UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

LICENCE 1 TRANSMISSION DE DONNÉES ET SÉCURITÉ DE L'INFORMATION

TD DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Exercice 1 :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln(x) + x$.
   (a) Écrire la formule de Taylor-Lagrange au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre 1, 2 et 3.
   (b) Représenter sur un même graphique les trois approximations polynomiales trouvées à la question précédente.
   (c) Placer le graphe f par rapport aux graphes précédents.
2. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0$$

Exercice 2: Donner le développement limité à l'ordre indiqué, au voisinage de x_0, des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos x + 3e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ à l'ordre 3 en $+\infty$.
3. $f(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 4 en $x_0 = 0$.
4. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 4 en $x_0 = 0$.
5. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ à l'ordre 3 en $x_0 = 1$.

Exercice 3: En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$

Exercice 4: Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.