CHƯƠNG 4. XÁC SUẤT CƠ BẢN

ThS. Bùi Thùy Trang

Ngày 6 tháng 9 năm 2021

Khái niệm

- Có 2 loại hiện tượng trong đời sống: **hiện tượng tất định (deterministic phenomena)** và **hiện tượng ngẫu nhiên (random phenomena)**.
- **Phép thử (experiment)** là một thí nghiệm hoặc một hành động nào đó giúp ta quan sát một hiện tượng.
- **Phép thử ngẫu nhiên (random experiment)** là một thí nghiệm hay một quan sát mà ta không dự đoán trước kết quả nào sẽ xảy ra.

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của một phép thử ngẫu nhiên được gọi là **không gian mẫu (sample space)** của phép thử ngẫu nhiên đó và được ký hiệu là Ω.

Ví dụ 1:

Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên sau:

a) Tung một đồng tiền xu cân đối, đồng chất 1 lần.

b) Tung một con xúc xắc 1 lần.

c) Tung một con xúc xắc 2 lần.

d) Xét điểm số của một sinh viên khi thi kết thúc môn Xác suất thống kê (lấy điểm nguyên) ở trường Đại học Tôn Đức Thắng.

- Nếu A là một tập con của không gian mẫu Ω thì A được gọi là một **biến cố/sự kiện (event)**.
- Biến cố $A = \{\omega\}$, với $\omega \in \Omega$, chỉ gồm một kết quả còn được gọi là **biến cố sơ cấp (elementary event)**.

- Khi thực hiện một phép thử ngẫu nhiên, nếu ta nhận được một kết quả thuộc về biến cố A thì ta nói A **xảy ra** trong phép thử đó.

Các biến cố có thể được chia thành ba loại sau:

- **Biến cố chắc chắn (sure event)** là biến cố bao giờ cũng xảy ra khi thực hiện một phép thử.
- **Biến cố không thể (impossible event)** là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử.
- **Biến cố ngẫu nhiên (random event)** là biến cố mà sự xảy ra của nó không thể dự đoán trước được khi thực hiện phép thử.

Ví dụ 2:

Từ một nhóm người gồm 6 nam và 4 nữ, ta chọn ngẫu nhiên 5 người. Gọi các biến cố:

A: " chọn được ít nhất một nam",

B: " chọn được 5 nữ",

C: " chọn được 3 nam".

Biến cố nào là biến cố chắc chắn? biến cố không thể? biến cố ngẫu nhiên?

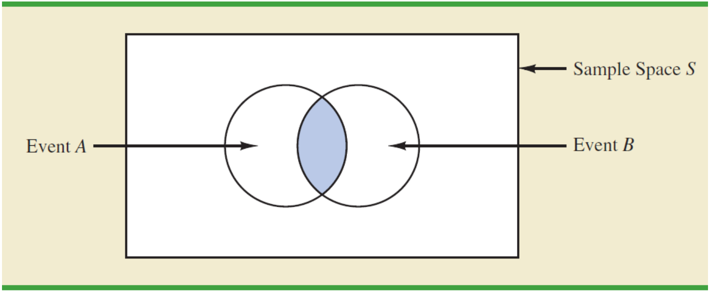
Cho hai biến cố A và B.

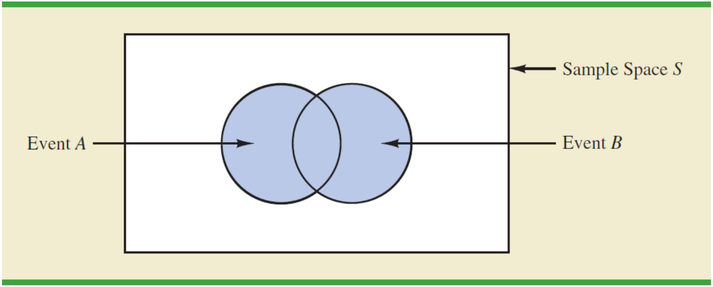
- **Biến cố giao** của A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$ hay AB, được xác định bởi:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \,\text{và}\, \omega \in B\}.$$

- **Biến cố hội** của A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$ hay $A + B$, được xác định bởi:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \,\text{hay}\, \omega \in B\}.$$


Sample Space S
Event A
Event B

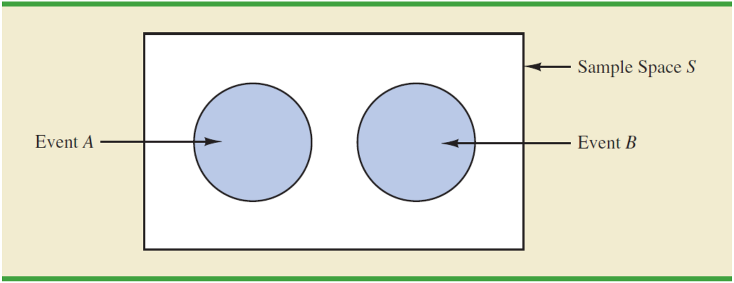

Sample Space S
Event A
Event B

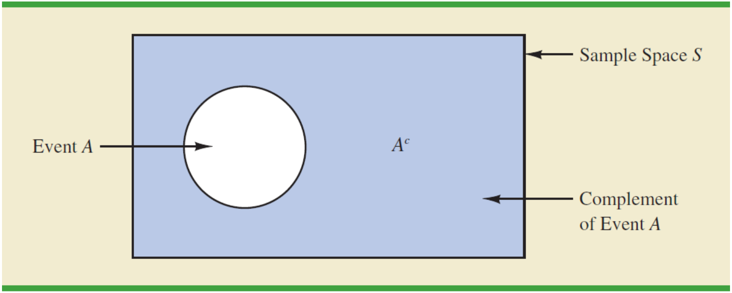
- A **kéo theo** B nếu A xảy ra thì B xảy ra.
- A, B là **các biến cố tương đương (equivalent events)** nếu A kéo theo B và B kéo theo A.
- A, B là **các biến cố xung khắc (mutually exclusive events)** nếu $A \cap B = \emptyset$, tức là chúng không đồng thời xảy ra.

- A, B là **các biến cố đối lập (complementary events)** nếu A xảy ra thì B không xảy ra và nếu A không xảy ra thì B xảy ra. Nếu A, B là các biến cố đối lập thì ta viết:

$$B = \overline{A}, \quad A = \overline{B}.$$

4.1. Không gian mẫu, biến cố





Ví dụ 3:

Một hộp kín đựng 10 bi, gồm 6 bi đỏ và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 bi. Gọi các biến cố:

A: " Lấy được ít nhất 1 bi đỏ",

B: " Lấy được 3 bi đỏ",

C: " Lấy được tối đa 2 bi đen".

Xác định mối quan hệ (kéo theo, tương đương) của:

a) A và B.

b) A và C.

Ví dụ 4:

Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp học. Gọi các biến cố:

A: " Chọn được sinh viên giỏi Toán",

B: " Chọn được sinh viên giỏi tiếng Anh".

Hãy mô tả các biến cố sau bằng ký hiệu:

A_1: " Chọn được sinh viên giỏi Toán hay tiếng Anh hay giỏi Toán và tiếng Anh",

A_2: " Chọn được sinh viên giỏi cả Toán và tiếng Anh",

A_3: " Chọn được sinh viên giỏi Toán nhưng không giỏi tiếng Anh",

A_4: " Chọn được sinh viên giỏi tiếng Anh hay nhưng không giỏi Toán",

A_5: " Chọn được sinh viên không giỏi cả hai môn Toán và tiếng Anh".

Định nghĩa cổ điển

Xét một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, trong đó giả thiết rằng các kết cục ω_i là đồng khả năng xảy ra.

Với mỗi biến cố A, đại lượng

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},}$$

được gọi là **xác suất (probability)** của A.

Ví dụ 5:

Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất một lần. Tính xác suất để:

a) xuất hiện mặt một chấm.

b) số chấm xuất hiện là số chẵn.

Ví dụ 6:

Một kiện hàng có 100 sản phẩm cùng loại, trong đó 5 sản phẩm bị lỗi. Từ kiện hàng này, chọn ngẫu nhiên ra 7 sản phẩm. Tính xác suất để chọn được 5 sản phẩm không bị lỗi.

Ví dụ 7:

Rút ngẫu nhiên 5 lá bài từ bộ bài gồm 52 lá. Tính xác suất để rút được:

a) 5 lá bài cùng một chất. A♥ 2♥ 3♥ 4♥ 5♥

b) 5 lá bài liên tiếp nhau. 10♥ J♦ Q♣ K♠ A♥

Định nghĩa theo kiểu tần suất

Giả sử A là một biến cố trong một phép thử ngẫu nhiên. Tiến hành thực hiện phép thử trên n lần độc lập. Gọi f_n là số lần mà A xảy ra. Khi đó, tỷ số

$$\boxed{p_n = \frac{f_n}{n},}$$

được gọi là **tần suất** xảy ra của biến cố A trong n lần thực hiệp phép thử.

Ta định nghĩa

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} p_n,}$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

Lưu ý: Trong thực tế, với n đủ lớn,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx p_n.}$$

Ví dụ 8:

Liên quan đến bài toán xác định xác suất để nhận được mặt số khi thảy một đồng tiền xu cân đối đồng chất 1 lần, một số nhà khoa học đã tiến hành thực nghiệm như sau:

Nhà khoa học	Số lần thảy	Số lần được mặt số	Tần suất
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Dựa vào các kết quả thực nghiệm trên, ta có thể kết luận rằng xác suất để nhận được mặt số khi thảy một đồng tiền xu xấp xỉ 0,5.

Ví dụ 9:

Theo thống kê trong giai đoạn 1997-2007, trên thế giới có 18 triệu chuyến bay, trong đó xảy ra 24 tai nạn máy bay chết người. Vậy xác suất để đi máy bay bị tai nạn chết là $24/18000000 = 0{,}000133\%$.

- Với hai biến cố A, B tùy ý, ta có

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).}$$

Đặc biệt, nếu A, B là các biến cố **xung khắc** thì

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).}$$

- Tổng quát hơn, nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố đôi một **xung khắc** thì

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).}$$

- Với một biến cố A tùy ý, ta có

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A}).}$$

Một số tính chất cơ bản của xác suất

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1,$ với mọi biến cố A;
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0;$
- Nếu A kéo theo B thì $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- Nếu A tương đương B thì $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

Ví dụ 10:

Cho A và B là các biến cố, trong đó

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Tính các xác suất sau:

$\mathbb{P}(A \cap B)$; $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$; $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$; $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$; $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Ví dụ 11:

Một cuộc điều tra tại một đô thị cho kết quả: 20% dân số dùng một loại sản phẩm A, 50% dân số dùng một loại sản phẩm B, 15% dân số dùng cả hai loại A và B. Chọn ngẫu nhiên một người dân trong đô thị đó, tìm xác suất để:

a) người đó dùng ít nhất một trong hai loại sản phẩm A, B.

b) người đó không dùng sản phẩm A cũng không dùng sản phẩm B.

c) Người đó chỉ dùng đúng một trong hai loại sản phẩm A hoặc B.

d) Người đó chỉ dùng duy nhất sản phẩm A.

- Cho A, B là hai biến cố. Xác suất để A xảy ra **nếu biết** B **xảy ra** được ký hiệu và xác định bởi

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}, \quad \left(\mathbb{P}\left(B\right) > 0\right).}$$

Ví dụ 12:

Một hộp kín đựng 100 lá thăm, trong đó có 5 lá thăm trúng thưởng. Một người rút ngẫu nhiên 2 lá thăm từ hộp theo kiểu lần lượt từng lá, không hoàn lại. Nếu người đó rút được lá thăm trúng thưởng ở lần thứ nhất thì cơ hội để người đó không rút được lá thăm trúng thưởng ở lần thứ hai là bao nhiêu?

Ví dụ 13:

Một nhóm 10 sinh viên gồm 3 nam và 7 nữ, trong đó có 2 nam 18 tuổi và 3 nữ 18 tuổi. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên từ nhóm đó. Gọi biến cố A: "Sinh viên được chọn là nữ", B: "Sinh viên được chọn là 18 tuổi". Tính $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|A)$.

Tính chất

- $0 \leq \mathbb{P}\left(A|B\right) \leq 1, \quad \mathbb{P}\left(B|B\right) = 1.$
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}|B\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A|B\right).$
- $\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots |B\right) = \mathbb{P}\left(A_1|B\right) + \mathbb{P}\left(A_2|B\right) + \cdots.$

với bất kỳ họ vô hạn $A_1, A_2, \ldots$ các biến cố đôi một **xung khắc** nhau.

Cho các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa $\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) > 0$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}).}$$

(Công thức nhân xác suất)

Ví dụ 14:

Môn Xác suất - Thống kê có 100 sinh viên đăng ký học. Vào buổi học thứ hai, giảng viên (GV) đặt ra 1 câu hỏi và gọi ngẫu nhiên một sinh viên (SV) nào đó trả lời để kiểm tra mức độ tiếp thu bài cũ. Nếu SV đó chưa trả lời đúng thì GV sẽ tiếp tục gọi ngẫu nhiên một SV kế tiếp trả lời, và việc này sẽ tiếp diễn cho đến khi có SV trả lời đúng thì dừng. Cho biết trong lớp chỉ có 10 SV xem bài cũ. Tính xác suất để GV dừng việc gọi ở lần gọi SV thứ ba.

Ví dụ 15:

Một hộp có 10 sản phẩm, phẩm, gồm 8 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm. Một người lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm cho tới khi gặp phế phẩm thì dừng.Tính xác suất để người này dừng lại ở lần thứ ba.

4.6. Họ các biến cố độc lập

- Ta nói hai biến cố A, B là **độc lập (independent)** nếu

$$\boxed{\mathbb{P}\left(AB\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right).}$$

Ví dụ 16:

Tung 2 đồng tiền xu cân đối đồng chất. Gọi các biến cố:

A: " đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt số",

B: " đồng xu thứ hai xuất hiện mặt hình",

C: " có ít nhất một mặt số xuất hiện".

Hỏi A và B có độc lập không? A và C có độc lập không?

Mệnh đề

Các khẳng định sau tương đương:

a) A, B độc lập;

b) $\overline{A}$, B độc lập;

c) A, $\overline{B}$ độc lập;

d) $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập;

Ví dụ 17:

Hai sinh viên A và B làm bài thi môn Xác suất – Thống kê một cách độc lập với nhau, với khả năng thi đậu lần lượt là 0,9 và 0,7. Tính xác suất để chỉ có đúng một người thi đậu trong hai người này.

- Họ các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ $(n > 2)$ được gọi là **độc lập lẫn nhau (mutually independent)** nếu mỗi biến cố trong họ là độc lập với tất cả các phần giao hữu hạn của các biến cố còn lại.

Mệnh đề

Nếu $A_1, \ldots, A_n$ là các biến cố độc lập lẫn nhau thì

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n).}$$

Ví dụ 18:

Một chương trình máy tính được kiểm tra bởi 5 lần kiểm tra độc lập nhau. Xác suất phát hiện ra một lỗi của các lần kiểm tra này lần lượt là 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Giả sử chương trình trên chứa một lỗi. Tính xác suất để lỗi này được phát hiện bởi ít nhất một lần kiểm tra.

Một các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ được gọi là **đầy đủ** nếu

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega, \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \\ \mathbb{P}\left(A_i\right) > 0, \quad \forall i. \end{cases}$$

Giả sử các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ lập thành một **họ đầy đủ**. Khi đó,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A|A_n).}$$

Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 19:

Một thùng kín đựng 100 lá thăm, trong đó có 5 lá thăm trúng thưởng. Có hai người lần lượt rút thăm, mỗi người rút một lá và không hoàn lại. Tính xác suất để người thứ hai rút được lá thăm trúng thưởng.

Giả sử các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ lập thành một **họ đầy đủ**. Khi đó, với mọi biến cố A thỏa $\mathbb{P}(A) > 0$, ta có

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(A|A_k)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A|A_n)}.}$$

Công thức Bayes

Ví dụ 20:

Một bệnh nhân được chuẩn đoán là mắc một trong hai bệnh A và B. Thống kê tình hình mắc bệnh trong nhiều năm cho thấy xác suất để bệnh nhân này mắc bệnh A cao gấp đôi xác suất mắc bệnh B. Các bác sĩ thực hiện một xét nghiệm y học T cho bệnh nhân này. Nếu bệnh nhân mắc bệnh A thì xét nghiệm T cho kết quả dương tính với xác suất 0,9; nếu bệnh nhân mắc bệnh B thì xét nghiệm T cho kết quả dương tính với xác suất 0,8.

a) Xác suất để xét nghiệm T cho kết quả dương tính là bao nhiêu?

b) Nếu xét nghiệm T cho kết quả dương tính thì xác suất để bệnh nhân đó mắc bệnh A là bao nhiêu?

Ví dụ 21:

Ba máy A, B và C được sử dụng để sản xuất cùng một sản phẩm. Máy A sản xuất 28% sản phẩm, máy B sản xuất 35%, và máy C phần còn lại. Trong số các sản phẩm sản xuất bằng máy A, 8% là bị lỗi. Tương tự như vậy, 5% sản phẩm từ B và 2% từ C là bị lỗi. Một sản phẩm được chọn ngẫu nhiên.

a) Xác suất sản phẩm được chọn bị lỗi là bao nhiêu?

b) Nếu biết sản phẩm được chọn bị lỗi, xác suất nó được sản xuất ở máy A là bao nhiêu?

Ví dụ 1:

a) Tung một đồng tiền xu cân đối, đồng chất 1 lần.

$$\Omega = \{H, S\}$$

b) Tung một con xúc xắc 1 lần. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) Tung một con xúc xắc 2 lần.

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); \dots; (5,6); (6,6)\}$$

d) Xét điểm số của một sinh viên khi thi kết thúc môn Xác suất thống kê (lấy điểm nguyên).

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

return

Ví dụ 2:

Từ một nhóm người gồm 6 nam và 4 nữ, ta chọn ngẫu nhiên 5 người. Gọi các biến cố:

A: " chọn được ít nhất một nam",

$$\Omega = \{(1 \text{ Nam}, 4 \text{ Nữ}); (2 \text{ Nam}, 3 \text{ Nữ}); (3 \text{ Nam}, 2 \text{ Nữ}); (4 \text{ Nam}, 1 \text{ Nữ}); (5 \text{ Nam})\}$$

B: " chọn được 5 nữ",

$$\Omega=\{\emptyset\}$$

C: " chọn được 3 nam".

$$\Omega = \{3 \text{ Nam}, 2 \text{ Nữ}\}$$

Biến cố A là biến cố chắc chắn, B là biến cố không thể, C là biến cố ngẫu nhiên.

return

Ví dụ 3:

Một hộp kín đựng 10 bi, gồm 6 bi đỏ và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 bi. Gọi các biến cố:

A: " Lấy được ít nhất 1 bi đỏ",

A = {(1 đỏ, 2 đen); (2 đỏ, 1 đen); (3 đỏ)}

B: " Lấy được 3 bi đỏ",

B = {(3 đỏ)}

C: " Lấy được tối đa 2 bi đen".

C = {(1 đỏ, 2 đen); (2 đỏ, 1 đen); (3 đỏ)}

Xác định mối quan hệ (kéo theo, tương đương) của:

a) B kéo theo A.

b) A tương đương C.

return

Ví dụ 4:

Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp học. Gọi các biến cố:

A: " Chọn được sinh viên giỏi Toán",

B: " Chọn được sinh viên giỏi tiếng Anh".

Hãy mô tả các biến cố sau bằng ký hiệu:

A_1: " Chọn được sinh viên giỏi Toán hay tiếng Anh hay giỏi Toán và tiếng Anh",

$$A_1 = A \cup B = A + B$$

A_2: " Chọn được sinh viên giỏi cả Toán và tiếng Anh",

$$A_2 = A \cap B = AB$$

return

A_3: " Chọn được sinh viên giỏi Toán nhưng không giỏi tiếng Anh",

$$A_3 = A \cap \overline{B} = A\overline{B}$$

A_4: " Chọn được sinh viên giỏi tiếng Anh nhưng không giỏi Toán",

$$A_4 = \overline{A} \cap B = \overline{A}B$$

A_5: " Chọn được sinh viên không giỏi cả hai môn Toán và tiếng Anh".

$$A_5 = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{AB}$$

return

Ví dụ 5:

Gieo 1 con xúc xắc cân đối, đồng chất 1 lần. Tính xác suất để:

a) xuất hiện mặt một chấm.

b) số chấm xuất hiện là số chẵn.

Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Gọi A là biến cố "số chấm xuất hiện là mặt một chấm". Khi đó, $A = \{1\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

b) Gọi B là biến cố " số chấm xuất hiện là số chẵn". Khi đó, $B = \{2, 4, 6\}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

return

Ví dụ 6:

Một kiện hàng có 100 sản phẩm cùng loại, trong đó 5 sản phẩm bị lỗi. Từ kiện hàng này, chọn ngẫu nhiên ra 7 sản phẩm. Tính xác suất để chọn được 5 sản phẩm không bị lỗi.

Gọi A: "Trong số 7 sản phẩm lấy ra có 5 sản phẩm không bị lỗi"
Mỗi cách lấy ngẫu nhiên k sản phẩm từ kiện hàng n sản phẩm là một tổ hợp chập k của n phần tử. Do đó, $|\Omega| = C_n^k = C_{100}^7$.
Có C_{95}^5 cách lấy ra 5 sản phẩm không bị lỗi từ 95 sản phẩm không bị lỗi trong kiện hàng.
Có C_5^2 cách lấy ra 2 sản phẩm bị lỗi từ 5 sản phẩm bị lỗi trong kiện hàng. Theo quy tắc nhân, $|A| = C_{95}^5 C_5^2$. Do đó,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{95}^5 C_5^2}{C_{100}^7} = 0,0362$$

▸ return

Ví dụ 7:

Rút ngẫu nhiên 5 lá bài từ bộ bài gồm 52 lá. Tính xác suất để rút được:

a) 5 lá bài cùng một chất.

b) 5 lá bài liên tiếp nhau.

Ta có $|\Omega| = C_n^k = C_{52}^5$.

a) Gọi A:" 5 lá bài cùng một chất"
Số cách lấy được 5 lá bài trong 13 lá bài cùng chất cơ (heart): C_{13}^5. Do bộ bài có 4 chất nên $|A| = 4C_{13}^5$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4C_{13}^5}{C_{52}^5} = 0,00198$$

return

Ví dụ 7:

b) Gọi B: "5 lá bài liên tiếp nhau"
Số cách lập thành bộ 5 lá liên tiếp nhau là 8 cách vì
3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A
Ở mỗi cách, theo quy tắc nhân ta có 4^5 cách lập thành bộ 5 lá liên tiếp nhau. Do đó, $|B| = 8.4^5$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8.4^5}{C_{52}^5} = 0,00315$$

return

Ví dụ 10:

Cho A và B là các biến cố, trong đó

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Áp dụng công thức cộng xác suất:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

return

	A	$\overline{A}$	
B	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{2}$
$\overline{B}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$
	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	1

Tính các xác suất sau:

$\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\dfrac{1}{4}$; $\quad\mathbb{P}\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\dfrac{11}{12}$;

$\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{5}{12}$; $\quad\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 11:

Gọi A: "người dân sử dụng sản phẩm A"
B: "người dân sử dụng sản phẩm B"

Theo đề bài ta có, $\mathbb{P}(A) = 0,2$, $\mathbb{P}(B) = 0,5$ và $\mathbb{P}(AB) = 0,15$.

a) người đó dùng ít nhất một trong hai loại sản phẩm A, B.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A+B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \\ &= 0,2 + 0,5 - 0,15 = 0,55\end{aligned}$$

b) người đó không dùng sản phẩm A cũng không dùng sản phẩm B.

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A+B) = 1 - 0,55 = 0,45$$

return

c) Người đó chỉ dùng đúng một trong hai loại sản phẩm A hoặc B

Gọi C: "Người đó chỉ dùng đúng một trong hai loại sản phẩm A hoặc B" .

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A+B) - \mathbb{P}(AB) = 0,55 - 0,15 = 0,4$$

d) Người đó chỉ dùng duy nhất sản phẩm A.

$$\mathbb{P}\left(A\overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = 0,2 - 0,15 = 0,05$$

Ví dụ 12:

Dễ dàng thấy rằng xác suất để rút được lá thăm trúng thưởng ở lần thứ nhất là $\frac{5}{100} = 0,05$. Theo đề bài do rút theo kiểu lần lượt không hoàn lại và ta đã biết được thông tin rằng lần thứ nhất bốc được thăm trúng thưởng thì xác suất lấy được thăm không trúng thưởng ở lần thứ hai là $\frac{95}{99}$.

▸ return

Ví dụ 13:

Có 100 SV, 10 SV xem bài cũ.

Gọi A$_i$: "sinh viên thứ i trả lời đúng câu hỏi của GV".

Gọi B: "GV dừng việc gọi ở lần gọi SV thứ ba"

Biểu diễn biến cố B qua A$_i$, khi đó,

$$\begin{aligned} B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \Rightarrow \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right) \\ &= \frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99}\cdot\frac{10}{98} = 0,0826 \end{aligned}$$

▸ return

Ví dụ 16:

Không gian mẫu: $\Omega = \{SS, SH, HS, HH\}$

Theo đề bài ta có: $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$.

$\mathbb{P}(AB) = \frac{1}{4}, \quad (AB = \{SH\})$

Ta thấy $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(AB)$

Vậy biến cố A và B có độc lập.

$\mathbb{P}(AC) = \frac{1}{2}, \quad (AC = \{SS, SH\})$

Ta thấy $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \mathbb{P}(AC)$

Vậy biến cố A và C không độc lập. return

Ví dụ 18:

Gọi A_i: "chương trình máy tính được phát hiện lỗi ở lần kiểm tra thứ i", $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Theo đề ta có, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 là một họ các biến cố độc lập lẫn nhau.

Ta có, $\mathbb{P}(A_1) = 0,1$, $\mathbb{P}(A_2) = 0,2$, $\mathbb{P}(A_3) = 0,3$, $\mathbb{P}(A_4) = 0,4$, $\mathbb{P}(A_5) = 0,5$.

Gọi B: "chương trình máy tính được phát hiện lỗi bởi ít nhất một lần kiểm tra".

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_3}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_4}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_5}\right) \\ &= 1 - 0,9 \times 0,8 \times 0,7 \times 0,6 \times 0,5 = 0,8488\end{aligned}$$

return

Ví dụ 19:

Gọi A_1: "người thứ nhất rút được thăm trúng thưởng",

A_2: "người thứ nhất không rút được thăm trúng thưởng".

Họ $\{A_1, A_2\}$ là đầy đủ với $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{5}{100} = 0,05;$

$\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{95}{100} = 0,95$

Gọi A: "người thứ hai rút được thăm trúng thưởng".

Ta có: $\mathbb{P}(A|A_1) = \dfrac{4}{99}; \mathbb{P}(A|A_2) = \dfrac{5}{99}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A|A_2)$

$= 0,05 \times \dfrac{4}{99} + 0,95 \times \dfrac{5}{99} = 0,05.$ return

Ví dụ 20:

Gọi A: "bệnh nhân mắc bệnh A"; B: "bệnh nhân mắc bệnh B".

Họ $\{A, B\}$ là đầy đủ với $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

Gọi T: "xét nghiệm T cho kết quả dương tính".

Ta có: $\mathbb{P}(T|A) = 0,9; \mathbb{P}(T|B) = 0,8$

a) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(T|A) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(T|B)$$

$$= \frac{2}{3} \times 0,9 + \frac{1}{3} \times 0,8 = \frac{13}{15}.$$

return

b) Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(A|T) = \frac{\mathbb{P}(AT)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(T|A)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(T|A) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(T|B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times 0,9}{\frac{2}{3} \times 0,9 + \frac{1}{3} \times 0,8} = \frac{9}{13}$$