UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023-2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Série n° 2 : Ensembles, Applications et Relations
L1TDSI / MCS ∼ CI

Exercice 1.

Démontrer les relations suviantes :

1. $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$
2. $A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$
3. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Longrightarrow B = C$
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 2.

1. Soient A et B deux ensembles tel que $A \subset B$. Montrer qu'il existe un unique sous ensemble X de B tel que $A \cup X = B$ et $A \cap X = \emptyset$.
2. Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
3. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. A-t-on : $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$? $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?
4. Donner l'ensemble des parties de $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. Soit E un ensemble qui possède n éléments. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments.

Exercice 3.

Soit E un ensemble donné. A tout ensemble X de E, on associe sa fonction caractéristique φ_X. Montrer que

$$\varphi_{\overline{X}} = 1 - \varphi_X ; \varphi_{X \cap Y} = \varphi_X \varphi_Y ; \varphi_{X \cup Y} = \varphi_X + \varphi_Y - \varphi_X \varphi_Y ; \varphi_{X \triangle Y} = \varphi_X + \varphi_Y - 2\varphi_X \varphi_Y$$

Exercice 4.

1. Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + 2x + 1$.
   a) Déterminer $g([-2, 4[)$, $g^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}(\{-3\})$, $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(\mathbb{R})$.
   b) En déduire que g n'est ni injective, ni surjective.
2. On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (3x, x + y, x + y - 2z)$.
   a) Montrer que ψ est bijective.
   b) Déduire l'application ψ^{-1}.

Exercice 5.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

1. Etablir $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}[f(A)]$,

$$\forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f[f^{-1}(B)] \subset B.$$

2. Montrer que f est injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E)\ A = f^{-1}[f(A)]$
3. Montrer que f est surjective $\iff \forall B \in \mathcal{P}(F)\ B = f[f^{-1}(B)]$
4. Montrer que f est injective $\iff \forall A, A' \in \mathcal{P}(E)\ \ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

Exercice 6.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ des applications. Soit $Id_X : X \to X$ l'application identité.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_X$, alors f est injective et g est surjective.
2. Trouver un exemple avec $g \circ f = Id_X$, avec g non injective et f non surjective.

Exercice 7.

On considere l'application $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star\ \ (m,n) \to \begin{cases} \cancel{0, si\ (n,m) = (0,0)} \\ 2^m(2n+1)\cancel{, sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que Φ est injective.
2. Montrer que Φ n'est pas surjective.

Exercice 8.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de (a,b).
3. On désigne par $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient pour cette relation. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to [0, +\infty[:\ (a,b) \mapsto a^2 + b^2$ est bien définie et que c'est une bijection.

Exercice 9. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \big(\exists \varphi \in E, \varphi \text{ bijective et } \varphi \circ f = g \circ \varphi\big)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E.
2. A-t-on $cos\mathcal{R}sin$? $cosh\mathcal{R}sinh$?

Exercice 10.

Dans $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $\ll$ par $x \ll y \iff \exists\ n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$.

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. La relation d'ordre $\ll$ est-elle totale.
3. On considère la relation $\ll$ dans $\mathbb{N}$ et $E = \{3, 9, 81, 6561\}$.
   Déterminer le plus petit élément et le plus grand élément de E.

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la relation $\preceq$ définie par :

$$(x,y) \preceq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel ?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?