 **2020年武汉理工大学大学生数学建模竞赛**

**题 目：**

**摘 要：**

**关键词：**

目录

[一、 问题重述 3](#_Toc43475641)

[1.1问题背景 3](#_Toc43475642)

[1.2问题描述 3](#_Toc43475643)

[二、 问题分析 3](#_Toc43475644)

[三、 模型假设 3](#_Toc43475645)

[四、 符号说明 4](#_Toc43475646)

[五、 模型建立求解 4](#_Toc43475647)

[5.1 问题一的模型 4](#_Toc43475648)

[5.1.1 模型的建立 5](#_Toc43475649)

[5.1.2 模型求解 6](#_Toc43475650)

[5.1.3 结论 9](#_Toc43475651)

[5.2 问题二的模型 9](#_Toc43475652)

[5.2.1 模型的建立 9](#_Toc43475653)

[5.2.2 模型求解 10](#_Toc43475654)

[5.2.3 结论 12](#_Toc43475655)

[5.3 问题三的模型 12](#_Toc43475656)

[5.3.1 模型的建立 13](#_Toc43475657)

[5.3.2 模型求解 14](#_Toc43475658)

[5.3.3结论 14](#_Toc43475659)

[六、 结果分析 14](#_Toc43475660)

[七、 模型评价 14](#_Toc43475661)

[7.1 模型优点 14](#_Toc43475662)

[7.2 模型缺点 14](#_Toc43475663)

[7.3 模型改进 14](#_Toc43475664)

[参考文献 14](#_Toc43475665)

[附录 14](#_Toc43475666)

# 问题重述

## 1.1问题背景

该问题是食品的配送问题，具体描述种中提到了配送的地点，数量，以及费用详情和工作时间约束，具体描述为19个不同地区的销售点和1个配送中心，配送中心根据需求将来规划最优路径使得以最高效率来实现调度和生产，每台运输车车每日工作 4小时，运输车重载运费2元/吨公里，且假定街道方向均平行于坐标轴，任意两站点间都可以通过一次拐弯到达。那么选取怎样的运输方式以实现成本最小化是公司最为关注的。本文根据车辆的承载量、车型、运输时间、运输费用等实际条件来建立数学模型来选取最优调度方案。

## 1.2问题描述

本文模型主要解决以下问题：

1.在运输车载重为100t,平均速度为40公里/小时，每个销售点需要用20分钟的时间下货，空载费用0.6元/公里的条件下，它送完所有食品并回到仓库，最少需要多少时间？

2.在运输车载重为6t，平均速度为50公里／小时，每个销售点需要用5分钟的时间下货，空载费用0.4元/公里的条件下；要使它们送完所有食品并回到仓库，运输车应如何调度使总体调度效率最高？

3.在有两种车型分别为载重量为4吨、6吨两种运输车，空载费用分别为0.2、0.4元/公里，平均速度为50公里／小时，每个销售点需要用5分钟的时间下货的条件下，如何安排车辆数和调度方案？

# 问题分析

针对问题一，通过分析我们可以清楚的发现，在该题中，仅有一辆配送车而配送路线点任意两点都是互通可达的，且配送车的容量远远大于所有的需求之和，因此第一问是一个典型的TSP问题，因其车辆移动的时候只能是通过横竖的方式来移动，所以我们可以将这个问题中各个点的距离抽象出来成空间中曼哈顿距离，然后建立出每个点的正确距离，然后再来利用蚁群算法对该问题进行迭代和运算，最终得到迭代稳定的结果并画出迭代稳定的结果图用于验证和计算。

针对问题二，通过分析我们可以了解到，问题一和问题二之间最大的差别是，问题一中只有一辆大车，需要配送所有的配送点，而问题二中在汽车配送的数量上没有进行限制，但是配送的车辆的容量减小了，从而使得我们需要考虑配送过程中的费用和时间，以及车辆容量利用率的CVRP问题最终得出一个最佳的方案。

针对问题三，第三问是在第二问的基础上的一种多车型单车场配送问题的优化，根据题意我们发现，第三问就是在第二问的基础上增加了一种新的车型，所以说第二问是第三问的简化形式，因此我们可以在第二问的基础上对算法进行优化利用动态规划的思想对路径进行迭代和运算，从而得出将部分解空间用新车型进行替换和优化，从而得到最终的结果多车优化方案。

# 模型假设

结合本题的实际情况，为确保模型求解的准确性和合理性，排除一些因素的干扰，提出以下假设：

1. 每辆车的载重不会影响速度。
2. 运输车在行驶过程中不考虑红灯、堵车等因素，其速度始终保持不变。
3. 不考虑运输车加速、制动的速度变化及时间影响。
4. 该食品公司可以提供足够多的车辆。
5. 不考虑每辆车派出去所产生的人工费用（驾驶费）以及装卸货等成本。

# 符号说明

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 意义 |
| () | 配送点i的坐标 |
|  | 地区i和地区j之间的曼哈顿距离 |
|  | 地区i的需求量 |
|  | 蚂蚁的数量 |
|  | 地区的总数量 |
|  | 地区i到地区j的路径 |
|  | 边上的能见度 |
|  | t时刻下在边的信息素。 |
|  | 边的信息素增量 |
|  | 在一次迭代中，第只蚂蚁在边的留下的信息素 |
|  | 在第t时刻第k只蚂蚁从城市i转移到j城市的概率 |
|  | 蚂蚁k的城市禁忌表 |
|  | 信息素重要程度因子 |
|  | 期望启发因子 |
|  | 信息素的蒸发系数 |
| Q | 信息素释放总量 |
|  | 表示i到j的路径 |
|  | 表示配送点的集合 |
|  | 表示赋权图中边的集合 |
|  | 最小费用 |
|  | 最短路径 |
|  | 客户i的产品配送由车辆k来完成 |
|  | 配送效率 |
|  | 第m车型的最大配送运载量 |
|  | 第m种车的数量 |
|  | m类型的第k辆车经过路径i,j |
|  | 客户i的产品配送由m车型的第k辆车来完成 |

# 模型建立求解

## 5.1 问题一的模型

针对问题一的题目要求，我们可以看到，该问题中确定了大型运输车的数量，载重，平均车速，而街道方向均为平行于坐标轴的方向，而且满足任意站点都是互相通达的，那么该问题则可以视为一个TSP问题通过蚁群算法来进行建模求解。

### 5.1.1 模型的建立

在问题一中，由于平均速度已知，而题目要求解的是需要通过最少的时间来完成这个问题，那么其实就可以转化为求出最短的运输路径，同时我们还可以了解到的是这个问题中街道是沿着平行于坐标轴的方向，那么该图中，任意两点之间的距离则需要通过曼哈顿距离表示:

同时，在我们看到汽车的载重量是100吨，而经过计算，因此这一辆汽车是完全满足送货要求的，且任意送货点之间是具有互通性的。

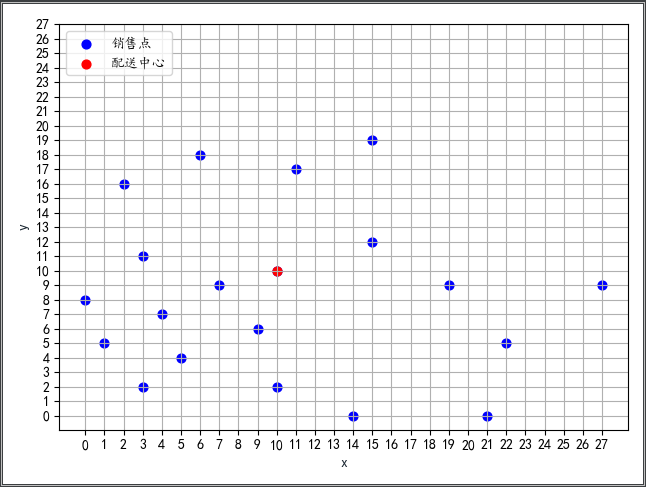


图1.1销售点和配送中心分布图

通过曼哈顿距离计算得到了任意两点之间的距离之后，下面我们将利用蚁群算法对上述问题进行解析。

为不失一般性，这里设置蚂蚁的数量为m，各点的数量为n并设置表示为边上的能见度，在这边主要定义为的倒数，定义为t时刻下在边的信息素。

在一次迭代中，边的信息素增量，表示在一次迭代中，第k只蚂蚁在边的留下的信息素，表示在第t时刻第k只蚂蚁从城市i转移到j城市的概率。

下面是需要设置的一些超参数，表示信息启发因子表示信息的相对重要程度，表示期望启发因子，表示信息素的蒸发系数，用禁忌表表示蚂蚁k在经过地区i后，就将该地区划入到自己的禁忌表中从而使得下一次不能选择这个城市。

根据蚁群算法的常规假设，我们可以建立如下建模计算过程：

1. 首先初始化模型参数，将m只蚂蚁放到n个点上，同时将该点加入蚂蚁的禁忌表中，并讲各个曼哈顿距离对应的边信息素设置为同一常数。
2. 每只蚂蚁通过各边的信息素和能见度独立选择下一个地区，并将转移成功的地区存入到禁忌表了，其转移概率公式为
3. 当所有城市都加入了禁忌表则构成了一次迭代可行解
4. 当完成一次迭代以后，我们利用下列信息素的更新规则进行更新。

对于信息素增量的求解，我们采用蚁周系统系统，从而更加快速的得到全局最优解。

得到全局最优路径以后然后再进行费用计算，得到最终的费用结果。

### 5.1.2 模型求解

针对问题一模型求解时主要时分为一下几个基本环节，主要是初始化参数，构建解空间，更新信息素，迭代返回，获得稳定结果。

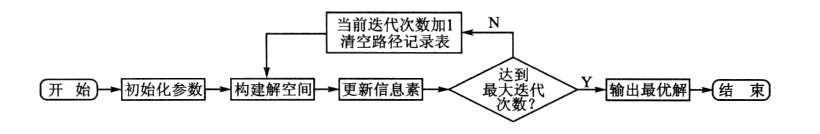


图1.2蚁群算法求解流程

1. 初始化参数

我们在计算之初,需要对相关的参数进行初始化，如蚁群规模(蚂蚁数量)m、信息素重要程度因子、启发函数重要程度因子、信息素挥发因子ρ、信息素释放总量Q、最大迭代次数NC\_max进行相关设置

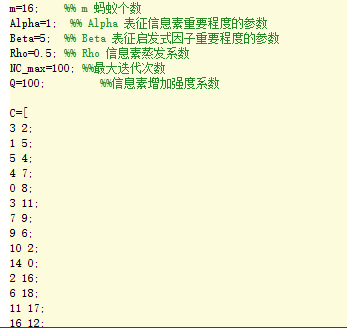


图1.3蚁群算法参数设定

1. 构建解空间

将各个蚂蚁随机地置于不同出发点,对每个蚂蚁k(k= 1,2,.,m),利用上述转移方程进行迭代和计算其下一个待访问的城市,直到所有蚂蚁访问完所有的城市，从而获得一个可行解的路径长度。

1. 更新信息素

更新信息素主要是通过上述的更新迭代规则方式来进行计算和迭代计算各个蚂蚁经过的路径长度L,(k=1,2,.. ,m),记录当前迭代次数中的最优解(最短路径)。同时,根据对各个城市连接路径上的信息素浓度进行更新。

1. 结果输出

最终我们通过在跌打100次后得到了稳定的输出结果

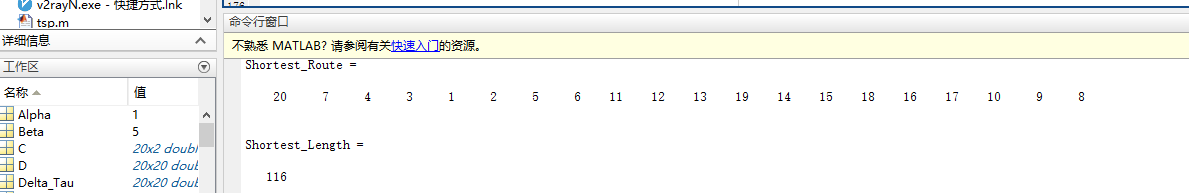


图1.4 matlab蚁群算法计算结果

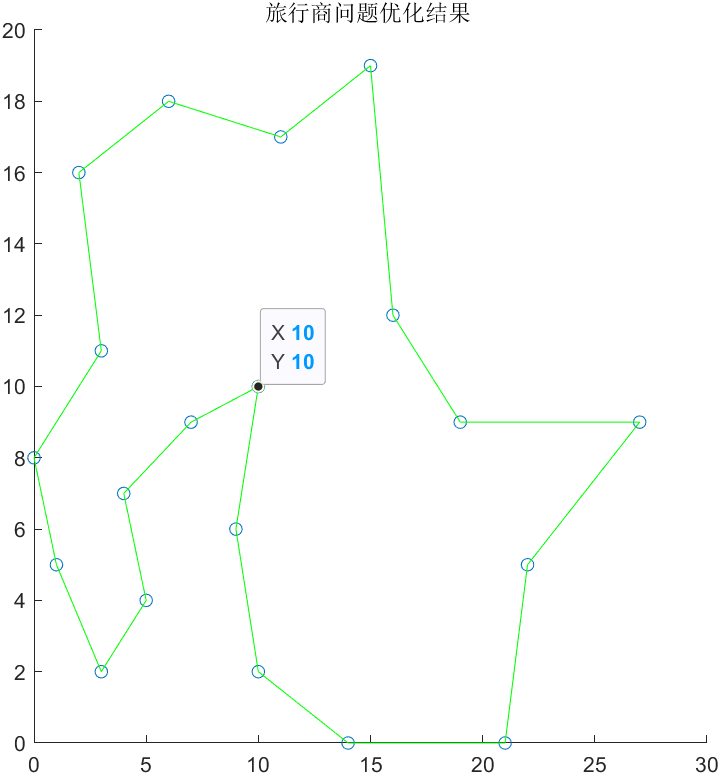


图1.5优化路线图

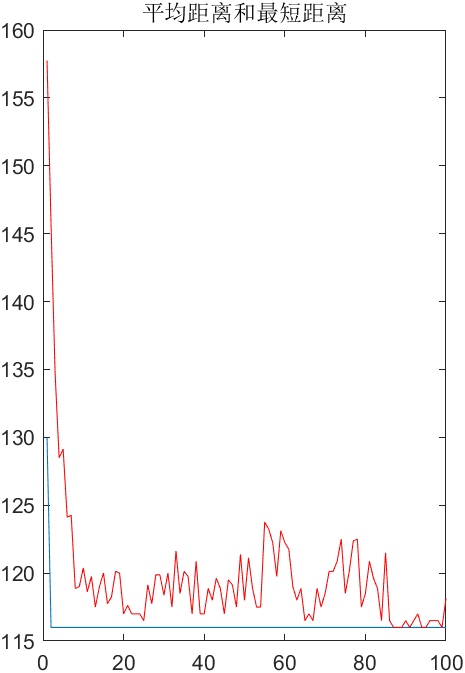


图1.6迭代过程的平均距离和最短距离变化

### 5.1.3 结论

通过上述蚁群算法的迭代过程计算，我们可以知道，该运输路线图基本为

20->7->4->3->1->2->5->6->11->12->13->19->14->15->18->16->17->10->9->8->20,其运输距离为116km，同时运算距离解决，通过运算得到了其运输费用约为3598，运输时间为8.65小时。

## 5.2 问题二的模型

在问题二中，站点数量一定且有不同的货物需求，配送中心向站点提供货物且保证满足客户需求，与第一问有所不同的是载重量有明显限制，由一个同类型车队负责运输货物，组织适当的行车路线，达到运输车总体调度最高的目的，是经典的车辆路径问题(VRP)，可以将其转换为TSP问题，通过约束时间以及每个站点只由一辆车配送，综合考虑车的数量以及车辆承载利用率，再利用蚂蚁算法求解最小费用，以此得到总体调度最优的方案

### 5.2.1 模型的建立

对问题二中的站点重新编号，假设原编号记为,修正后的编号为,即配送中心的编号为0，站点编号为1,2,…,19，均以ｉ来表示。G(V,E)为全联通赋权图， {0}∪ 表示所有节点的集合，0表示配送中心， = {1,2,…,19}表示站点集合; 表示边集合,表示从站点i到站点j的距离,表示配送中心可用车辆集合，为同类型车，第i个站点的需求量（i=1,2,…,19）,M表示费用，T表示时间，承载利用率。

VRP的数学模型为

目标函数：

有关所求费用公式如下所示：

初始时： 每次循环后:带入上式

目标函数约束条件：

（1）式表示表示配送车辆载重约束，配送车辆所服务的客户需求不大于车辆载重约束；

（2）式表示每个站点只能由一辆车配送完成；

（3）（4）式表示变量与之间满足的关系，即保证客户被配送车辆服务时，一定存在与其相连的路径；

（5）式表示未避免出现与配送中心相分离的线路，需要支路消去约束条件；

（6）式表示n辆车都是由配送中心0出发；

（7）每辆车运作时间不超过4h；

（8）（9）式表示与的取值范围。

我们还可以再充分考虑车辆承载利用率，定义如下：

由于调度效率与时间和费用都有关，因此，我们定义调度效率的公式如下所示：

其中，表示一个相当大的一个数，通过在目标函数中引入参数M，能够保证算法在求解车辆路径问题时以车辆数为第一优化目标，以车辆旅行费用作为第二优化目标，也就是一个具有较少车辆数的解比一个具有较大车辆数但是较小车辆旅行距离的解好。约束条件表示每个顾客点被一辆车辆服务。

我们认为，调度效率首要考虑的就是时间，因此时间在调度效率中为首要考虑因素，根据最短时间对应的状态再去求所得费用。

### 模型求解

显然，由建立的模型可知，该题是一个明显的VRP。考虑到实际情况中存在生鲜配送等需要明显考虑时间因素大于费用因素的情况以及车辆速度不变的情况下，我们仍然只需要将该问题转化为TSP问题求出最短路径，然后根据蚁群算法求出对应路径的最短时间即可。由于车辆数目并不确定，且模型中有很多约束条件需要满足，我们考虑将原有的TSP需要求解遍历每个销售点构成的大的哈密顿通路，转化成一个具有多个哈密顿通路的哈密顿图，而因此哈密顿通路的数量即为运输车辆的数量。

本题转化后的TSP问题不同于传统的用蚁群算法求解的TSP。传统用蚁群算法求解的TSP需要在不同的地点上随机放置，然后使得蚂蚁能够在迭代过程中通过信息素找到最优路径。然而，本题本质上依然是一个VRP，并且有很多TSP中没有的约束条件，所以我们借鉴了一些求解VRP的蚁群算法的特点来对传统里求TSP蚁群算法来进行改进，我们的蚁群算法实现流程如下：

1. 蚁群参数状态初始化。包括但不限于最大迭代次数、蚂蚁数量、信息素重要程度、启发式因子重要程度、信息蒸发系数、信息素增强系数等参数。
2. 确定每次迭代里蚂蚁下一步可以前往的地点集合。
3. 在这些地点中，根据如下的概率公式选择下一个地点：
4. 然后根据下一个地点的条件（如需求量、是否已经被遍历等）确定是否能够满足对应的约束条件，不能满足回到起点，补充载重。
5. 状态更新。
6. 在所有蚂蚁走出的路径上，根据蚂蚁释放的信息素，随着迭代次数增加，不断更新其路径上的信息素。
7. 进行下一次迭代。

最终求得的哈密顿图结果如图所示：

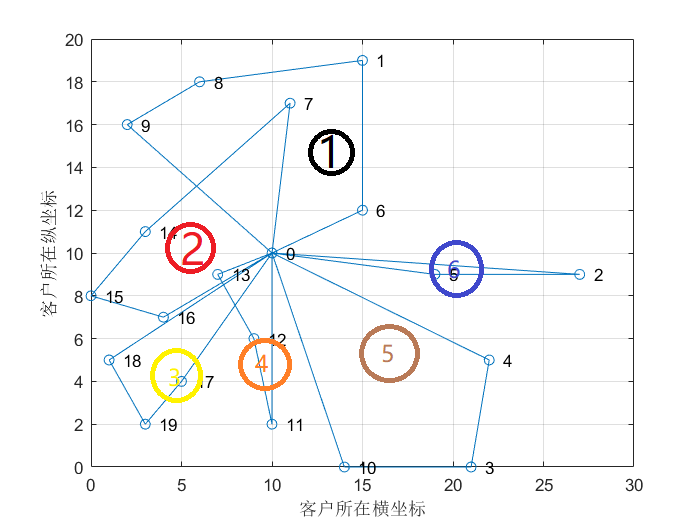


图2.1 配送路线在哈密顿下的路线图

根据图中的标识可以得知，图中共有6个哈密顿通路，即可以安排6辆6吨车运输来跑出最短路径长度。与此同时，可以得到蚁群算法的迭代结果如图所示：

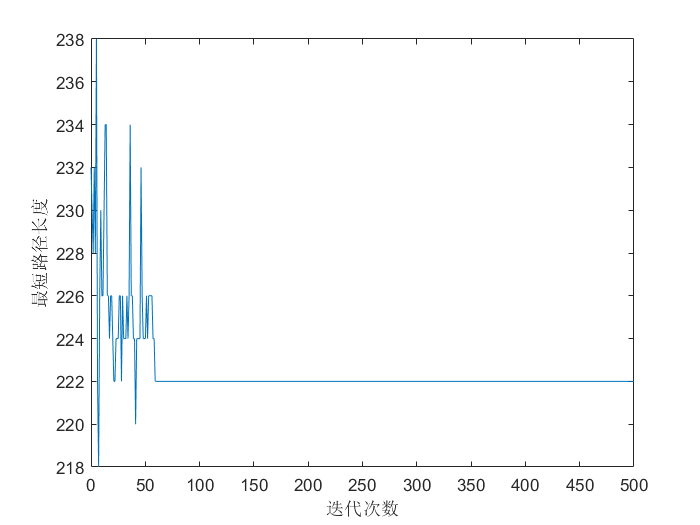


图2.2 蚁群算法迭代结果

可以看到，在500次迭代后，路径长度的结果趋于稳定，即km，对应的时间根据速度和时间的公式可得约为1.39s，根据前面所建立的数学模型，我们可以得到最小费用元。

### 5.2.3 结论

根据前面有关调度效率的公式，我们可以得知，在当时间达到最小时，调度效率就得到最高。

为了得到相对较低费用，我们设想每辆6吨运输车在走一个环路时，最后回到仓库为空载，相对应的，车辆在从仓库出发时，只需要携带满足对应路径的需求量的载重即可。

与此对应的调度方案如下表格所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 车辆编号 | 载重 | 路线 |
| 1 | 5.9 | 1->14->13->12->1 |
| 2 | 5.8 | 1->7->2->9->10->1 |
| 3 | 6 | 1->18->20->19->1 |
| 4 | 4.85 | 1->17->16->15->8->1 |
| 5 | 5.8 | 1->11->4->5->1 |
| 6 | 2.8 | 1->3->6->1 |

由上面的表格我们可以得知，我们的车辆承载利用率为

注意：这里的路线编号是倒过来的，即原来的编号-20=

## 5.3 问题三的模型

第三问与第二问相比，最大的区别在于第三问中有两种不同承载量的车，分别为可以载重6t和4t的车，是一种多车型多约束多目标得路径规划问题，是对单车型运输问题的一种扩展。因此我们在第二问的基础上增加车型的变量，将第二问的模型进一步延伸，通过

### 5.3.1 模型的建立

定义载重4t的车的车型编号为 1, 载重4t的车的车型编号为2, 以m(m=1,2) 来表示, 各车型的载重量为 ,各各车型的数量分别为, 以来表示。定义变量如下：

VRP的数学模型为

目标函数：

初始时： 每次循环后:带入上式

目标函数约束条件：

(1)式表示表示配送车辆载重约束，配送车辆所服务的客户需求不大于车辆载重约束；

(2)式表示每个站点只能由一辆车配送完成；

(3)(4)式表示变量与之间满足的关系，即保证客户被配送车辆服务时，一定存在与其相连的路径；

(5）式表示未避免出现与配送中心相分离的线路，需要支路消去约束条件；

(6)式表示辆车都是由配送中心0出发；

(7）每辆车的运作时间不超过4h；

(8)(9)式表示与的取值范围。

### 5.3.2 模型求解

问题三实际上是一个在问题二的基础上基于车辆的解空间的动态规划问题。而且，两种车之间只有空载费用不同，其余条件均相同。实际上，问题二就是问题三的一种极端情况，即问题二是全部用6吨车去运输，4吨车数量为0，而问题三是可能要同时使用4吨运输车和6吨运输车。那么，再考虑另一种极端情况，即全部用4吨运输车去满足，可以直接采用问题二的模型和算法求解。此时，应该会有比问题二时间花费更少的状态产生。那么，问题三的最优解实际上就应该为这两种极端状态之间中间状态的一种，并且这种状态能够较好的平衡时间和费用的关系。因而，很容易就能想到的是，可以通过一定数量的4吨车来走原有每辆6吨车的路线达到最终费用和时间都变小，即每次取一定数量的6吨车，用4吨车去遍历这些6吨车的路线，然后保存每次费用和时间，一旦费用和时间变小，就更新状态。

算法流程如下：

1. 提取和计算运算所需数据。
2. 随机抽取两个6吨车的路线。
3. 通过蚁群算法用4吨车去跑提取出来的6吨车的路线。
4. 将现有状态和原有状态比较，如果现有状态效率更高，则更新，否则进入下一次迭代。

最终，可得4吨车和6吨车的路径图如图所示：

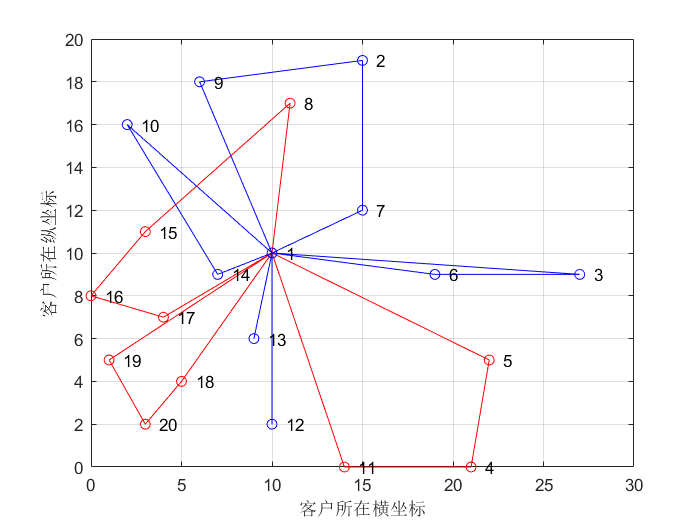


图3.1 两种车的路径图(蓝:4吨运输车,红:6吨运输车)

### 5.3.3结论

经过计算可得，需要5辆4吨运输车辆和3辆6吨运输车辆，对应的时间为，最小费用为,路程为224

其分配的路线表如图所示：（路线编号为倒过来的编号，即现在的编号=21-原来的编号，例：1->20,2->19…，20->1，以此类推）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 运载类型 | 编号 | 路线总需求量 | 路线 |
| 4 | 1 | 2.7 | 1->14->10->1 |
| 4 | 2 | 1.5 | 1->13->1 |
| 4 | 3 | 3.2 | 1->7->2->1 |
| 4 | 4 | 2.2 | 1->9->12->1 |
| 4 | 5 | 2.35 | 1->3->6->1 |
| 6 | 1 | 6 | 1->18->20->19->1 |
| 6 | 2 | 4.85 | 1->17->16->15->8->1 |
| 6 | 3 | 5.8 | 1->11->4->5->1 |

由上面的表格我们可以得知，我们的车辆承载利用率为

# 结果分析

### 6．1模型一

模型一通过蚁群算法求解出的路径完全符合题目要求。由于运载车的载重大于各个销售地点的需求量之和，所以只需要根据蚁群算法的框架最终使得运载车不返回挨个遍历各个销售点即可得到最优路径。从图中我们可以很清晰的看出这个最优路径是符合要求的。

### 6.2模型二和模型三

1.由于模型三是建立在模型二基础上的，所以我们这里将模型二和模型三合在一起分析。我们从题目中分析可以知道，调度效率与费用和时间有关，而费用与路程和载重有关。载重可以通过车辆经过的路径来进行调控，因此费用主要与路径有关。与此同时，由于运输车速度不变，时间也与路径相关，综合起来看，调度效率仅与路径直接相关。因此，模型二就可以将该VRP转化成TSP。但是因为问题二本质上其实还是一个VRP，并且有许多约束条件，需要对模型一采用的蚁群算法进行改进。改进后的蚁群算法获取的结果是有着多个哈密顿圈的哈密顿图，而当多个车辆同时沿着不同的哈密顿圈进行遍历时，花费时间最少，由此可以确定运输车辆的数目。最终可得我们的车辆承载利用率

2.从题目中可以直接看出，题目二是题目三的一种极端情况，即4吨运输车数量为0，而题目三是题目二的一种一般情况——加入了另一种车辆运输。因此，我们将题目三转化为一种基于题目二的解的一种动态规划问题。最优解的状态必然在4吨运输车数量为0或6吨运输车数量为0两种极端状态中间的某一个状态。因此，我们用4吨车逐步取代题目二中所得结果的6吨车，并在约束条件下使得时间和费用再度变小，从而获得更加优化的方案。

3.在求解问题三时，我们通过逐步抽取不同情况下两辆6吨车的路线来作为4吨车的部分解空间。在这个过程中，我们总是尽可能多的让4吨车遍历更多的点，达到局部最优解，进而组成全局最优解。

# 模型评价

## 7.1 模型优点

## 7.2 模型缺点

## 7.3 模型改进

# 参考文献

1. 。。。

# 附录