambda.v \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}, v = (0,0,1)$ deux $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
   $F \cup G$ n'est pas un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$, car $u + v = (1,0,1) \notin F \cup G$.
3. $E \setminus F$ ne contient pas 0_E, donc il n'est pas un sous-espace vectoriel.

II.2 Sous-espace vectoriel engendré.

Définition II.2.1. *Soit* $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *des vecteurs de* E. *On appelle combinaison linéaire des éléments* $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, *un élément de la forme* $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2, \cdots, \lambda_n.u_n$ *où* $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \cdots, n$.

Exemples II.2.1. .

1. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
   Soit $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   On a $X = x_1(1,0,\cdots,0) + x_2(0,1,0,\cdots,0) + \cdots + x_n(0,0,\cdots,1)$.
   Ainsi X *est une combinaison linéaire des éléments* $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$.
2. *Soit le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $(\mathbb{R}_n[x], +, .)$.
   Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}_n[x]$.
   Ainsi $P(x)$ *est une combinaison linéaire des éléments* $1, x, x^2, \cdots, x^n$.
3. *Soit le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
   Soit $U = (2,3,5)$. *On a* $U = (2,3,5) = 2.(1,0,0) + 3.(0,1,0) + 5.(0,0,1)$.
   Ainsi U *est une combinaison linéaire de* $(1,0,0),(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$.

Définition II.2.2. *Soit* A *une partie non vide d'un* $\mathbb{K}-e.v$ E. *On appelle sous-espace engendré par* A, *le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* A.
$Vect(A) = \bigcap\limits_{A \subset F} F$ *(où* F *est un* $s.e.v$ *de* E *contenant* A*).*

Remarque II.2.1. .

1. $X \in Vect(A) \Longleftrightarrow \exists\ a_1, a_2, \cdots, a_p \in A$, *et* $\exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ *tel que*
   $X = \alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \cdots + \alpha_p.a_p$.
2. *Si* $A = \emptyset$, *alors* $Vect(A) = \{0_E\}$.

Exemples II.2.2. .

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 3y + z = 0\} = Vect\{(1,0,-2),(0,1,3)\}$.
2. $G = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\} = Vect\{1 - 2x + x^2, 2 - 3x + x^3\}$.

Proposition II.2.1. *Soient* F *et* G *deux sous-espace vectoriels de* E. *Alors* $F + G$ *est un* $s.e.v$ *de* E.

Preuve.
$*$ On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
$*$ Soient $X, Y \in F + G$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$X \in F+G \Longrightarrow \exists\ x \in F, y \in G$ tels que $X = x+y$.
$Y \in F+G \Longrightarrow \exists\ x' \in F, y' \in G$ tels que $Y = x'+y'$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\alpha X + \beta Y &= \alpha(x+y) + \beta(x'+y') \\ &= (\alpha x + \beta y) + (\alpha y + \beta y') \in F+G\end{aligned}$$

Par conséquent, $F+G$ est un *s.e.v* de E.

Remarque II.2.2. $F+G = \mathcal{L}in(F \cup G)$.

III Bases (en dimension finie)

Définition III.1. *Une famille de vecteur* $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite génératrice, si* $E = Vect\{u_1, \cdots, u_p\}$*, ce qui veut dire que* $\forall\ x \in E$,
$\exists\ \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_p.u_p$.

Exemple III.1. *Pour* $\mathbb{R}^2$ *; la famille* $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *est une famille génératrice car tout* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, s'écrit :*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= x_1(1,0) + x_2(0,1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2\end{aligned}$$

Plus généralement, dans $\mathbb{K}^n$ *les vecteurs*
$e_1 = (1,0,0,\cdots,0), \cdots, e_k = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k^e rang},0,\cdots,0), \cdots, e_n = (0,0,0,\cdots,0,1)$
forment une famille génératrice, car tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$*, on peut écrire* $(x_1, \cdots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.

Définition III.2. *Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie ; dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Définition III.3. *Soit* $\{v_1, \cdots, v_p\}$ *une famille d'éléments de* E*. On dit qu'elle est libre, si :* $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \cdots + \lambda_p.v_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_p = 0$.
On dit aussi que les vecteurs $v_1, \cdots, v_p$ *sont aussi linéairement indépendants.*
Une famille qui n'est pas libre est dite liée. On dit aussi que ses vecteurs sont liés ou linéairement dépendants

Exemple III.2. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$*. Les vecteurs*
$u_1 = (1,2,1), u_2 = (-1,3,1)$ *et* $u_3 = (-1,13,5)$ *sont liés car* $2u_1 + 3u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exemple III.3. *Soit* $E = \mathbb{R}^4$*, les vecteurs*
$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (0,0,1,1)$ *et* $v_4 = (0,0,0,1)$ *sont libres.*

Proposition III.1. *Soit* $\{v_1, \cdots, v_p\}$ *une famille libre et* x *un vecteur quelconque de l'espace engendré par les* v_i*. Alors la décomposition de* x *sur les* v_i *est unique.*

Preuve.

Soient $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ et $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ deux décomposition de x.
En faisant la différence, on a $(\lambda_1 - \alpha_1)v_1 + \cdots + (\lambda_p - \alpha_p)v_p = 0_E$.
Comme $\{v_1, \cdots, v_p\}$ est livre, alors $\lambda_1 - \alpha_1 = 0, \cdots, \lambda_p - \alpha_p = 0$.
Par conséquent, $\lambda_1 = \alpha_1, \cdots, \lambda_p = \alpha_p$. D'où l'unicité.

Définition III.4. *On appelle base une famille à la fois libre et génératrice.*

Proposition III.2. *Une famille $\{v_1, \cdots, v_p\}$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose d'une façon unique sur les v_i. C'est-à-dire :*
$\forall\ x \in E$, il existe un unique $n-uplet(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$.

Proposition III.3. *Soit $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de E. Il existe alors une bijection*
$$\begin{array}{rl} \varphi_B : E & \to \mathbb{K}^n \\ x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & \mapsto (x_1, \cdots, x_n) \end{array}.$$

Exemple III.4. *Base canonique de $\mathbb{K}^n$.*
$B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ avec
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_k = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{k^e rang}, 0, \cdots, 0), \cdots,$
$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ *est base de $\mathbb{K}^n$, dite base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Exemple III.5. *Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.*
La famille $B = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, dite base canonique.

Exemple III.6. *Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 3x + 2y - z = 0\}$.*

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer une base de E.*

Preuve.

$0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) : 3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E$.
Soit $X \in E$. Alors $X = (x, y, z) : 3x + 2y - z = 0$. On a $z = 3x + 2y$.
Ainsi

$$\begin{aligned} X &= (x, y, 3x + 2y) \\ &= (x, 0, 3x) + (0, y, 2y) \\ &= x(1, 0, 3) + y(0, 1, 2) \end{aligned}$$

Ainsi $E = Vect\{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$, donc $B = \{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$ est une famille génératrice de E. $(*)$
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$.
Ainsi on a $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0.$
Donc B est libre $(**)$.
$(*)$ et $(**)$ implique que $B = \{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$ est une base de E.

Proposition III.4. .

1. *$\{U\}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow U \neq 0_E$.*
2. *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*
3. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
4. *Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.*
5. *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*

Preuve.

1. Soit $U \in E$ tel que $U \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que que $\alpha.U = 0_E$.
   Alors $\alpha = 0$, donc $\{U\}$ est libre.
   Réciproquement, supposons que $\{U\}$ est libre. Ainsi, si $\alpha.U = 0_E$ alors nécessairement $\alpha = 0$. Par conséquent, $U \neq 0_E$.
2. Soit $\{U_1, U_2, \cdots, U_q\}$ une famille génératrice et $x = \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_q U_q$ un élément arbitraire de E. On aussi $x = \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_q U_q + 0V_1 + \cdots + 0V_p$, avec $V_1, \cdots, V_p \in E$.
   Par conséquent tout élément x de E est combinaison linéaire de $U_1, \cdots, U_q, V_1, \cdots, V_p$.
3. Soit $S = \{U_1, \cdots, U_p, \cdots, U_n\}$ une famille libre de vecteurs de E et S' une sous-famille de S. Quitte à changer les numérotations, on peut supposer sans perte de généralités que $S' = \{U_1, \cdots, U_p\}$. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i = 0_E$.
   Ainsi on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i + 0.U_{p+1} + \cdots + 0.U_n = 0_E$. Comme $\{U_1, \cdots, U_p, \cdots, U_n\}$ est une famille libre, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Par conséquent S' est libre.
4. Soient $\{U_1, \cdots, U_p\}$ une famille liée et $S = \{U_1, \cdots, U_p, V_1, \cdots, V_q\}$. L'un des vecteurs U_i est combinaison linéaire des autres. Comme les vecteurs $U_i \in S$, alors l'un des éléments de S est combinaison linéaire des autres. Par conséquent, S est liée.
5. Soit $S = \{U_1, \cdots, U_p, 0_E, U_{p+1}, \cdots, U_n\}$ une famille de vecteurs de E.
   On a $0.U_1 + \cdots + 0.U_p + 1_{\mathbb{K}}.0_E + 0.U_{p+1} + \cdots + 0.U_n = 0_E$. On a ainsi une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Par conséquent, S est une famille liée.

Remarque III.1. *Soit $\{U_i \ / \ i \in I\}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$.e.v E.*
La famille $\{U_i \ / \ i \in I\}$ est libre si $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$, $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ est libre.

Définition III.5. *On dit qu'un $\mathbb{K}$.e.v E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*

Théoréme III.1. *Dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$ et est noté $dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $dim(E)$.*

Exemple III.7. *Soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y - z = 0 \text{ et } x - 2t - 2z = 0\}$.

1. *Montrer que* F *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Déterminer une base de* F.
3. *Déterminer la dimension de* F.

Remarque III.2. .

1. *Dans un espace vectoriel de dimension* n, *toute famille ayant plus de* n *éléments est liée.*
2. *Dans un espace vectoriel de dimension* n, *les familles ayant moins de* n *éléments ne peuvent pas être génératrices.*

Théoréme III.2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n. *Alors :*

1. *Toute famille génératrice ayant* n *éléments est une base.*
2. *Toute famille libre ayant* n *éléments est une base.*

Proposition III.5. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est de dimension finie. De plus on a :*

1. $dim(F) \leq dim(E)$.
2. $dim(F) = dim(E) \Longleftrightarrow F = E$.

Proposition III.6. *Soit* E *un* $\mathbb{K} - e.v$ *de dimension finie et* $E \neq \{0_E\}$. *Alors de toute famille génératrice de* E, *on peut en extraire une base de* E.

Théoréme III.3. *(de la base incomplète).*
Soit E *un* $\mathbb{K} - e.v$ *de dimension finie et* $E \neq \{0_E\}$. *Alors pour toute famille libre* $\{U_1, \cdots, U_p\}$ *de* E, *il existe des vecteurs* $V_1, \cdots, V_q \in E$ *tels que* $\{U_1, \cdots, U_p, V_1, \cdots, V_q\}$ *soit une base de* E.
Autrement dit, si E *est un* $\mathbb{K} - e.v$ *de dimension finie et* $E \neq \{0_E\}$, *alors toute famille libre de* E *peut être complétée de manière à avoir une base de* E.

Proposition III.7. *Soient* E $\mathbb{K} - e.v$ *de dimension* n *et* S *une famille de vecteurs de* E *tel que* $Card(S) = n$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. S *est libre,*
2. S *est une famille génératrice de* E,
3. *est une base de* E.

Exemple III.8. .

1. $S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *et* $Card(S) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$. *Ainsi,* S *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

2. *$S = \{(1,1,1,1),(0,2,1,-1)\}$ est une famille libre $\mathbb{R}^4$. On montre qu'en complétant S avec $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$, on obtient une nouvelle famille S' libre. Comme $Card(S') = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$, alors S' est une base de $\mathbb{R}^4$.*

Théoréme III.4. *(Formule de Grassman)*
Soient E et $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie et E_1, E_2 deux s.e.v de E. Alors on a :
$dim(E_1+E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.

Sommes directes. Sous-espace supplémentaires

1) **Sommes directes :**

Définition III.6. *Soient F et G deux sous-espace vectoriels d'un $\mathbb{K}-$e.v E.*
La somme F+G est dite directe si et seulement si tout élément u de F+G s'écrit de manière unique sous la forme $u = x+y$ où $x \in F$ et $y \in G$. Dans ce cas, la somme F+G s'écrit $F \oplus G$.
Autrement dit, la somme F+G est directe si et seulement si l'application $\begin{aligned} \varphi : F \times G &\to E \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$ *est injective.*

Théoréme III.5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.*

Preuve.

$*$ Supposons que la somme est directe.
Soit $x \in F \cap G$. On a $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$.
Par unicité de la décomposition, on a $F \cap G = \{0_E\}$.
$*$ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soient $(x,y) \in F \times G$ et $(x',y') \in F \times G$ tel que $x+y = x'+y'$. Alors $x - x' = y' - y \in F \cap G = \{0_E\}$. Donc $x = x'$ et $y = y'$, ainsi $F+G$ est directe.

Considérons maintenant le cas de n sous-espaces, $n \geqslant 3$.

Définition III.7. *Soit $n \geqslant 3$. Soient $F_1, \cdots, F_n$ n sous-espaces d'un $\mathbb{K}-$e.v E. La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si tout élément u de $F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_1 \in F_1, \cdots, x_n \in F_n$. Dans ce cas, la somme $F_1 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ s'écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ ou aussi $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.*

Théoréme III.6. *Soit $n \geqslant 3$. Soient $F_1, \cdots, F_n$ n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$e.v E. Alors la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si*
$\forall\ i \in [\![1,n]\!], F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$.

Preuve.

$*$ Supposons que $F_1 + \cdots + F_n$ est une somme directe.
Soient $i \in [\![1,n]\!]$, et $x \in F_i \cap \sum_{j\neq i} F_j$. Il existe $(x_j)_{j\neq i} \in \prod_{j \neq i} F_j$ tel que $x = \sum_{j\neq i} x_j$. On a

donc,

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{0_E}_{\in F_{i+1}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_n} \\ &= \underbrace{x}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_i} + \underbrace{x_{i+1}}_{\in F_{i+1}} + \cdots + \underbrace{x_n}_{\in F_n} \end{aligned}$$

Par unité de la décomposition, $x = 0_E$. Ainsi, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$.

$*$ Supposons que $\forall\ i \in [\![1, n]\!], F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$.

Soient $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \prod_{i=1}^{n} F_i$ et $(x'_j)_{1 \leq j \leq n} \in \prod_{i=1}^{n} F_i$ tels que $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j$. On a ainsi, $\forall\ i \in [\![1, n]\!], x_i - x'_i = \sum_{j \neq i} (x_j - x'_j) \in F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$.
Ainsi, $\forall\ i \in [\![1, n]\!], x_i = x'_i$, d'où l'unicité de la décomposition. Par conséquent, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

2) Sous-espaces suplementaires :

Définition III.8. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Dans ce cas on note $E = F \oplus G$.*
Autrement dit, F et G sont supplémentaires si et seulement si l'application $\begin{array}{ll} \varphi : F \times G & \to E \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{array}$ *est bijective.*

Théoréme III.7. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires si seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.*

Considérons maintenant le cas de n sous-espaces vectoriels $n \geqslant 3$.

Définition III.9. *Soient $n \geqslant 3$ et $F_1, \cdots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E.*
Les sous-espaces $F_1, \cdots, F_n$ sont supplémentaires si et seulement si tout élément U de E s'écrit de manière unique sous la forme $U = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_i \in F_i$. Dans ce cas, on note $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
Autrement dit, $F_1, \cdots, F_n$ sont supplémentaires si et seulement si l'application

$$\begin{array}{ll} \varphi : \prod_{i=1}^{n} F_i & \to E \\ (x_i)_{1 \leq i \leq n} & \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}$$

est bijective.

Remarque III.3. *Soient* E *un* $\mathbb{K}-$*e.v de dimension finie et* $F_1, \cdots, F_n$ *des s.e.v de* E.

1. $F_1, \cdots, F_n$ *sont en somme directe si et seulement si pour tout toutes bases* $B_1, \cdots, B_n$ *de* $F_1, \cdots, F_n$ *respectivement, la famille* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *est libre.*
2. $F_1, \cdots, F_n$ *sont supplémentaires si et seulement si pour toutes bases* $B_1, \cdots, B_n$ *de* $F_1, \cdots, F_n$ *respectivement la famille* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *est une base de* E.