UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023 - 2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Série 5 : ESPACES VECTORIELS
L1TDSI / MCS - CI

Exercice 1.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois : $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. E est-il un espace vectoriel
2. On désigne par E l'ensemble des réels strictement positifs. On définit dans E les lois + et . par :
$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = xy \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha.x = x^\alpha$$
Montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle : $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$, $\forall (x, y) \in E^2$ et $(x', y') \in E^2$ et la multiplication externe par les complexes définie par : $(a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx)$.
Monrer que $(E \times E, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 3. Les sous-ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + y - 3z = 0\}$; $E = \mathbb{R}^3$
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x + 2y = 3z + 7t\}$; $E = \mathbb{R}^4$
3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ \int_0^1 f(t)dt = 0\}$; $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) / \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$; $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$
5. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ (x - y)^2 = 2x + y\}$; $E = \mathbb{R}^4$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - 3y + 9z = 2023\}$; $E = \mathbb{R}^4$
7. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ f \ injective\}$; $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E et A, B deux parties de E.

1. Montrer $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$
2. Montrer que $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$
3. Montrer que si $A \subset B$, alors $Lin(A) \subset Lin(B)$
4. Montrer que $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$
5. Comparer que $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$

Exercice 5. Montrer que les parties suivantes sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Donner une base et la dimension de chacun des ces sous-espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - 3y + 2z = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y = z + 3t\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 3t = 0 \ \ et \ \ x - 2z + t = 0\}$

Exercice 6.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$S_1 = \{u_1, u_2, u_3\} \text{ où } u_1 = (1, 1, -1),\ u_2 = (2, 1, 3) \text{ et } u_3 = (0, -1, 5)$$
$$S_2 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ où } v_1 = (2, 3, 2),\ v_2 = (1, 1, 0) \text{ et } v_3 = (1, 2, 1)$$

   S_1 et S_2 engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?

2. Montrer que les ensembles suivants constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Puis donner les composantes de $V = (6, 2, 3)$ dans ces 2 bases
   (a) $B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$
   (b) $B_2 = \{(-1, -1, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$

Exercice 7. On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \ paire\}$$
$$I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \ impaire\}$$

Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8. Considérons les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$
$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = 0 \ \ et \ \ x_1 - x_2 = 0\}$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soient F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (4, 5, 9, -1)$ et G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, -4, 4, 2)$.

1. $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $S_2 = \{w_1, w_2\}$ peuvent-ils être complétés en des bases de $\mathbb{R}^4$?
2. Donner une base de F et une base de G.
3. Déterminer une base $F + G$ et une base de $F \cap G$.