Chapitre 1

Matrices

Les matrices sont des outils de calcul et de représentation des applications linéaires.

1.1 Définitions, notations et exemples

1.1.1 Définitions

On appelle matrice de taille (n, p) à coefficient dans $\mathbb{K}$, un tableau possèdant n lignes et p colonnes.
Les éléments du tableau sont appelés coefficients. Un coefficient situé à i-ème ligne et à la j-ème colonne est notée $a_{i,j}$.
On note :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ou, en abrégé

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p} \ ou \ A = (a_{ij})$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n = p, M_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1.1.1.
On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, *avec* $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 3, a_{22} = 0, a_{31} = -1$ *et* $a_{32} = 3$.

Exemple 1.1.2.
On a : $B = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ i & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, *avec* $a_{11} = 2i, a_{12} = 3, a_{21} = i$ *et* $a_{22} = 1$.

1.1.2 Matrices particulières

1. Si $n = p$, la matrice est dite matrice carrée.
   On a :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Si $n = 1$, la matrice est dite matrice ligne ou vecteur ligne. On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$$

3. Si $p = 1$, la matrice est appelée matrice colonne ou vecteur colonne. On la note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

4. La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.
5. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
   - A est dite triangulaire supérieure, si elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \cdot \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   - A est dite triangulaire inférieure, si elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \cdot & & \ddots & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   - A est dite diagonale, si elle est de forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   - A est dite matrice identité, si elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

   Cette matrice est notée I_n.

   On a : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. Soit A une matrice de taille (n, p). La matrice obtenue en permutant les lignes de A par les colonnes de A est dite transposée de A. Elle est notée ${}^tA$.

   Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Alors on a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition de matrices et produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.2.1.
Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice $C = (c_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients.

Exemple 1.2.1.
• *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, *alors* $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+3 \\ 3+1 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
• $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Remarque 1.2.1.
Si A et B ne sont pas de même taille, alors la somme de A et B n'est pas définie.

Définition 1.2.2.
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est la matrice (λa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par λ. Elle est notée $\lambda.A(a\lambda A)$.

Exemple 1.2.2.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = 3$. *Alors* $\lambda A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.2.2.

1) *La matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$.*
2) *La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.*

Exemple 1.2.3.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. *Alors* $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 1.2.1.
Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors, on a :

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative.*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative.*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition.*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Proposition 1.2.2.
$M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension np.
En effet, les np matrices, dites matrices élémentaires suivantes :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & \cdots & O \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & O \end{bmatrix}, \cdots, E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & O \end{bmatrix}, \cdots, E_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ *forment une base de*

$M_{n,p}(\mathbb{K})$ dite base canonique.

1.2.2 Produit de deux matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 1.2.3.
Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{n,q}(\mathbb{K})$, avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

Exemple 1.2.4.

1. *Soient* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$*. Alors, on a* $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
2. *Soient* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$*. Alors, on a* $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Remarque 1.2.3.

Soient $u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$*. Alors u.v est la matrice de taille $(1,1)$ dont l'unique coefficient est* $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$*. Ce nombre s'appelle le produit scalaire des vecteurs u et v.*
Ainsi calculer le coefficient c_{ij} dans le produit AB revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ième colonne de B.

Remarque 1.2.4.

1. *Le produit de matrices n'est pas commutatif. En effet, il se peut que AB soit défini mais BA ne soit pas défini, ou AB et BA soient définis mais de taille distincte. De plus, si AB et BA sont définis et sont de même taille, on a en général $AB \neq BA$.*

   Exemple 1.2.5.

   a) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Alors AB est défini et BA n'est pas défini.*

   b) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$*. Alors AB et BA sont définis, mais AB est de taille $(2,2)$ et BA est de taille $(3,3)$.*

   c) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$*. Alors on a*
   $AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$

2. *$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.*

   Exemple 1.2.6.
   Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*. Alors on a* $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. *$AB = AC$ n'implique pas $B = C$.*

Exemple 1.2.7.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors, on a :*

$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$

1.2.3 Formule du binôme

Comme la multiplication matricielle n'est commutative, alors les identités binomiales usuelles sont fausses. Comme en général $AB \neq BA$, on sait que en général $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Proposition 1.2.3.

Soient A *et* B *deux matrices de* $M_n(\mathbb{K})$ *qui commutent. Alors, pour tout entier* $p \geq 0$, *on a la formule*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, A^{p-k} \, B^k$$

Exemple 1.2.8.

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculer* A^n.

On pose $N = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *On a*

$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $N^4 = 0$

Comme $A = N + I$ *et* N *commute avec* I, *alors on a*

$$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, N^k \, I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{3} C_n^k \, N^k \\ &= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} N^3 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n^2 & n(n^2-n+1) \\ 0 & 1 & 2n & n(3n-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3 Inverse d'une matrice carrée

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 1.3.1.

Une matrice carrée A *de taille* (n,n) *est dite inversible s'il existe une matrice carrée* B *de même taille* (n,n) *telle que* $AB = BA = I_n$.

On dit que A *est inversible. On appelle* B *l'inverse de* A *et on la note* A^{-1}.

Exemple 1.3.1.
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$*. Ètudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *telle que* $AB = BA = I_2$*.*
On a

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2 \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$, *donc on a* $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
On a aussi $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Par coséquent, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Généralement si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

1.3.2 Déterminants des matrices carrées d'ordre 2 et 3

a) Matrice carrée d'ordre 2

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est noté $det(A)$ et défini par :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemple 1.3.2.
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$*. Alors on a* $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 2 \times 6 = 1$ *et* $det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \times 10 - 1 \times 2 = -2$.

b) Matrice carrée d'ordre 3

Définition 1.3.2.
Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$*. Alors le déterminant de A est donné par :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

1) Règle de Sarrus
   Cette règle est exclusivement valable pour les matrices carrées d'ordre 3.
   On recopie, au dessous du déterminant, les deux premières. On obtient trois termes affectés du signe + en considérant les trois paralléles à la diagonale principale et trois termes affectés du signe − en considérant les trois paralléles à l'autre diagonale.
2) On appelle mineur d'un élément donné d'un déterminant d'ordre 3, le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant dans le déterminant initial la ligne et la colonne qui contiennent l'élément donné.

3) On appelle cofacteur d'un élément donné, son mineur multiplié par $(-1)^{i+j}$, où i et j représentent respectivement le numéro de la ligne et de la colonne contenant l'élément en question.
4) Le déterminant d'ordre 3 est égal à la somme de produits des éléments de n'importe quelle de ses lignes ou colonnes par leurs cofacteurs.
   Ainsi en désignant par $\triangle_{ij}$ le mineur et par A_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij} d'un déterminant d'ordre 3, on a $A_{ij} = (-1)^{i+j}\triangle_{ij}$.

   Définition 1.3.3.
   On appelle comatrice de A, notée $Com(A)$, la matrice des cofacteurs de A. On a

$$Com(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

c) <u>Matrice carrée d'ordre n</u>
   • <u>Matrice d'ordre 4</u>

   Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 4 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ est donné par

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

   • De façon analogue, à l'aide du déterminant d'ordre 4, on peut introduire le déterminant d'ordre 5 et ainsi de suite. • Les définitions du mineur, du cofacteur d'un élément et de comatrice restent valable pour n'importe quel ordre.

Théorème 1.3.1.
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et l'on a

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}Com(A)$$

Exemple 1.3.3.
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Calculer A^{-1}*

<u>*Solution*</u>

1. *On a $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$*
   $det(A) \neq 0$, donc A est inversible.
2. *$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$*
   Ainsi $Com(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et ${}^{t}Com(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}{}^{t}Com(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.3 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

En pratique, on fait les opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$. Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1) $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul.
2) $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $i \neq j$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne.
3) $L_i \longleftrightarrow L_j$: on peut permuter deux lignes.

Exemple 1.3.4.

Calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotés

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Faisons apparaître un 0 sur la deuxième ligne, première colonne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$

Faisons échanger la ligne 2 et la ligne 3 (L_2 et L_3).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] L_2 \longleftrightarrow L_3$$

Faisons maintenant apparaître un 0 à la deuxième ligne, troisième ligne.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] L_2 + L_3$$

Faisons maintenant apparaître un 0 à la première ligne, deuxième colonne.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] L_1 + L_2$$

Faisons maintenant apparaître la matrice identité en multipliant L_2 par -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & O & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]. \ Ainsi\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.4 Rang d'une matrice

Définition 1.3.4.

Deux matrices sont dites équivalentes si l'une est la transformée de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires. On note $A \sim B$.

Exemple 1.3.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

On note

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrices échelonnées lignes

A est une matrice échelonnée lignes (e. l) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1) Aprés une ligne nulle de A il n'y a que des lignes nulles.
2) Le nombre de zéros consécutifs commençant une ligne non nulle de A augmente strictement de ligne en ligne.

Exemple 1.3.6.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M est échelonnée lignes

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

N n'est pas échelonnée lignes

Définition 1.3.5.

Si A est échelonnée lignes et si L est une ligne non nulle de A, le premier coefficient non nul de L est appelé le pivot de la ligne L.

Exemple 1.3.7.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Le pivot de la 2^{me} ligne de P est -2.*
- *Le pivot de la 3^{me} ligne de P est 4.*
- *La 4^{me} ligne n'a pas de pivot.*

Définition 1.3.6.

A est une matrice échelonnée ligne réduite (e. l. r) si :

1. *A est (e. l) échelonnée lignes*
2. *Tous les pivots des lignes de la matrice A sont égaux à 1.*

Exemple 1.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A est e. l. r

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B n'est pas e. l. r

Définition 1.3.7.
Une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée lignes réduite canonique (e. l. r. c) si :

1. *A est e. l. r*
2. *Dans chaque colonne où il y a le pivot, le pivot est le seul coefficient non nul.*

Exemple 1.3.9.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
A est e. l. r. c

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
B est e. l. r. c

<u>Méthode</u>

1. On place les lignes non nulles en début de la matrice.
2. On fait apparaître le pivot de la première ligne (pivot = 1)
3. On annule tous les coefficients sous le pivot.
4. On passe à la 2^{ime} ligne, on fait apparaître le pivot (= 1) de cette ligne.
5. On annule les coefficients sous ce pivot et ainsi de suite.

Définition 1.3.8 (Rang d'une matrice).
On appelle le rang d'une matrice A, le nombre de pivot qu'il y a dans la matrice (e. l) équivalente à A. On note $rg(A) = nombredepivots(A)$.

Proposition 1.3.1.
Pour toute matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{K})$,
$$rg(A) \leqslant inf(m,n)$$

Exemple 1.3.10.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} L_2 \longleftarrow -2L_2 + L_2$$
$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_3 \ et\ \tfrac{1}{3}L_2 \ et\ \tfrac{1}{2}L_3$$
$rg(A) = 3$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & m-1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & m-1 \end{bmatrix} \overset{-L_3+2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -m-1 \end{bmatrix}$$
$rg(B) = 3, \forall m \in \mathbb{R}$