UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023-2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Série 3 : Groupes
L1TDSI / MCS-CI

Exercice 1. Soit $E =]-1, 1[$ muni de la loi $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ la loi $\star$ définie par : $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$.

1. Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}\backslash\{2\}, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\perp$ la loi de composition interne définie sur G par $(x, y) \perp (x', y') = (xx', xy' + y)$. Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe non commutatif.

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $*$ par $\forall\big((x, y), (x', y')\big) \in (\mathbb{R}^2)^2$,
$(x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x})$. Montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe non abélien.

Exercice 5. Soit G un groupe.

1. Soit A une partie de G. On appelle centralisateur de A dans G l'ensemble $Z(A) = \{x \in G : xa = ax \textit{ pour tout } a \in A\}$. Démontrer que $Z(A) \leq G$.
2. Soit A une partie de G et $s \in G$. On note $sAs^{-1} = \{sxs^{-1} : x \in A\}$. Démontrer que sAs^{-1} est un sous-groupe de G si A est un sous-groupe de G (les parties A et sAs^{-1} sont alors dites conjuguées dans G).
3. On appelle normalisateur d'un sous-groupe A de G l'ensemble $N(A) = \{s \in G : sAs^{-1} = A\}$. Démontrer que $N(A) \leq G$ et que N(A) est le plus grand sous-groupe de G dans lequel A est distingué.

Exercice 6. Soient G un groupe d'élément neutre e et H, K deux sous-groupes de G. On suppose que H possède p éléments, K possède q éléments et p, q sont premiers entre eux.

1. Montrer que $H \cap K = \{e\}$
2. Soit $u : H \times K \to G$ l'application définie par $(x, y) \mapsto u(x, y) = xy$. Montrer que u est injective. En déduire que la partie HK de G possède pq éléments.
3. On suppose que H et K sont deux sous-groupes normaux de G.

(a) Soient $x \in H$ et $y \in K$. Montrer que l'élément $xyx^{-1}y^{-1} \in H \cap K$. En déduire que $xy = yx$

(b) Montrer que u est un morphisme de groupes. En déduire que HK est un sous-groupe de G et que u définit un isomorphisme de $H \times K$ sur HK.

Exercice 7. On considère les sous-groupes $7\mathbb{Z}$ et $28\mathbb{Z}$ du groupe $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $28\mathbb{Z} \leq 7\mathbb{Z}$.
2. Soit $u : \mathbb{Z} \to 7\mathbb{Z}$ le morphisme défini par $k \mapsto 7k$ et $w : 7\mathbb{Z} \to 7\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ la projection canonique. Montrer que la composée $f = w \circ u$ est morphisme de groupe surjectif. Déterminer son noyau.
3. En déduire que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe à $7\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$