UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023-2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

ALGEBRE : L1TDSI/MCS

Série 1.

Exercice 1. Soient P, Q, R des propositions.

1°) Dresser la table de vérité de la formule : $[(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R]$

2°) Montrer que cette formule est équivalente à $(P \Longleftrightarrow Q) \vee R$

Exercice 2. Soient R, S et T trois assertions.

Montrer de deux manières différentes que les relations suivantes sont des tautologies :

1°) $(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(S \Rightarrow T) \Rightarrow (R \Rightarrow T)]$

2°) $(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(R \vee T) \Rightarrow (S \vee T)]$

3°) $(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(R \wedge T) \Rightarrow (S \wedge T)]$

4°) $(R \Rightarrow S) \Rightarrow \big[(R \Rightarrow T) \Rightarrow [R \Rightarrow (S \wedge T)]\big]$

Exercice 3. Un ensemble d'opérateurs logiques est dit système complet si toute proposition logique peut s'exprimer uniquement en utilisant ces opérateurs.

Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ est un système complet d'opérateurs logiques.

Exercice 4. On définit deux nouveaux opérateurs logiques : la `barre de Sheffer` qui représente la négation de la conjonction et la flèche de Pierce qui représente la négation de la disjonction. Ils sont notés respectivement par : $|$, $\downarrow$

1. Donner les tables de vérité de ces opérateurs.
2. Montrer que $\{|\}$ et $\{\downarrow\}$ forment des systèmes complets d'opérateurs logiques.

Exercice 5. Traduire mathématiquement les affirmations suivantes et dire pour quelles valeurs du réel x elles sont vraies :

Pour que x soit supérieur ou égal à 1

1. il faut que x soit supérieur à 2
2. il suffit que x soit supérieur à 2
3. il faut que x soit différent de 1.

Exercice 6.

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}^*)(\forall z \in \mathbb{N})(x = yz)$
2. $\big(\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y\big) \Longrightarrow \big(\exists z \in \mathbb{N}, xy = z\big)$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \big[(n > N) \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\big]$$

4. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_o \in \mathbb{R}$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \rho > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \big[|x - x_o| < \rho \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon\big]$$

5. $\big[(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \leq 0)\big] \Longrightarrow \big[(\exists y \in \mathbb{R}^+)\ (x^2 = y)\big]$
6. $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall (x,y) \in I^2)\ \big[\ |\ x - y\ | \leq \eta \Rightarrow |\ f(x) - f(y)\ | \leq \epsilon\big]$
7. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \rho > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \big[|x - x_o| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$

Exercice 7. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est constante sur $\mathbb{R}$.
2. f ne s'annule nulle sur $\mathbb{R}$.
3. f n'est pas constante.
4. f est paire.
5. f est minorée.

Exercice 8.

Soient x, y et z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose que les trois implications suivantes sont vraies.

1°) $(x = 0) \Rightarrow (y > 0)$
2°) $(x > 0) \Rightarrow (y < 0)$
3°) $(y \neq 0) \Rightarrow (z > 0)$

Déterminer le signe de x, y et z.

Exercice 9. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des entiers strictement positifs.

1. Montrer que $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2$.
2. Montrer par récurrence n que $(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \geq n^2$.

Exercice 10. Montrer par récurrence que :

1. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
3. $\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 11.

2°) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Montrer par réccurence forte que $F_n \leq (\frac{7}{4})^n$.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

5°) Montrer que $\sqrt{3}$ et $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ sont des irrationnels.