

Отчёт по лабораторной работе №6

Математическое моделирование

Задача об эпидемии. Вариант №8

Выполнил: Маляров Семён Сергеевич,
НПИбд-01-21, 1032209505

Содержание

1	Цель работы.....	1
2	Теоретическое введение.....	1
3	Задачи.....	Error! Bookmark not defined.
4	Задание	2
5	Выполнение лабораторной работы.....	3
5.1	Построение математической модели. Решение с помощью программ	3
5.1.1	Julia.....	3
5.1.2	Результаты работы кода на Julia.....	5
5.2	OpenModelica.....	5
5.2.1	Результаты работы кода на OpenModelica.....	6
6	Анализ полученных результатов. Сравнение языков.	7
7	Вывод	7
8	Список литературы. Библиография.....	8

1 Цель работы

Решить задачу об эпидемии.

2 Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа — это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$dS/dt =$$

$$\begin{cases} -aI, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(t) < I^* \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$dI/dt = \begin{cases} -aI - bI, & \text{если } I(t) > I^* \\ -bI, & \text{если } I(t) < I^* \end{cases} \quad (2)$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$dR/dt = bI \quad (3)$$

Постоянные пропорциональности a , b – это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени

$t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0)=0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$

соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:

$$I(0) \leq I^* \text{ и } I(0) > I^*$$

3 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N=14\,000$) в момент начала эпидемии ($t=0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0)=114$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0)=14$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0)=N-I(0)-R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) если $I(0) \leq I^*$

2) если $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Построение математической модели. Решение с помощью программ

4.1.1 Julia

Код программы для $I(0) \leq I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 14000
I0 = 114
R0 = 14
S0 = N - I0 - R0
a = 0.4
b = 0.32

function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=600, legend = :topright)
plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи" ,color=:green)
plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи" ,color=:red)
plot!(plt, T, R, label = "Особи с иммунитетом" ,color=:blue)
savefig(plt,"lab6_1_jl.png")
```

Код программы для $I(0) > I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

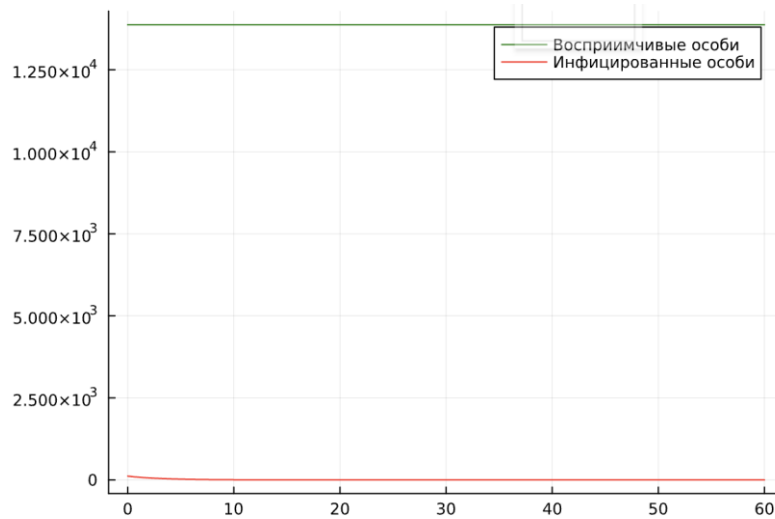
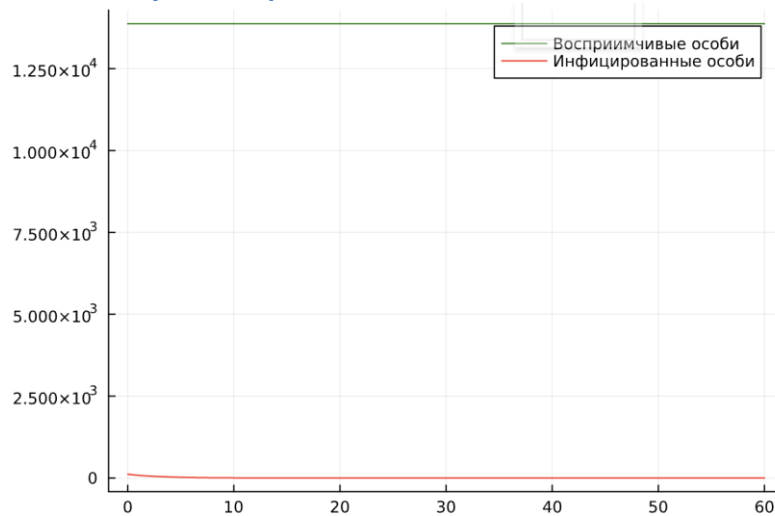
N = 14000
I0 = 114
R0 = 14
S0 = N - I0 - R0
a = 0.4
b = 0.1

function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -a*u[1]
    du[2] = a*u[1] - b*u[2]
    du[3] = b*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 120.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=600, legend = :topright)
plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи" ,color=:green)
plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи" ,color=:red)
plot!(plt, T, R, label = "Особи с иммунитетом" ,color=:blue)
savefig(plt,"lab6_2_j1.png")
```

4.1.2 Результаты работы кода на Julia



4.2 OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab6_1_mod
Real N = 14000;
Real I;
Real R;
Real S;
Real a = 0.4;
Real b = 0.34;
initial equation
I = 114;
R = 14;
S = N - I - R;
equation
```

```

der(S) = 0;
der(I) = -b * I;
der(R) = b*I;

end lab6_1_mod;

```

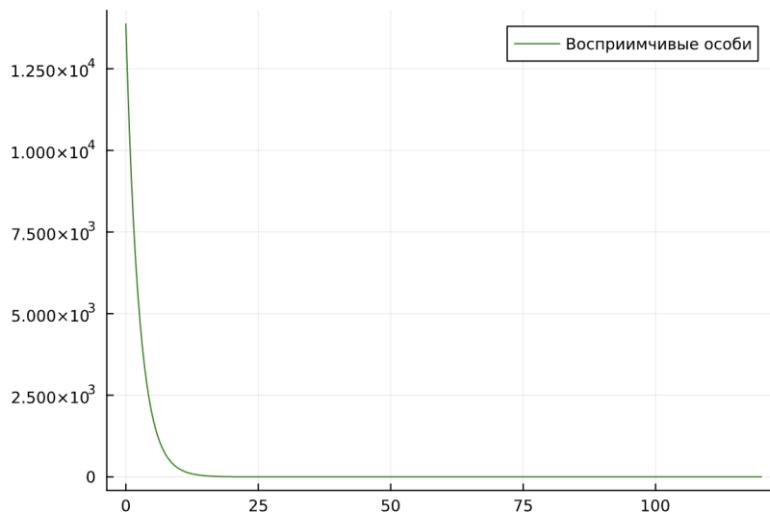
Код программы для стационарного состояния:

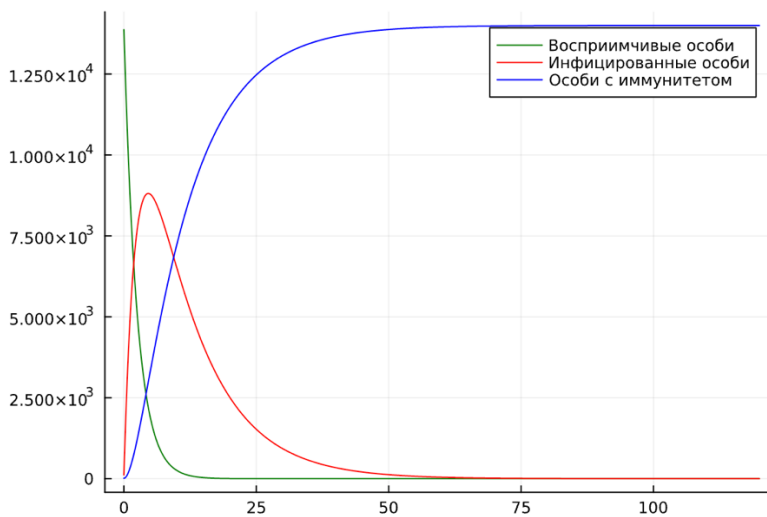
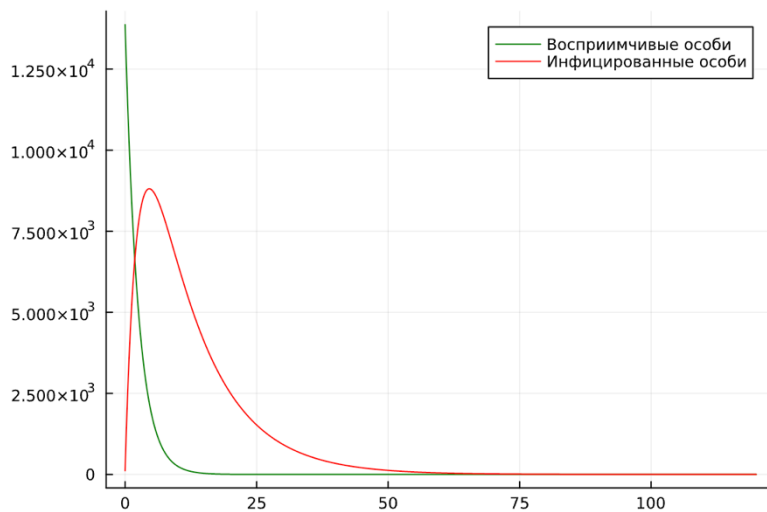
```

model lab6_2_mod
Real N = 14000;
Real I;
Real R;
Real S;
Real a = 0.4;
Real b = 0.1;
initial equation
I = 114;
R = 14;
S = N - I - R;
equation
der(S) = -a*S;
der(I) = a*S - b*I;
der(R) = b*I;
end lab6_2_mod;

```

4.2.1 Результаты работы кода на OpenModelica





5 Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В ходе выполнения лабораторной работы были построены графики изменения числа особей в каждой из трех групп при заданных начальных условиях на языках Julia и с помощью ПО Open Modelica. Результаты графиков совпадают (не учитывая разности в масштабах).

6 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была решена задача об эпидемии и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

7 Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrstu.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra.pdf