

# 指纹奇异点精确定位新方法

张祖洸<sup>1</sup>, 杨永明<sup>1</sup>, 韩凤玲<sup>2</sup>, 林坤明<sup>1</sup>

ZHANG Zulong<sup>1</sup>, YANG Yongming<sup>1</sup>, HAN Fengling<sup>2</sup>, LIN Kunming<sup>1</sup>

1.重庆大学 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆 400044

2.澳大利亚皇家墨尔本理工大学 计算机科学与信息学院, 澳大利亚 墨尔本 3001

1.State Key Lab of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, China

2.School of Computer Science and Information Technology, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne 3001, Australia

ZHANG Zulong, YANG Yongming, HAN Fengling, et al. New method of singular points accurate location for fingerprint. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(32):203-207.

**Abstract:** An effective new algorithm is proposed for improving the stability and reliability of Singular Points (SPs) location. It preprocesses the gray level fingerprint images, calculates the orientation field, and divides the orientation field into several homogeneous zones and selects candidate small areas. Candidate singular points are chosen out by Poincare Index Algorithm (PIA) and spurious singular points are further removed. The real singular points are precisely located. FVC2004 is used for algorithm testing and the results show that singular points location of the method is more precise, and the False Detecting Ratio (FDR) and the Missed Detecting Ratio (MDR) decrease 5.86% and 6.8% respectively, at the same time, the speed of the algorithm is 3.71~9.38 times faster than PIA, which basically satisfies the requirement of SPs accurate detection and location in fingerprint images.

**Key words:** fingerprint image; orientation field; singular points; homogeneous-zones-divide

**摘 要:** 针对指纹图像奇异点快速精确定位的难题, 提出一种简单实用算法。对指纹图像预处理, 计算方向场并归域化, 接着选出奇异点候选区, 并以 Poincare Index (PI) 算法从中提取奇异点候选点集。对候选奇异点集去伪并精确定位。采用 FVC2004 指纹库进行实验验证, 结果与 PI 算法对比, 该算法鲁棒性更好, 定位更精确, 漏检率和误检率分别降低 5.86%、6.8%, 平均速度提高了 3.71~9.38 倍, 基本满足高精度高速度的指纹奇异点定位要求。

**关键词:** 指纹图像; 方向场; 奇异点; 归域化

**文献标识码:** A **中图分类号:** TP391.41 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1104-0569

## 1 引言

在当今信息科技中, 指纹识别系统的应用越来越广泛。在指纹识别系统发展过程中, 预配准问题一直是其最大瓶颈之一, 当前解决预配准问题主要依据指纹奇异点的精确定位。奇异点不但是预配准中一个重要的参考点, 而且它在指纹分类中也发挥着重大的作用。奇异点分为中心点和三角点两种类型, Henry<sup>[1]</sup>给出了两种类型奇异点的具体描述: 中心点为

最内部弯曲纹线的最高点或最低点, 三角点为三条走向不同的纹线汇合而成的三角区域, 如图 1 所示。

指纹奇异点的检测定位主要存在两个难题: 精度问题和可靠性问题。迄今为止, 国内外已有大量的相关算法被提出, 主要分为以下几类<sup>[2]</sup>: (1) 基于 Poincare Index (PI) 的方法<sup>[3-6]</sup>, 如 Bazen 和 Gerez<sup>[4]</sup>通过面积分代替曲线积分实现对 PI 算法的改进。(2) 基于方向图局部特征的方法<sup>[7-8]</sup>, 如 Park 等<sup>[7]</sup>使用一些预

**基金项目:** 国家重点实验室访问学者基金 (No.2007DA10512709403); 中央高校基本科研业务费资助 (No.CDJXS11150014)。

**作者简介:** 张祖洸 (1986—), 男, 研究生, 主要研究方向: 信息安全处理、生物加密; 杨永明 (1958—), 女, 博士, 教授, 博士生导师。

E-mail: along@cqu.edu.cn

**收稿日期:** 2011-05-03 **修回日期:** 2011-09-23 **文章编号:** 1002-8331(2012)32-0203-05

该规则对方向图中相邻两领域元素检测得到候选区域。(3)基于方向图分割的方法,如Cappelli等<sup>[9]</sup>通过反复聚类 and 动态网格集合对方向图进行分割,从中获得奇异点。(4)基于方向图全局模型的方法<sup>[5,10-11]</sup>,如Wang等<sup>[10]</sup>通过FOMFE变换获得特征矩阵,以特征矩阵实现对奇异点检测定位及类型的判断。

目前,指纹奇异点定位的主流方法是PI算法。该算法以Poincare索引值检测判断奇异点及其类型。根据PI算法原理,Poincare索引值为0的点是普通点,为 $-1/2$ 的是三角点,为 $1/2$ 的是环型中心点,为1的则是漩涡型中心点。此算法思路简单明了,对质量较好的指纹图像效果较好,但对噪声污染较为严重的图像漏检率和误检率偏高。此外,PI算法要计算每点的Poincare索引值,计算复杂且效率不高。因此,本文提出一种全新的改进算法:首先将图像进行预处理,其次,对预处理后的指纹图像求出方向场并归域化,然后结合逼近思想选出奇异点候选区域,最后依据Poincare索引值对奇异点候选区域检测去伪并以均值法实现最终定位。

## 2 图像预处理

为提高算法速度并降低噪声对奇异点检测的影响,先对指灰度纹图像进行预处理。预处理过程主要包括图像的缩小和图像增强两大部分。

图像的缩小通过行和列均间隔 $r$ 读取图像实现,这样图像缩小为原来的 $1/r^2$ 左右。此操作相当于在求图像方向场时将图像划分为 $r \times r$ 的块,即将指纹图像分为互不重叠大小为 $2 \times 2$ 的块( $r$ 为2)并以中心点像素的方向作为所在块的方向。本文实验中, $r$ 值分别取值为2和3。此外,指纹灰度图像的缩小将造成图像中的一些细节点丢失,但这一点对指纹奇异点的检测和定位的影响可以忽略。

本文使用Verifinger SDK 5.0<sup>[12]</sup>实现对指纹图像的增强处理,此软件性能稳定效率较高,为指纹奇异点快速精确定位奠定良好基础。缩小后的增强图像如图2所示。

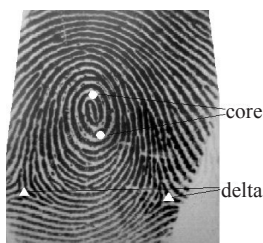


图1 core点和delta点



图2 预处理后的指纹图

## 3 方向场的计算

方向场代表了指纹图像的本质特性,经过预处理后的指纹图像易得到精确的方向场,本文算法基于梯度求方向场<sup>[13]</sup>。具体步骤如下:

(1)计算指纹图像每一点 $X$ 、 $Y$ 方向的梯度 $\partial x(i, j)$ 和 $\partial y(i, j)$ ,梯度计算使用Sobel梯度算子。接着,使用下列公式(1)、(2)、(3)计算每一点的方向,式(1)、(2)中 $W$ 常取8。

$$V_x(i, j) = \sum_{u=i-W}^{i+W} \sum_{v=j-W}^{j+W} (2\partial_x(u, v)\partial_y(u, v)) \quad (1)$$

$$V_y(i, j) = \sum_{u=i-W}^{i+W} \sum_{v=j-W}^{j+W} (\partial_x^2(u, v) - \partial_y^2(u, v)) \quad (2)$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{V_y(i, j)}{V_x(i, j)}\right) \quad (3)$$

(2)由步骤(1)得出的 $q(x, y)$ 是局部脊线方向的最小平方估计,需要通过一个低通滤波器进行修正,具体的修正方案如下:首先由式(4)、(5)把方向场转化到一个连续的向量场中,再由式(6)、(7)对其滤波,对滤波后的向量场可用式(8)得出方向场。

$$\phi_x(i, j) = \cos(2\theta(i, j)) \quad (4)$$

$$\phi_y(i, j) = \sin(2\theta(i, j)) \quad (5)$$

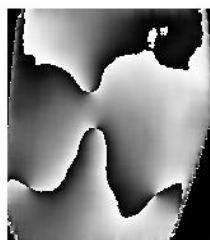
$$\phi'_x(x, y) = \sum_{u=-W_\phi/2}^{W_\phi/2} \sum_{v=-W_\phi/2}^{W_\phi/2} (h(u, v)\phi_x(i-uw, j-vw)) \quad (6)$$

$$\phi'_y(x, y) = \sum_{u=-W_\phi/2}^{W_\phi/2} \sum_{v=-W_\phi/2}^{W_\phi/2} (h(u, v)\phi_y(i-uw, j-vw)) \quad (7)$$

$$O(i, j) = \frac{1}{2} \text{atan2}\left(\frac{\phi'_y(i, j)}{\phi'_x(i, j)}\right) \quad (8)$$

$$O'(i, j) = O(i, j) + \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

式(4)、(5)中 $\phi_x(i, j)$ 、 $\phi_y(i, j)$ 是向量场的 $X$ 、 $Y$ 分量;式(6)、(7)中 $h(u, v)$ 是一个2维低通滤波器,积分为1,  $W_\phi \times W_\phi$ 是滤波器的大小。本文采用的是 $5 \times 5$ 的2维高斯低通滤波器。对滤波前后的方向场图像进行对比,如图3所示。



(a)滤波前图像



(b)滤波后图像

图3 图1中图像方向场滤波前后对比

(3)由式(8)所得的方向场在 $-\pi/4$ 和 $\pi/4$ 之间,

通过公式(9)将其转化到  $(0, \pi)$  之间以得到最终方向场。

#### 4 奇异点检测方法

在具体叙述本节方法之前,首先给出一组相关定义:

**定义1**(同质区域<sup>[14]</sup>) 将指纹图像中点  $(x, y)$  处的方向记为  $O(x, y)$ , 则同质区域  $\Omega(\partial, \beta)$  即为所有满足  $\partial \leq O(x, y) < \beta (0 \leq \partial, \beta \leq \pi)$  点的集合。

**定义2**(归域化) 将指纹图像方向场归化为若干个同质区域的过程。

本文将方向场归域化为4个同质区域,即  $\Omega_{(0, \pi/4)}$ 、 $\Omega_{(\pi/4, \pi/2)}$ 、 $\Omega_{(\pi/2, 3\pi/2)}$  和  $\Omega_{(3\pi/2, \pi)}$ , 如图4所示。图中有4个特殊点,也即是4个全部同质区域交汇点。这些特殊点意味着周围区域方向变化十分强烈,这与奇异点周围方向变化强烈这一理论相符合,事实上,这4个特殊点即是要检测定位的奇异点,接着将根据这一特性定位SPs候选区域。



图4 归域化的指纹图像方向场

##### 4.1 候选区域与候选奇异点的定位

根据归域化后奇异点的特性进行候选区域的定位,再对候选区域中的每个像素点以Poincare索引值进行候选奇异点的检测。具体的步骤如下:

(1) 将指纹图像分成互不重叠大小为  $m \times n$  的块。根据归域化后奇异点邻域特性,对所有满足特性要求的块返回其首像素坐标  $(i, j)$ 。本文实验中,  $m, n$  均取20。

(2) 对于满足要求的块分为更小的子块重复步骤(1),以此逐层逼近缩小奇异点候选区域的范围,提高算法的速度。本文实验使用的子块大小是  $10 \times 10$ 。

(3) 计算奇异点候选区域内每一点的Poincare索引值。为了提高定位的准确性,选取两条封闭曲线分别计算Poincare索引值,如图5所示。按公式(10)计算给定点  $(i, j)$  在封闭曲线  $D_1 D_2 D_3 D_4 \cdots D_{12} D_1$  上的Poincare索引值  $PD$ 。

$$PD(i, j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{12} |D_k - D_{(k+1) \bmod 12}| \quad (10)$$

式中  $D_k$  为所选封闭曲线中第  $k$  点的方向值。在图5中  $k$  的值分别为12和8。

	$D_{12}$	$D_{11}$	$D_{10}$	
$D_1$	$d_1$	$d_8$	$d_7$	$D_9$
$D_2$	$d_2$	$(i, j)$	$d_6$	$D_8$
$D_3$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$D_7$
	$D_4$	$D_3$	$D_6$	

图5 计算Poincare索引值所选闭合曲线示意图

类似地,可以计算给定点  $(i, j)$  在闭合曲线  $d_1 d_2 d_3 \cdots d_8 d_1$  上的Poincare索引值  $Pd$ 。根据PI算法原理,  $PD$  和  $Pd$  同时为0.5时,给定点为奇异点。为降低漏检率,通过设定一个阈值  $Th$  先筛选候选奇异点。根据经验,本文实验将  $Th$  设为0.18,通过如下条件选出候选奇异点集,并记为  $S_{\text{presp}}$ :

$$S_{\text{presp}} = \{(i, j) | |PD - 0.5| < Th \ \&\& \ |Pd - 0.5| < Th\}$$

##### 4.2 奇异点类型的检测与精确定位

在  $S_{\text{presp}}$  确定之后,需要进一步去除伪奇异点。为了进一步提高奇异点定位的准确性,在去除伪奇异点过程中,将封闭曲线扩大为  $9 \times 9$  的方格,分别计算Poincare索引值,并以此作为奇异点类型划分的依据。具体步骤如下:

(1) 计算集合  $S_{\text{presp}}$  中每一点的Poincare索引值。计算方法与本文3.1节的步骤(3)相似,即将图5扩大为  $9 \times 9$  的方格。按公式(11)、(12)、(13)分别计算出每点最外层两条闭合曲线的Poincare索引值  $PI_1(i, j)$  和  $PI_2(i, j)$ 。

$$PI(i, j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\varphi} \Delta(k) \quad (11)$$

其中:

$$\Delta(k) = \begin{cases} \delta(k), & |\delta(k)| < \frac{\pi}{2} \\ \pi + \delta(k), & \delta(k) \leq -\frac{\pi}{2} \\ \pi - \delta(k), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

$$\delta(k) = O(\varphi_x((i+1) \bmod \varphi), \varphi_y((i+1) \bmod \varphi)) - O(\varphi_x(i), \varphi_y(i)) \quad (13)$$

式(13)中  $(\varphi_x(i), \varphi_y(i))$  是以给定点  $(i, j)$  为中心的具有  $N$  个像素的封闭曲线上第  $i$  个点的  $x$  和  $y$  坐标。

(2) 根据集合  $S_{\text{presp}}$  中的每一点的  $PI_1(i, j)$  和  $PI_2(i, j)$  进行奇异点精确定位和类型判断。若两个Poincare索引值  $PI_1(i, j)$  和  $PI_2(i, j)$  同为  $-0.5$ , 此像素点则为三角点;若同为0.5或者同为1,此像素点则为中心点,否则为伪奇异点。由此,得到三角点和中心点两坐标集合如下:

$$S_{\text{core}} = \{(i, j) | PI_1(i, j) = \frac{1}{2} \ \&\& \ PI_2(i, j) = \frac{1}{2}\}$$

$$S_{\text{delta}} = \{(i, j) | PI_1(i, j) = -\frac{1}{2} \ \&\& \ PI_2(i, j) = -\frac{1}{2}\}$$

$S_{\text{core}}$  和  $S_{\text{delta}}$  两集合中均为一组奇异点的精确坐



标,其中每组坐标点又可以分为0到2个单元(图像可能存在多个奇异点,如图1),每个单元内所有符合PI算法的点需要整合为一点,以实现精确定位,降低误检率。

(3)对 $S_{core}$ 和 $S_{delta}$ 两集合中奇异点坐标进行自动单元划分,划分依据是自定义的奇异点邻域的大小,也就是将所有落入奇异点邻域内的点归属于此奇异点。本文实验中采用的是 $17\times 17$ 的邻域,对划分好的单元采用均值法进行此奇异点的最终定位,但此时的定位是缩小图中的定位,应该还原到原图中。

5 实验结果

衡量指纹奇异点检测定位的主要标准是定位的精度以及漏检率(MDR)和误检率(FDR)。从精度方面讲,本算法最终定位的奇异点为 $2\times 2$ 或 $3\times 3$ 的块,性能比较优异。选取FVC2004 DB2\_B、DB3\_B、DB4\_B数据库中的240幅图像对误检率和漏检率进行检验,表1给出了测试结果(表1未包含预处理所用时间,据统计,预处理平均用时DB2、DB3、DB4分别为0.058 0 s、0.146 4 s、0.080 7 s)。此外,本文采用先增强图像后检测奇异点的方法,具有很好的鲁棒性。从图6的前两幅图像中也可以看出,本算法对噪声污染严重的图像也有很好的效果。

表1 本文算法在FVC2004数据库中测试结果

数据库	缩小 $r$	平均 用时/s	漏检 个数	误检 个数	总个数	漏检率 /(%)	误检率 /(%)
DB2	3	0.173 9	9	6	106	8.49	5.66
DB3	2	0.439 3	7	5	120	5.83	4.17
DB4	3	0.242 0	13	8	161	8.07	4.97
总	/	/	29	19	387	7.49	4.91



图6 奇异点检测结果

将本算法与其他算法进行对比,表2给出了对比

结果。由表2可知,与文献[14]相比,本文算法在速度和漏检率方面略显不足,但在误检率、定位精度和算法的鲁棒性方面有很大提高。与PI算法相比,算法速度是PI算法的3.71~9.38倍,漏检率降低了5.86%,误检率降低了6.8%,定位精度提高了6~8倍。

表2 本文算法与其他算法的对比

算法	用时/s	漏检率 /(%)	误检率 /(%)	定位精度 (矩形窗)
PI算法	2.174 9	13.35	11.71	$17\times 17$
文献[14]	0.153 2	3.74	13.52	$21\times 21$
本文算法	0.380 1	7.49	4.91	$2\times 2$ 或 $3\times 3$

图6给出了本文算法对FVC2004 DB2中的几幅图像的检测结果,其中实心圆表示core点,实心矩形表示delta点。

6 结束语

本文提出一种基于归域化的指纹奇异点快速精确定位算法。该算法通过指纹图像预处理后较准确地求出图像方向场,在对图像方向场归域化之后以逐层逼近的手段实现奇异点候选区的定位,然后以经典PI算法从中筛选候选奇异点并去除伪奇异点,最后以均值法实现奇异点的最终定位。通过不同类型指纹图像的验证,结果表明本算法不但能快速检测定位奇异点,而且与PI算法相比,误检率、漏检率分别降低了6.8%、5.86%,定位精度和算法的鲁棒性方面有很大提高,能基本满足指纹奇异点高精度高速度方面的要求。但求取方向场花费时间增加,这是下一步改进工作的主要方向。

参考文献:

[1] Henry E.Classification and uses of finger prints[M].London: Routledge,1900.

[2] Maltoni D, Maio D, Jain A K, et al.Handbook of fingerprint recognition[M].2nd ed.London: Springer-Verlag, 2009.

[3] Zhou Jie, Chen Fanglin, Gu Jinwei.A novel algorithm for detecting singular points from fingerprint images[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 2009, 31(7): 1239-1250.

[4] Bazen A M, Gerez S H.Systematic methods for the computation of the directional fields and singular points of fingerprints[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 2002, 24(7): 905-919.

[5] Jin Changlong, Kim Hakil.Pixel-level singular point detection from multi-scale Gaussian filtered orientation field[J].Pattern Recognition, 2010, 43(11): 3879-3890.

[6] 谭台哲, 宁新宝, 尹义龙, 等.一种指纹图像奇异点检测的

- 方法[J].软件学报,2003,14(6):1082-1088.
- [7] Park C H, Lee J J, Smith M J T, et al. Singular point detection by shape analysis of directional fields in fingerprints[J]. Pattern Recognition, 2006, 39(5): 839-855.
- [8] 张俊军, 练秋生. 基于方向一致性的指纹中心点检测算法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(5): 58-60.
- [9] Cappelli R, Lumini A, Maio D, et al. Fingerprint classification by directional image partitioning[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1999, 21(5): 402-421.
- [10] Wang Y, Hu J, Phillips D. A fingerprint orientation model based on 2D Fourier expansion (FOMFE) and its application to singular-point detection and fingerprint indexing[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 2007, 29(4): 573-585.
- [11] Fan Lingling, Wang Shuguang, Wang Hongfa, et al. Singular points detection based on zero-pole model in fingerprint images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 2008, 30(6): 929-940.
- [12] VERIFIER. Neurotehnologija Ltd[EB/OL]. <http://www.neurotehnologija.com>.
- [13] Hong L, Wan Y, Jain A K. Fingerprint image enhancement: algorithm and performance evaluation[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(8): 777-789.
- [14] 梅园, 孙怀江, 夏德深. 一种有效的指纹奇异点提取方法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(28): 1-3.

(上接32页)

- [7] Nieto J J, Rodriguez-Lpez R, Georgioud D N. Fuzzy differential systems under generalized metric space approach[J]. Dynamic Systems and Applications, 2008, 17: 1-24.
- [8] 王磊, 郭嗣琮. 线性生成的完全模糊线性微分系统[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(2): 341-348.
- [9] 王磊, 郭嗣琮. 求解一类模糊线性微分系统的结构元方法[J]. 模糊系统与数学, 2012(3).
- [10] 郭嗣琮, 苏志雄, 王磊. 模糊分析计算中的结构元方法[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(4): 68-75.
- [11] He J H. Homotopy perturbation technique[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 178(3): 257-262.
- [12] He J H. New interpretation of homotopy perturbation method[J]. International Journal of Modern Physics B, 2006, 20(18): 2561-2568.

(上接51页)

- [6] Jing Xing-Jian, Tan Da-Long, Wang Yue-Chao. Behavior dynamics of collision-avoidance in motion planning of mobile robots[C]//2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2004, 2: 1624-1629.
- [7] Jing Xing-Jian. Behavior dynamics based motion planning of mobile robots in uncertain dynamic environments[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2005, 53: 99-123.
- [8] Kuwata Y, Wolf M T, Zarghitzky D, et al. Safe maritime navigation with COLREGS using velocity obstacles[C]//2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2011: 4728-4734.
- [9] 毛宇峰, 庞永杰, 李晔, 等. 速度矢量坐标系下水下机器人动态避障方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2010, 31(2): 159-164.
- [10] Belkhouche F. Reactive path planning in a dynamic environment[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(4): 902-911.
- [11] 朱齐丹, 仲训昱, 张智. 基于速度变化空间的移动机器人动态避碰规划[J]. 机器人, 2009, 31(6): 539-547.
- [12] van den Berg J, Lin M, Manocha D. Reciprocal velocity obstacles for real-time multi-agent navigation[C]//2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2008: 1928-1935.

(上接59页)

由式(8)得:

$$r(x, y) = [y^3(1-x) + y^2(11x^3 - 17x^2 + 5x) + y(10x^3 - 15x^2 + 3x) + (4x^3 - 6x^2 + x)] / (2y^2 - 2y + 1)$$

容易检验上式有理函数是满足插值条件的。

## 参考文献:

- [1] 王仁宏, 朱功勤. 有理函数逼近及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 117-183.
- [2] 苏家铎, 黄有度. 切触有理插值的一个新算法[J]. 高等学校计算数学学报, 1987(2): 170-176.
- [3] Salzer H E. Note on osculatory rational interpolation[J]. Math Comput, 1962, 16: 486-491.
- [4] Wuytack L. On the osculatory rational interpolation problem[J]. Math Comput, 1975, 29: 837-843.
- [5] Floater M S, Hormann K. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation[J]. Numerische Mathematik, 2007, 107: 315-331.
- [6] 朱功勤, 郑林. 矩形网格上的有理插值公式[J]. 自然科学进展, 2009, 19(5): 520-525.
- [7] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 13-30.
- [8] 王仁宏, 梁学章. 多元函数逼近[M]. 北京: 科学出版, 1988: 30-80.