Université Cheikh Anta DIOP de Dakar

Faculté des Sciences et Techniques

(F. S. T.)

Département de Mathématiques et Informatique

(D. M. I.)

Laboratoire d'Algèbre de Cryptologie de Géométrie Algèbrique et Applications

(L. A. C. G. A. A.)

CHAPITRE 1 :

NOMBRES REELS ET NOMBRES COMPLEXES

Dr. Demba SOW, demba1.sow@ucad.edu.sn

Année académique 2022-2023

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels et Nombres complexes

1.1 Généralités

Les notions d'ensemble et les opérations sur les ensembles telles que la "reunion" et "l'intersection" sont déjà rencontrées au secondaire mais seulement pour un nombre fini d'ensembles.

Dans cette partie du cours, nous allons étendre ces notions à un nombre quelconque d'ensembles puis nous évoquerons les notions de relations d'équivalence et d'ordre ainsi que certaines notions associées telles que : **majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure.**

1.1.1 Notions de quantificateurs

Prorpriétés caractéristiques d'un ensemble

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle propriété caractéristique de A tout critère permettant de décider pour tout élément $x \in E$ entre les deux propriétés : $x \in A$ et $x \notin A$. La propriété caractéristique de A donne la définition en compréhension de A.*

Si on note "p" une propriété caractéristique de A alors on note "$\overline{p}$" ou non"p" la propriété caractéristique du complémentaire de A (notée $\mathcal{C}_A$).

On écrit : $A = \{x \in E, p(x)\}$ et $\overline{A} = \{x \in E, nonp(x)\}$ et on a $E = A \cup \mathcal{C}_A$ avec $A \cap \mathcal{C}_A = \emptyset$.

Exemple 1.1.2. *Illustration dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.*

1. *Soit dans* $\mathbb{Q}$ *la propriété* $p(x) \Leftrightarrow x > 1$ *c'est à dire que* x *vérifie la propriété* p *si et seulement si* x *est strictement supérieur à 1. Alors* $\{x \in \mathbb{Q}, p(x)\} = \{x \in \mathbb{Q}, x > 1\} =]0, +\infty[\cap\mathbb{Q}$
2. *Soit dans* $\mathbb{Z}$ *la propriété* $q(x) \Leftrightarrow x$*est un carré . Alors* $\{x \in \mathbb{Z}, q(x)\} = \{x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}/y^2 = x\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, ...\}$

Définition 1.1.3. *Soient* p *et* q *deux propriétés caractéristiques d'un même ensemble* A*, on dit que* p *et* q *sont équivalentes et on a* $A = \{x \in E, p(x)\} = \{x \in E, q(x)\}$*. On note* $p \sim q$*.*

Exemple 1.1.4. *Illustration dans* $\mathbb{Q}$*.*

1. *Soient les deux propriétés sur* $\mathbb{Q}$ *:* $p(x) \Leftrightarrow x \leq 2$ *et* $q(x) \Leftrightarrow x^3 - 8 \leq 0$ *. Alors* $p \sim q$ *car* $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ *et* $x^2 + 2x + 4 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{Q}$*.*
2. *Soient les deux propriétés sur* $\mathbb{Q}$ *:* $p_1(x) \Leftrightarrow |x| = 2$ *et* $q_1(x) \Leftrightarrow x^2 = 4$ *. Alors* $p_1 \sim q_1$

Quantificateurs existentiel et universel

Soient E un ensemble, A une partie de E et "p" une proporiété caractéristique de A ; $A = \{x \in E, p(x)\}$. Alors on considère les deux cas suivants :

— **1er cas :** $A \neq \emptyset$ c'est à dire " qu'il existe au moins un élément $x \in E$ possèdant la propriété p". On peut condenser l'écriture sous la forme $\exists x \in E, p(x)$ et on lit "il exists $x \in A, \ p(x)$".

Notation du quantificateur existenciel : $\exists$

— **2ème cas :** $A = E$ c'est à dire " que tout élément $x \in E$ possède la propriété p" (=la propriété "p" est vérifiée). On écrit alors $\forall x \in E, p(x)$ et on lit "quelque soit $x \in A, \ p(x)$".

Notation du quantificateur universel : $\forall$

Exemple 1.1.5. $A = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{C}_A = E \Leftrightarrow$ *aucun élément de* A *ne vérifie "p". On écrit "*$\forall x \in E, non \quad p(x)$*"*

Propriétés 1.1.6. — *non* $(\forall x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \quad non \quad p(x))$

— *non* $(\exists x \in E, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \quad non \quad p(x))$

Exemple 1.1.7. *Dire si les énoncés suivants sont vrais puis donner leur négation.*

1. *(a)* $\forall x \in \mathbb{Q}, \ (x^2 - 1) = x^2 - 2x + 1$ *;* *(b)* $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^2 \geq 0$ *;*
2. *(a)* $\exists x \in \mathbb{Q}, \ 7x + 5 = 0$ *;* *(b)* $\exists x \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 1$ *;*
3. *(a)* $\forall x \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{Z}, \ 2xy = 11$ *;* *(b)* $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N}, \ xy = 4$ *;*
4. *(a)* $\exists x \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, \ x + y = 1$ *;* *(b)* $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q} x + y = 1$

1.1.2 Famille d'ensembles

Définition 1.1.8. — *Soit E un ensemble et $\mathfrak{F}$ un ensemble de parties de E alors on dit que $\mathfrak{F}$ est famille de parties de E.*

— *Soit I un ensemble (appelé ici ensemble d'indices). A chaque $i \in I$, on associe un ensemble, noté E_i, alors la liste des ensembles E_i est notée $(E_i)_{i\in I}$ et est appelé famille d'ensembles indexés par I.*

NB : Lorsque I est finie , on dit que $(E_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ensembles.

Définition 1.1.9. ***Intersection***

— *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles d'un ensemble E .On note $\bigcap_{i\in I} X_i$ la partie de E, constituée des éléments de E, appartenant à tous les X_i et on écrit : $\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \in E/x \in X_i, \forall i \in I\}$*

— *Si $\mathfrak{F}$ est une famille de parties de E, $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F = \{x \in E/x \in F, \forall F \in \mathfrak{F}\}$ est l'intersection des éléments de $\mathfrak{F}$.*

Exemple 1.1.10. *Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathfrak{F} = \{\{0, 1, 2, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4, 5\}\}$.*
Alors, on a $\cap_{F\in\mathfrak{F}} F = \{0, 1, 2, 4\} \bigcap \{0, 2, 3\} \cap \{0, 2, 4, 5\} = \{0, 2\}$.

Définition 1.1.11. ***Union***

— *Soit $(X_i)_{i\in I}$, une famille de sous-ensembles d'un ensemble E.*
Alors $\bigcup_{i\in E} X_i$ est la partie de E constituée des éléments appartenant à l'un au moins des X_i et on note cette réunion par $\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \in E/\exists i \in I, x \in X_i\}$

— *Si $\mathfrak{F}$ est une famille de parties de E, $\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} F = \{x \in E/\exists F \in \mathfrak{F}, x \in F\}$ est la réunion des éléments de $\mathfrak{F}$.*

Exemple 1.1.12. *Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathfrak{F} = \{\{0, 1, 2, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4, 5\}\}$*
$\cup_{F\in\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = \{0, 1, 2, 4\} \bigcup \{0, 2, 3\} \cup \{0, 2, 4, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Définition 1.1.13. ***Partition***

Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble E est une partition de E lorsque la reunion donne E et que les X_i sont deux à deux disjoints. On note :

$E = \cup_{i\in I} X_i, \quad \forall i \in I, X_i \neq \emptyset, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad \forall (i, j) \quad (i \neq j)$

Exemple 1.1.14. *Soient* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_1 = \{0, 1, 6\}$ *et* $X_2 = \{3\}$ $\quad X_3 = \{2, 4, 5\}$ *alors* $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = E$ $\quad$ *et* $\quad X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_3 = X_2 \cap X_3 = \emptyset$.

Ainsi $(X_i)_{i\in I}$ *est une partition de* E *où* $I = \{1, 2, 3\}$

Définition 1.1.15. ***Produit cartesien*** *(voir le cours d'algèbre pour un formalisme plus rigoureux)*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles [ici les* (A_i) *ne sont pas necessairement des parties d'un même ensemble]. On note* $\Pi_{i\in I}A_i$ *l'ensemble des familles* $(a_i)_{i\in I}$ *telles que* $\forall i \in I, a_i \in X_i$, $\Pi_{i\in I}A_i = \{(a_i)_{i\in I} \ /\forall i \in I \ a_i \in X_i\}$

1. *Si* $I = \{1, 2\}$

   $\Pi_{i\in I}A_i = A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \ /a_i \in A_i \ i = \{1, 2\}\}$
2. *Si* $I = \{1, 2, ..., n\}$ *où* n *est un entier fini.*

   $\Pi_{i\in I}A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \ /a_i \in A_i \ 1 \leq i \leq n\}$

NB :

1. $\Pi_{i\in I}A_i = \emptyset$ si et seulement si, il $\exists i \in I$ tel que $X_i = \emptyset$
2. Si $A_i = A, \ \forall i \in I$ alors $\Pi_{i\in I}A_i$ est noté A^I. En particulier si $CardI = \#I = n$ alors A^I est aussi noté A^n

1.1.3 Relations binaires

Vocabulaire et notations usuelles

Définition 1.1.16. *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides. Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *de* E *vers* F *est un sous ensemble de* $E \times F$*. On dit que le couple* $(x, y) \in E \times F$ *vérifie la relation* $\mathcal{R}$ *si et seulement si* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *et dans ce cas, on note* $x\mathcal{R}y$ *et on lit "*x *est en relation avec* y *à travers* $\mathcal{R}$*". Si "*$x\mathcal{R}y$*" est faux, on note "*x *non*$\mathcal{R}$ y*".*

Exemple 1.1.17. *On consière les ensembles :* $E = \{-3, -1, 0, 1, 2, 4\}$ *et*
$F = \{-2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 20\}$.

On definit $\mathcal{R} = \{(x, x^2), x \in E\}$ *alors* $\mathcal{R} = \{(-3; 9), (-1; 1), (1; 1), (2; 4), (0; 0), (4; 16)\}$

Anisi, $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ *est une relation binaire. On a* $2 \ \mathcal{R} \ 4$ *mais* 2 *non*$\mathcal{R}$ 2 *;* $\quad -1 \ \mathcal{R} \ 1$ *mais* -1 *non*$\mathcal{R}$ 8 *;* $\quad 0 \ \mathcal{R} \ 0$ *mais* 0 *non*$\mathcal{R}$ 20.

Définition 1.1.18. *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur* E *(c'est à dire de* E *dans* E*). On dit que* $\mathcal{R}$ *est :*

— *Reflexive : Si* $\forall x \in E, \ x\mathcal{R}x$

— *Symetrique : Si* $\forall(x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow \quad y\mathcal{R}x$
— *Antisymetrique : Si* $\forall(x,y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$
— *Transitive :Si* $\forall(x,y,z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relations d'équivalence

Définition 1.1.19. *Relation d'équivalence : Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble de E est une relation d'équivalence sur E lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 1.1.20. .

1. *On définie la relation $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Alors $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.*

   Preuve :

   Reflexité ? $\forall x$, on a $|x| = |x|$ alors $\mathcal{T}$ est reflexive.

   Symétrie ? On a $x\mathcal{T}y \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y\mathcal{T}x, \quad \forall x,y \in \mathbb{Z}$; d'où $\mathcal{T}$ est symétrique.

   Transitivité ? Si $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$ alors $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$ donc $|x| = |z|, \quad \forall x,y \in \mathbb{Z}$; d'où $\mathcal{T}$ est transitive.

2. *Soit $A = \{34, 213, 6, 60, 43, 70, 11\}$, on définit sur A, la relation $\mathcal{S}=$ "avoir la même somme des chiffres que". Alors, il est facile de voir que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.*

Définition 1.1.21. *Classe d'équivalence : Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, la classe d'un élément x de E (noté cl(x) ou $\overline{x}$ ou $[x]$) est l'ensemble des éléments y de E en relation avec x à travers $\mathcal{R}$:* $\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = [x] = \{y \in E \ / \ y\mathcal{R}x\}$

NB Deux classes d'équivalence sont soit disjointes, soit identiques : $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ ou $\overline{x} = \overline{y}$.

Exemple 1.1.22. .

1. *Soit $B = \{la,\ mot,\ lutte,\ math,\ boule,\ loup,\ colle\}$, on définie sur B la relation $\mathcal{R}=$ "commence par la même lettre que ". On peut facilement voir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   On a : $\overline{la} = \{la,\ lutte,\ loup\}$, $\overline{mot} = \{mot,\ math\}$, $\overline{boule} = \{boule\}$ et $\overline{colle} = \{colle\}$

2. *Soit $B_1 = \{134, 213, 6, 60, 143, 170, 11\}$, on définie sur B_1 la relation $\mathcal{R}_1=$ "commence par le même chiffre que". Alors, il est facile de voir que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.*

   On a : $\overline{134} = \{134, 143, 170, 11\}$, $\overline{213} = \{213\}$ et $\overline{6} = \{6, 60\}$.

   Remarquer que $\overline{134} = \overline{143} = \overline{170} = \overline{11}$ et de même $\overline{6} = \overline{60}$.

3. *Soit* $E_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

   On definit $\mathcal{R}_1$ *sur* E_1 *par* $x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

   Montrer que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'équivalence.*

   On a : $\overline{-2} = \{-2, 2\}$, $\overline{-1} = \{-1, 1\}$, $\overline{0} = \{0\}$ *et* $\overline{4} = \{4\}$.

   Remarquer que $\overline{-2} = \overline{2}$ *et de même* $\overline{-1} = \overline{1}$.

Définition 1.1.23. *Ensemble quotient : Soit* E *un ensemble muni d'une relation binaire* $\mathcal{R}$, *l'ensemble des classes d'équivelence modulo* $\mathcal{R}$ *est appelé ensemble quotient de* E *par* $\mathcal{R}$ *et est noté* $E/\mathcal{R} = \{\overline{x} \ / \ x \in E\}$

Exemple 1.1.24. *On reprend les exemples précédents et on donne l'ensemble quotient pour chaque cas.*

1. *On définie la relation* $\mathcal{T}$ *sur* $\mathbb{Z}$ *par* $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

   Alors l'ensemble quotient est : $\mathbb{Z}/\mathcal{T} = \big\{\{0\}, \{-1; 1\}, \{-2; 2\}, \{-3; 3\}, ...\big\}$.
2. *Soit* $A = \{34, 213, 6, 60, 43, 70, 11\}$, *on définie sur* A *la relation* $\mathcal{S}=$ *"avoir la même somme de chiffres que".*

   Alors l'ensemble quotient est $A/\mathcal{S} = \{\{34; 43; 70\}, \{213; 6; 60\}, \{11\}\}$.
3. *Soit* $B = \{la,\ mot,\ lutte,\ math,\ boule,\ loup,\ colle\}$, *on définie sur* B *la relation* $\mathcal{R}=$ *"commence par la même lettre que ".*

   Alors l'ensemble quotient est $B/\mathcal{S} = \{\{la,\ lutte,\ loup\}, \{mot,\ math\}, \{boule\}, \{colle\}\}$
4. *Soit* $E_1 = \{-2; -1; 0; 1; 2; 4\}$ *On definit* $\mathcal{R}_1$ *sur* E_1 *par* $x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

   Alors l'ensemble quotient est : $\mathbb{E}_1/\mathcal{R}_1 = \big\{\{0\}, \{-1; 1\}, \{-2; 2\}, \{4\}\big\}$.

Relation d'ordre

Définition 1.1.25.
- *Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble de* E *est une relation d'ordre sur* E *lorsqu'elle est réflexive, antisymetrique et transitive.*
- *Une relation d'ordre* $\mathcal{R}$ *sur* E *est dite "totale" si deux elements quelconques sont comparables c'est-à-dire* $\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x$. *Dans ce cas on dit que* $(E, \mathcal{R})$ *est totalement ordonnée.*
- *Si l'ordre n'est pas "total" , on dit que l'ordre est "partiel".*

Exemple 1.1.26. *On pose* $E_2 = \mathbb{Q}_+$ *et on définit* $\mathcal{R}_2$ *sur* E_2 *par* $x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

Montrer que $\mathcal{R}_2$ *est relation d'ordre totale.*

Exemple 1.1.27.
1. *La relation "inférieur ou égal* $(\leq)$*" est une relation d'ordre totale sur* $\mathbb{Z}$ *donc* $(\mathbb{Z},\ \leq)$ *est totalement ordonné.*

2. *Soit* $E = \{x, y, z\}$ *alors* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, E\}$ *notons* $F = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, E\}$
   (a) *Sur* F *on definie* $A\rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *alors* ρ *est une relation d'ordre totale, on a :* $\emptyset \subseteq \{x\} \subseteq \{x, y\} \subseteq E$
   (b) *Sur* $\mathcal{P}(E)$ *on definie* $A\sigma B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *alors* σ *est une relation d'ordre partiel.*
   Par exemple $\{x\}$ *et* $\{y\}$ *sont incomparables* $\{x\} \nsubseteq \{y\}$ *et* $\{y\} \nsubseteq \{x\}$ *donc* $x\sigma y$ *est faux et* $y\sigma x$ *est faux.*
3. *On considère dans* $\mathbb{N}^*$*, la relation* a/b (a *divise* b) $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $b = an$ *dans* $\mathbb{N}^*$. *Montrer que "/" est une relation d'ordre partiel.*
4. *Est-ce que la relation "divie" est une relation d'ordre sur* $\mathbb{Z}^*$.

Définition 1.1.28. ***Majorant et Minorant***

Soit E *un ensemble muni d'une relation d'ordre* $\mathcal{R}$ *et* A *une partie de* E.

1. *Un element* $M \in E$ *est un* ***majorant*** *de* A*, dans* E *si* $x\mathcal{R}M \quad \forall x \in A$. *Par exemple, avec* $E = \mathbb{Q}$ *et* $\mathcal{R} = \leq$*, alors* M *est majorant de* A*, si* $x \leq M$*, pour tout* $x \in A$.
2. *Si* A *admet un* ***majorant****, on dit que* A *est majoré.*
3. *Un element* $m \in E$*, est un* ***minorant*** *de* A *dans* E*, si* $m\mathcal{R}x \quad \forall x \in A$. *Par exemple, avec* $E = \mathbb{Q}$ *et* $\mathcal{R} = \leq$*, alors* m *est mainorant de* A*, si* $m \leq x$*, pour tout* $x \in A$.
4. *Si* A *admet un* ***minorant*** *dans* E*, on dit que* A *est minoré.*
5. *On dit que* A *est* ***borné*** *si* A *est majoré et minoré.*
6. *On dit qu'un element* $v \in E$ *est* **le plus grand element** *de* A *si* $v \in A$ *et* v *est un majorant de* A *dans* E.
7. *On dit qu'un element* $u \in E$ *est* **le plus petit element** *de* A *si* $u \in A$ *et* u *est un minorant de* A *dans* E.

Exemple 1.1.29.

1. $A = \mathbb{Q}_- \cup \{x \in \mathbb{Q}_+ / x^2 \leq 4\}$ *Alors* A *est majoré par* 2 *et n'est pas minoré.* 2 *est le plus grand element.*
2. $B =]-3, 7]$ *dans* $\mathbb{Q}$ *n'a pas plus petit élément et* 7 *est le plus grand élément.*
3. *Déterminer dans* $\mathbb{Q}$ *s'ils existent les plus grand et plus petit éléments de* $C =]-3, 7] \cup]8, 11[$ *et* $D = \{-5\} \cup]-3, 7[$

Définition 1.1.30. ***Borne supérieure et Borne inférieure***

Soit $(E, \mathcal{R})$ *un ensemble* <u>*totalement ordonné*</u> *et* A *une partie de* E *non vide.*

1. *Un élement $M \in E$, est appelé borne supérieure de A dans E si M est le plus petit des majorants de A dans E (si elle existe).*

   (a) *On note* $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A,\ a\mathcal{R}M \\ \textit{Si } M'\mathcal{R}M \quad \textit{et} \quad M' \neq M \quad \exists a_o \in A/ \quad M'\mathcal{R}a_o \quad a_o \neq M'. \end{cases}$

   (b) *On pose $\mathcal{R} = \leq$ avec $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$.*

      i. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq M \\ \forall M' < M, \quad \exists a_o \in A/ \quad M' < a_o \leq M. \end{cases}$

      ii. *Si $E = \mathbb{Q}$, on a*

      $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_o/ \quad M - \varepsilon < a_o \leq M. \end{cases}$

2. *Un element $m \in E$, est appelé borne inférieure de A dans E si m est le plus grand des minorants de A dans E (si elle existe).*

   (a) *On note* $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, m\mathcal{R}a \\ \textit{Si } m\mathcal{R}m' \quad \textit{et} \quad m \neq m' \quad \exists a_o \in A/ \quad a_o\mathcal{R}m' \quad a_o \neq m'. \end{cases}$

   (b) *On pose $\mathcal{R} = \leq$, avec $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$.*

      i. $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, m \leq a \Leftrightarrow x \geq m \\ \forall m < m', \quad \exists a_o \in A/ \quad m < a_o \leq m'. \end{cases}$

      ii. *En posant $E = \mathbb{Q}$, on a*

      $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, m \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_o/ \quad m \leq a_o < m + \varepsilon. \end{cases}$

Exercices d'application

1. Dans $\mathbb{Q}^+$, si $a \geq 0$ montrer que $0 \leq a \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. Montrer que $\sqrt{13}$ n'est pas un rationnel.
3. Montrer que 13 est la borne supérieure de $Z = \{r \in \mathbb{Q}/r < 13\}$.
4. Montrer que $S = \{r \in \mathbb{Q}_+/r^2 \leq 13\}$ n'a pas de borne supérieure.

1.2 Les nombres réels : $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons revisiter les nombres réels et complexes déjà rencontrés au lycée en complétant par de nouveaux concepts et propriétés.

La construction rigoureuse des entiers naturels $\mathbb{N}$, des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, des nombres réels $\mathbb{R}$ et des nombres complexes $\mathbb{C}$ peut être déroulée si les auditeurs connaissent les notions d'algèbre de bases : relation d'équivalence, relation d'ordre, anneaux, idéal, anneau quotient et corps.

Ces différentes constructions rigoureuses sont proposées en annexe. Ainsi dans ce cours, on utilisera essentiellement des définitions axiomatiques.

1.2.1 Structures algébriques de bases : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

On va successivement parler des propriétés algébriques de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ avant d'en venir à $\mathbb{R}$.

Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...; n; n+1; ...\}$

Propriétés 1.2.1. ***Propriétés algébriques de*** $\mathbb{N}$

On a les propriétés suivantes :

1. ***(A)***
   - *La somme de deux entiers naturels $m + n$ est un entier naturel.*
   - *Le produit de deux entiers naturels $m \times n$ est un entier naturel.*

   On dit que l'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$ sont des lois de compositions internes dans $\mathbb{N}$.

2. ***(B)*** *On a :*
   - $(n + m) + t = n + (m + t)$.
   - $(n \times m) \times t = n \times (m \times t)$.

   On dit que l'addition (+) et la multiplication $(\times)$ sont des lois associatives.

3. ***(C)*** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n + 0 = 0 + n = n$ et $n.1 = 1.n = n$. On dit que 0 est élément neutre pour l'addition et que 1 est élément neutre pour la multiplication.*

4. ***(D)*** *Pour tout $n; m; t \in \mathbb{N}$: $n(m + t) = nm + nt$ et $(m + t)n = mn + tn$.*

   On dit la multiplication est distributive par rapport à l'addition á gauche et á droite.

5. ***(E)*** $n + m = m + n$ *et* $n \times m = m \times n$.

   On dit que l'addition et la multiplication sont commutatives.

Définition 1.2.2. ***Semi-anneau commutatif***

Tout ensemble vérifiant muni de deux lois vérifiant (A), (B), (C), (D) et (E) est appelé <u>*semi-anneau commutatif*</u>*.*

Remarques 1.2.3. ***Insuffisance de*** $\mathbb{N}$

L'équation $x + n = m$ *(si* $n > m$*) n'a pas de solution dans* $\mathbb{N}$*.*

Ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Z} = \{... - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

Propriétés 1.2.4. ***Propriétés algébriques de*** $\mathbb{Z}$

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ *contient* $\mathbb{N}$ *et est muni de deux lois de compositions internes qui prolongent l'addition (*$+$*) et la multiplication(*$\times$*) déjà connues dans* $\mathbb{N}$*.*

1. *Comme dans* $\mathbb{N}$*, l'addition dans* $\mathbb{Z}$ *est associative, commutative et admet* 0 *comme élément neutre.*
2. *Comme dans* $\mathbb{N}$*, la multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *est associative, commutative et admet* 1 *comme élément neutre.*
3. *Comme dans* $\mathbb{N}$*, la multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *est distributive par rapport à l'addition.*

- Ce qu'il y'a de nouveau dans $\mathbb{Z}$*, c'est la propriété suivante :*

(F) $\forall a \in \mathbb{Z}$*, il existe un élément noté* $-a$ *tel que :* $a + (-a) = (-a) + a = 0$*.*

On dit que pour l'addition dans $\mathbb{Z}$*, tout élément admet un symétrique(= opposé pour l'addition).*

Définition 1.2.5. ***Anneau commutatif***

Tout ensemble muni de deux lois vérifiant (A), (B), (C), (D), (E) et (F) est appelé <u>*anneau commutatif*</u>*. Donc, un anneau est un semi-anneau dans lequel tout élément a un symétrique pour l'addition.*

Remarques 1.2.6. $\mathbb{Z}$ *comble la lacune de* $\mathbb{N}$ *précisée ci-dessus c'est à dire que dans* $\mathbb{Z}$*, on peut résoudre l'équation* $a + x = b$ *pour* a *et* b *dans* $\mathbb{Z}$*. Il suffit de prendre* $x = b + (-a) = b - a$

Remarques 1.2.7. ***Insuffisance de*** $\mathbb{Z}$ ***:*** *Si* a *n'est pas multiple de* b*, on ne peut pas résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation* $bx = a$*.*

Ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$.

Nous avons les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Au collège, on définit les nombres rationnels comme étant des nombres qui admettent un développement périodique fini ou infini.

Propriétés 1.2.8. ***Propriétés algébriques de $\mathbb{Q}$:***

- *Comme dans $\mathbb{Z}$, l'addition dans $\mathbb{Q}$ est associative, commutative et admet 0 comme élément neutre et tout rationnel r admet un opposé noté $-r$.*
- *Comme dans $\mathbb{Z}$, la multiplication dans $\mathbb{Q}$ est associative, commutative et admet 1 comme élément neutre.*
- *Comme dans $\mathbb{Z}$, la multiplication dans $\mathbb{Q}$ est distributive par rapport à l'addition.*

- Ce qu'il ya de nouveau dans $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{Z}$, c'est la propriété suivante :

(G) *$\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, il existe un élément noter $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} appelé inverse de a (ou symétrique de a pour la loi $\times$) tel que : $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$.*

- On dit que dans $\mathbb{Q}$, tout élément non nul est inversible.

Définition 1.2.9. ***Corps commutatif***

Tout ensemble muni de deux lois vérifiant (A), (B), (C), (D), (E), (F) et (G) est appelé corps commutatif. Donc un corps est un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible(= a un symétrique pour la multiplication).

Remarques 1.2.10. *$\mathbb{Q}$ comble la lacune de $\mathbb{Z}$ précisée ci dessus c'est à dire que dans $\mathbb{Q}$ on peut résoudre l'équation $ax = b$. Il suffit de prendre $x = b\frac{1}{a}$ si $a \neq 0$.*

Définition 1.2.11. ***Corps totalement ordonné :***

On sait que la relation inférieur ou égal ($\leq$) est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{Q}$ c'est à dire :

- *$\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \leq a$ (symétrique).*
- *$\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a \leq b$ et $b \leq a \Longrightarrow a = b$ (antisymétrique).*
- *$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \leq b$ et $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$ (transitivité).*
- *$\forall a, b \in \mathbb{Q}$, soit $a \leq b$, soit $b \leq a$ (ordre totale).*

  La relation $\leq$ est compatible avec la structure de corps, c'est à dire
- *Pour l'addition : $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$, $a \leq b$ et $a' \leq b' \Longrightarrow a + a' \leq b + b'$.*
- *Pour la multiplication : $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{Q}_+$, $0 < a \leq b$ et $0 < a' \leq b' \Longrightarrow aa' \leq bb'$.*

On dit que $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné.

Tout corps muni d'une relation d'ordre totale compatible avec la structure de corps est appelé ***corps totalement ordonné****.*

Exemple 1.2.12. *On considère l'algèbre de Boole $B = \{0; 1\}$ où l'addition et la multiplication sont données par : $0 + 0 = 1 + 1 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ et $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$; $1 \times 1 = 1$.*

On vérifie facilement que $B = \{0; 1\}$ est un corps. Mais, il n'est pas totalement ordonné. En effet, si $B = \{0; 1\}$ est muni d'un ordre total $<$ compatible avec la structure de corps, alors $0 < 1$ ou $1 < 0$. Dans ce cas, supposons alors que $0 < 1$.

On a $\begin{cases} 0 < 1, \\ 0 < 1, \end{cases} \Rightarrow 0 = 0 + 0 < 1 + 1 = 0,$ *ce qui est absurde.*

Par suite B n'est pas un corps totalement ordonné .

Remarques 1.2.13. ***Insuffisance de*** $\mathbb{Q}$.

1. *Si p est un nombre premier ($p = 2; 3; 5; 7; \ldots$), alors l'équation $x^2 = p$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.*
2. *On a aussi vu sur un exemple dans la section 1.1 que $B = \{r \in \mathbb{Q}_+ / r^2 \leq p\}$ n'a pas de borne supérieure et que $B^c = \{r \in \mathbb{Q}_+ / r^2 \geq p\}$ n'a pas de borne inférieure. En faite, ces deux problèmes sont intimement liés. L'introduction du corps des réels va permettre de combler ces lacunes.*

1.2.2 Le corps des nombres réels

Weierstrass(1863) et Dedekind (1872) furent les premiers à proposer une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.14. ***(Corps complet)***

Soit K un corps totalement ordonné, on dit que K est complet si toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. (on verra avec les suites une autre interpretation du concept "complet")

Définition 1.2.15. ***(Definition axiomatique)*** *L'ensemble des nombres réels est un corps commutatif totalement ordonné, complet et contenant $\mathbb{Q}$.*

Remarques 1.2.16. .

1. *L'existence de la borne supérieure implique l'existence de la borne inférieure (voir ci-dessus).*
2. *Précédemment, on a montré que $B = \{r \in \mathbb{Q}_+ / r^2 \leq 13\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Alors que par définition de $\mathbb{R}$, B va admettre une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et cette borne supérieure est notée $\sqrt{13}$. Ainsi $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$.*
3. *On définit $\mathbb{R}$ au collège comme étant*
   - *l'ensemble des nombres rationnels qui sont les nombres qui admettent un développement fini ou périodique,*

— *et l'ensemble des nombres irrationnels qui sont les nombres qui admettent un développement illimité non périodique.*

Exemple 1.2.17. .

— *Développements finis ou périodiques.*

— $2/3 = 0,666666666666666\ldots$

— $13/7 = 1,\underline{857142}\ 857142\ldots$

— $1/2 = 0,5$

— *Développements infinis et non périodiques.*

— $\pi = 3,14213562\ldots$

— $\sqrt{2} = 1,414213623\ldots$

— $e = 2,718281828459\ldots$

Proposition 1.2.18. *Toute partie non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Preuve : Si A est minoré, alors $-A$ est majoré et alors $\inf A = -\sup(-A)$

Théorème 1.2.19. *($\mathbb{R}$ est **archimédien**).*

Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe un entier $n > 0$ tel que : $na > b$.

Preuve : Cours magistral.

□

Théorème 1.2.20. *($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe un nombre rationnel r tel que : $a < r < b$.*

Preuve : Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on doit trouver deux entiers p et $q > 0$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $a < \dfrac{p}{q} < b$

— (α) Comme $b - a > 0$ et que $\mathbb{R}$ est archimédien, il $\exists q > 0$ tel que : $q(b-a) > 1$.
Mais $q(b-a) > 1 \Longleftrightarrow qa + 1 < qb$

— (β) De même $\mathbb{R}$ est archimédien implique l'existence de k et k' tels que : $k > qa$ et $k' > -qa$ donc $k' < qa < k$.

— (γ) Soit $S = \{l \in \mathbb{Z} / -k' < qa < l \leq k\}$. Alors S est non vide car $k \in S$ et S est fini car borné dans $\mathbb{Z}$, donc S admet un plus petit élément p. Par suite $p > qa$ (car $p \in S$) et $p - 1 \leq qa$ (car $p - 1 \notin S$ par définition de p).
Ainsi, $p > qa$ et $p \leq qa + 1 < qb$ d'aprés (α). On conclut que $qa < p < qb$ ce qui implique $a < r < b$ où $r = p/q$.

□

1.2.3 Valeurs absolues

Définition 1.2.21. *Soit x un nombre réel, on appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le plus grand des réels entre x et $-x$. $|x| = \max(-x; x) = x$ (si $x \geq 0$) et $-x$ (si $x \leq 0$).*

Propriétés :

1. $\sqrt{x^2} = |x|$,
2. $x^2 = y^2 \Longleftrightarrow |x| = |y| \Longleftrightarrow x = \pm y$
3. Si $a > 0$ alors $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
5. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Preuve : (à faire)

1.2.4 Partie entière

Définition 1.2.22. *Soit x un réel, on appelle partie entière de x l'entier égale à $\sup\{n \in \mathbb{N}/n \leq x\}$. On le note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ (en anglais).*

Propriétés :

1. $E(x)$ est l'unique entier vérifiant : $E(x) \leq x < E(x) + 1$
2. $E(x)$ est l'unique entier vérifiant : $x - 1 \leq E(x) < x$.

Preuve : (facile)

1.2.5 Notations : somme et produit

Définition 1.2.23. *(α) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, ...x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\sum_{k=0}^{n} x_k$ ou $\sum_{i=0}^{n} x_i$ ou $\sum_{l=0}^{n} x_l$ la somme $x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} + x_n$*

- On dit que k, i et l sont des variables muettes.

- Autre notation : si $[0; n] = \{0; 1; 2; ...n\}$ alors $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k \in [0;n]} x_k$

(β) $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times [0; 1]$, $\forall (x_p, x_{p+1}; ...; x_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$.

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k \in [p;n]} x_k = x_p + x_{p+1} + ... + x_n$$

(γ) *Pour le produit les formules précédentes se notent :*

$\prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k\in[0;n]} x_k = x_0x_1...x_{n-1}x_n$

$\prod_{k=p}^{n} x_k = \prod_{k\in[p;n]} x_k = x_px_{p+1}...x_n.$

(δ) ***Cas particuliers***

- *La factorielle de n est donnée par :* $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times 3\times ...\times (n-1)\times n$ *et* $0! = 1$.
- *si a est une constante alors* $\sum_{i=k}^{n} a = (n-k+1)a$ *et* $\prod_{i=k}^{n} a = a^{n-k+1}$

(λ) ***Changement d'indice (de variable)***

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}\times[0;n]$ *et* $(n',p')\in\mathbb{N}\times[0;n']$ *tels que* $n-p = n'-p'$ *et* $\sigma : [p',n'] \longrightarrow [p,n]$ *une bijection alors :* $\forall (x_p, x_{p+1}; ...; x_n)\in\mathbb{R}^{n-p+1}$, *ona :*

$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{i=p'}^{n'} x_{\sigma(i)}$

Exemple 1.2.24.

- $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{i=p-3}^{n-3} x_{i+3}$
- *Pour* $l < n$ *:* $\sum_{k=l}^{n} q^k = (n-l)+1$ *(si $q = 1$) et* $q^l\frac{1-q^{n-l+1}}{1-q}$ *(si $q \neq 1$).*

Propriétés 1.2.25. *Soient* $n\in\mathbb{N}^*; \lambda\in\mathbb{R}, (x_1, ...x_n)\in\mathbb{R}^n$ *et* $(y_1, ...y_n)\in\mathbb{R}^n$. *On a :*

1. $\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$ *et* $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\lambda}$ *(pour ce dernier cas, si λ n'est pas un entier relatif, il faut prendre $x_i > 0$).*
2. $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ *et* $\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)(\prod_{i=1}^{n} y_i)$.
3. (a) *Pour* $1\leq m\leq n, \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i.$

   (b) *Si* $I = I_1\cup I_2$ *est une partition de* $I\subseteq\mathbb{N}$, *alors :*

   $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i.$

Définition 1.2.26. *Soit A une partie de $\mathbb{N}^2$ et* $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ *(que l'on peut noter* $(x_s)_{s\in A}$*), une famille de nombres indexés par les points de A.*

On note $\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ *(ou bien* $\sum_{s\in A} x_s$*) la somme des termes* $x_{i,j}$.

On note $\prod_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ *(ou bien* $\prod_{s\in A} x_s$*) le produit des termes* $x_{i,j}$.

Propriétés 1.2.27. *Si A est un rectangle, $A = [p, n] \times [p', n']$ alors :*

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} = \sum_{p\leq i\leq n; p'\leq j\leq n'} x_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}(\sum_{j=p'}^{n'} x_{i,j}) = \sum_{j=p'}^{n'}\sum_{i=p}^{n} x_{i,j} \text{ et}$$

$$\prod_{(i,j)\in A} x_{i,j} = \prod_{p\leq i\leq n; p'\leq j\leq n'} x_{i,j} = \prod_{i=p}^{n}(\prod_{j=p'}^{n'} x_{i,j}) = \prod_{j=p'}^{n'}\prod_{i=p}^{n} x_{i,j}.$$

Exemple 1.2.28. *Soit $A = [0, 1] \times [2, 5] \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

On a alors :

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{1}(\sum_{j=2}^{5} x_{i,j}) = (x_{02} + x_{03} + x_{04} + x_{05}) + (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) =$$

$$\sum_{j=2}^{5}(\sum_{i=0}^{1} x_{i,j}) = (x_{02} + x_{12}) + (x_{03} + x_{13}) + (x_{04} + x_{14}) + (x_{05} + x_{15}).$$

1.2.6 Preuve par récurence

Axiome de peano

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est défini par les cinq axiomes suivants :

— **(A)** $\mathbb{N}$ est non vide.

— **(B)** $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \bar{n}$ appelé le successeur de n.

— **(C)** Il existe un entier $\bar{0}$ qui n'est le successeur d'aucun entier

— **(D)** Si $n \neq m$ alors $\bar{n} \neq \bar{m}$.

— **(E)** Le seul sous ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient $\bar{0}$ et le successeur de ses éléments est $\mathbb{N}$.

NB : $\bar{n} = n + 1$ et $\bar{0} = 0$.

Théorème 1.2.29. *Soient $P_0, P_1, ..., P_n$ des Propositions (= énoncés vraies ou bien fausses) telles que :*

— *(a) P_0 est vraie*

— *(b) Pour tout entier n, P_n implique P_{n+1}. Alors P_n est vraie pour tout n.*

Preuve :

Soit $\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N}/P_n vraie\}$, alors $(a) \Longrightarrow 0 \in \mathbb{M}$ et $(b) \Longrightarrow$ si $n \in \mathbb{M}$ alors $n + 1 \in \mathbb{M}$. Ainsi $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ d'aprés le cinquième axiome de Peano. $\square$

Exemple 1.2.30. ***(Application)***

Montrer que : $0 + 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ par récurrence.

Preuve

Soit P_n la Proposition $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$^*P_0 \Longleftrightarrow 0 = 0$ est vraie :

**Si P_n est vraie, on a $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

alors $(1+2+...+n)+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ donc P_{n+1} est vraie. Ainsi P_n est vraie $\forall n$. $\square$

Contre Exemple :

Soit P_n : $2n - 1$ est divisible par 2 pour $n \geq 1$.

Si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie car $2(n+1) - 1 = 2n+1 = (2n-1)+2$ donc si $2n-1$ est divisible par 2 alors $2n+1$ l'est.

Mais on sait que P_n est faux pour tout n. Donc il faut faire attention à la preuve par récurrence.

Théorème 1.2.31. *Soit n_0 un entier relatif. Soient $P_{n_0}, P_{n_0+1}, ..., P_n, P_{n+1}, ...$ des propositions telles que :*

1. *P_{n_0} est vraie*
2. *Pour tout entier $n \geq n_0$, P_n implique P_{n+1}. Alors P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.*

Preuve :

-Pour $m \geq 0$, on définit $Q_m = P_{m+n_0}$ alors $Q_0 = P_{n_0}$ est vraie d'aprés (a).

-Supposons Q_m est vraie alors P_{m+n_0} est vraie donc P_{m+n_0+1} est vraie d'aprés (b) d'òu Q_{m+1} est vraie pour tout $m \geq 0$ ainsi P_n est vraie $\forall n \geq n_0$. $\square$

Exemple 1.2.32. *Soit p_n, la proposition $5n + 37 > 0$.*

Si P_n est vraie on a : $5n+37 > 0$. D'òu $5(n+1)+37 = 5n+42 = (5n+37)+5 > 0$; donc P_{n+1} est vraie. Il reste à déterminer un entier n_0 tel que P_{n_0} est vraie (le plus petit possible). Le plus petit entier n_0 tel que : $5n_0 + 37 > 0$ est $n_0 = -7$.

Exemple 1.2.33. *Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : P_n : $n! - 3^n > 0$.*

Puis montrer que P_n est vraie $\forall n \geq n_0$.

Théorème 1.2.34. *Soit n_0 un entier relatif. Soient $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ des Propositions telles que :*

1. *(a) P_{n_0} est vraie*
2. *(b) Pour tout entier $n \geq n_0$, P_{n+1} est vraie si $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n$ sont toutes vraies. Alors P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.*

Preuve :

-Pour $n \geq n_0$, soit Q_n la proposition : "$P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n$ sont toutes vraies".

- Alors Q_{n_0} ($= P_{n_0}$ est vraie) est vraie d'aprés (1).

-Supposons Q_n est vraie alors P_{n+1} est vraie d'aprés (2) donc $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont vraies équivaut à Q_{n+1} est vraie.

- Ainsi $\forall n \geq n_0, Q_n$ est vraie, d'òu P_n est vraie $\forall n \geq n_0$.

□

Exemple :

Montrer que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$

1.2.7 Racine n-ième d'un réel strictement positif

Définition 1.2.35. *(proposition)*

Soit x un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$, un entier alors il existe un unique réel $a > 0$ tel que $a^n = x$.

Ce nombre a noté par $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$, est appelé racine n-ième de x.

Preuve :

On généralise la méthode vue précédemment dans la section 1.1.

Soit $x > 0$ et $S = \{r \in \mathbb{R}_+, r^n < x\}$.

— (α) Montrons que S est non vide et majoré.

  * Si $r_0 = \dfrac{x}{1+x}$ alors $0 < r_0 < 1$ donc $r_0^n \leq r_0 < x$ d'òu $r_0 \in S$ ce qui implique $S \neq \emptyset$.

  ** Soit $r \in S$.

  - On a : $0 \leq r \leq 1 \Rightarrow r \leq 1 \leq 1 + x$.

  - De même, on a : $r \geq 1 \Rightarrow 1 \leq r^n \leq x \leq 1 + x \leq (1+x)^n \Rightarrow r^n \leq (1+x)^n$

  $\Rightarrow (r - (1+x)) \left[r^{n-1} + (1+x)r^{n-2} + \ldots + r(1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-1}\right] \leq 0$

  $\Rightarrow r \leq 1 + x$.

  Par suite, $\forall r \in S$, $r \leq 1 + x$ donc $1 + x$ est un majorant de S.

  Par suite S est non vide et majoré donc S admet une borne supérieure.

  Soit a cette borne supérieure.

— (β) Montrons que $a^n = x$ en montrant que $a^n < x$ et $a^n > x$ sont impossibles.

  (β_1) Supposons que $a^n < x$.

  Soit $0 < h < \min(1, \dfrac{x - a^n}{(1+a)^n - a^n})$

  $(a+h)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} h + C_n^2 a^{n-2} h^2 + ... + C_n^{n-1} a h^{n-1} + C_n^n h^n$.

  Donc $(a+h)^n \leq a^n + h[C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + ... + C_n^{n-1} a + C_n^m]$. (Car $h^t < h$ pour tout $t \geq 1$ si $h < 1$) ce qui implique $(a+h)^n < a^n + h[(1+a)^n - a^n]$ ou encore $(a+h)^n < a^n + (x - a^n)$ car $h \leq \dfrac{x - a^n}{(1+a)^n - a^n}$. Par suite $(a+h)^n < x$. Donc $a + h \in S$

ce qui est impossible car a est borne supérieure de S.

(β_2) Supposons que $a^n > x$.

Soit $0 \leq t \leq \min(1, a, \dfrac{a^n - x}{(1+a)^n - a^n})$.

Montrons que $a - t$ est un majorant de S en montrant que si $z \geq a - t$ alors z n'est pas dans S.

$z \geq a - t >$ équivaut à $z^n \geq (a-t)^n > 0$.

Or $(a-t)^n = a^n + (-1)^1 C_n^1 a^{n-1} t + (-1)^2 C_n^2 a^{n-2} t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a t^{n-1} + (-1)^n C_n^n t^n = a^n - t[(-1)^2 C_n^1 a^{n-1} + (-1)^3 C_n^2 a^{n-2} t + \ldots . + (-1)^n C_n^{n-1} a t^{n-2} + (-1)^{n+1} C_n^n t^{n-1}]$.

Donc $(a-t)^n \geq a^n - t[C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a + C_n^n]$. Ce qui implique $(a-t)^n \geq a^n - t[(1+a)^n - a^n]$ ou encore $(a-t)^n \geq a^n - (a^n - x)$ car $t \leq \dfrac{a^n - x}{(1+a)^n - a^n}$. Par suite $(a-t)^n \geq x$. Donc $z \geq x$ ainsi z n'appartient pas à S. D'où $a - t$ est un majorant de S ; ce qui est impossible car a est borne supérieure de S.

□

1.2.8 Extensions de $\mathbb{R}$ à $\bar{\mathbb{R}}$

Définition 1.2.36. *Par définition* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *est appelé la droite numérique achevée.*

On définit aussi les propriétés suivantes :

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$; $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

$a + (+\infty) = +\infty$; $a + (-\infty) = -\infty$

$a - (+\infty) = -\infty$; $a - (-\infty) = +\infty$

Si $a > 0$ *alors* $a \times (+\infty) = +\infty$; $a \times (-\infty) = -\infty$

Si $a < 0$ *alors* $a \times (+\infty) = -\infty$; $a \times (-\infty) = +\infty$.

$\bar{\mathbb{R}}$ avec ses nouvelles opérations n'est pas un corps.

En revanche l'ordre totale de $\mathbb{R}$ peut être étendu à $\bar{\mathbb{R}}$; en posant $-\infty < a < +\infty$ pour tout réel a.

Les notions de plus grand et plus petit élément et de borne supérieure et inférieure s'appliquent en particulier aux parties de $\bar{\mathbb{R}}$.

Remarquons que $+\infty$ est un majorant de toute partie non vide de $\mathbb{R}$; et que c'est le seul si cette partie n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$\sup(X) = +\infty$ si X est non majoré dans $\mathbb{R}$; et de même $\inf(X) = -\infty$ si X est non minoré dans $\mathbb{R}$.

Dans $\bar{\mathbb{R}}$ la propriété de borne supérieure s'énonce ainsi :

"Toute partie non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$"

Pour le cas de l'ensemble vide on a : $\sup(\emptyset) = -\infty$ et $\inf(\emptyset) = +\infty$.

1.3 Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$

Les propriétés de $\mathbb{C}$ sont déjà rencontrées au lycée et aucune propriété nouvelle n'est abordée ici sauf la notion d'extension de $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{C}}$. Par contre, certaines propriétés topologiques de $\mathbb{C}$ seront vues au chapitre 2 et les suites sur les nombres complexes sont abordées au chapitre 3.

Ici, nous allons revisiter la construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}^2$. Mais, il existe d'autres méthodes comme celles basées sur les matrices carrées ou les polynômes.

Définition 1.3.1. *(et proposition)*

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b); a, b \in \mathbb{R}\}$ *muni de l'addition et de la multiplication suivante :*

$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

$(a,b)(a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')$

est un corps commutatif (à vérifier) dont l'élément neutre de l'addition est $(0,0)$ *et l'élément pour la multiplication est* $(1,0)$*, appelé le corps des complexes noté :* $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a,0); a \in \mathbb{R}\}$ *est un corps contenu dans* $\mathbb{R}^2$ *qui a les mêmes propriétés que* $\mathbb{R}$ *; ce qui permet d'identifier* $(a,0)$ *à* a*. Par définition de la multiplication, on a* $(0,1)^2 = -(1,0)$*. On convient alors de noter* $i = (0,1)$ *et d'identifier* $(1,0)$ *à* 1 *donc* $(0,1)^2 = -(1,0) \Longleftrightarrow i^2 = -1$.

Dans ce cas $z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + ib$ *:*

Ainsi $\mathbb{C} = \{z = a + ib; i^2 = -1; a; b \in \mathbb{R}\}$ *avec* $z + z' = (a+a') + i(b+b')$ *et* $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

Pour l'interprétation géométrique des nombres complexes, on fait correspondre à tout nombre complexe $z = a + ib$, le point M de coordonnées (a,b) du plan muni d'un repère orthonormé.

NB : Important On montre qu'il n'existe de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ prolongeant celui de $\mathbb{R}$. Ainsi dans $\mathbb{C}$, on ne peut parler de borne supérieure ou inférieure,

ni de $z < z'$ où $z' > z$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.2. *(Extension de* $\mathbb{C}$ *à* $\bar{\mathbb{C}}$ *) On définit* $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *avec les opérations* $z + \infty = \infty$, $z \times \infty = \infty$, $|\infty| = \infty$ *et* $|z| < \infty$ *pour tout* z.