Université Cheikh Anta DIOP de Dakar

Faculté des Sciences et Techniques

(F. S. T.)

Département de Mathématiques et Informatique

(D. M. I.)

Licence Physique, Chimie et Sciences de la Matière

(L. P. C. S. M.)

Limites et Continuité, Dérivabilité et Développements Limités

Dr. Demba SOW, demba1.sow@ucad.edu.sn

Année académique 2023-2024

Table des matières

Chapitre 4

Limites et Continuité

Nous nous intéressons á des fonctions réelles d'une varibles réelles c.á.d á des applications f de $\mathbb{R}$ ou d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $f \in \mathfrak{f}(D, \mathbb{R})$.

4.1 Limites

4.1.1 Limite en un point

Définition 4.1.1. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0 (sauf peut-être en x_0). On dit que le réel l est la Limite de f au point x_0 si et seulement si :*
$\forall\ \varepsilon\ \mathbb{R}_+^*,\ \exists l\ \in\ \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ x\ \in\ V_{x_0} \quad (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f(x) = l$ *ou* $\begin{array}{c} f(x) \to l \\ x \to x_0 \end{array}$

Remarque 4.1.2. *1) ε est quelconque mais donné, η est l'inconnue. η n'est pas unique car si η_1 répond á la question, il en est de même de tout n_2 tel que $0 < \eta_2 < \eta_1$*
2) On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs différentes de x_0 si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que* $\big(|x - x_0| < \eta$ *et* $x \neq x_0\big) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemple 4.1.3. $f(x) = \sqrt{x+1}\,;\ \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$

En effet $\sqrt{x+1} - 2 = \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2} \Longrightarrow |f(x) - 2| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{|x-3|}{2}$ et $|x-3| \leq 2\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ donc il suffit de prendre $\eta = 2\varepsilon$ et ainsi $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \eta (= 2\varepsilon)$ tel que $|x - 3| < 2\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$.
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

4.1.2 Limite á droite, limite á gauche

Définition 4.1.4. *On dit que le réel l est la limite á droite de $f(x)$ en x_0 ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures á x_0 si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ *tel que* $x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$.

On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0}} = 1$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = l$

Définition 4.1.5. *On dit ℓ est la limite á gauche de $f(x)$ en x_0 et on note*

$\lim\limits_{\substack{x \to x_{0-} \\ x < x_0}} = L$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_{0-}} = \ell$

Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ *tel que* $x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Exemple 4.1.6.

1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

   Si $x > 0$ $f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

   Si $x < 0$ $f(x) = -1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0$.

4.1.3 Quelques propriétés

Proposition 4.1.7. *Si f admet une limite l au point x_0, cette limite est unique.*

Démonstration :Analogue á celle correspondante sur les suites.

Proposition 4.1.8. *f admet une limite l en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si f admet une limite á droite l' en x_0, une limite á gauche l'' en x_0 et $l' = l''$.*
on a alors $l = l' = l''$.

Démonstration :

$\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = l'$; $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = l''$ et $l' = l'' \implies \forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \eta_1 \implies |f(x) - l'| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_2 > 0$ tel que $x_0 - \eta_2 < x < x_0 \implies |f(x) - l'| < \varepsilon$

En posant $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$ on a :

$x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - l'| < \varepsilon$

$x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l'| < \varepsilon$

Cad $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l'| < \varepsilon \implies \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l' = l'' = l$
Réciproquement : Supposons $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
Cela entraine $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0$ tel que $(x - x_0) \in]-\eta, +\eta[\implies |f(x) - l| < \varepsilon$.
Donc si $(x - x_0) \in]0, \eta[$ on a $|f(x) - l| < \varepsilon$ et si $(x - x_0) \in]-\eta, 0[$ on a alors $|f(x) - l| < \varepsilon$
Cad $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Proposition 4.1.9. *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, il existe un intervalle de centre x_0 sur lequel f est bornée.*

Démonstration :
D'après le définition $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0$ tel que $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Proposition 4.1.10. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
I) f possède la limite l au point x_0.
II) Pour toute suite (u_n) de v_{x_0} qui converge vers x_0, la suite $f(u_n)$ converge vers l.

Démonstration : Démontrons que $I \implies II$
Supposons $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et considérons une suite (u_n) d'éléments de v_{x_0} qui converge vers x_0. (v_{x_0} est un voisinage quelconque de x_0) $\forall \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \ x \in v_{x_0}$, $(|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$. puisque $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0 \ |u_n - x_0| < \eta$;
Si $n > n_0$ on a $u_n \in v_{x_0}$ et $|u_n - x_0| < \eta$ donc $|f(u_n) - l| < \varepsilon$ et alors $\forall n > n_0 \ |f(u_n) - l| < \varepsilon \implies f(u_n)$ converge vers l.
Montrons que $II \implies I$ en ontrant que non $I \implies II$.
Si f ne posséde pas de limite l en x_0 alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in v_{x_0}$ tel que $(|x - x_0| < \eta \text{ } et \text{ } |f(x) - l| \geq \varepsilon)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in v_{x_0}$ tel que $|u_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - l| \geq \varepsilon$ donc (u_n) converge vers a et $(f(u_n))$ ne converge pas vers l, cad (II) n'est pas satisfaite.

4.1.4 Opération sur les limites

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ alors
$\lim\limits_{x \to x_0} [(f + g)(x)] = l + l'$; $\lim\limits_{x \to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda l, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
$\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$ si $g(x) \neq 0$ sur D et $l' \neq 0$.
Démonstration :
Démonstration analogue á celle correspondante sur les suites, compte tenu du théorème précédent.

4.1.5 Quelques (résultats ou théorème) sur la limite en un point :

Passage á la limite dans les inégalités

Théorème 4.1.11. *Si* $f(x) \geq 0$ *au voisinage de* x_0 *et si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *alors* $l \geq 0$

Démonstration

. Avec les hypothèses du théoréme, Supposons $f < 0$.
En prenant $\varepsilon = -\frac{l}{2} > 0$ on peut trouver $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$ ccad $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon < 0$ (car $l + \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0$) cad $f(x) < 0$ ce qui est contraire á l'hypothèse donc $l \geq 0$.

Corollaire 4.1.12. . $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq (x) \lim_{x \to x_0} g(x)$ *(si ces limites existent)*

Démonstration

$(g - f)(x) = g(x) - f(x) \geq 0 \implies \lim_{x_0}(g(x) - f(x)) \geq 0 \implies \lim_{x_0} g(x) > \lim_{x_0} f(x)$

Corollaire 4.1.13. ***théorème des gendarmes***

. *si* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *sur un voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to x_0} f(x) l$

Démonstration :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \implies \lim_{x_0} g(x) \leq \lim_{x_0} f(x) \leq \lim_{x_0} h(x)$$
$$\implies l \leq \lim_{x_0} f(x) \leq l \implies \lim_{x_0} f(x) = 1$$

Limite de fonction monotone :

Théorème 4.1.14. . *Soit f une fonction définie dans un intervalle* $]a', a[$*, croissante et majorée dans cet intervalle. Alors f admet une limite quand x tend vers* a^- *par valeur* $< a$ *; limite égale á la borne supérieure de* f *dans* $]a', a[$.

Démonstration :

. Tout ensemble non vide majorée de nombres réels admet une borne supérieure $\Longrightarrow$ l'ensemble des valeurs de f dans $]a', a[$ admet une borne supérieur l.
Pour un élément b réel dans $]a', a[$, il existe une valeur $f(b)$ de la fonction dans $\mathbb{R}$ tel que $f(b) > l - \varepsilon$ (caractérisation de la borne supérieur). Posons $\eta = a - b$ on a $\eta > 0$ et d'autre part $a - \eta \leq x <$

$a \Longrightarrow b \leq x$

La croissance $\Longrightarrow l-\varepsilon \leq f(b) \leq f(x) < l < l+\varepsilon$ (car l borne supérieure) $\Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$ donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$$

Limite d'une fonction composée

Théorème 4.1.15. *Soient f et g deux fonctions. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = l$.*

Démonstration :

. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \eta_1 > 0$ tel que $|y-b| < \eta_1 \Longrightarrow |g(y)-l| < \varepsilon$. il existe $\eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-b| < \eta_1$ et alors $|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-b| < \eta_1 \Longrightarrow |g(f(x))-l| < \varepsilon$ et par conséquent $\lim_{x\to a} g(f(x)) = l$.

4.1.6 Critère de Cauchy

Théorème 4.1.16. *Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant [0] sauf éventuellement en x_0. Pour que f admette une limite quand x tend vers x_0 par valeur $\neq x_0$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $\forall x, x' \in v_{x_0}, x \neq x_0$, $x' \neq x_0$ $(|x-x_0| < \eta, |x'-x_0| < \eta) \Longrightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon)$.

Démonstration . 1) Supposons $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $x \neq x_0$ $|x-x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$

alors si $x \neq x_0$, $x' \neq x_0$, $|x-x_0| < \eta$, $|x'-x_0| < \eta$ alors $|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow |f(x)-f(x')| = |f(x)-l+l-f(x')| \leq |f(x)-l| + |l-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

. 2) **Réciproquement :**

Supposons la condition de l'énoncé satisfaite.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+*$ et choisissons une suite $(x_1, x_2, ...)$ de point de l'intervalle de définition de f, distincts de x_0 tendant vers x_0. Il existe un entier n_0 tel que m, $n \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_0| < \eta$

$|x_n - x_0| < \eta$ ce qui implique $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ cad

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que m, $n > n_0 \leadsto |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \Longrightarrow f(x_n)$ est une suite de Cauchy et donc elle admet une limite finie l quand $n \longrightarrow +\infty$. Soit $x \neq x_0$ tel que $|x-x_0| < \eta$ d'après la condition de l'énoncé $|f(x)-f(x_n)| < \varepsilon$ dès que $n > n_0$.

Par passage á la limite $|f(x)-l| < \varepsilon$ car la suite $|f(x)-f(x_n)|$ converge vers $|f(x)-l|$ quand

$n \longrightarrow +\infty$.
Donc $f(x) \longrightarrow l$ quand $x \longrightarrow x_0$.

4.1.7 Limite pour x infini

Définition 4.1.17. *soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ (resp $]-\infty, b]$) et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A > a$ (resp $B < b$) tel que :*
$[x > A \ (resp\ x < B)] \implies [|f(x) - l| < \varepsilon]$
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$)

Remarque 4.1.18. *1) On a des résultats analogues á ceux vus en 1.1.3. Et le critère de Cauchy s'énnonce : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists A \in \mathbb{R}, \forall x, x' \in \mathbb{R} \ x > A, x' > A \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ *(on a aussi un critère analogue quand $x \longrightarrow -\infty$).*
2) On se ramène souvent au voisinage de 0 en utilisant l'équivalence
.

4.1.8 Limites infinies

Définition 4.1.19. $\lim f(x) = +\infty$ *(resp $-\infty$)* $\iff$ $[\forall\ A > 0\ \exists \alpha > 0$ *tel que* $|x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A \ (resp\ f(x) \ < -A)]$

Remarque 4.1.20.
1. *Dans c cas f ne possède pas de limites réelle et il n'y a donc pas de critère de Cauchy.*
2. *Ces limites infinies se manipulent comme les limites infinies des suites éelles.*
3. *On peut donner des définitions analogues aux précédents pour $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$*
4. *On a par contre les 4 indéterminations $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et nous disposons de plusieurs outils pour lever ces indéterminations, factorisation et simplification, utilisation de quantités conjugués, fonctions équivalentes, développement limités etc ...*
5. *Si f définie sur $[a, +\infty[$ est croissante et n'est pas majorée alors $\lim\limits_{\infty} f(x) = +\infty M$*

4.1.9 Comparaison de fonctions

fonctions équivalentes

Définition 4.1.21. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage $\bar{V}$ d'un point x_0 de $\mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si, il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\bar{V}_{x_0}$ de x_0 tel que $V_x \in \bar{V} \cap \bar{V}_{x_0}$, $f(x) = g(x)[1 + \varepsilon(x)]$ et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \sim g$ si pas de confusion possible.

Remarque 4.1.22. $f \sim g \iff \exists\, h(x)$ *définie au voisinag de V_x telle que* $\forall\, x \in \bar{V} \cap \bar{V}_{x_0}$, $f(x) = g(x).h(x)$ *et* $\lim_{x_0} h(x) = 1$

Ainsi si g n s'annule pas sur un voisinage de x_0 alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exemple 4.1.23. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$
$P(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}\right]$
On pose $\varepsilon(x) = \frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}$
$\lim_{\pm\infty} \varepsilon(x) = 0, \quad P(x) = a_n x^n [1 + \varepsilon(x)]$

$$P(x) \underset{x_0}{\sim} a_n x^n$$

Exemple 4.1.24. *$sinx \sim x$ quand $x \longrightarrow 0$*
On définit $h(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & si\ x \neq 0 \\ i & si\ x = 0 \end{cases}$
$sin\, x = xh(x)$ pour tout x ; il faut montrer que $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$
h est paire on se restreint á l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Surface du triangle AOB < surface secteur AOB < surface du triangle AOC

$\frac{BH \times OB}{2} < \frac{\pi R^2 \times x}{2\pi} < \frac{1}{2} OA.AC$

$R = OA = OB = 1$ unité et $AC = tgx$; $BH = Sinx$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tg\, x$ ou $\sin x < x < tg\, x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ or $\lim_{x \to 0} cosx \simeq 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = 1$

$\Rightarrow \quad \sin x \sim x$ quand $x \longrightarrow 0$

Proposition 4.1.25. *Si f et g ont la même limite $l \in \mathbb{R}^*$ quand $x \longrightarrow x_0$ alors $f \underset{x_0}{\sim} g$.*

Démonstration :

$\lim_{x_0} g = l \neq 0 \Rightarrow \exists$ un voisinage de x_0 oú g ne s'annule pas.
On pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l} = 1$ cad $\lim_{x_0} h(x) = 1$ et $f(x) = g(x)h(x)$.

Remarque 4.1.26. *La proposition serait en défaut si on prenait $l = 0$ ou $\pm\infty$. Par exemple si $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$

De même que $f(x) = \frac{1}{x^4}$ et $g(x) = \frac{1}{x^6}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^6}{x^4} = 0$$

Proposition 4.1.27. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$*

Remarque 4.1.28. *Cette proposition est assez souvent utilisée dans la recherche des limites.*

Démonstration :

$f(x) = g(x)h(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} h(x) = 1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \times \lim_{x \to x_0} h(x) = l \times 1 = l.$

Proposition 4.1.29. *La relation $f \sim g$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration

Elle est **réflexive** cad $f \underset{x_0}{\sim} f$ on prend pour $h(x)$ la fonction constante de valeur 1.

Elle est **symétrique** cad si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$.
Ou si $f(x) = g(x)$ avec $\lim h(x) = 1$ alors $\exists$ un voisinage de x_0 oú $h(x) \neq 0$ et oú $k(x) = \frac{1}{h(x)}$ va tendre vers l'inverse de 1 cad 1 quand x tend vers x_0 et $g(x) = f(x).k(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} k(x) = 1 \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} f$.

Elle est **transitive** cad si $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} f_3$ alors $f1 \underset{x_0}{\sim} f_3$, car si $f_1 = f_2 h$ et $f_2 = f_3 k$ avec $h \longrightarrow 1$ alors $f_1 = f_3 hk$ et $hk \longrightarrow 1 \times 1 = 1$

Proposition 4.1.30. *Si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ *alors* $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et si f et g ne s'annulent pas sur un voisinage alors* $\frac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{g}$.

Démonstration $f_1 = g_1 h_1$ et $f_2 = g_2 h_2$ avec $\lim\limits_{x_0} h_1 = \lim\limits_{x_0} h_2 = 1 \Rightarrow f_1 f_2 = g_1 g_2 h_1 h_2$ avec $\lim\limits_{x_0} h_1 h_2 = 1 \times 1 = 1$.

$f = gh$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ on a un voisinage W de x_0 sur lequel h est non nul et on pose sur ce voisinage $k(x) = \frac{1}{h(x)} \Rightarrow$ sur $V \cap W$ on a $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} \times \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} \times k$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} k(x) = \frac{1}{1} = 1$.
Attention Si au voisinage de x_0 on a $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, on a pas en général $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ ou que $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$.
En effet penons $f_1(x) = \frac{1}{x-2} + x$; $g_1(x) = \frac{1}{x-2} + x^2$ et $f_2(x) = g_2(x) = -\frac{1}{x-2}$.
$f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} g_1(x) = -\frac{1}{2}$ et $f_2 \sim g_2$ (reflexivite).
Cependant $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ ne sont pas équivalentes.
En effet $(f_1 + f_2)(x) = x$ et $(g_1 + g_2)(x) = x^2$ et $\lim\limits_{x \to 0} |\frac{x}{x^2}| = +\infty$.
Ainsi pour la recherche d'une limite on peut remplacer dans un produit ou un quatient (mais pas dans une somme) chaque terme par un équivalent.
Les propositions qui précédent nous permettent d'établir que :
$1 + cosx \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \to 0$ et $tg\, x \underset{x_0}{\sim} x$

En effet $1 - cosx = 2sin^2 \frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, $tg\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$

$\lim\limits_{x \to 0} cosx = 1$ en posant $g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} cosx = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 \Rightarrow cosx \sim g(x) \Rightarrow tg\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x} \sim \frac{sin\, x}{g(x)} \sim \frac{x}{1} \Rightarrow tg\, x \sim x$

Partie principale d'un infiniment petit

Une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ s'appelle un infiniment petit pour $x \to x_0$.
Une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ s'appelle un infiniment grand pour $x \to x_0$
Nous nous interessons au cas $x \to 0$ car on peut toujours nous y ramener (en posant $x' = x - x_0$ si $x \to x_0$) ou $x' = \frac{1}{x}$ si $x \to +\infty$).

Théorème 4.1.31. *Soit $f(x)$ un infiniment petit quand $x \to 0$. Si, quand $x \to 0$, on a $f(x) \backsimeq ax^n$ (oú $a \neq 0$), a et n sont déterminés de façon unique par $f(x)$.*

Démonstration :
$f(x) \sim ax^n$ et $f(x) \sim bx^p$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow ax^n \sim bx^p$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow \frac{ax^n}{bx^p} = \frac{a}{b}x^{n-p} \to 1$ quand $x \to 0$ avec $x \neq 0$ ce qui est absurde si $n \neq p$ donc $n = p$ et par suite $\frac{a}{b} = 1$ cad $a = b$.

Définition 4.1.32. *Si $f(x) \sim ax^n$ quand $x \to 0$, on dit que ax^n est la partie principale de $f(x)$, et que $f(x)$ est* ***un infiniment petit d'ordre n.***

Exemple 4.1.33.

- *$\sin x \sim x \Rightarrow \sin x$ est un infinment petit de partie principale x et d'ordre 1.*
- *$1 - \cos x$ est un infiniment petit d'ordre 2 sa partie principale est $\frac{x^2}{2}$.*
- *x^4 est infiniment petit de partie principale x^4 et d'ordre 4.*

Notation de Landau

Définition 4.1.34. *Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage V_{x_0} d'un $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf éventuellement en x_0. On dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante sur f) au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0, sauf peut être en x_0 telle que $fx) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

Remarque 4.1.35.

1. *Si $g(x) \neq 0$ pour $|x - x_0|$ assez petit, la défiition précédente signifie que $\frac{f(x)}{g(x) \to 0}$ quand $x \to 0$.*
2. *Dire qu'une fonction f est négligeable devant 1 (c'est á dire $f = 0(1)$) signifie qu'elle tend vers 0.*

Exemple 4.1.36.

$x^2 = 0(x) \quad (x \to 0) x^n = 0(x^m) \quad (x \to 0)$ *pour* $m < n x^n = 0(x^m) \quad (x \to \infty)$ *pour* $m > n 1 - cos\, x = 0(x)\ x \to 0,$

Autre notation :

On écrit $f = 0(g) \quad (x \to x_0)$
S'il existe une fonction h définie pour $|x - x_0|$ assez petit, telle que $f(x) = g(x).h(x)$, h bornée.
Si $g(x) \neq 0$ pour $|x - x_0|$ assez petit, la définition précédente signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée pour $|x - x_0|$ assez petit.

4.2 Continuité

Définition 4.2.1. • ***Continuité en un point***

Soit $x_0 \in D$, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire f est discontinue en x_0.

Remarque 4.2.2. *f continue en x_0 suppose f définie en x_0.*

- ***continuité á droite (resp á gauche)*** *: f est continue á droite (resp á gauche) en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$* ***(resp*** *$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)*
  $f(x) = L(x)$ ***estcontinue á droite de tout point*** $x_0 \in \mathbb{Z}$ ***mais n'est pas continue á gauche de*** $x_0 \in \mathbb{Z}$***.***
- ***Continuité sur un intervalle :***
  f est continue sur $]a, b[$ ***si et seulement si f est continue en tout point de*** $]a, b[$***.***
  f est continue sur $[a, b]$ ***si et seulement si f est continue sur*** $]a, b[$***, f est continue á droite en a et á gauche en b.***
  En s'inspirant de ce qui précéde on peut formuler la continuité sur les intervalles semi-ouverts.

- ***f est contiue sur un ensemble s'il est continue en tout point de cet ensemble.***

4.2.1 Propriétés :

1. ***f est continue en*** x_0 ***si et seulement si f est continue á droite et á gauche en*** x_0***. Démonstration :***
   Evidente á partir des définitions et de la 2^{eme} ***proposition de 1.1.3.***

2.

Théorème 4.2.3. *f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de D telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Démonstration :

Soit (x_n) une suite de D telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ et supposons f cotinue en a. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+*$ tel que $\forall x \in D, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$ comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ il $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0, |x_n - a| < \eta$ et ainsi si $n > n_0$ on a $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ cad la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Montrons la Réciproque par l'absurde cad suppose que pour toute suite (x_n) de points de D qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$ et f discontinue en a.

f discontinue en a $\Rightarrow$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in D$ tel que ($|x-a| < \eta$ et $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$) en particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a un élément $x_n \in D$ te que $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n)-f(a)| \geq \varepsilon$. Alors la suite (x_n) converge vers a et celle $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(a)$ ce qui est absurde.

conclusion : f est continue en a.

—

Théorème 4.2.4. *f est continue en x_0 si et seulement si $\forall v$ voisinage de $x_0 = f(x_0)$ on a $f^{-1}(v)$ est un voisinage de x_0.*

($f^{-1}(v)$ étant l'ensemble $x \in \mathbb{R}/f(x) \in v$).

Démonstration :

a) Supposons f continue en x_0 et soit v un voisinage de y_0, $f(x_0) - v$ voisinage de $y_0 \Rightarrow \exists$ un intervalle ouvert de centre y_0 et de rayon $\varepsilon_0 > 0$ de la forme $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset v$.

Montrons que $f^{-1}(v)$ est un voisinage de x_0.

$y_0 \quad f(x_0) - v \;\Rightarrow\; x_0 \in f^{-1}(v)$.

f continue en $x_0 \Rightarrow \varepsilon_0$ rayon de l'intervalle défini ci-dessus, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ ***cad*** $|f(x) - x_0| < \varepsilon$

Cad $f(x) \in]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[\subset v$ des que $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Donc $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ on a d'oú $[x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(v).f^{-1}(v)$ contient un intervalle ouvert de centre $x_0 \Rightarrow f^{-1}(v)$ est un voisinage de x_0 b) Réciproquement : Supposons $f^{-1}(v)$ est un voisinage de $x_0 \forall v$ voisinage de $y_0 = f(x_0)$ et montrons que f est continue en x_0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$v =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ ***est un voisinage de x_0 cad***

$\exists \eta > 0$ ***tel que*** $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(v)$. ***Donc*** $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists\, \eta > 0$ ***tel que*** $x\, \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\Rightarrow\, x \in f^{-1}(v)$ ***cad***
$f(x)\, \in\, v$ ***cad*** $f(x)\, \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$***.***
En résumé $\forall\, \varepsilon\, > 0$, $\exists\, \eta > 0$ ***tel que*** $|x - x_0| < \eta\, \Rightarrow\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ***cad f est contiue en*** x_0***.***

— ***Si f et g sont continues en*** x_0***, alos*** $f + g,\; fg,\; |f|,\; \lambda f$ ***(oú*** $x \in \mathbb{R}$***) sont continues en*** x_0***.***

— ***si f et g sont continues en*** x_0 ***et si*** $g(x_0) \neq 0 \neq$, ***alors*** $\frac{f}{g}$ ***est continue en*** x_0.

—

Théorème 4.2.5. *Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors gof est continue en x_0.*
Démonstration :
3, 4, 5 découlent des propriétés sur les limites.

4.2.2 Un réservoir de fonctions continues

Les fonction suivantes sont continues sur leur domaines de définitions respectifs :
$x\, \longmapsto\, |x|\,;\quad x \longmapsto \sqrt{x}\,;\quad x \longmapsto\, sin\, x\,;\quad x\, \longmapsto\, cos\, x\,;$
$x\, \longmapsto\, tan\, x,\quad x \longmapsto\, cotan\, x\,;\quad \longmapsto\, ln\, x\,;\quad x\, \longmapsto e^x$
$x\, \longmapsto\, a^x\,;\quad x\, \longmapsto\, x^r\,;\quad x\, \longmapsto\, Px) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$(fonction polynôme) ;
$x\, \longmapsto\, \frac{P(x)}{Q(x)}$ (fraction rationnelle cad quotient de 2 polynômes).

4.2.3 théorèmes généraux sur les fonctions continues

Théorème des extrémums atteints :

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors :
a) f est bornée sur $[a, b]$
b) f atteint son minimum et son maximum sur $[a, b]$ cad qu'il existe des points $\alpha,\ \beta\, \in\, [a, b]$ tels que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)\, \forall x\, \in\, [a, b]$.

figure

Démonstration :

a) Supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| > n$.

La suite (x_n) est bornée (car a,b finis et $a \leq x_n \leq b \forall n$) ;

On peut en extraire une suite (x_{n_k}) convergente vers $x \in [a, b]$ et comme f est continue alors $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$ et donc $f(x_{n_k})$ est bornée pour n_k assez grand ce qui est contraire á l'hypothèse $|f(x_n)| > n$,$\forall n$.

b) f étant bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. La borne supérieure et celle inférieure existent. Soient $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Il reste á montrer qu'il existe α et $\beta \in [a, b]$ tels que $f(\beta) = M$ et $f(\alpha) = m$ cad que f atteint son sup et son inf sur $[a, b]$.

Montrons qu'il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = M$. si tel n'était pas le cas alors $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \neq M$ et la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{M - f(x)}$ serait définie et continue sur $[a, b]$ donc serait bornée comme on vient de le voir , alors $\exists \lambda_1 > 0$ tel que $\frac{1}{M - f(x)} \leq \lambda_1 \Rightarrow |M - f(x)| > \frac{1}{\lambda_1}$; en posant $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $M - f(x) < -\lambda_2$ ou $M - f(x) > \lambda_2$ or $M - f(x) < -\lambda_2$ est impossible car $M \geq f(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow M - f(x) > \lambda_2$ cad $f(x) < M - \lambda_2$ ce qui entraine M n'est pas la borne supérieure de f ce qui est absurde. Donc il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = M$ on démontre de façon analogique qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$.

Les bornes étant atteintes, on peut remplacer inf et sup respectivement par min et max. Chacune des hypothèses est essentielle pour la validité de la conclusion comme le montrent les remarques suivantes.

Remarque 4.2.6. *La fonction $f(x) = x$ est continue et bornée sur $]0, 1[$.*
$\sup\limits_{x \in]0,1[} f(x) = \sup\limits_{x \in]0,1[} x = 1$. *ais cette borne supérieure n'est pas atteinte, il n'existe de $\beta \in]0, 1[$ tel que* $f(\beta) = 1$.

Donc dans le théorème précédent la continuité de f sur un intervalle fermé borné est essentielle.

Remarque 4.2.7. *a) Pour $x \in [0, +\infty[$ la fonction $f(x) = x$ est continue, mais pas bornée car x appartient á l'intervalle $[0, +\infty[$ qui n'est pas bornée.*

b) On verra que Sup arctan $x = \frac{\pi}{2}$. Mais ce sup n'est jamais atteint (cad qu'il n'existe pas un $x > 0$ tel que arctan $x = \frac{\pi}{2}$) car le domaine de définition de la fonction continue arctan x est illimité

Remarque 4.2.8. *La fonction* $f(x) = \begin{cases} 2x \ si \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \ si \ \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$

Si $x \in [0, 3]$, sup f(x) = 1 mais cette borne sup n'est jamais atteinte (cad il n'existe pas $\beta \in [0, 3]$ tel que $f(\beta) = 1$ car la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 3]$.)

Théorème des valeurs intermediaires :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sue I

On pose $M = \begin{cases} Supf(x) \ si \ f \ majore \ sur \ I \\ +\infty \ si \ non. \end{cases}$

$m = \begin{cases} inff(x) \ si \ f \ minore \ sur \ I \\ -\infty \ si \ non. \end{cases}$

Alors f prend dans I, toute valeur de l'intervalle ouvert $]m, M[$ cad

$\forall \lambda \ \in]m, M[\ \exists \ x^* \ \in \ I \ tel \ que \ f(x^*) = \lambda$

figure

Remarque 4.2.9. *Si $m, M \ \in \ F(I)$ et en particulier si I fermé et borné, les valeurs m et M sont atteintes et prennent toute valeur de $[m, M]$.*

Preuve :

. On fait la démonstration si m et M existent dans $\mathbb{R}$.

* Si m = M, alors f est constante et $\lambda = m = M$ et $\forall x \ \in I \ f(x) = \lambda = m = M$.

* Si $m \neq M$ soit $\lambda \ \in]m, M[$.

Par définition de m et M il $\exists a \,, b \ \in \ I$ tel que $m \leq f(a) < \lambda < f(b) \leq M$ (caractérisation des bornes sup et inf quitte á permuter on peut supposer $a < b$)

Soit $X = \{x \in [a, b]$ tel que $f(x) \leq \lambda\}$; X est non vide car $a \ \in \ X \ (f(a) < \lambda)$.

X est majorée par b car $X \ \subset \ [a, b] \ \subset \mathbb{R}$ donc x admet une borne supérieure $x^* \ \in \ [a, b]$ et on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \ \in \ X$ tel que $x^* - \frac{1}{n} \leq x_n < x^*$ (car x^* borne sup).

$X^\lambda - \frac{1}{n} < x_n < X^{lambda}$ donc quand $n \longrightarrow \infty$, $x_n \ \longrightarrow \ x^*$ et comme f est continue $F(x_n) \longrightarrow F(x*)$

et comme $F(x_n) \leq \lambda$ (car $x_n \ \in \ X$ on aura aussi $f(x*) \leq \lambda$ á la limite

or $x* = sup X \ \Rightarrow \ \forall x \ \in \ [x*, b] \ f(x) > \lambda$.(tout élément n'est pas dans X)

Si on prend $y \ \longrightarrow \ x^{*+}$, $f(y) \geq \ \lambda$ et comme f continue $\Rightarrow$ $f$est continue á droite $\Rightarrow$ $\begin{matrix} F(y) \ \longrightarrow \ f(x*) \\ y \ \longrightarrow \ x^{*+} \end{matrix}$

et donc $f(x^*) \geq \lambda$

$f(x^*) \geq$ et $f(x^*) \geq \lambda \Rightarrow F(x^*) = \lambda$.

Corollaire 4.2.10. ***Localisation des racines d'une équation***
L'image $f(I)$ d'un intervalle quelconque I par une fonction continue est un intervalle J.

Démonstration : On définit m et M comme dans le théorème des valeurs intermediaires et en appliquant ce théorème dans le cas $m = -\infty$, $M \in \mathbb{R}$ on voit que $]-\infty, M[\subset f(I)$ et la définition de $M \Rightarrow f(I)$ est necessairement $]-\infty, M[ou]-\infty, M]$ cad $f(I)$ est un intervalle dans le cas m, M $\in \mathbb{R}$. On a, d'après le théorème des valeures intermédiaires et définition m, M, f(I) $=]m, M[$ ou $f(I) = [m, M]$. Les autres cas aussi nous donnent $f(I)$ intervalle.

Corollaire 4.2.11. *L'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ par une application continue est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.*

Démonstration :
Le théorème des valeurs intermédiaires extremes et le corollaire 1.2.1 $\Rightarrow f([a,b]) = [m, M]$ si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et si $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Corollaire 4.2.12. ***(Localisation des racines d'une équation)*** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue sur I. S'il existe a et $b \in I$ avec $a \neq b$ tel que $f(a).f(b) < 0$ (cad $f(a)$ et $f(b)$ signes contraires) alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre a et b strictement*

Démonstration :
D'après le théorème des valeurs intermédiaires f prend une valeur λ_1 négative et une valeur λ_2 positive donc prend sur $[a, b[$ toutes les valeurs comprises entre λ_1 et λ_2 en particulier la valeur 0 cad $\exists$ au moins un $D \in]a, b[$ tel que $f(D) = 0$.

Remarque 4.2.13. *Ce corollaire permet un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$.*

Exemple 4.2.14. *Montrons que l'équation $x = cosx$ admet une racine dans $]0, \pi[$.*
$f(x) = x - cos\, x$ est cotinue sur $[0, \pi]$ et prenons aux extremités de cet intervalle des valeurs de signes contraires :
$f(0) = 1$ *;* $f(\pi) = \pi + 1 \Rightarrow \exists\ C \in]0, \pi[$ *tel que f(C) = 0 cad tel que $C = cosC$.*

4.2.4 Continuité par morceaux

Définition 4.2.15. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. f est continue par morceaux sur D, s'il existe une subdivision de D en nombre fini d'intervalles ouverts sur lesquels f est cotinue et posséde des limites finis á droite et á gauche.*

$Cos(x)$ continue sur tout $\mathbb{R}$ et x continue sur $\mathbb{R}$ alors $x - \cos(x)$ continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 4.2.16. *f est cotinue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et admet des limites finies á gauche et á droite. f est continue par morceau sur $[a_0; a_4]$ les a_i sont des points de discontinuité de 1^{re} espèce.*

Exemple 4.2.17. *ici f n'est pas continue par morceaux car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$*
$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais pas de limites sinies á droite et á gauche de 0. 0 est un point de discontinuité de 2^{me} espèce.

4.2.5 Prolongement par continuité

Définition 4.2.18. *Soit f une fonction définie sur un voisinage v d'un point x_0 sauf en x_0. S'il existe une fonction g continue en x_0 telle que $\forall\, x \in v,\, x \neq x_0\,,\, g(x) = f(x)$. Alors g est le prolongement par continuité de f au point x_0.*

Théorème 4.2.19. *Une fonction f non définie en un point x_0 est prolongeable par continuité en ce point si et seulement si f admet une limite finie l en ce point. Le prolongement par continuité de f au point x_0 est alors la fonction g définie par :*

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad \forall x \in vx \neq x_0 \\ \qquad\qquad g(x_0) = l \end{cases}$$

Exemple 4.2.20. *La fonction $f(x) = x\,sin\,\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement g est défini par :*

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad \forall x \in vx \neq 0 \\ \qquad\qquad g(0) = 0 \end{cases}$$

Car $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$ *en effet* $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \quad \Longrightarrow$

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x \quad si \quad x > 0$$
$$x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq -x \quad si \quad x < 0$$

4.2.6 Continuité uniforme

Définition 4.2.21.

Remarque

La notion de continuité uniformément est une notion globale (qui dépend de la distance entre x_1 *et* $x_2 \in$ I et non des points x_1 ou x_2 alors que la notion de continuité en un point est locale. En particulier le réel η_ϵ intervenant dans la définition ne dépend que du réel ϵ.
Considérons $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$, on a $\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$
Ce qui donne $(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)||(x_1 + x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$
car $x_1 + x_2 \leq 2$
Soit $\epsilon > 0$ et $\eta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$
$\forall (x_1, x_2) \in [0,1]^2$ on a $|x_1 - x_2| \leq \eta_\epsilon \quad \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
Finalement f est uniformément continue sur [0, 1].

Remarque

f uniforméméent continue $\Longrightarrow$ f continue il suffit de fixer $x_2 = x_0$ par contre la réciproque est fausse.
Soit $f(x) = x^2$ définie sur $]-\infty, +\infty[$ $\ f$ est continue, mais n'y pas est uniformément continue.
Sinon si f uniformément continue pour $\epsilon = 1$, il existerait $\eta > 0$ tel que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $|x_1 - x_2| \leq \eta$ alors $|x_1^2 - x_2^2| \leq 1$
prenant $x_1 = 1\eta$ et $x_2 = 1\eta + \eta$ on a bien
$|x_1 - x_2| = \eta$ or $|x_1^2 - x_2^2| = |1\eta^2 - (1\eta^2 + \eta^2 + 2\eta^2 \times 1\eta| = 2 + \eta^2 > 1$.

Chapitre 5

Dérivées

On considère des fonctions réelles (ou complexes) d'une variables réelle.

5.1 Quelques Rappels

Définition 5.1.1. *a) Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a qi et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe $x \neq a$ est finie ? Cette limite est notée $f'(a)$, et appelée de f en a. Dans ce cas on a :*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{x - a} x > a$$

b) Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est dérivable) droite on a si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} x > a$ existe et est finie.
Cette limite est notée $f'_g(a)$ et appelée dérivée á droite de f en a. (définition analogue pour la dérivée á gauche, notée $f(_g(a))$.

c) Si f est définie sur un intervalle I, elle sera dite dérivable en tout point intérieur de I est dérivable aux bornes de I (si celles - ci appartiennent á I) du côté oú elle est définie.
(donc f dérivable sur $]a, b[$ si et seulement si (f dérovable en tout point de $]a, b[$ et f dérivable á droite en a et á gauche en b.)) côté oú elle est définie.
Dans ce cas le fonction $x \longmapsto f'(x)$ définie sur I s'appelle fonction dérivée de f

Exemple 5.1.2. *$f(x) = \cos\ x$ est la fonction dérivée de la fonction $g(x) = \sin\ x$.*

5.2 Interprétation géométrique .

Soit φ le coure représentative de f dans le plan rapporté á un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A = (a, f(a))$ un point donné de φ et $M(x, f(x))$ une point quelconque de $\varphi f(x)$.

figure

Si $x \neq a$ le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM) quand $x \longrightarrow a, M$ tend vers A (si f continue), la droite (AM) a pour "limite" la tangente AT et le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pente de (AM) va tendre vers la pente de (AT).
$\Longrightarrow f'(a)$ est la pente de la tangente en A á φ.
Si f est dérivable á droite en a, φ admet en A une tangente de pente $f'(a)$ et d'équation :

$$(y = f'(a)(a-a) + f(a))$$

Si f est dérivable á droite en a, φ admet une demi-tangente de $f'_g(a)$ (résultat analogue si $f'_g(a)$ existe).
Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite infinie en a, φ admet en A une tangente parallèle á (y', oy)

Exemple 5.2.1. *$f(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

la tangente en 0 est l'axe (oy).

Remarque 5.2.2. *Dans le cas particulier oú $f(a) = f(b) = 0$ le théorème de Rolle énoncé qu'entre deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ il existe au moins une solution de l'équation $f'(x) = 0$ il est utilisé dans la recherche des racines d'une équation.*
Théorème des accroissements finie (soit $a < b$)
Soit f une fonction
$$\begin{cases} a) \text{ continue sur } [a,b] \\ b) \text{ dérivable sur }]a,b[\end{cases}$$
Alors ile existe un point C de $]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(C)$

Graphiquement
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite (AB). Alors le théorème dit que sur la courbe de f, il existe au moins un point $(C, f(C))$ oú la tangente est parallèle á (AB).

insérer graphique

Démonstration. Considérons la fonction
$\varphi(x) = f(x) - (f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
φ est continue sur $[a,b]$, dérivable dans $]a,b[$
$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Alors d'après le théorème de ROLLE, il exixte $C \in]a,b[$ tel que $\varphi'(C) = 0$
$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$\varphi'(C) = 0 \longrightarrow f'(C) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - 0$ cad $f'(C) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Théorème 5.2.3. *de ROLLE (Soit $a < b$)*
Soit une fonction

$$\begin{cases} a) \text{ continue sur } [a,b] \\ b) \text{ dérivable sur }]a,b[\\ c) \text{ telle que} f(a) \leq f(b) \end{cases}$$

Alors il existe un point C de $]a,b[$ tel que $f'(C) = 0$.
Graphiquement Interprétation
Sur la couche de f, il existe au moins un point $\begin{pmatrix} C \\ f(C) \end{pmatrix}$ *oú la tangente est parallèle á Ox*

insérer graphique

Démonstration. • Si f est constante sur $[a,b]$, alors $f'(C) = 0 \forall C \in]a,b[$. • Si f n'est pas constante sur $[a,b]$,comme f est continue sur $[a,b]$, il existe un point $x_1 \in [a,b]$, en lequel f atteint son maximum et un point $x^2 \in [a,b]$ en lequel f atteint son minimum. Ces points ne sont pas confondus avec les extrémités a,b de $[a,b]$ sinon on aurait $\max\limits_{x\in[a,b]} = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b)$ et f serait constante sur $[a,b]$. Donc l'un au moins des points x_1 et x_2 est compris dans l'intervalle $]a,b[$. Désignons la par c. La fonction a un extrémum local en c, de plus elle est dérivable en ce point puisqu'elle est dérivable sur $]a,b[$. Donc d'après le lemme précédent $f'(c) = 0$. $\square$

Remarque 5.2.4. *le théorème de ROLLE est valable même pour n intervalle ouvert $]a,b[$, pourvu que :* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x)$

inserer graphique a_1 et a_3 sont des points de maximum locaux.
a_2 et a_4 sont des point de minimum local. On appelle extrémum local un amximum local ou un minimum local, lemme (théorème de format).
Si une fonction f est dérivable en un point a et possède en ce point un extrémum local, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admet un maximum local en a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pour h assez petit $f(a+h) - f(a) \leq 0$ car a est un maximum local.
$\Longrightarrow f(a+h) < f(a)$ pour h suffisament petit.
Si $h > 0$ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ d'oú en passant á la limite quand $h \longrightarrow 0$, on a $f'(a) \geq 0$.
$f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0 \Longrightarrow f'(a) = 0$
On fait un raisonnement analogue si f admet un minimum local en a. f admet un minimum local en a, $\Longleftrightarrow (-f)$ admet un maximum local en a. □

Remarque 5.2.5. *$f'(a) = 0$ n'entraine pas a extrémum local (voir figure ci-contre).*

insérer graphique $f'(a) = 0$ et a n'est pas un extrémum local.
$\Longrightarrow (\sin\ x)^{(n/1)} = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$ *cqfd. idem pour* $(\cos)^{(n)}$.

5.3 Classe d'une Fonction : Classe C^n, Classe C^∞

a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on dit que f est de classe C^n sur l'intervalle f si et seulement : f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

b) On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I.

Remarque 5.3.1. *1. Si f est de classe C^1 on dit aussi f est continuement dérivable sur I.*

2. D'après les résultats sur la dérivée première oon peut dire que si f et g sont de classe C^n sur I il en sera de même pour $(f+g) : (\lambda f)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}; (f;g); (\frac{1}{g})$ a $\forall x \in If(x) \neq 0$ et de gof si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : J \longmapsto \mathbb{R}t.qf(I) \subset J$.

3. a) Les fonctions polynômes, $\cos x, e^x, a^x$ (pour $a > 0$) sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) Les fonctions $l_n x, x^\pi$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$) sont de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ c) Les fonctions tan x, cotan x, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs.

5.4 Théorème des accroissements finis

5.4.1 Théorème de ROLLE - Théorème des accroissements finis

Définition 5.4.1. *Une fonction f a un maximum (resp. mimimum) local en un point a s'il existe un voisinage $V(a) =]a-\sigma, a+\sigma[$ dans lequel :*

$$\begin{array}{rl} f(x) \leq f(a) & \forall x \in V(a) \\ resp. f(x) \geq f(a) & \forall x \in V(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} (f_g)^{(n+1)} & = & f^{(n)}g' \\ & + & C_n^1 f^{(n)}g' + C_n^1 f^{(n-1)}g^n \\ & + & C_n^2 f^{(n-1)}g^n + C_n^2 f^{(n-2)}g_n \\ & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + & C_n^{k-1} f^{(n-k+2)}g^{(k-1)} + C_n^{k-1} f^{(n-k+1)}g^k \\ & + & C_n^k f^{(n-k+1)}g^{(k)} + C_n^k f^{(n-k)}g^{k+1} \\ & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + & f'g^{(n)} + fg^{(n+1)} \end{array}$$

Le terme général est $(C_n^{k-1} + C_n^k)f^{(n-k+1)}g^{(k)} = C_{n+1}^k f^{(n-k+1)}g^{(k)}$

$\Longrightarrow (fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n-1}^k f^{(n-k+1)}g^{(k)}$ *cqfd*

Donc la formule de LEIBNIZ est établie par récurrence.

$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})}$ *et* $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin(ax + b + \frac{n\pi}{2})$

$\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos(x()x + n\frac{\pi}{2})}$ *et* $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos(ax + b + \frac{n\pi}{2})$

$$(x^n)^{(p)} \begin{cases} n(n-1) \quad \ldots \quad (n-p+1)x^{n-p} & si\ 0 \leq p \leq n \\ n! & si\ p - n \\ 0 & si\ p > n. \end{cases}$$

Démonstration. De la première formule, les 2 autres sont laissées en exercices.

$$f(x) = \sin x \quad \begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos\ x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f^n(x) & = & -\sin\ x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}) \end{array}$$

— Donc vraie pour $n = 1 (\sin x)' = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

— Supposons formule vraie á l'ordre n cad $(\sin\ x)^{(n)} - \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

— Démontrons que c'est vraie á l'ordre $(n = 1)$

$$(\sin\ x)^{(n+1)} = ((\sin\ x)^{(n)})' \begin{array}{rl} = & [\sin(x + n\frac{\pi}{2})] \\ = & \sin(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \end{array}$$

On note $f^{(1)} = f', f^2 = (f')' = f''$; et on convient $f^{(0)} = f$

$f, f', \ldots, f^{(n)}$ peuvent avoir des ensembles de définition.

— $f^{(n)}(a)$ est appelée la dérivée n^{ime} de f en a et l'application $f^{(n)}$ la dérivée n^{ime} de f.
— f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur 1.
— f est indéfiniment dérivable sur I si et seulement si f définie n sur I.

Si f, B sont n fois dérivables $f+g, \lambda f$ avec λ en $\mathbb{R}$ et fg sont et on a :

a) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

b) $(\lambda f)^{(n)} = \lambda^{(n)}$

c) $\boxed{(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ f^{(k)}.\ g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ f^{(n-k)} \ g^{(k)}}$ Formule de LEIBNIZ

1. Si $g \neq 0 \forall \ x \in I \frac{f}{g}$ est n fois dérivable et pas de formule simple donnant $(\frac{f}{g})^{(n)}$: $(\frac{f}{g})^{(n)} = (f.\frac{1}{g})^{(n)}$

□

Démonstration. Formule LEIBNIZ

— Si $n = 1$ elle se réduit á $(fg)^{(\prime)} = f'g + gf'$.
— Supposons la formule vraie vraie á l'ordre ; alors $(f.g)^{n+1} = [f^n g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g^n + \cdots + C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + f g^n]$

Quand les fonctions suivantes auront été étudiées, il faudra compléter le tableau ci-dessous par :

Tableau □

5.5 Dérivée Logarithmique

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle 1 telle que $f(x) \neq 0, \forall x \in I$. La fonction $\frac{f'}{f}$ est appelé dérivée logarithmique de f.

Dérivée logarithmique de $\frac{u}{v} = \frac{(\frac{u}{v})}{\frac{u}{v}} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \times \frac{v}{u} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

5.6 Dérivées Successives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ... : $I \longmapsto \mathbb{R}$ une application. On définit les dérivées successives de f par recurrence (pour $n > 0$) par :

* pour $a \in I, F^{(n)}(a)$ est la dérivée de $f^{(n-1)}$ en a, si elle existe.
* $f^{(n)}$ est l'application dérivée de $f^{(n-1)}$.

Remarque 5.6.1. *a) Existence de $f^{(n)}(a)$ suppose $f^{(n-1)}$ définie voisinage de a.*

5.7 Dérivée Usuelles

Tableau

— Si f est strictement positive $f, \sqrt{f}$ est dérivable et

$$(\sqrt{f})' = \frac{f}{2\sqrt{1}}$$

— e^f est dérivable sur 1. et

$$(e^f)' = f'e^f$$

— Si f ne s'annule par sur I, $|f|$ est dérivable sur I. et

$$(\ln^{(-\alpha)})' = \frac{f'}{f}$$

— Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si f est strictement positive sur $I.f^\alpha$ est dérivable sur I et

$$(f^\alpha = \alpha f^{\alpha-1} f')$$

— Si $]a \in]0, +\infty[, a^f$ est dérivable sur I et

$$(a^f)' = \ln a \ f'a^f$$

Quand $y \longrightarrow b$, alors $x = g(y) \longrightarrow a = g(h)$ car g continue en b.
Alors : $\frac{f(x)-(f(a)}{x-a} \longrightarrow f'(a) \Longrightarrow \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)}$

Remarque 5.7.1. *Supposons $f'(a) = 0$; si f croissante $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \longrightarrow +\infty$ donc $g'(b) = +\infty$ et on peut aussi écrire $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$*

Corollaire 5.7.2. *Si f est partout dérivable sur I, f^{-1} est partout dérivable sur J et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ oú $y = f(x)$*

5.8 Dérivée des fonctions réciproques des fonctions circulaires

Soit $y = arcsin\ x; x \in]-1,1[; x = \sin_y; y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
$\Longrightarrow \cos y \geq 0 (\cos\ \ y > 0)$.
$(arc\sin x)' = \frac{1}{(\sin\ \ y)}, = \frac{1}{\cos\ \ y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{_sqrt1-x^2}$

$$(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puisque $arc\cos\ \ x = \frac{\pi}{2} - arc_sin\ x \Longrightarrow (arc\cos_x)' = -(arc\sin\ \ x)'$

$$\Longrightarrow (arc\cos\ \ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a $(arctg_x)' = \frac{1}{(tg\ \ y)'} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}; y = arctg_x, tg\ \ y = x$

$$(arctg_x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

5.8.1 Autres Applications

(á retrouver en exo)
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I :
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors got est dérivable sur I et $(g0f)' = (g'of) \times f'$.

Démonstration. Posons $f(a) = b$
f dérivable en $a \Longrightarrow f(a+h) = f(a) + h[f'(a) + \varepsilon_1(h)]$
g dérivable en $f(a) \Longrightarrow g(b+k) = g(b) + k[g'(b) + \varepsilon_2(k)]$
$(gof)(a+h) = g[f(a+h)] = g[f(a) + h(f'(a) + \varepsilon_1(h))] = g(f(a)) + h(f'(a) + \varepsilon_1(h))g'(f(a)) + \varepsilon_2 \frac{(h(f'(a)+\varepsilon_1(h))}{cad\ \ k}$
$\frac{(gof)(a+h)-(gof)(a)}{h} = [f'(a) + \varepsilon_1(h)][g'(f(a) + \varepsilon_2(h[f'(a) + \varepsilon_1(h)])]$
Or quand $h \longrightarrow 0; \varepsilon_1(h) \longrightarrow 0$ et $k = h[f'(a) + \varepsilon_1(h)] \longrightarrow 0 \Longrightarrow \varepsilon_2[k] \longrightarrow 0$.
$\Longrightarrow \lim \frac{(gof)(a+h)-(got)(a)}{h} = f'(a).g'(f(a))$

□

5.9 Dérivée de la fonction réciproque

Théorème 5.9.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application strictement monotone et continue sur I réalisant ainsi une bijection de I sur $J = f(I)$, dont la bijection réciproque est f^{-1}.*
Si f est dérivable en $a \in I$, et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(a)} ou\ (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} ou\ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}; b = (a)$ ou $a = g(b)$; Soit $y \neq b, x = g(y) \in I$ cad $y = f(x); x \neq a$
on a : $\frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = [\frac{f(x)-f(a)}{x-a}] - 1$ □

5.10 Dérivation et Opérations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors :

a) $(f+g)$ est dérivable sur I et :

$$(f+g)' = f' + g'$$

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda\ f$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda\ f)' = \lambda f'$$

c) $(f.g)$ est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'$$

d) Si $n \in \mathbb{N}, f^n$ est dérivable sur I et :

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'$$

en particulier :

$$(f^2)' = 2ff'$$

e) Si g ne s'annule pas sur I, g est dérivable sur I et :

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En particulier :

$$(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$$

f) Si f ne s'annule pas sur I et si $n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{f^n}$ est dérivable et :

$$(\frac{1}{f^n})' = -\frac{nf'}{f^{n+1}}$$

5.11 Dérivée et Composition de Fonctions

5.11.1 Dérivée de la composée de 2 fonctions

Théorème 5.11.1. *Soient I, J 2 intervalles de $\mathbb{R}; a \in, I, f : I \longmapsto \mathbb{R}$,*
$g : J \longmapsto \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$.
Considérons $\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\ si\ f \neq 0 \\ 0\ si\ h = 0 \end{cases}$
Elle vérifie $fa+h) - f(a) = h[f'(a) + \varepsilon(h)]$ donc si f admet $f'(a)$ comme dérivée en a s'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 avec h, continue en 0 et qui vérifie la relation $(*)$
Réciproquement :

Supposons qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$. Tendant vers 0 avec h et un nombre A tels que : $f(a+h)-f(a)=h[A+\varepsilon(h)]$ ceci $\Longrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\varepsilon(h)$
$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=A \Longrightarrow f$ *dérivable en a et $f'(a)=A$*

Théorème 5.11.2. *Soit f définie sur l'intervalle I et $a\in I$:*

1. *Si f est dérivable sur a, alors f est continue en a,*
2. *La réciproque est fausse.*

Remarque 5.11.3. *De même si f a une dérivée á droite (resp. á gauche) finie en a, on a f est continue á droite (resp. á gauche) en a.*

Démonstration. a) f dérivable en $a \Longleftrightarrow f(a+h)-f(a)=h[f'(a)+\varepsilon(h)]$ avec $\varepsilon(h)$ possède le propriétés énoncées dans le théorème précédent.
$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=0 \Longrightarrow f$ continue en a.

b) La réciproque est fausse il suffit de prendre l'exemple de la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x|\end{array}$ qui est continue et pas dé

$$\lim_{x\to 0}=\frac{|x|}{x}=-1\neq \lim_{x\to 0}+\frac{|x|}{x}=+1$$

□

5.12 Quelques propriétés

Remarque 5.12.1. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I est soit $a\in I$.*
f dérivable en $a \Longleftrightarrow$ (f dérivable á droite et á gauche en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$)

Dans ces conditions on a bien sûr $f'_d(a)=f'_g(a)=f'(a)$.

Démonstration. Provient de la propriété suivante des limites oú l'on remplace $g(x)$ par $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) \text{ existe} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} g(x) \text{ existe}\\ \lim\limits_{x\to a^+} g(x)\text{existe}\\ \text{et } \lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x)\end{cases}$$

□

Si f'_g et f'_g existent en a et sont distinctes alors f n'est pas dérivable en a. La courbe C possède en a un <u>point anguleux</u>.
<u>Ex</u> : $f(x)=|\sin\ x|$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\ x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin\ x}{x}=-1$

figure

Remarque 5.12.2. *f admet une dérivée $f'(a)$ en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon(h)$, nulle $h = 0$ et conitnue en ce point qui vérifie.*

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \varepsilon(h)) \tag{5.1}$$

Démonstration. Si f admet $f'(a)$ comme dérivée en a. $\square$

Chapitre 6

Développement limité et ses Applications

6.1 Introduction á la formule de Taylor

6.1.1 Rappels

Définition 6.1.1. *(équivalent, négligeable, dominé) Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in E$ et I un intervalle ouvert contenant a et contenu dans E. On suppose que $g(x) \neq 0$ si $x \in I \backslash a$. On dit que f est :*

- *dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. On note $f = O(g)(grando)$.*
- *négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a. On note $f = \circ(g)(petito)$.*
- *équivalente á g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers a. On note $f \sim g$*

Définition 6.1.2. ***(polynôme á coefficient réel)*** *Un monôme est une expression de la forme : ax^n ou a est un nombre réel et n un entier naturel ;*
le nombre a est appelé coefficient du monôme et le nombre n est appelé le degré du monôme.
On appelle polynôme de degré n une somme de monômes dont celui de plus haut degré est n.

6.1.2 Formule deTaylor-Lagrange

Théorème 6.1.3. *Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et f^n dérivable sur $]a, b[$; il existe alors $c \in]a, b[$ telle que :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + ... + \frac{(b-a^)n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (6.1)$$

*La formule 6.1 est appelée formule de **Taylor-Lagrange** á l'ordre n ;*
le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé le reste de Lagrange et la partie polynômiale est dite polynôme de Taylor á l'ordre n de f

Remarque Si $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis.

Démonstration

On définit A par l'égalité

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) - .... - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

Comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis, on introduit une fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x^)2}{2!}f^{(2)}(x) - .... - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

φ est continue [a, b] et dérivable sur]a, b[et on a :

$\varphi(b) = 0$ et choix de A donne $\varphi(a) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de **Rolle** á la fonction φ ; il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Calculons la dérivée de φ.

terme de φ	terme de φ'
f(b)	0
- f(x)	- f'(x)
- (b-x)f'(x)	$+f'(x) - (b-x)f^{(2)}(x)$
.	.
.	.
.	.
$-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$	$\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)n+1}{(n+1)!}A$	$\frac{(b-x)n}{(n)!}A$

Dans la colonne de droite tous les termes sauf deux se simplifient, donc

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)n}{(n)!}(A - f^{(n+1)}(x))$$

Comme $c \neq b$, l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne $f^{(n+1)}(c) = A$. On a donc obtenu la formule de Taylor.

6.1.3 Autres écritures

1. Si f est de classe C^n sur I et si f^{n+1} existe sur I, $\forall\ a \in I$, a fixé et $\forall\ x \in \mathbb{R}$ tel que $a+x \in I$, il existe un réel θ tel que $0 < \theta < 1$ et

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{x^n}{n!}f^n(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^(n+1)(a+\theta x)$$

$a+\theta x$ est le nombre c stictement comptis entre a et $(a+x)$ si $0<\theta<1$.
$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(a)$ est le polynôme de Taylor de f en a.

2. En particulier pour $0\in I$ on obtient la formule de **Mac Laurin** suivante :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $0<\theta<1$
$f(x)=P_n(x)+R_n(\theta x)$, avec $R_n(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$ est l'erreur commise si on remplace $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$ de degré.

3. **Formule de Taylor -Young**

Théorème 6.1.4. *Soit f une fonction de classe C^n sur I un voisinage de a. Alors $\forall \quad h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in I$ on a :*

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(h)^n}{n!}f^n(a)+h^n\varepsilon(h)$$

$\varepsilon(h)$ étant une fonction définie sur I telle que
$\lim_{h\longrightarrow 0}\varepsilon(h)=0$

Démonstration
f est de classe C^n sur I donc $\forall \quad a+h\in I$ on peut écrire la formule de Taylor en $a+h$ á l'ordre $n-1$.

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

ou c est strictement entre a et $a+h$.
$h\longrightarrow 0$ alors $c\longrightarrow a$ et comme f^n est continue en a. $f^{(n)}(c)\longrightarrow f^{(n)(a)}$
donc $f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+\varepsilon_1(h)$ avec $\varepsilon_1(h)\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$
ce qui donne

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{(n!}f^{(n)}(a)+h^n\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)=\frac{\varepsilon_1(h)}{n!}\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$.

6.1.4 Formule de Taylor des Fonctions Usuelles

6.2 Développements limités

Définition 6.2.1. *Soient I un voisinage de $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, sauf peut être en a. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe $n+1$ réels $b_0,b_1,...,b_n$ tels que pour tout $x\in I$ on a :*

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + ... + b_n(x-a)^n + r(x)$$

avec $r(x) = o((x-a)^n)$ *ou* $r(x) = (x-a)^n\varepsilon(x-a)$
avec $\varepsilon(x-a) \longrightarrow 0$ *lorsque* $x \longrightarrow a$
Le polynôme $P_n(x-a) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + ... + b_n(x-a)^n$ *est appelé partie regulière du développement ;*
$(x-a)^n\varepsilon(x-a)$ *le reste ou terme complémentaire.*

Remarque

1. Admettre un développement limité d'ordre 0 en a est équivalent á avoir une limite finie en a. Dans ce cas :

   — Si f(a) existe alors $f(a) = b_0$ et f continue en a.
   — Sinon f est prolongeable par continuité et son prolongement $\widetilde{f}$ vérifie $\widetilde{f}(a) = b_0$
2. Si f (ou son prolongement $\widetilde{f}$) est dérivable en a alors $f'(a) = b_1(ou \quad \widetilde{f}'(a) = b_1)$
3. Si f est de classe C^n au voisinage de a, alors f admet un $DL_n(a)$. De plus son développement de Taylor á l'ordre n est son $DL_n(a)$
   La réciproque est fausse par exemple :
   considérons la fonction f suivante $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ admet un $DL_n(a)$ mais n'admet pas de développement de Taylor car la fonction n'est pas définie en 0.
4. Un développement limité d'ordre n est unique, s'il existe.

Exemple
Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction f

Proposition 6.2.2. ***Propriété de la troncature***
Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P_n, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, f admet un $DL_k(a)$ dont la partie réguilière est obtenue en tronqant P_n au degré k, c'est á dire en ne prenant dans P_n que les termes de degré inférieur ou égal á k

Démonstration

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + ... + b_k(x-a)^k + b_{k+1}(x-a)^{k+1} + ... + b_n(x-a)^n + r(x)$$

en posant $\varepsilon_1(x-a) = b_{k+1}(x-a)^1 + b_{k+2}(x-a)^2 + ... + b_n(x-a)^{n-k} + \frac{r(x)}{(x-a)^k} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow a$
et on obtient

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + ... + b_k(x-a)^k + (x-a)^k\varepsilon_1(x-a)$$

6.2.1 Opérations sur les développements limités

Proposition 6.2.3. *(Somme, Produit et quotient de développements limités)*
Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en a alors les fonctions $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$ admettent des développements limités d'ordre n en a. Plus précisément si :
$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x-a)$ *et* $g(x) = Q_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x-a)$ *avec* $\varepsilon_1(x-a) \longrightarrow 0$ *et* $\varepsilon_2(x-a) \longrightarrow 0$ *quand* $x \longrightarrow a$.
Alors le $DL_n(a)$:

1. *de la somme $f+g$ est donné par :*

$$(f+g)(x) = R_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

   où $R_n(x-a) = P_n(x-a) + Q_n(x-a)$ et $\varepsilon(x-a) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow a$

2. *du produit fg est donné par :*

$$(fg)(x) = R_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

   où la partie regulière $R_n(x-a)$ du produit s'obtenient en ne prenant dans la produit des parties regulières $P_n(x-a)Q_n(x-a)$ que les termes qui de degré inférieurs ou égal á n

3. *du quotient de $\frac{f}{g}$ (Si letermeconstantde$Q_n(x-a) \neq 0$)est obtenu par :*
   $\frac{f}{g}(x) = Z_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$ *et* $\varepsilon(x-a) \longrightarrow 0$ *quand* $x \longrightarrow a$ *où la partie régulière $Z_n(x-a)$ du quotient s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'á l'ordre n de $P_n(x-a)$ par $Q_n(x-a)$*

Démonstration. Il suffit par la propriété multiplicative des développements limités de montrer que $\frac{1}{g}$ a un développement limité á l'ordre n en 0. Ecrivons le développement limité de g á l'ordre n en 0

$$g(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

avec $b_0 \neq 0$.Alors

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)} = \frac{1}{b0(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k + o(x^n))} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1-u}$$

avec $u = -(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k) + o(xn)$.
On sait que (voir application 2 de la formule de Taylor-Young)

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + ... + u^n + o(u^n)$$

. Par composition on a un développement limité d'ordre n de la fonction $\frac{1}{1-u}$. La proposition est donc démontrée.

Exemple

Calcul du développement limité de $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ en 0 á l'ordre 5 . On a

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Il suffit d'avoir le développement á l'ordre 5 de $\frac{1}{cosx}$. On a :

$$\frac{1}{cosx} = \frac{1}{1-u}$$

avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

. On a aussi

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^3)$$

donc

$$\frac{1}{cosx} = 1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x5)$$

. Finalement on obtient :

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x5))$$

après dévéloppement et simplification on a :

$$tanx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

. **Remarque**

En pratique, on a un formulaire qui donne les développements limités des fonctions usuelles en 0 et on calcule le développement limité d'une fonction $f(x)$ au voisinage de a de la manière suivante.

1. On se ramène au point 0 par translation, c'est-'a-dire en posant $x - a = u$, de sorte que u tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi le développement limité en 0 de la fonction $g(u) = f(u+a)$ correspond au développement limité en a de la fonction f.
2. On utilise les formules donnant le développement limité d'une somme, d'un produit et d'une composée de fonctions usuelles.

De même pour le $DL_(\infty)$ de f il suffit de chercher le $DL_(0)$ de F définie par $F(x) = f(\frac{1}{x}$

Proposition 6.2.4. *(Composition de développements limités)*

Soient $f$et g deux fonctions ayant des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que $g(0) = 0$. Alors $f \circ g$ a un développement d'ordre n en 0 qui s'obtient en remplaçant dans le développement de f la variable x par le développement de g et en négligeant les termes de degré $> n$.

Exemple

Calculer le développement limité de $e^{cos(x)}$ en 0 á l'ordre 3.

6.3 Developpements Limités au voisinage de 0 des fonctions usuelles

1. $f(x) = e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ les dérivées successives de e^x sont toutes égales á e^x et $e^0 = 1$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x) \quad avec \quad \epsilon(x) \longrightarrow 0$$
2. $f(x) = \sin x$ et on a vu que $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et f est impaire donc les termes de rang pair sont non nuls. On a alors
$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\epsilon(x)$$
avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$
3. $f(x) = \cos x$ est c^∞et on a vu que $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et f est paire donc on aura que ds termes de rang pair. Ainsi on a :
$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}... + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\epsilon(x)$$
avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$.

Un $DL_5(0)$ compte tenu des opération sur les DL données

Soit α une constante réelle. $f(x) = (1+x)^\alpha$ est définie pour $x > -1$

Ses dérivés successives sont :

$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,...,$\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}$,...

Donc on a :

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+..+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-p+1)}{p!}+x^p\epsilon(x)$$
avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$.

D'ou pour α prenant respectivement les valeurs $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$ on a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{p-1}\frac{1.3.5...(2p-3)}{2.4.6...2p}x^p + x^p\epsilon(x)$$
avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ... + (-1)^p\frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...(2p)}x^p + x^p\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^p x^p + x^p \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$ et les DL et opérations de l'analyse dérivation et primativation donnent á partir de leurs dérivées respectives

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \to 0$ et $x \to 0$
$\log(1+x)$ est définie pour $x > -1$ admet pour dérivées $\frac{1}{1+x}$ et $Log(1+0) = 0$

6.4 Applications des Developpements Limités

6.4.1 Recherche de limite

Pour lever une indétermination en remplaçant comme il se doit chaque fonction par son équivalent obtenu á partir du DL.

Exemple
$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{(1-e^x)^2}$ calculer la limite de f en 0 . En utilisant le DL ona $1 - \cos(x) = 1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon_1(x)) = x^2(\ )$

Soit $f(x) = \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$
Calculons $\lim_{x \mapsto 0} f(x)$
On a un FI de la forme $\frac{0}{0}$. Or au voisinage de 0 á l'ordre 3 on a :
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)$ et $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_1 = 0$ et $\lim_{x\to 0}\epsilon_2 = 0$.
Donc $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^3}{3}$ au voisinage de 0 et $\tan(x) - x = \frac{x^3}{3}$
$\Rightarrow \lim_{x \mapsto 0} f(x) = 1$

6.4.2 Tangente en un point $(x_0, f(x_0))$

Soit f une fonction dérivable au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme :
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_r(x - x_0)^r + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$
avec $\lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x - x_0) = 0$ et $a_r(x - x_0)^r$ le premier terme non nul aprés les termes de degré ≤ 1. On a alors la droite D d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est la tangente au graphe $\mathbb{C}_f$ de f au point $(x_0, f(x_0))$

En effet $y = a_0 + a_1(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
On peut écrire $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_r(x - x_0)^r + (x - x_0)^r \epsilon_1(x - x_0)$ avec $\lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x - x_0) = 0$ et alors $f(x) - y \sim a_r(x - x_0$ au voisinage de x_0 si bien que :

— Si $\lim_{x\to x_0} a_r(x-x_0)^r = 0^+$, alors $\mathbb{C}_f$ est au dessus de D

— Si $\lim_{x\to x_0} a_r(x-x_0)^r = 0^-$, alors $\mathbb{C}_f$ est en dessous D.

— Si $\lim_{x\to x_0} a_r(x-x_0) = 0^-$ respectivement (0^+) alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion..

exemple

Donner un développement limité á l'ordre 2 de :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^3-6x^2+7x-5}$$

Au voisinage de $x = 1$; en déduire l'équation de la tangente de f au point (1, f(1))

1. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^3-6x^2+7x-5}$ $DL_3(1)$
   Posons $t = x-1 \Longrightarrow x = 1+t \Longrightarrow f(x) = g(t) = \frac{(1+t)^2+3(1+t)-1}{2(1+t)^3-6(1+t)^2+7(1+t)-5} = \frac{3+5t+t^2}{-2+t+2t^3}$ faisons le DL á l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$

   (a) première méthode : On fait la division suivant les puissances croissantes de t.
   $3+5t+t^2$ par $-2+t+2t^3$
   Et après division euclidienne on trouve :

   $\frac{3+5t+t^2}{-2+t+2t^3} \quad = \quad -\frac{3}{2} - \frac{13}{4}t - \frac{17}{8}t^2 - \frac{41}{16}t^3 + o(t^3)$

   (b) Autre méthode : $\frac{1}{-2+t+2t^3} \quad = \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}-t^3}$

   $= \quad -\frac{1}{2}(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{9t^3}{8}+o(t^3))$

   Forme $\quad \frac{1}{1-u} \quad \Longrightarrow$

   $\frac{3+5t+t^2}{-2+t+2t^3} \quad = \quad (3+5t+t^2)(-\frac{1}{2}(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{9t^3}{8}+o(t^3))$

   $= -\frac{3}{2} - \frac{13}{4}t - \frac{17}{8}t^2 - \frac{41}{16}t^3 + o(t^3)$

   $= -\frac{3}{2} - \frac{13}{4}(x-1) - \frac{17}{8}(x-1)^2 - \frac{41}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

2. $DL_2(2)$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
   DL d'ordre 2 au voisinage de $x = 2$ on se ramène au voisinage de 0 en posant $t = x-2$ cad $x = t+2$ donc on vas faire un DL au voisinage de $t = 0$ de la fonction :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{\sqrt{t+4}-2}{\sqrt{t+9}-3} = \frac{2\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1}{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1} = \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1)(\sqrt{1+\frac{t}{9}+1})}{\frac{t}{9}} = \frac{6}{t}[(\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1)(\sqrt{1+\frac{t}{9}}+1)]$

Or $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + O(u^3)$

$f(x) = g(t) = \frac{6}{t}[1 + \frac{t}{2^3} - \frac{t^2}{2^7} + \frac{t^3}{2^10} + O(t^3) - 1]$

$= [1 + \frac{t}{2*3^2} - \frac{t^2}{2^3*3^4} + O(t^2) + 1]$

$= \frac{3}{2} - \frac{5}{96}t + \frac{55}{6912}t^2 + O(t^2)$

$\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{3}{2} - \frac{13}{96}(x-2) + \frac{55}{6912}(x-2)^2 + o(x-2)^2$

3. Le développement limité á l'ordre 2 en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \exp\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

quand $x \longmapsto \infty \qquad u = \frac{1}{x} \longmapsto \qquad 0$

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + O(u^2) \quad ; \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^2)$

$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^2}) \quad ; \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + O(\frac{1}{x^2})$

Alors $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8x^2} + O(\frac{1}{x^2})$

6.4.3 Asymptotes Obliques

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini. Si le DL de f au voisinage de l'infini est : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a_r}{x^r} + \frac{a_{r+1}}{x^{r+1}} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x})$, avec $\lim_\infty \epsilon(\frac{1}{x} = 0$ et $a_r \neq 0$ alors la droite δ d'equation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote "oblique" au graphe $\mathcal{C}_f$ de f.
En effet $\lim_\infty f(x) - (\alpha x - \beta) = 0$. On peut écrire :
$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a_r}{x^r} + \frac{1}{x^r}\epsilon_1(\frac{1}{x})$, avec $\lim_\infty \epsilon(\frac{1}{x} = 0$.
$f(x) - y$ a même signe que $\frac{a_r}{x^r}$ si bien que :
si $\lim_\infty \frac{a_r}{x^r} = 0^+$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de δ et
si $\lim_\infty \frac{a_r}{x^r} = 0^-$ alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de δ.
En résumé dans le DL de f au voisinage de (x_0 de l'infini) :

— Les termes de degré ≤ 1 donnent l'équation de la tangente (ou de l'asymptote)
— le signe du terme suivant précise la position de la courbe par rapport á la tangente (ou de l'asymptote).

Exemple

Déterminons les asymptotes au voisinage de l'infini de la courbe $\mathcal{C}_f$ et d'équation $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ et déterminons la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport á ces asymptotes.

$f(x) = |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$; en posant $u = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ on a $u \to 0$ quand $x \to \infty$

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\epsilon(u)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon = 0$

$\Rightarrow f(x) = |x|[1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})^2 + \circ(u^2)]$

$\Rightarrow f(x) = |x|[1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{8x^2} + \circ(\frac{1}{x^2})]$

Si $x < 0$, $f(x) = -x + \frac{1}{2} - \frac{7}{8x} + \circ(\frac{1}{x}) \Rightarrow y_1 = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) - y = \lim_{x\to -\infty} \frac{-7}{8x} = 0^+$

$\Rightarrow$ la courbe est au dessus de l'asymptote y_1

Si $x > 0$, $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{7}{8x} + \circ(\frac{1}{x}) \Rightarrow y_2 = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) - y_2 = \lim_{x\to +\infty} \frac{7}{8x} = 0^+$

$\Rightarrow$ la courbe est au dessus de l'asymptote y_2